جلسه دوم: معرفی زبان وسیستم اصل موضوعی

Language of SA and it’s Axiomatic System

گزاره چیست؟
آیا دو عبارت زیر، دو گزاره متفاوت را بیان می کنند؟

«برف سید است»

«Snow is white»

connectives-ادات یا عملگرهای منطقی

در زبان طبیعی	نام	نماد
....و....	Conjunction عطف	$\wedge$
....یا....	Disjunction فصل	$\vee$
چنین نیست که...	Negation نقض	$\sim$
اگر....آنگاه...	Conditional شرط	$\supset$
....اگر و تنها اگر....	Biconditional دو شرطی	$\equiv$

عطف – conjunction

1. $\underbrace{\boxed{\text{امروز هوا ابری است}}}^{R}$ و $\boxed{\text{من خوشحالم.}}^{P}$ ... $\wedge$ $\qquad P \wedge R$

2. حسین و حسن خوابیدند = حسین خوابید و حسن خوابید. $\qquad S \wedge T$

3. با اینکه تابستان است اما هوا گرم نیست. $\qquad V \wedge U$

4. سعید و زینب ازدواج کردند. ؟؟؟؟؟

5. سعید مرد و او را قبر کردند. ؟؟؟؟؟

فصل– Disjunction

1. مجموعه a یا عضو x است یا عضو y .

$P \vee R$

2. امروز یا شنبه است یا یکشنبه.

$S \vee T$

نقض– Negation

1. حسن به مدرسه نمی رود . $\sim P$
2. اینطور نیست که او آدم بدی باشد. $\sim S$
3. امروز یا شنبه است یا یکشنبه. $(S \wedge \sim T) \vee (T \wedge \sim S)$

Conditional – شرط

1. اگر $\underbrace{\boxed{\text{باران ببارد}}}^{P}$ $\boxed{\text{زمین خیس می شود.}}^{R}$

$P \supset R$

2. اگر عددی m زوج نباشد آنگاه m فرد است.

$\sim S \supset U$

only if , unless–«مگر اینکه» ،«تنها اگر»

1. تنها اگر $\underbrace{\boxed{\text{به درس توجه کنید}}}^{R}$ $\underbrace{\boxed{\text{پاس می شوید.}}}^{P}$ $P \supset R$

2. $\overbrace{\boxed{\text{درس را پاس نمی شوید}}}^{P}$ مگر اینکه $\overbrace{\boxed{\text{توجه کنید.}}}^{R}$ $\sim P \supset R$

در واقع توجه به درس، شرط لازم ولی نه کافی برای پاس شدن است

دوشرطی–Biconditional

1. سعید مجرد است اگر و تنها اگر ازدواج نکرده باشد. $P \equiv R$

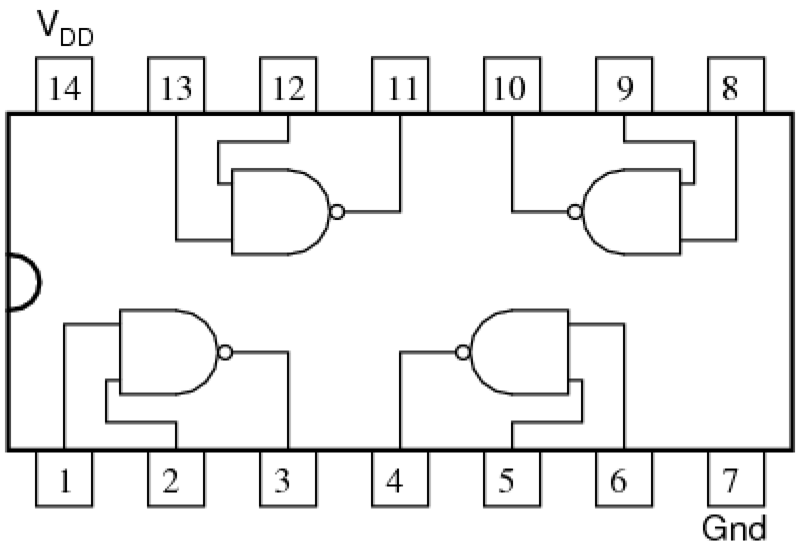
2. عدد m زوج است اگر و تنها اگر m بر ۲ تقسیم پذیر باشد. $S \equiv U$

برخی عملگر های دیگر

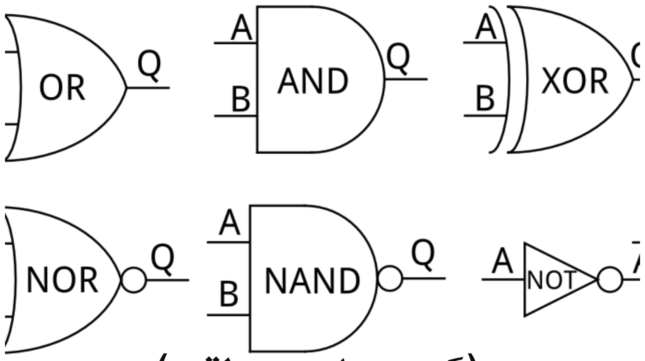
Sheffer Stroke , NAND: $P|R =_{df} \sim(P \wedge R)$

NOR: $P \oplus R =_{df} \sim(P \vee R)$

"Pinout," or "connection" diagram for the 4011 quad NAND gate



توجه: با عملگر شفر میتوان تمام عملگرهای منطقی دیگر را تعریف کرد.



(گیت های منطقی)

سوال: آیا کلماتی مانند «سپس» یا «قبل از» می توانند عملگر منطقی محسوب شوند؟

تمایز بین «نحو» و «معناشناسی»

Logic

نحو

Syntax

Proof

Theorem

Proof Theory

$\vdash$

معناشناسی

Semantics

Truth

Tautology

Model Theory

$\models$

تمایز بین «نحو» و «معناشناسی»

Logic

نحو

Syntax

Proof
Theorem
Proof Theory

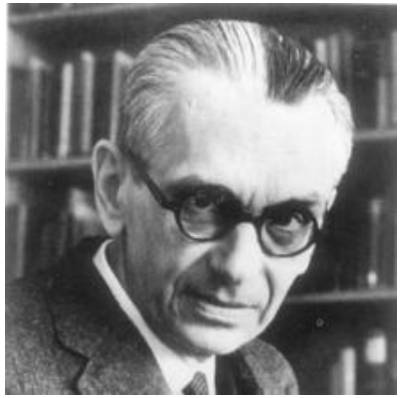
$\vdash$

معناشناسی

Semantics

Truth
Tautology
Model Theory

$\vDash$



Kurt Gödel proved completeness of SA in 1929

زبان S_A :

$$Lang = \underbrace{\{A_0, A_1, A_2 ...\}}_{\text{جمله نشانه ها}} \cup \underbrace{\{\sim, \supset\}}_{\text{ادات منطقی}} \cup \underbrace{\{(\,,\,)\}}_{\text{علائم نشانه گذاری}}$$

قرارداد: گاه به جای A_0,A_1, A_2... از نمادهای $P, Q, R ... P', Q', R$ استفاده می کنیم

زبان S_A :

$$Lang^* = String = \{x_0 x_1\, x_2 \ldots x_n \mid x_i \in Lang\}$$

که i و n جز N هستند و $0 \leq i \leq n$.

مجموعه $String$ برابر با تمامی جایگشت های متناهی از نماد های $Lang$ است.
برخی از اعضای مجموعه $String$:

$A_0,\qquad A_{12}A_0(,\qquad ((((\wedge,\qquad (A_5 \supset A_5),\qquad \sim\sim \wedge$

زبان S_A :

$$Wff = \begin{cases} 1:.\ \varphi \in String\ , \varphi = A_n \quad \forall n \in N \\ 2: \varphi, \psi \in Wff \quad \Rightarrow (\varphi \supset \psi) \in Wff \\ 3: \varphi \in Wff \quad \Rightarrow \sim\varphi \in Wff \end{cases}$$

مجموعه بالا را مجموعه خوش ساخت میناميم، φ,ψ فرا متغيير در فرا زبان هستند.
به وضوح $Wff \subset String$ است. برخی از اعضای Wff:

$$A_0, \qquad \sim A_1 \qquad (A_5 \supset \sim A_5), \qquad (A_1 \supset A_2) \supset \sim A_2$$

زبان S_A :

قرارداد: گاه برای فرمول های مولکولی پرانتز خارجی را نمیگذاریم، و در عباراتی که پرانتز تو در تو تکرار شده است به جای آن براکت « $\{\}$ » استفاده میکنیم.

تعریف :

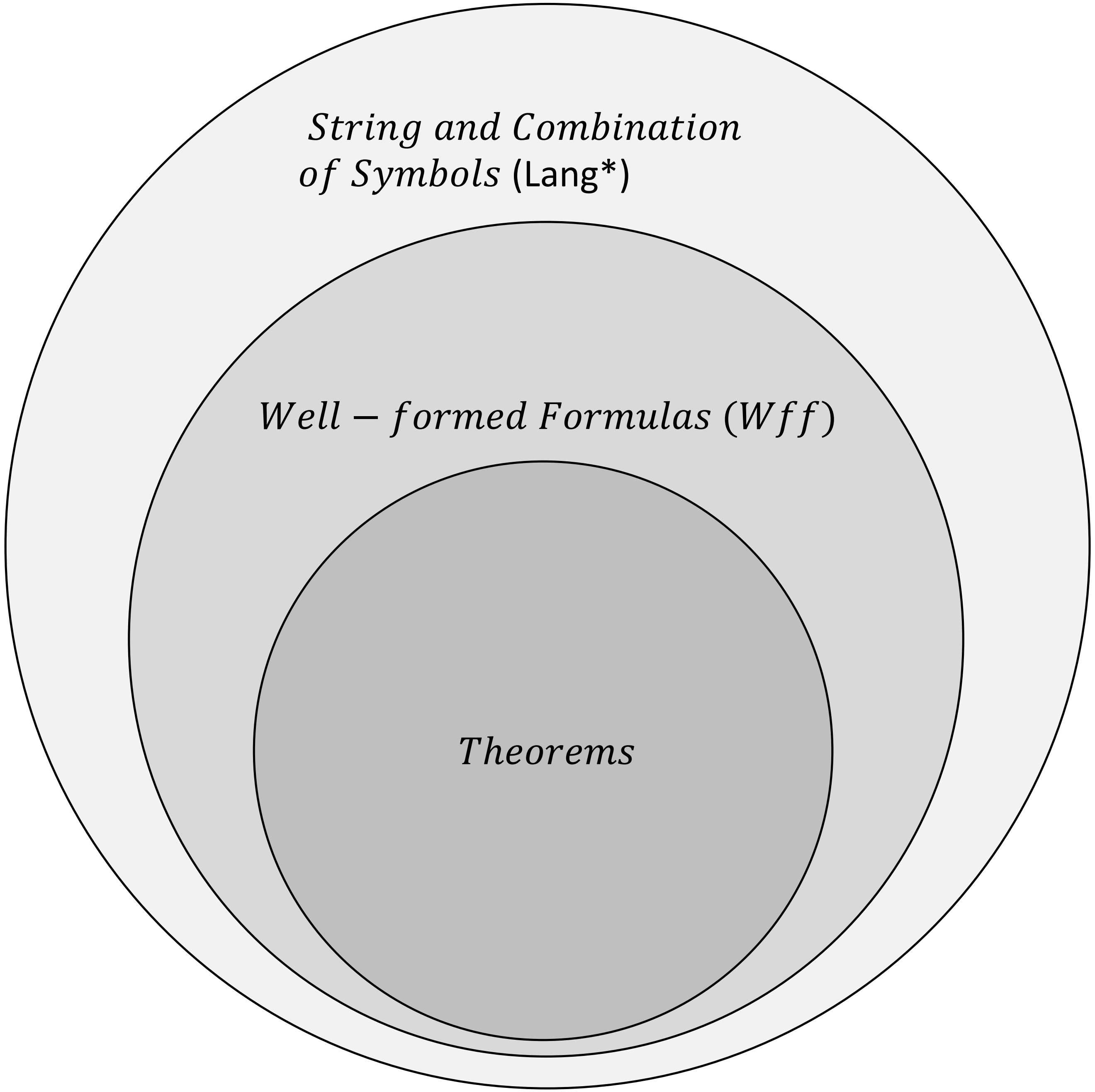
$$(\varphi \vee \psi) =_{df} (\sim\varphi \supset \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) =_{df} \sim(\varphi \supset \sim\psi)$$

$$(\varphi \equiv \psi) =_{df} \sim((\varphi \supset \sim\psi) \supset \sim(\varphi \supset \sim\psi))$$

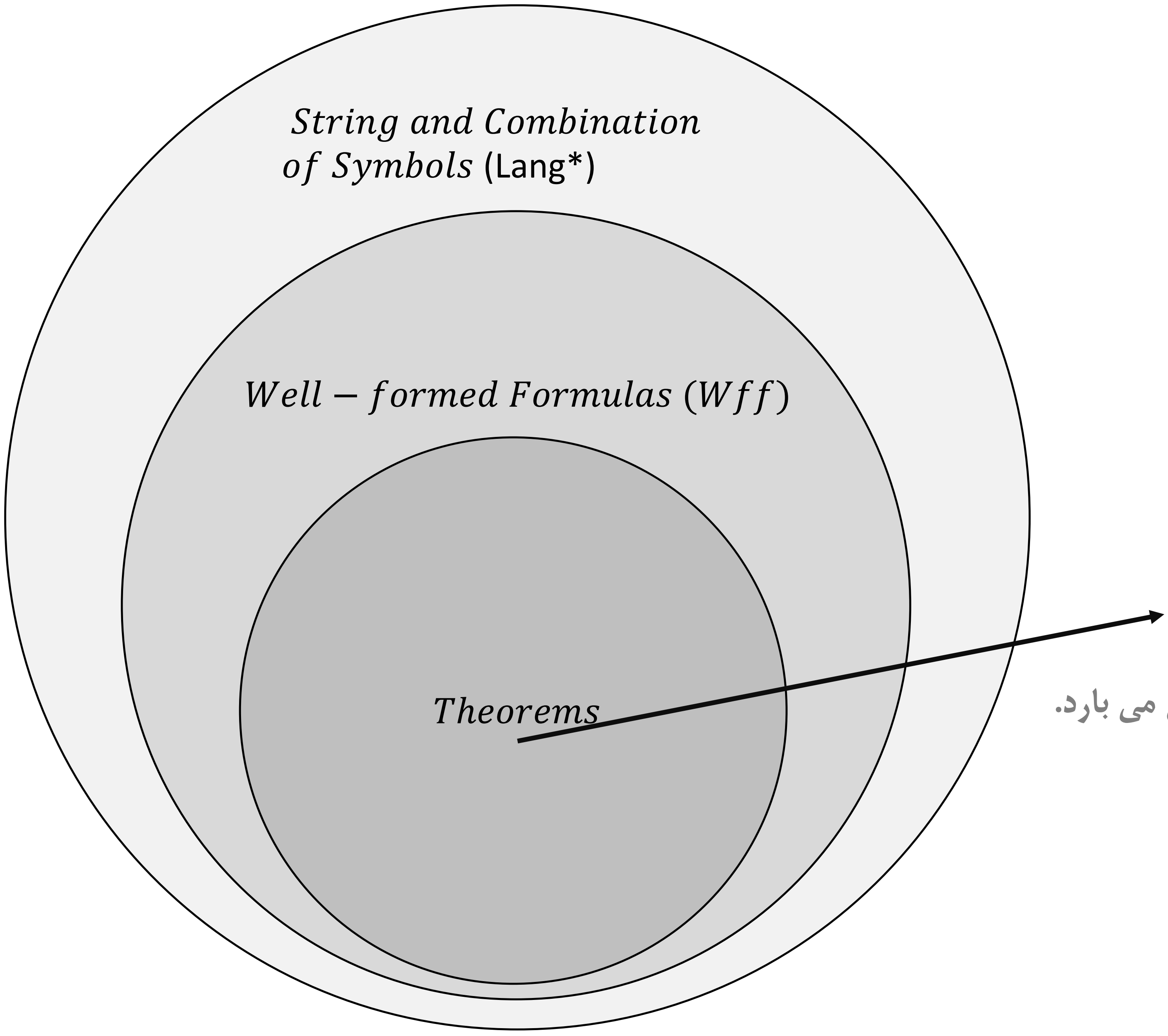
مانند عملگر شفر با عملگرهای $\sim$ و $\supset$ نیز بقیه عملگرها را میتوان تعریف کرد.

زبان S_A :



$String\ and\ Combination$
$of\ Symbols$ (Lang*)
$Well - formed\ Formulas\ (Wff)$
$Theorems$

زبان S_A :



$(A_5 \supset A_5)$

اگر باران می بارد آنگاه باران می بارد.

سیستم
اصل موضوعی S_A :

سیستم اصل موضوعی (Axiomatic) چیست؟

مجموعه ای از گزاره های پایه یا اصل(Axiom)،
که خود بدیهی محسوب می شوند و اثباتی ندارند،
ولی به وسیله آنها و قواعدی می توان جملات جدید استنتاج
کرد.

سیستم اصل موضوعی S_A :

نمونه از سیستم اصل موضوعی، اصول موضوعه حساب پئانو:

اصل مقدار اولیه: یک شی خاص وجود دارد که 0 نام دارد، و 0 یک عدد طبیعی است.

اصل تالی: برای هر عدد طبیعی n دقیقاً یک عدد طبیعی وجود دارد که آن را تالی می گویند، $S(n)$.

اصل مقدم: 0 تالی هیچ عددی نیست، و همه اعداد به جز 0 تالی عددی هستند که آن را مقدم آن عدد می‌نامیم. مثلاً وقتی دو عدد a و b داشته باشیم، اگر b تالی a باشد آنگاه a مقدم b است.

اصل یکتایی: هیچ دو عدد طبیعی تالی مشترکی ندارند.

اصول تساوی: اعداد می‌توانند برای تساوی مقایسه شوند. این عمل سه قاعده دارد: تساوی بازتابی است، یعنی هر عدد با خودش مساوی است؛ تساوی تقارنی است، یعنی اگر عدد a مساوی با b باشد آنگاه b=a . و تساوی متعدی است، یعنی اگر a=b و b=c آنگاه a=c.

اصل استقرا: برای یک جمله مانند P، P برای تمام اعداد صادق است اگر

سیستم
اصل موضوعی S_A :

Axioms

$$\begin{cases} A1: \varphi \supset (\psi \supset \varphi) \\ A2: ((\varphi \supset (\psi \supset \theta)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \theta)) \\ A3: ((\sim\varphi \supset \sim\psi) \supset (\psi \supset \varphi)) \end{cases}$$

Rule(s)

$$\begin{cases} (\varphi \supset \psi) \\ \underline{\ \varphi \qquad\qquad\qquad} \\ \therefore \psi \end{cases}$$

MP (Modus Ponens)
وضع مقدم

عبارات φ و ψ و θ مربوط به فرازبان هستند و میتوانند نماینده هر جمله خوش ساخت باشند.

سیستم
اصل موضوعی S_A :

برهان (Proof) :

اگر Σ به عنوان مقدمات زیرمجموعه ای از Wff باشد، آنگاه
دنباله (یا رشته) متناهی از اعضای Wff را برهان می نامیم آگر هر فرمول از رشته:

۱– یا عضو $Axioms$ باشد.

۲– مقدمه باشد، یعنی عضو Σ باشد.

۳–یا از تعاریف فرمول های قبل بدست آمده باشد.

٤–یا به وسیله قاعده MP از فرمول های قبل بدست آمده باشد.

اگر φ آخرین فرمول از دنباله باشد، آنگاه می نویسیم :

$$\Sigma \vdash \varphi$$

یعنی « φ از Σ اثبات پذیر است»

سیستم اصل موضوعی S_A :

قضیه(Theorem) :

اگر φ بدون هیچ مقدمه‌ای اثبات پذیر باشد، آنگاه φ را یک قضیه می نامیم.
یا به عبارتی اگر داشته باشیم $\Sigma \vdash \varphi$ و $\Sigma = \emptyset$.

آنگاه مینویسیم: $\vdash \varphi$

سیستم اصل موضوعی S_A :

Axioms
A1: $\varphi \supset (\psi \supset \varphi)$
A2: $((\varphi \supset (\psi \supset \theta)) \supset ((\varphi \supset \psi) \supset (\varphi \supset \theta))$
$A3$: $((\sim\varphi \supset \sim\psi) \supset (\psi \supset \varphi))$

آیا $P \supset P$ یک قضیه است؟

1 $P \supset [(P \supset P) \supset P]$	A1, φ=P, ψ =(P ⊃P)
2 $\{P \supset [(P \supset P) \supset P]\} \supset \{[P \supset (P \supset P)] \supset (P \supset P)\}$	A2, φ=P, ψ =(P ⊃P), θ = P
3 $[P \supset (P \supset P)] \supset (P \supset P)$	**MP**: 1,2
4 $P \supset (P \supset P)$	A1, φ=P, ψ =P
5 $P \supset P$	**MP**: 3,4