□□□□□□□□□□□□□

Book · August 2004

1 author:

Zeshui Xu
Sichuan University

内 容 简 介

多属性决策(或称之为有限个方案的多目标决策)是现代决策科学的一个重要组成部分,它的理论和方法在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域中有着广泛的应用,如:投资决策、项目评估、工厂选址、投标招标、维修服务、武器系统性能评定、产业部门发展排序以及经济效益综合评价等.近年来,由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性,对不确定环境下的多属性决策问题研究已引起人们的极大关注.本书将介绍不确定多属性决策(包括不确定多属性群决策)方法及其在供应链管理、风险投资、教师质量评定、干部选拔、产品改造和虚拟企业领域中的合作伙伴选择等诸多方面的应用.本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学和系统工程专业的高年级本科生和研究生教材,并可作为工程技术人员、管理干部、教师以及有关方面学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

不确定多属性决策方法及应用/徐泽水著.—北京:清华大学出版社,2004.8
(不确定理论与优化丛书)
ISBN 7-302-08879-9

Ⅰ.不… Ⅱ.徐… Ⅲ.多目标决策 Ⅳ.C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 058485 号

出 版 者:清华大学出版社
http://www.tup.com.cn
社 总 机:010-62770175
地 址:北京清华大学学研大厦
邮 编:100084
客户服务:010-62776969
责任编辑:王海燕
封面设计:常雪影
印 刷 者:北京牛山世兴印刷厂
装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:170×230 印张:17 字数:308千字
版 次:2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 7-302-08879-9/C·15
印 数:1～3000
定 价:28.00 元

不确定理论与优化丛书

在运筹学、管理科学、信息科学、工业工程、航天技术以及军事等众多领域都存在着人为的或客观的不确定性，表现形式也多种多样，如随机性、模糊性、粗糙性以及多重不确定性. 辩证地讲，不确定性是绝对的，确定性是相对的. 不确定理论与优化不仅具有学术价值，而且具有广阔的应用前景. 为了促进不确定理论、不确定规划、算法及应用的学术交流与发展，清华大学出版社决定出版《不确定理论与优化丛书》. 本丛书将在编委会的指导下遴选书稿，指导思想是突出学术性、创新性、实用性. 既出版有独到见解的学术专著，又出版实用案例分析和研究生教材. 如您希望您的著作加入本丛书，请向编委会垂询. http://orsc.edu.cn/usc

丛 书 编 委 会

不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

第 1 卷:《不确定规划及应用》,刘宝碇,赵瑞清,王纲

第 2 卷:《不确定多属性决策方法及应用》,徐泽水

以下正在撰写:

《实用马氏决策过程》,刘克

《模糊集理论及应用》,张强,王昭

《模糊不确定性系统的建模与控制》,李少远,王昕

《物流管理非确定性模型与算法》,唐加福

《模糊环境中的生产计划方法》,唐加福,董颖,汪定伟

《决策理论与方法》,徐玖平

序言

PREFACE

多属性决策(或称之为有限个方案的多目标决策)是现代决策科学的一个重要组成部分，它的理论和方法在工程设计、经济、管理和军事等诸多领域中有着广泛的应用，如：投资决策、项目评估、维修服务、武器系统性能评定、工厂选址、投标招标、产业部门发展排序和经济效益综合评价等．多属性决策的实质是利用已有的决策信息通过一定的方式对一组(有限个)备选方案进行排序并择优．它主要由两部分组成：(1)获取决策信息．决策信息一般包括两个方面的内容：属性权重和属性值(属性值主要有三种形式：实数、区间数和语言)，其中，属性权重的确定是多属性决策中的一个重要研究内容；(2)通过一定的方式对决策信息进行集结并对方案进行排序和择优．

由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性，近年来，对不确定环境下多属性决策方法的研究已引起人们的极大关注，并取得了丰硕成果．本书主要对国内外学者在不确定多属性决策领域中的最新研究成果进行介绍．为了便于读者理解和掌握多属性决策方法，本书对它们均进行了实例分析．

本书分为4篇：

第1篇介绍实数型不确定多属性决策方法及应用．其中：第1章介绍属性权重完全未知且属性值为实数的多属性决策方法及应用；第2章介绍属性权重以偏好信息形式给出且属性值为实数的多属性决策方法及应用；第3章介绍只有部分属性权重信息且属性值为实数的多属性决策方法及应用．

第2篇介绍区间型多属性决策方法及应用．其中：第4章介绍属性权重为实数且属性值为区间数的多属性决策方法及应用；第5章介绍属性权重完全未知且属性值为区间数的多属性决策方法及应用；第6章介绍只有部分属性权重信息且属性值为区间数的多属性决策方法及应用．

第 3 篇介绍语言型多属性决策方法及应用．其中：第 7 章介绍属性权重完全未知且属性值为语言的多属性决策方法及应用；第 8 章介绍属性权重为实数且属性值为语言的多属性决策方法及应用；第 9 章介绍属性权重和属性值均为语言的多属性决策方法及应用．

第 4 篇介绍不确定语言型多属性决策方法及应用．其中：第 10 章介绍属性权重完全未知且属性值为不确定语言的多属性决策方法及应用；第 11 章介绍属性权重为实数且属性值为不确定语言的多属性决策方法及应用；第 12 章介绍属性权重为区间数且属性值为不确定语言的多属性决策方法及应用．

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学和系统工程专业的高年级本科生和研究生教材，并可作为工程技术人员、管理干部、教师以及有关方面学者的参考书．

本书是在作者博士学位论文《几类多属性决策方法研究》的基础上经过修改、扩充而成的．在此，作者谨对东南大学经济管理学院达庆利教授、清华大学数学科学系刘宝碇教授给予的指导和帮助，致以衷心的感谢；同时，还要感谢国家自然科学基金委员会的资助．

徐泽水

2004 年 1 月于南京

一些常用的符号

$\boldsymbol{w},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\lambda},v,\boldsymbol{v}$	权重向量
x_i,X	方案,方案集
u_j,U	属性,属性集
$\boldsymbol{A},\widetilde{\boldsymbol{A}},\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_i,\widetilde{\boldsymbol{R}},\widetilde{\boldsymbol{R}}_i,\widetilde{\boldsymbol{Y}}$	决策矩阵
$\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^{(i)}$	可能度矩阵
$\mathbb{R},\mathbb{R}^+$	实数集,正实数集
$\boldsymbol{H}$	互反判断矩阵
$\boldsymbol{B}$	模糊互补判断矩阵
f_{ij},σ_{ij}	偏差项
F,σ	偏差函数
L	拉格朗日函数
CI,RI	一致性指标,一致性比例
$\lambda_{\max}$	最大特征值
d_i^+,e_i^+	正偏差
d_i^-,e_i^-	负偏差
$\tilde{a},\tilde{b}$	区间数
I_j	下标集
Ω	区间数集
$\vartheta_i,\tilde{\vartheta}_i$	主观偏好值
Prj	投影
$\langle\xi_i,\pi_i,\alpha_i\rangle$	三元数据
s_α,S	语言变量,语言标度
$\tilde{\mu},\tilde{\mu}_i$	不确定语言变量
$\overline{S},\widetilde{S}$	拓展的语言标度,不确定语言变量集

目录

CONTENTS

第 1 篇

实数型不确定多属性决策方法及应用

第1章

属性权重完全未知且属性值为实数的多属性决策方法及应用

多属性决策一般是利用已有的决策信息，通过一定的方式对一组（有限个）备选方案进行排序并择优. 在属性权重信息完全未知且属性值为实数的情况下如何进行决策？针对此问题，本章介绍一些常用的信息集结算子，如：加权算术平均（WAA）算子、加权几何平均（WGA）算子、有序加权平均（OWA）算子、有序加权几何平均（OWGA）算子、组合加权算术平均（CWAA）算子和组合加权几何平均（CWGA）算子等，基于这些算子，给出一些简洁实用的多属性决策方法. 另外，还分别介绍基于离差最大化、信息熵以及对方案有偏好的多属性决策方法. 本章对上述决策方法均进行了实例分析.

1.1 基于 OWA 算子的多属性决策方法

1.1.1 OWA 算子

为了方便起见，令 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$.

定义 1.1[263] 设 OWA：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n} w_j b_j, \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是与函数 OWA 相关联的加权向量，$w_j\in[0,1]$，$j\in N$，$\sum_{j=1}^{n} w_j=1$，且 b_j 是一组数据 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 中第 j 大的元素，$\mathbb{R}$ 为实数集，则称函数 OWA 是有序加权平均算子，也称为 OWA 算子.

上述算子的特点是：对数据$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$按从大到小的顺序重新进行排序并通过加权集结，而且元素α_i与w_i没有任何联系，w_i只与集结过程中的第i个位置有关（因此加权向量w也称为位置向量）.

例 1.1 设$w=(0.4,0.1,0.2,0.3)$为OWA算子的加权向量，$(7,18,6,2)$是一组数据，则

$$\mathrm{OWA}_w(7,18,6,2)=0.4\times 18+0.1\times 7+0.2\times 6+0.3\times 2=9.70.$$

OWA算子具有下列一些优良性质[263]：

定理 1.1 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是任一数据向量，$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中的元素按降序组成的向量，则

$$\mathrm{OWA}_w(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

证明 设

$$\mathrm{OWA}_w(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb'_j,$$

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j,$$

其中b'_j是数据组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$中第$j$大的元素，$b_j$是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第$j$大的元素. 由于$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中的元素按降序组成的向量，因此$b'_j=b_j,j\in N$. 定理证毕.

定理 1.2 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$和$(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)$是两个按降序排列的数据向量，且对任意$i\in N$，有$\alpha_i\geqslant\alpha'_i$，则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geqslant\mathrm{OWA}_w(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n).$$

证明 设

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j,$$

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb'_j,$$

其中b_j是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第$j$大的元素，$b'_j$是数据组$(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)$中第$j$大的元素. 由于$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$和$(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n)$是两个按降序排列的数据向量，因此$b_j=\alpha_j,b'_j=\alpha'_j,j\in N$，又因为$\alpha_i\geqslant\alpha'_i,i\in N$，所以$b_j\geqslant b'_j,j\in N$. 故

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geqslant\mathrm{OWA}_w(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n).$$

定理证毕.

推论 1.1（单调性） 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$和$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是任意两个数据向量，若对任意$i\in N$，有$\alpha_i\leqslant\beta_i$，则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\mathrm{OWA}_w(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n).$$

推论 1.2(置换不变性)　设$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的任一置换，则

$$\mathrm{OWA}_w(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

定理 1.3(幂等性)　设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是任一数据向量，若对任意 $i\in N$，有 $\alpha_i=\alpha$，则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha.$$

证明　由于$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，因此

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j=\sum_{j=1}^{n}w_j\alpha=\alpha\sum_{j=1}^{n}w_j=\alpha.$$

定理证毕.

定理 1.4　设 $w=w^*=(1,0,\cdots,0)$，则

$$\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\max_i(\alpha_i).$$

证明　根据定义 1.1，可得

$$\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j=b_1=\max_i(\alpha_i).$$

定理证毕.

定理 1.5　设 $w=w_*=(0,0,\cdots,1)$，则

$$\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\min_i(\alpha_i).$$

证明　根据定义 1.1，可得

$$\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j=b_n=\min_i(\alpha_i).$$

定理证毕.

定理 1.6　设 $w=w_{\mathrm{Ave}}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，则

$$\mathrm{OWA}_{w_{\mathrm{Ave}}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j.$$

定理 1.7　设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$为任一数据向量，则

$$\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geqslant\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\geqslant\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

证明

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}w_jb_1=b_1=\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j\geqslant\sum_{j=1}^{n}w_jb_n=b_n=\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

定理证毕.

下列结论[269]显然成立：

定理 1.8 若 $w_j=1, w_i=0$，且 $i\neq j$，则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=b_j,$$

其中 b_j 是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第 j 大的元素. 特别地，当 $j=1$ 时，有

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n);$$

当 $j=n$ 时，有

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

定理 1.9 若 $w_1=\alpha, w_i=0, i=2,\cdots,n-1, w_n=1-\alpha$，且 $\alpha\in[0,1]$，则

$$\alpha\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+(1-\alpha)\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

定理 1.10 (1) 若 $w_1=(1-\alpha)/n+\alpha, w_i=(1-\alpha)/n, i\neq 1$，且 $\alpha\in[0,1]$，则

$$\begin{aligned}&\alpha\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+(1-\alpha)\mathrm{OWA}_{w_{\mathrm{Ave}}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\\&=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\end{aligned}$$

特别地，当 $\alpha=0$ 时，

$$\mathrm{OWA}_{w_{\mathrm{Ave}}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n);$$

当 $\alpha=1$ 时，

$$\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

(2) 若 $w_i=(1-\alpha)/n, i\neq n, w_n=(1-\alpha)/n+\alpha$，且 $\alpha\in[0,1]$，则

$$\begin{aligned}&\alpha\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+(1-\alpha)\mathrm{OWA}_{w_{\mathrm{Ave}}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\\&=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\end{aligned}$$

特别地，当 $\alpha=0$ 时，

$$\mathrm{OWA}_{w_{\mathrm{Ave}}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n);$$

当 $\alpha=1$ 时，

$$\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

(3) 若 $w_1=[1-(\alpha+\beta)]/n+\alpha, w_i=[1-(\alpha+\beta)]/n, i=2,\cdots,n-1, w_n=[1-(\alpha+\beta)]/n+\beta, \alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha+\beta\leqslant 1$，则

$$\begin{aligned}&\alpha\mathrm{OWA}_{w^*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+\beta\mathrm{OWA}_{w_*}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+\\&[1-(\alpha+\beta)]\mathrm{OWA}_{w_{\mathrm{Ave}}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\end{aligned}$$

特别地，当 $\beta=0$ 时，即为情形(1)；当 $\alpha=0$ 时，即为情形(2).

定理 1.11 (1) 若

$$w_i=\begin{cases}0, & i<k,\\ \dfrac{1}{m}, & k\leqslant i<k+m,\\ 0, & i\geqslant k+m,\end{cases}$$

其中 k 和 m 是正整数，且 $k+m\leqslant n+1$，则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{m}\sum_{j=k}^{k+m-1}b_j,$$

其中 b_j 是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第 j 大的元素.

(2) 若

$$w_i=\begin{cases}0, & i<k-m,\\ \dfrac{1}{2m+1}, & k-m\leqslant i<k+m,\\ 0, & i\geqslant k+m,\end{cases}$$

其中 k 和 m 是正整数,且 $k+m\leqslant n+1$，$k\geqslant m+1$，则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{2m+1}\sum_{j=k-m}^{k+m-1}b_j,$$

其中 b_j 是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第 j 大的元素.

(3) 若

$$w_i=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & i\leqslant k,\\ 0, & i>k,\end{cases}$$

则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}b_j,$$

其中 b_j 是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第 j 大的元素.

(4) 若

$$w_i=\begin{cases}0, & i<k,\\ \dfrac{1}{(n+1)-k}, & i\geqslant k,\end{cases}$$

则

$$\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{(n+1)-k}\sum_{j=k}^{n}b_j,$$

其中 b_j 是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$中第 j 大的元素.

1.1.2　决策方法

下面介绍一种基于 OWA 算子的多属性决策方法[226]. 具体步骤如下:

步骤 1　对于某一多属性决策问题，设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为方案集，$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$为属性集，属性权重信息完全未知. 对于方案 x_i，按属性 u_j 进行测度，得到 x_i 关于 u_j 的属性值 a_{ij}，从而构成决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，如表 1.1 所示.

表 1.1　决策矩阵 A

	u_1	u_2	$\cdots$	u_m
x_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nm}

属性类型一般有效益型、成本型、固定型、偏离型、区间型、偏离区间型等[120]，其中效益型属性是指属性值越大越好的属性，成本型属性是指属性值越小越好的属性，固定型属性是指属性值越接近某个固定值 α_j 越好的属性，偏离型属性是指属性值越偏离某个固定值 β_j 越好的属性，区间型属性是指属性值越接近某个固定区间$[q_1^j,q_2^j]$（包括落入该区间）越好的属性，偏离区间型属性是指属性值越偏离某个固定区间$[q_1^j,q_2^j]$越好的属性．设 $I_i(i=1,2,\cdots,6)$分别表示效益型、成本型、固定型、偏离型、区间型、偏离区间型属性的下标集．为了消除不同物理量纲对决策结果的影响，决策时可按下列公式对决策矩阵 A 进行规范化处理：

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}}{\max\limits_i(a_{ij})},\quad i\in N,j\in I_1;\tag{1.2}$$

$$r_{ij}=\frac{\min\limits_i(a_{ij})}{a_{ij}},\quad i\in N,j\in I_2;\tag{1.3}$$

或者

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}-\min\limits_i(a_{ij})}{\max\limits_i(a_{ij})-\min\limits_i(a_{ij})},\quad i\in N,j\in I_1;\tag{1.2$'$}$$

$$r_{ij}=\frac{\max\limits_i(a_{ij})-a_{ij}}{\max\limits_i(a_{ij})-\min\limits_i(a_{ij})},\quad i\in N,j\in I_2;\tag{1.3$'$}$$

$$r_{ij}=1-\frac{a_{ij}-\alpha_j}{\max\limits_i|a_{ij}-\alpha_j|},\quad i\in N,j\in I_3;\tag{1.4}$$

$$r_{ij}=|a_{ij}-\beta_j|-\frac{\min\limits_i|a_{ij}-\beta_j|}{\max\limits_i|a_{ij}-\beta_j|-\min\limits_i|a_{ij}-\beta_j|},\quad i\in N,j\in I_4;\tag{1.5}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}1-\dfrac{\max(q_1^j-a_{ij},a_{ij}-q_2^j)}{\max[q_1^j-\min\limits_i(a_{ij}),\max\limits_i(a_{ij})-q_2^j]}, & a_{ij}\notin[q_1^j,q_2^j],\\ 1, & a_{ij}\in[q_1^j,q_2^j]\end{cases}\quad i\in N,j\in I_5;\tag{1.6}$$

$$r_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\max(q_1^j-a_{ij},a_{ij}-q_2^j)}{\max[q_1^j-\min\limits_i(a_{ij}),\max\limits_i(a_{ij})-q_2^j]}, & a_{ij}\notin[q_1^j,q_2^j],\\ 0, & a_{ij}\in[q_1^j,q_2^j],\end{cases}\quad i\in N,j\in I_6. \tag{1.7}$$

A 经过规范化处理后，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　利用 OWA 算子对各方案 $x_i(i\in N)$的属性值进行集结，求得其综合属性值 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$：

$$z_i(\boldsymbol{w})=\mathrm{OWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})=\sum_{j=1}^m w_j b_{ij},$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$是 OWA 算子的加权向量(可按 1.1 节中定理 1.8 定理 1.11 所给的方法适当地选取)，$w_j\geqslant 0,j\in M,\sum_{j=1}^m w_j=1$，且 b_{ij} 是 $r_{il}(l\in M)$ 中第 j 大的元素.

步骤 3　按 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$的大小对方案进行排序并择优.

1.1.3　实例分析

利用 1.1.2 节中的方法来解决投资银行对企业进行投资的问题.

例 1.2　投资银行拟对某市 4 家企业(方案)$x_i(i=1,2,3,4)$进行投资，抽取下列 5 项指标(属性)进行评估[116]：u_1——产值(万元)；u_2——投资成本(万元)；u_3——销售额(万元)；u_4——国家收益比重；u_5——环境污染程度. 投资银行考察了上年度 4 家企业的上述指标情况(其中污染程度系有关环保部门历时检测并量化)，所得评估结果如表 1.2 所示. 在各项指标中，投资成本、环境污染程度为成本型，其他为效益型. 属性权重信息完全未知，试确定最佳投资方案.

表 1.2　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	8350	5300	6135	0.82	0.17
x_2	7455	4952	6527	0.65	0.13
x_3	11000	8001	9008	0.59	0.15
x_4	9624	5000	8892	0.74	0.28

步骤 1　利用(1.2)和(1.3)两式将 A 规范化，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$，如表 1.3 所示.

表 1.3 决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.7455	0.9343	0.6811	1.0000	0.7647
x_2	0.6777	1.0000	0.7246	0.7926	1.0000
x_3	1.0000	0.6189	1.0000	0.7195	0.8667
x_4	0.8749	0.9904	0.9871	0.9024	0.4643

步骤 2 **利用** OWA **算子对方案** $x_i(i=1,2,3,4)$**的属性值进行集结，求得其综合属性值** $z_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4)$（**不妨利用定理** 1.10 **中的方法确定** OWA **算子的加权向量为** $\boldsymbol{w}=(0.36,0.16,0.16,0.16,0.16)$，**这里取** $\alpha=0.2$）：

$$\begin{aligned} z_1(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{11},r_{12},r_{13},r_{14},r_{15}) \\ &= 0.36\times 1.0000+0.16\times 0.9343+0.16\times 0.7647+ \\ &\quad 0.16\times 0.7455+0.16\times 0.6811 \\ &= 0.8596; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{21},r_{22},r_{23},r_{24},r_{25}) \\ &= 0.36\times 1.0000+0.16\times 1.0000+0.16\times 0.7926+ \\ &\quad 0.16\times 0.7246+0.16\times 0.6777 \\ &= 0.8712; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{31},r_{32},r_{33},r_{34},r_{35}) \\ &= 0.36\times 1.0000+0.16\times 1.0000+0.16\times 0.8667+ \\ &\quad 0.16\times 0.7195+0.16\times 0.6189 \\ &= 0.8728; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{41},r_{42},r_{43},r_{44},r_{45}) \\ &= 0.36\times 0.9904+0.16\times 0.9871+0.16\times 0.9024+ \\ &\quad 0.16\times 0.8749+0.16\times 0.4643 \\ &= 0.8731. \end{aligned}$$

步骤 3 **按** $z_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4)$**的大小对各企业进行排序**

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1.$$

故最佳企业为 x_4.

1.2　基于 OWA 算子和 CWAA 算子的多属性群决策方法

1.2.1　CWAA 算子

定义 1.2[63,233]　设 WAA:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若

$$\mathrm{WAA}_{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha_j, \tag{1.8}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ 是一组数据 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的加权向量，$\omega_j \in [0,1], j \in N, \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$，则称函数 WAA 是加权算术平均算子，也称为 WAA 算子.

该算子的特点是：只对数据组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 中的每个数据进行加权（即根据每个数据的重要性赋予适当的权重），然后对加权后的数据进行集结.

例 1.3　设 $(7,18,6,2)$ 是一组数据，$\boldsymbol{\omega} = (0.4, 0.1, 0.2, 0.3)$ 为其加权向量，则

$$\mathrm{WAA}_{\boldsymbol{\omega}}(7,18,6,2) = 0.4 \times 7 + 0.1 \times 18 + 0.2 \times 6 + 0.3 \times 2 = 6.4.$$

定义 1.3[226]　设 CWAA：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若

$$\mathrm{CWAA}_{\boldsymbol{\omega}, w}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j,$$

其中 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 是与 CWAA 相关联的加权向量，$w_j \in [0,1], j \in N, \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$；且 b_j 是一组加权数据 $(n\omega_1\alpha_1, n\omega_2\alpha_2, \cdots, n\omega_n\alpha_n)$ 中第 j 大的元素，这里 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ 是数据组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的加权向量，$\omega_i \in [0,1], i \in N, \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$，$n$ 是平衡因子，则称函数 CWAA 是组合加权算术平均算子，也称为 CWAA 算子.

例 1.4　设 $w = (0.1, 0.4, 0.4, 0.1)$ 是 CWAA 算子的加权向量，$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (7, 18, 6, 2)$ 是一组数据，数据组的加权向量为 $\boldsymbol{\omega} = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$，则

$$4\omega_1\alpha_1 = 5.6,\ 4\omega_2\alpha_2 = 21.6,\ 4\omega_3\alpha_3 = 2.4,\ 4\omega_4\alpha_4 = 3.2,$$

因此

$$b_1 = 21.6,\ b_2 = 5.6,\ b_3 = 3.2,\ b_4 = 2.4,$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{CWAA}_{\boldsymbol{\omega}, w}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &= 0.1 \times 21.6 + 0.4 \times 5.6 + 0.4 \times 3.2 + 0.1 \times 2.4 \\ &= 5.92.\end{aligned}$$

定理 1.12[226] WAA 算子是 CWAA 算子的一个特例.

证明 设 $w=(1/n,1/n,\cdots,1/n)$，则

$$\mathrm{CWAA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\sum_{j=1}^{n}w_jb_j=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\alpha_i$$
$$=\mathrm{WAA}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

定理证毕.

定理 1.13[226] OWA 算子是 CWAA 算子的一个特例.

证明 设 $\boldsymbol{\omega}=(1/n,1/n,\cdots,1/n)$，则 $n\omega_i\alpha_i=\alpha_i\,(i\in N)$，因此数据组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 加权之后仍为其本身，故

$$\mathrm{CWAA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

从定理 1.12 和定理 1.13 可知，CWAA 算子同时推广了 WAA 算子和 OWA 算子，它不仅考虑了每个数据的自身重要性程度，而且还体现了该数据所在位置的重要性程度.

1.2.2 决策方法

在现代大型决策过程中，为了体现决策的民主性和合理性，往往需要多个决策者的共同参与(即群决策). 下面介绍一种基于 OWA 算子和 CWAA 算子的多属性群决策方法[226]. 具体步骤如下：

步骤 1 对于某一多属性群决策问题，设 X 和 U 分别为方案集和属性集，属性权重信息完全未知. $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_t\}$ 为决策者集，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$ 为决策者的权重向量，其中 $\omega_j\in[0,1],j\in M,\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1,\lambda_k\in[0,1],k=1,2,\cdots,t,\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$ 设决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的属性值 $a_{ij}^{(k)}$，从而构成决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$. 若 $\boldsymbol{A}_k$ 中元素的物理量纲不同，则需要对其进行规范化处理. 假设 $\boldsymbol{A}_k$ 经过规范化处理后，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$.

步骤 2 利用 OWA 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行集结，得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$：

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})=\mathrm{OWA}_w(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)})=\sum_{j=1}^{m}w_jb_{ij}^{(k)},i\in N,k=,1,2,\cdots,t,$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是 OWA 算子的加权向量，$w_j\geqslant 0,j\in M,\sum_{j=1}^{m}w_j=1$，且 $b_{ij}^{(k)}$ 是 $r_{il}^{(k)}(l\in M)$ 中第 j 大的元素.

步骤 3　利用 CWAA 算子对 t 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(w)(k=1,2,\cdots,t)$进行集结，得到方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w')$ $(i\in N)$：

$$z_i(\boldsymbol{\lambda},w')=\mathrm{CWAA}_{\boldsymbol{\lambda},w'}[z_i^{(1)}(w),z_i^{(2)}(w),\cdots,z_i^{(t)}(w)]=\sum_{k=1}^{t}w'_k b_i^{(k)},i\in N,$$

其中 $w'=(w'_1,w'_2,\cdots,w'_t)$,是 CWAA 算子的加权向量，$w'_k\in[0,1],k=1,2,\cdots,t,\sum_{k=1}^{t}w'_k=1$；$b_i^{(k)}$ 是一组加权数据$(t\lambda_1 z_i^{(1)}(w),t\lambda_2 z_i^{(2)}(w),\cdots,t\lambda_t z_i^{(t)}(w))$中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 4　利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w')(i\in N)$对方案进行排序和择优.

该决策方法首先利用 OWA 算子进行纵向集结(即对一个决策者所给定的某一方案所有属性值进行集结)，然后利用 CWAA 算子对纵向集结结果进行横向集结(即对由不同决策者得到的同一方案综合属性值进行集结). 由于在一些决策过程中，往往会出现个别决策者受个人感情等主观因素的影响，对某些方案作出过高或过低的评价，因而会导致不合理的决策结果. CWAA 算子不仅能充分考虑决策者的自身重要性程度，而且尽可能地消除这些不公正因素的影响，并增加中间值的作用(一般是对过高或过低的方案综合属性值赋予较小的权重)，从而增强决策结果的合理性.

1.2.3　实例分析

例 1.5　考虑航天装备的评估问题. 首先制定 8 项评估指标(属性)[19]：u_1——导弹预警能力；u_2——成像侦察能力；u_3——通信保障能力；u_4——电子侦察能力；u_5——卫星测绘能力；u_6——导航定位能力；u_7——海洋监测能力；u_8——气象预报能力. 指标(属性)权重信息完全未知. 现有 4 位专家 $d_k(k=1,2,3,4)$，权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(0.27,0.23,0.24,0.26)$，依据上述各项指标对 4 种航天装备 $x_i(i=1,2,3,4)$进行打分(范围从 0 分到 100 分)，结果如表 1.4 表 1.7 所示，试确定最佳航天装备.

表 1.4　决策者 d_1 给出的决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	85	90	95	60	70	80	90	85
x_2	95	80	60	70	90	85	80	70
x_3	65	75	95	65	90	95	70	85
x_4	75	75	50	65	95	75	85	80

表 1.5　决策者 d_2 给出的决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	90	65	70	95	70	75
x_2	85	60	60	65	90	75	95	70
x_3	60	65	75	80	90	95	90	80
x_4	65	60	60	70	90	85	70	65

表 1.6　决策者 d_3 给出的决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	85	60	85	80	60	75
x_2	80	75	60	90	85	65	85	80
x_3	95	80	85	85	90	90	85	95
x_4	60	65	50	60	95	80	65	70

表 1.7　决策者 d_4 给出的决策矩阵 R_4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	70	80	85	65	80	90	70	80
x_2	85	70	70	80	95	70	85	85
x_3	90	85	80	80	95	85	80	90
x_4	65	70	60	65	90	85	70	75

由于所有指标均为效益型，量纲一致，为了方便起见，不把决策矩阵规范化.

下面利用 1.2.2 节中的方法进行求解：

步骤 1　利用 OWA 算子(采用定理 1.10 (1)中方法确定 OWA 算子的加权向量为 $\boldsymbol{w}=(0.30,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1)$，这里取 $\alpha=0.2$)对决策矩阵 R_k 中第 i 行的属性值进行集结，得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i,k=1,2,3,4)$：

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{11}^{(1)},r_{12}^{(1)},\cdots,r_{18}^{(1)}) \\ &= 0.3\times 95+0.1\times 90+0.1\times 90+0.1\times 85+0.1\times 85+ \\ &\quad\ 0.1\times 80+0.1\times 70+0.1\times 60 \\ &= 84.50, \end{aligned}$$

类似地，可得

$$z_2^{(1)}(\boldsymbol{w})=82,z_3^{(1)}(\boldsymbol{w})=83,z_4^{(1)}(\boldsymbol{w})=79,$$

$$z_1^{(2)}(\boldsymbol{w})=79,z_2^{(2)}(\boldsymbol{w})=79,z_3^{(2)}(\boldsymbol{w})=82.5,z_4^{(2)}(\boldsymbol{w})=74.5,$$

$$z_1^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 75, z_2^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 80, z_3^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 89.5, z_4^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 73.5,$$

$$z_1^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 80, z_2^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 83, z_3^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 87.5, z_4^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 76.$$

步骤 2　利用 CWAA 算子(假设它的加权向量为 $\boldsymbol{w}'=(1/6,1/3,1/3,1/6)$)对 4 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,3,4)$进行集结. 首先利用$\boldsymbol{\lambda}$,$t$ 以及 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i,k=1,2,3,4)$，求解 $t\lambda_k z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i,k=1,2,3,4)$，得

$$4\lambda_1 z_1^{(1)}(\boldsymbol{w}) = 91.26, 4\lambda_1 z_2^{(1)}(\boldsymbol{w}) = 88.56, 4\lambda_1 z_3^{(1)}(\boldsymbol{w}) = 89.64,$$

$$4\lambda_1 z_4^{(1)}(\boldsymbol{w}) = 85.32, 4\lambda_2 z_1^{(2)}(\boldsymbol{w}) = 72.68, 4\lambda_2 z_2^{(2)}(\boldsymbol{w}) = 72.68,$$

$$4\lambda_2 z_3^{(2)}(\boldsymbol{w}) = 75.9, 4\lambda_2 z_4^{(2)}(\boldsymbol{w}) = 68.54, 4\lambda_3 z_1^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 72,$$

$$4\lambda_3 z_2^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 76.8, 4\lambda_3 z_3^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 85.92, 4\lambda_3 z_4^{(3)}(\boldsymbol{w}) = 70.56,$$

$$4\lambda_4 z_1^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 83.20, 4\lambda_4 z_2^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 86.32, 4\lambda_4 z_3^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 91,$$

$$4\lambda_4 z_4^{(4)}(\boldsymbol{w}) = 79.56.$$

因此可求方案 x_i 的群体综合属性值为

$$z_1(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') = \frac{1}{6}\times 91.26 + \frac{1}{3}\times 83.20 + \frac{1}{3}\times 72.68 + \frac{1}{6}\times 72 = 79.17,$$

$$z_2(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') = \frac{1}{6}\times 88.56 + \frac{1}{3}\times 86.32 + \frac{1}{3}\times 76.8 + \frac{1}{6}\times 72.68 = 79.87,$$

$$z_3(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') = \frac{1}{6}\times 91 + \frac{1}{3}\times 89.64 + \frac{1}{3}\times 85.92 + \frac{1}{6}\times 75.90 = 86.34,$$

$$z_4(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') = \frac{1}{6}\times 85.32 + \frac{1}{3}\times 79.56 + \frac{1}{3}\times 70.56 + \frac{1}{6}\times 68.54 = 75.68.$$

步骤 3　利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$对 4 种航天装备 $x_i(i=1,2,3,4)$进行排序

$$x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4.$$

故最佳航天装备为 x_3.

1.3　基于 OWGA 算子的多属性决策方法

1.3.1　OWGA 算子

定义 1.4[79,225]　设 OWGA：$\mathbb{R}^{+^n} \to \mathbb{R}^+$，若

$$\mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j}, \tag{1.9}$$

其中 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 是与 OWGA 相关联的指数加权向量,$w_j \in [0,1]$, $j \in N$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$，且 b_j 是一组数据$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$中第 j 大的元素，$\mathbb{R}^+$为正

实数集，则称函数 OWGA 是有序加权几何平均算子，也称为 OWGA 算子.

OWGA 算子与 OWA 算子具有类似的优良性质，如：单调性、置换不变性、幂等性等.

例 1.6 设 $w=(0.4,0.1,0.2,0.3)$ 为 OWGA 算子的加权向量，$(7,18,6,2)$ 是一组数据，则

$$\mathrm{OWGA}_w(7,18,6,2)=18^{0.4}\times 7^{0.1}\times 6^{0.2}\times 2^{0.3}=6.8.$$

1.3.2 决策方法

下面介绍一种基于 OWGA 算子的多属性决策方法[226]. 具体步骤如下：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，属性权重信息完全未知. 决策矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}(a_{ij}>0)$，利用(1.2)和(1.3)两式将 $\boldsymbol{A}$ 经过规范化处理后，得到矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2 利用 OWGA 算子对各方案 $x_i(i\in N)$ 的属性值进行集结，求得其综合属性值 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$：

$$z_i(\boldsymbol{w})=\mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})=\prod_{j=1}^{m}b_{ij}^{w_j},$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 是 OWGA 算子的指数加权向量，$w_j\geqslant 0,j\in M$，$\sum_{j=1}^{m}w_j=1$，且 b_{ij} 是 $r_{il}(l\in M)$ 中第 j 大的元素.

步骤 3 按 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$ 的大小对方案进行排序并择优.

1.3.3 实例分析

例 1.7 信息系统投资项目的评价指标(属性)主要有[18]：

(1) 收入 u_1(单位：万元)：同任何投资项目一样，其首要目的是为了盈利. 因此，收入应作为投资评价的一个主要因素.

(2) 风险 u_2：信息系统投资的风险是第二个应考虑的因素，尤其是政府部门信息投资项目，受政府和市场的影响甚大.

(3) 社会效益 u_3：信息化建设最终是为了提高社会服务水平. 因此，社会效益应作为信息项目投资一个评价指标. 社会效益显著的投资项目不仅可以提高企业形象，而且更容易得到政府的认可和批准.

(4) 市场效应 u_4：在信息技术发展过程中，其市场效应是十分显著的，主要表现在两个方面：一是市场抢占速度，尤其在政府工程项目中最为明显，谁最早成功地得到政府部门的认可，谁就可以以其样板效应迅速抢占同类项目市场；二是边际成本降低，开发过程的技术和项目经验积累和规模效益会极大地

降低开发成本，所以在某些市场效应显著的投资项目中可以以微利甚至亏损方式进行.

(5) 技术难度 u_5：在信息投资项目的开发过程中，技术也是一个关键因素，伴随着计算机技术的发展，新的技术不断出现，为了提高系统的实用性和安全性，对技术的要求也相应提高.

在某地区信息管理系统项目中，共有 4 种方案可供选择，其中 x_1——由某公司投资建设，采用 8KB 的 CPU 卡；x_2——由某公司投资建设，采用 2KB 的 CPU 卡；x_3——由某公司投资建设，采用磁卡；x_4——某公司不投资，由当地政府投资，公司只承包系统集成. 对上述 4 种方案，组织专家论证，得到的评估矩阵如表 1.8 所示. 在各项指标中，风险 u_2、技术难度 u_5 为成本型，其他为效益型. 属性权重信息完全未知，试确定最佳方案.

表 1.8　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	300	0.83	0.83	0.83	0.8
x_2	250	0.67	0.67	0.67	0.6
x_3	200	0.5	0.5	0.5	0.2
x_4	100	0.33	0.5	0.33	0.2

步骤 1　利用(1.2)和(1.3)两式将 A 规范化，得到的矩阵如表 1.9 所示.

表 1.9　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	1.0000	0.3976	1.0000	1.0000	0.2500
x_2	0.8333	0.4925	0.8072	0.8072	0.3333
x_3	0.6667	0.6600	0.6024	0.6024	1.0000
x_4	0.3333	1.0000	0.6024	0.3976	1.0000

步骤 2　利用 OWGA 算子对各方案 $x_i(i=1,2,3,4)$的属性值进行集结，求得其综合属性值 $z_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4)$(不妨设 OWGA 算子的加权向量为 $\boldsymbol{w}=(0.1,0.2,0.4,0.2,0.1)$)：

$$\begin{aligned} z_1(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(r_{11},r_{12},r_{13},r_{14},r_{15}) \\ &= 1.0000^{0.10}\times 0.3976^{0.2}\times 1.0000^{0.4}\times 1.0000^{0.2}\times 0.2500^{0.1} \\ &= 0.7239, \\ z_2(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(r_{21},r_{22},r_{23},r_{24},r_{25}) \\ &= 0.8333^{0.10}\times 0.4925^{0.2}\times 0.8072^{0.4}\times 0.8072^{0.2}\times 0.3333^{0.1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0.6715,\\
z_3(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(r_{31},r_{32},r_{33},r_{34},r_{35})\\
&= 0.6667^{0.10}\times 0.6600^{0.2}\times 0.6024^{0.4}\times 0.6024^{0.2}\times 1.0000^{0.1}\\
&= 0.6520,\\
z_4(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(r_{41},r_{42},r_{43},r_{44},r_{45})\\
&= 0.3333^{0.10}\times 1.0000^{0.2}\times 0.6024^{0.4}\times 0.3976^{0.2}\times 1.0000^{0.1}\\
&= 0.6083.
\end{aligned}
$$

步骤 3 按 $z_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4)$的大小对各企业进行排序

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4.$$

故最佳企业为 x_1.

1.4 基于 OWGA 算子和 CWGA 算子的多属性群决策方法

1.4.1 CWGA 算子

定义 1.5[1] 设 WGA: $\mathbb{R}^{+^n}\to\mathbb{R}^+$，若

$$\mathrm{WGA}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\prod_{j=1}^{n}\alpha_j^{\omega_j}, \tag{1.10}$$

其中$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的指数加权向量，$\omega_j\in[0,1]$，$j\in N$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，则称函数 WGA 是加权几何平均算子，也称为 WGA 算子.

例 1.8 设$(7,18,6,2)$是一组数据，$\boldsymbol{\omega}=(0.4,0.1,0.2,0.3)$为其加权向量，则

$$\mathrm{WGA}_{\boldsymbol{\omega}}(7,18,6,2)=7^{0.4}\times 18^{0.1}\times 6^{0.2}\times 2^{0.3}=5.123.$$

定义 1.6[226] 设 CWGA: $\mathbb{R}^{+^n}\to\mathbb{R}^+$，若

$$\mathrm{CWGA}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{w}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\prod_{j=1}^{n}b_j^{w_j},$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$是与CWGA相关联的指数加权向量，$w_j\in[0,1]$，$j\in N$，$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，且 b_j 是一组指数加权数据$(\alpha_1^{n\omega_1},\alpha_2^{n\omega_2},\cdots,\alpha_n^{n\omega_n})$中第 j 大的元素，这里$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是数据组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的指数加权向量，$\omega_i\in[0,1]$，$i\in N$，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，$n$ 是平衡 因子，则称函数 CWGA 为组合加权几何平均算子，也称为 CWGA 算子.

例 1.9　设 $w=(0.1,0.4,0.4,0.1)$ 为 CWGA 算子的指数加权向量，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(7,18,6,2)$ 是一组数据，数据的指数加权向量 $\boldsymbol{\omega}=(0.2,0.3,0.1,0.4)$，则

$$\alpha_1^{4\omega_1}=4.74,\alpha_2^{4\omega_2}=32.09,\alpha_3^{4\omega_3}=2.05,\alpha_4^{4\omega_4}=3.03,$$

因此

$$b_1=32.09,b_2=4.74,b_3=3.03,b_4=2.05,$$

故

$$\mathrm{CWGA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=32.09^{0.1}\times 4.74^{0.4}\times 3.03^{0.4}\times 2.05^{0.1}=4.413.$$

定理 1.14　WGA 算子是 CWGA 算子的一个特例.

证明　设 $w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{CWGA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)&=\prod_{j=1}^{n}b_j^{w_j}=\left(\prod_{j=1}^{n}b_j\right)^{\frac{1}{n}}=\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\omega_i}\\&=\mathrm{WGA}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 1.15　OWGA 算子是 CWGA 算子的一个特例.

证明　设 $\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，则 $\alpha_i^{n\omega_i}=\alpha_i\,(i\in N)$，因此，数据组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 加权之后仍为其本身，故

$$\mathrm{CWGA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{OWGA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

从定理 1.14 和定理 1.15 可知，CWGA 算子同时推广了 WGA 算子和 OWGA 算子，它不仅考虑了每个数据的自身重要性程度，而且还体现了该数据所在位置的重要性程度.

1.4.2　决策方法

下面介绍一种基于 OWGA 算子和 CWGA 算子的多属性群决策方法[226]. 具体步骤如下：

步骤 1　对于某一多属性群决策问题，属性权重信息完全未知，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$ 为 t 位决策者的权重向量，其中 $\lambda_k\in[0,1]$，$k=1,2,\cdots,t$，$\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 设决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的属性值为 $a_{ij}^{(k)}\,(a_{ij}^{(k)}>0)$，从而构成决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$. 假设决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 经过规范化处理后，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$.

步骤 2　利用 OWGA 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行集结，得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})\,(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$：

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{w}) = \mathrm{OWGA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \cdots, r_{im}^{(k)}) = \prod_{j=1}^{m} (b_{ij}^{(k)})^{w_j}, i \in N, k = 1,2,\cdots,t,$$

其中 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 OWGA 算子的指数加权向量，$w_j \geqslant 0, j \in M$，$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1$，且 $b_{ij}^{(k)}$ 是 $r_{il}^{(k)}(l \in M)$ 中第 j 大的元素.

步骤 3 利用 CWGA 算子对 t 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,\cdots,t)$ 进行集结，得到方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\lambda, \boldsymbol{w}'), (i \in N)$：

$$z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') = \mathrm{CWGA}_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}'}(z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}), z_i^{(2)}(\boldsymbol{w}), \cdots, z_i^{(t)}(\boldsymbol{w})) = \prod_{k=1}^{t} (b_i^{(k)})^{w'_k}, i \in N,$$

其中 $\boldsymbol{w}' = (w'_1, w'_2, \cdots, w'_t)$ 是 CWGA 算子的指数加权向量，$w'_k \in [0,1], k = 1, 2, \cdots, t$，$\sum_{k=1}^{t} w'_k = 1$，$b_i^{(k)}$ 是一组指数加权数据 $(z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}))^{t\lambda_1}$，$(z_i^{(2)}(\boldsymbol{w}))^{t\lambda_2}, \cdots$，$(z_i^{(t)}(\boldsymbol{w}))^{t\lambda_t}$ 中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 4 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')(i \in N)$ 对方案进行排序和择优.

1.4.3 实例分析

例 1.10 百年大计，教育为本. 高等教育在整个教育事业中处于龙头地位，国家宏观职能部门如何把有限的教育投入合理分配到全国各高校，各高校又如何正确认识自身的财务状况，进而提高资金利用率，这些都需要有一个科学的高校财务评价方法来作为资金配置和使用的依据. 到目前为止，在实际工作中，对高校的财务评价只停留在采用简单的财务分析方法对某一财务指标或某一方面进行反映和评价，并不能完成综合评价的任务[177]. 因此，选用科学有效的评价方法对高校财务状况进行综合评价具有重要的现实意义.

考虑高校的财务评价的评估问题. 首先制定 10 项评估指标（属性）[177]，其中 u_1——预算收入完成情况；u_2——预算支出完成情况；u_3——财政及上级补助收入情况；u_4——经费自给情况；u_5——人员经费支出情况；u_6——公用支出情况；u_7——生均支出情况；u_8——固定资产利用情况；u_9——流动资产占用情况；u_{10}——偿还能力. 指标（属性）权重信息完全未知. 现有 4 位专家 $d_k(k=1,2,3,4)$，权重向量为 $\boldsymbol{\lambda} = (0.27, 0.23, 0.24, 0.26)$，依据上述各项指标对 4 所高校财务状况（方案）$x_i(i=1,2,3,4)$ 进行打分（范围从 0 分到 100 分），结果如表 1.10 表 1.13 所示. 试确定最佳方案.

表 1.10　决策者 d_1 给出的决策矩阵 R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	90	95	60	70	90	85	95	65	85	90
x_2	80	90	75	80	85	90	75	80	70	95
x_3	70	75	90	95	80	90	70	80	85	85
x_4	90	80	85	70	95	85	95	75	75	90

表 1.11　决策者 d_2 给出的决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	70	75	95	80	85	60	80	90	80	95
x_2	80	90	70	70	85	95	75	85	75	90
x_3	75	85	80	90	95	70	60	75	80	90
x_4	80	70	90	75	85	95	65	85	85	90

表 1.12　决策者 d_3 给出的决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	70	80	85	70	95	85	65	90	75	95
x_2	85	70	65	95	85	90	70	85	75	85
x_3	90	80	80	85	95	95	60	80	85	80
x_4	65	75	95	75	90	85	65	75	90	80

表 1.13　决策者 d_4 给出的决策矩阵 R_4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	60	90	95	75	80	95	75	80	85	80
x_2	80	65	60	85	95	90	80	85	70	80
x_3	95	75	85	80	90	85	90	60	75	85
x_4	65	80	65	75	95	85	80	65	60	95

下面利用 1.4.2 节中的方法进行求解：

步骤 1　利用 OWGA 算子，假设它的加权向量为 $\boldsymbol{w}=(0.07,0.08,0.10,0.12,0.13,0.13,0.12,0.10,0.08,0.07)$ 对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行集结，得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i,k=1,2,3,4)$：

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(\boldsymbol{w}) &= 95^{0.07}\times 95^{0.08}\times 90^{0.10}\times 90^{0.12}\times 90^{0.13}\times 85^{0.13}\times \\ &\quad 85^{0.12}\times 70^{0.10}\times 65^{0.08}\times 60^{0.07} \\ &= 82.606. \end{aligned}$$

类似地，可得

$z_2^{(1)}(\boldsymbol{w})=81.579, z_3^{(1)}(\boldsymbol{w})=81.772, z_4^{(1)}(\boldsymbol{w})=83.807,$

$z_1^{(2)}(\boldsymbol{w})=80.607, z_2^{(2)}(\boldsymbol{w})=81.141, z_3^{(2)}(\boldsymbol{w})=79.640, z_4^{(2)}(\boldsymbol{w})=81.992,$

$z_1^{(3)}(\boldsymbol{w})=80.513, z_2^{(3)}(\boldsymbol{w})=80.340, z_3^{(3)}(\boldsymbol{w})=82.649, z_4^{(3)}(\boldsymbol{w})=78.949,$

$z_1^{(4)}(\boldsymbol{w})=81.053, z_2^{(4)}(\boldsymbol{w})=78.784, z_3^{(4)}(\boldsymbol{w})=81.985, z_4^{(4)}(\boldsymbol{w})=75.418.$

步骤 2 利用 CWGA 算子(假设它的加权向量为 $w'=(1/6,1/3,1/3,1/6)$)对 4 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,3,4)$进行集结. 首先利用$\boldsymbol{\lambda}$, t 以及 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i,k=1,2,3,4)$，求解$(z_i^{(k)}(\boldsymbol{w}))^{t\lambda_k}(i,k=1,2,3,4)$,得

$(z_1^{(1)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_1}=117.591, (z_2^{(1)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_1}=116.012, (z_3^{(1)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_1}=116.309,$

$(z_4^{(1)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_1}=119.438, (z_1^{(2)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_2}=56.737, (z_2^{(2)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_2}=57.082,$

$(z_3^{(2)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_2}=56.110, (z_4^{(2)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_2}=57.633, (z_1^{(3)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_3}=67.551,$

$(z_2^{(3)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_3}=67.412, (z_3^{(3)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_3}=69.270, (z_4^{(3)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_3}=66.291,$

$(z_1^{(4)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_4}=96.632, (z_2^{(4)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_4}=93.820, (z_3^{(4)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_4}=97.788,$

$(z_4^{(4)}(\boldsymbol{w}))^{4\lambda_4}=89.655.$

因此可求方案 x_i 的群体综合属性值为 $z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$：

$$z_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')=117.591^{\frac{1}{6}}\times 96.632^{\frac{1}{3}}\times 67.551^{\frac{1}{3}}\times 56.737^{\frac{1}{6}}=81.088,$$

$$z_2(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')=116.012^{\frac{1}{6}}\times 93.820^{\frac{1}{3}}\times 67.412^{\frac{1}{3}}\times 57.082^{\frac{1}{6}}=80.139,$$

$$z_3(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')=116.309^{\frac{1}{6}}\times 97.788^{\frac{1}{3}}\times 69.270^{\frac{1}{3}}\times 56.110^{\frac{1}{6}}=81.794,$$

$$z_4(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')=119.438^{\frac{1}{6}}\times 89.655^{\frac{1}{3}}\times 66.291^{\frac{1}{3}}\times 57.633^{\frac{1}{6}}=79.003.$$

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$对各方案 $x_i(i=1,2,3,4)$进行排序

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4.$$

故最佳方案为 x_3.

1.5 基于离差最大化的多属性决策方法

1.5.1 决策方法

对于某一多属性决策问题，属性权重信息完全未知. 决策矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$. $\boldsymbol{A}$ 经过规范化处理后，得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

假设属性权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$, $\omega_j\geqslant 0$, $j\in M$，并满足单位化约束条件

$$\sum_{j=1}^{m}\omega_j^2=1, \tag{1.11}$$

则各方案的综合属性值可定义为

$$z_i(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j. \tag{1.12}$$

多属性决策，一般是对这些方案综合属性值的排序比较. 若所有方案在属性 u_j 下的属性值差异越小，则说明该属性对方案决策与排序所起的作用越小；反之，如果属性 u_j 能使所有方案的属性值有较大差异，则说明其对方案决策与排序将起重要作用. 因此，从对方案进行排序的角度考虑，方案属性值偏差越大的属性（无论其本身的重要性程度如何）应该赋予越大的权重. 特别地，若所有方案在属性 u_j 下的属性值无差异，则属性 u_j 对方案排序将不起作用，可令其权重为 0[195]. 对于属性 u_j，用 $V_{ij}(\boldsymbol{\omega})$ 表示方案 x_i 与其他所有方案之间的离差，则可定义

$$V_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{n} | r_{ij}\omega_j - r_{kj}\omega_j |, \quad i \in N, j \in M.$$

令

$$V_j(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} V_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} | \omega_j, \quad j \in M,$$

则 $V_j(\boldsymbol{\omega})$ 表示对属性 u_j 而言，所有方案与其他方案的总离差. 根据上述分析，加权向量的 $\boldsymbol{\omega}$ 的选择应使所有属性对所有方案的总离差最大. 为此，构造目标函数为

$$\max V(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} V_j(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} | \omega_j.$$

于是，求解权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 等价于求解如下最优化模型

$$(\textbf{M-1.1}) \qquad \begin{cases} \max V(\boldsymbol{\omega}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} | \omega_j \\ \text{s.t.} \quad \omega_j \geqslant 0, j \in M, \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \omega_j^2 = 1. \end{cases}$$

解此最优化模型，作拉格朗日（Lagrange）函数

$$L(\boldsymbol{\omega}, \zeta) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} | \omega_j + \frac{1}{2}\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j^2 - 1\right),$$

求其偏导数，并令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \omega_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} | + \zeta\omega_j = 0, \quad j \in M, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \zeta} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\omega_j^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

求得最优解

$$\omega_j^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} |}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} |\right]^2}}, \quad j \in M.$$

由于传统的加权向量一般都满足于归一化约束条件而不是单位化约束条件，因此在得到单位化权重向量 $\boldsymbol{\omega}^*$ 之后，为了与人们的习惯用法相一致，还可以对 $\boldsymbol{\omega}^*$ 进行归一化处理，即令

$$\omega_j = \frac{\omega_j^*}{\sum_{j=1}^{m}\omega_j^*}, \quad j \in M.$$

由此得到

$$\omega_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} |}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} | r_{ij} - r_{kj} |}, \quad j \in M. \tag{1.13}$$

综上所述，离差最大化算法的具体步骤可归纳如下[195]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，构造决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，并利用适当的方法把它规范化为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2 利用(1.13)式计算最优权重向量 $\boldsymbol{\omega}$.

步骤 3 利用(1.12)式计算方案 x_i 的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 4 利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 对方案进行排序和择优.

1.5.2 实例分析

例 1.11 某单位在教练机选型论证中，选取了 10 种国内外教练机(方案)[113]：x_1——L-39；x_2——MB339；x_3——T-46；x_4——鹰；x_5——C101；x_6——S211；x_7——阿尔法喷气；x_8——歼教 5；x_9——初教 6；x_{10}——T-4. 评价指标(属性)为：u_1——过载范围(g)；u_2——升限(km)；u_3——最大平飞速度(km/h)；u_4——着陆速度(km/h)；u_5——最大爬升率(m/s)；u_6——续航时间(h)，其性能数据如表 1.14 所示. 试对方案进行排序和择优.

表 1.14 决策矩阵 $\boldsymbol{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	12	11.5	780	175	22	2.43
x_2	12	14.6	898	165	33.5	2.83
x_3	10.3	13.5	741	181	22.7	3

续表

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_4	12	15.24	1938	204	47.3	4
x_5	11.4	12.19	833.4	180	19	5.9
x_6	9	12.8	667	170	19.8	3.8
x_7	12.2	13.37	991	170	59	3.3
x_8	12	14.3	1048	230	37.2	1.9
x_9	9	6.25	287	105	5	3.6
x_{10}	10.33	15	927	167	52.6	3.14

上述指标中，除了着陆速度为成本型外，其他均为效益型.

下面利用 1.5.1 节中的方法进行求解：

步骤 1　利用(1.2)和(1.3)两式将决策矩阵 A 规范化，得到矩阵如表 1.15 所示.

表 1.15　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.984	0.755	0.744	0.600	0.373	0.412
x_2	0.984	0.958	0.857	0.636	0.568	0.480
x_3	0.844	0.886	0.707	0.580	0.385	0.508
x_4	0.984	1	0.990	0.515	0.802	0.678
x_5	0.934	0.800	0.795	0.683	0.322	1
x_6	0.738	0.840	0.636	0.618	0.336	0.644
x_7	1	0.877	0.946	0.618	1	0.559
x_8	0.984	0.938	1	0.457	0.631	0.322
x_9	0.738	0.410	0.274	1	0.085	0.610
x_{10}	0.847	0.984	0.885	0.629	0.892	0.532

步骤 2　利用(1.13)式计算最优权重向量

$$\boldsymbol{\omega} = (0.0950, 0.1464, 0.1956, 0.1114, 0.2849, 0.1667).$$

步骤 3　利用(1.12)式计算方案 x_i 的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,10)$：

$z_1(\boldsymbol{\omega}) = 0.5913, z_2(\boldsymbol{\omega}) = 0.7410, z_3(\boldsymbol{\omega}) = 0.6071, z_4(\boldsymbol{\omega}) = 0.8323,$

$z_5(\boldsymbol{\omega}) = 0.6847, z_6(\boldsymbol{\omega}) = 0.5894, z_7(\boldsymbol{\omega}) = 0.8553, z_8(\boldsymbol{\omega}) = 0.7107,$

$z_9(\boldsymbol{\omega}) = 0.4210, z_{10}(\boldsymbol{\omega}) = 0.88104.$

步骤 4　按 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,10)$的大小对各种方案进行排序

$$x_{10} \succ x_7 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_8 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_6 \succ x_9.$$

故最优方案为 x_{10}，即最佳教练机为 T-4.

1.6 基于信息熵的多属性决策方法

1.6.1 决策方法

熵的概念最初产生于热力学，它被用来描述运动过程中的一种不可逆现象，后来在信息论中用熵来表示事物出现的不确定性. 下面介绍一种基于信息熵的多属性决策方法. 具体步骤如下[88]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，构造决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，并利用适当的方法把它规范化为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2 计算矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$，得到列归一化矩阵 $\dot{\boldsymbol{R}}=(\dot{r}_{ij})_{n\times m}$，其中

$$\dot{r}_{ij}=\frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} r_{ij}}, \quad i\in N, j\in M. \tag{1.14}$$

步骤 3 计算属性 u_j 输出的信息熵

$$E_j=-\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}\dot{r}_{ij}\ln\dot{r}_{ij}, \quad j\in M, \tag{1.15}$$

当 $\dot{r}_{ij}=0$ 时，规定 $\dot{r}_{ij}\ln\dot{r}_{ij}=0$.

步骤 4 计算属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，其中

$$\omega_j=\frac{1-E_j}{\sum_{k=1}^{m}(1-E_k)}, \tag{1.16}$$

步骤 5 利用(1.12)式计算方案 x_i 的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 6 利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$对方案进行排序和择优.

1.6.2 实例分析

例 1.12 考虑一个购买战斗机问题. 现有 4 种飞机可供选择，决策者根据战斗机的性能和费用，考虑了 6 项评价指标(属性)[200]：u_1——最大速度(Ma)；u_2——飞行范围(10^3 km)；u_3——最大负载(10^4 lb①)；u_4——购买费用(10^6 美元)；u_5—— 可靠性(十分制)；u_6—— 灵敏度(十分制). 每种飞机的各项指标的属性值如表 1.16 所示.

---

① 1lb=0.45359237kg.

表 1.16　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	2.0	1.5	2.0	5.5	5	9
x_2	2.5	2.7	1.8	6.5	3	5
x_3	1.8	2.0	2.1	4.5	7	7
x_4	2.2	1.8	2.0	5.0	5	5

上述指标中，除了购买费用为成本型外，其他均为效益型.

步骤 1　利用(1.2)和(1.3)两式将 A 规范化，得到矩阵如表 1.17 所示.

表 1.17　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.800	0.556	0.952	0.818	0.714	1.000
x_2	1.000	1.000	0.857	0.692	0.429	0.556
x_3	0.720	0.741	1.000	1.000	1.000	0.778
x_4	0.880	0.667	0.952	0.900	0.714	0.556

步骤 2　由(1.14)式求得列归一化矩阵

$$\dot{R}=\begin{pmatrix}0.235 & 0.188 & 0.253 & 0.240 & 0.250 & 0.346\\ 0.294 & 0.337 & 0.228 & 0.203 & 0.150 & 0.192\\ 0.212 & 0.250 & 0.266 & 0.293 & 0.350 & 0.269\\ 0.259 & 0.225 & 0.253 & 0.264 & 0.250 & 0.192\end{pmatrix}.$$

步骤 3　由(1.15)式计算属性 u_j 输出的信息熵

$$E_1=0.9947,\quad E_2=0.9832,\quad E_3=0.9989,$$
$$E_4=0.9936,\quad E_5=0.9703,\quad E_6=0.9768.$$

步骤 4　由(1.16)式计算属性权重向量

$$\boldsymbol{\omega}=(0.0642,0.2036,0.0133,0.0776,0.3600,0.2812).$$

步骤 5　利用(1.12)式计算方案 x_i 的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$：

$z_1(\boldsymbol{\omega})=0.7789, z_2(\boldsymbol{\omega})=0.6437, z_3(\boldsymbol{\omega})=0.8668, z_4(\boldsymbol{\omega})=0.6882.$

步骤 6　利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$对方案进行排序

$$x_3\succ x_1\succ x_4\succ x_2.$$

故最优方案为 x_3.

1.7　对方案有偏好信息的多属性决策方法

由于客观事物的复杂性和不确定性以及决策者的积极参与，对方案有偏好的不确定多属性决策问题的研究已引起人们的关注. 本节介绍 3 种对方案有偏好信息的多属性决策方法.

1.7.1 预备知识

定义 1.7 设判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times m}$，若有 $h_{ij}h_{ji}=1, h_{ii}=1$，$h_{ii}>0$，$i,j\in N$，则称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是互反判断矩阵.

目前，有关互反判断矩阵的理论和应用的研究已取得了丰硕成果，感兴趣的读者可参阅有关文献[41,55,150164,191,194,202208,317].

表 1.18 列出了 4 种互反标度[204]. 由于利用这 4 种互反标度构成的判断矩阵均满足定义 1.7，因此它们都是互反判断矩阵.

表 1.18 4 种互反标度

19 标度	指数标度	10/1018/2 标度	9/99/1 标度	含　义
1	a^0	10/10	9/9	元素 i 与元素 j 同样重要
3	a^2	12/8	9/7	元素 i 稍微重要于元素 j
5	a^4	14/6	9/5	元素 i 明显重要于元素 j
7	a^6	16/4	9/3	元素 i 强烈重要于元素 j
9	a^8	18/2	9/1	元素 i 极端重要于元素 j

2，4，6，8 可以取为上述判断的中间值，若元素 i 与元素 j 的重要性之比为 h_{ij}，那么元素 j 与元素 i 的重要性之比为 $h_{ji}=1/h_{ij}$.

定义 1.8 设模糊判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，若有 $b_{ij}+b_{ji}=1$，$b_{ii}=0.5$，则称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是模糊互补判断矩阵.

近年来，对于模糊互补判断矩阵的研究也引起了人们的极大关注，对这部分内容感兴趣的读者可以参阅有关文献[2224,48,97,110,133,134,148,149,176,204,236,243].

表 1.19 列出了 3 种互补标度[204]. 由于利用这 3 种互补标度构成的判断矩阵均满足定义 1.8，因此它们都是模糊互补判断矩阵.

表 1.19 3 种互补标度

01 标度	0.10.9 五标度	0.10.9 九标度	含　义
0	0.1	0.1	元素 j 极端重要于元素 i
		0.138	元素 j 强烈重要于元素 i
	0.3	0.325	元素 j 明显重要于元素 i
		0.439	元素 j 稍微重要于元素 i
0.5	0.5	0.5	元素 i 与元素 j 同样重要
		0.561	元素 i 稍微重要于元素 j
	0.7	0.675	元素 i 明显重要于元素 j
		0.862	元素 i 强烈重要于元素 j
1	0.9	0.9	元素 i 极端重要于元素 j

0.2，0.4，0.6，0.8 可以取为 0.10.9 五标度相邻的判断中值.

1.7.2　决策方法

1. 对方案的偏好信息为互反判断矩阵的情形[247]

对于某一多属性决策问题，设决策矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}(a_{ij}>0)$. 属性类型主要有效益型和成本型. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响，决策时可按(1.2)和(1.3)两式对 A 进行规范化处理，并得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$. 方案 x_i 的综合属性值如(1.12)式所示.

设决策者根据互反标度对决策方案 $x_i(i\in N)$进行两两比较，并构造互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$. 为了使决策信息一致化，利用下列转换函数把所有方案 $x_i(i\in N)$的综合属性值转化成互反判断矩阵形式 $\overline{\boldsymbol{H}}=(\bar{h}_{ij})_{n\times n}$，其中

$$\bar{h}_{ij}=\frac{z_i(\boldsymbol{\omega})}{z_j(\boldsymbol{\omega})}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k}{\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k},\quad i,j\in N. \tag{1.17}$$

若互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=\overline{\boldsymbol{H}}$,即 $h_{ij}=\bar{h}_{ij}$,$i,j\in N$，则有

$$h_{ij}=\frac{z_i(\boldsymbol{\omega})}{z_j(\boldsymbol{\omega})}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k}{\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k},\quad i,j\in N, \tag{1.18}$$

或

$$h_{ij}\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k,\quad i,j\in N. \tag{1.19}$$

在此情形下,可以直接利用互反判断矩阵的排序方法(如：特征向量法等[9,25,28,54,62,95,194,205,208])求出矩阵 H 的排序向量，并依此对方案进行排序和择优.

然而，一般情况下，互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$和 $\overline{\boldsymbol{H}}=(\bar{h}_{ij})_{n\times n}$之间往往存在着一定的偏差，即(1.19)式一般不成立，为此引入线性偏差函数

$$f_{ij}(\boldsymbol{\omega})=h_{ij}\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k-\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k=\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k,\quad i,j\in N. \tag{1.20}$$

显然，为了得到合理的属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$，上述偏差值总是越小越好，为此可建立下列优化模型

$$
(\text{M-1.2}) \quad \begin{cases} \min F(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{2}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k\right]^2 \\ \text{s. t.} \quad \omega_j \geqslant 0, j \in M, \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1. \end{cases}
$$

构造拉格朗日函数

$$
L(\boldsymbol{\omega},\zeta) = F(\boldsymbol{\omega}) + 2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1\right).
$$

令$\dfrac{\partial L}{\partial \omega_l}=0(l\in M)$，可得

$$
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}2(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k\right](h_{ij}r_{jl}-r_{il}) + 2\zeta = 0, \quad l \in M, \tag{1.21}
$$

即

$$
\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})(h_{ij}r_{jl}-r_{il})\right]\omega_k + \zeta = 0, \quad l \in M. \tag{1.22}
$$

若令 $\boldsymbol{e}_m=(1,1,\cdots,1)$，$\boldsymbol{Q}=(q_{kl})_{m\times m}$，其中

$$
q_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})(h_{ij}r_{jl}-r_{il}), \quad l,k \in M, \tag{1.23}
$$

则(1.22)式可转化为下列矩阵形式

$$
\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} = -\zeta\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}. \tag{1.24}
$$

将$\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1$写成向量形式，有

$$
\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} = 1, \tag{1.25}
$$

其中 T 表示转置.

联合(1.24)和(1.25)两式，求得最优解

$$
\boldsymbol{\omega}^{*} = \frac{\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}}, \tag{1.26}
$$

且 Q 是正定矩阵(见定理 1.16).

若$\boldsymbol{\omega}^{*}\geqslant\mathbf{0}$(其分量均大于或等于 0)，则把(1.26)式代入(1.12)式，即可求得各方案综合属性值，并依此对方案进行排序；若$\boldsymbol{\omega}^{*}<0$(其分量均小于 0)，则可利用二次规划法[64]求解模型(M-1.2)来确定属性的权重向量，并把该权重向量代入(1.12)式，求得各方案综合属性值，即可依此对方案进行排序.

定理 1.16 若 $H\neq\overline{H}$，则 Q^{-1}存在，且 Q 是正定矩阵.

证明 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{\omega} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})^2\omega_k^2+ \\ &\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1,k\neq l}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})(h_{ij}r_{jl}-r_{il})\omega_k\omega_l \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^2(\omega),\end{aligned}$$

且 $H\neq\overline{H}$，故当 $\boldsymbol{\omega}\neq 0$（其分量至少有一个不为 0）时，恒有 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{\omega}>0$. 又由于 Q 是对称矩阵，故根据二次型定义可得 Q 是正定矩阵. 由正定矩阵的性质可知，Q 是可逆矩阵，所以 Q^{-1} 存在.

例 1.13　一个购房者欲从 4 个备选方案 $x_i(i=1,2,3,4)$ 中选择一个. 考察的指标（属性）有 4 个[44]，分别为 u_1——房价（\$10000），u_2——住宅面积（m^2），u_3——工作单位与房子之间的距离（km），u_4——自然环境（评估值），其中 u_2 和 u_4 为效益型属性，u_1 和 u_3 为成本型属性. 属性 u_j 的权重 $\omega_j(j=1,2,3,4)$ 完全未知. 相应的决策矩阵如表 1.20 所示.

表 1.20　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	3.0	100	10	7
x_2	2.5	80	8	5
x_3	1.8	50	20	11
x_4	2.2	70	12	9

试对方案进行排序和择优.

可以利用上述方法进行求解. 具体步骤如下：

步骤 1　利用(1.2)和(1.3)两式将 A 规范化，得到矩阵如表 1.21 所示.

表 1.21　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	0.600	1.000	0.800	0.636
x_2	0.720	0.800	1.000	0.455
x_3	1.000	0.500	0.400	1.000
x_4	0.818	0.700	0.667	0.818

步骤 2　不妨假设决策者根据 19 互反标度对方案 $x_i(i=1,2,3,4)$ 进行两两比较，并给出互反判断矩阵

$$\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{4\times4}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1/4 & 1/5\\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3\\ 4 & 2 & 1 & 1/2\\ 5 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

则利用(1.22)式求得属性的权重向量

$$\boldsymbol{\omega}=(0.1247,0.1648,0.3266,0.3839).$$

步骤3 由(1.12)式求得各方案综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$：

$$z_1(\boldsymbol{\omega})=0.7451,z_2(\boldsymbol{\omega})=0.7229,z_3(\boldsymbol{\omega})=0.7216,z_4(\boldsymbol{\omega})=0.7492,$$

并依此对方案进行排序

$$x_4\succ x_1\succ x_2\succ x_3.$$

故最优方案为 x_4.

2. 对方案的偏好信息为模糊互补判断矩阵的情形[237]

设决策者根据互补标度对决策方案 $x_i(i\in N)$ 进行两两比较，并构造模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$. 为了使决策信息一致化，利用下列线性转换函数把所有方案 $x_i(i\in N)$ 的综合属性值转化成为模糊互补判断矩阵形式 $\bar{\boldsymbol{B}}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$，其中

$$\begin{aligned}\bar{b}_{ij}&=\frac{1}{2}[1+z_i(\boldsymbol{\omega})-z_j(\boldsymbol{\omega})]\\&=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{m}r_{ik}\omega_k-\sum_{k=1}^{m}r_{jk}\omega_k\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})\omega_k\right],\quad i,j\in N.\end{aligned}\tag{1.27}$$

易知 $\bar{b}_{ij}+\bar{b}_{ji}=1,\bar{b}_{ii}=0.5,\bar{b}_{ij}\geqslant0,i,j\in N$.

一般情况下，模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 和 $\bar{\boldsymbol{B}}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ 之间往往存在着一定的偏差，为此引入线性偏差项

$$\begin{aligned}f_{ij}=b_{ij}-\bar{b}_{ij}&=b_{ij}-\frac{1}{2}\left[1+\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})\omega_k\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})\omega_k+(2b_{ij}-1)\right],\quad i,j\in N.\end{aligned}\tag{1.28}$$

显然，为了得到合理的属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，上述偏差值总是越小越好，为此可建立下列优化模型

$$
(\mathbf{M\text{-}1.3})\quad \begin{cases} \min F(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{2} = \dfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})\omega_k + (2b_{ij}-1)\right]^2 \\ \text{s. t.}\quad \omega_j \geqslant 0, j\in M, \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1. \end{cases}
$$

构造拉格朗日函数

$$
L(\boldsymbol{\omega},\zeta) = F(\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1\right).
$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial \omega_l}=0(l\in M)$，可得

$$
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})\omega_k + (2b_{ij}-1)\right](r_{il}-r_{jl}) + \frac{1}{2}\zeta = 0,\quad l\in M, \tag{1.29}
$$

即

$$
\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ik}-r_{jk})(r_{il}-r_{jl})\right]\omega_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-2b_{ij})(r_{il}-r_{jl}) - \zeta,\quad l\in M. \tag{1.30}
$$

若令 $\boldsymbol{e}_m=(1,1,\cdots,1)$，$\bar{\boldsymbol{g}}_m=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$，$\boldsymbol{Q}=(q_{lk})_{m\times m}$，其中

$$
g_l = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(1-2b_{ij})(r_{il}-r_{jl}),\quad l\in M
$$

且

$$
q_{lk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(r_{ik}-r_{jk})(r_{il}-r_{jl}),\quad l,k\in M, \tag{1.31}
$$

则(1.30)式可转化为矩阵形式

$$
\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} = \bar{\boldsymbol{g}}_m^{\mathrm{T}} - \zeta\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}. \tag{1.32}
$$

将 $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$ 写成向量形式，有

$$
\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} = 1. \tag{1.33}
$$

联合(1.32)和(1.33)两式，求得最优解

$$
\boldsymbol{\omega}^{*} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\bar{\boldsymbol{g}}_m^{\mathrm{T}} - \zeta\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}), \tag{1.34}
$$

其中

$$
\zeta = \frac{\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{Q}^{-1}\bar{\boldsymbol{g}}_m^{\mathrm{T}} - 1}{\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{e}_m^{\mathrm{T}}}, \tag{1.35}
$$

且 Q 是正定矩阵(见定理 1.17).

若 $\boldsymbol{\omega}^{*}\geqslant \boldsymbol{0}$，则把(1.34)式代入(1.12)式，即可求得各方案综合属性值，并

依此对方案进行排序. 特别地，若 $\forall i,j\in N$，均有 $\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k=\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k$，即各方案的综合属性值均相同，则说明各方案之间无任何差别.

若 $\boldsymbol{\omega}^*<0$，则可利用二次规划法[64]求解模型(M-1.3)来确定属性的权重向量，并把该权重向量代入(1.12)式，求得各方案综合属性值，即可依此对方案进行排序.

定理 1.17 若至少有一对方案的重要性不相同，则 Q^{-1} 存在，且 Q 是正定矩阵.

证明 因为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{\omega}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})^2\omega_k^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1,k\neq l}^{m}(r_{ik}-r_{jk})(r_{il}-r_{jl})\omega_k\omega_l\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}-r_{jk})\omega_k\right]^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}r_{ik}\omega_k-\sum_{k=1}^{m}r_{jk}\omega_k\right]^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[z_i(\boldsymbol{\omega})-z_j(\boldsymbol{\omega})]^2,
\end{aligned}$$

若至少存在一对(i,j)，当 $i\neq j$ 时，有 $z_i(\boldsymbol{\omega})\neq z_j(\boldsymbol{\omega})$，即若至少有一对方案的重要性不相同(由(1.12)式可知)，则当 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)\neq\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{\omega}Q\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}>0$ 成立. 又由于 Q 是对称矩阵，故根据二次型定义可得 Q 是正定矩阵. 由正定矩阵的性质知，Q 是可逆矩阵，所以 Q^{-1} 存在.

例 1.14 为开发新产品，拟定了 5 个投资方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$，考察的属性[190]有：u_1——投资额；u_2——期望净现值；u_3——风险盈利值；u_4——风险损失值. 各方案的属性值列于表 1.22(单位：万元).

表 1.22 决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	5.20	5.20	4.73	0.473
x_2	10.08	6.70	5.71	1.599
x_3	5.25	4.20	3.82	0.473
x_4	9.72	5.25	5.54	1.313
x_5	6.60	3.75	3.30	0.803

在属性集中，期望净现值和风险盈利值为效益型，投资额和风险损失值为成本型，属性权重完全未知. 试对方案进行排序和择优.

利用上述方法进行求解. 具体步骤如下:

步骤 1　首先由(1.2)和(1.3)两式将决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转化为规范化矩阵如表 1.23 所示.

表 1.23　决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	1	0.776	0.828	1
x_2	0.516	1	1	0.296
x_3	50.990	0.627	0.669	1
x_4	0.535	0.784	0.970	0.360
x_5	0.788	0.560	0.578	0.589

步骤 2　假设决策者根据 0.10.9 互补标度对方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$进行两两比较，并给出模糊互补判断矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.7\\ 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.7 & 0.5\\ 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.2\\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.1\\ 0.3 & 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.5\end{pmatrix},$$

则利用(1.34)式求得属性的权重向量

$$\boldsymbol{\omega}=(0.2014,0.1973,0.5893,0.0120).$$

步骤 3　利用属性的权重向量$\boldsymbol{\omega}$，由(1.12)式求得各方案综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ $(i=1,2,\cdots,5)$:

$$z_1(\boldsymbol{\omega})=0.8544,z_2(\boldsymbol{\omega})=0.8941,z_3(\boldsymbol{\omega})=0.7293,$$

$$z_4(\boldsymbol{\omega})=0.8384,z_5(\boldsymbol{\omega})=0.6169,$$

并依此对方案进行排序，有

$$x_2\succ x_1\succ x_4\succ x_3\succ x_5.$$

故最优方案为 x_2.

3. 对方案的偏好信息为效用值的情形

假设决策者对方案 x_i 的偏好值以效用值 ϑ_i 的形式给出，$\vartheta_i\in[0,1]$，ϑ_i 越接近 1，决策者越偏好方案 x_i. 这里把规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$中的属性值 r_{ij} 看成决策者在属性 u_j 下对方案 x_i 的客观偏好值.

由于种种条件的制约，决策者的主观偏好与客观偏好之间往往存在着一定的差距，为了使决策具有合理性，属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$的选择应使决策者的主观偏好值与客观偏好值(属性值)的总偏差最小化，为此建立下列单目标优化模型.

$$
(\text{M-1.4}) \quad \begin{cases} \min F(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(r_{ij}-\vartheta_i)\omega_j]^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(r_{ij}-\vartheta_i)^2\omega_j^2 \\ \text{s.t.} \quad \omega_j \geqslant 0, j \in M, \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1. \end{cases}
$$

解此模型，作拉格朗日函数

$$
L(\boldsymbol{\omega}, \zeta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(r_{ij}-\vartheta_i)^2\omega_j^2 + 2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1\right).
$$

求其偏导数，并令

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \omega_j} = 2\sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2\omega_j + 2\zeta = 0, \quad j \in M, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1 = 0, \end{cases}
$$

则有

$$
\begin{cases} \omega_j = -\dfrac{\zeta}{\sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2}, \quad j \in M, & (1.36) \\ \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1. & (1.37) \end{cases}
$$

由(1.36)和(1.37)两式，可得

$$
\zeta = -\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\left[1 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2\right]}, \tag{1.38}
$$

再由(1.36)和(1.38)两式解得

$$
\omega_j = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\left[1 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2\right] \cdot \sum_{i=1}^{n}(r_{ij}-\vartheta_i)^2}, \quad j \in M. \tag{1.39}
$$

在求出属性的最优权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 之后，由(1.12)式算出各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$. 按其大小对方案进行排序，即得到最优方案.

例 1.15 在提拔干部时，决策者为了把德才兼备的人才提拔到领导岗位上，首先制定一些指标，由群众推荐、评议，对各项指标进行打分，然后进行统计处理，从中确定候选人. 假设某单位拟从初选后的 5 位干部 $x_i(i=1,2,3,4,5)$中提拔 1 人担任领导职务，干部的优劣用 6 个属性去衡量，它们分别是：u_1——政策水平；u_2——工作作风；u_3——业务水平；u_4——口才；u_5——写作能力；u_6——健康状况. 群众对每个候选人的各项指标进行打分，经统计处理后，每个候选人在各指标下的百分数如表 1.24(规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$)所示.

表 1.24　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	0.95	0.90	0.93	0.85	0.91	0.95
x_2	0.90	0.88	0.85	0.92	0.93	0.91
x_3	0.92	0.95	0.96	0.84	0.87	0.94
x_4	0.89	0.93	0.88	0.94	0.92	0.90
x_5	0.93	0.91	0.90	0.89	0.92	0.95

假设决策者对各候选人的主观偏好值为

$$\vartheta_1 = 0.82, \vartheta_2 = 0.85, \vartheta_3 = 0.90, \vartheta_4 = 0.75, \vartheta_5 = 0.95.$$

利用(1.39)式求解，得

$$\omega_1 = 0.1778, \omega_2 = 0.1615, \omega_3 = 0.2015,$$

$$\omega_4 = 0.1441, \omega_5 = 0.1565, \omega_6 = 0.1586.$$

再由(1.12)式算出各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$：

$$z_1(\boldsymbol{\omega}) = 0.9172, z_2(\boldsymbol{\omega}) = 0.8959, z_3(\boldsymbol{\omega}) = 0.9162,$$

$$z_4(\boldsymbol{\omega}) = 0.9079, z_5(\boldsymbol{\omega}) = 0.9166,$$

按其大小对方案进行排序，得

$$x_1 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2.$$

故最优方案为 x_1.

第2章 属性权重以偏好信息形式给出且属性值为实数的多属性决策方法及应用

对于这类问题，决策者不能直接给出属性权重，而是利用一定的标度对属性进行两两比较，并构造判断矩阵（一般分为互反判断矩阵、模糊互补判断矩阵和混合判断矩阵），然后按一定的排序方法求得判断矩阵的排序向量，从而获得属性权重．有关互反判断矩阵排序理论与方法的研究已基本成熟，对于模糊互补判断矩阵和混合判断矩阵的排序理论与方法的研究也已取得了一定的进展．由于模糊互补判断矩阵的排序方法对求解属性值为区间数的多属性决策问题也起着十分重要的作用，因此，本章主要介绍模糊互补判断矩阵的排序理论和方法，并且还分别介绍基于 WAA 算子、CWAA 算子、WGA 算子和 CWGA 算子的多属性群决策方法，同时对上述方法进行了实例分析．

2.1 模糊互补判断矩阵的排序方法

2.1.1 模糊互补判断矩阵排序的中转法

定义 2.1[176] 设模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，若

$$(b_{ik}-0.5)+(b_{kj}-0.5)=b_{ij}-0.5,\quad i,j,k\in N, \tag{2.1}$$

即 $b_{ij}=b_{ik}-b_{jk}+0.5, i,j,k\in N$，则称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为加型模糊一致性互补判断矩阵．

令全体 n 阶模糊互补判断矩阵构成的集合为 G，一组权值构成的 n 维正向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 称为排序向量．全

体排序向量构成的集合记为 Λ，即

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \mid \omega_j > 0,\ j \in N,\ \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1 \right\}.$$

一种排序方法可以看做由 G 到 Λ 的一个映射，记为 $\boldsymbol{\omega} = \Gamma(\boldsymbol{B})$，称 $\boldsymbol{\omega}$ 是模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的排序向量.

定义 2.2[191]　一种排序方法称为强条件下保序的，如果对任意 $k \in N$，有 $b_{ik} \geqslant b_{jk}$，则 $\omega_i \geqslant \omega_j$，且当前者所有等式成立时，有 $\omega_i = \omega_j$.

定义 2.3[215]　模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ 称为序传递的，若 $b_{ij} \geqslant 0.5$，则对任意 $k \in N$，有 $b_{ik} \geqslant b_{jk}$；若 $b_{ij} = 0.5$，则对任意 $k \in N$，有 $b_{ik} \geqslant b_{jk}$，或者有 $b_{ik} \leqslant b_{jk}$.

定义 2.4[215]　设 $\Gamma(\cdot)$ 是一种排序方法，$\boldsymbol{B}$ 是任一给定的模糊互补判断矩阵，$\boldsymbol{\omega} = \Gamma(\boldsymbol{B})$. 如果对于任一置换矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$，均有 $\boldsymbol{\Psi\omega}^{\mathrm{T}} = \Gamma(\boldsymbol{\Psi B \Psi}^{\mathrm{T}})$，则称这种排序方法是置换不变的.

定理 2.1　如果对模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times n}$ 按行求和，记

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}, \quad i \in N, \tag{2.2}$$

并施行如下数学变换

$$\bar{b}_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a} + 0.5, \tag{2.3}$$

则矩阵 $\bar{\boldsymbol{B}} = (\bar{b}_{ij})_{n \times n}$ 是加型模糊一致性互补判断矩阵.

一般取 $a = 2(n-1)$ 较为适合，理由如下[214]：

(1) 若采用 01 标度，则判断元素 $\bar{b}_{ij}$ 的取值范围为 $0 \leqslant \bar{b}_{ij} \leqslant 1$，结合(2.3)式可得

$$a \geqslant 2(n-1). \tag{2.4}$$

(2) 若采用 0.10.9 标度，(2.4)式同样成立.

a 取值越大，则由(2.3)式得到的 $\bar{b}_{ij}$ 的取值范围越小，所构造出的加型模糊一致性互补判断矩阵与原判断矩阵的贴近度越差(即从原矩阵中获取越少的判断信息量)；反之，则贴近度越好. 故当 a 取最小值 $a = 2(n-1)$ 时，由(2.3)式所构造出的加型模糊一致性互补判断矩阵能最大限度地利用原判断矩阵中的判断信息，且这两种判断矩阵中对应元素之间的偏差也相应地减少到最低程度(显然，这种偏差是由加型模糊一致性互补判断矩阵对原判断矩阵的一致性修正所造成的). 对不同阶数的判断矩阵，a 的取值将随着判断矩阵阶数 n 的变化而变化，故更能同实际情况相适应. 另外，由转换公式(2.3)得到的加型模糊一致性互补判断矩阵符合人类决策思维的一致性，并且具有很好的鲁棒性(即从

$\bar{B}$ 中划去任意行及其对应列所得到的子矩阵仍是加型模糊一致性互补判断矩阵)和中分传递性.

对于给定的模糊互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，运用转换公式(2.3)得到加型模糊一致性互补判断矩阵 $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ 之后，可以通过 $\bar{B}$ 的行和归一化来求其排序向量.

利用上述思想，下面介绍一个求解模糊互补判断矩阵排序向量的排序公式.

定理 2.2[214] 设模糊互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，对矩阵 B 按行求和得

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij},\quad i\in N,$$

并施行如下数学变换

$$\bar{b}_{ij}=\frac{b_i-b_j}{2(n-1)}+0.5,\tag{2.5}$$

得到模糊一致性互补矩阵 $\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$，由矩阵 $\bar{B}$ 采用行和归一化方法求得的排序向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 满足

$$\omega_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)},\quad i\in N,\tag{2.6}$$

由此导出排序向量的方法称为模糊互补判断矩阵排序的中转法(MTM).

证明 根据题意及(2.1)，(2.2)和(2.5)式，可得

$$\begin{aligned}\omega_i&=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{b}_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{b}_{ij}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{b}_{ij}}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\bar{b}_{ij}+\bar{b}_{ji})+0.5n}\\&=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{b}_{ij}}{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{b}_{ij}}{\frac{n^2}{2}}\\&=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\frac{b_i-b_j}{2(n-1)}+0.5\right]}{\frac{n^2}{2}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{b_i-b_j}{n-1}+n}{n^2}\\&=\frac{b_i+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 2.3[214]　MTM 是强条件下保序的.

证明　设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量，则有

$$\omega_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)},$$

$$\omega_l=\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{lj}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}.$$

若对任意 $j\in N$，有 $b_{ij}\geqslant b_{lj}$，由 ω_i 和 ω_l 的表达式可知 $\omega_i\geqslant\omega_l$，且当前者所有等式成立时，有 $\omega_i=\omega_l$. 因此 MTM 是强条件下保序的. 定理证毕.

由定义 2.3 及定理 2.3，可知

定理 2.4[214]　设模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是序传递的，若 $b_{ij}\geqslant 0.5$，则 $\omega_i\geqslant\omega_l$；若 $b_{ij}=0.5$，则 $\omega_i\geqslant\omega_l$，或者 $\omega_i\leqslant\omega_l$. 其中 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 在 MTM 下的排序向量.

定理 2.5[214]　MTM 具有置换不变性.

证明　设模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，且设 $\boldsymbol{\Psi}$ 是一置换矩阵，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 和 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$ 分别是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 在 MTM 下的排序向量. 经置换后，$\boldsymbol{B}$ 的第 i 行成了 $\boldsymbol{C}$ 的第 l 行，$\boldsymbol{B}$ 的第 i 列成了 $\boldsymbol{C}$ 的第 l 列，因此

$$\omega_i=\frac{\sum_{j=1}^{n}b_{ij}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_{lj}+\frac{n}{2}-1}{n(n-1)}=\upsilon_l,$$

故 MTM 具有置换不变性. 定理证毕.

根据定理 2.2 可知，中转法具有以下特点：

(1) 可以直接由原模糊互补判断矩阵利用排序公式(2.6)求出排序向量.

(2) 该法不仅充分利用了加型模糊一致性互补判断矩阵的优良特性及其判断信息，而且所需计算量远远小于其他一些相关方法.

(3) 省略了许多不必要的中间环节，在实际应用中将给人们带来很大方便.

但是，MTM 仍有不足之处，例如：用该法所得到的排序向量的分量之间的差异较小，有时不易区分.

2.1.2　模糊互补判断矩阵排序的最小方差法

下面从优化角度，即从排序权值所构成的加型模糊一致性互补判断矩阵逼近实际模糊互补判断矩阵的角度给出模糊互补判断矩阵排序的一种最小方

差法.

设判断矩阵 B 是模糊互补判断矩阵，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是 B 的排序向量，若

$$b_{ij}=\omega_i-\omega_j+0.5,\quad i,j\in N,\tag{2.7}$$

则对任意 $k\in N$，有 $b_{ij}=b_{ik}-b_{jk}+0.5$，故矩阵 B 是加型模糊一致性互补判断矩阵. 若 B 不是加型模糊一致性互补判断矩阵，则(2.7)式往往不成立. 为此，引入偏差项，即令

$$f_{ij}=b_{ij}-(\omega_i-\omega_j+0.5),\quad i,j\in N,$$

同时构造偏差函数

$$F(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}-(\omega_i-\omega_j+0.5)]^2.$$

$F(\boldsymbol{\omega})$总是越小越好，因此，合理的排序向量 $\boldsymbol{\omega}^*$ 应使

$$F(\boldsymbol{\omega}^*)=\min_{\boldsymbol{\omega}\in\Lambda}f(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}-(\omega_i-\omega_j+0.5)]^2$$

成立. 由此导出排序向量的方法称为模糊互补判断矩阵排序的最小方差法(LVM).

定理 2.6[215] 设模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则由 LVM 求得的排序向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$满足

$$\omega_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}+1-\frac{n}{2}\right),\quad i\in N.\tag{2.8}$$

证明 构造拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{\omega},\zeta)=F(\boldsymbol{\omega})+\zeta\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_i-1\right).$$

令$\dfrac{\partial L}{\partial\omega_i}=0$，得

$$\sum_{j=1}^{n}2[b_{ij}-(\omega_i-\omega_j+0.5)](-1)+\zeta=0,\quad i\in N,$$

化简为

$$-2\left[\sum_{j=1}^{n}b_{ij}-n\omega_i+1-\frac{n}{2}\right]+\zeta=0,\quad i\in N,\tag{2.9}$$

上式两边对 i 求和，有

$$-2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}-\frac{n^2}{2}\right]+\zeta=0.\tag{2.10}$$

根据模糊互补判断矩阵性质可知

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=\frac{n^2}{2}, \tag{2.11}$$

因此把(2.10)式代入(2.11)式得 $\zeta=0$. 把 $\zeta=0$ 代入(2.9)式并化简，有

$$\omega_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{ij}+1-\frac{n}{2}\right),\quad i\in N.$$

定理证毕.

与定理 2.3 定理 2.5 类似,有如下定理：

定理 2.7[215]　LVM 是强条件下保序的.

定理 2.8[215]　设模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$是序传递的，若 $b_{ij}\geqslant 0.5$，则 $\omega_i\geqslant\omega_j$；若 $b_{ij}=0.5$，则 $\omega_i\geqslant\omega_j$，或者 $\omega_i\leqslant\omega_j$. 其中 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是 $\boldsymbol{B}$ 在 LVM 下的排序向量.

定理 2.9[215]　LVM 具有置换不变性.

可以利用(2.8)式求出模糊互补判断矩阵的排序向量. 通过大量的实践，可以看到，当专家的判断与实际情况严重不符，其所给的模糊互补判断矩阵一致性较差时，也就是当 $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\leqslant\frac{n}{2}-1$ 时，权重 ω_i 会出现负值或 0. 此时，需把问题反馈给专家重新进行判断或利用一致性修正方法对模糊互补判断矩阵进行修正.

2.1.3　模糊互补判断矩阵排序的最小偏差法

下面从另一个优化角度，即从排序权值所构成的积型模糊一致性互补判断矩阵逼近实际模糊互补判断矩阵的角度提出模糊互补判断矩阵排序的最小偏差法(LDM).

1. 预备知识

在多属性决策中，考虑专家对属性进行两两比较，并作出判断：

(1) 若专家按互反型 19 标度[204]进行赋值，给出互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$,它具有如下性质：

$$h_{ij}\in\left[\frac{1}{9},9\right],\quad h_{ji}=\frac{1}{h_{ij}},\quad h_{ii}=1,\quad i,j\in N.$$

若 $h_{ij}=h_{ik}h_{kj},i,j,k\in N$，则称 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$是一致性互反判断矩阵[150,191].

(2) 若专家按互补型 0.10.9 五标度[204]进行赋值，给出模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，它具有如下性质：

$$b_{ij}\in[0.1,0.9],\quad b_{ij}+b_{ji}=1,\quad b_{ii}=0.5,\quad i,j\in N.$$

若 $b_{ik}b_{kj}b_{ji}=b_{ki}b_{jk}b_{ij},i,j,k\in N$，则称 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵[134,218].

由互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 通过转换公式[204]

$$b_{ij}=\frac{h_{ij}}{h_{ij}+1},\quad i,j\in N$$

可得模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$. 并且由模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 通过转换公式[204]

$$h_{ij}=\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}},\quad i,j\in N$$

也可得互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$.

易证下列定理成立.

定理 2.10[204] 设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 是互反判断矩阵，则通过转换公式

$$b_{ij}=\frac{1}{1+h_{ji}},\quad i,j\in N \tag{2.12}$$

可得模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$.

定理 2.11[226] 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是模糊互补判断矩阵，则通过转换公式

$$h_{ij}=\frac{b_{ij}}{b_{ji}},\quad i,j\in N \tag{2.13}$$

可得互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$.

定理 2.12[226] 若 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 是一致性互反判断矩阵，则通过(2.12)式转换而得到的判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵.

定理 2.13[226] 若 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵，则通过(2.13)式转换而得到的判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 是一致性互反判断矩阵.

定义 2.5[226] 设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是模糊互补判断矩阵，称 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的转换矩阵，其中 $h_{ij}=b_{ij}/b_{ji},i,j\in N$.

由于(2.12)和(2.13)两式在不同类型的判断信息之间建立起一座联系的桥梁，因此，它们有着较重要的理论意义和实用价值.

2. 主要结果

设 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 是互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量，其中 $\gamma_j>0$，$j\in N$，$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j=1$,，则当 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 是一致性互反判断矩阵时，有 $h_{ij}=\gamma_i/\gamma_j$，$i,j\in N$. 把它代入(2.12)式，易知 $b_{ij}=\gamma_i/(\gamma_i+\gamma_j),i,j\in N$. 若把该式代入 $b_{ik}b_{kj}b_{ji}=b_{ki}b_{jk}b_{ij},i,j,k\in N$，则等式成立，即 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵. 因此，若设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的排序向

量，其中 $\omega_j>0, j\in N, \sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，则当 B 是积型模糊一致性互补判断矩阵时，有 $b_{ij}=\omega_i/(\omega_i+\omega_j), i,j\in N$，即 $(1-b_{ij})\omega_i=b_{ij}\omega_j, i,j\in N$. 因为 $b_{ij}+b_{ji}=1$，故

$$b_{ji}\omega_i=b_{ij}\omega_j,\quad i,j\in N, \tag{2.14}$$

即

$$\omega_i=\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\omega_j,\quad i,j\in N, \tag{2.15}$$

或

$$\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}=\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}=1,\quad i,j\in N. \tag{2.16}$$

把(2.15)式代入 $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，则可得积型模糊一致性互补判断矩阵排序的精确解为

$$\boldsymbol{\omega}=\left(1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i1}}{b_{1i}},1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{i2}}{b_{2i}},\cdots,1\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{in}}{b_{ni}}\right). \tag{2.17}$$

由于决策者在实际决策时所给出的模糊互补判断矩阵往往是非一致性的，(2.16)式一般不成立，为此引入偏差项

$$f_{ij}=\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}-2,\quad i,j\in N, \tag{2.18}$$

并构造偏差函数

$$F(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}-2\right]. \tag{2.19}$$

显然，合理的排序向量 $\boldsymbol{\omega}^*$ 应使偏差函数 $F(\boldsymbol{\omega})$ 取得最小值，即有

$$\begin{cases}\min F(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}-2\right],\\ \text{s. t.}\quad \omega_j>0, j\in N, \sum_{j=1}^{n}\omega_j=1.\end{cases} \tag{2.20}$$

由此导出排序向量的方法称为模糊互补判断矩阵排序的最小偏差法[242](LDM).

定理 2.14[242] 最小偏差函数 $F(\boldsymbol{\omega})$ 在 Λ 中有惟一最小值点 $\boldsymbol{\omega}^*$，且 $\boldsymbol{\omega}^*$ 是方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j},\quad i\in N \tag{2.21}$$

在 Λ 中的惟一解. 其中 Λ 如 2.1.1 节所定义.

证明 (1)(存在性). 由于 Λ 是一个有限向量空间, $F(\boldsymbol{\omega})$ 是 Λ 中的连续函数，且对任意 $i,j\in N$，有

$$\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}+\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}\geqslant 2\sqrt{\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}}=2,$$

故 $F(\boldsymbol{\omega})\geqslant 0$. 因此 $F(\boldsymbol{\omega})$ 有下确界，即存在一个常数 d，使得 $d=\inf\{F(\boldsymbol{\omega})\mid\boldsymbol{\omega}\in\Lambda\}$. 由连续函数的性质知，存在 $\boldsymbol{\omega}^*\in\Lambda$，使 $F(\boldsymbol{\omega}^*)=d$(因为若 $\boldsymbol{\omega}$ 趋于 Λ 的边界，即有某分量 $\omega_i\to 0(i\in N)$ 时，$F(\boldsymbol{\omega})\to+\infty$)，故 $\boldsymbol{\omega}^*$ 是 $F(\boldsymbol{\omega})$ 在 Λ 中的极小点，而且 $F(\boldsymbol{\omega}^*)$ 可取到最小值. 因为 $\boldsymbol{\omega}^*$ 是条件极值问题

$$\begin{cases}\min F(\boldsymbol{\omega}),\\ \text{s. t.}\quad \omega_j>0, j\in N, \sum_{j=1}^{n}\omega_j=1\end{cases}\tag{2.22}$$

的极小点. 构造拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{\omega},\zeta)=F(\boldsymbol{\omega})+\zeta\Big(\sum_{j=1}^{n}\omega_j-1\Big).\tag{2.23}$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial\omega_k}=0$，可得

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{1}{\omega_j}+\zeta=0,\quad i\in N,\tag{2.24}$$

把(2.24)式两端同乘以 $\omega_i, i\in N$，有

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}+\zeta\omega_i=0,\quad i\in N,\tag{2.25}$$

即

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j}+\zeta=0.\tag{2.26}$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j},\tag{2.27}$$

故 $\zeta=0$. 因此，把 $\zeta=0$ 代入(2.25)式，可得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\cdot\frac{\omega_j}{\omega_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_j},\quad i\in N,\tag{2.28}$$

所以 $\boldsymbol{\omega}^*$ 是方程组(2.21)的解.

(2)(惟一性). 假设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\in\Lambda$ 和 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\Lambda$ 是方程组(2.21)的解. 设 $\delta_i=v_i/\omega_i, \delta_l=\max\limits_{j\in N}\{\delta_j\}$. 若存在 $j\in N$, 使得 $\delta_j<\delta_l$，则

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j}{\omega_l}>\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j}{\omega_l}\frac{\delta_j}{\delta_l}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{v_j}{v_l},\tag{2.29}$$

且

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{\omega_l}{\omega_j}<\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{\omega_l}{\omega_j}\frac{\delta_l}{\delta_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{v_l}{v_j}. \tag{2.30}$$

因此，由(2.21)，(2.29)及(2.30)式，可推得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j}{\omega_l}>\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{\omega_l}{\omega_j}, \tag{2.31}$$

这与方程组(2.21)矛盾. 因此对任意 $i\in N$，均有 $\delta_i=\delta_l$，即

$$\frac{\omega_1}{v_1}=\frac{\omega_2}{v_2}=\cdots=\frac{\omega_n}{v_n},$$

又因为 $\boldsymbol{\omega},v\in\Lambda$，故 $\omega_i=v_i, i\in N$，即 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{v}$. 定理证毕.

定理 2.15[242]　LDM 是强条件下保序的.

证明　由 LDM 得到的模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$，满足

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{ik}}{b_{ki}}\frac{\omega_k}{\omega_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{ki}}{b_{ik}}\frac{\omega_i}{\omega_k}, \tag{2.32}$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{ik}}{b_{ki}}\omega_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{ki}}{b_{ik}}\frac{\omega_i^2}{\omega_k}. \tag{2.33}$$

又因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\frac{\omega_k}{\omega_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{kj}}{b_{jk}}\frac{\omega_j}{\omega_k}, \tag{2.34}$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\omega_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{kj}}{b_{jk}}\frac{\omega_j^2}{\omega_k}. \tag{2.35}$$

因为对任意 $k\in N$，有 $b_{ik}\geqslant b_{jk}$，故 $b_{ki}\leqslant b_{kj}$，即 $1/b_{ki}\geqslant 1/b_{kj}$. 因此 $b_{ik}/b_{ki}\geqslant b_{jk}/b_{kj}$，于是

$$\frac{b_{ik}}{b_{ki}}\omega_k\geqslant\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\omega_k, \tag{2.36}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{ik}}{b_{ki}}\omega_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\omega_k. \tag{2.37}$$

由(2.33)，(2.35)及(2.37)式，得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{ki}}{b_{ik}}\frac{\omega_i^2}{\omega_k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{kj}}{b_{jk}}\frac{\omega_j^2}{\omega_k}. \tag{2.38}$$

又因为 $b_{ik}\geqslant b_{jk}$(即 $b_{ki}\leqslant b_{kj}$)，则对任意 $k\in N$，有 $b_{ki}/b_{ik}\leqslant b_{kj}/b_{jk}$，因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_i^2}{\omega_k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_j^2}{\omega_k}. \tag{2.39}$$

根据(2.39)式，有 $\omega_i^2 \geqslant \omega_j^2$，因此 $\omega_i \geqslant \omega_j$. 定理证毕.

根据定理 2.15，易证下列结论成立.

定理 2.16[242] 设模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是序传递的，若 $b_{ij}\geqslant 0.5$，则 $\omega_i \geqslant \omega_l$；若 $b_{ij}=0.5$，则 $\omega_i \geqslant \omega_l$，或者 $\omega_i \leqslant \omega_l$. 其中 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 在 LVM 下的排序向量.

3. 收敛性迭代算法

设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是一个模糊互补判断矩阵，k 是迭代次数. 为了求解方程组(2.21)，可按如下算法步骤进行迭代[242]：

步骤 1 取定初始排序向量 $\boldsymbol{\omega}(0)=(\omega_1(0),\omega_2(0),\cdots,\omega_n(0))\in \Lambda$，并给定迭代精度 ε(一般取 $0<\varepsilon<1$)，同时置 $k=0$.

步骤 2 计算

$$\eta_i[\boldsymbol{\omega}(k)]=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_i(k)}-\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{\omega_i(k)}{\omega_j(k)}\right],\quad i\in N. \tag{2.40}$$

若对任意 $i\in N$，$|\eta_i[\boldsymbol{\omega}(k)]|<\varepsilon$ 均成立，则 $\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}(k)$，转步骤 5；否则，进行下一步.

步骤 3 确定 l 使得 $|\eta_l[\boldsymbol{\omega}(k)]|=\max\limits_{i\in N}\{|\eta_i[\boldsymbol{\omega}(k)]|\}$，且计算

$$v(k)=\left[\frac{\sum\limits_{j\neq l}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_l(k)}}{\sum\limits_{j\neq l}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{\omega_l(k)}{\omega_j(k)}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.41}$$

$$\omega_i'(k)=\begin{cases}v(k)\omega_l(k), & i=l,\\ \omega_i(k), & i\neq l,\end{cases} \tag{2.42}$$

$$\omega_i(k+1)=\frac{\omega_i'(k)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j'(k)},\quad i\in N. \tag{2.43}$$

步骤 4 令 $k=k+1$；转步骤 2.

步骤 5 输出 $\boldsymbol{\omega}^*$，从而获得模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的排序向量.

定理 2.17[242] 对任意 $\varepsilon>0$ 及初始排序向量 $\boldsymbol{\omega}(0)=(\omega_1(0),\omega_2(0),\cdots,\omega_n(0))\in\Lambda$，上述算法必在有限步内迭代收敛.

证明 考虑 $F(\boldsymbol{\omega})$，$\boldsymbol{\omega}\in\Lambda$ 的变化. 假设 $\alpha>0$，且设

$$r(\alpha)=F[\dot{\boldsymbol{\omega}}(k)]=F[\omega_1(k),\cdots,\omega_{l-1}(k),\alpha\omega_l(k),\omega_{l+1}(k),\cdots,\omega_n(k)]$$
$$=2\left[\sum_{j\neq l}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{\omega_j(k)}{\alpha\omega_l(k)}+\sum_{j\neq l}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{\alpha\omega_l(k)}{\omega_j(k)}+\sum_{i\neq l}\sum_{j\neq l}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_i(k)}-(n^2-1)\right]. \tag{2.44}$$

令

$$h_0 = \sum_{i\neq l}\sum_{j\neq l}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_i(k)} - (n^2-1), \tag{2.45}$$

$$h_1 = \sum_{j\neq l}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_l(k)}, \tag{2.46}$$

$$h_2 = \sum_{j\neq l}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{\omega_l(k)}{\omega_j(k)}, \tag{2.47}$$

则(2.44)式能被表示成 $r(\alpha)=2(h_1/\alpha+h_2\alpha+h_0)$. 对 α 求导，即 $r'(\alpha)=0$，则存在 α^* 和 $r(\alpha^*)$使得 $r(\alpha^*)=\min r(\alpha)$，即

$$\alpha^* = \left[\frac{\displaystyle\sum_{j\neq l}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_l(k)}}{\displaystyle\sum_{j\neq l}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{\omega_l(k)}{\omega_j(k)}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.48}$$

$$r(\alpha^*) = 4\sqrt{h_1h_2}+2h_0. \tag{2.49}$$

若 $\alpha^*=1$，则由(2.48)式，可得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{lj}}{b_{jl}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_l(k)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jl}}{b_{lj}}\frac{\omega_l(k)}{\omega_j(k)}. \tag{2.50}$$

根据步骤 3 中 l 的取法，有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{\omega_j(k)}{\omega_i(k)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ji}}{b_{ij}}\frac{\omega_i(k)}{\omega_j(k)},\quad i\in N, \tag{2.51}$$

由定理 2.14，可知算法收敛，且 $\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}(k)$. 若 $\alpha^*\neq 1$，则

$$\begin{aligned} F[\boldsymbol{\omega}(k)]-F[\dot{\boldsymbol{\omega}}(k)] &= r(1)-r(\alpha^*) \\ &= 2(h_1+h_2-2\sqrt{h_1h_2}) \\ &= 2(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2})^2 > 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

由于 $F(\boldsymbol{\omega})$是一个齐次函数，$F[\dot{\boldsymbol{\omega}}(k)]=F[\boldsymbol{\omega}(k+1)]$. (2.52)式表明：对任意 $k\in N$，均有 $F[\boldsymbol{\omega}(k+1)]<F[\boldsymbol{\omega}(k)]$，即 $F[\boldsymbol{\omega}(k)]$是一个单调递减序列. 又因为 $F(\boldsymbol{\omega})$在向量空间 Λ 上是一个有界非负函数，根据数学分析原理可以知道，一个单调递减有界序列必收敛. 定理证毕.

2.1.4　模糊互补判断矩阵排序的特征向量法

文献[150]给出了互反判断矩阵排序的特征向量法. 该方法的突出特点是具有累积优势度，即通过加权平均累积优势度向量的极限可以揭示属性(或方案)重要性的排序. 下面利用模糊互补判断矩阵和互反判断矩阵之间的关系提出模糊互补判断矩阵排序的特征向量法.

设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$是积型模糊一致性互补判断矩阵，由于 $\boldsymbol{B}$ 的转换矩阵 $\boldsymbol{H}=$

$(h_{ij})_{n\times n}$为一致性互反矩阵，其中$h_{ij}=\omega_i/\omega_j, i,j\in N$，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是$B$的排序向量，因此，存在特征根问题

$$H\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}=n\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}. \tag{2.53}$$

然而，由于客观事物的复杂性及决策者知识水平的影响，在实际决策时决策者所做出的判断往往是非一致性的，故(2.53)式一般不成立. 因此，可以用下列特征值问题来近似取代(2.53)式：

$$H\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}=\lambda_{\max}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}, \tag{2.54}$$

其中$\lambda_{\max}$为互反判断矩阵H的最大特征值，$\boldsymbol{\omega}$为H的最大特征值所对应的特征向量，归一化后就是H的排序向量，显然，它也是模糊互补判断矩阵B的排序向量. 称由此导出排序向量的方法为模糊互补判断矩阵排序的特征向量法(CEM).

与互反判断矩阵排序的特征向量法类似，易证 CEM 有下列性质.

定理 2.18[218] 设模糊互补判断矩阵$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是模糊互补判断矩阵$B$的排序向量(由 CEM 求得)，若对任意$k(k=1,2,\cdots,n)$有$b_{ik}\geqslant b_{jk}(b_{ik}\leqslant b_{jk})$，则$\omega_i\geqslant\omega_j(\omega_i\leqslant\omega_j)$，且当前者所有的等式成立时有$\omega_i=\omega_j$.

为了求得模糊互补判断矩阵B的排序向量$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$(即求解(2.54)式)，给出下列迭代算法[218]：

步骤 1 对于给定的模糊互补判断矩阵$B=(b_{ij})_{n\times n}$，通过转换公式$h_{ij}=b_{ij}/b_{ji}, i,j\in N$，得到相应的转换矩阵$H=(h_{ij})_{n\times n}$.

步骤 2 任取初始正向量$\boldsymbol{\omega}(0)=[\omega_1(0),\omega_2(0),\cdots,\omega_n(0)]\in\Lambda$，给定迭代精度$\varepsilon$. 令$k=0$.

步骤 3 计算

$$q_0=\max_j\{\omega_j(0)\},\ \bar{\boldsymbol{\omega}}(0)=\frac{\boldsymbol{\omega}(0)}{q_0}.$$

步骤 4 迭代计算

$$\boldsymbol{\omega}(k+1)^{\mathrm{T}}=H\bar{\boldsymbol{\omega}}(k)^{\mathrm{T}},\ q_{k+1}=\max_j\{\omega_j(k+1)\},\ \bar{\boldsymbol{\omega}}(k+1)=\frac{\boldsymbol{\omega}(k+1)}{q_{k+1}}.$$

步骤 5 若$|q_{k+1}-q_k|<\varepsilon$，则进行下一步；否则，令$k=k+1$，转步骤 4.

步骤 6 将$\bar{\boldsymbol{\omega}}(k+1)$归一化，即

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}(k+1)}{\sum_{j=1}^{n}\bar{\omega}_j(k+1)},$$

$\boldsymbol{\omega}$为转换矩阵H的排序向量，也为模糊互补判断矩阵B的排序向量.

2.1.5 模糊互补判断矩阵的一致性修正算法

理想的判断矩阵应该满足一致性条件，若模糊互补判断矩阵B不满足一致

性条件，则 B 为非模糊一致性互补判断矩阵，其相应的转换矩阵 H 也为非一致性互反判断矩阵. 为了保证判断矩阵排序的可信度和准确性，有必要对判断质量进行一致性检验. 文献[194]中推导出了互反判断矩阵的一致性指标：

$$\mathrm{CI}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[a_{ij}\frac{\omega_j}{\omega_i}+a_{ji}\frac{\omega_i}{\omega_j}-2\right]. \tag{2.55}$$

Saaty[150]给出了检验互反判断矩阵的一致性比例

$$\mathrm{CR}=\mathrm{CI}/\mathrm{RI}, \tag{2.56}$$

其中 RI 为平均随机一致性指标(如表 2.1 所示). 当 $\mathrm{CR}<0.1$ 时，则称相应的互反判断矩阵是一致性可接受的.

表 2.1　平均随机一致性指标 RI

矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7	8
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41
矩阵阶数	9	10	11	12	13	14	15	
RI	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59	

将(2.13)式代入(2.55)式，并且结合(2.56)式，可以得到检验模糊互补判断矩阵一致性的通用公式

$$\begin{cases}\mathrm{CI}=\dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\dfrac{b_{ij}}{b_{ji}}\dfrac{\omega_j}{\omega_i}+\dfrac{b_{ji}}{b_{ij}}\dfrac{\omega_i}{\omega_j}-2\right),\\ \mathrm{CR}=\mathrm{CI}/\mathrm{RI}.\end{cases} \tag{2.57}$$

对于(2.57)式中的 CR，若 $\mathrm{CR}<0.1$，则称相应的模糊互补判断矩阵是一致性可接受的；否则，称相应的模糊互补判断矩阵是一致性不可接受的，此时，需对该模糊互补判断矩阵重新进行判断或按下面所给出的算法进行一致性调整.

下面将从不同的角度给出修正模糊互补判断矩阵一致性的 3 种算法.

(1) 每次迭代均对模糊互补判断矩阵进行全面修正的算法(算法Ⅰ)[234]

设 $\mathbb{R}_n^+=\{\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\mid v_i>0,v_i\in\mathbb{R},i\in N\}$.

引理 2.1[6] (Perron)　设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$是一个正矩阵(即 $h_{ij}>0,i,j\in N$)，且 $\lambda_{\max}$是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的最大特征值，则

$$\lambda_{\max}=\min_{v\in\mathbb{R}_n^+}\max_i\sum_{j=1}^n h_{ij}(v_j/v_i).$$

引理 2.2　设 $x>0,y>0,\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1$，则

$$x^\alpha y^\beta\leqslant\alpha x+\beta y,$$

当且仅当 $x=y$,等式成立.

引理 2.3 设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$是一个正互反矩阵(即 $h_{ij}>0,h_{ji}=1/h_{ij},i,j\in N$),且 $\lambda_{\max}$是 $\boldsymbol{H}$ 的最大特征值,则

$$\lambda_{\max}\geqslant n,$$

当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 是一致性的,等式成立.

定理 2.19 设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$是一个正互反矩阵,$\lambda_{\max}$是 $\boldsymbol{H}$ 的最大特征值,且 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$是 $\boldsymbol{H}$ 的特征向量. 设 $\boldsymbol{H}^*=(h_{ij}^*)_{n\times n}$,其中

$$h_{ij}^*=h_{ij}^{\alpha}(\gamma_i/\gamma_j)^{1-\alpha},\quad i,j\in N,0<\alpha<1,$$

且设 $\mu_{\max}$是 $\boldsymbol{H}^*$ 的最大特征值,则

$$\mu_{\max}\leqslant\lambda_{\max},$$

当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 是一致性的,等式成立.

证明 设 $e_{ij}=h_{ij}(\gamma_j/\gamma_i),i,j\in N$,则 $\lambda_{\max}=\sum_{j=1}^{n}e_{ij}$,且 $h_{ij}^*=e_{ij}^{\alpha}(\gamma_i/\gamma_j)$. 从引理 2.1 引理 2.3,可得

$$\begin{aligned}\mu_{\max}&=\min_{v\in\mathbb{R}_n^+}\max_i\sum_{j=1}^{n}h_{ij}^*(v_j/v_i)\leqslant\max_i\sum_{j=1}^{n}h_{ij}^*(\gamma_j/\gamma_i)\\&=\max_i\sum_{j=1}^{n}e_{ij}^{\alpha}\leqslant\max_i\sum_{j=1}^{n}(\alpha e_{ij}+1-\alpha)\\&\leqslant\alpha\lambda_{\max}+(1-\beta)n\leqslant\lambda_{\max},\end{aligned}$$

当且仅当 $\lambda_{\max}=n$ 时等式成立,即 $\boldsymbol{H}$ 是一致性的互反判断矩阵. 定理证毕.

定理 2.20 设 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$是一个正互反矩阵,$\lambda_{\max}$是 $\boldsymbol{H}$ 的最大特征值,且 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$是 $\boldsymbol{H}$ 的特征向量. 设 $\boldsymbol{H}^*=(h_{ij}^*)_{n\times n}$,其中

$$h_{ij}^*=\begin{cases}\alpha h_{ij}+(1-\alpha)(\gamma_i/\gamma_j), & i\in N,j=i,i+1,\cdots,n,\\ \dfrac{1}{\alpha h_{ji}+(1-\alpha)(\gamma_j/\gamma_i)}, & i=2,3,\cdots,n,j=1,2,\cdots,i-1,0<\alpha<1,\end{cases}$$

且设 $\mu_{\max}$是 $\boldsymbol{H}^*$ 的最大特征值,则

$$\mu_{\max}\leqslant\lambda_{\max},$$

当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 是一致性的,等式成立.

证明 设 $e_{ij}=a_{ij}(w_j/w_i)$, $i,j\in N$,则 $\lambda_{\max}=\sum_{j=1}^{n}e_{ij}$. 首先证明

$$\frac{1}{\alpha e_{ji}+(1-\alpha)}\leqslant\alpha e_{ij}+(1-\alpha),\tag{2.58}$$

即

$$[\alpha e_{ij}+(1-\alpha)][\alpha e_{ji}+(1-\alpha)]\geqslant 1.\tag{2.59}$$

(2.59)式能简化为

$$e_{ij}+1/e_{ij}\geqslant 2, \tag{2.60}$$

而(2.60)式必然成立，所以(2.58)式也成立. 定理证毕.

从引理 2.1 和(2.58)式可得

$$\begin{aligned}
\mu_{\max} &= \min_{v\in\mathbb{R}_n^+}\max_i\sum_{j=1}^n h_{ij}^*(v_j/v_i)\leqslant \max_i\sum_{j=1}^n h_{ij}^*(\gamma_j/\gamma_i)\\
&=\max_i\left\{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\alpha h_{ji}+(1-\alpha)(\gamma_j/\gamma_i)}+\sum_{j=i}^n[\alpha h_{ij}+(1-\alpha)(\gamma_i/\gamma_j)]\right\}(\gamma_j/\gamma_i)\\
&=\max_i\left\{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\alpha e_{ji}+(1-\alpha)}+\sum_{j=i}^n[\alpha e_{ij}+(1-\alpha)]\right\}\\
&\leqslant\max_i\left\{\sum_{j=1}^{i-1}[\alpha e_{ij}+(1-\alpha)]+\sum_{j=1}^n[\alpha e_{ij}+(1-\alpha)]\right\}\\
&=\max_i\sum_{j=1}^n[\alpha e_{ij}+(1-\alpha)]=\alpha\max_i\sum_{j=1}^n e_{ij}+(1-\alpha)n\\
&=\alpha\lambda_{\max}+(1-\alpha)n\leqslant\alpha\lambda_{\max}+(1-\alpha)\lambda_{\max}=\lambda_{\max},
\end{aligned}$$

当且仅当 $\lambda_{\max}=n$ 时等式成立，即 $\boldsymbol{H}$ 是一致性的正互反判断矩阵. 定理证毕.

下面给出一种增进模糊互补判断矩阵一致性的收敛性迭代算法，并给出两个检验修正有效性的标准.

算法Ⅰ步骤如下：

设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 是一致性不可接受的模糊互补判断矩阵，k 为迭代次数，且 $\alpha\in(0,1)$.

步骤 1　设 $\boldsymbol{B}^{(0)}=(b_{ij}^{(0)})_{n\times n}=(b_{ij})_{n\times n}$，且 $k=0$.

步骤 2　由(2.13)式得到相应于 $\boldsymbol{B}^{(0)}$ 的互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}^{(0)}=(h_{ij}^{(0)})_{n\times n}$.

步骤 3　计算 $\boldsymbol{H}^{(k)}=(h_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ 的权重向量 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}=(\gamma_1^{(k)},\gamma_2^{(k)},\cdots,\gamma_n^{(k)})$.

步骤 4　由(2.55)和(2.56)两式，可得一致性比例 $\mathrm{CR}^{(k)}$. 若 $\mathrm{CR}^{(k)}<0.1$，则转到步骤 7；否则，进行下一步.

步骤 5　设 $\boldsymbol{H}^{(k+1)}=(h_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$，其中 $h_{ij}^{(k+1)}$ 可由下面的①或②得到：

① 加权几何平均形式

$$h_{ij}^{(k+1)}=(h_{ij}^{(k)})^{\alpha}(\gamma_i^{(k)}/\gamma_j^{(k)})^{1-\alpha},\quad i,j\in N.$$

② 加权算术平均形式

$$h_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}\alpha h_{ij}^{(k)}+(1-\alpha)(\gamma_i^{(k)}/\gamma_j^{(k)}), & i\in N,j=i,i+1,\cdots,n,\\ \dfrac{1}{\alpha h_{ji}^{(k)}+(1-\alpha)(\gamma_j^{(k)}/\gamma_i^{(k)})}, & i=2,3,\cdots,n,j=1,2,\cdots,i-1.\end{cases}$$

步骤 6 设 $k=k+1$，转步骤 3.

步骤 7 由(2.12)式，得到相应的互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}^{(k)}=(b_{ij}^{(k)})_{n\times n}$.

步骤 8 输出 $k,\boldsymbol{B}^{(k)}$ 和 $\mathrm{CR}^{(k)}$，则 $\boldsymbol{B}^{(k)}$ 即为修正的一致性可接受的模糊互补判断矩阵.

类似文献[203]中定理 2 的证明，由定理 2.19 和定理 2.20，可得下列结论：

定理 2.21（算法Ⅰ的收敛性定理） 对于上面的算法，有

$$\mathrm{CR}^{(k+1)}<\mathrm{CR}^{(k)},\quad \lim_{k\to+\infty}\mathrm{CR}^{(k)}=0.$$

由定理 2.21 可知，算法Ⅰ在有限步终止.

为了检验修正的有效性，给出下列两个检验标准：

$$\delta^{(k)}=\max_{i,j}\{|b_{ij}^{(k)}-b_{ij}^{(0)}|\},\quad i,j\in N,$$

$$\sigma^{(k)}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}^{(k)}-b_{ij}^{(0)})^2}}{n}.$$

上述两式均可作为 $\boldsymbol{B}^{(k)}$ 偏离 $\boldsymbol{B}^{(0)}$ 程度的一个衡量指标. 显然 $\delta^{(k)}\geqslant\sigma^{(k)}\geqslant 0$.

一般地，若 $\delta^{(k)}<0.2$ 且 $\sigma^{(k)}<0.1$，则此修正被认为是可接受的. 在这种情况下，所得到的修正模糊互补判断矩阵较多地保存着原始模糊互补判断矩阵的判断信息.

类似地，给出下面两种算法：

（2）每次迭代只对模糊互补判断矩阵的某一行及其相应的列进行修正的算法（算法Ⅱ）[222]

算法Ⅱ仅将算法Ⅰ中的步骤 5 替换如下，而其余步骤均不变.

步骤 5 把 $\boldsymbol{H}^{(k)}=(h_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ 的所有列归一化，则得到相应的归一化矩阵 $\overline{\boldsymbol{H}}^{(k)}=(\boldsymbol{h}_1^{(k)},\boldsymbol{h}_2^{(k)},\cdots,\boldsymbol{h}_n^{(k)})$，其中 $\boldsymbol{h}_i^{(k)}(i\in N)$ 是 $\overline{\boldsymbol{H}}^{(k)}$ 的列向量. 计算 $\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{h}_i^{(k)}$ 之间的夹角余弦值

$$\cos\theta_i^{(k)}=\frac{(\boldsymbol{\gamma}^{(k)},\boldsymbol{h}_i^{(k)})}{|\boldsymbol{\gamma}^{(k)}||\boldsymbol{h}_i^{(k)}|},$$

确定 l 使得 $\cos\theta_l^{(k)}=\min_i\{\cos\theta_i^{(k)}\}$. 设 $\boldsymbol{H}^{(k+1)}=(h_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$，其中 $h_{ij}^{(k+1)}$ 可由下列任何一种形式确定：

① 加权几何平均形式

$$h_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}(h_{il}^{(k)})^{\alpha}(\gamma_i^{(k)}/\gamma_l^{(k)})^{1-\alpha}, & j=l,\\ (h_{lj}^{(k)})^{\alpha}(\gamma_l^{(k)}/\gamma_j^{(k)})^{1-\alpha}, & i=l,\\ h_{ij}^{(k)}, & \text{其他}.\end{cases}$$

② 加权算术平均形式

$$h_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}\alpha h_{il}^{(k)}+(1-\alpha)(\gamma_i^{(k)}/\gamma_l^{(k)}), & j=l,\\ \dfrac{1}{\alpha h_{jl}^{(k)}+(1-\alpha)(\gamma_j^{(k)}/\gamma_l^{(k)})}, & i=l;\\ h_{ij}^{(k)}, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 每次迭代只对模糊互补判断矩阵中偏差最大的一对元素进行修正的算法(算法Ⅲ)[222]

算法Ⅲ仅将算法Ⅰ中的步骤 5 替换如下，而其余步骤不变.

步骤 5　设 $e_{ij}^{(k)}=h_{ij}^{(k)}(\gamma_j^{(k)}/\gamma_i^{(k)})$，确定 l,s 使得 $e_{ls}^{(k)}=\max\limits_{i,j}\{e_{ij}^{(k)}\}$. 设 $\boldsymbol{H}^{(k+1)}=(h_{ij}^{(k+1)})_{n\times n}$，其中 $h_{ij}^{(k+1)}$ 可由下列任何一种形式获得：

① 加权几何平均形式

$$h_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}(h_{ls}^{(k)})^{\alpha}(\gamma_l^{(k)}/\gamma_s^{(k)})^{1-\alpha}, & (i,j)=(l,s),\\ (h_{sl}^{(k)})^{\alpha}(\gamma_s^{(k)}/\gamma_l^{(k)})^{1-\alpha}, & (i,j)=(s,l),\\ h_{ij}^{(k)}, & (i,j)\neq(l,s),(s,l).\end{cases}$$

② 加权算术平均形式

$$h_{ij}^{(k+1)}=\begin{cases}\alpha h_{ls}^{(k)}+(1-\alpha)(\gamma_r^{(k)}/\gamma_s^{(k)}), & (i,j)=(l,s),\\ \dfrac{1}{\alpha h_{ls}^{(k)}+(1-\alpha)(\gamma_l^{(k)}/\gamma_s^{(k)})}, & (i,j)=(s,l),\\ h_{ij}^{(k)}, & (i,j)\neq(l,s),(s,l).\end{cases}$$

例 2.1　原始模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 及其 $\boldsymbol{\omega}$，CR 如下：

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.3\\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.6\\ 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.7\\ 0.7 & 0.4 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}=(0.2044,0.2697,0.2973,0.2286),\quad \mathrm{CR}=0.1593.$$

分别用上述 3 种算法对其进行修正. 具体结果见表 2.2 表 2.7.

表 2.2　利用算法Ⅰ中加权几何平均形式修正的模糊互补判断矩阵及其相应的参数

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.5	0.448	0.407	0.454	0.204	0.002	0.154	0.098
		0.552	0.5	0.488	0.547	0.270			
		0.593	0.512	0.5	0.579	0.298			
		0.546	0.453	0.421	0.5	0.228			
0.3	1	0.5	0.482	0.405	0.418	0.203	0.014	0.118	0.076
		0.518	0.5	0.513	0.559	0.271			
		0.595	0.487	0.5	0.608	0.299			
		0.582	0.441	0.392	0.5	0.227			

续表

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.5	1	0.5	0.516	0.404	0.382	0.203	0.039	0.084	0.053
		0.484	0.5	0.538	0.571	0.271			
		0.596	0.462	0.5	0.635	0.299			
		0.618	0.429	0.365	0.5	0.227			
0.7	1	0.5	0.550	0.402	0.349	0.204	0.076	0.050	0.032
		0.450	0.5	0.563	0.582	0.271			
		0.598	0.437	0.5	0.662	0.298			
		0.651	0.418	0.338	0.5	0.227			
0.9	3	0.5	0.555	0.402	0.344	0.204	0.083	0.045	0.028
		0.445	0.5	0.567	0.585	0.271			
		0.598	0.433	0.5	0.666	0.298			
		0.656	0.415	0.334	0.5	0.227			

表 2.3　利用算法 I 中加权算术平均形式修正的模糊互补判断矩阵及其相应的参数

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.2	1	0.5	0.475	0.406	0.444	0.208	0.008	0.144	0.085
		0.525	0.5	0.506	0.554	0.269			
		0.594	0.494	0.5	0.601	0.299			
		0.556	0.446	0.399	0.5	0.224			
0.4	1	0.5	0.513	0.404	0.414	0.210	0.028	0.114	0.062
		0.487	0.5	0.534	0.567	0.270			
		0.596	0.466	0.5	0.631	0.300			
		0.586	0.433	0.369	0.5	0.220			
0.6	1	0.5	0.546	0.403	0.381	0.210	0.059	0.081	0.041
		0.454	0.5	0.558	0.578	0.270			
		0.597	0.442	0.5	0.658	0.300			
		0.619	0.422	0.342	0.5	0.220			
0.8	2	0.5	0.553	0.403	0.377	0.211	0.066	0.077	0.037
		0.447	0.5	0.563	0.582	0.271			
		0.597	0.437	0.5	0.666	0.300			
		0.623	0.418	0.337	0.5	0.219			

表 2.4　利用算法Ⅱ中加权几何平均形式修正的模糊互补判断矩阵及其相应的参数

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.5	0.448	0.407	0.454	0.198	0.038	0.154	0.077
		0.552	0.5	0.6	0.6	0.314			
		0.593	0.4	0.5	0.7	0.301			
		0.546	0.4	0.3	0.5	0.186			
0.3	1	0.5	0.482	0.405	0.418	0.199	0.054	0.118	0.059
		0.518	0.5	0.6	0.6	0.305			
		0.595	0.4	0.7	0.7	0.302			
		0.582	0.4	0.3	0.5	0.194			
0.5	1	0.5	0.516	0.404	0.381	0.201	0.076	0.084	0.042
		0.484	0.5	0.6	0.6	0.295			
		0.596	0.4	0.5	0.7	0.301			
		0.618	0.4	0.3	0.5	0.203			
0.7	2	0.5	0.509	0.402	0.389	0.200	0.072	0.091	0.045
		0.491	0.5	0.6	0.6	0.297			
		0.598	0.4	0.5	0.7	0.302			
		0.611	0.4	0.3	0.5	0.201			
0.9	4	0.5	0.540	0.402	0.358	0.202	0.095	0.060	0.030
		0.460	0.5	0.6	0.6	0.288			
		0.598	0.4	0.5	0.7	0.301			
		0.642	0.4	0.3	0.5	0.209			

表 2.5　利用算法Ⅱ中加权算术平均形式修正的模糊互补判断矩阵及其相应的参数

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.5	0.444	0.407	0.446	0.196	0.039	0.156	0.076
		0.556	0.5	0.6	0.6	0.315			
		0.593	0.4	0.5	0.7	0.301			
		0.554	0.4	0.3	0.5	0.188			
0.3	1	0.5	0.471	0.405	0.403	0.194	0.056	0.129	0.058
		0.529	0.5	0.6	0.6	0.307			
		0.595	0.4	0.5	0.7	0.302			
		0.597	0.4	0.3	0.5	0.197			
0.5	1	0.5	0.502	0.404	0.367	0.194	0.077	0.098	0.042
		0.498	0.5	0.6	0.6	0.298			
		0.596	0.4	0.5	0.7	0.301			
		0.633	0.4	0.3	0.5	0.207			

续表

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.7	2	0.5	0.490	0.4	0.369	0.191	0.072	0.110	0.046
		0.510	0.5	0.6	0.6	0.301			
		0.6	0.4	0.5	0.7	0.303			
		0.631	0.4	0.3	0.5	0.206			
0.9	4	0.5	0.521	0.4	0.343	0.193	0.095	0.079	0.032
		0.479	0.5	0.6	0.6	0.292			
		0.6	0.4	0.5	0.7	0.302			
		0.657	0.4	0.3	0.5	0.213			

表 2.6 利用算法Ⅲ中加权几何平均形式修正的模糊互补判断矩阵及其相应的参数

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	3	0.5	0.469	0.4	0.454	0.204	0.022	0.154	0.079
		0.531	0.5	0.507	0.6	0.278			
		0.6	0.495	0.5	0.7	0.331			
		0.546	0.4	0.3	0.5	0.187			
0.3	3	0.5	0.494	0.4	0.418	0.202	0.038	0.118	0.062
		0.506	0.5	0.524	0.6	0.277			
		0.6	0.476	0.5	0.7	0.326			
		0.582	0.4	0.3	0.5	0.195			
0.5	4	0.5	0.461	0.4	0.382	0.189	0.044	0.139	0.060
		0.539	0.5	0.6	0.6	0.311			
		0.6	0.4	0.5	0.653	0.286			
		0.608	0.4	0.347	0.5	0.213			
0.7	6	0.5	0.475	0.4	0.383	0.191	0.055	0.125	0.054
		0.525	0.5	0.569	0.6	0.294			
		0.6	0.431	0.5	0.7	0.312			
		0.617	0.4	0.3	0.5	0.203			
0.9	12	0.5	0.501	0.4	0.358	0.192	0.077	0.099	0.041
		0.499	0.5	0.6	0.6	0.298			
		0.6	0.4	0.5	0.690	0.299			
		0.642	0.4	0.310	0.5	0.211			

表 2.7　利用算法Ⅲ中加权算术平均形式修正的模糊互补判断矩阵及其相应的参数

α	k	$\boldsymbol{H}^{(k)}$				$\boldsymbol{\gamma}^{(k)}$	$\mathrm{CR}^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	3	0.5	0.473	0.4	0.446	0.203	0.024	0.146	0.076
		0.527	0.5	0.507	0.6	0.277			
		0.6	0.493	0.5	0.7	0.331			
		0.554	0.4	0.3	0.5	0.189			
0.3	3	0.5	0.503	0.4	0.403	0.202	0.046	0.103	0.056
		0.497	0.5	0.528	0.6	0.275			
		0.6	0.472	0.5	0.7	0.324			
		0.597	0.4	0.3	0.5	0.199			
0.5	4	0.5	0.477	0.4	0.367	0.190	0.054	0.123	0.052
		0.523	0.5	0.6	0.6	0.306			
		0.6	0.4	0.5	0.656	0.287			
		0.633	0.4	0.344	0.5	0.217			
0.7	6	0.5	0.496	0.4	0.370	0.194	0.065	0.104	0.045
		0.504	0.5	0.6	0.6	0.301			
		0.6	0.4	0.5	0.675	0.293			
		0.630	0.4	0.325	0.5	0.212			
0.9	16	0.5	0.502	0.4	0.364	0.193	0.075	0.098	0.042
		0.498	0.5	0.6	0.6	0.298			
		0.6	0.4	0.5	0.692	0.299			
		0.636	0.4	0.308	0.5	0.209			

2.1.6　算例分析

例 2.2　设对于某一多属性决策问题，有 4 **个属性** $u_i(i=1,2,3,4)$. **为了确定它们的权重，专家对** $u_i(i=1,2,3,4)$**利用** 0.1～0.9 **五标度进行两两比较，并给出下列模糊互补判断矩阵**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.8\\0.3 & 0.5 & 0.4 & 0.6\\0.4 & 0.6 & 0.5 & 0.7\\0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}.$$

(1) **若利用** MTM **排序法求解，则得矩阵** B **的排序向量为**

$$\boldsymbol{\omega}=(0.3000,0.2333,0.2667,0.2000).$$

(2) **若利用** LVM **排序法求解，则得矩阵** $\boldsymbol{B}$ **的排序向量为**

$$\boldsymbol{\omega}=(0.4000,0.2000,0.3000,0.1000).$$

(3) **若利用** LDM **排序法求解，则得矩阵** $\boldsymbol{B}$ **的排序向量为**

$$\boldsymbol{\omega}=(0.4302,0.1799,0.2749,0.1150).$$

(4)若利用 CEM 排序法求解，则得矩阵 B 的排序向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.4303,0.1799,0.2748,0.1150).$$

一致性比例 CR=0.00091<0.1.

从上述结果可以看出,由第 1 种方法所得 4 个属性权重之间的差距较小,而由后 3 种方法所得结果基本相似，即各属性的权重之间的差距较大. 但是，4 种排序方法所得到的 4 个属性重要性程度排序均为

$$u_1 \succ u_2 \succ u_3 \succ u_4.$$

一致性比例结果表明,该模糊互补判断矩阵是一致性的且可接受的.

2.2 残缺互补判断矩阵

决策者在某个准则下对 n 个方案进行两两比较，并构造一个完整的模糊互补判断矩阵，这需要进行 $n(n-1)/2$ 次比较判断. 然而决策者有时可能出现对某些比较判断缺少把握、不感兴趣,或者对某些比较敏感的问题不想发表意见的情形，而且当 n 较大时，完成 $n(n-1)/2$ 次判断的工作量太大，因此，有必要对不完全信息下的模糊互补判断矩阵(或称之为残缺互补判断矩阵)进行介绍. 本节介绍残缺互补判断矩阵及其特殊的形式,如：完全残缺互补判断矩阵、三角一致性残缺互补判断矩阵、弱一致性残缺互补判断矩阵、加型一致性残缺互补判断矩阵、积型一致性残缺互补判断矩阵和可接受残缺互补判断矩阵等概念，并且介绍它的一种排序方法，最后对判断信息完全未知的情形进行分析.

注 2.1 对于完全信息下的模糊互补判断矩阵，仍称之为模糊互补判断矩阵.

定义 2.6[239] 设判断矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，若其中既含残缺元素又含非残缺元素，且非残缺元素满足 $c_{ij}+c_{ji}=1$，$c_{ii}=0.5$,$c_{ij}\geqslant 0$，则称 C 为残缺互补判断矩阵.

对于残缺互补判断矩阵 C 中的残缺元素 c_{ij}，暂且用未知数“x”表示，相应的残缺元素 c_{ji} 用“$1-x$”表示.

设 Ψ 为残缺互补判断矩阵 C 中所有非残缺元素组成的集合.

定义 2.7[239] 设判断矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，若除主对角线上元素均为 0.5 之外，其余均为残缺元素，则称 C 为完全残缺互补判断矩阵.

由残缺互补判断矩阵的定义,易知下列结论成立：

定理 2.22[239] 设 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为残缺互补判断矩阵，则 C 中所有元素之和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}=\frac{n^2}{2}.$$

定义 2.8[239]　设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，则它的有向图 $G(\boldsymbol{C})=(N,E)$定义为

$$N=\{1,2,\cdots,n\},\quad E=\{(i,j)\mid c_{ij}\in\Psi\},$$

其中 N 为结点集,E 为有向弧集，并且以 c_{ij} 作为有向弧(i,j)的权.

定义 2.9[239]　元素 c_{ij},c_{kl}称为相邻接的，如果$(i,j)\cap(k,l)\neq\varnothing$，其中$\varnothing$表示空集. 对于残缺元素 c_{ij}，如果存在相互邻接的非残缺元素 c_{ij_1},$c_{j_1j_2}$,…,c_{j_kj},则称 c_{ij} 是可以间接获得的.

定义 2.10[239]　设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，如果它的任一残缺元素都可以通过已给定的非残缺元素间接获得，则 $\boldsymbol{C}$ 是可接受的,否则就是不可接受的.

定义 2.11[239]　对于残缺互补判断矩阵的有向图 $G(\boldsymbol{C})=(N,E)$，如果其任何两结点之间均是互相可达的，则称 $G(\boldsymbol{C})$是强连通的.

定理 2.23[239]　残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$是可接受的充分必要条件是其有向图$G(\boldsymbol{C})$是强连通的.

证明（充分性）　若 $G(\boldsymbol{C})$强连通，则对任意残缺元素 c_{ij}，结点 i,j 之间必存在一条通路

$$i\rightarrow j_1\rightarrow j_2\rightarrow\cdots\rightarrow j_k\rightarrow j,$$

相应地存在非残缺元素的序列 c_{ij_1},$c_{j_1j_2}$,…,c_{j_kj},故 $\boldsymbol{C}$ 是可接受的.

（必要性）　若 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$是可接受的，根据定义 2.11，它的任一残缺元素都可以通过已给定的非残缺元素间接获得，即对任意残缺元素 c_{ij}，必存在非残缺元素序列 c_{ij_1},$c_{j_1j_2}$,…,c_{j_kj}，使得结点 i,j 之间存在一条通路

$$i\rightarrow j_1\rightarrow j_2\rightarrow\cdots\rightarrow j_k\rightarrow j,$$

即 i,j 可达. 故 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$的有向图$G(\boldsymbol{C})$是强连通的. 定理证毕.

定理 2.24[239]　设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，则从 C 中划去任意行及相应的列所得的子矩阵为模糊互补判断矩阵或者仍为残缺互补判断矩阵.

证明　对于残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$:

(1) 若 $\boldsymbol{C}$ 中所有残缺元素均在被划去的行及相应被划去的列中，则划去 $\boldsymbol{C}$ 中该行及相应列之后，所得的子矩阵 $\boldsymbol{C}'$ 中所有元素均为非残缺元素，且对任意 $c'_{ij}\in\boldsymbol{C}'$,仍满足 $c'_{ij}+c'_{ji}=1$,$c'_{ii}=0.5$,$c'_{ij}\geqslant 0$,因此所得的子矩阵为模糊互补判断矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{C}$ 中的残缺元素一部分在被划去的行及相应被划去的列之中，另一部分在其他行及相应的其他列之中；或者全部在其他行及相应的其他列之中，

则划去 C 中某一行及相应的列之后，所得的子矩阵中仍含残缺元素，且非残缺元素仍满足定义 2.6 中的条件，因此所得的子矩阵仍为残缺互补判断矩阵. 定理证毕.

定义 2.12[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$.

(1) 如果 $c_{ij}^{\mathrm{T}}=c_{ji}(i,j\in N)$，则称 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(c_{ij}^{\mathrm{T}})_{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵.

(2) 如果 $\bar{c}_{ij}=1-c_{ij}(i,j\in N)$，则称 $\bar{\boldsymbol{C}}=(\bar{c}_{ij})_{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的余矩阵.

定理 2.25[239] 残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和余矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 相等且均为残缺互补判断矩阵.

证明 (1) 设 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=(c_{ij}^{\mathrm{T}})_{n\times n}$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}=(\bar{c}_{ij})_{n\times n}$，由定义 2.12 可知

$$c_{ij}^{\mathrm{T}}=c_{ji}=1-c_{ij}=\bar{c}_{ij},$$

即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{C}}$.

(2) 残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的残缺元素转置之后仍为残缺元素，而 $\boldsymbol{C}$ 中的非残缺元素转置之后仍满足

$$c_{ij}^{\mathrm{T}}=c_{ji}\geqslant 0,\quad c_{ii}^{\mathrm{T}}=c_{ii}=0.5,\quad c_{ij}^{\mathrm{T}}+c_{ji}^{\mathrm{T}}=c_{ji}+c_{ij}=1.$$

因此 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 仍为残缺互补判断矩阵，由(1)可知 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为残缺互补判断矩阵. 定理证毕.

定义 2.13[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，若对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，有

$$c_{ik}+c_{kj}\geqslant c_{ij}$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 为三角一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.14[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，若 $c_{ik}\geqslant 0.5,c_{kj}\geqslant 0.5$，有 $c_{ij}\geqslant 0.5$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为弱一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.15[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，若对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ij}\geqslant\min\{c_{ik},c_{kj}\}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为取大取小型一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.16[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，若对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ij}\geqslant\max\{c_{ik},c_{kj}\}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为取大取大型一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.17[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，若 $c_{ik}\geqslant 0.5,c_{kj}\geqslant 0.5$，有 $c_{ij}\geqslant\min\{c_{ik},c_{kj}\}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为严格取大取小型一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.18[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，若 $c_{ik}\geqslant 0.5,c_{kj}\geqslant 0.5$，有 $c_{ij}\geqslant\max\{c_{ik},c_{kj}\}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为严格取大取大型一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.19[239] 设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，若对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ik}c_{kj}c_{ji}=c_{ki}c_{ij}c_{jk}$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为积型一致性残缺互补判断矩阵.

定义 2.20[239]　设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，若对任意 $c_{ik},c_{jk},c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ij}=c_{ik}-c_{jk}+0.5$，则称 $\boldsymbol{C}$ 为加型一致性残缺互补判断矩阵.

定理 2.26[239]　设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$.

（1）若 $\boldsymbol{C}$ 是三角一致性残缺互补判断矩阵，则其转置矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和余矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为三角一致性残缺互补判断矩阵.

（2）若 $\boldsymbol{C}$ 是积型一致性残缺互补判断矩阵，则其转置矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和余矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为积型一致性残缺互补判断矩阵.

（3）若 $\boldsymbol{C}$ 是加型一致性残缺互补判断矩阵，则其转置矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和余矩阵 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为加型一致性残缺互补判断矩阵.

证明　（1）由于 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 是三角一致性残缺互补判断矩阵，即对任意 $c_{ik},c_{kj},c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ik}+c_{kj}\geqslant c_{ij}$. 故对任意 $c_{ik}^{\mathrm{T}},c_{kj}^{\mathrm{T}},c_{ij}^{\mathrm{T}}\in\Psi$，有

$$c_{ik}^{\mathrm{T}}+c_{kj}^{\mathrm{T}}=c_{ki}+c_{jk}=c_{jk}+c_{ki}\geqslant c_{ji}=c_{ij}^{\mathrm{T}},$$

因此 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 为三角一致性残缺互补判断矩阵. 根据 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 的等价性可知，$\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为三角一致性残缺互补判断矩阵.

（2）由于 $\boldsymbol{C}$ 是积型一致性残缺互补判断矩阵，即若对任意 c_{ik},c_{kj}，$c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ik}c_{kj}c_{ji}=c_{ki}c_{ij}c_{jk}$，故对任意 $c_{ik}^{\mathrm{T}},c_{kj}^{\mathrm{T}},c_{ij}^{\mathrm{T}}\in\Psi$，有

$$c_{ik}^{\mathrm{T}}c_{kj}^{\mathrm{T}}c_{ji}^{\mathrm{T}}=c_{ki}c_{jk}c_{ij}=c_{ki}c_{ij}c_{jk}=c_{ik}c_{kj}c_{ji}=c_{kj}^{\mathrm{T}}c_{ij}^{\mathrm{T}}c_{jk}^{\mathrm{T}},$$

因此 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为积型一致性残缺互补判断矩阵.

（3）由于 $\boldsymbol{C}$ 是加型一致性残缺互补判断矩阵，即对任意 $c_{ik},c_{jk},c_{ij}\in\Psi$，有 $c_{ij}=c_{ik}-c_{jk}+0.5$，故对任意 $c_{ik}^{\mathrm{T}},c_{jk}^{\mathrm{T}},c_{ij}^{\mathrm{T}}\in\Psi$，有

$$\begin{aligned}c_{ij}^{\mathrm{T}}&=c_{ji}=1-c_{ij}=1-(c_{ik}-c_{jk}+0.5)\\&=(1-c_{ik})-(1-c_{jk})+0.5\\&=c_{ki}-c_{kj}+0.5\\&=c_{ik}^{\mathrm{T}}-c_{jk}^{\mathrm{T}}+0.5,\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 也为加型一致性残缺互补判断矩阵. 定理证毕.

设残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量，其中 $\omega_j\geqslant 0, j\in N$，$\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j=1$. 若对任意 $c_{ij}\in\Psi$，有

$$c_{ij}=\alpha(\omega_i-\omega_j)+0.5,\quad 0<\alpha<1, \tag{2.61}$$

则对任意 $c_{ij},c_{ik},c_{jk}\in\Psi$，有 $c_{ij}=c_{ik}-c_{jk}+0.5$. 故 $\boldsymbol{C}$ 是加型一致性残缺互补判断矩阵. 一般取 $\alpha=0.5$ 最为适合.

事实上，由 $0\leqslant c_{ij}\leqslant 1$ 及(2.61)式得

$$-0.5\leqslant\alpha(\omega_i-\omega_j)\leqslant 0.5, \tag{2.62}$$

由于 $\omega_j \geqslant 0$，$j \in N$，$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$，因此

$$-1 \leqslant \omega_i - \omega_j \leqslant 1. \tag{2.63}$$

结合(2.62)和(2.63)两式可知，取 $\alpha = 0.5$ 最为适合.

当 $\alpha = 0.5$ 时，(2.61)式变为

$$c_{ij} = 0.5(\omega_i - \omega_j + 1) \tag{2.64}$$

把这一结论拓展到残缺元素上，若 $c_{ij} = x$，则用 $0.5(\omega_i - \omega_j + 1)$替代它.

对于残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$，利用(2.64)式构造一个辅助矩阵 $\dot{\boldsymbol{C}} = (\dot{c}_{ij})_{n\times n}$，其元素为

$$\dot{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & c_{ij} \neq x, \\ 0.5(\omega_i - \omega_j + 1), & c_{ij} = x. \end{cases}$$

例 2.3

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & x \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 1 - x & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

的辅助矩阵为

$$\dot{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.5(\omega_1 - \omega_3 + 1) \\ 0.6 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5(\omega_3 - \omega_1 + 1) & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

利用行和归一化公式

$$\omega_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \dot{c}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \dot{c}_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \dot{c}_{ij}}{\dfrac{n^2}{2}}, \quad i \in N, \tag{2.65}$$

展开后，得到线性方程组

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{0.5 + 0.4 + 0.5(\omega_1 - \omega_3 + 1)}{4.5}, \\ \omega_2 = \dfrac{0.6 + 0.5 + 0.7}{4.5}, \\ \omega_3 = \dfrac{0.5(\omega_3 - \omega_1 + 1) + 0.3 + 0.5}{4.5}, \end{cases}$$

解得 $\omega_1 = 0.31$，$\omega_2 = 0.40$，$\omega_3 = 0.29$. 从而 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量为

$$\boldsymbol{\omega} = (0.31, 0.40, 0.29).$$

利用上述思路，下面给出一种简洁的残缺互补判断矩阵排序方法. 具体步骤如下[239]：

步骤 1　对于某一决策问题，决策者利用互补标度[204]在某一准则下对方案(或属性)进行两两比较，并构造残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$. $\boldsymbol{C}$ 中的残缺元素 c_{ij} 用未知数“x”表示，且相应的 c_{ji} 用“$1-x$”表示.

步骤 2　对于残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 构造一个辅助矩阵 $\dot{\boldsymbol{C}}=(\dot{c})_{n\times n}$，其元素为

$$\dot{c}_{ij}=\begin{cases}c_{ij}, & c_{ij}\neq x,\\ 0.5(\omega_i-\omega_j+1), & c_{ij}=x.\end{cases}$$

步骤 3　利用(2.65)式，得到一个线性方程组，并解之，从而求得残缺互补判断矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$.

特别地，若决策者不能给出任何比较信息，则有下列结论：

定理 2.27[239]　若 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 是完全残缺互补判断矩阵，则由上述排序方法求得 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量为

$$\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right).$$

证明　因为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 是完全残缺互补判断矩阵，故其辅助矩阵为 $\dot{\boldsymbol{C}}=(\dot{c}_{ij})_{n\times n}$，其元素为

$$\dot{c}_{ij}=\begin{cases}0.5, & i=j,\\ 0.5(\omega_i-\omega_j+1), & i\neq j.\end{cases}$$

利用(2.65)式，得到一个线性方程组

$$\omega_i=\frac{0.5+\sum\limits_{j\neq i}0.5(\omega_i-\omega_j+1)}{\dfrac{n^2}{2}},\quad i\in N,$$

对其进行化简，有

$$\begin{aligned}n^2\omega_i&=n+(n-1)\omega_i-\sum_{j\neq i}\omega_j\\&=n+(n-1)\omega_i-(1-\omega_i)\\&=n+n\omega_i-1,\quad i\in N,\end{aligned}$$

即

$$\omega_i=\frac{1}{n},\quad i\in N,$$

因此 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量为 $\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$. 定理证毕.

由于在没有任何判断信息的情况下，人们无法得知方案的优劣，因此只能赋予各方案相同的权重. 定理 2.27 的结论与实际情况相符.

2.3 混合判断矩阵排序的线性目标规划法

对于同一专家给出不同偏好信息的情形，下面介绍混合判断矩阵和一致性混合判断矩阵的概念，并且介绍混合判断矩阵排序的一种线性目标规划法.

定义 2.21[230] 称 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 是混合判断矩阵，若该矩阵中既含互反判断信息,又含模糊互补判断信息.

定义 2.22[230] 称 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 是一致性混合判断矩阵，若其中的互反判断信息满足 $c_{ij}=c_{ik}c_{kj},i,j,k\in N$，且模糊互补判断信息满足 $c_{ik}c_{kj}c_{ji}=c_{ki}c_{jk}c_{ij},i,j,k\in N$.

设 $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$ 是互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量，其中 $\gamma_j>0$，$j\in N$，$\sum_{j=1}^{n}\gamma_i=1$，则当 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$ 是一致性互反判断矩阵时，即对于一切 $i,j,k\in N,h_{ij}=h_{ik}h_{kj}$ 均成立，此时有[150,191]

$$h_{ij}=\frac{\gamma_i}{\gamma_j},\quad \forall i,j\in N.$$

设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的排序向量，其中 $\omega_j>0,j\in N$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，则当 $\boldsymbol{B}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵时，有 $b_{ij}=\omega_i/(\omega_i+\omega_j),i,j\in N$，即

$$b_{ji}\omega_i=b_{ij}\omega_j,\quad i,j\in N.$$

对于混合判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$，设 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量，其中 $v_j>0,j\in N$，$\sum_{j=1}^{n}v_j=1$. 令 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 第 i 行中互反判断信息所在列的下标集合为 I_i，模糊互补判断信息所在列的下标集合为 $J_i,I_i\cup J_i=N$，则当 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$ 是一致性混合判断矩阵时，其中的互反判断信息满足 $c_{ij}=v_i/v_j,i\in N,j\in I_i$，即

$$v_i=c_{ij}v_j,\quad i\in N,j\in I_i,\tag{2.66}$$

其中的模糊互补判断信息满足 $c_{ij}=v_i/(v_i+v_j),i\in N,j\in J_i$，即

$$c_{ji}v_i=c_{ij}v_j,\quad i\in N,j\in J_i.\tag{2.67}$$

由于决策者在实际决策时所给出的判断矩阵往往是非一致性的，(2.66)和(2.67)两式一般不成立，为此引入偏差函数

$$f_{ij}=|v_i-c_{ij}v_j|,\quad i\in N,j\in I_i,$$
$$f_{ij}=|c_{ji}v_i-c_{ij}v_j|,\quad i\in N,j\in J_i.$$

显然，为了得到合理的排序向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，上述偏差函数值总是越小越好，为此构造下列多目标最优化模型：

(M-2.1)
$$\begin{cases}\min f_{ij}=|v_i-c_{ij}v_j|, & i\in N,j\in I_i,\\ \min f_{ij}=|c_{ji}v_i-c_{ij}v_j|, & i\in N,j\in J_i,\\ \text{s.t.}\quad v_j>0,j\in N,\sum_{j=1}^{n}v_j=1.\end{cases}$$

为了求解模型(M-2.1)，并考虑到所有的目标函数是公平竞争的，且每个目标函数 f_{ij} 希望达到的期望值为 0，可将模型(M-2.1)化为下列线性目标规划模型[230]：

(M-2.2)
$$\begin{cases}\min J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s_{ij}d_{ij}^{+}+t_{ij}d_{ij}^{-}),\\ \text{s. t.}\quad v_i-c_{ij}v_j-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0, & i\in N,j\in I_i,i\neq j,\\ \qquad c_{ji}v_i-c_{ij}v_j-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0, & i\in N,j\in J_i,i\neq j,\\ \qquad \sum_{j=1}^{n}v_j=1, & v_j>0,j\in N,\\ \qquad d_{ij}^{+}\geqslant 0,d_{ij}^{-}\geqslant 0, & i,j\in N,i\neq j.\end{cases}$$

其中 d_{ij}^{+} 是 $v_i-c_{ij}v_j$ 高于期望值 0 的上偏差变量；d_{ij}^{-} 是 $v_i-c_{ij}v_j$ 低于期望值 0 的下偏差变量；s_{ij} 和 t_{ij} 分别是 d_{ij}^{+} 和 d_{ij}^{-} 的权系数. 通过求解模型(M-2.2)，即可得到混合判断矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量 $\boldsymbol{v}$.

例 2.4 设对于某一多属性决策问题，有 4 个属性 $u_i(i=1,2,3,4)$，专家对属性进行两两比较，用 0.10.9 五标度和 19 标度进行混合赋值，并给出下列混合判断矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 0.9\\ 1/3 & 1 & 0.7 & 5\\ 1/7 & 0.3 & 1 & 3\\ 0.1 & 1/5 & 1/3 & 1\end{bmatrix}.$$

若取 $s_{ij}=t_{ij}=1,i,j=1,2,3,4$，则利用模型(M-2.2)，求得混合判断矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的排序向量为

$$\boldsymbol{v}=(0.6130,0.2302,0.1082,0.0486)$$

2.4 基于 WAA 算子和 CWAA 算子的多属性群决策方法

对于只有单个决策者参与的情形，在决策者(专家)以模糊互补判断矩阵等偏好形式给出属性权重信息之后，可以利用上述方法求出属性权重，再利用简单的加权算术平均(WAA)算子对决策信息进行集结，进而对方案进行排序和

择优.

对于群决策的情形,下面介绍一种基于 WAA 算子和 CWAA 算子的多属性群决策方法. 具体步骤如下[226]:

步骤 1 对于某一多属性决策问题,假设 t 位决策者的权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$,且决策者 $d_k\in D$ 以模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 等形式给出属性权重信息. 决策者 d_k 给出方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值 $a_{ij}^{(k)}$,从而构成决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times m}$. 若决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 中元素的物理量纲不同,则需要对其进行规范化处理. 假设决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 经过规范化处理后,得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$.

步骤 2 利用相应的判断矩阵排序方法求出每个决策者所给出的判断矩阵的排序向量,即从各个决策者所给的属性权重信息中获得相应的属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}^{(k)}=(\omega_1^{(k)},\omega_2^{(k)},\cdots,\omega_m^{(k)})$.

步骤 3 利用 WAA 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行加权集结,得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$:

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})=\mathrm{WAA}_{\boldsymbol{\omega}^{(k)}}(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)})=\sum_{j=1}^{m}\omega_j^{(k)}r_{ij}^{(k)},\quad i\in N,k=1,2,\cdots,t.$$

步骤 4 利用 CWAA 算子对 t 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结,得到决策方案 x_i 的群体综合属性值

$$z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})=\mathrm{CWAA}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}}[z_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}),z_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}),\cdots,z_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}^{(t)})]=\sum_{k=1}^{t}w_kb_i^{(k)},\quad i\in N,$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_t)$是 CWAA 算子的加权向量,$w_k\in[0,1],k=1,2,\cdots,t$,$\sum_{k=1}^{t}w_k=1$,$b_i^{(k)}$ 是一组加权数据 $(t\lambda_1z_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}),t\lambda_2z_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}),\cdots,t\lambda_tz_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}^{(t)}))$中第 k 大的元素,t 是平衡因子.

步骤 5 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})(i\in N)$对方案进行排序和择优.

2.5 实例分析

例 2.5 装备维修保障系统是由经过综合和优化的维修保障要素构成的总体,是由装备维修所需的物质资源、人力资源、信息资源以及管理手段等要素组成的系统. 而系统效能则是预期一个系统能满足一组特定任务要求的程度的度量,是系统的有效性、可信赖性和能力的函数. 评价装备维修保障系统效能的主要指标(属性)有[129]:u_1——技术人员效能;u_2——管理人员效能;u_3——维修器材效能;u_4——维修用仪表、设备和设施效能;u_5——技术资料效能;

u_6——计算机软件效能；u_7——经费管理效能；u_8——资源管理效能等．现有 4 位专家 $d_k(k=1,2,3,4)$，权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(0.27,0.23,0.24,0.26)$，各自对上述 8 项评估指标利用 0.10.9 五标度或 19 标度进行两两比较并构造判断矩阵 $\boldsymbol{B}_k(k=1,2,3,4)$（它们分别为互反判断矩阵、模糊互补判断矩阵、残缺互补判断矩阵和混合判断矩阵），且利用上述各项指标对 4 个待评估的维修保障系统（方案）$x_i(i=1,2,3,4)$进行打分（范围从 0 分到 100 分），结果如表 2.8 表 2.11 所示．试确定最佳方案．

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1/4 & 1/7 & 6 & 1/5 & 4 \\ 1/3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 1/7 & 1/5 \\ 1/5 & 1/4 & 1 & 5 & 1/8 & 6 & 3 & 7 \\ 4 & 1/2 & 1/5 & 1 & 9 & 3 & 1/6 & 7 \\ 7 & 1/8 & 8 & 1/9 & 1 & 5 & 3 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/5 & 1 & 8 & 5 \\ 5 & 7 & 1/3 & 6 & 1/3 & 1/8 & 1 & 1/4 \\ 1/4 & 5 & 1/7 & 1/7 & 4 & 1/5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.7 & 0.6 & 0.8 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0.8 & 0.1 & 0.8 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & x & 0.4 & 0.3 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 1-x & 0.3 & 0.4 \\ 1-x & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.7 & 0.6 & 0.9 \\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.8 \\ 0.7 & 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.5 & 0.7 & x & 0.4 \\ 0.3 & x & 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 \\ 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 1-x & 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$B_4=\begin{pmatrix}0.5 & 2 & 0.7 & 0.4 & 0.2 & 7 & 0.4 & 0.6\\ 1/2 & 0.5 & 0.6 & 0.5 & 8 & 0.6 & 0.3 & 0.4\\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.7 & 1/7 & 0.7 & 0.6 & 9\\ 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.8\\ 0.8 & 1/8 & 7 & 0.1 & 0.5 & 6 & 0.6 & 0.4\\ 1/7 & 0.4 & 0.3 & 0.4 & 1/6 & 0.5 & 8 & 0.6\\ 0.6 & 0.7 & 0.4 & 0.6 & 0.4 & 1/8 & 0.5 & 0.4\\ 0.4 & 0.6 & 1/9 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 0.6 & 0.5\end{pmatrix}.$$

表 2.8　决策者 d_1 给出的决策矩阵 R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	85	90	95	60	70	80	90	85
x_2	95	80	60	70	90	85	80	70
x_3	65	75	95	65	90	95	70	85
x_4	75	75	50	65	95	75	85	80

表 2.9　决策者 d_2 给出的决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	90	65	70	95	70	75
x_2	85	60	60	65	90	75	95	70
x_3	60	65	75	80	90	95	90	80
x_4	65	60	60	70	90	85	70	65

表 2.10　决策者 d_3 给出的决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	60	75	85	60	85	80	60	75
x_2	80	75	60	90	85	65	85	80
x_3	95	80	85	85	90	90	85	95
x_4	60	65	50	60	95	80	65	70

表 2.11　决策者 d_4 给出的决策矩阵 R_4

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	70	80	85	65	80	90	70	80
x_2	85	70	70	80	95	70	85	85
x_3	90	85	80	80	95	85	80	90
x_4	65	70	60	65	90	85	70	75

注 2.2　由于所有属性均为效益型属性，量纲一致．为了方便起见，不把决策矩阵规范化．

下面利用 2.4 节介绍的方法进行求解：

步骤 1　（1）利用特征向量法求出 $\boldsymbol{B}_1$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)}=(0.1118,0.1273,0.1333,0.1534,0.1483,0.0929,0.1337,0.0993).$$

（2）利用模糊互补判断矩阵排序的最小方差法求出 $\boldsymbol{B}_2$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)}=(0.1375,0.1500,0.1500,0.2000,0.1250,0.0875,0.0875,0.0625).$$

（3）利用残缺互补判断矩阵的排序方法求出 $\boldsymbol{B}_3$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)}=(0.1247,0.1283,0.1440,0.1438,0.1156,0.1186,0.1156,0.1094).$$

（4）利用混合判断矩阵排序的线性目标规划法求出 $\boldsymbol{B}_4$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(4)}=(0.1274,0.1499,0.1213,0.1592,0.1025,0.0974,0.1279,0.1144).$$

步骤 2　利用 WAA 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行加权集结，得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i,k=1,2,3,4)$：

$$\begin{aligned}
z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}) &= \mathrm{WAA}_{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}(r_{11}^{(1)},r_{12}^{(1)},\cdots,r_{18}^{(1)})\\
&=0.1118\times 85+0.1273\times 90+0.1333\times 95+0.1534\times 60+\\
&\quad\ 0.1483\times 70+0.0929\times 80+0.1337\times 90+0.0993\times 85\\
&=81.1140.
\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\begin{aligned}
&z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=78.4315,\quad z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=79.4210,\quad z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=74.9330,\\
&z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=73.8750,\quad z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=73.1875,\quad z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=77.6875,\\
&z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=69.8125,\quad z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=72.4275,\quad z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=77.2935,\\
&z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=87.8705,\quad z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=67.2915,\quad z_1^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)})=76.6635,\\
&z_2^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)})=79.7255,\quad z_3^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)})=85.2190,\quad z_4^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)})=71.4595.
\end{aligned}$$

步骤 3　利用 CWAA 算子（假设它的加权向量为 $w=(1/6,1/3,1/3,1/6)$）对 4 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(k=1,2,3,4)$ 进行集结．首先利用 $\boldsymbol{\lambda}$，t 以及 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i,k=1,2,3,4)$ 求解 $t\lambda_k z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i,k=1,2,3,4)$，得

$$\begin{aligned}
&4\lambda_1 z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=87.6031,\quad 4\lambda_1 z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=84.7060,\\
&4\lambda_1 z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=85.7747,\quad 4\lambda_1 z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=80.9276,\\
&4\lambda_2 z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=67.9650,\quad 4\lambda_2 z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=67.3325,\\
&4\lambda_2 z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=71.4725,\quad 4\lambda_2 z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=64.2275,\\
&4\lambda_3 z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=69.5304,\quad 4\lambda_3 z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=74.2018,\\
&4\lambda_3 z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=84.3557,\quad 4\lambda_3 z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=66.5198,
\end{aligned}$$

$$4\lambda_4 z_1^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)}) = 79.7300,\quad 4\lambda_4 z_2^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)}) = 82.9145,$$

$$4\lambda_4 z_3^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)}) = 88.6278,\quad 4\lambda_4 z_4^{(4)}(\boldsymbol{\omega}^{(4)}) = 74.3179.$$

因此方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i=1,2,3,4)$

$$z_1(\boldsymbol{\lambda},w) = 75.6815,\quad z_2(\boldsymbol{\lambda},w) = 77.7119,$$

$$z_3(\boldsymbol{\lambda},w) = 83.3935,\quad z_4(\boldsymbol{\lambda},w) = 71.1384.$$

步骤 4 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i=1,2,3,4)$对各方案 $x_i(i=1,2,3,4)$进行排序

$$x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4,$$

故最佳方案为 x_3.

2.6 基于 WGA 算子和 CWGA 算子的多属性群决策法

对于只有单个决策者参与,并且规范化决策矩阵中的元素均为正数的情形,也可以利用加权几何平均(WGA)算子对决策信息进行集结,进而对方案进行排序和择优.

对于群决策的情形,下面介绍一种基于 WGA 算子和 CWGA 算子的多属性群决策方法.具体步骤如下[226]:

步骤 1 对于某一多属性群决策问题,假设决策者的权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$,且决策者 $d_k\in D$ 以模糊互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}_k$ 等形式给出属性权重信息.决策者 d_k 给出方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值 $a_{ij}^{(k)}$,从而构成决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k=(a_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,其中 $a_{ij}^{(k)}>0,i\in N,j\in M,k=1,2,\cdots,t$.若决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 中元素的物理量纲不同,则需要对其进行规范化处理.假设决策矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 经过规范化处理后,得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,其中 $r_{ij}^{(k)}>0,i\in N,j\in M,k=1,2,\cdots,t$.

步骤 2 利用相应的判断矩阵排序方法求出每个决策者所给出的判断矩阵的排序向量,即从各个决策者所给的属性权重信息中获得相应的属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}^{(k)}=(\omega_1^{(k)},\omega_2^{(k)},\cdots,\omega_m^{(k)})$.

步骤 3 利用 WGA 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行加权集结,得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$:

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)}) = \mathrm{WGA}_{\boldsymbol{\omega}^{(k)}}(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)}) = \prod_{j=1}^{m}(r_{ij}^{(k)})^{\omega_j^{(k)}},$$

$$k = 1,2,\cdots,t,i \in N.$$

步骤 4 利用 CWGA 算子对 t 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结,得到方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\lambda,w)(i\in N)$:

$$z_i(\boldsymbol{\lambda},w)=\mathrm{CWGA}_{\boldsymbol{\lambda},w}[z_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}),z_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}),\cdots,z_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}^{(t)})]=\prod_{k=1}^{t}(b_i^{(k)})^{w_k},$$

$$i\in N,$$

其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_t)$ 是与 CWGA 算子的指数加权向量，$w_k\in[0,1]$，$k=1,2,\cdots,t$，$\sum_{k=1}^{t}w_k=1$，$b_i^{(k)}$ 是一组指数加权数据 $([z_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})]^{t\lambda_1},[z_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})]^{t\lambda_2},\cdots,[z_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}^{(t)})]^{t\lambda_t})$ 中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 5　利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i\in N)$ 对方案进行排序和择优.

2.7　实例分析

例 2.6　现拟对 4 个军事管理单位（方案）$x_i(i=1,2,3,4)$ 进行绩效评估. 主要的评估指标（属性）有：u_1——政治教育；u_2——军事训练，；u_3——作风纪律；u_4——装备管理；u_5——后勤保障；u_6——安全管理. 假设有 3 位专家 $d_k(k=1,2,3)$，权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(0.33,0.34,0.33)$，各自对上述 6 项评估指标利用 0.10.9 五标度或 19 标度进行两两比较并构造判断矩阵 $\boldsymbol{H},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$（它们分别为互反判断矩阵、模糊互补判断矩阵和残缺互补判断矩阵），且利用上述各项指标对 $x_i(i=1,2,3,4)$ 进行打分（范围从 0 分到 100 分），结果如表 2.12-表 2.14 所示. 试确定最佳方案.

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1/6 & 7 & 1/4 & 8\\ 1/5 & 1 & 4 & 5 & 1/6 & 7\\ 6 & 1/4 & 1 & 6 & 1/5 & 8\\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 3 & 4\\ 4 & 6 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1/7\\ 1/8 & 1/7 & 1/8 & 1/4 & 7 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7 & 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.8\\ 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.3 & 0.6\\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.3 & 0.8\\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7\\ 0.6 & 0.7 & 0.7 & 0.4 & 0.5 & 0.3\\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & x & 0.7 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.7 & 0.6 & x & 0.9 \\ 1-x & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.4 & 0.8 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.5 & 0.6 & 1-x \\ 0.5 & 1-x & 0.6 & 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & x & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

表 2.12 决策者 d_1 给出的决策矩阵 R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	70	80	85	75	90	80
x_2	90	80	70	60	95	70
x_3	65	75	70	85	90	95
x_4	75	70	60	60	95	90

表 2.13 决策者 d_2 给出的决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	80	65	95	60	80	90
x_2	65	70	90	95	70	65
x_3	70	75	95	90	70	75
x_4	85	90	65	75	95	75

表 2.14 决策者 d_3 给出的决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	75	85	95	75	80	95
x_2	95	80	70	60	95	75
x_3	65	95	85	80	95	90
x_4	85	80	90	60	90	85

注 2.3 由于所有指标均为效益型指标，量纲一致. 为了方便起见，不把决策矩阵规范化.

下面利用 2.6 节中的方法进行求解：

步骤 1 (1) 利用特征向量法求出 H 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)}=(0.2167,0.1833,0.2316,0.0880,0.1715,0.1088).$$

(2) 利用模糊互补判断矩阵排序的最小方差法求出 B 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)}=(0.2500,0.1667,0.2167,0.1167,0.2000,0.0500).$$

(3) 利用残缺互补判断矩阵的排序方法求出 C 的排序向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)}=(0.1949,0.2015,0.1773,0.1448,0.1485,0.1330).$$

步骤 2　利用 WGA 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行加权集结，得到决策者 d_k 所给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$：

$$\begin{aligned}z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})&=\mathrm{WAA}_{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}(r_{11}^{(1)},r_{12}^{(1)},\cdots,r_{16}^{(1)})\\&=70^{0.2167}\times 80^{0.1833}\times 85^{0.2316}\times 75^{0.0880}\times 90^{0.1715}\times 80^{0.1088}=79.9350.\end{aligned}$$

类似地，可得

$$z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=78.7135,\quad z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=77.7927,\quad z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)})=73.2201,$$

$$z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=78.0546,\quad z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=74.9473,\quad z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=78.2083,$$

$$z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)})=81.1153,\quad z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=83.5666,\quad z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=78.8167,$$

$$z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=83.7737,\quad z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)})=81.3388.$$

步骤 3　利用 CWGA 算子（假设它的加权向量为 $\boldsymbol{w}=(1/4,1/2,1/4)$）对 3 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(k=1,2,3)$进行集结. 首先利用$\boldsymbol{\lambda}$，$t$ 以及 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$ 求解$(z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}^{(k)})^{t\lambda_k}(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$得

$$(z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}))^{3\lambda_1}=76.5085,\quad (z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}))^{3\lambda_1}=75.3509,$$

$$(z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}))^{3\lambda_1}=74.4782,\quad (z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega}^{(1)}))^{3\lambda_1}=70.1429,$$

$$(z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}))^{3\lambda_2}=85.1621,\quad (z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}))^{3\lambda_2}=81.7055,$$

$$(z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}))^{3\lambda_2}=85.3332,\quad (z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega}^{(2)}))^{3\lambda_2}=88.5696,$$

$$(z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)}))^{3\lambda_3}=79.9489,\quad (z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)}))^{3\lambda_3}=75.4488,$$

$$(z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)}))^{3\lambda_3}=80.1450,\quad (z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega}^{(3)}))^{3\lambda_3}=77.8386.$$

因此方案 x_i 的群体综合属性值为

$$z_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})=80.3332,\quad z_2(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})=76.9416,$$

$$z_3(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})=79.9328,\quad z_4(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})=78.3271.$$

步骤 4　利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4)$对各方案 $x_i(i=1,2,3,4)$进行排序，得

$$x_1\succ x_3\succ x_4\succ x_2,$$

故最佳方案为 x_1.

第3章 只有部分属性权重信息且属性值为实数的多属性决策方法及应用

在多属性决策中，人们有时只知道部分属性权重信息. 对于只有部分属性权重信息且属性值为实数的多属性决策问题，目前已有不少研究成果，本章将对一些主要的决策方法进行介绍，并进行实例分析.

3.1 基于理想点的多属性决策方法

3.1.1 决策方法

对于某一多属性决策问题，设 X 和 U 分别是方案集和属性集. 属性的权重向量为 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，$\Phi$ 为已知的部分权重信息所确定的属性可能权重集合，$\boldsymbol{\omega}\in\Phi$. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$ 和 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$ 分别为决策矩阵及其规范化矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中的行向量 $(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})$ 与方案 x_i 相对应. 根据规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$，可令正理想点（正理想方案）对应于 $\boldsymbol{x}^{+}=(1,1,\cdots,1)$，负理想点（负理想方案）对应于 $\boldsymbol{x}^{-}=(0,0,\cdots,0)$. 显然，方案 x_i 越接近正理想点就越优，或越远离负理想点也越优. 因此可用下面的方法来判别各方案的优劣[146].

（1）由于决策方案 x_i 越接近正理想点就越优，因此，可令方案 x_i 与正理想点之间的加权偏差之和为

$$e_i^{+}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{m}|r_{ij}-1|\,\omega_j=\sum_{j=1}^{m}(1-r_{ij})\omega_j,\quad i\in N.$$

对于给定的权重向量 $\boldsymbol{\omega}$，$e_i^{+}(\boldsymbol{\omega})$ 越小则方案 x_i 越优. 于是可建立如下多目标决策模型：

$$(\mathbf{M\text{-}3.1})\qquad \begin{cases}\min\ \boldsymbol{e}^{+}(\boldsymbol{\omega})=(e_1^{+}(\boldsymbol{\omega}),e_2^{+}(\boldsymbol{\omega}),\cdots,e_n^{+}(\boldsymbol{\omega})),\\ \text{s. t. } \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

由于每个方案都是公平竞争的,不存在任何偏好关系,因此可将模型(M-3.1)等权集结为如下单目标最优化模型:

(M-3.2)
$$\begin{cases}\min e^{+}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} e_i^{+}(\boldsymbol{\omega}),\\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega} \in \Phi,\end{cases}$$

即

(M-3.3)
$$\begin{cases}\min e^{+}(\boldsymbol{\omega}) = n - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j,\\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega} \in \Phi.\end{cases}$$

求解该模型,得到最优解 $\boldsymbol{\omega}^{+}=(\omega_1^{+},\omega_2^{+},\cdots,\omega_m^{+})$,把它代入 $e_i^{+}(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$,再按 $e_i^{+}(\boldsymbol{\omega}^{+})(i\in N)$的值由小到大的顺序对方案 $x_i(i\in N)$进行排序. $e_i^{+}(\boldsymbol{\omega}^{+})(i\in N)$的最小值所对应的方案为最优方案.

特别地,若决策者不能提供任何权重信息,则可建立下列简单的单目标最优化模型:

(M-3.4)
$$\begin{cases}\min F^{+}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{+}(\boldsymbol{\omega}),\\ \text{s.t. } \omega_j \geqslant 0, j\in M, \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1,\end{cases}$$

其中 $f_i^{+}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m}(1-r_{ij})\omega_j^2$ 表示方案 x_i 与正理想点之间的偏差. 解此模型,建立拉格朗日(Lagrange)函数

$$L(\boldsymbol{\omega},\zeta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(1-r_{ij})\omega_j^2 + 2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1\right),$$

求其偏导数,并令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial \omega_j} = 2\sum_{i=1}^{n}(1-r_{ij})\omega_j + 2\zeta = 0, \quad j\in M,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1 = 0.\end{cases}$$

求得最优解

$$\omega_j^{+} = \left[\sum_{j=1}^{m}\left(n - \sum_{i=1}^{n} r_{ij}\right)^{-1}\right]^{-1}\left(n - \sum_{i=1}^{n} r_{ij}\right)^{-1}, \quad j\in M. \tag{3.1}$$

把 $\boldsymbol{\omega}^{+}=(\omega_1^{+},\omega_2^{+},\cdots,\omega_m^{+})$代入 $f_i^{+}(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$,按 $f_i^{+}(\boldsymbol{\omega}^{+})(i\in N)$的值由小到大的顺序对方案 $x_i(i\in N)$进行排序. $f_i^{+}(\omega^{+})(i\in N)$的最小值所对应的方案为最优方案.

（2）由于方案 x_i 越远离负理想点就越优，因此，可令方案 x_i 与负理想点之间的加权偏差之和为

$$e_i^-(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{m}|r_{ij}-0|\,\omega_j=\sum_{j=1}^{m}r_{ij}\omega_j,\quad i\in N.$$

对于给定的权重向量 $\boldsymbol{\omega}$，$e_i^-(\boldsymbol{\omega})$ 越大则方案 x_i 越优. 于是，根据类似(1)中的讨论，可建立如下单目标最优化决策模型：

$$(\text{M-3.5})\qquad \begin{cases}\max e^-(\boldsymbol{\omega})=\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^-(\boldsymbol{\omega}),\\ \text{s. t. }\ \boldsymbol{\omega}\in\Phi,\end{cases}$$

即

$$(\text{M-3.6})\qquad \begin{cases}\max e^-(\boldsymbol{\omega})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}r_{ij}\omega_j,\\ \text{s. t. }\ \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

求解该模型，得到最优解 $\boldsymbol{\omega}^-=(\omega_1^-,\omega_2^-,\cdots,\omega_m^-)$，把它代入 $e_i^-(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$，再按 $e_i^-(\boldsymbol{\omega}^-)(i\in N)$ 的值由大到小的顺序对方案 $x_i(i\in N)$ 进行排序. $e_i^-(\boldsymbol{\omega}^-)(i\in N)$ 的最大值所对应的方案为最优方案.

3.1.2 实例分析

例 3.1 防御要点是防御地区内起支柱作用的重要地点. 在防御战斗中，正确地选择要点对确保防御战斗的胜利至关重要. 我坦克第一营指挥员奉命在肖山地域组织防御，在同上级主要防御方向保持一致的情况下有 4 个高地(方案) $x_i(i=1,2,3,4)$ 可被选择为防御要点. 影响某一高地成为要点的主要地形因素(属性)通常有[115]：u_1——通视率；u_2——火力控制距离；u_3——瞰制高地个数(某高地在 1km2km 内瞰制高地的个数)；u_4——坡度；u_5——高程差. 对各高地分析后采集到的数据如表 3.1. 问我指挥员应选择哪个高地作为防御要点？

我们用 3.1.1 节中的方法求出方案的排序并择优. 具体步骤如下：

表 3.1 决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.37	1800	2	19°	90
x_2	0.58	2800	5	28°	105
x_3	0.52	3500	5	32°	130
x_4	0.43	1900	3	27°	98

步骤 1　虽然上述各因素均为效益型，但量纲不一致，利用(1.2)式将决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 转化为规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$，如表 3.2 所示.

表 3.2　决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.6379	0.5143	0.40000	0.5938	0.6923
x_2	1.0000	0.80000	1.0000	0.8750	0.8077
x_3	0.8966	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x_4	0.7414	0.5429	0.60000	0.7538	0.8438

步骤 2　现考虑两种情况：

(1) 若属性权重完全未知，则利用(3.1)式求得属性权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}^+=(0.2282,0.1446,0.1653,0.2404,0.2215),$$

并求得 $f_i^+(\boldsymbol{\omega}^+)(i=1,2,3,4,5)$ 的值：

$$f_1^+(\boldsymbol{\omega}^+)=0.0840,f_2^+(\boldsymbol{\omega}^+)=0.0208,f_3^+(\boldsymbol{\omega}^+)=0.0054,f_4^+(\boldsymbol{\omega}^+)=0.055.$$

因此由上述方法所得的方案排序为

$$x_3\succ x_2\succ x_4\succ x_1,$$

故最优方案为 x_3.

(2) 若已知的属性权重信息为

$$\Phi=\Big\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\ |0.15\leqslant\omega_1\leqslant 0.25,0.13\leqslant\omega_2\leqslant 0.15,$$
$$0.15\leqslant\omega_3\leqslant 0.20,0.20\leqslant\omega_4\leqslant 0.25,$$
$$0.20\leqslant\omega_5\leqslant 0.23,\sum_{j=1}^{5}\omega_j=1\Big\},$$

则利用模型(M-3.3)和模型(M-3.6)求得属性权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}^+=\boldsymbol{\omega}^-=(0.22,0.15,0.20,0.20,0.23),$$

并求得 $e_i^+(\boldsymbol{\omega}^+),e_i^-(\boldsymbol{\omega}^-)(i=1,2,3,4)$：

$$e_1^+(\omega^+)=0.4245,e_2^+(\omega^+)=0.0992,e_3^+(\omega^+)=0.0227,$$
$$e_4^+(\omega^+)=0.2933,e_1^-(\omega^-)=0.5755,e_2^-(\omega^-)=0.9008,$$
$$e_3^-(\omega^-)=0.9773,e_4^-(\omega^-)=0.7067.$$

故由上述两种方法所得的方案排序也均为

$$x_3\succ x_2\succ x_4\succ x_1,$$

故最优方案为 x_3.

3.2　基于方案满意度的多属性决策方法

3.2.1　决策方法

对于某一多属性决策问题，设 $X,U,\boldsymbol{\omega},\Phi$ 分别为方案集、属性集、属性的权重向量和已知的部分权重信息所确定的属性可能权重集合. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$ 和

$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$ 分别为决策矩阵及规范化的决策矩阵.

定义 3.1[216] 若 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$是单目标优化模型

(M-3.7)
$$\begin{cases} \max z_i(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j, & i\in N, \\ \text{s. t.} \quad \boldsymbol{\omega}\in \Phi \end{cases}$$

的最优解,则称 $z_i^{\max}=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j$ 为方案 $x_i(i\in N)$ 的综合属性正理想值.

定义 3.2[216] 若 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$是单目标优化模型

(M-3.8)
$$\begin{cases} \min z_i(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j, & i\in N, \\ \text{s. t.} \quad \boldsymbol{\omega}\in \Phi \end{cases}$$

的最优解,则称 $z_i^{\min}=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j$ 为方案 $x_i(i\in N)$ 的综合属性负理想值.

定义 3.3[216] 若

$$\rho_i(\boldsymbol{\omega})=\frac{z_i(\omega)-z_i^{\min}}{z_i^{\max}-z_i^{\min}}, \quad i\in N, \tag{3.2}$$

则称 $\rho_i(\boldsymbol{\omega})$为方案 $x_i(i\in N)$的满意度.

对于每个方案 x_i 来说,其满意度 $\rho_i(\boldsymbol{\omega})$总是越大越好,但是,方案的优劣只有在统一的标准之下才能区别出来,因此各个方案的综合属性值必须来自同一个属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$,为此可建立如下多目标优化模型:

(M-3.9)
$$\begin{cases} \max \rho(\boldsymbol{\omega}) = (\rho_1(\boldsymbol{\omega}),\rho_2(\boldsymbol{\omega}),\cdots,\rho_n(\boldsymbol{\omega})), \\ \text{s. t.} \ \boldsymbol{\omega}\in \Phi. \end{cases}$$

由于各个决策方案之间是公平竞争的,不存在任何偏好关系,因此为了求解模型(M-3.9),可建立下列单目标优化模型[216]:

(M-3.10)
$$\begin{cases} \max \rho(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\boldsymbol{\omega}), \\ \text{s. t.} \ \boldsymbol{\omega}\in \Phi. \end{cases}$$

设由上述模型求出的最优解是 $\boldsymbol{\omega}^{+}=(\omega_1^{+},\omega_2^{+},\cdots,\omega_m^{+})$,则方案 x_i 的综合属性值为

$$z_i(\boldsymbol{\omega}^{+})=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_i^{+}, \quad i\in N.$$

按各方案综合属性值的大小对方案进行排序,即可得到最优方案.

3.2.2 实例分析

例 3.2 我们以《中国工业经济统计年鉴》1993 年提供的全国 16 省和直辖市主要工业经济效益指标的统计资料为基础数据[195]，进行经济效益的评价和排序分析. 已知方案集为 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_{16}\}=\{$北京，天津，上海，江苏，浙江，安徽，福建，广东，辽宁，山东，湖北，湖南，河南，江西，河北，山西$\}$，指标（属性）集为 $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，其中：$u_1$——全员劳动生产率（元/人）；$u_2$——资金利税率（%）；$u_3$——百元销售收入实现利润（元）；$u_4$——百元工业产值占用流动资金（元）；$u_5$——产值利税率（%）. 除了百元工业产值占用的流动资金为成本型指标（属性）外，其余均为效益型指标（属性）. 各指标的原始数据如表 3.3 所示.

表 3.3 决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	47177	16.61	8.89	31.05	15.77
x_2	43323	9.08	3.65	29.80	8.44
x_3	59023	13.84	6.06	26.55	12.87
x_4	46821	10.59	3.51	22.46	7.41
x_5	41646	13.24	4.64	24.33	9.33
x_6	26446	10.16	2.38	26.80	9.85
x_7	38381	11.97	4.79	26.45	10.64
x_8	57808	10.29	4.54	23.00	9.23
x_9	28869	7.68	2.12	31.08	9.05
x_{10}	38812	8.92	3.38	25.68	8.73
x_{11}	30721	10.87	4.15	30.36	11.44
x_{12}	24848	10.77	2.42	30.71	11.37
x_{13}	26925	9.34	3.06	30.11	10.84
x_{14}	23269	8.25	2.58	32.57	8.62
x_{15}	28267	8.13	3.17	29.25	9.17
x_{16}	21583	7.41	4.66	35.35	11.27

已知属性权重信息为

$$\begin{aligned}\Phi = \Big\{ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5) \ | & 0.22 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.24, 0.18 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.20, \\ & 0.15 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.17, 0.23 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.26, \\ & 0.16 \leqslant \omega_5 \leqslant 0.17, \sum_{j=1}^{5} \omega_j = 1 \Big\}.\end{aligned}$$

下面运用 3.2.1 节的方法求出方案的排序. 具体步骤如下:

步骤 1 利用(1.2)和(1.3)两式将决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 规范化,得到矩阵 $\boldsymbol{R}$,如表 3.4 所示.

步骤 2 由模型(M-3.7)和(M-3.8)分别求得方案 $x_i(i=1,2,\cdots,16)$的综合属性正理想值 $z_i^{\max}(i=1,2,\cdots,16)$和综合属性负理想值 $z_i^{\min}(i=1,2,\cdots,16)$:

$$z_1^{\max}=0.890, z_2^{\max}=0.623, z_3^{\max}=0.851, z_4^{\max}=0.706,$$
$$z_5^{\max}=0.735, z_6^{\max}=0.585, z_7^{\max}=0.890, z_8^{\max}=0.777,$$
$$z_9^{\max}=0.522, z_{10}^{\max}=0.633, z_{11}^{\max}=0.631, z_{12}^{\max}=0.576,$$
$$z_{13}^{\max}=0.575, z_{14}^{\max}=0.502, z_{15}^{\max}=0.555, z_{16}^{\max}=0.534,$$
$$z_1^{\min}=0.704, z_2^{\min}=0.581, z_3^{\min}=0.797, z_4^{\min}=0.654,$$
$$z_5^{\min}=0.684, z_6^{\min}=0.542, z_7^{\min}=0.657, z_8^{\min}=0.722,$$
$$z_9^{\min}=0.485, z_{10}^{\min}=0.588, z_{11}^{\min}=0.588, z_{12}^{\min}=0.534,$$
$$z_{13}^{\min}=0.535, z_{14}^{\min}=0.466, z_{15}^{\min}=0.517, z_{16}^{\min}=0.497.$$

表 3.4 决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.799	1.000	1.000	0.723	1.000
x_2	0.734	0.547	0.411	0.754	0.535
x_3	1.000	0.833	0.682	0.846	0.816
x_4	0.793	0.638	0.395	1.000	0.470
x_5	0.706	0.797	0.522	0.923	0.592
x_6	0.448	0.612	0.268	0.838	0.625
x_7	0.650	0.721	0.539	0.849	0.675
x_8	0.979	0.620	0.511	0.977	0.585
x_9	0.489	0.462	0.238	0.723	0.574
x_{10}	0.658	0.537	0.380	0.875	0.554
x_{11}	0.520	0.654	0.467	0.740	0.725
x_{12}	0.421	0.648	0.272	0.731	0.721
x_{13}	0.456	0.562	0.344	0.746	0.687
x_{14}	0.394	0.497	0.290	0.690	0.547
x_{15}	0.479	0.489	0.357	0.768	0.581
x_{16}	0.366	0.430	0.524	0.635	0.715

步骤 3 由(3.2)式求出各方案的满意度,进而利用模型(M-6.10)建立如下单目标优化模型.

$$\begin{cases} \max & \rho(\boldsymbol{\omega}) = 0.464\omega_1 + 0.466\omega_2 + 0.339\omega_3 + 0.584\omega_4 + 0.473\omega_5 - 0.477, \\ \text{s. t.} & 0.22 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.24, 0.18 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.20, 0.15 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.17, \\ & 0.23 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.26, 0.16 \leqslant \omega_5 \leqslant 0.17, \sum_{j=1}^{5} \omega_j = 1. \end{cases}$$

求解该模型，得到最优解为

$$\boldsymbol{\omega} = (0.22, 0.20, 0.15, 0.26, 0.17).$$

因此各方案的综合指标（属性）值分别为

$$z_1(\boldsymbol{\omega}) = 0.8838, z_2(\boldsymbol{\omega}) = 0.6195, z_3(\boldsymbol{\omega}) = 0.8476, z_4(\boldsymbol{\omega}) = 0.7012,$$
$$z_5(\boldsymbol{\omega}) = 0.7336, z_6(\boldsymbol{\omega}) = 0.5853, z_7(\boldsymbol{\omega}) = 0.7035, z_8(\boldsymbol{\omega}) = 0.7695,$$
$$z_9(\boldsymbol{\omega}) = 0.5212, z_{10}(\boldsymbol{\omega}) = 0.6308, z_{11}(\boldsymbol{\omega}) = 0.6309, z_{12}(\boldsymbol{\omega}) = 0.5757,$$
$$z_{13}(\boldsymbol{\omega}) = 0.5750, z_{14}(\boldsymbol{\omega}) = 0.5020, z_{15}(\boldsymbol{\omega}) = 0.5552, z_{16}(\boldsymbol{\omega}) = 0.5318.$$

步骤 4　按 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,16)$ 值从大到小的顺序排列得到各方案的排序：

$$x_1 \succ x_3 \succ x_8 \succ x_5 \succ x_7 \succ x_4 \succ x_{11} \succ x_{10} \succ x_2 \succ$$
$$x_6 \succ x_{12} \succ x_{13} \succ x_{15} \succ x_{16} \succ x_9 \succ x_{14}.$$

从上述排序结果可以看出，北京作为我国的政治、经济和文化中心，其工业经济效益水平较高，名列 16 个省和直辖市之首，显示出其雄厚的经济基础和实力；上海的工业经济效益水平仅次于北京，位于第二位；排名前 10 位的其他省市依次为广东、浙江、福建、江苏、湖北、山东、天津和安徽，其中绝大多数均为我国沿海开放省市. 江西、山西两省作为我国的革命老区和内陆省份，由于经济基础薄弱、技术落后和管理水平跟不上，其工业经济效益综合评价值分别排名第 16 位和 14 位. 辽宁省作为我国的重工业基地省份，由于设备陈旧老化、资金匮乏和技术措施跟不上等诸多主客观因素的影响，其工业经济效益综合评价值也很不理想，排名 16 个省和直辖市倒数第 2 位. 上述评价结果基本上与当时的实际情况相一致.

3.3　基于方差最大化模型的多属性决策方法

3.3.1　决策方法

对于某一多属性决策问题，决策方案 x_i 在属性 u_j 下与其他所有决策方案的偏差可定义为

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{n} (r_{ij} - r_{kj})^2 \omega_j, \quad i \in N, j \in M.$$

令

$$\sigma_j(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{ij}-r_{kj})^2\omega_j\,,\quad j\in M,$$

对属性 u_j 而言,$\sigma_j(\boldsymbol{\omega})$表示所有方案与其他方案的总偏差.根据 1.5 节中的分析,权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的选择应使所有方案的总偏差最大.为此,可构造偏差函数

$$\sigma(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m}\sigma_j(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{ij}-r_{kj})^2\omega_j\,,$$

因而求解权重向量$\boldsymbol{\omega}$ 等价于求解如下线性规划问题:

$$\text{(M-3.11)}\qquad \begin{cases}\max\,\sigma(\boldsymbol{\omega}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{ij}-r_{kj})^2\omega_j\,,\\ \text{s. t.}\ \ \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

解此简单的线性规划模型,将得到最优属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$.

综上所述,可得以下算法[212]:

步骤 1 对于某一多属性决策问题,设方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值为 a_{ij},得到决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,其相应的规范化矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2 由专家提供可能的部分属性权重信息 Φ.

步骤 3 由单目标决策模型(M-3.11)求得最优权重向量 $\boldsymbol{\omega}$.

步骤 4 由(1.12)式求得各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 5 按 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$的值从大到小的顺序排列,即得到各方案的排序.

3.3.2 实例分析

例 3.3 某煤矿界外有丰富储量,为了提高原煤产量,初步提出 3 个扩建方案 $x_i(i=1,2,3)$,评价指标(属性)主要有[87]:u_1——总投资额(万元);u_2——建井周期(年);u_3——增占农田(亩);u_4——年增产量(万 t);u_5——产前各方案可产煤量(万 t);u_6——安全条件(分);u_7——可采年限(年);u_8——全员生产率(t/人).其中总投资额,建井周期和增占农田这 3 个属性为成本型,其余属性为效益型.已知属性权重信息为

$$\begin{aligned}\Phi = \Big\{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_8)\ |\ &0.1\leqslant\omega_1\leqslant 0.2, 0.12\leqslant\omega_2\leqslant 0.14,\\ &0.11\leqslant\omega_3\leqslant 0.15, 0.12\leqslant\omega_4\leqslant 0.16, 0.07\leqslant\omega_5\leqslant 0.12,\\ &0.2\leqslant\omega_6\leqslant 0.3, 0.18\leqslant\omega_7\leqslant 0.21, 0.09\leqslant\omega_8\leqslant 0.22, \sum_{j=1}^{8}\omega_j = 1\Big\},\end{aligned}$$

决策矩阵如表 3.5 所示.试确定最优方案.

表 3.5　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	18400	3	100	80	300	60	40	1.2
x_2	19600	4	120	100	400	80	40	1.3
x_3	29360	6	540	120	150	100	50	1.5

利用 3.3.1 节的方法求出目标的排序. 具体步骤如下：

步骤 1　利用(1.2)和(1.3)两式将决策矩阵 A 规范化，得到矩阵 R，如表 3.6 所示.

表 3.6　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	1.0000	1.0000	1.0000	0.6667	0.7500	0.6000	0.8000	0.8000
x_2	0.9388	0.7500	0.8333	0.8333	1.0000	0.8000	0.8000	0.8000
x_3	0.6267	0.5000	0.1852	1.0000	0.3750	1.0000	1.0000	1.0000

步骤 2　利用单目标决策模型(M-3.11)，可建立下列模型

$$\begin{cases}\max & \sigma(\boldsymbol{\omega}) = 0.4860\omega_1 + 0.7500\omega_2 + 2.2234\omega_3 + 0.3333\omega_4 + 1.1875\omega_5 + \\ & \qquad 0.4800\omega_6 + 0.1600\omega_7 + 0.1244\omega_8, \\ \text{s.t.} & 0.1 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.2, 0.12 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.14, 0.11 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.15, \\ & 0.12 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.16, 0.07 \leqslant \omega_5 \leqslant 0.12, 0.2 \leqslant \omega_6 \leqslant 0.3, \\ & 0.18 \leqslant \omega_7 \leqslant 0.21, 0.09 \leqslant \omega_8 \leqslant 0.22, \sum_{j=1}^{8}\omega_j = 1.\end{cases}$$

求得最优权重向量为

$$\boldsymbol{\omega} = (0.10, 0.12, 0.12, 0.12, 0.07, 0.20, 0.18, 0.09).$$

步骤 3　由(1.12)式求得各目标的综合属性值分别为

$$z_1(\boldsymbol{\omega}) = 0.8085, z_2(\boldsymbol{\omega}) = 0.8359, z_3(\boldsymbol{\omega}) = 0.7611.$$

步骤 4　按 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3)$的值从大到小的顺序排列即得到方案的排序

$$x_2 \succ x_1 \succ x_3,$$

故最优目标为 x_2.

3.4　部分权重信息下的两阶段多属性决策方法

3.4.1　决策方法

由于多属性决策一般是根据方案的综合属性值进行择优，显然，综合属性 $z_i(\boldsymbol{\omega})$值越大，其所对应的方案 x_i 就越优.

先了解一下各单个方案 $x_i(i\in N)$ 的综合属性值取最优时，其所对应的各属性权重. 为此，建立下列单目标决策模型：

(M-3.12)
$$\begin{cases}\max \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\omega_j r_{ij},\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

解此模型，得到对应于方案 x_i 的最优属性权重向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)}=(\omega_1^{(i)},\omega_2^{(i)},\cdots,\omega_m^{(i)}),\quad i\in N.$$

下面利用规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$ 及权重向量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}(i\in N)$ 求出属性的最佳协调权向量. 设权重向量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}(i\in N)$ 组成的矩阵为

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_1^{(2)} & \cdots & \omega_1^{(n)}\\ \omega_2^{(1)} & \omega_2^{(2)} & \cdots & \omega_2^{(n)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_m^{(1)} & \omega_m^{(2)} & \cdots & \omega_m^{(n)}\end{pmatrix},$$

则经 n 个权重向量线性组合得到的组合权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{v},\tag{3.3}$$

其中$\boldsymbol{\omega}$ 为组合权向量，$\boldsymbol{v}$ 为待定的 $n\times1$ 列向量且满足约束条件 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=1$. 令 $\boldsymbol{r}_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})(i\in N)$，则 $\boldsymbol{R}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$. 因此

$$z_i(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{m}\omega_j r_{ij}=\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{W}\boldsymbol{v}.\tag{3.4}$$

在选择权重向量 $\boldsymbol{v}$ 时，应使所有方案的综合属性值都尽可能大. 为此，构造如下多目标决策模型

(M-3.13)
$$\begin{cases}\max\ (z_1(\boldsymbol{v}),z_2(\boldsymbol{v}),\cdots,z_n(\boldsymbol{v})),\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=1.\end{cases}$$

由于对每个方案的综合属性值事先并不存在任何偏好，因而上述多目标决策模型可转化为等权的单目标决策问题：

(M-3.14)
$$\begin{cases}\max\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}},\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=1,\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})=(z_1(v),z_2(v),\cdots,z_n(v))=\boldsymbol{RW}\boldsymbol{v}$. 记 $f(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}$，则由(3.4)式得

$$f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{RW})(\boldsymbol{RW})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}.$$

根据矩阵理论可知，$f(\boldsymbol{v})$存在，其最大值是$(\boldsymbol{RW})(\boldsymbol{RW})^{\mathrm{T}}$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$，$\boldsymbol{v}$ 是相应的特征向量. 由于矩阵$(\boldsymbol{RW})(\boldsymbol{RW})^{\mathrm{T}}$ 是对称非负定的，则根据非负不可约矩阵的

Perron-Frobenius 定理[4]可知：$\lambda_{\max}$为单根，特征向量 $v>0$. 因此再由(3.3)式可求出组合权向量(最佳协调权向量)，并由(1.12)式求出各方案的综合属性值，便可以对方案进行排序.

综上所述，可得以下算法[219]：

步骤 1　设对于某一多属性决策问题，方案 x_i 在属性 u_j 下的属性值为 a_{ij}，则得到决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$，其相应的规范化矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　由专家提供属性的权重信息 Φ.

步骤 3　由单目标决策模型(M-3.12)求得对应于方案 x_i 的最优权重向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)}=(\omega_1^{(i)},\omega_2^{(i)},\cdots,\omega_m^{(i)}),\quad i\in N.$$

步骤 4　由 n 个权重向量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}(i\in N)$组成矩阵 W，并计算矩阵$(\boldsymbol{RW})(\boldsymbol{RW})^{\mathrm{T}}$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$，及特征向量 v(已归一化).

步骤 5　由(3.3)式求出组合权重向量(最佳协调权向量). 再由(1.12)式得到各方案综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 6　按 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$值从大到小的顺序排列即得到方案的排序.

3.4.2　实例分析

例 3.4　某团炮兵群在进攻战斗前发现了 6 个敌目标并获得其一些情报，现需要对这 6 个敌目标(方案)进行评估并确定对敌目标攻击的先后顺序，6 个目标的情况如下[175]：

(1) 敌目标 x_1：我步兵二连在向敌 80 高地冲击时，遭敌支撑点猛烈射击，前进受阻，目标位置精确，通视良好，易损；

(2) 敌目标 x_2：在 69 高地发现敌集结坦克连，目标位置精确，通视较好，较易损；

(3) 敌目标 x_3：团二梯队在开进途中，遭 75 高地敌自行炮连的猛烈射击，损失较大，目标位置较精确，通视较好，较易损；

(4) 敌目标 x_4：在 66 高地发现敌团指挥所，目标位置较精确，通视模糊，难易损；

(5) 敌目标 x_5：在 58 高地发现敌自行炮连，正向我三连阵地射击，威胁不大，目标位置较精确，通视困难，较易损；

(6) 敌目标 x_6：在 70 高地发现敌反坦克炮连，正向前沿机动，目标位置较精确，通视困难，较易损.

作战指挥员根据当时的实际情况，着重考虑了下列 6 个因素(属性)：u_1——目标的重要性；u_2——射击的紧迫性；u_3——目标资料的可靠性；u_4——目标位置的通视性；u_5——目标程度的易损性；u_6——射击任务的一致性. 把射击指挥的干预性作为参考因素. 针对上述情况，得到决策矩阵 $\boldsymbol{A}$，如表 3.7 所示：

表 3.7　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	7	9	9	9	7	7
x_2	7	7	7	7	5	9
x_3	8	9	7	7	6	9
x_4	8	6	7	5	2	6
x_5	8	7	7	0	5	9
x_6	5	0	7	1	6	8

目标的重要性，射击的紧迫性，目标资料的可靠性，目标位置的通视性属于越大越优型(效益型)，目标程度的易损性属于越小越优型(成本型)，而射击任务的一致性属于越接近越优的固定型. 因素 $u_j(j=1,2,\cdots,6)$ 的权重不能完全确定. 已知属性权重信息为

$$\Phi=\Big\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6)\ |0.4\leqslant\omega_1\leqslant 0.5, 0.2\leqslant\omega_2\leqslant 0.3,$$
$$0.13\leqslant\omega_3\leqslant 0.2, 0.1\leqslant\omega_4\leqslant 0.25, 0.08\leqslant\omega_5\leqslant 0.2,$$
$$0\leqslant\omega_6\leqslant 0.5, \sum_{j=1}^{6}\omega_j=1\Big\}.$$

用 3.4.1 节的方法求出目标的排序. 具体步骤如下：

步骤 1　利用(1.2′)，(1.3′)和(1.4)三式将决策矩阵 A 规范化，得到矩阵 R，如表 3.8 所示.

表 3.8　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	2/3	1	1	1	0	1
x_2	2/3	7/9	0	7/9	2/5	0
x_3	1	1	0	7/9	1/5	0
x_4	1	5/9	0	5/9	1	1/2
x_5	1	7/9	0	0	2/5	0
x_6	0	0	0	1/9	1/5	1/2

步骤 2　对于方案 x_1，利用单目标决策模型(M-3.12)建立下列模型：

$$\begin{cases}\max & \{0.667\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_6\},\\ \text{s.t.} & 0.4\leqslant\omega_1\leqslant 0.5, 0.2\leqslant\omega_2\leqslant 0.3, 0.13\leqslant\omega_3\leqslant 0.2,\\ & 0.1\leqslant\omega_4\leqslant 0.25, 0.08\leqslant\omega_5\leqslant 0.2, 0\leqslant\omega_6\leqslant 0.5, \sum_{j=1}^{6}\omega_j=1.\end{cases}$$

解此模型得对应于方案的最优属性权重向量

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)}=(\omega_1^{(1)},\omega_2^{(1)},\omega_3^{(1)},\omega_4^{(1)},\omega_5^{(1)},\omega_6^{(1)})=(0.4,0.2,0.13,0.1,0.08,0.09).$$

类似地，对于方案 $x_i(i=2,3,4,5,6)$，可分别建立单目标决策模型，并求得相应的最优目标权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)}=(\omega_1^{(2)},\omega_2^{(2)},\omega_3^{(2)},\omega_4^{(2)},\omega_5^{(2)},\omega_6^{(2)})=(0.49,0.2,0.13,0.1,0.08,0),$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)}=(\omega_1^{(3)},\omega_2^{(3)},\omega_3^{(3)},\omega_4^{(3)},\omega_5^{(3)},\omega_6^{(3)})=(0.49,0.2,0.13,0.1,0.08,0),$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(4)}=(\omega_1^{(4)},\omega_2^{(4)},\omega_3^{(4)},\omega_4^{(4)},\omega_5^{(4)},\omega_6^{(4)})=(0.49,0.2,0.13,0.1,0.08,0),$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(5)}=(\omega_1^{(5)},\omega_2^{(5)},\omega_3^{(5)},\omega_4^{(5)},\omega_5^{(5)},\omega_6^{(5)})=(0.4,0.2,0.2,0.12,0.08,0),$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(6)}=(\omega_1^{(6)},\omega_2^{(6)},\omega_3^{(6)},\omega_4^{(6)},\omega_5^{(6)},\omega_6^{(6)})=(0.49,0.2,0.13,0.1,0.08,0).$$

步骤 3　向量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}(i=1,2,\cdots,6)$ 组成矩阵

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}0.4&0.4&0.49&0.49&0.4&0.4\\0.2&0.29&0.2&0.2&0.2&0.2\\0.13&0.13&0.13&0.13&0.13&0.13\\0.1&0.1&0.1&0.1&0.19&0.1\\0.08&0.08&0.08&0.08&0.08&0.08\\0.09&0&0&0&0&0.09\end{pmatrix},$$

计算矩阵 $(\boldsymbol{RW})(\boldsymbol{RW})^{\mathrm{T}}$，得

$$(\boldsymbol{RW})(\boldsymbol{RW})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2.214&2.355&2.387&2.387&2.301&2.214\\2.355&2.516&2.549&2.549&2.454&2.355\\2.387&2.549&2.583&2.583&2.486&2.387\\2.387&2.549&2.583&2.583&2.486&2.387\\2.301&2.454&2.566&2.566&2.398&2.301\\2.214&2.355&2.355&2.387&2.301&2.214\end{bmatrix},$$

其最大特征值 $\lambda_{\max}$ 及特征向量 $\boldsymbol{\omega}$ 分别为

$$\lambda_{\max}=14.522,\boldsymbol{\omega}=(0.159,0.170,0.172,0.172,0.168,0.159).$$

步骤 4　由(3.3)式求出组合权向量(最佳协调权向量)并进行归一化处理得

$$\boldsymbol{\omega}=(0.431,0.215,0.130,0.115,0.080,0.029).$$

再由(1.12)式得到各方案综合属性值分别为

$$z_1(\boldsymbol{\omega})=0.776,z_2(\boldsymbol{\omega})=0.576,z_3(\boldsymbol{\omega})=0.751,$$

$$z_4(\boldsymbol{\omega})=0.709,z_5(\boldsymbol{\omega})=0.630,z_6(\boldsymbol{\omega})=0.043.$$

步骤 5　按 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,6)$ 值从大到小的顺序排列即得到方案的排序，得

$$x_1\succ x_3\succ x_4\succ x_5\succ x_2\succ x_6,$$

故最优方案为 x_1.

3.5 基于线性目标规划模型的多属性决策方法

由于属性权重信息不能完全确知的不确定多属性决策问题具有下述突出特点：属性权重信息的不完全性引起决策方案择优的不确定性. 因此，在实际决策过程中，决策者的积极参与是很必要的. 本节对只有部分权重信息且决策者对方案的偏好信息分别以互反和模糊互补判断矩阵以及效用值 3 种形式给出的多属性决策方法进行介绍. 首先基于上述 3 种偏好信息，分别建立了一个线性目标规划模型，通过求解这 3 个模型可确定属性的权重向量，然后提出了一种基于线性目标规划模型的多属性决策方法.

3.5.1 模型

1. 决策者对方案的偏好信息以互反判断矩阵形式给出的情形[238]

对于某一多属性决策问题，设决策矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}(a_{ij}>0)$，其规范化矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}(r_{ij}>0)$. 决策者根据互反标度[204]对方案 $x_i(i\in N)$进行两两比较，并构造互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{n\times n}$，其中 $h_{ij}h_{ji}=1, h_{ii}=1, h_{ij}>0, i,j\in N$. 为了使决策信息一致化，我们把所有方案 $x_i(i\in N)$的综合属性值（利用(1.12)式计算）转化成互反判断矩阵形式 $\overline{\boldsymbol{H}}=(\bar{h}_{ij})_{n\times n}$，其中

$$\bar{h}_{ij}=\frac{z_i(\boldsymbol{\omega})}{z_j(\boldsymbol{\omega})}=\frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k}{\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k}, \quad i,j\in N, \tag{3.5}$$

即

$$\bar{h}_{ij}\sum_{k=1}^{m} r_{jk}\omega_k=\sum_{k=1}^{m} r_{ik}\omega_k, \quad i,j\in N. \tag{3.6}$$

一般情况下，互反判断矩阵 $\boldsymbol{H}=(a_{ij})_{n\times n}$和 $\overline{\boldsymbol{H}}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$之间往往存在着一定的偏差，为此引入偏差函数

$$f_{ij}=\left|\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k\right|, \quad i,j\in N. \tag{3.7}$$

显然，为了得到合理的属性权重向量，上述偏差函数值总是越小越好，为此可构造下列多目标最优化模型：

$$(\mathbf{M\text{-}3.15})\qquad \begin{cases}\min f_{ij}=\left|\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k\right|, \quad i,j\in N,\\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

为了求解模型(M-3.15),并考虑到所有的目标函数是公平竞争的,且每个目标函数 f_{ij} 希望达到的期望值均为 0,可将模型(M-3.15)转化为下列线性目标规划模型:

$$
\text{(M-3.16)}\quad \begin{cases} \min J = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s_{ij}d_{ij}^{+}+t_{ij}d_{ij}^{-}), \\ \text{s.t.}\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0,\quad i,j\in N, i\neq j, \\ \qquad \boldsymbol{\omega}\in\Phi, \\ \qquad d_{ij}^{+}\geqslant 0, d_{ij}^{-}\geqslant 0, \qquad\qquad i,j\in N, i\neq j, \end{cases}
$$

其中 d_{ij}^{+} 是 $\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k$ 高于期望值 0 的上偏差变量;d_{ij}^{-} 是 $\sum_{k=1}^{m}(h_{ij}r_{jk}-r_{ik})\omega_k$ 低于期望值 0 的下偏差变量;s_{ij} 和 t_{ij} 分别是 d_{ij}^{+} 和 d_{ij}^{-} 的权系数. 通过求解模型(M-3.16),即可得到属性的权重向量 $\boldsymbol{\omega}$,并由(1.12)式求得各方案综合属性值,便可以依此对方案进行排序和择优.

2. 决策者对决策方案的偏好信息以互补判断矩阵形式给出的情形[238]

设决策者根据互补标度[204]对方案 $x_i(i\in N)$ 进行两两比较,并构造互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$,其中 $b_{ij}+b_{ji}=1, b_{ii}=0.5, b_{ij}\geqslant 0, i,j\in N$. 为了使决策信息一致化,我们把所有方案 $x_i(i\in N)$ 的综合属性值转化成互补判断矩阵形式 $\overline{\boldsymbol{B}}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$,其中[44]

$$
\bar{b}_{ij}=\frac{z_i(\boldsymbol{\omega})}{z_i(\boldsymbol{\omega})+z_j(\boldsymbol{\omega})}=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}r_{ik}\omega_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}+r_{jk})\omega_k}, \tag{3.8}
$$

即

$$
\bar{b}_{ij}\sum_{k=1}^{m}(r_{ik}+r_{jk})\omega_k=\sum_{k=1}^{m}r_{ik}\omega_k. \tag{3.9}
$$

一般情况下,互补判断矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 和 $\overline{\boldsymbol{B}}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$ 之间往往存在着一定的偏差,为此可引入偏差函数

$$
h_{ij}=\left|\sum_{k=1}^{m}[b_{ij}(r_{ik}+r_{jk})-r_{ik}]\omega_k\right|,\quad i,j\in N. \tag{3.10}
$$

显然,为了得到合理的属性权重向量,上述偏差函数值总是越小越好,为此可构造下列多目标最优化模型:

$$
\text{(M-3.17)}\quad \begin{cases} \min h_{ij}=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{m}[b_{ij}(r_{ik}+r_{jk})-r_{ik}]\omega_k\right|,\quad i,j\in N, \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{\omega}\in\Phi. \end{cases} \tag{3.11}
$$

为了求解模型(M-3.17),并考虑到所有的目标函数是公平竞争的,且每个目标函数 f_{ij} 希望达到的期望值为 0,类似模型(M-3.16),可将(M-3.17)转化为下列线性目标规划模型:

$$
\text{(M-3.18)}\quad \begin{cases} \min J = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(s_{ij}d_{ij}^{+}+t_{ij}d_{ij}^{-}), \\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{k=1}^{m}[b_{ij}(r_{ik}+r_{jk})-r_{ik}]\omega_k-d_{ij}^{+}+d_{ij}^{-}=0, \quad i,j\in N, i\neq j, \\ \qquad \boldsymbol{\omega}\in\Phi, d_{ij}^{+}\geqslant 0, d_{ij}^{-}\geqslant 0, \quad i,j\in N, i\neq j, \end{cases}
$$

其中 d_{ij}^{+} 是 $\sum\limits_{k=1}^{m}[b_{ij}(r_{ik}+r_{jk})-r_{ik}]\omega_k$ 高于期望值 0 的上偏差变量;d_{ij}^{-} 是 $\sum\limits_{k=1}^{m}[b_{ij}(r_{ik}+r_{jk})-r_{ik}]\omega_k$ 低于期望值 0 的下偏差变量;s_{ij} 和 t_{ij} 分别是 d_{ij}^{+} 和 d_{ij}^{-} 的权系数.利用目标单纯形法求解模型(M-3.18),即可得到属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$,并由(1.12)式求得各方案综合属性值,便可依此对方案进行排序和择优.

3. 决策者对决策方案的偏好信息以效用值形式给出的情形

设决策者对方案有一定的主观偏好,且主观偏好值 $\vartheta_i(i\in N)$ 以效用值形式给出.

由于种种条件的制约,决策者对方案的主观偏好值与客观偏好值(方案的综合属性值)之间往往存在一定的偏差,为了从数量上描述这种偏差,我们对每个方案的综合属性值分别引入正、负偏差变量 d_i^{+},d_i^{-},且 d_i^{+},$d_i^{-}\geqslant 0$,其中 d_i^{+} 表示第 i 个客观偏好值超出主观偏好值的数值,d_i^{-} 表示第 i 个客观偏好值未达到主观偏好值的数值,因此可以得到下列方程组:

$$
\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j + d_i^{-} - d_i^{+} = \vartheta_i, \quad i\in N.
$$

现在,我们希望决策者的主观偏好值与客观偏好值之间的偏差尽可能地小,即相应的正、负偏差 d_i^{+},$d_i^{-}(i\in N)$应尽可能地小,由于所有方案是公平竞争的,因此可建立如下目标规划模型:

$$
\text{(M-3.19)}\quad \begin{cases} \min J = \sum\limits_{i=1}^{n}(t_i^{+}d_i^{+}+t_i^{-}d_i^{-}), \\ \text{s.t.}\ \sum\limits_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j + d_i^{-} - d_i^{+} = \vartheta_i, \quad i\in N, \\ \qquad \boldsymbol{\omega}\in\Phi, \\ \qquad d_i^{+}\geqslant 0, d_i^{-}\geqslant 0, \quad i\in N, \end{cases}
$$

其中 t_i^+ 和 t_i^- 分别是 d_i^+ 和 d_i^- 的权系数. 利用目标单纯形法求解模型(M-3.19),即可得到属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$,并由(1.12)式求得各方案综合属性值,便可以依此对方案进行排序.

3.5.2　决策方法

下面介绍一种基于线性目标规划模型的多属性决策方法. 具体步骤如下[238]:

步骤 1　由多属性决策问题构造决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,并利用(1.2)和(1.3)两式把矩阵 A 规范化为决策矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　若决策者以互反判断矩阵形式给出自己对方案的偏好信息,则利用模型(M-3.16)求得属性的权重向量 $\boldsymbol{\omega}$;若决策者以互补判断矩阵形式给出自己对方案的偏好信息,则利用模型(M-3.18)求得属性的权重向量 $\boldsymbol{\omega}$;若决策者以效用值形式给出自己对方案的偏好信息,则利用模型(M-3.19)求得属性的权重向量 $\boldsymbol{\omega}$.

步骤 3　由(1.12)式求得各方案综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$,并依此对方案进行排序和择优.

3.5.3　实例分析

例 3.5　某单位决定对老产品进行改进,现有 5 个设计方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$,考察的指标(属性)有[199]:u_1—— 成本(元);u_2——能效(%);u_3——可靠性(无故障工作小时);u_4——产品寿命(年). 各方案的属性值列于表 3.9.

表 3.9　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	8500	90	20000	13
x_2	7500	85	15000	14
x_3	7000	87	11000	13
x_4	6500	72	8000	11
x_5	4500	70	7500	12

在属性集中,成本为成本型,其他均为效益型,属性权重不能完全确定. 已知的部分权重信息为

$$\Phi=\Big\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\ |0.3\leqslant\omega_1\leqslant 0.45,\omega_2\leqslant 0.15,0.1\leqslant\omega_3\leqslant 0.35,$$
$$\omega_4\geqslant 0.03,\sum_{j=1}^{4}\omega_j=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,3,4\Big\}.$$

试确定最佳方案.

利用 3.5.2 节中的方法进行说明.具体步骤如下:

步骤 1 利用(1.2)和(1.3)两式把 A 规范化,得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$,如表 3.10 所示:

表 3.10 决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	0.529	1.000	1.000	0.929
x_2	0.600	0.944	0.750	1.000
x_3	0.643	0.967	0.550	0.929
x_4	0.692	0.800	0.400	0.786
x_5	1.000	0.778	0.375	0.857

步骤 2 不妨假设决策者根据 1—9 互反标度对方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 进行两两比较,并给出互反判断矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 1/3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/5 & 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是利用模型(M-3.16),求得属性的权重向量

$$\boldsymbol{\omega}=(0.45,0,0.35,0.2),$$

且

$$\begin{aligned}
&d_{12}^{+}=1.4237,d_{12}^{-}=0,d_{13}^{+}=0,d_{13}^{-}=0.1062,d_{14}^{+}=3.4864,\\
&d_{14}^{-}=0,d_{15}^{+}=2.9894,d_{15}^{-}=0,d_{21}^{+}=0,d_{21}^{-}=0.4746,\\
&d_{23}^{+}=0,d_{23}^{-}=0.5060,d_{24}^{+}=2.3105,d_{24}^{-}=0,d_{25}^{+}=0.0202,\\
&d_{25}^{-}=0,d_{31}^{+}=0.1062,d_{31}^{-}=0,d_{32}^{+}=1.129,d_{32}^{-}=0,\\
&d_{34}^{+}=2.3754,d_{34}^{-}=0,d_{35}^{+}=0,d_{35}^{-}=0.4168,d_{41}^{+}=0,\\
&d_{41}^{-}=0.4981,d_{42}^{+}=0,d_{42}^{-}=0.4621,d_{43}^{+}=0,d_{43}^{-}=0.475,\\
&d_{45}^{+}=0,d_{45}^{-}=0.5011,d_{51}^{+}=0,d_{51}^{-}=0.5979,d_{52}^{+}=0,\\
&d_{52}^{-}=0.0202,d_{53}^{+}=1.2503,d_{53}^{-}=0,d_{54}^{+}=3.7220,d_{54}^{-}=0.
\end{aligned}$$

步骤 3 由(1.12)式求得各方案综合属性值:

$$z_1(\boldsymbol{\omega})=0.7739,z_2(\boldsymbol{\omega})=0.7325,z_3(\boldsymbol{\omega})=0.6677,$$
$$z_4(\boldsymbol{\omega})=0.6086,z_5(\boldsymbol{\omega})=0.7527.$$

步骤 4 依此对方案进行排序,得

$$x_1 \succ x_5 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4,$$

故最优方案为 x_1.

3.6　基于方案集缩减策略的交互式多属性决策方法

本节把多目标决策领域中的交互式决策思想引入多属性决策领域，为解决只有部分权重信息的不确定多属性决策问题提供了一条新途径.

3.6.1　决策方法

定义 3.4　对于方案 $x_p \in X$，若存在方案 $x_q \in X$，使得 $z_q(\boldsymbol{\omega}) > z_p(\boldsymbol{\omega})$，则称方案 x_p 是综合属性值被支配的，否则，称 x_p 是综合属性值非被支配的，其中方案 x_p 和方案 x_q 的综合属性值如(1.12)式所定义.

由定义 3.4 知，综合属性值被支配方案在优化过程中可被删除，从而使方案集 X 得到缩减.

下面的定理将给出一个根据已知部分属性权重信息来判断综合属性值被支配方案的方法.

定理 3.1　在已知的部分权重信息 Φ 下，方案 $x_p \in X$ 是综合属性值被支配的充要条件是 $J_p < 0$，其中

$$\begin{cases} J_p = \max\left(\sum_{j=1}^{m} r_{pj}\omega_j + \theta\right), \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_i + \theta \leqslant 0, \quad i \neq p, i \in N, \\ \qquad\quad \boldsymbol{\omega} \in \Phi, \end{cases}$$

θ 为符号无约束的辅助变量，无实际意义.

证明(充分性)　若 $J_p < 0$，由约束条件得：对任意 $i \in N, i \neq p$，有 $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\omega_j \leqslant -\theta$，当取最优解时，至少存在 q，使得当 $i = q$ 时，等式成立，即 $\sum_{j=1}^{m} r_{qj}\omega_j = -\theta$. 根据 $J_p < 0$，有

$$J_p = \max\left(\sum_{j=1}^{m} r_{pj}\omega_j + \theta\right) = \max_{\boldsymbol{\omega}}\left(\sum_{j=1}^{m} \bar{r}_{pj}\omega_j - \sum_{j=1}^{m} r_{qj}\omega_j\right) < 0,$$

故 $\sum_{j=1}^{m} r_{pj}\omega_j < \sum_{j=1}^{m} r_{qj}\omega_j$，即 $z_p(\boldsymbol{\omega}) < z_q(\boldsymbol{\omega})$，因此方案 x_p 是综合属性值被支配的.

(必要性)　由方案 $x_p \in X$ 是综合属性值被支配方案得：存在 $x_q \in X$，使得 $\sum_{j=1}^{m} r_{pj}\omega < \sum_{j=1}^{m} r_{qj}\omega$. 由约束条件知 $\sum_{j=1}^{m} r_{qj}\omega_j \leqslant -\theta$，故必有

$$\sum_{j=1}^{m} r_{pj}\omega_j-(-\theta)\leqslant \sum_{j=1}^{m} r_{pj}\omega_j-\sum_{j=1}^{m} r_{qj}\omega_j<0,$$

即 $J_p<0$. 定理证毕.

因此,只需对 X 中的方案依次验证,就得到综合属性值非被支配方案集 $\overline{X}$, $\overline{X}$ 为 X 的子集,因而可使原方案集得到缩减.

基于上述理论,可得下列交互式多属性决策方法.

步骤 1 由多属性决策问题构造决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,用适当方法把 $\boldsymbol{A}$ 规范化为决策矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2 根据备选方案综合属性值和已知的部分属性权重信息,利用定理 3.1 删除综合属性值被支配方案,从而得到非被支配方案集 $\overline{X}$. 若决策者均认为 $\overline{X}$ 中某一非被支配方案为最优方案,或 $\overline{X}$ 中只有一个方案,则该方案即为最优方案,问题求解结束;否则,进行下一步.

步骤 3 与决策者进行交互,并把交互所得到的权重信息加入已知的部分权重信息集 Φ 中,转步骤 2.

显然,上述过程是收敛的,最终必找到最优方案,随着权重信息增加,综合属性值非被支配方案集逐渐缩小,要么决策者最后均认为某一非被支配方案为最优方案,要么综合属性值非被支配方案集缩小为只有一个方案,则该方案即为最优方案.

注 3.1 该决策法只可用于选择最优方案,不能适合于方案的排序.

3.6.2 实例分析

例 3.6 以购买住房为例,有 6 处地点(方案)可供选择,这 6 个方案在 4 个指标(属性)(u_1——价格(万元);u_2——使用面积(m^2);u_3——住房距工作地点的距离(km);u_4——环境(评估值))下的属性值如表 3.11 所示.

表 3.11 决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	3.0	100	10	7
x_2	2.5	80	8	5
x_3	1.8	50	20	11
x_4	2.2	70	12	9
x_5	3.2	120	25	12
x_6	3.3	110	26	10

已知的部分属性权重信息为

$$\Phi=\left\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\mid 0.1\leqslant\omega_1\leqslant 0.45,\omega_2\leqslant 0.2,0.1\leqslant\omega_3\leqslant 0.4,\right.$$
$$\left.\omega_4\geqslant 0.03,\sum_{j=1}^{4}\omega_j=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,3,4\right\}.$$

试确定最佳方案.

下面利用 3.6.1 节的方法进行求解.

首先利用(1.1)和(1.2)两式把决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 规范化,得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$,如表 3.12 所示.

表 3.12　决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	0.600	0.833	0.800	0.583
x_2	0.720	0.667	1	0.417
x_3	1	0.417	0.400	0.917
x_4	0.818	0.583	0.667	0.750
x_5	0.563	1	0.320	1
x_6	0.545	0.917	0.308	0.833

显然,方案 x_6 的每个规范化后的属性值均小于方案 x_5 的相应的属性值,故 $z_6(\boldsymbol{\omega})<z_5(\boldsymbol{\omega})$,因而先可删除方案 x_6,对于其他的 5 种策略,利用定理 3.1 来判断.

对于方案 x_1,根据定理 3.1,可转化为求下述线性规划问题:

$$\begin{cases} J_1=\max(\theta_1-\theta_2+0.600\omega_1+0.833\omega_2+0.800\omega_3+0.583\omega_4), \\ \text{s.t.}\quad \theta_1-\theta_2+0.720\omega_1+0.667\omega_2+\omega_3+0.417\omega_4\leqslant 0 \\ \qquad\ \theta_1-\theta_2+\omega_1+0.417\omega_2+0.400\omega_3+0.917\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad\ \theta_1-\theta_2+0.818\omega_1+0.583\omega_2+0.667\omega_3+0.750\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad\ \theta_1-\theta_2+0.563\omega_1+\omega_2+0.320\omega_3+\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad\ 0.1\leqslant\omega_1\leqslant 0.45,\omega_2\leqslant 0.2,0.1\leqslant\omega_3\leqslant 0.4,\omega_4\geqslant 0.03, \\ \qquad\ \sum_{j=1}^{4}\omega_j=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,3,4. \end{cases}$$

解得 $J_1=0.0381>0$,类似地,对于方案 x_2,x_3,x_4,x_5,分别求得

$$J_2=-0.2850<0,J_3=-0.0474<0,$$
$$J_4=0.0225>0,J_5=0.01147>0,$$

因此,x_2 和 x_3 是综合属性值被支配方案,应当删除,得到非被支配方案集 $\overline{X}=\{x_1,x_4,x_5\}$. 与决策者交互,不妨设决策者认为 x_1 和 x_4 优于 x_5,则 $z_1(\boldsymbol{\omega})>z_5(\boldsymbol{\omega}),z_4(\boldsymbol{\omega})>z_5(\boldsymbol{\omega})$,即有

$$0.037\omega_1-0.167\omega_2+0.480\omega_3-0.417\omega_4>0,$$
$$0.255\omega_1-0.417\omega_2+0.347\omega_3-0.250\omega_4>0.$$

把上面两式作为已知属性权重信息加入 Φ **中，对于缩减的方案集** $\overline{X}=\{x_1,x_4\}$，**再次运用定理** 3.1.

(1) **对于方案** x_1，**可解下列线性规划问题：**

$$\begin{cases} J_1=\max(\theta_1-\theta_2+0.600\omega_1+0.833\omega_2+0.800\omega_3+0.583\omega_4), \\ \text{s.t.}\quad \theta_1-\theta_2+0.720\omega_1+0.667\omega_2+\omega_3+0.417\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad \theta_1-\theta_2+\omega_1+0.417\omega_2+0.400\omega_3+0.917\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad \theta_1-\theta_2+0.818\omega_1+0.583\omega_2+0.667\omega_3+0.750\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad \theta_1-\theta_2+0.563\omega_1+\omega_2+0.320\omega_3+\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad 0.037\omega_1-0.167\omega_2+0.480\omega_3-0.417\omega_4>0, \\ \qquad 0.255\omega_1-0.417\omega_2+0.347\omega_3-0.250\omega_4>0, \\ \qquad 0.1\leqslant\omega_1\leqslant 0.45,\omega_2\leqslant 0.2,0.1\leqslant\omega_3\leqslant 0.4, \\ \qquad \omega_4\geqslant 0.03,\sum_{j=1}^{4}\omega_j=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,3,4. \end{cases}$$

解得 $J_1=-0.3260<0$.

(2) **对于方案** x_4，**可解下列线性规划问题：**

$$\begin{cases} J_4=\max(\theta_1-\theta_2+0.818\omega_1+0.583\omega_2+0.667\omega_3+0.750\omega_4), \\ \text{s.t.}\quad \theta_1-\theta_2+0.600\omega_1+0.833\omega_2+0.800\omega_3+0.583\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad \theta_1-\theta_2+0.720\omega_1+0.667\omega_2+\omega_3+0.417\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad \theta_1-\theta_2+\omega_1+0.417\omega_2+0.400\omega_3+0.917\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad \theta_1-\theta_2+0.563\omega_1+\omega_2+0.320\omega_3+\omega_4\leqslant 0, \\ \qquad 0.037\omega_1-0.167\omega_2+0.480\omega_3-0.417\omega_4>0, \\ \qquad 0.255\omega_1-0.417\omega_2+0.347\omega_3-0.250\omega_4>0, \\ \qquad 0.1\leqslant\omega_1\leqslant 0.45,\omega_2\leqslant 0.2,0.1\leqslant\omega_3\leqslant 0.4, \\ \qquad \omega_4\geqslant 0.03,\sum_{j=1}^{4}\omega_j=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,3,4. \end{cases}$$

解得 $J_4=0$. **因此**，x_1 **是综合属性值被支配方案，应当删除，得到非被支配方案集** $\overline{X}=\{x_4\}$. **则** x_4 **即为最优方案.**

3.7 基于方案达成度和综合度的交互式多属性决策方法

本节在属性权重信息不能完全确知的情况下，介绍一种基于方案达成度和综合度的交互式决策方法. 该法既能充分利用已知的客观信息，又能最大限度地

考虑决策者的交互要求，发挥决策者的主观能动性，并通过对方案达成度和综合度的给定和修正来实现人机交互决策，使方案在总体上达到决策者要求的同时，又能使各方案尽可能地达到自己的良好状态，从而使决策更具合理性.

3.7.1　定义和定理

多属性决策一般是对方案综合属性值的排序比较. 由于属性权重的不确定性导致方案综合属性值的不确定性，因此，属性权重的不同取值会产生不同的方案排序. 在此情况下，决策者的积极参与并在决策过程中发挥自己的主观能动性，将对合理性决策发挥重要的作用.

对于给定的属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}\in\Phi$，方案综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 总是越大越好. 于是建立如下多目标决策模型

$$(\text{M-3.20})\quad \begin{cases}\max z(\boldsymbol{\omega})=(z_1(\boldsymbol{\omega}),z_2(\boldsymbol{\omega}),\cdots,z_n(\boldsymbol{\omega})),\\ \text{s.t. } \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

定义 3.5[220]　若不存在 $\boldsymbol{\omega}\in\Phi$，使得 $z_i(\boldsymbol{\omega})\geqslant z_i(\boldsymbol{\omega}^0)$，$i\in N$，$\boldsymbol{\omega}^0\in\Phi$，并且至少有一严格不等式成立，则称 $\boldsymbol{\omega}^0$ 为模型(M-3.20)的有效解.

定义 3.6[220]　称决策者所希望达到的方案 x_i 的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ 的水平值 $\bar{z}_i$ 为方案 x_i 的期望水平.

定义 3.7[220]　若

$$\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))=\frac{z_i(\boldsymbol{\omega})-z_i^{\min}}{\bar{z}_i-z_i^{\min}},\quad i\in N,\tag{3.12}$$

则称 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))$ 为方案 x_i 的达成度.

函数 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))$ 具有下述两个特点：

(1) 方案达成度是在以方案综合属性最小值为参考点的前提下，所达到的方案综合属性值与期望水平的百分比. 当方案综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ 离综合属性负理想值(见定义 3.2)越远，方案 x_i 的达成度越高；反之，方案 x_i 的达成度越小.

(2) 对于 $\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2\in\Phi$，若 $z_i(\boldsymbol{\omega}^1)>z_i(\boldsymbol{\omega}^2)$，则 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^1))>\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^2))$，即 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))$ 是关于 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ 的严格单调递增函数.

定义 3.8[220]　若 $c(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}(z_i(\boldsymbol{\omega})-z_i^{\min})$，则称 $c(\boldsymbol{\omega})$ 为方案综合度.

显然，方案综合度关于 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ 也是严格单调递增的.

方案达成度反映的是各方案的达成情况，而方案综合度则反映了方案总属性值的大小. 综合考虑这两方面因素，就可以在交互决策过程中实现决策方案在总体上达到决策者要求的同时，又能使各方案尽可能地达到自己的良好状态，从而得到合理的方案排序. 具体思想如下：

初始时，可建立单目标优化模型

(**M-3.21**) $$\begin{cases}\max c(\boldsymbol{\omega}),\\ \text{s. t. } \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

求解该模型，得到最优解 $\boldsymbol{\omega}$，求出各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ 以及方案综合度 $c(\boldsymbol{\omega})$，并求出各方案的达成度 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))(i\in N)$. 决策者依此提出初始的各方案达成度 $\varphi_i^0(i\in N)$ 以及方案综合度的低限值 c_0.

定理 3.2[220] 单目标优化模型(M-3.21)的最优解为多目标优化模型(M-3.20)的有效解.

证明 用反证法. 若 $\boldsymbol{\omega}^0$ 不是多目标优化模型(M-3.20)的有效解，则存在 $\boldsymbol{\omega}'\in\Phi$，使得对 $\forall i\in N$，有 $z_i(\boldsymbol{\omega}^0)\leqslant z_i(\boldsymbol{\omega}')$，且存在 i_0，使得 $z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}^0)<z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}')$. 因为 $c(\boldsymbol{\omega})$ 对于 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 是严格单调递增的，故 $c(\boldsymbol{\omega}^0)<c(\boldsymbol{\omega}')$，所以 $\boldsymbol{\omega}^0$ 不是单目标优化模型(M-3.21)的最优解，这与定理条件矛盾. 故单目标优化模型(M-3.21)的最优解为多目标优化模型(M-3.21)的有效解. 定理证毕.

若方案综合度指标值越好，则方案在总体上越能满足决策者的要求，但是这有可能使某些方案的达成度偏低，从而远离自己的良好状态；另一方面，如果仅运用方案达成度，则它不可能有效地实现不同方案之间的平衡；再者，各个方案之间是公平竞争的. 综合这些因素，建立下列单目标决策模型：

(**M-3.22**) $$\begin{cases}\max J=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i,\\ \text{s. t. } \quad c(\boldsymbol{\omega})\geqslant c_0,\\ \qquad\quad \varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))\geqslant\varphi_i\geqslant\varphi_i^0,\quad i\in N,\\ \qquad\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

求解模型(M-3.22)，若无解，则决策者需重新设定初始的各方案达成度及方案综合度的低限值；若有最优解，则易证下述定理成立.

定理 3.3[220] 单目标优化模型(M-3.22)的最优解是多目标优化模型(M-3.20)的有效解.

证明 用反证法. 若 $\boldsymbol{\omega}^0$ 不是多目标优化模型(M-3.12)的有效解，则存在 $\boldsymbol{\omega}'\in\Phi$，使得对 $\forall i\in N$，有 $z_i(\boldsymbol{\omega}^0)\leqslant z_i(\boldsymbol{\omega}')$，且存在 i_0，使得 $z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}^0)<z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}')$，因为 $c(\boldsymbol{\omega})$ 和 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}))$ 均是关于 $z_i(\boldsymbol{\omega})$ 的严格单调递增函数，故 $c(\boldsymbol{\omega}^0)<c(\boldsymbol{\omega}')$，对任意 i，有 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^0))\leqslant\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}'))$，且 $\varphi(z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}^0))<\varphi(z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}'))$. 所以，$c(\boldsymbol{\omega}')\geqslant c_0$，对任意 i，有 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}'))\geqslant\varphi_i\geqslant\varphi_i^0$，且存在 λ_{i_0}'，使得 $\varphi(z_{i_0}(\boldsymbol{\omega}'))\geqslant\varphi_{i_0}'>\varphi_{i_0}\geqslant\varphi_i^0$，从而有

$$\sum_{i=1,i\neq i_0}^{n}\varphi_i+\varphi_{i_0}'>\sum_{i=1}^{n}\varphi_i,$$

这与$\boldsymbol{\omega}^0$是单目标优化模型(M-3.22)的最优解相矛盾. 故单目标优化模型(M-3.22)的最优解是多目标优化模型(M-3.20)的有效解. 定理证毕.

定理 3.2 和定理 3.3 保证了单目标决策模型(M-3.21)和(M-3.22)的最优解是原多目标决策模型(M-3.20)的有效解. 若决策人对由模型(M-3.22)所得到的结果感到满意,则可计算出各方案的综合属性值,并按其值的大小对方案进行排序,从而得到决策者的满意方案; 否则,决策者可适当提高某些方案的最低达成度,同时降低另一些方案的最低达成度,若有必要可对方案综合度的低限值也进行适当调整,再重新求解模型(M-3.21),直至决策者对所得结果感到满意为止.

3.7.2　决策方法

依据上述定理和模型,下面介绍一种基于方案综合度和方案达成度的交互式多属性决策方法[220]:

步骤 1　由决策问题构造决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,用适当方法把 $\boldsymbol{A}$ 规范化为决策矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　利用模型(M-3.8)求出方案 x_i 的综合属性负理想值 $z_i^{\min}$,并由决策者提出各方案的期望水平值 $\bar{z}_i(i\in N)$.

步骤 3　求解单目标优化模型(M-3.21),得到最优解$\boldsymbol{\omega}^0$、各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega}^0)$以及方案综合度 $c(\boldsymbol{\omega}^0)$,并求出各方案的达成度 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^0))(i\in N)$. 决策者依此提出初始的各方案达成度 $\varphi_i^0(i\in N)$以及方案综合度的低限值 c_0. 置 $k=1$.

步骤 4　求解单目标决策模型(M-3.22),得到最优解$\boldsymbol{\omega}^k$,方案综合度 $c(\boldsymbol{\omega}^k)$,方案达成度向量 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^i))(i\in N)$,以及相应的方案综合属性值向量 $z(\boldsymbol{\omega}^k)$.

步骤 5　如果决策者认为上述结果已经符合要求,不再提出新的要求,则转步骤 6; 否则,决策者根据需要适当提高某些方案的最低达成度,同时降低另一些方案的最低达成度,若有必要可对方案综合度的低限值也进行适当调整. 置 $k=k+1$,转步骤 4.

步骤 6　按各方案综合属性值的大小对其进行排序,求得决策者的满意方案.

3.7.3　实例分析

例 3.7　利用例 3.5 进行说明. 具体步骤如下:

步骤 1　同 3.5.3 节步骤 1.

步骤 2 利用模型(M-3.8)求出方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$的综合属性负理想值 $z_i^{\min}(i=1,2,\cdots,5)$:

$$z_1^{\min}=0.906, z_2^{\min}=0.432, z_3^{\min}=0.824, z_4^{\min}=0.474, z_5^{\min}=0.64.$$

决策者提出各方案期望水平 $\bar{z}_i(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\bar{z}_1=0.97, \bar{z}_2=0.65, \bar{z}_3=0.90, \bar{z}_4=0.55, \bar{z}_5=0.75.$$

步骤 3 求解单目标优化模型(M-3.21),得到最优解

$$\boldsymbol{\omega}^0=(0.45,0.15,0.35,0.05),$$

各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega}^0)(i=1,2,\cdots,5)$:

$$z_1(\boldsymbol{\omega}^0)=0.906, z_2(\boldsymbol{\omega}^0)=0.747, z_3(\boldsymbol{\omega}^0)=0.824,$$

$$z_4(\boldsymbol{\omega}^0)=0.716, z_5(\boldsymbol{\omega}^0)=0.670,$$

以及方案综合度 $c(\boldsymbol{\omega}^0)=0.586$,并求出各方案的达成度 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^0))(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\varphi(z_1(\boldsymbol{\omega}^0))=0, \varphi(z_2(\boldsymbol{\omega}^0))=1.445, \varphi(z_3(\boldsymbol{\omega}^0))=0,$$

$$\varphi(z_4(\boldsymbol{\omega}^0))=3.184, \varphi(z_5(\boldsymbol{\omega}^0))=0.266.$$

决策者据此提出初始的各方案达成度 $\varphi_i^0(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\varphi_1^0=0.50, \varphi_2^0=0.90, \varphi_3^0=0.50, \varphi_4^0=2.00, \varphi_5^0=0.30,$$

以及方案综合度的低限值 $c_0=0.50$.

步骤 4 求解单目标决策模型(M-3.22),得到最优解

$$\boldsymbol{\omega}^1=(0.45,0,0.35,0.20),$$

各方案的综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\omega}^1)(i=1,2,\cdots,5)$:

$$z_1(\boldsymbol{\omega}^1)=0.940, z_2(\boldsymbol{\omega}^1)=0.641, z_3(\boldsymbol{\omega}^1)=0.880,$$

$$z_4(\boldsymbol{\omega}^1)=0.652, z_5(\boldsymbol{\omega}^1)=0.675,$$

以及方案综合度 $c(\boldsymbol{\omega}^1)=0.51$,并求出各方案的达成度 $\varphi(z_i(\boldsymbol{\omega}^1))(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\varphi(z_1(\boldsymbol{\omega}^1))=0.530, \varphi(z_2(\boldsymbol{\omega}^1))=0.959, \varphi(z_3(\boldsymbol{\omega}^1))=0,737,$$

$$\varphi(z_4(\boldsymbol{\omega}^1))=2.342, \varphi(z_5(\boldsymbol{\omega}^1))=0.312.$$

决策者对此感到满意,因此按 $z_j(\boldsymbol{\omega}^1)(j=1,2,3,4,5)$的大小对方案进行排序,得

$$x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_2,$$

故最优方案为 x_1.

第 2 篇

区间型不确定多属性决策方法及应用

第
4
章

属性权重为实数且属性值为区间数的多属性决策方法及应用

随着社会、经济的发展，人们所考虑问题的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性在不断增强．在实际决策过程中，决策信息有时以区间数形式来表达．目前有关此类问题的研究已逐渐引起人们的重视．本章将介绍区间型正理想点、区间型负理想点等概念、区间数之间比较的可能度公式以及可能度公式之间的关系，并且分别介绍基于可能度、基于投影模型、逼近正理想点的多属性决策方法．本章对上述方法均进行了实例分析．

4.1　基于可能度的多属性决策方法

4.1.1　区间数比较的可能度公式

记 $\tilde{a}=[a^L,a^U]=\{x\mid a^L\leqslant x\leqslant a^U,a^L,a^U\in\mathbb{R}\}$，称 $\tilde{a}$ 为一个区间数．特别地，若 $a^L=a^U$，则 $\tilde{a}$ 退化为一个实数．

先给出区间数的运算法则．

设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$和 $\tilde{b}=[b^L,b^U]$，且 $\beta\geqslant 0$，则

(1) $\tilde{a}=\tilde{b}$ 当且仅当 $a^L=b^L$ 和 $a^U=b^U$．

(2) $\tilde{a}+\tilde{b}=[a^L+b^L,a^U+b^U]$．

(3) $\beta\tilde{a}=[\beta a^L,\beta a^U]$，其中 $\beta\geqslant 0$．特别地，若 $\beta=0$，则 $\beta\tilde{a}=0$．

定义 4.1[227]　当 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ 均为实数时，则称

$$p(\tilde{a}>\tilde{b})=\begin{cases}1, & \text{当 } \tilde{a}>\tilde{b} \text{ 时,}\\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } \tilde{a}=\tilde{b} \text{ 时,}\\ 0, & \text{当 } \tilde{a}<\tilde{b} \text{ 时}\end{cases}\tag{4.1}$$

为 $\tilde{a}>\tilde{b}$ 的可能度.

定义 4.2[231] 当 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 同时为区间数或者有一个为区间数时，设 $\tilde{a}=[a^L, a^U]$, $\tilde{b}=[b^L, b^U]$，且记 $l_{\tilde{a}}=a^U-a^L$, $l_b=b^U-b^L$，则称

$$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{\min\{l_{\tilde{a}}+l_b,\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde{a}}+l_b} \tag{4.2}$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度，且记 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ 的次序关系为 $\tilde{a}\underset{p}{\geqslant}\tilde{b}$.

文献[30,43]分别给出了下面两个区间数比较的可能度的概念.

定义 4.3[43] 称

$$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\min\left\{\max\left(\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde{a}}+l_b},0\right),1\right\} \tag{4.3}$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度.

定义 4.4[30] 称

$$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=\frac{\max\{0,l_{\tilde{a}}+l_b-\max(b^U-a^L,0)\}}{l_{\tilde{a}}+l_b} \tag{4.4}$$

为 $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}$ 的可能度.

根据上述 3 种定义，可以证明下列结论均成立[231].

定理 4.1 设 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$, $\tilde{b}=[b^L,b^U]$，则

(1) $0\leqslant p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\leqslant 1$.

(2) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1$ 当且仅当 $b^U\leqslant a^L$.

(3) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=0$ 当且仅当 $a^U\leqslant b^L$.

(4)（互补性）$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})+p(\tilde{b}\geqslant\tilde{a})=1$. 特别地，$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{a})=1/2$.

(5) $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\geqslant 1/2$ 当且仅当 $a^U+a^L\geqslant b^U+b^L$. 特别地，$p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1/2$ 当且仅当 $a^U+a^L=b^U+b^L$.

(6)（传递性）对于 3 个区间数 $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$，若 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\geqslant 1/2$ 且 $p(\tilde{b}\geqslant\tilde{c})\geqslant 1/2$，则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{c})\geqslant 1/2$.

下面来研究定义 4.2、定义 4.3 以及定义 4.4 之间的关系.

定理 4.2[231] 定义 4.2、定义 4.3 和定义 4.4 是等价的，即有：(4.2)式⇔(4.3)式⇔(4.4)式.

证明 先证(4.2)式⇔(4.3)式. 由(4.2)式得

$$\begin{aligned}p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})&=\frac{\min\{l_{\tilde{a}}+l_b,\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde{a}}+l_b}\\&=\min\left\{\frac{l_{\tilde{a}}+l_b}{l_{\tilde{a}}+l_b},\frac{\max(a^U-b^L,0)}{l_{\tilde{a}}+l_b}\right\}\end{aligned}$$

$$=\min\left\{1,\max\left(\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde a}+l_{\tilde b}},0\right)\right\},$$

即

$$p(\tilde a\geqslant\tilde b)=\min\left\{\max\left(\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde a}+l_b},0\right),1\right\}.$$

故(4.2)式⇔(4.3)式成立.

再证(4.3)式⇔(4.4)式. 由(4.3)式,(4.2)式⇔(4.3)式及可能度的互补性，可得

$$\begin{aligned}p(\tilde b\geqslant\tilde a)&=1-p(\tilde a\geqslant\tilde b)\\&=1-\min\left\{\max\left(\frac{a^U-b^L}{l_{\tilde a}+l_b},0\right),1\right\}\\&=1-\frac{\min\{l_{\tilde a}+l_b,\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde a}+l_b}\\&=\frac{l_{\tilde a}+l_b-\min\{l_{\tilde a}+l_b,\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde a}+l_b}\\&=\frac{\max\{0,l_{\tilde a}+l_b-\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde a}+l_b},\end{aligned}$$

即

$$p(\tilde b\geqslant\tilde a)=\frac{\max\{0,l_{\tilde a}+l_b-\max(a^U-b^L,0)\}}{l_{\tilde a}+l_b}$$

由可能度的互补性可知(4.3)式⇔(4.4)式成立. 定理证毕.

类似地，给出下面的定义 4.5，并可证明它与定义 4.2、定义 4.3 和定义 4.4 也是等价的.

定义 4.5[231] 称

$$p(\tilde a\geqslant\tilde b)=\max\left\{1-\max\left(\frac{b^U-a^L}{l_{\tilde a}+l_b},0\right),0\right\}\tag{4.5}$$

为 $\tilde a\geqslant\tilde b$ 的可能度.

4.1.2 区间数排序

对于给定的一组区间数 $\tilde a_i=[a_i^L,a_i^U],i\in N$，把它们进行两两比较. 利用上述可能度公式求得相应的可能度 $p(\tilde a_i\geqslant\tilde a_j)$，简记为 $p_{ij},i,j\in N$，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol P=(p_{ij})_{n\times n}$. 该矩阵包含了所有方案相互比较的全部可能度信息. 因此对区间数进行排序的问题，就转化为求解可能度矩阵的排序向量的问题. 由定理 4.1 可知,矩阵 $\boldsymbol P$ 是一个模糊互补判断矩阵. 第 2 章已对模糊互补判断矩阵

的排序理论进行了详细介绍. 这里利用 2.1.1 节中给出的一个简洁的排序公式(2.6)进行求解，即用

$$\upsilon_i = \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + \frac{n}{2} - 1\right), \quad i \in N \tag{4.6}$$

得到可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并利用 $\upsilon_i(i\in N)$ 对区间数 $\tilde{a}_i(i\in N)$ 进行排序.

4.1.3 决策方法

基于区间数比较的可能度概念，下面介绍一种多属性决策方法. 具体步骤如下[231].

步骤 1 对于某一多属性决策问题，属性的权重完全确知(即为实数). 对于方案 x_i，按属性 u_j 进行测度，得到 x_i 关于 u_j 的属性值 $\tilde{a}_{ij}$(这里 $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$)，从而构成决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$. 最常见的属性类型为效益型和成本型. 设 $I_j(j=1,2)$ 分别表示效益型、成本型的下标集. 为了消除不同物理量纲对决策结果的影响，可用下列公式将决策矩阵 $\widetilde{A}$ 转化为规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$，其中 $r_{ij}=[r_{ij}^L, r_{ij}^U]$，且

$$r_{ij} = \tilde{a}_{ij} / \| \tilde{a}_j \|, \quad i \in N, j \in I_1, \tag{4.7}$$

$$r_{ij} = (1/\tilde{a}_{ij}) / (\| 1/\tilde{a}_j \|), \quad i \in N, j \in I_2, \tag{4.8}$$

$$\| \tilde{a}_j \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij}^2}, \ \| 1/\tilde{a}_j \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1/\tilde{a}_{ij})^2}.$$

根据区间数的运算法则，把(4.7)和(4.8)两式写为

$$\begin{cases} r_{ij}^L = a_{ij}^L \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^U)^2}, \\ r_{ij}^U = a_{ij}^U \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^L)^2}, \end{cases} \quad i \in N, j \in I_1, \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^L = (1/a_{ij}^U) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1/a_{ij}^L)^2}, \\ r_{ij}^U = (1/a_{ij}^L) \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (1/a_{ij}^U)^2}, \end{cases} \quad i \in N, j \in I_2, \tag{4.10}$$

或者[46]

$$r_{ij} = \tilde{a}_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}, \quad i \in N, j \in I_1, \tag{4.11}$$

$$r_{ij} = (1/\tilde{a}_{ij}) \Big/ \sum_{j=1}^{n} (1/\tilde{a}_{ij}), \quad i \in N, j \in I_2. \tag{4.12}$$

根据区间数的运算法则，把(4.11)和(4.12)两式写为

$$\left.\begin{aligned} r_{ij}^{L} &= a_{ij}^{L}\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{U}, \\ r_{ij}^{U} &= a_{ij}^{U}\Big/\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{L}, \end{aligned}\quad i\in N, j\in I_1,\right\} \tag{4.13}$$

$$\left.\begin{aligned} r_{ij}^{L} &= (1/a_{ij}^{U})\Big/\sum_{i=1}^{n}(1/a_{ij}^{L}), \\ r_{ij}^{U} &= (1/a_{ij}^{L})\Big/\sum_{i=1}^{n}(1/a_{ij}^{U}), \end{aligned}\quad i\in N, j\in I_2.\right\} \tag{4.14}$$

步骤 2　利用 WAA 算子对各方案 $x_i(i\in N)$的属性值进行集结，求得其综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$：

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j r_{ij} \tag{4.15}$$

步骤 3　利用区间数比较的可能度公式(4.2)，算出各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}(\boldsymbol{\omega})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega})), i,j\in N$，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 4　利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

4.1.4　实例分析

例 4.1　考虑一个大学的学院评估问题．通常一些大学采用教学 u_1、科研 u_2 和服务 u_3 这 3 个属性作为评估指标．设有 5 个学院(方案)$x_i(i=1,2,3,4,5)$将被评估，并假定属性的权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(0.4,0.4,0.2)$．决策者以区间数这种不确定形式给出了各方案的属性值．其规范化决策矩阵[14]如表 4.1 所示.

表 4.1　规范化决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.214, 0.220]	[0.166, 0.178]	[0.184, 0.190]
x_2	[0.206, 0.225]	[0.220, 0.229]	[0.182, 0.191]
x_3	[0.195, 0.204]	[0.192, 0.198]	[0.220, 0.231]
x_4	[0.181, 0.190]	[0.195, 0.205]	[0.185, 0.195]
x_5	[0.175, 0.184]	[0.193, 0.201]	[0.201, 0.211]

利用公式 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{3}\omega_j r_{ij}$，可求出学院 $x_i(i=1,2,3,4,5)$的综合属性值分别为区间数

$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})=[0.1888,0.1972]$，$\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})=[0.2068,0.2198]$，$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})=[0.1988,0.2070]$，$\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})=[0.1874,0.1970]$，$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega})=[0.1874,0.1962]$.

为了对各方案进行排序，先利用(4.2)式求出 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5)$ 两两比较的可能度矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5444 & 0.5698 \\ 1 & 0.5 & 0.9906 & 1 & 1 \\ 1 & 0.0094 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.4556 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5217 \\ 0.4302 & 0 & 0 & 0.4783 & 0.5 \end{pmatrix},$$

然后利用(4.6)式求出可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.1557,0.2995,0.2505,0.1489,0.1454),$$

由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ 及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的可能度，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5)$ 的排序

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.9906}{\geqslant} \tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) \underset{1}{\geqslant} \tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5444}{\geqslant} \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5217}{\geqslant} \tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}).$$

若用符号 $\underset{p}{\succ}$ 表示方案之间具有可能度的优序关系，则相应的 5 个学院 $x_i(i=1,2,3,4,5)$ 的排序为

$$x_2 \underset{0.9906}{\succ} x_3 \underset{1}{\succ} x_1 \underset{0.5444}{\succ} x_4 \underset{0.5217}{\succ} x_5,$$

从而学院 x_2 综合评估结果最好.

4.2 基于投影的多属性决策方法

4.2.1 决策方法

首先构造加权规范化决策矩阵 $Y=(\tilde{y}_{ij})_{n\times m}$，其中 $\tilde{y}_{ij}=[y_{ij}^L,y_{ij}^U]$，且 $\tilde{y}_{ij}=\omega_j r_{ij}$，$i\in N$，$j\in M$.

定义 4.6[232] 称 $\tilde{\boldsymbol{y}}^+=(\tilde{y}_1^+,\tilde{y}_2^+,\cdots,\tilde{y}_m^+)$ 为区间型正理想点，其中

$$\tilde{y}_j^+=[y_j^{+L},y_j^{+U}]=[\max_i(y_{ij}^L),\max_i(y_{ij}^U)],\quad j\in M. \tag{4.16}$$

定义 4.7[232] 设 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 是两个向量，定义

$$\cos(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^m \beta_j^2}}. \tag{4.17}$$

定义 4.8 设 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，则 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模.

众所周知，一个向量是由方向和模两部分所组成，而向量之间的夹角余弦值仅能衡量它们的方向是否一致，而不能反映其模的大小. 必须把模的大小与夹角余弦值结合起来考虑才能全面反映向量之间的接近程度，为此定义投影的概念.

定义 4.9[232]　设$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$和$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$是两个向量，定义

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}}\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^2}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\beta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\beta_j^2}} \tag{4.18}$$

为$\boldsymbol{\alpha}$在$\boldsymbol{\beta}$上的投影，一般地，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\alpha})$值越大，表示向量$\boldsymbol{\alpha}$和$\boldsymbol{\beta}$之间越接近. 令

$$\mathrm{Prj}_{\tilde{\boldsymbol{y}}^+}(\tilde{\boldsymbol{y}}_i)=\frac{\sum_{j=1}^{m}[\tilde{y}_{ij}^L y_j^{+L}+\tilde{y}_{ij}^U y_j^{+U}]}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}[(y_j^{+L})^2+(y_j^{+U})^2]}}, \tag{4.19}$$

其中
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_i=(\tilde{y}_{i1},\tilde{y}_{i2},\cdots,\tilde{y}_{im}),\quad i\in N.$$

显然，$\mathrm{Prj}_{\tilde{\boldsymbol{y}}^+}(\tilde{\boldsymbol{y}}_i)(i\in N)$的值越大，表明方案$x_i$越贴近区间型正理想点$\tilde{\boldsymbol{y}}^+$，因此方案$x_i$越优.

依据上述定义，下面介绍一种基于投影的多属性决策方法. 具体步骤如下[232].

步骤 1　对于某一多属性决策问题，属性的权重完全确知. 决策者对所有方案按各属性进行测度，得到决策矩阵$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$，并按(4.9)和(4.10)两式将$\tilde{A}$转化为规范化矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　利用属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$和规范化矩阵$\tilde{R}$，构造加权规范化决策矩阵$\boldsymbol{Y}=(\tilde{y}_{ij})_{n\times m}$.

步骤 3　利用(4.16)式确定区间型正理想点$\tilde{\boldsymbol{y}}^+$.

步骤 4　利用(4.19)式求出方案x_i在区间型正想点上的投影$\mathrm{Prj}_{\tilde{\boldsymbol{y}}^+}(\tilde{\boldsymbol{y}}_i)$ $(i\in N)$.

步骤 5　根据$\mathrm{Prj}_{\tilde{\boldsymbol{y}}^+}(\tilde{\boldsymbol{y}}_i)(i\in N)$值对方案进行排序和择优.

4.2.2　实例分析

例 4.2　维修性设计是指在产品的研制过程中，要充分考虑系统的总体结构、各部分的配置与连接、标准化和模块化等因素，以便在产品发生故障时，用户能及时恢复其功能. 现拟对某雷达接收机 3 个维修性设计方案$x_i(i=1,2,3)$进行选择. 考虑的指标(属性)有[42]：u_1——寿命周期费用(万元)；u_2——平均

寿命(小时)；u_3——平均维修时间；u_4——可用度；u_5——综合性能. 决策矩阵 $\widetilde{A}$ 如表 4.2 所示. 已知属性权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.2189, 0.2182, 0.1725, 0.2143, 0.1761),$$

试确定最佳方案.

表 4.2 决策矩阵 $\widetilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[58.9, 59.0]	[200, 250]	[1.9, 2.1]	[0.990, 0.991]	[0.907, 0.909]
x_2	[58.5, 58.7]	[340, 350]	[3.4, 3.5]	[0.990, 0.992]	[0.910, 0.912]
x_3	[58.0, 58.5]	[290, 310]	[2.0, 2.2]	[0.992, 0.993]	[0.914, 0.917]

在各项指标中，除寿命周期费用和平均维修时间为成本型外，其他均为效益型.

下面用 4.2.1 节中的方法求出 3 个方案的排序. 具体步骤如下：

步骤 1 由(4.9)和(4.10)两式将决策矩阵 $\widetilde{A}$ 转化为规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$，如表 4.3 所示.

表 4.3 规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.5721,0.5757]	[0.3772,0.5106]	[0.6080,0.1265]	[0.5762,0.5775]	[0.5738,0.5765]
x_2	[0.5750,0.5796]	[0.6413,0.7149]	[0.3648,0.4098]	[0.5762,0.5781]	[0.5757,0.5784]
x_3	[0.5770,0.5846]	[0.5470,0.6332]	[0.5803,0.6967]	[0.5774,0.5787]	[0.5782,0.5816]

步骤 2 利用属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$ 以及规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$ 构造加权规范化决策矩阵 Y，如表 4.4 所示.

表 4.4 加权规范化决策矩阵 $\widetilde{Y}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.1252,01260]	[0.0823,0.1114]	[0.1049,0.1265]	[0.1235,0.1238]	[0.1010,0.1015]
x_2	[0.1259,0.1269]	[0.1399,0.1560]	[0.0629,0.0707]	[0.1235,0.1239]	[0.1014,0.1019]
x_3	[0.1263,0.1280]	[0.1194,0.1382]	[0.1001,0.1202]	[0.1237,0.1240]	[0.1018,0.1024]

步骤 3 利用(4.16)式确定区间型正理想点

$$\tilde{y}^{+}=([0.1263, 0.1280], [0.1399, 0.1560], [0.1049, 0.1265], [0.1237, 0.1240], [0.1018, 0.1024]).$$

步骤 4 利用(4.19)式求出方案 x_i 在区间型正理想点上的投影：

$$\mathrm{Prj}_{\tilde{y}^{+}}(\tilde{\boldsymbol{y}}_1)=0.3537, \mathrm{Prj}_{\tilde{y}^{+}}(\tilde{\boldsymbol{y}}_2)=0.2717, \mathrm{Prj}_{\tilde{y}^{+}}(\tilde{\boldsymbol{y}}_3)=0.3758.$$

步骤 5 根据 $\mathrm{Prj}_{\tilde{y}^+}(\tilde{\boldsymbol{y}}_i)(i=1,2,3)$值对方案进行排序,得

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2,$$

故最优方案为 x_3.

4.3 逼近理想点的多属性决策方法

4.3.1 决策方法

定义 4.10 称 $\tilde{\boldsymbol{y}}^- = (\tilde{y}_1^-, \tilde{y}_2^-, \cdots, \tilde{y}_m^-)$为区间型负理想点，其中

$$\tilde{y}_j^- = [y_j^{-L}, y_j^{-U}] = [\min_i(y_{ij}^L), \min_i(y_{ij}^U)], \quad j \in M. \tag{4.20}$$

下面介绍一种逼近理想点的多属性决策方法. 具体步骤如下：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，属性的权重完全确定. $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$和 $\tilde{\boldsymbol{R}} = (r_{ij})_{n\times m}$分别为决策矩阵及其规范化矩阵.

步骤 2 利用属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$和规范化矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}$，构造加权规范化决策矩阵 $\boldsymbol{Y} = (\tilde{y}_{ij})_{n\times m}$.

步骤 3 利用(4.16)和(4.20)两式确定区间型正、负理想点 $\tilde{\boldsymbol{y}}^+$，$\tilde{\boldsymbol{y}}^-$.

步骤 4 计算每个方案分别到正理想点和负理想点的距离：

$$D_i^+ = \sum_{j=1}^m \| \tilde{y}_{ij} - \tilde{y}_j^+ \| = \sum_{j=1}^m \left[\left| y_{ij}^L - y_j^{+L} \right| + \left| y_{ij}^U - y_j^{+U} \right| \right], \quad i \in N, \tag{4.21}$$

$$D_i^- = \sum_{j=1}^m \| \tilde{y}_{ij} - \tilde{y}_j^- \| = \sum_{j=1}^m \left[\left| y_{ij}^L - y_j^{-L} \right| + \left| y_{ij}^U - y_j^{-U} \right| \right], \quad i \in N. \tag{4.22}$$

步骤 5 计算每个方案对理想点的贴近度

$$c_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}, \quad i \in N. \tag{4.23}$$

步骤 6 按 $c_i(i \in N)$值的大小对方案进行排序，c_i 值越大，则方案 x_i 越优.

4.3.2 实例分析

例 4.3 某地区盛产生皮. 为了开发该地区的制革工业，考虑到生产资源的分布情况及其他与制革工业有关因素(属性)，其中所考虑的属性有[119]：u_1——能源需求量(100kW · h/d)；u_2——水的需求量(10 万加仑/天)；u_3——废水排放方式(十分制)；u_4——工厂和设备成本(百万美元)；u_5——作业成本

(百万美元/年);u_6——有关地区的经济发展(十分制);u_7——研究开发机会(十分制);u_8——投资报酬(以 1 为基数). 已知属性权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.10,0.12,0.15,0.13,0.17,0.11,0.12,0.10).$$

有关部门提出了 5 个备选方案,各方案在上述属性下的属性值如表 4.5 所示. 试确定最佳方案.

表 4.5 决策矩阵 $\widetilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[1.5,1.9]	[9,9.5]	[8,9]	[10,12]	[12,13]	[8,9]	[2,3]	[1.2, 1.3]
x_2	[2.7,3.1]	[5,6]	[9,9.5]	[4,5]	[4,5]	[7,8]	[9,10]	[1.1,1.2]
x_3	[1.8,2]	[8.5,9.1]	[7,8]	[8,9]	[9,10]	[8.5,9]	[5,6]	[1,1.3]
x_4	[2.5,2.8]	[5,6]	[9,10]	[6,7]	[6,8]	[7,7.5]	[8,9]	[0.8,0.9]
x_5	[2,2.5]	[4,5]	[8,9]	[5,6]	[5,7]	[8,9]	[5,6]	[0.6,0.7]

在上述属性中,能源需求量、水的需求量、工厂和设备成本和作业成本为成本型外,其他均为效益型.

用 4.3.1 节中的方法进行求解. 具体步骤如下:

步骤 1 按(4.9)和(4.10)两式将决策矩阵 $\widetilde{A}$ 转化为规范化矩阵 $\widetilde{R}$,如表 4.6 所示.

表 4.6 规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.46,0.71]	[0.26,0.32]	[0.18,0.22]	[0.21,0.31]
x_2	[0.28,0.39]	[0.41,0.58]	[0.20,0.23]	[0.51,0.76]
x_3	[0.44,0.59]	[0.27,0.34]	[0.15,0.20]	[0.28,0.38]
x_4	[0.31,0.42]	[0.41,0.58]	[0.20,0.24]	[0.36,0.51]
x_5	[0.35,0.53]	[0.49,0.73]	[0.18,0.22]	[0.42,0.61]

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[0.20,0.27]	[0.19,0.23]	[0.06,0.10]	[0.22,0.24]
x_2	[0.52,0.82]	[0.16,0.21]	[0.26,0.34]	[0.20,0.22]
x_3	[0.26,0.37]	[0.20,0.23]	[0.15,0.22]	[0.19,0.24]
x_4	[0.32,0.55]	[0.16,0.19]	[0.24,0.31]	[0.15,0.17]
x_5	[0.37,0.66]	[0.19,0.23]	[0.15,0.21]	[0.11,0.13]

步骤 2 利用属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$ 和规范化矩阵 $\widetilde{R}$,构造加权规范化决策矩阵 $\boldsymbol{Y}$,如表 4.7 所示.

表 4.7　加权规范化决策矩阵 $\tilde{Y}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.046,0.071]	[0.026,0.032]	[0.018,0.022]	[0.021,0.031]
x_2	[0.028,0.039]	[0.041,0.058]	[0.020,0.023]	[0.051,0.076]
x_3	[0.044,0.059]	[0.027,0.034]	[0.015,0.020]	[0.028,0.038]
x_4	[0.031,0.042]	[0.041,0.058]	[0.020,0.024]	[0.036,0.051]
x_5	[0.035,0.053]	[0.049,0.073]	[0.018,0.022]	[0.042,0.061]
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[0.020,0.027]	[0.019,0.023]	[0.006,0.010]	[0.022,0.024]
x_2	[0.052,0.082]	[0.016,0.021]	[0.026,0.034]	[0.020,0.022]
x_3	[0.026,0.037]	[0.020,0.023]	[0.015,0.022]	[0.019,0.024]
x_4	[0.032,0.055]	[0.016,0.019]	[0.024,0.031]	[0.015,0.017]
x_5	[0.037,0.066]	[0.019,0.023]	[0.015,0.021]	[0.011,0.013]

步骤 3　分别用(4.16)**和**(4.20)**两式确定区间型正、负理想点**：

$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{+}=([0.046,0.071],[0.059,0.088],[0.030,0.036],[0.066,0.099],$$
$$[0.088,0.139],[0.022,0.025],[0.031,0.041],[0.022,0.024]),$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}^{-}=([0.021,0.039],[0.031,0.038],[0.023,0.030],[0.027,0.040],$$
$$[0.034,0.046],[0.018,0.021],[0.007,0.012],[0.011,0.013]).$$

步骤 4　计算每个方案分别到正理想点和负理想点的距离：

$$D_1^{+}=0.383,D_2^{+}=0.089,D_3^{+}=0.333,D_4^{+}=0.230,D_5^{+}=0.170,$$
$$D_1^{-}=0.093,D_2^{-}=0.387,D_3^{-}=0.143,D_4^{-}=0.246,D_5^{-}=0.306.$$

步骤 5　计算每个方案对理想点的贴近度：

$$c_1=0.195,\quad c_2=0.813,\quad c_3=0.300,\quad c_4=0.517,\quad c_5=0.643.$$

步骤 6　按 $c_i(i=1,2,3,4,5)$**值的大小对方案进行排序，得**

$$x_2 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1,$$

因此最佳方案为 x_2.

第5章 属性权重完全未知且属性值为区间数的多属性决策方法及应用

目前，有关此类问题的研究文献尚不多见．本章首先基于区间数相离度以及属性值偏差最大化思想，给出求解属性权重的一个简洁公式，并在决策者对方案无偏好的情形下，介绍一种基于可能度和区间数相离度的多属性决策方法．然后在决策者对方案有偏好的情景下，介绍一种既能充分利用规范化评价的先验模糊信息，又能尽可能地满足决策者主观愿望的多属性决策方法．最后介绍基于 UOWA 算子的方案排序方法．为了便于读者对方法的理解和掌握，本章对上述方法均给出了应用实例．

5.1 对方案无偏好的多属性决策方法

5.1.1 公式和定义

对于某一多属性决策问题，其属性的权重向量记为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，并满足单位化约束条件：

$$\omega_j \geqslant 0, \quad j \in M, \quad \sum_{j=1}^{m} \omega_j^2 = 1, \tag{5.1}$$

且设决策矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$（这里 $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L,a_{ij}^U]$），其相应的规范化矩阵为 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$．

为了能衡量两个区间数相似的程度，先给出区间数之间相离度的概念．

定义 5.1 设区间数 $\tilde{a}=[a^L,a^U]$，$\tilde{b}=[b^L,b^U]$．如果范数

$$\| \tilde{a}-\tilde{b} \| = | b^L - a^L | + | b^U - a^U |,$$

称 $d(\tilde{a},\tilde{b})=\|\tilde{a}-\tilde{b}\|$ 为区间数 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 的相离度.

显然 $d(\tilde{a},\tilde{b})$ 越大，则 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 相离的程度越大. 特别地，当 $d(\tilde{a},\tilde{b})=0$ 时，有 $\tilde{a}=\tilde{b}$，即 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 相等.

5.1.2　决策方法

对于某一多属性决策问题，一般需要求出各方案的综合属性值. 由规范化矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$ 及属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，利用 WAA 算子得到方案 x_i 的综合属性值(由(4.15)式获得).

当属性权重 $\omega_j(j\in M)$ 及属性值都是确定的值时，由各方案综合属性值的大小可以确定方案的优劣；否则，就不能直接由(4.15)式确定综合属性值.

下面将考虑属性权重完全未知、属性值为区间数且决策者对方案无偏好的情形.

考虑到规范化决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{m\times n}$ 中的元素是以区间数形式给出的，难以直接进行比较，根据 1.5 节的分析以及定义 5.1，令 $d(r_{ij},r_{kj})=\|r_{ij}-r_{kj}\|$ 表示规范化决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$ 中元素 r_{ij} 与 r_{kj} 之间的相离度，其中

$$\|r_{ij}-r_{kj}\|=|r_{ij}^L-r_{kj}^L|+|r_{ij}^U-r_{kj}^U|.$$

对于属性 u_j，若方案 x_i 与其他所有方案的偏差用 $D_{ij}(\boldsymbol{\omega})$ 表示，则可定义

$$D_{ij}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{k=1}^{n}\|r_{ij}-r_{kj}\|\omega_j=\sum_{k=1}^{n}d(r_{ij},r_{kj})\omega_j,\quad i\in N,j\in M,\tag{5.2}$$

且令

$$D_j(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}D_{ij}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}d(r_{ij},r_{kj})\omega_j,\quad j\in N.\tag{5.3}$$

对属性 u_j 而言，$D_j(\boldsymbol{\omega})$ 表示所有方案与其他方案的总偏差. 属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的选择应使所有属性对所有方案的总偏差最大. 为此，构造偏差函数

$$\max D(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{m}D_j(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}d(r_{ij},r_{kj})\omega_j,\tag{5.4}$$

因而求解权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的问题等价于求解如下单目标最优化问题：

$$(\mathbf{M\text{-}5.1})\quad\begin{cases}\max D(\boldsymbol{\omega})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}d(r_{ij},r_{kj})\omega_j, & (5.5)\\ \text{s.t.}\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\omega_j^2=1,\quad \omega_j\geqslant 0,j\in M. & (5.6)\end{cases}$$

解此模型，易知

$$\omega_j=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}d(r_{ij},r_{kj})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}d(r_{ij},r_{kj})\right)^2}},\quad j\in N.\tag{5.7}$$

对上述权重向量作归一化处理，可得

$$\omega_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(r_{ij}, r_{kj})}{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d(r_{ij}, r_{kj})}, \quad j \in M. \tag{5.8}$$

(5.8)式的特点是：运用区间数相离度把所有已知的客观决策信息统一于一个简洁的算式，易于在计算机或计算器上实现.

在求出属性的最优权重向量$\boldsymbol{\omega}$之后，还需通过公式(4.15)算出各方案的综合属性值$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$. 由于$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$仍是区间数，不便于直接对方案进行排序,因此可利用(4.2)式计算区间数$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$之间的可能度，并建立可能度矩阵$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，其中$p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega}))(i,j\in N)$. 利用(4.6)式求得可能度矩阵$P$的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}$,按其分量大小对方案进行排序，即得最优方案.

综上所述，可给出下列算法[229]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题. 对于方案x_i，按属性u_j进行测度，得到x_i关于u_j的属性值$\tilde{a}_{ij}(\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U])$，从而构成决策矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$，并将计算出其规范化矩阵$\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2 利用(5.7)式求得属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$.

步骤 3 利用(4.15)式算出各方案的综合属性值$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 4 利用(4.2)式算出区间数$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$之间的可能度，并建立可能度矩阵$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 5 利用(4.6)式求得可能度矩阵P的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}$.

步骤 6 按$\boldsymbol{\upsilon}$分量的大小对方案进行排序，即得到最优方案.

5.1.3 实例分析

例 5.1 某部队在采购火炮武器时，考虑了下列 5 项指标(属性)[117]：u_1——火力突击能力指数；u_2——反应能力指数；u_3——机动能力指数；u_4——生存能力指数；u_5——成本(元). 有 4 种系列的火炮(方案)$x_i(i=1,2,3,4)$可供采购时选择，它们所对应的各能力指数如表 5.1 所示. 在无法了解各属性权重信息的情况下，采购部门应如何选择火炮？

表 5.1 决策矩阵 $\widetilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[26000,27000]	[2,4]	[18000,19000]	[0.7,0.8]	[15000,16000]
x_2	[60000,70000]	[3,4]	[16000,17000]	[0.3,0.4]	[27000,28000]
x_3	[50000,60000]	[2,3]	[15000,16000]	[0.7,0.8]	[24000,26000]
x_4	[40000,50000]	[1,2]	[28000,29000]	[0.4,0.5]	[15000,17000]

在各项指标中，除成本为成本型外，其他均为效益型．可以用 5.1.2 节的方法求出 5 个方案的排序．具体步骤如下：

步骤 1　由(4.9)和(4.10)两式将决策矩阵 $\widetilde{A}$ 转化为规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$，如表 5.2 所示．

表 5.2　规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	[0.240,0.295]	[0.298,0.943]	[0.431,0.477]	[0.538,0.721]	[0.571,0.663]
x_2	[0.554,0.765]	[0.447,0.943]	[0.383,0.426]	[0.231,0.361]	[0.326,0.368]
x_3	[0.462,0.656]	[0.298,0.707]	[0.359,0.401]	[0.538,0.721]	[0.351,0.414]
x_4	[0.369,0.546]	[0.149,0.471]	[0.670,0.728]	[0.308,0.451]	[0.537,0.663]

步骤 2　根据(5.7)式，求得属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.2189,0.2182,0.1725,0.2143,0.1761).$$

步骤 3　利用(4.15)式求得各方案的综合属性值分别为区间数：

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})=[0.4077,0.6239],\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})=[0.3918,0.5888],$$

$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})=[0.4052,0.5945],\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})=[0.3894,0.5613].$$

步骤 4　为了对各方案进行排序，先利用(4.2)式求出 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$ 两两比较的可能度矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5617 & 0.5393 & 0.6042 \\ 0.4383 & 0.5 & 0.4753 & 0.5405 \\ 0.4607 & 0.5247 & 0.5 & 0.5678 \\ 0.3958 & 0.4595 & 0.4322 & 0.5 \end{pmatrix},$$

然后利用(4.6)式求出可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2671,0.2462,0.2544,0.2323).$$

步骤 5　由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ 及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的可能度，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$ 的排序：

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5393}{\geqslant}\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5247}{\geqslant}\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5405}{\geqslant}\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}).$$

步骤 6　根据 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$ 值的大小对方案进行排序，可得

$$x_1\underset{0.5393}{\succ}x_3\underset{0.5247}{\succ}x_2\underset{0.5405}{\succ}x_4,$$

故最佳方案(火炮)为 x_1.

5.2 对方案有偏好的多属性决策方法

5.2.1 决策方法

对于属性权重完全未知且属性值为区间数的多属性决策问题，若决策者对方案 x_i 有一定的主观偏好，设主观偏好值为区间数 $\tilde{\vartheta}_i$（其中 $\tilde{\vartheta}_i=[\vartheta_i^L,\vartheta_i^U]$，$0\leqslant\vartheta_i^L\leqslant\vartheta_i^U\leqslant 1$，主观偏好可由决策者自己给定，或用其他决策方法）. 这里，我们把规范化矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{m\times n}$ 中的属性值 $r_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$ 看成决策者在属性 u_j 下对方案 x_i 的客观偏好值.

由于种种条件的制约，决策者的主观偏好与客观偏好之间往往存在着一定的差距. 为了使决策具有合理性，属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的选择应使决策者的主观偏好值与客观偏好值（属性值）的总偏差最小化.

考虑到规范化矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$ 中的元素及决策者的主观偏好值均是以区间数形式给出的，根据定义 5.1，可建立下列单目标优化模型：

$$
(\text{M-5.2})\quad \begin{cases} \min F(\boldsymbol{\omega}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(d(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i)\omega_j)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}d^2(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i)\omega_j^2, \\ \text{s. t. } \omega_j \geqslant 0, j\in M, \sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j = 1, \end{cases}
$$

其中

$$
d(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i) = \| r_{ij}-\tilde{\vartheta}_i \| = | r_{ij}^L-\vartheta_i^L | + | r_{ij}^U-\vartheta_i^U |
$$

表示在第 j 属性下决策者对第 i 个方案的主观偏好值 $\tilde{\vartheta}_i$ 与相应的客观偏好值（属性值）r_{ij} 之间的偏差，$\omega_j(j\in M)$ 为第 j 属性的权重，单目标函数 $F(\boldsymbol{\omega})$ 表示在所有属性下决策者的主观偏好值与客观偏好值之间的总偏差. 解此模型，构造拉格朗日函数

$$
L(\boldsymbol{\omega},\zeta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d^2(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i)\omega_j^2 + 2\zeta\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j - 1\right),
$$

求其偏导数，并令

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \omega_j} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}d^2(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i)^2\omega_j + 2\zeta = 0, \quad j\in M, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \zeta} = \sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j - 1 = 0, \end{cases}
$$

则有

$$\omega_j = -\frac{\zeta}{\sum_{i=1}^{n} d^2(r_{ij}, \tilde{\vartheta}_i)}, \quad j \in M, \tag{5.9}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1. \tag{5.10}$$

由(5.9)和(5.10)两式，可得

$$\zeta = -\left(\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} d^2(\tilde{r}_{ij}, \tilde{\vartheta}_i) \right)^{-1} \right)^{-1}, \tag{5.11}$$

再由(5.9)和(5.11)两式解得

$$\omega_j = \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} d^2(r_{ij}, \tilde{\vartheta}_i) \right)^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} d^2(r_{ij}, \tilde{\vartheta}_i) \right)^{-1}, \quad j \in M. \tag{5.12}$$

(5.12)式的特点是：运用区间数相离度把所有已知的模糊客观偏好（属性值）和主观偏好值统一于一个简洁的算式，且易于在计算机或计算器上实现.

在求出属性的最优权重向量$\boldsymbol{\omega}$之后，还需通过(4.15)式算出各方案的综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$. 由于 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$仍是区间数，不便于直接对方案进行排序. 因此可利用(4.2)式，算出区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$之间的可能度，并建立可能度矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，其中 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega}) \geqslant \tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega}))(i,j \in N)$. 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}$，按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

综上所述，可给出下列算法[227]：

步骤 1　对于某一多属性决策问题. 对于方案按各属性进行测度，得到决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$(其中 $\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L, a_{ij}^U]$)，并将决策矩阵 $\tilde{A}$ 转化为规范化矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　决策者给定其对方案的主观偏好值 $\tilde{\vartheta}_i$.

步骤 3　利用(5.12)式求得属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$.

步骤 4　利用(4.15)式算出各方案的综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$.

步骤 5　利用(4.2)式，计算出区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$之间的可能度，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 6　利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}$.

步骤 7　按$\boldsymbol{\upsilon}$分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

5.2.2　实例分析

例 5.2　考核、选拔干部是一个多因素的决策问题，决策者一方面要把德才优秀的人才选拔到领导岗位；另一方面，也希望在条件相当的情况下任用自己所偏爱的人才[53]. 某单位在对干部进行考核选拔时，首先制定 6 项考核指标

(属性):思想品德 u_1、工作态度 u_2、工作作风 u_3、文化水平和知识结构 u_4、领导能力 u_5 和开拓能力 u_6,然后由群众推荐、评议,并对各项指标分别打分,再进行统计处理,最后从中确定了 5 名候选人 $x_i(i=1,2,3,4,5)$. 由于群众对同一候选人所给出的指标(属性)值并不完全相同,因此经过统计处理后的每个候选人(方案)在各指标下的属性值是以区间数形式给出. 具体如表 5.3 所示.

表 5.3 决策矩阵 $\tilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.85,0.90]	[0.90,0.92]	[0.91,0.94]	[0.93,0.96]	[0.90,0.91]	[0.95,0.97]
x_2	[0.90,0.95]	[0.89,0.91]	[0.90,0.92]	[0.90,0.92]	[0.94,0.97]	[0.90,0.93]
x_3	[0.88,0.91]	[0.84,0.86]	[0.91,0.94]	[0.91,0.94]	[0.86,0.89]	[0.91,0.92]
x_4	[0.93,0.96]	[0.91,0.93]	[0.85,0.88]	[0.86,0.89]	[0.87,0.90]	[0.92,0.93]
x_5	[0.86,0.89]	[0.90,0.92]	[0.90,0.95]	[0.91,0.93]	[0.90,0.92]	[0.85,0.87]

利用 5.2.1 节中的方法对 5 个候选人进行排序. 具体步骤如下:

步骤 1 由于各项指标均为效益型指标,故可由(5.9)式将决策矩阵 $\tilde{A}$ 转化为规范化决策矩阵 $\tilde{R}$,如表 5.4 所示.

表 5.4 规范化决策矩阵 $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.378,0.405]	[0.394,0.414]	[0.398,0.423]
x_2	[0.394,0.429]	[0.389,0.410]	[0.394,0.415]
x_3	[0.395,0.420]	[0.377,0.396]	[0.408,0.433]
x_4	[0.385,0.405]	[0.413,0.433]	[0.385,0.410]
x_5	[0.384,0.410]	[0.402,0.414]	[0.402,0.414]

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.407,0.432]	[0.394,0.410]	[0.415,0.437]
x_2	[0.394,0.415]	[0.411,0.438]	[0.394,0.419]
x_3	[0.408,0.433]	[0.386,0.410]	[0.408,0.424]
x_4	[0.490,0.414]	[0.395,0.419]	[0.417,0.433]
x_5	[0.407,0.419]	[0.402,0.414]	[0.380,0.391]

步骤 2 设决策者对 5 个候选人 $x_i(i=1,2,3,4,5)$ 的主观偏好值(规范化后)分别为

$$\tilde{\vartheta}_1=[0.3,0.5],\tilde{\vartheta}_2=[0.5,0.6],\tilde{\vartheta}_3=[0.3,0.4],\tilde{\vartheta}_4=[0.4,0.6],\tilde{\vartheta}_5=[0.4,0.5].$$

利用公式 $d(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i)=|r_{ij}^L-\vartheta_i^L|+|r_{ij}^U+\vartheta_i^U|,i=1,2,3,4,5,j=1,2,\cdots,6$,计算相应的客观偏好值(属性值)与主观偏好值之间的相离度,如表 5.5 所示.

表 5.5　客观偏好值与主观偏好值之间的相离度

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$d(r_{1j},\tilde{\vartheta}_1)$	0.167	0.180	0.175	0.175	0.184	0.178
$d(r_{2j},\tilde{\vartheta}_2)$	0.277	0.301	0.291	0.291	0.251	0.287
$d(r_{3j},\tilde{\vartheta}_3)$	0.115	0.081	0.141	0.141	0.096	0.132
$d(r_{4j},\tilde{\vartheta}_4)$	0.210	0.180	0.205	0.196	0.186	0.184
$d(r_{5j},\tilde{\vartheta}_5)$	0.106	0.088	0.088	0.088	0.088	0.129

步骤 3　由于各项指标的权重未事先给定，因此可由(5.12)**式求得属性权重向量**

$$\boldsymbol{\omega}=(0.1658,0.1692,0.1553,0.1584,0.1935,0.1578).$$

步骤 4　利用(4.15)**式求得** 5 **个候选人的综合属性值分别为区间数**

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})=[0.3963,0.4196],\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})=[0.3964,0.4216],\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})=[0.3963,0.4187],$$
$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})=[0.3975,0.4191],\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega})=[0.3963,0.4105].$$

步骤 5　利用(4.2)**式求出** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5)$**两两比较的可能度矩阵**

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5000 & 0.4784 & 0.5098 & 0.4922 & 0.6213\\ 0.5216 & 0.5000 & 0.5315 & 0.5150 & 0.6421\\ 0.4902 & 0.4685 & 0.5000 & 0.4818 & 0.6120\\ 0.5078 & 0.4850 & 0.5182 & 0.5000 & 0.6369\\ 0.3787 & 0.3579 & 0.3880 & 0.3631 & 0.5000\end{pmatrix}.$$

步骤 6　利用(4.6)**式求出可能度矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的排序向量**

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2051,0.2105,0.2026,0.2074,0.1744).$$

由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ **以及矩阵** $\boldsymbol{P}$ **中的可能度，得到区间数** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5)$**的排序：**

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5150}{\geqslant}\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5078}{\geqslant}\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5098}{\geqslant}\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})\underset{0.6120}{\geqslant}\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}).$$

步骤 7　根据 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5)$**值的大小对方案进行排序,得**

$$x_2\underset{0.5150}{\succ}x_4\underset{0.5078}{\succ}x_1\underset{0.5098}{\succ}x_3\underset{0.6120}{\succ}x_5,$$

故最佳候选人是 x_2.

5.3　UOWA 算子

令 Ω **表示全体区间数的集合.**

定义 5.2[224]　**设** UOWA: $\Omega^n\to\Omega$**，若**

$$\mathrm{UOWA}_w(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_n)=\sum_{j=1}^{n}w_j\tilde{b}_j,$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$**是与** UOWA **相关联的加权向量**,$w_j\in[0,1],j\in N$,

$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$，$\tilde{a}_i \in \Omega$，且 $\tilde{b}_j$ 是一组数据$(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_n)$中第 j 大的元素，则称函数 UOWA 是不确定 OWA 算子(简记 UOWA 算子).

可以利用第 1 章中确定 OWA 算子加权向量的方法或用下面的表达式来确定加权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，其中：

$$w_k = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k \in N, \tag{5.13}$$

这里，f 为模糊语义量化算子

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \dfrac{r-a}{b-a}, & a \leqslant r \leqslant b, \\ 1, & r > b, \end{cases} \tag{5.14}$$

其中 $a, b, r \in [0,1]$. 对应于模糊语义量化准则[79]，“大多数”，“至少半数”，“尽可能多”的算子 f 中的参数对分别为$(a,b)=(0.3,0.8)$，$(a,b)=(0,0.5)$，$(a,b)=(0.5,1)$.

例 5.3 给定一组区间数

$$\tilde{\alpha}_1 = [3,5], \tilde{\alpha}_2 = [4,6], \tilde{\alpha}_3 = [4,7], \tilde{\alpha}_4 = [3,6].$$

利用(4.2)式对这 4 个区间数进行两两比较，并建立可能度矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.20 & 0.40 \\ 0.75 & 0.50 & 0.40 & 0.60 \\ 0.80 & 0.60 & 0.50 & 0.80 \\ 0.60 & 0.40 & 0.20 & 0.50 \end{pmatrix}.$$

根据(4.6)式，得到可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon} = (0.196, 0.271, 0.308, 0.225).$$

利用 $\boldsymbol{\upsilon}_i (i=1,2,3,4)$对区间数 $\tilde{\alpha}_i (i=1,2,3,4)$按降序进行排列，可得

$$\tilde{b}_1 = \tilde{\alpha}_3, \tilde{b}_2 = \tilde{\alpha}_2, \tilde{b}_3 = \tilde{\alpha}_4, \tilde{b}_4 = \tilde{\alpha}_1.$$

若假定 UOWA 算子的加权向量为 $\boldsymbol{w} = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$，则利用 UOWA 算子对这 4 个区间数进行集结，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4) &= \sum_{j=1}^{4} w_j \tilde{b}_j \\ &= 0.3 \times [4,7] + 0.2 \times [4,6] + 0.4 \times [3,6] + 0.1 \times [3,5] \\ &= [3.5, 6.2]. \end{aligned}$$

下面考虑已知部分加权信息且对数据组有主观偏好的情形，并介绍一个确定算子加权向量的线性目标规划模型.

考虑 m 个样本，每个样本是由 n 个数据组成的数据组$(\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \cdots, \tilde{a}_{kn})$，$(k \in M)$，并且对每组数据预先给定主观偏好值 $\tilde{\vartheta}_k$，其中

$$\tilde{a}_{kj} = [a_{kj}^L, a_{kj}^U], \tilde{\vartheta}_k = [\vartheta_k^L, \vartheta_k^U], \quad j \in N, k \in M,$$

且已知的部分加权信息集合为 Φ'.

需要确定加权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，使得下式得到满足

$$g(\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \cdots, \tilde{a}_{kn}) = \tilde{\vartheta}_k, \quad k \in M. \tag{5.15}$$

由于可以利用可能度公式去比较第 k 个样本数据，建立可能度矩阵，并利用模糊互补判断矩阵排序公式得到排序向量，再根据所得到的排序向量对第 k $(k\in M)$ 个样本数据 $\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \cdots, \tilde{a}_{kn}$ 按从大到小的次序进行排序，得到 $\tilde{b}_{k1}$，$\tilde{b}_{k2}, \cdots, \tilde{b}_{kn}(k\in M)$，因此(5.15)式可写为

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_{kj} = \tilde{\vartheta}_k, \quad k \in M, \tag{5.16}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n} w_j b_{kj}^L = \vartheta_k^L, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j b_{kj}^U = \vartheta_k^U, \quad k \in M. \tag{5.17}$$

在现实生活中，(5.17)式一般并不成立，为此，引入偏差项 e_{1k} 和 e_{2k}，其中

$$e_{1k} = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j b_{kj}^L - \vartheta_k^L \right|, \quad k \in M,$$

$$e_{2k} = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j b_{kj}^U - \vartheta_k^U \right|, \quad k \in M.$$

合理的加权向量应使偏差项 e_{1k} 和 e_{2k} 最小化，因此可构造下列多目标规划模型：

$$(\textbf{M-5.3}) \quad \begin{cases} \min e_{1k} = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j b_{kj}^L - \vartheta_k^L \right|, & k \in M, \\ \min e_{2k} = \left| \sum_{j=1}^{n} w_j b_{kj}^U - \vartheta_k^U \right|, & k \in M, \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{w} \in \Phi'. \end{cases}$$

为了求解模型(M-5.3)，并考虑到所有的偏差项是公平竞争的，且每个偏差项希望达到的期望值为 0，可将模型(M-5.3)转化为下列线性目标规划模型：

$$(\textbf{M-5.4}) \quad \begin{cases} \min J = \sum_{k=1}^{m} [(e_{1k}^+ + e_{1k}^-) + (e_{2k}^+ + e_{2k}^-)], \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^L w_j - \vartheta_k^L - e_{1k}^+ + e_{1k}^- = 0, \quad k \in M, \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^U w_j - \vartheta_k^U - e_{2k}^+ + e_{2k}^- = 0, \quad k \in M, \\ \qquad \boldsymbol{w} \in \Phi', e_{1k}^+ \geqslant 0, e_{1k}^- \geqslant 0, e_{2k}^+ \geqslant 0, e_{2k}^- \geqslant 0, \quad k \in M, \end{cases}$$

其中 e_{1k}^+ 是 $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^L w_j - \vartheta_k^L$ 高于期望值 0 的上偏差变量；e_{1k}^- 是 $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^L w_j - \vartheta_k^L$ 低于

期望值 0 的下偏差变量；e_{2k}^{+} 是 $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{U} w_j - \vartheta_k^U$ 高于期望值 0 的上偏差变量；e_{2k}^{-} 是 $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{U} w_j - \vartheta_k^U$ 低于期望值 0 的下偏差变量．通过求解该模型(M-5.4)，即可得到 UOWA 算子的加权向量 $\boldsymbol{w}$.

例 5.4 考虑 4 个样本，每个样本是由 3 个数据组成的数据组 $\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \tilde{a}_{k3}$ $(k=1,2,3)$，并且对每组数据均预先给定相应的主观偏好值 $\tilde{\vartheta}_k$（各数据组主观偏好值均为区间数，见表 5.6)．已知的部分加权信息为

$$\Phi' = \left\{ \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n) \mid 0.2 \leqslant w_1 \leqslant 0.6, \right.$$
$$\left. 0.3 \leqslant w_2 \leqslant 0.5, 0.1 \leqslant w_3 \leqslant 0.4, \sum_{j=1}^{3} w_j = 1 \right\}.$$

表 5.6 样本数据

样本	数据组			主观偏好值
1	[0.4,0.7]	[0.2,0.5]	[0.7,0.8]	[0.3,0.7]
2	[0.3,0.4]	[0.6,0.8]	[0.3,0.5]	[0.4,0.5]
3	[0.2,0.6]	[0.3,0.4]	[0.5,0.8]	[0.3,0.6]
4	[0.5,0.8]	[0.3,0.5]	[0.3,0.4]	[0.4,0.6]

首先利用可能度公式去比较第 k 个样本数据，建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(k)}$ $(k=1,2,3,4)$，并利用模糊互补判断矩阵排序公式得到排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}^{(k)}$ $(k=1,2,3,4)$：

$$\boldsymbol{P}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.833 & 0 \\ 0.167 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.333 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 0.667 & 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.143 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.857 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.667 \\ 0 & 0.333 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\upsilon}^{(1)} = (0.305, 0.195, 0.5), \quad \boldsymbol{\upsilon}^{(2)} = (0.222, 0.5, 0.278),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(3)} = (0.291, 0.233, 0.476), \boldsymbol{\upsilon}^{(4)} = (0.5, 0.278, 0.222).$$

再根据所得到的排序向量对第 k 个样本数据 $\tilde{a}_{k1}, \tilde{a}_{k2}, \tilde{a}_{k3}$ 按从大到小的次序进行排序，得到 $\tilde{b}_{k1}, \tilde{b}_{k2}, \tilde{b}_{k3}$ $(k=1,2,3,4)$：

$$\tilde{b}_{11} = [0.7, 0.8], \tilde{b}_{12} = [0.4, 0.7], \tilde{b}_{13} = [0.2, 0.5],$$
$$\tilde{b}_{21} = [0.6, 0.8], \tilde{b}_{22} = [0.3, 0.5], \tilde{b}_{23} = [0.3, 0.4],$$
$$\tilde{b}_{31} = [0.5, 0.8], \tilde{b}_{32} = [0.2, 0.6], \tilde{b}_{33} = [0.3, 0.4],$$
$$\tilde{b}_{41} = [0.5, 0.8], \tilde{b}_{42} = [0.3, 0.5], \tilde{b}_{43} = [0.3, 0.4].$$

利用模型(M-5.4)，求得 UOWA 算子的加权向量 $w=(0.3,0.3,0.4)$. 因此可得

$$\mathrm{UOWA}_w(\tilde{a}_{11},\tilde{a}_{12},\tilde{a}_{13}) = 0.3\times\tilde{b}_{11}+0.3\times\tilde{b}_{12}+0.4\times\tilde{b}_{13} = [0.41,0.65],$$
$$\mathrm{UOWA}_w(\tilde{a}_{21},\tilde{a}_{22},\tilde{a}_{23}) = 0.3\times\tilde{b}_{21}+0.3\times\tilde{b}_{22}+0.4\times\tilde{b}_{23} = [0.39,0.55],$$
$$\mathrm{UOWA}_w(\tilde{a}_{31},\tilde{a}_{32},\tilde{a}_{33}) = 0.3\times\tilde{b}_{31}+0.3\times\tilde{b}_{32}+0.4\times\tilde{b}_{33} = [0.32,0.60],$$
$$\mathrm{UOWA}_w(\tilde{a}_{41},\tilde{a}_{42},\tilde{a}_{43}) = 0.3\times\tilde{b}_{41}+0.3\times\tilde{b}_{42}+0.4\times\tilde{b}_{43} = [0.36,0.57].$$

5.4 基于 UOWA 算子的多属性决策方法

5.4.1 在决策者对方案无偏好情形下的多属性决策方法

下面介绍一种在决策者对方案无偏好情形下的多属性决策方法. 具体步骤如下[226]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，决策矩阵及其相应的规范化矩阵分别为 $\tilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}(\tilde{a}_{ij}=[a_{ij}^L,a_{ij}^U])$和 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}(r_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U])$.

步骤 2 利用(4.2)式对方案 x_i 的各属性值 $r_{ij}(j\in M)$进行两两比较，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}$，利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}^{(i)}=(\boldsymbol{\upsilon}_1^{(i)},\boldsymbol{\upsilon}_2^{(i)},\cdots,\boldsymbol{\upsilon}_m^{(i)})$，并按其分量大小对方案 x_i 的各属性值按从大到小的次序进行排序，得到 $\tilde{b}_{i1},\tilde{b}_{i2},\cdots,\tilde{b}_{im}$.

步骤 3 利用 UOWA 算子对方案 x_i 的属性值进行集结，得到其综合属性值

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{w}) = \mathrm{UOWA}_w(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im}) = \sum_{j=1}^{n} w_j\tilde{b}_{ij},\quad i\in N,$$

其中加权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$可利用 1.1 节中 UOWA 算子加权向量的方法或利用(5.13)和(5.14)两式来确定.

步骤 4 利用(4.2)式算出各方案综合属性值之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{w}))(i,j\in N)$并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 5 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

5.4.2 实例分析

例 5.5 某县根据本地的自然资源，前几年投资了几个项目，经过几年的经营运行，决定发挥优势，进行再投资[118]，考察的指标(属性)有：u_1——投资额；u_2——期望净现值；u_3——风险赢利值；u_4——风险损失值. 投资的方案为：

x_1——板栗果汁厂；x_2——家禽加工厂；x_3——花草种植基地；x_4——酿酒厂；x_5——茶厂．各方案的属性值列于表 5.7．试确定最佳投资方案.

表 5.7 决策矩阵 $\widetilde{A}$ 单位：万元

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[5,7]	[4,5]	[4,6]	[0.4,0.6]
x_2	[10,11]	[6,7]	[5,6]	[1.5,2]
x_3	[5,6]	[4,5]	[3,4]	[0.4,0.7]
x_4	[9,11]	[5,6]	[5,7]	[1.3,1.5]
x_5	[6,8]	[3,5]	[3,4]	[0.8,1]

在属性集中，期望净现值和风险赢利值为效益型，投资额和风险损失值为成本型，且属性权重信息完全未知.

下面利用 5.4.1 节中的方法进行求解：

步骤 1 由(4.9)和(4.10)两式将决策矩阵 $\widetilde{A}$ 转化为规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$，如表 5.8 所示.

表 5.8 规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.40,0.71]	[0.32,0.50]	[0.32,0.65]	[0.43,0.98]
x_2	[0.25,0.35]	[0.47,0.69]	[0.40,0.65]	[0.13,0.26]
x_3	[0.46,0.71]	[0.32,0.50]	[0.24,0.44]	[0.37,0.98]
x_4	[0.25,0.39]	[0.40,0.59]	[0.40,0.76]	[0.17,0.30]
x_5	[0.35,0.59]	[0.24,0.50]	[0.24,0.44]	[0.26,0.49]

步骤 2 利用(4.2)式，对方案 x_i 的各属性值 r_{ij} $(j=1,2,3,4)$ 进行两两比较，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.50 & 0.76 & 0.61 & 0.33\\0.24 & 0.50 & 0.35 & 0.10\\0.39 & 0.65 & 0.50 & 0.25\\0.67 & 0.90 & 0.75 & 0.50\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{(2)}=\begin{pmatrix}0.50 & 0 & 0 & 0.96\\1 & 0.50 & 0.62 & 1\\1 & 0.38 & 0.50 & 1\\0.04 & 0 & 0 & 0.50\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(3)}=\begin{pmatrix}0.50 & 0.91 & 1 & 0.40\\0.09 & 0.50 & 0.68 & 0.16\\0 & 0.32 & 0.50 & 0.09\\0.60 & 0.84 & 0.91 & 0.50\end{pmatrix},$$

$$P^{(4)}=\begin{pmatrix}0.50 & 0 & 0 & 0.81\\ 1 & 0.50 & 0.35 & 1\\ 1 & 0.65 & 0.50 & 1\\ 0.19 & 0 & 0 & 0.50\end{pmatrix},\quad P^{(5)}=\begin{pmatrix}0.50 & 0.70 & 0.80 & 0.70\\ 0.30 & 0.50 & 0.57 & 0.49\\ 0.20 & 0.43 & 0.50 & 0.42\\ 0.30 & 0.51 & 0.58 & 0.50\end{pmatrix}.$$

利用(4.6)式求得可能度矩阵 $P^{(i)}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}^{(i)}=(\upsilon_1^{(i)},\upsilon_2^{(i)},\upsilon_3^{(i)},\upsilon_4^{(i)})(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\boldsymbol{\upsilon}^{(1)}=(0.267,0.182,0.233,0.318),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(2)}=(0.205,0.343,0.323,0.128),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(3)}=(0.318,0.202,0.159,0.321),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(4)}=(0.193,0.321,0.346,0.141),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(5)}=(0.308,0.238,0.212,0.241).$$

步骤 3　按 $\boldsymbol{\upsilon}^{(i)}=(\upsilon_1^{(i)},\upsilon_2^{(i)},\upsilon_3^{(i)},\upsilon_4^{(i)})(i=1,2,\cdots,5)$ 的分量大小对方案 x_i 的各属性值按从大到小的次序进行排序，得到 $\tilde{b}_{i1},\tilde{b}_{i2},\tilde{b}_{i3},\tilde{b}_{i4}(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\tilde{b}_{11}=[0.43,0.98],\tilde{b}_{12}=[0.40,0.71],\tilde{b}_{13}=[0.32,0.65],$$
$$\tilde{b}_{14}=[0.32,0.50],\tilde{b}_{21}=[0.47,0.69],\tilde{b}_{22}=[0.40,0.65],$$
$$\tilde{b}_{23}=[0.25,0.35],\tilde{b}_{24}=[0.13,0.26],\tilde{b}_{31}=[0.37,0.98],$$
$$\tilde{b}_{32}=[0.46,0.71],\tilde{b}_{33}=[0.32,0.50],\tilde{b}_{34}=[0.24,0.44],$$
$$\tilde{b}_{41}=[0.40,0.76],\tilde{b}_{42}=[0.40,0.59],\tilde{b}_{43}=[0.25,0.39],$$
$$\tilde{b}_{44}=[0.17,0.30],\tilde{b}_{51}=[0.35,0.59],\tilde{b}_{52}=[0.26,0.49],$$
$$\tilde{b}_{53}=[0.24,0.50],\tilde{b}_{54}=[0.24,0.44].$$

步骤 4　利用定理 1.10 中的方法(其中取 $\alpha=0.2$)确定加权向量

$$\boldsymbol{w}=(0.4,0.2,0.2,0.2),$$

并利用 UOWA 算子对方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的属性值进行集结，得到其综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{11},r_{12},r_{13},r_{14})=\sum_{j=1}^{4}w_j\tilde{b}_{1j}=[0.380,0.764],$$

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{21},r_{22},r_{23},r_{24})=\sum_{j=1}^{4}w_j\tilde{b}_{2j}=[0.344,0.528],$$

$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{31},r_{32},r_{33},r_{34})=\sum_{j=1}^{4}w_j\tilde{b}_{3j}=[0.352,0.722],$$

$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{41},r_{42},r_{43},r_{44})=\sum_{j=1}^{4}w_j\tilde{b}_{4j}=[0.324,0.560],$$

$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{51},r_{52},r_{53},r_{54})=\sum_{j=1}^{4}w_j\tilde{b}_{5j}=[0.288,0.522].$$

步骤 5 为了对各方案进行排序，先利用(4.2)式求出上述模型所得 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})$ $(i=1,2,\cdots,5)$两两比较的可能度矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.739 & 0.546 & 0.710 & 0.770\\ 0.261 & 0.5 & 0.318 & 0.486 & 0.574\\ 0.454 & 0.682 & 0.5 & 0.657 & 0.719\\ 0.290 & 0.514 & 0.343 & 0.5 & 0.579\\ 0.230 & 0.426 & 0.281 & 0.421 & 0.5\end{pmatrix}.$$

步骤 6 利用(4.6)式求出可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.238,0.182,0.226,0.186,0.168)$$

由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ 及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的可能度，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,\cdots,5)$的排序

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{w}) \underset{0.546}{\geqslant} \tilde{z}_3(\boldsymbol{w}) \underset{0.657}{\geqslant} \tilde{z}_4(\boldsymbol{w}) \underset{0.514}{\geqslant} \tilde{z}_2(\boldsymbol{w}) \underset{0.574}{\geqslant} \tilde{z}_5(\boldsymbol{w}).$$

步骤 7 根据 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,\cdots,5)$值的大小对方案进行排序，可得

$$x_1 \underset{0.546}{\succ} x_3 \underset{0.657}{\succ} x_4 \underset{0.514}{\succ} x_2 \underset{0.574}{\succ} x_5,$$

故最优方案为 x_1.

5.4.3 在决策者对方案有偏好情形下的多属性决策方法

下面介绍一种决策者对方案有偏好信息的多属性决策方法. 具体步骤如下[226]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，决策矩阵及其相应的规范化矩阵分别为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$和$\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$. 设决策者对方案 x_i 有一定的主观偏好，且偏好值以区间数 $\tilde{\vartheta}_i(\tilde{\vartheta}_i=[\vartheta_i^L,\vartheta_i^U],0\leqslant\vartheta_i^L\leqslant\vartheta_i^U\leqslant 1,i\in N)$的形式给出.

步骤 2 利用(4.2)式对方案 $x_i(i\in N)$的各属性值$r_{ij}(j\in M)$进行两两比较，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}(i\in N)$，利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}^{(i)}=(\upsilon_1^{(i)},\upsilon_2^{(i)},\cdots,\upsilon_m^{(i)})(i\in N)$，并按其分量大小对方案 x_i 的各属性值按从大到小的次序进行排序，得到 $\tilde{b}_{i1},\tilde{b}_{i2},\cdots,\tilde{b}_{im}(i\in N)$.

步骤 3 利用 UOWA 算子对方案 x_i 的属性值进行集结，得到其综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$：

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})=\sum_{j=1}^{n}w_j\tilde{b}_{ij},\quad i\in N,$$

其中加权向量 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$可利用模型(M-5.4)来确定.

步骤 4 利用(4.2)式算出各方案综合属性值之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{w}))(i,j\in N)$，并建立可能度互补矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 5 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

5.4.4　实例分析

例 5.6　我们利用例 5.2 对 5.4.3 节中的方法进行说明.

步骤 1　同 5.2.2 节步骤 1.

步骤 2　利用(4.2)式对方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的各属性值 $r_{ij}(j=1,2,\cdots,6)$ 进行两两比较，建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.208 & 0.121 & 0 & 0.224 & 0 \\ 0.792 & 0.5 & 0.356 & 0.156 & 0.556 & 0.023 \\ 0.879 & 0.644 & 0.5 & 0.320 & 0.707 & 0.204 \\ 1 & 0.844 & 0.680 & 0.5 & 0.927 & 0.388 \\ 0.776 & 0.444 & 0.293 & 0.073 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.977 & 0.796 & 0.612 & 1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.714 & 0.625 & 0.625 & 0.290 & 0.583 \\ 0.286 & 0.5 & 0.381 & 0.381 & 0 & 0.348 \\ 0.375 & 0.619 & 0.5 & 0.5 & 0.083 & 0.457 \\ 0.375 & 0.619 & 0.5 & 0.5 & 0.083 & 0.457 \\ 0.710 & 1 & 0.917 & 0.917 & 0.5 & 0.846 \\ 0.417 & 0.652 & 0.543 & 0.543 & 0.154 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.977 & 0.240 & 0.240 & 0.694 & 0.293 \\ 0.023 & 0.5 & 0 & 0 & 0.233 & 0 \\ 0.760 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.959 & 0.610 \\ 0.760 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.959 & 0.610 \\ 0.306 & 0.767 & 0.041 & 0.041 & 0.5 & 0.050 \\ 0.707 & 1 & 0.390 & 0.390 & 0.950 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{(4)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.444 & 0.341 & 0.227 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.977 & 0.864 & 0.444 \\ 0.556 & 0 & 0.5 & 0.408 & 0.306 & 0 \\ 0.659 & 0.023 & 0.592 & 0.5 & 0.396 & 0 \\ 0.773 & 0.136 & 0.694 & 0.604 & 0.5 & 0.050 \\ 1 & 0.556 & 1 & 1 & 0.950 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$P^{(5)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.211 & 0.211 & 0.079 & 0.211 & 0.811\\ 0.789 & 0.5 & 0.5 & 0.292 & 0.5 & 1\\ 0.789 & 0.5 & 0.5 & 0.292 & 0.5 & 1\\ 0.921 & 0.708 & 0.708 & 0.5 & 0.708 & 1\\ 0.789 & 0.5 & 0.5 & 0.292 & 0.5 & 1\\ 0.189 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5\end{pmatrix}.$$

步骤 3 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}^{(i)}=(\upsilon_1^{(i)},\upsilon_2^{(i)},\cdots,\upsilon_6^{(i)})(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\boldsymbol{\upsilon}^{(1)}=(0.128,0.194,0.238,0.292,0.179,0.319),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(2)}=(0.242,0.170,0.202,0.202,0.320,0.215),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(3)}=(0.222,0.113,0.291,0.291,0.160,0.272),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(4)}=(0.151,0.314,0.164,0.183,0.213,0.325),$$
$$\boldsymbol{\upsilon}^{(5)}=(0.176,0.254,0.254,0.302,0.254,0.109).$$

并按其分量大小对方案 x_i 的各属性值按从大到小的次序进行排序，得到 $\tilde{b}_{i1}$，$\tilde{b}_{i2},\cdots,\tilde{b}_{i6}(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\tilde{b}_{11}=[0.415,0.437],\tilde{b}_{12}=[0.407,0.432],\tilde{b}_{13}=[0.398,0.423],$$
$$\tilde{b}_{14}=[0.394,0.414],\tilde{b}_{15}=[0.394,0.410],\tilde{b}_{16}=[0.372,0.405],$$
$$\tilde{b}_{21}=[0.411,0.438],\tilde{b}_{22}=[0.394,0.429],\tilde{b}_{23}=[0.394,0.419],$$
$$\tilde{b}_{24}=\tilde{b}_{25}=[0.394,0.415],\tilde{b}_{26}=[0.389,0.410],$$
$$\tilde{b}_{31}=\tilde{b}_{32}=[0.408,0.433],\tilde{b}_{33}=[0.408,0.424],$$
$$\tilde{b}_{34}=[0.395,0.420],\tilde{b}_{35}=[0.386,0.410],\tilde{b}_{36}=[0.377,0.396],$$
$$\tilde{b}_{41}=[0.417,0.433],\tilde{b}_{42}=[0.413,0.433],\tilde{b}_{43}=[0.395,0.419],$$
$$\tilde{b}_{44}=[0.390,0.414],\tilde{b}_{45}=[0.385,0.410],\tilde{b}_{46}=[0.385,0.405],$$
$$\tilde{b}_{51}=[0.407,0.419],\tilde{b}_{52}=\tilde{b}_{53}=\tilde{b}_{54}=[0.402,0.414],$$
$$\tilde{b}_{55}=[0.384,0.410],\tilde{b}_{56}=[0.380,0.391].$$

步骤 4 若 UOWA 算子的已知的部分加权信息为

$$\begin{aligned}\Phi'=\Big\{&\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_6)\mid 0.1\leqslant w_1\leqslant 0.2,0.15\leqslant w_2\leqslant 0.3,\\ &0.15\leqslant w_3\leqslant 0.2,0.2\leqslant w_4\leqslant 0.25,0.1\leqslant w_5\leqslant 0.3,\\ &0.2\leqslant w_6\leqslant 0.4,\sum_{j=1}^{6}w_j=1\Big\},\end{aligned}$$

且决策者对 5 个候选人 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$的主观偏好值分别为

$$\tilde{\vartheta}_1=[0.3,0.5],\tilde{\vartheta}_2=[0.5,0.6],\tilde{\vartheta}_3=[0.3,0.4],$$

$$\tilde{\vartheta}_4=[0.4,0.6],\tilde{\vartheta}_5=[0.4,0.5],$$

则利用模型(M-5.4)，**求得** UOWA **算子的加权向量**

$$\boldsymbol{w}=(0.2,0.15,0.15,0.2,0.1,0.2).$$

步骤 5　利用 UOWA **算子对方案** x_i **的属性值进行集结，得**

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{11},r_{12},r_{13},r_{14},r_{15},r_{16})=\sum_{j=1}^{6}w_j\tilde{b}_{1j}=[0.3964,0.4205],$$

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{21},r_{22},r_{23},r_{24},r_{25},r_{26})=\sum_{j=1}^{6}w_j\tilde{b}_{2j}=[0.3964,0.4213],$$

$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{31},r_{32},r_{33},r_{34},r_{35},r_{36})=\sum_{j=1}^{6}w_j\tilde{b}_{3j}=[0.3970,0.4194],$$

$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{41},r_{42},r_{43},r_{44},r_{45},r_{46})=\sum_{j=1}^{6}w_j\tilde{b}_{4j}=[0.3981,0.4192],$$

$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{w})=\mathrm{UOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{51},r_{52},r_{53},r_{54},r_{55},r_{56})=\sum_{j=1}^{6}w_j\tilde{b}_{5j}=[0.3968,0.4100].$$

步骤 6　为了对各方案进行排序，先利用(4.2)**式求出** $\tilde{z}_j(\boldsymbol{w})(j=1,2,\cdots,5)$**两两比较的可能度矩阵**

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4918 & 0.5054 & 0.4956 & 0.6354\\ 0.5082 & 0.5 & 0.5137 & 0.5043 & 0.6430\\ 0.4946 & 0.4863 & 0.5 & 0.4897 & 0.6348\\ 0.5044 & 0.4957 & 0.5103 & 0.5 & 0.6531\\ 0.3646 & 0.3570 & 0.3652 & 0.3469 & 0.5\end{bmatrix}.$$

步骤 7　利用(4.6)**式求出可能度矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的排序向量**

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2064,0.2085,0.2053,0.2082,0.1717),$$

由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ **及矩阵** $\boldsymbol{P}$ **中的可能度，得到区间数** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,\cdots,5)$**的排序：**

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{w})\underset{0.5043}{\geqslant}\tilde{z}_4(\boldsymbol{w})\underset{0.5044}{\geqslant}\tilde{z}_1(\boldsymbol{w})\underset{0.5054}{\geqslant}\tilde{z}_3(\boldsymbol{w})\underset{0.6348}{\geqslant}\tilde{z}_5(\boldsymbol{w}).$$

步骤 8　根据 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i=1,2,\cdots,5)$**值的大小对** 5 **个候选人进行排序，得**

$$x_2\underset{0.5043}{\succ}x_4\underset{0.5044}{\succ}x_1\underset{0.5054}{\succ}x_3\underset{0.6348}{\succ}x_5,$$

故最佳候选人是 x_2.

第6章 只有部分属性权重信息且属性值为区间数的多属性决策方法及应用

不少学者对该类问题进行了研究，例如，文献[45]给出了一种确定属性权重的目标规划方法，但是没有给出对方案进行排序的途径. 文献[14]给出了每个方案均单独处理的线性规划模型，文献[209]在文献[14]线性规划模型的基础上提出了一种决策方案排序法. 但采用由该模型求出的所有方案综合属性值所在的区间一般并不是使用同一个属性权重向量，这使得所有的方案评价不具有可比性. 文献[46]在文献[14]的基础上给出了一种改进模型，但是这种改进模型仍需求出两个在通常情况下并不相同的权重向量，而且不能确保每个方案的综合评价值所在区间的存在性. 为克服这些缺点，文献[31]提出了一种单目标最优化模型，并提出了基于该模型的多属性决策方法. 文献[217]利用相离度和方案属性值偏差最大化思想，对于决策者对方案无偏好的决策问题，提出了一种基于区间数相离度和可能度的偏差最大化决策方案排序法. 文献[221]对决策者对方案有偏好的多属性决策问题进行了研究，提出了一种偏差最小化的多属性决策方法. 文献[251]则提出了一种基于投影模型的且对方案有偏好的多属性决策方法. 本章对这些方法进行介绍，并进行实例分析.

6.1 区间型多属性决策的单目标最优化模型

6.1.1 模型

考虑属性权重及决策矩阵元素均为区间数的多属性决

策问题. 设决策矩阵及其相应的规范化矩阵分别为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}(a_{ij}=[a_{ij}^L,a_{ij}^U])$ 和 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}(r_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U])$，且 Φ 为已知的部分权重信息确定的属性可能权重集合.

为了确定各方案的综合属性值，文献[14]给出了两个线性规划模型

$$\text{(M-6.1)}\qquad \begin{cases}\min z_i'(\omega)=\sum_{j=1}^m r_{ij}^L\omega_j, & i\in N,\\ \text{s. t.}\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

$$\text{(M-6.2)}\qquad \begin{cases}\max z_i''(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^m r_{ij}^U\omega_j, & i\in N,\\ \text{s. t.}\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

设由模型(M-6.1)和(M-6.2)求出的最优解分别为

$$\boldsymbol{\omega}_i'=(\omega_{i1}',\omega_{i2}',\cdots,\omega_{im}'),\quad i\in N,$$
$$\boldsymbol{\omega}_i''=(\omega_{i1}'',\omega_{i2}'',\cdots,\omega_{im}''),\quad i\in N,$$

则方案 x_i 的综合属性值为区间数 $\tilde{z}_i=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}_i'),z_i^U(\omega_i'')](i\in N)$，其中

$$z_i^L(\boldsymbol{\omega}_i')=\sum_{i=1}^m r_{ij}^L\boldsymbol{\omega}_{ij}',z_i^U(\boldsymbol{\omega}_i'')=\sum_{j=1}^m r_{ij}^U\boldsymbol{\omega}_{ij}'',\quad i\in N. \tag{6.1}$$

求解 $2n$ 个线性规划模型，可以得到所有方案的综合属性值.

在一般情况下，由模型(M-6.1)和(M-6.2)得到的所有方案的综合属性值将分别使用不同的属性权重向量，这使得所有的方案评价不具有可比性，因而没有什么实际意义.

考虑到各决策方案之间是公平竞争的，不存在任何偏好关系. 文献[46]对模型(M-6.1)和(M-6.2)进行了改进，采用等权的线性权和法给出了下面模型

$$\text{(M-6.3)}\qquad \begin{cases}\min z_0'(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^L\omega_j,\\ \text{s. t.}\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

$$\text{(M-6.4)}\qquad \begin{cases}\max z_0''(\boldsymbol{\omega})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_{ij}^U\omega_j,\\ \text{s. t.}\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

设模型(M-6.3)和(M-6.4)的最优解分别为

$$\boldsymbol{\omega}'=(\omega_1',\omega_2',\cdots,\omega_m'),$$
$$\boldsymbol{\omega}''=(\omega_1'',\omega_2'',\cdots,\omega_m''),$$

则方案 x_i 的综合属性值为区间数 $\tilde{z}_i=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}'),z_i^U(\boldsymbol{\omega}'')](i\in N)$，其中

$$z_i^L(\boldsymbol{\omega}')=\sum_{j=1}^m r_{ij}^L\omega_j',z_i^U(\boldsymbol{\omega}'')=\sum_{j=1}^m r_{ij}^U\omega_j'',\quad i\in N. \tag{6.2}$$

虽然 $z_i^L(\boldsymbol{\omega}')(i\in N)$ 和 $z_i^U(\boldsymbol{\omega}'')(i\in N)$ 分别采用了同一个权重向量，且计算量有所减少，但是在一般情况下，两个权重向量 $\boldsymbol{\omega}'$ 和 $\boldsymbol{\omega}''$ 仍然是不相同的，因此由模型(M-6.3)和(M-6.4)及(6.2)式可知，有时可能会出现 $z_i^L(\boldsymbol{\omega}')>z_i^U(\boldsymbol{\omega}'')$ 的情形，即区间数 $\tilde{z}_i=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}'),z_i^U(\boldsymbol{\omega}'')]$ 可能不存在. 为了解决上述问题，不妨这样思考：由于模型(M-6.3)等价于下列模型

$$\text{(M-6.5)}\qquad \begin{cases}\max z_0'(\boldsymbol{\omega})=-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}r_{ij}^L\omega_j,\\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

又因为模型(M-6.4)和(M-6.5)具有相同的约束条件，因此合成模型(M-6.4)和(M-6.5)可得到如下单目标优化模型[31]

$$\text{(M-6.6)}\qquad \begin{cases}\max z(\boldsymbol{\omega})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(r_{ij}^U-r_{ij}^L)\omega_j,\\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

设由模型(M-6.6)求出的最优解为 $\boldsymbol{\omega}$，则方案 x_i 的综合属性值为区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}),z_i^U(\boldsymbol{\omega})]$，其中

$$z_i^L(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{m}r_{ij}^L\omega_j,\ z_i^U(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^{m}r_{ij}^U\omega_j,\quad i\in N. \tag{6.3}$$

由于 $z_i^L(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 和 $z_i^U(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 只采用了单一的权重向量，因此各方案之间具有可比性，并且对任意 $i\in N$，均有 $z_i^L(\boldsymbol{\omega})\leqslant z_i^U(\boldsymbol{\omega})$ 成立. 由模型(M-6.1)(M-6.6)可以看出，从整体上来说，本节提出的模型最为简洁、合理，且所需计算量比其他模型小得多，因而实用性较强. 由模型(M-6.1)、(M-6.2)和(M-6.6)易得到下面的定理.

定理 6.1[31] 设 $\tilde{y}_i(\boldsymbol{\omega})=[y_i^L(\boldsymbol{\omega}),y_i^U(\boldsymbol{\omega})]$ 和 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}),z_i^U(\boldsymbol{\omega})]$ 分别表示求解模型(M-6.1)、(M-6.2)和(M-6.6)所得方案 x_i 的综合属性值所在区间，则必有

$$[y_i^L(\boldsymbol{\omega}),y_i^U(\boldsymbol{\omega})]\supseteq[z_i^L(\boldsymbol{\omega}),z_i^U(\boldsymbol{\omega})].$$

由于综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 均为区间数，不便于排序，为此，可利用(4.2)式算出各方案综合属性值之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega}))(i,j\in N)$，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$. 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

6.1.2 实例分析

例 6.1 考虑一个市政图书馆的空调系统选择问题[14]，有 5 个备选方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$，而评价方案的主要依据是 3 个因素，即经济性、功能性和可操作性. 这 3 个因素又可划分为 8 个属性，即 u_1——固定成本；u_2——管理成本；

u_3——性能；u_4——噪声；u_5——可维护性；u_6——可靠性；u_7——灵活性；u_8——安全性. 其中性能、可维护性、灵活性和安全性的属性值为打分值，其范围为 1 分(最差)到 10 分(最好)之间. 另外，固定成本、管理成本和噪声为成本性属性，其他 5 个属性为效益型属性. 该问题的决策矩阵如表 6.1 所示.

表 6.1　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[3.7,4.7]	[5.9,6.9]	[8,10]	[30,40]	[3,5]	[90,100]	[3,5]	[6,8]
x_2	[1.5,2.5]	[4.7,5.7]	[4,6]	[65,75]	[3,5]	[70,80]	[7,9]	[4,6]
x_3	[3,4]	[4.2,5.2]	[4,6]	[60,70]	[7,9]	[80,90]	[7,9]	[5,7]
x_4	[3.5,4.5]	[4.5,5.5]	[7,9]	[35,45]	[8,10]	[85,95]	[6,8]	[7,9]
x_5	[2.5,3.5]	[5,6]	[6,8]	[50,60]	[5,7]	[85,95]	[4,6]	[8,10]

已知的属性权重信息为

$$\begin{aligned}\Phi=\Big\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_8)\mid\ & 0.0419\leqslant\omega_1\leqslant0.0491, 0.0840\leqslant\omega_2\leqslant0.0982,\\ & 0.1211\leqslant\omega_3\leqslant0.1373, 0.1211\leqslant\omega_4\leqslant0.1373, 0.1680\leqslant\omega_5\leqslant0.1818,\\ & 0.2138\leqslant\omega_6\leqslant0.2294, 0.0395\leqslant\omega_7\leqslant0.0457, 0.1588\leqslant\omega_8\leqslant0.1706,\\ & \sum_{j=1}^{8}\omega_j=1\Big\}.\end{aligned}$$

试确定最优方案.

下面利用 6.1.1 节中的方法进行求解.

步骤 1　利用(5.9)和(5.10)两式，得到规范化决策矩阵 $\boldsymbol{R}$，如表 6.2 所示.

表 6.2　规范化决策矩阵 $\tilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.2281,0.4281]	[0.3089,0.4382]	[0.4493,0.7433]	[0.4690,0.7904]
x_2	[0.4288,0.7146]	[0.3740,0.5501]	[0.2247,0.4460]	[0.2501,0.3648]
x_3	[0.2680,0.3573]	[0.4099,0.5075]	[0.2247,0.4460]	[0.2680,0.3952]
x_4	[0.2382,0.3063]	[0.3876,0.4737]	[0.3932,0.6690]	[0.4169,0.6775]
x_5	[0.3063,0.4288]	[0.3553,0.4263]	[0.3370,0.5946]	[0.3126,0.4743]

续表

	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	[0.1793,0.4003]	[0.4363,0.5435]	[0.1771,0.3965]	[0.3303,0.5804]
x_2	[0.1793,0.4003]	[0.3394,0.4348]	[0.4132,0.7139]	[0.2202,0.4353]
x_3	[0.4183,0.7206]	[0.3878,0.4892]	[0.4132,0.7139]	[0.2752,0.5078]
x_4	[0.4781,0.8008]	[0.4121,0.5164]	[0.3542,0.6344]	[0.3853,0.6529]
x_5	[0.2988,0.5604]	[0.4121,0.5164]	[0.2361,0.4758]	[0.4404,0.7255]

步骤 2 **求解模型**(M-6.1)**和**(M-6.2)**得到相应于方案** x_i **的最优解**:

$$\boldsymbol{\omega}_i' = (\omega_{i1}', \omega_{i2}', \cdots, \omega_{im}'), \boldsymbol{\omega}_i'' = (\omega_{i1}'', \omega_{i2}'', \cdots, \omega_{im}''), i = 1, 2, \cdots, 5$$

以及方案 x_i **的综合属性值所在区间** $\tilde{z}_i = [z_i^L(\boldsymbol{\omega}_i'), z_i^U(\boldsymbol{\omega}_i'')]$ $(i=1,2,\cdots,5)$,**如表** 6.3 **所示.**

表 6.3 求解模型(M-6.1)和(M-6.2)的结果

	ω_{i1}'	ω_{i2}'	ω_{i3}'	ω_{i4}'	ω_{i5}'	ω_{i6}'	ω_{i7}'	ω_{i8}'
x_1	0.0491	0.0982	0.1211	0.1211	0.1818	0.2138	0.0457	0.1692
x_2	0.0419	0.0840	0.1373	0.1311	0.1818	0.2138	0.0395	0.1706
x_3	0.0491	0.0840	0.1373	0.1373	0.1680	0.2142	0.0395	0.1706
x_4	0.0491	0.0982	0.1335	0.1211	0.1680	0.2138	0.0457	0.1706
x_5	0.0491	0.0840	0.1295	0.1373	0.1818	0.2138	0.0457	0.1588
	ω_{i1}''	ω_{i2}''	ω_{i3}''	ω_{i4}''	ω_{i5}''	ω_{i6}''	ω_{i7}''	ω_{i8}''
x_1	0.0419	0.0840	0.1373	0.1373	0.1680	0.2214	0.0395	0.1706
x_2	0.0491	0.0982	0.1373	0.1211	0.1680	0.2138	0.0457	0.1668
x_3	0.0419	0.0982	0.1211	0.1211	0.1818	0.2196	0.0457	0.1706
x_4	0.0419	0.0840	0.1373	0.1373	0.1818	0.2138	0.0395	0.1644
x_5	0.0419	0.0840	0.1373	0.1211	0.1818	0.2238	0.0395	0.1706

步骤 3 **求解模型**(M-6.3)**和**(M-6.4)**得到相应于方案** x_i **最优解**

$$\boldsymbol{\omega}' = (\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_8'), \boldsymbol{\omega}'' = (\omega_1'', \omega_2'', \cdots, \omega_8'')$$

以及方案 x_i **的综合属性值所在区间** $\tilde{z}_i = [z_i^L(\boldsymbol{\omega}'), z_i^U(\boldsymbol{\omega}'')]$ $(i=1,2,\cdots,5)$:

$\boldsymbol{\omega}' = (0.0491, 0.0840, 0.1373, 0.1211, 0.1818, 0.2138, 0.0457, 0.1672)$,

$\boldsymbol{\omega}'' = (0.0419, 0.0840, 0.1373, 0.1249, 0.1818, 0.2138, 0.0457, 0.1706)$,

$\tilde{z}_1 = [0.3448, 0.5616]$, $\tilde{z}_2 = [0.2745, 0.4556]$, $\tilde{z}_3 = [0.3348, 0.5230]$,

$\tilde{z}_4 = [0.4044, 0.6255]$, $\tilde{z}_5 = [0.3559, 0.5525]$.

步骤 4　求解模型(M-6.6)得到相应于方案 x_i 的最优解$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，以及方案 x_i 的综合属性值所在区间 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}),z_i^U(\boldsymbol{\omega})]$$(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\boldsymbol{\omega}=(0.0419,0.0840,0.1373,0.1249,0.1818,0.2138,0.0457,0.1706),$$

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})=[0.3461,0.5616],\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})=[0.2731,0.4556],$$

$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})=[0.3348,0.5230],\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})=[0.4055,0.6255],$$

$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega})=[0.3563,0.5525].$$

从上述结果可以看出，一般来讲，由模型(M-6.6)所得各方案的综合属性值所在区间范围最小.

为了对各方案进行排序，先利用(4.2)式分别求出上述 3 种模型所得各方案的综合属性值两两比较的可能度矩阵，然后利用(4.6)式对方案进行排序. 结果如下：

(1)

$$\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7157 & 0.5647 & 0.3674 & 0.5032\\ 0.2843 & 0.5 & 0.3369 & 0.1385 & 0.2729\\ 0.4353 & 0.6631 & 0.5 & 0.2920 & 0.4344\\ 0.6326 & 0.8615 & 0.7080 & 0.5 & 0.6443\\ 0.4968 & 0.7271 & 0.5656 & 0.3557 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2076,0.1516,0.1912,0.2423,0.2073).$$

由排序向量$\boldsymbol{\upsilon}$ 及矩阵 $\boldsymbol{P}^{(1)}$ 中的可能度，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$的排序：

$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})\underset{0.6326}{\succ}\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5032}{\succ}\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega})\underset{0.5656}{\succ}\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})\underset{0.6631}{\succ}\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}),$$

因此方案的排序为

$$x_4\underset{0.6326}{\succ}x_1\underset{0.5032}{\succ}x_5\underset{0.5656}{\succ}x_3\underset{0.6631}{\succ}x_2.$$

类似地，有(2).

(2)

$$\boldsymbol{P}^{(2)}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7215 & 0.5600 & 0.3590 & 0.4976\\ 0.2785 & 0.5 & 0.3271 & 0.1273 & 0.2640\\ 0.4400 & 0.6729 & 0.5 & 0.2898 & 0.4344\\ 0.6410 & 0.8727 & 0.7102 & 0.5 & 0.6454\\ 0.5024 & 0.7360 & 0.5667 & 0.3546 & 0.5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2069,0.1498,0.1919,0.2435,0.2079),$$

$$x_4\underset{0.6454}{\succ}x_5\underset{0.5024}{\succ}x_1\underset{0.5600}{\succ}x_3\underset{0.6729}{\succ}x_2.$$

(3)

$$
\boldsymbol{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.7249 & 0.5618 & 0.3584 & 0.4987 \\ 0.2751 & 0.5 & 0.3259 & 0.1245 & 0.2622 \\ 0.4382 & 0.6741 & 0.5 & 0.2898 & 0.4337 \\ 0.6416 & 0.8755 & 0.7122 & 0.5 & 0.6468 \\ 0.5013 & 0.7378 & 0.5663 & 0.3532 & 0.5 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{\upsilon} = (0.2072, 0.1494, 0.1917, 0.2438, 0.2079),
$$

$$
x_4 \underset{0.6468}{\succ} x_5 \underset{0.5013}{\succ} x_1 \underset{0.5618}{\succ} x_3 \underset{0.6741}{\succ} x_2.
$$

因此(2)和(3)中方案排序相同,相比之下,(1)中方案 x_1 和 x_5 产生了逆序.但最优方案均为 x_4.

6.2 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法

6.2.1 算法

下面介绍一种基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法的算法.具体步骤如下[217]:

步骤 1 对于某一多属性决策问题,设 $X, U, \widetilde{A}, \widetilde{R}$ 和 Φ 分别为方案集、属性集、决策矩阵、规范化决策矩阵以及已知的部分权重信息确定的属性可能权重集合.

步骤 2 利用区间数相离度(定义 5.1)和方案属性值偏差最大化思想,建立单目标最优化模型:

$$
(\text{M-6.7}) \quad \begin{cases} \max D(\boldsymbol{\omega}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \| r_{ij} - r_{kj} \| \omega_j \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} (| r_{ij}^L - r_{kj}^L | + | r_{ij}^U - r_{kj}^U |)\omega_j, \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} \in \Phi. \end{cases}
$$

解此模型,求得最优权重向量$\boldsymbol{\omega}$.

步骤 3 由(4.15)式求得各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i \in N)$.

步骤 4 利用(4.2)式算出各方案综合属性值之间的可能度 $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega}) \geqslant \tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega}))(i, j \in N)$,并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n \times n}$.

步骤 5 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n)$,并按其分量大小对方案进行排序,即得到最优方案.

6.2.2 实例分析

例 6.2　考虑某个制造商研制某种反舰导弹武器系统问题，现有 5 个备选方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 可供制造商选择，而评价反舰导弹武器系统的性能指标（属性）主要有 6 个[319]，即：u_1——导弹命中与毁伤能力；u_2——火控系统作战能力；u_3——抗干扰能力；u_4——导弹飞行控制能力；u_5——导弹制导；u_6——载舰机动能力.

上述 6 项指标（属性）均为效益型指标，决策者对这些项目依据各项指标进行打分，其范围为 1 分（最差）到 10 分（最好）之间，所得决策矩阵 $\boldsymbol{A}$，如表 6.4 所示.

表 6.4　决策矩阵 $\widetilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[5,6]	[6,8]	[6,7]	[4,6]	[7,8]	[8,10]
x_2	[6,8]	[5,7]	[8,9]	[7,8]	[4,7]	[7,8]
x_3	[5,7]	[6,7]	[8,10]	[7,9]	[5,7]	[6,7]
x_4	[8,10]	[5,6]	[4,7]	[5,7]	[6,8]	[4,7]
x_5	[8,10]	[6,8]	[5,6]	[6,9]	[7,9]	[5,8]

已知的属性权重信息为

$$\Phi=\Big\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6)\mid 0.16\leqslant\omega_1\leqslant 0.20,0.14\leqslant\omega_2\leqslant 0.16,$$
$$0.15\leqslant\omega_3\leqslant 0.18,0.13\leqslant\omega_4\leqslant 0.17,0.14\leqslant\omega_5\leqslant 0.18,$$
$$0.11\leqslant\omega_6\leqslant 0.19,\sum_{j=1}^{6}\omega_j=1\Big\}.$$

利用 6.2.1 节中的方法对 5 个备选项目进行排序. 具体步骤如下：

步骤 1　由(4.9)式得到规范化决策矩阵 $\boldsymbol{R}$，如表 6.5 所示.

表 6.5　规范化决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.268,0.410]	[0.371,0.636]	[0.338,0.489]
x_2	[0.321,0.547]	[0.309,0.557]	[0.451,0.629]
x_3	[0.268,0.479]	[0.371,0.557]	[0.451,0.698]
x_4	[0.428,0.684]	[0.309,0.477]	[0.225,0.489]
x_5	[0.428,0.684]	[0.371,0.636]	[0.282,0.419]

续表

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.227,0.454]	[0.400,0.605]	[0.443,0.725]
x_2	[0.397,0.605]	[0.228,0.529]	[0.338,0.580]
x_3	[0.397,0.680]	[0.285,0.529]	[0.332,0.508]
x_4	[0.284,0.529]	[0.342,0.605]	[0.222,0.508]
x_5	[0.340,0.680]	[0.400,0.680]	[0.277,0.580]

步骤 2　利用算法中的模型可建立下列单目标优化模型：

$$\begin{cases} \max D(\boldsymbol{\omega}) = 4.932\omega_1 + 2.336\omega_2 + 5.276\omega_3 + 4.224\omega_4 + 3.348\omega_5 + 4.236\omega_6, \\ \text{s.t.} \quad 0.16 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.20, 0.14 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.16, 0.15 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.18, \\ \qquad 0.13 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.17, 0.14 \leqslant \omega_5 \leqslant 0.18, 0.11 \leqslant \omega_6 \leqslant 0.19, \sum_{j=1}^{6} \omega_j = 1. \end{cases}$$

解此模型，求得最优权重向量

$$\boldsymbol{\omega} = (0.20, 0.14, 0.18, 0.15, 0.14, 0.19).$$

步骤 3　由(5.2)**式求得各方案综合属性值** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}) = [0.3406, 0.5496], \tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) = [0.3538, 0.5756],$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) = [0.3493, 0.5720], \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}) = [0.3020, 0.5522],$$
$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) = [0.3479, 0.6087].$$

步骤 4　利用(4.2)**式计算各方案综合属性值之间的可能度，并且建立可能度矩阵**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4545 & 0.4640 & 0.5392 & 0.4293 \\ 0.5455 & 0.5 & 0.5091 & 0.5797 & 0.4718 \\ 0.5360 & 0.4909 & 0.5 & 0.5709 & 0.4635 \\ 0.4608 & 0.4203 & 0.4291 & 0.5 & 0.3998 \\ 0.5707 & 0.5282 & 0.5365 & 0.6002 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

步骤 5　利用(4.6)**式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量**

$$\boldsymbol{\upsilon} = (0.1943, 0.2053, 0.2031, 0.1855, 0.2118).$$

由排序向量$\boldsymbol{\upsilon}$及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的可能度，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$**的排序**

$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5282}{\geqslant} \tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5091}{\geqslant} \tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5360}{\geqslant} \tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5392}{\geqslant} \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}).$$

步骤 6　按 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$**值的大小对方案** $x_i(i=1,2,\cdots,5)$**进行排序，得**

$$x_5 \underset{0.5282}{\succ} x_2 \underset{0.5091}{\succ} x_3 \underset{0.5360}{\succ} x_1 \underset{0.5392}{\succ} x_4,$$

故最优方案为 x_5.

6.3 区间型多属性决策的目标规划方法

6.3.1 决策方法

设属性的权重向量$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，其中

$$\omega_j \in [\omega_j^L,\omega_j^U],\omega_j \geqslant 0,\quad j\in M,\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1,$$

且设规范化决策矩阵为 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

方案 x_i 的综合属性值是由区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})=[z_i^L(\boldsymbol{\omega}),z_i^U(\boldsymbol{\omega})](i\in N)$来表达，根据(4.15)式可知，它的计算公式为

$$z_i^L(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L\omega_j,\quad i\in N, \tag{6.4}$$

$$z_i^U(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U\omega_j,\quad i\in N, \tag{6.5}$$

其中$\boldsymbol{\omega}$是下列多目标最优化模型的解：

$$(\text{M-6.8})\quad \begin{cases} \min z_i'(\boldsymbol{\omega}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L\omega_j,\quad i\in N, \\ \max z_i''(\boldsymbol{\omega}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U\omega_j,\quad i\in N, \\ \text{s.t.}\quad \omega_j\in[\omega_j^L,\omega_j^U],\omega_j\geqslant 0,\quad j\in M,\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1. \end{cases}$$

这个模型的基本含义是要确定每个方案的综合属性值所在的区间并使用同一个属性权重向量$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，使得所有方案的排序(或评价)具有可比性. 从模型(M-6.8)可以看出，目标函数 $z_i'(\boldsymbol{\omega})$ 希望能达到的期望值是 $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L\omega_j^L$，而目标函数$z_i''(\boldsymbol{\omega})$希望能达到的期望值是 $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U\omega_j^U$. 这样，为了方便求解上述多目标最优化模型，可将它转化为下列线性目标规划问题[45]：

$$
(\text{M-6.9})\begin{cases}\min J = P_1\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{1i}d_i^- + \beta_{1i}e_i^+) + P_2\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{2i}d_i^+ + \beta_{2i}e_i^-), \\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L\omega_j + d_i^- - d_i^+ = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L\omega_j^L, \quad i\in N, \\ \qquad \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U\omega_j + e_i^- - e_i^+ = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U\omega_j^U, \quad i\in N, \\ \qquad \omega_j\in[\omega_j^L,\omega_j^U], \omega_j\geqslant 0, j\in M, \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1, \\ \qquad d_i^-, d_i^+, e_i^-, e_i^+ \geqslant 0, \quad i\in N.\end{cases}
$$

其中 $P_i(i=1,2)$ 为优先因子，表示各个目标的相对重要性，且 $P_1 \gg P_2$；d_i^- 和 d_i^+ 分别是目标函数 $z_i'(\boldsymbol{\omega})$ 低于和高于期望值 $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^L\omega_j^L$ 的下偏差变量和上偏差变量；e_i^- 和 e_i^+ 分别是目标函数 $z_i''(\boldsymbol{\omega})$ 低于和高于期望值 $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^U\omega_j^U$ 的下偏差变量和上偏差变量；α_{1i} 和 β_{1i} 分别是 P_1 优先级目标中 d_i^- 和 e_i^+ 的权重系数；α_{2i} 和 β_{2i} 分别是 P_2 优先级目标中 d_i^+ 和 e_i^- 的权重系数. 可以认为所有的目标函数之间是公平竞争的，没有任何偏好关系. 因此可以取 $\alpha_{1i}=\beta_{1i}=\alpha_{2i}=\beta_{2i}=1(i\in N)$.

求解模型(M-6.9)，即可得到最优属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，把它代入(6.4)和(6.5)两式，得到各方案的综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$，再利用 6.2.1 节算法中的步骤 4 和步骤 5，即可求得方案的排序.

6.3.2 实例分析

例 6.3 我们以例 4.1 为例. 假定已知的属性权重信息为

$$
\begin{aligned}\Phi = \{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m) \mid\ & 0.3350 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.3755, \\ & 0.3009 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.3138, 0.3194 \leqslant \omega_3 \\ & \leqslant 0.3363, \omega_1+\omega_2+\omega_3 = 1\}.\end{aligned}
$$

下面利用 6.3.1 节中的方法进行求解：

步骤 1 利用(M-6.9)建立下列目标规划模型：

$$
\begin{cases}
\min J = P_1 \sum\limits_{i=1}^{5} (d_i^- + e_i^+) + P_2 \sum\limits_{i=1}^{5} (d_i^+ + e_i^-), \\
\text{s.t.} \quad 0.214\omega_1 + 0.166\omega_2 + 0.184\omega_3 + d_1^- - d_1^+ = 0.1804, \\
\qquad 0.206\omega_1 + 0.220\omega_2 + 0.182\omega_3 + d_2^- - d_2^+ = 0.1938, \\
\qquad 0.195\omega_1 + 0.192\omega_2 + 0.220\omega_3 + d_3^- - d_3^+ = 0.1934, \\
\qquad 0.181\omega_1 + 0.195\omega_2 + 0.185\omega_3 + d_4^- - d_4^+ = 0.1784, \\
\qquad 0.175\omega_1 + 0.193\omega_2 + 0.201\omega_3 + d_5^- - d_1^+ = 0.1809, \\
\qquad 0.220\omega_1 + 0.178\omega_2 + 0.190\omega_3 + e_1^- - e_1^+ = 0.2024, \\
\qquad 0.225\omega_1 + 0.229\omega_2 + 0.191\omega_3 + e_2^- - e_2^+ = 0.2206, \\
\qquad 0.204\omega_1 + 0.198\omega_2 + 0.231\omega_3 + e_3^- - e_3^+ = 0.2164, \\
\qquad 0.190\omega_1 + 0.205\omega_2 + 0.195\omega_3 + e_4^- - e_4^+ = 0.2012, \\
\qquad 0.184\omega_1 + 0.201\omega_2 + 0.211\omega_3 + e_5^- - e_5^+ = 0.2031, \\
\qquad 0.3350 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.3755, 0.3009 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.3138, \\
\qquad 0.3194 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.3363, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, \\
\qquad d_i^-, d_i^+, e_i^-, e_i^+ \geqslant 0, i = 1,2,3,4,5.
\end{cases}
$$

通过采用分阶段目标规划方法求解该模型,可得属性权重向量

$$\boldsymbol{\omega} = (0.3755, 0.3009, 0.3236).$$

步骤 2　由(6.4)和(6.5)两式求得各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}) = [0.1898, 0.1977], \tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) = [0.202, 0.2152],$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) = [0.2022, 0.2109], \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}) = [0.1865, 0.1961],$$
$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) = [0.1888, 0.1979].$$

步骤 3　利用(4.2)式计算出各方案的综合属性值之间的可能度,并建立可能度矩阵

$$
\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}
0.5 & 0 & 0 & 0.6400 & 0.5235 \\
1 & 0.5 & 0.6047 & 1 & 1 \\
1 & 0.3953 & 0.5 & 0 & 0 \\
0.3600 & 0 & 1 & 0.5 & 0.3904 \\
0.4765 & 0 & 1 & 0.6096 & 0.5
\end{pmatrix}.
$$

利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon} = (0.1582, 0.2802, 0.1698, 0.1875, 0.2043).$$

由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ 及矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的可能度,得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$ 的排序

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) \underset{1}{\geqslant} \tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.6096}{\geqslant} \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}) \underset{1}{\geqslant} \tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) \underset{1}{\geqslant} \tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}).$$

步骤 4 按 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$值的大小对方案 $x_i(i=1,2,3,4,5)$进行排序,可得

$$x_2 \underset{1}{\succ} x_5 \underset{0.6096}{\succ} x_4 \underset{1}{\succ} x_3 \underset{1}{\succ} x_1,$$

故最优方案为 x_2.

6.4 对方案有偏好的偏差最小化多属性决策方法

6.4.1 决策方法

下面介绍一种对方案有偏好的偏差最小化多属性决策方法. 具体步骤如下[221]:

步骤 1 对于只有部分属性权重信息且属性值为区间数的多属性决策问题,若决策者对方案 x_i 有一定的主观偏好,设主观偏好值为区间数 $\tilde{\vartheta}_i(\tilde{\vartheta}_i=[\vartheta_i^L,\vartheta_i^U],0\leqslant\vartheta_i^L\leqslant\vartheta_i^U\leqslant 1,i\in N)$. 这里,把规范化决策矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{m\times n}$中的属性值$r_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$看成决策者在属性 u_j 下对方案 x_i 的客观偏好值. 由于种种条件的制约,决策者的主观偏好与客观偏好之间往往存在着一定的差距,为了使决策具有合理性,属性权重向量$\boldsymbol{\omega}$ 的选择应使决策者的主观偏好值与客观偏好值(属性值)的总偏差最小. 为此,利用定义 5.1 所给出的区间数比较的相离度概念,建立下列单目标优化模型:

$$(\text{M-6.10})\quad\begin{cases}\min D(\boldsymbol{\omega}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \| \ r_{ij} - \tilde{s}_j \ \| \,\omega_j \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\,|\,r_{ij}^L - s_j^L\,| + |\,r_{ij}^U - s_j^U\,|\,)\omega_j, \\ \text{s.t.}\ \ \boldsymbol{\omega}\in\Phi.\end{cases}$$

解此模型,求得最优权重向量$\boldsymbol{\omega}$.

步骤 2 由(5.6)式求得各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 3 利用(4.2)式计算各方案综合属性值之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\omega)\geqslant\tilde{z}_j(\omega))(i,j\in N)$,并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 4 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$,并按其分量大小对方案进行排序,即得到最优方案.

6.4.2 实例分析

例 6.4 一个家庭欲购买一台冰箱,现有 5 种品牌冰箱 $x_i(i=1,2,3,4,5)$可供选择,主要的评价指标(属性)有 6 项,即:u_1——安全性;u_2——制冷性能;

u_3——结构性；u_4——可靠性；u_5——经济性；u_6——美观性. 上述 6 项指标(属性)均为效益型，所有这些属性值均为打分值，其范围为 1 分(最差)到 10 分(最好)之间. 决策矩阵如表 6.6 所示. 已知的属性权重信息为

$$\Phi = \Big\{ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6) \mid 0.25 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.30, 0.15 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.20,$$
$$0.10 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.20, 0.12 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.24, 0.11 \leqslant \omega_5 \leqslant 0.18,$$
$$0.15 \leqslant \omega_6 \leqslant 0.22, \sum_{j=1}^{6} \omega_j = 1 \Big\}.$$

表 6.6　决策矩阵 A

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[6,8]	[8,9]	[7,8]	[5,6]	[6,7]	[8,9]
x_2	[7,9]	[5,7]	[6,7]	[7,8]	[6,8]	[7,9]
x_3	[5,7]	[6,8]	[7,9]	[6,7]	[7,8]	[8,9]
x_4	[6,7]	[7,8]	[7,9]	[5,6]	[8,9]	[7,8]
x_5	[7,8]	[6,7]	[6,8]	[4,6]	[5,7]	[9,10]

利用 6.4.1 节中的方法进行求解. 具体步骤如下：

步骤 1　利用(5.9)式，得到规范化决策矩阵 $\boldsymbol{R}$，如表 6.7 所示.

表 6.7　规范化决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.154,0.258]	[0.205,0.281]	[0.171,0.242]
x_2	[0.179,0.290]	[0.128,0.219]	[0.146,0.212]
x_3	[0.128,0.226]	[0.154,0.250]	[0.171,0.273]
x_4	[0.154,0.226]	[0.179,0.250]	[0.171,0.273]
x_5	[0.179,0.258]	[0.154,0.219]	[0.146,0.242]

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.152,0.222]	[0.154,0.219]	[0.178,0.231]
x_2	[0.212,0.296]	[0.154,0.250]	[0.156,0.231]
x_3	[0.182,0.259]	[0.179,0.250]	[0.178,0.231]
x_4	[0.152,0.222]	[0.205,0.281]	[0.156,0.205]
x_5	[0.121,0.222]	[0.128,0.219]	[0.200,0.256]

步骤 2 设决策者对 5 个候选品牌冰箱 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的主观偏好值(规范化后)分别为

$$\tilde{\vartheta}_1=[0.16,0.18],\tilde{\vartheta}_2=[0.17,0.19],\tilde{\vartheta}_3=[0.23,0.25],$$
$$\tilde{\vartheta}_4=[0.15,0.20],\tilde{\vartheta}_5=[0.18,0.22].$$

利用公式 $d(r_{ij},\tilde{\vartheta}_i)=|r_{ij}^L-\vartheta_i^L|+|r_{ij}^U-\vartheta_i^U|(i=1,2,\cdots,5,j=1,2,\cdots,6)$,计算相应的客观偏好值(属性值)与主观偏好值之间的相离度,如表 6.8 所示.

表 6.8 客观偏好值与主观偏好值之间的相离度

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$d(r_{1j},\tilde{\vartheta}_1)$	0.084	0.146	0.073	0.050	0.045	0.069
$d(r_{2j},\tilde{\vartheta}_2)$	0.109	0.071	0.046	0.148	0.076	0.055
$d(r_{3j},\tilde{\vartheta}_3)$	0.126	0.076	0.082	0.057	0.051	0.071
$d(r_{4j},\tilde{\vartheta}_4)$	0.030	0.079	0.094	0.024	0.136	0.011
$d(r_{5j},\tilde{\vartheta}_5)$	0.039	0.027	0.056	0.061	0.055	0.056

利用模型(M-6.10)可建立下列单目标优化模型:

$$\begin{cases}\min D(\boldsymbol{\omega})=0.388\omega_1+0.399\omega_2+0.351\omega_3+0.340\omega_4+0.363\omega_5+0.262\omega_6,\\ \text{s.t.}\quad 0.25\leqslant\omega_1\leqslant0.30,0.15\leqslant\omega_2\leqslant0.20,0.10\leqslant\omega_3\leqslant0.20,\\ \qquad 0.12\leqslant\omega_4\leqslant0.24,0.11\leqslant\omega_5\leqslant0.18,0.15\leqslant\omega_6\leqslant0.22,\sum_{j=1}^{6}\omega_j=1.\end{cases}$$

解此模型,求得最优权重向量

$$\boldsymbol{\omega}=(0.25,0.15,0.10,0.17,0.11,0.22).$$

步骤 3 由(4.15)式求得各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})=[0.1683,0.2435],\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})=[0.1659,0.2552],$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})=[0.1620,0.2437],\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})=[0.1652,0.2351],$$
$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega})=[0.1611,0.2397].$$

步骤 4 利用(4.2)式计算出各方案的综合属性值之间的可能度,并建立可能度矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4717 & 0.5194 & 0.5396 & 0.5358\\ 0.5283 & 0.5 & 0.5450 & 0.5653 & 0.5605\\ 0.4806 & 0.4550 & 0.5 & 0.5178 & 0.5153\\ 0.4604 & 0.4347 & 0.4822 & 0.5 & 0.4983\\ 0.4642 & 0.4395 & 0.4847 & 0.5017 & 0.5\end{pmatrix}.$$

步骤 5 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2033,0.2100,0.1984,0.1938,0.1945).$$

由排序向量 $\boldsymbol{v}$ 及矩阵 P 中的可能度，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$ 的排序

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5283}{\geqslant} \tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5194}{\geqslant} \tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5153}{\geqslant} \tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5017}{\geqslant} \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}).$$

步骤 6 按 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$ 值的大小对方案 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 进行排序，得

$$x_2 \underset{0.5283}{\succ} x_1 \underset{0.5194}{\succ} x_3 \underset{0.5153}{\succ} x_5 \underset{0.5017}{\succ} x_4,$$

故最佳品牌冰箱 x_2.

6.5 基于投影模型的区间型多属性决策方法

6.5.1 模型和方法

设方案的综合属性值为 $\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\omega})=(\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}),\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}),\cdots,\tilde{z}_n(\boldsymbol{\omega}))$，其中

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega}) = [z_i^L(\boldsymbol{\omega}),z_i^U(\boldsymbol{\omega})] = \sum_{j=1}^m \omega_j \tilde{r}_{ij} = \left[\sum_{j=1}^m \omega_j r_{ij}^L, \sum_{j=1}^m \omega_j r_{ij}^U\right],$$

且设

$$\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega}) = (z_1^L(\boldsymbol{\omega}),z_2^L(\boldsymbol{\omega}),\cdots,z_n^L(\boldsymbol{\omega})),\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega}) = (z_1^U(\boldsymbol{\omega}),z_2^U(\boldsymbol{\omega}),\cdots,z_n^U(\boldsymbol{\omega})),$$

则

$$\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\omega})=[\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega})].$$

设决策者对方案的主观偏好值为 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}=(\tilde{\vartheta}_1,\tilde{\vartheta}_2,\cdots,\tilde{\vartheta}_n)$，且设

$$\boldsymbol{\vartheta}^L = (\vartheta_1^L,\vartheta_2^L,\cdots,\vartheta_n^L),\boldsymbol{\vartheta}^U = (\vartheta_1^U,\vartheta_2^U,\cdots,\vartheta_n^U),$$

则

$$\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}=[\boldsymbol{\vartheta}^L,\boldsymbol{\vartheta}^U].$$

对于多属性决策问题，一般是利用各方案的综合属性值对方案进行排序和择优. 当方案的综合属性值向量 $\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\omega})$ 与主观偏好值向量 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ 完全一致时，则可以利用向量 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ 对方案进行排序和择优. 然而，由于种种条件的制约，方案的综合属性值向量 $\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\omega})$ 与主观偏好值向量 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ 之间往往存在着一定的偏差.

为了使决策具有合理性，属性权重向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的选择应使这两个向量之间的偏差最小. 为此，令

$$\cos\theta_1 = \cos(\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\vartheta}^L) = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^L(\boldsymbol{\omega})\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i^L(\boldsymbol{\omega}))^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i^L)^2}}, \tag{6.6}$$

$$\cos\theta_2 = \cos(\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\vartheta}^U) = \frac{\sum_{i=1}^n z_i^U(\boldsymbol{\omega})\vartheta_i^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i^U(\boldsymbol{\omega}))^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i^U)^2}}. \tag{6.7}$$

显然，$\cos\theta_1$ 和 $\cos\theta_2$ 越小，则 $z^L(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}^L$，$z^U(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}^U$ 的方向越贴近.

然而，向量之间的夹角余弦值仅能衡量它们的方向是否一致，而不能反映其模的大小. 模的大小必须与夹角余弦的大小结合考虑才能全面反映 $z^L(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}^L$，$z^U(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}^U$ 的接近程度，即 $\tilde{z}(\boldsymbol{\omega})$与 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ 的接近程度. 为此，可以分别计算 $z^L(\boldsymbol{\omega})$在 $\boldsymbol{\vartheta}^L$，$z^U(\boldsymbol{\omega})$在 $\boldsymbol{\vartheta}^U$ 上的投影：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\vartheta}^L}(\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega})) &= |\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega})| \cos\theta_1 \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i^L(\boldsymbol{\omega}))^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n z_i^L(\boldsymbol{\omega})\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i^L(\boldsymbol{\omega}))^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i^L)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n z_i^L(\boldsymbol{\omega})\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i^L)^2}} = \sum_{i=1}^n z_i^L(\boldsymbol{\omega})\bar{\vartheta}_i^L,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

类似地，有

$$
\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\vartheta}^U}(\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega})) = |\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega})| \cos\theta_2 = \sum_{i=1}^n z_i^U(\boldsymbol{\omega})\bar{\vartheta}_i^U, \tag{6.9}
$$

其中

$$
|\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i^L(\boldsymbol{\omega}))^2}, \quad |\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i^U(\boldsymbol{\omega}))^2}
$$

分别是 $z^L(\boldsymbol{\omega})$和 $z^U(\boldsymbol{\omega})$的模，且

$$
\bar{\vartheta}_i^L = \frac{\vartheta_i^L}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i^L)^2}}, \quad \bar{\vartheta}_i^U = \frac{\vartheta_i^U}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\vartheta_i^U)^2}}.
$$

显然 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\vartheta}^L}(\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega}))$和 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\vartheta}^U}(\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega}))$越大，$z^L(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}^L$，$z^U(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}^U$ 越贴近，也即 $\tilde{z}(\boldsymbol{\omega})$和 $\boldsymbol{\vartheta}$ 越贴近. 因此，可以分别构造下限投影模型（M-6.11）和上限投影模型（M-6.12）：

(M-6.11)
$$
\begin{cases}
\max \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\vartheta}^L}(\boldsymbol{z}^L(\boldsymbol{\omega})) = \sum_{i=1}^n z_i^L(\boldsymbol{\omega})\bar{\vartheta}_i^L, \\
\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} \in \Phi.
\end{cases}
$$

(M-6.12)
$$
\begin{cases}
\max \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{\vartheta}^U}(\boldsymbol{z}^U(\boldsymbol{\omega})) = \sum_{i=1}^n z_i^U(\boldsymbol{\omega})\bar{\vartheta}_i^U, \\
\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} \in \Phi.
\end{cases}
$$

为了使所有方案的排序具有可比性，在计算方案的综合属性值时必须使用

同一个属性权重向量. 由于模型(M-6.11)和(M-6.12)具有相同的约束条件,可以采用等权的线性权和法把模型(M-6.11)和(M-6.12)进行合成,得到下列合成投影模型:

$$(\text{M-6.13})\quad \begin{cases} \max \operatorname{Prj}_{\hat{\vartheta}}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{\omega})) = \sum_{i=1}^{n} (z_i^L(\boldsymbol{\omega})\bar{\vartheta}_i^L + z_i^U(\boldsymbol{\omega})\bar{\vartheta}_i^U), \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{\omega} \in \Phi. \end{cases}$$

通过求解该模型,得到最优解$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$,利用(4.15)式求得各方案的综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

为了便于对方案进行排序,利用(4.2)式计算区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$之间比较的可能度,并建立可能度矩阵,然后利用(4.6)式进行求解其排序向量,进而对方案进行排序和择优.

综上所述,下面给出一种基于投影模型的区间型多属性决策方法. 具体步骤如下[251]:

步骤 1　对于某一多属性决策问题,决策者对所有方案按各属性进行测度,得到决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,并将其转化为规范化矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$. 设决策者对各方案的主观偏好值为 $\tilde{\vartheta}_i(i\in N)$.

步骤 2　利用模型(M-6.13)确定属性的权重向量$\boldsymbol{\omega}$,并利用(4.15)式求得各方案的综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$.

步骤 3　利用(4.2)式计算出区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$之间比较的可能度,并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$. 然后利用(4.6)式求得矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{v}$,并按其分量大小对方案进行排序,即可得到最优方案.

6.5.2　实例分析

例 6.5　风险投资是指以未上市公司,特别是那些成长型公司和尚在构思中的“公司”为投资对象的一种投资活动[183],它是 20 世纪 40 年代末兴起于美国,自其产生以来便以高收益特征和对高新技术产业的特殊推动作用,广受各国政府和投资者的青睐,并迅速风靡全球,在推动各国的高新技术产业的发展上起了举足轻重的作用[144].

考虑某个风险投资公司进行项目投资问题,有 5 个备选项目(方案)$x_i(i=1,2,\cdots,5)$可供选择,现从风险因素角度对项目进行评价. 风险因素又可划分为 6 项指标(属性)[47],即

(1) 市场风险 u_1:难以确定竞争力,难以预测创新产品的扩散速度,难以确定市场的接受能力等,由于环境因素导致能否赢得市场竞争优势的不确定性;

（2）技术风险 u_2：由于新思想与新技术本身的先天不足，技术不成熟、不完善，以及可替代的新技术的出现的时间快等多种因素带来的风险；

（3）管理风险 u_3：管理层的素质、管理能力以及各种人员因素带来的风险；

（4）环境风险 u_4：由于社会政治、经济环境的变动引发的风险；

（5）生产风险 u_5：企业生产工艺、仪器、设备和原材料等方面出现难以预见的障碍给风险企业带来的生产过程中的风险；

（6）金融风险 u_6：由于金融市场的变动，给企业的投资带来的风险.

上述 6 项指标（属性）均为成本性指标，且指标（属性）值也均为打分值，其范围为 1 分（低风险）到 5 分（高风险）之间. 专家对这些项目依据各项指标进行打分（属性值均以区间数形式给出），所得的决策矩阵 A，如表 6.9 所示. 已知的属性权重信息为

$$\Phi=\Big\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6)\mid 0.15\leqslant\omega_1\leqslant 0.18,0.16\leqslant\omega_2\leqslant 0.17,$$
$$0.17\leqslant\omega_3\leqslant 0.18,0.14\leqslant\omega_4\leqslant 0.19,0.13\leqslant\omega_5\leqslant 0.16,$$
$$0.16\leqslant\omega_6\leqslant 0.20,\sum_{j=1}^{6}\omega_6=1\Big\}.$$

表 6.9 决策矩阵 $\widetilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
x_1	[2,4]	[3,4]	[2,3]	[3,4]	[2,3]	[4,5]
x_2	[3,4]	[2,3]	[4,5]	[3,4]	[2,4]	[2,3]
x_3	[2,3]	[2,3]	[4,5]	[3,4]	[2,4]	[3,5]
x_4	[3,5]	[2,4]	[2,3]	[2,5]	[3,4]	[2,3]
x_5	[4,5]	[3,4]	[2,4]	[2,5]	[3,5]	[2,4]

利用 6.5.1 节中的方法对 5 个备选项目进行排序. 具体步骤如下：

步骤 1 利用(5.10)式得到规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$，如表 6.10 所示.

表 6.10 规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3
x_1	[0.1034,0.3093]	[0.1034,0.2062]	[0.1379,0.3093]
x_2	[0.1034,0.2062]	[0.1379,0.3093]	[0.0828,0.1546]
x_3	[0.1379,0.3191]	[0.1379,0.3191]	[0.0828,0.1596]
x_4	[0.0750,0.2128]	[0.0938,0.3191]	[0.1250,0.3191]
x_5	[0.0828,0.1852]	[0.1034,0.2469]	[0.1034,0.3704]

续表

	u_4	u_5	u_6
x_1	[0.1034,0.2062]	[0.1379,0.3093]	[0.0828,0.1546]
x_2	[0.1034,0.2062]	[0.1034,0.3093]	[0.1379,0.3093]
x_3	[0.1034,0.2128]	[0.1034,0.3191]	[0.0828,0.2128]
x_4	[0.0750,0.3191]	[0.0938,0.2128]	[0.1250,0.3191]
x_5	[0.0828,0.3704]	[0.0828,0.2469]	[0.1034,0.3704]

步骤 2　设决策者对 5 个备选项目 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的主观偏好值分别为

$$\tilde{\vartheta}_1=[0.3,0.5],\tilde{\vartheta}_2=[0.5,0.6],\tilde{\vartheta}_3=[0.3,0.4],$$
$$\tilde{\vartheta}_4=[0.4,0.6],\tilde{\vartheta}_5=[0.4,0.5].$$

利用模型(M-6.13)可建立下列单目标优化模型：

$$\begin{cases}\max \mathrm{Prj}_{\tilde{\vartheta}}(\tilde{z}(\boldsymbol{\omega}))=0.7497\omega_1+0.8771\omega_2+0.8157\omega_3+0.7907\omega_4+\\ \qquad 0.8372\omega_5+0.8597\omega_6,\\ \text{s.t.}\quad 0.15\leqslant\omega_1\leqslant 0.18,0.16\leqslant\omega_2\leqslant 0.17,0.17\leqslant\omega_3\leqslant 0.18,\\ \qquad 0.14\leqslant\omega_4\leqslant 0.19,0.13\leqslant\omega_5\leqslant 0.16,0.16\leqslant\omega_6\leqslant 0.20,\sum_{j=1}^{6}\omega_6=1.\end{cases}$$

解此模型，求得属性的权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.15,0.17,0.18,0.14,0.16,0.20).$$

步骤 3　并由(4.15)式求得各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$：

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})=[0.1110,0.2464],\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})=[0.1125,0.2542],$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega})=[0.1066,0.2542],\tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega})=[0.1002,0.2861],$$
$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega})=[0.0941,0.3019].$$

步骤 4　利用(4.2)式计算出各方案综合属性值之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega}))(i,j=1,2,\cdots,5)$，并建立可能度矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4878 & 0.4940 & 0.4550 & 0.4438\\ 0.5122 & 0.5 & 0.5058 & 0.4658 & 0.4540\\ 0.5060 & 0.4942 & 0.5 & 0.4618 & 0.4505\\ 0.5450 & 0.5342 & 0.5382 & 0.5 & 0.4877\\ 0.5562 & 0.5460 & 0.5495 & 0.5123 & 0.5\end{pmatrix}.$$

利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.1940,0.1969,0.1956,0.2053,0.2082).$$

步骤 5　由排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}$ 及矩阵 $\boldsymbol{P}$，得到区间数 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$ 的排序

$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5123}{\geqslant} \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5342}{\geqslant} \tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5058}{\geqslant} \tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) \underset{0.5060}{\geqslant} \tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega}).$$

按其分量大小对方案 $x_i(i=1,2,3,4,5)$进行排序,得

$$x_5 \underset{0.5123}{\succ} x_4 \underset{0.5342}{\succ} x_2 \underset{0.5058}{\succ} x_3 \underset{0.5060}{\succ} x_1,$$

即得到最优方案为 x_5.

6.6 基于优化水平的交互式区间型多属性决策方法

6.6.1 决策方法

定义 6.1 设区间数 $a=[a^L,a^U],\tilde{b}=[b^L,b^U]$,$p(a\geqslant\tilde{b})$为 $a\geqslant\tilde{b}$ 的可能度(如 4.2 节所定义). 称 $p(a\geqslant\tilde{b})\geqslant\beta$ 为 $a\geqslant\tilde{b}$ 的 β 优化水平.

定理 6.2 在优化水平 β 下,$a\geqslant\tilde{b}$ 可转化为

$$(1-\beta)a^L+\beta a^U \geqslant \beta b^L+(1-\beta)b^U, \tag{6.10}$$

其中 $0\leqslant\beta\leqslant1$.

证明 若(6.10)式成立,由 $l_{\tilde{a}}=a^U-a^L,l_b=b^U-b^L$ 可得

$$\frac{l_{\tilde{a}}+l_b-(b^U-a^L)}{l_{\tilde{a}}+l_b}\geqslant\beta.$$

由定义 6.1 可知,若 $b^U-a^L\geqslant0$,则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\geqslant\beta$;若 $b^U-a^L<0$,则 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})=1\geqslant\beta$. 反之,若 $p(\tilde{a}\geqslant\tilde{b})\geqslant\beta$,同样可证(6.10)式成立. 定理证毕.

我们知道,由(4.15)式定义的方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$越大,则 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$所对应的方案 $x_i(i\in N)$越好. 为了获取最优方案,先给出关于缩减备选方案的信息,为此,引入 β-综合属性值被支配的概念.

定义 6.2 对于方案 $x_p\in X$,若存在方案 $x_q\in X$,在优化水平 β 下,使得 $z_q^{(\beta)}(\boldsymbol{\omega})>z_p^{(\beta)}(\boldsymbol{\omega})$,则称方案 x_p 是 β-综合属性值被支配的;否则,称 x_p 是 β-综合属性值非被支配的,其中

$$z_p^{(\beta)}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^m[(1-\beta)r_{pj}^L+\beta r_{pj}^U]\omega_j,$$

$$z_q^{(\beta)}(\boldsymbol{\omega})=\sum_{j=1}^m[(1-\beta)r_{qj}^L+\beta r_{qj}^U]\omega_j.$$

由定义 6.2 知,在优化水平 β 下 β-综合属性值被支配方案在优化过程中可被删除,从而使方案集 X 得到缩减.

由定理 6.2 并利用定理 3.1 的证明思路,易证下列定理成立.

定理 6.3　对于已知的部分权重信息 Φ 及给定的优化水平 β，方案 $x_p \in X$ 是 β-综合属性值被支配的充要条件是 $J_p<0$，其中

$$\begin{cases} J_p = \max\left(\sum_{j=1}^{m} [(1-\beta) r_{pj}^L + \beta r_{pj}^U] \omega_j + \theta \right), \\ \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m} [(1-\beta) r_{ij}^L + \beta r_{ij}^U] \omega_i + \theta \leqslant 0, \quad i \neq p, i \in N, \omega \in \Phi, \end{cases}$$

θ 为符号无约束的辅助变量，无实际意义.

因此，只需对 X 中的方案依次验证，就得到 β-综合属性值非被支配方案集 $\bar{X}$，$\bar{X}$ 为 X 的子集，因而可使原方案集得到缩减.

由上述理论，可得下列交互式区间型多属性决策方法：

步骤 1　由多属性决策问题构造决策矩阵 $\boldsymbol{A}=(\tilde{a}_{ij})_{n\times m}$，用适当方法把 $\boldsymbol{A}$ 规范化为决策矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$.

步骤 2　根据给定的优化水平 β 和备选方案的 β-综合属性值以及已知的部分属性权重信息，利用定理 6.3 删除 β-综合属性值被支配方案，从而得到非被支配方案集 $\bar{X}$，若决策者均认为 $\bar{X}$ 中某一非被支配方案为最优方案，或 $\bar{X}$ 中只有一个方案，则该方案即为最优方案，问题求解结束；否则，进行下一步.

步骤 3　与决策者进行交互，并把交互所得到的权重信息加入已知的部分权重信息集 Φ 中，转步骤 2.

显然，上述过程是收敛的，最终必找到最优方案，随着权重信息的增加，β-综合属性值非被支配方案集逐渐缩小，要么决策者最后均认为某一非被支配方案为最优方案，要么综合属性值非被支配方案集缩小为只有一个方案，则该方案即为最优方案.

注 6.1　该决策法只可用于选择最优方案，不能适合于方案的排序.

注 6.2　近年来，对于属性权重和属性值信息均未确知的交互式群决策方法的研究也逐渐引起人们的关注. 由于计算较为复杂，这里不作介绍. 对这部分内容感兴趣的读者可参阅有关文献[101103，138，139，165，166，246].

6.6.2　实例分析

例 6.6　以选购大学本科教材为例，现有 5 种不同出版社出版的《数学分析》教材可供选择，这 5 种教材有 4 项指标（属性）：u_1——教材的难易适用度；u_2——内容的新颖程度；u_3——编排印刷质量；u_4——价格. 属性值如表 6.11 所示. 上述 4 项指标（属性）中，价格属于成本型指标，其余均属于效益型指标，所有属性值均为打分值，其范围为 1 分（最低）到 10 分（最高）之间.

表 6.11 决策矩阵 $\widetilde{A}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[8,9]	[6,7]	[8,9]	[7,8]
x_2	[5,6]	[8,10]	[6,8]	[4,5]
x_3	[7,9]	[7,8]	[5,6]	[6,7]
x_4	[5,7]	[8,9]	[9,10]	[7,8]
x_5	[7,8]	[6,8]	[7,8]	[5,7]

已知的部分属性权重信息为

$$\Phi=\left\{\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)\mid 0.1\leqslant\omega_1\leqslant 0.45,\omega_2\leqslant 0.2,0.1\leqslant\omega_3\leqslant 0.4,\right.$$

$$\left.\omega_4\geqslant 0.03,\sum_{j=1}^{4}\omega_j=1,\omega_j\geqslant 0,j=1,2,3,4\right\},$$

试确定最佳教材.

下面运用 6.6.1 节的方法进行求解. 具体步骤如下:

步骤 1 利用(5.9)和(5.10)两式把决策矩阵 $\boldsymbol{A}$ 规范化,得到规范化矩阵 $\boldsymbol{R}$,如表 6.12 所示.

表 6.12 规范化决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	[0.205,0.281]	[0.143,0.200]	[0.195,0.257]	[0.144,0.194]
x_2	[0.128,0.188]	[0.190,0.286]	[0.146,0.229]	[0.230,0.340]
x_3	[0.179,0.281]	[0.167,0.229]	[0.122,0.171]	[0.164,0.227]
x_4	[0.128,0.219]	[0.190,0.257]	[0.220,0.286]	[0.144,0.194]
x_5	[0.179,0.250]	[0.143,0.229]	[0.171,0.229]	[0.164,0.272]

步骤 2 利用定理 6.3 来判断.

若给定优化水平 $\beta=0.7$,则对于方案 x_1,根据定理 6.3,可求下列线性规划问题:

$$
\begin{cases}
J_1 = \max(\theta_1 - \theta_2 + 0.2582\omega_1 + 0.1829\omega_2 + 0.2384\omega_3 + 0.1790\omega_4), \\
\text{s.t.} \quad \theta_1 - \theta_2 + 0.1700\omega_1 + 0.2572\omega_2 + 0.2041\omega_3 + 0.3070\omega_4 \leqslant 0, \\
\qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.2504\omega_1 + 0.2104\omega_2 + 0.1563\omega_3 + 0.2081\omega_4 \leqslant 0, \\
\qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.1917\omega_1 + 0.2369\omega_2 + 0.2662\omega_3 + 0.1790\omega_4 \leqslant 0, \\
\qquad \theta_1 - \theta_2 + 0.2287\omega_1 + 0.2032\omega_2 + 0.2116\omega_3 + 0.2396\omega_4 \leqslant 0, \\
\qquad 0.1 \leqslant \omega_1 \leqslant 0.45, 0.1 \leqslant \omega_2 \leqslant 0.3, 0.05 \leqslant \omega_3 \leqslant 0.1, \\
\qquad 0.1 \leqslant \omega_4 \leqslant 0.5, \sum_{j=1}^{4} \omega_j = 1, \omega_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4.
\end{cases}
$$

解得 $J_1=0.0284>0$. 类似地，对于方案 x_2, x_3, x_4, x_5，分别求得

$$J_2 = 0.0638 > 0, J_3 = 0.0112 > 0, J_4 = -0.0234 < 0, J_5 = -0.0208 < 0.$$

从而 x_4 和 x_5 是综合属性值被支配方案，应当删除，得到非被支配方案集 $\overline{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$. 与决策者交互，不妨设决策者认为 x_2 优于 x_1 和 x_3，因此 x_2 即为最优方案.

第 3 篇

语言型多属性决策方法及应用

属性权重信息完全未知且属性值为语言的多属性决策方法及应用

第
7
章

由于客观事物的复杂性及人类思维的模糊性，人们在对诸如学生的综合素质、汽车的性能等进行评估时，一般喜欢直接用“优”、“良”或“差”等语言形式给出. 因此，对方案以语言形式进行评估的多属性决策问题的研究具有重要的理论意义和较高的实用价值. 本章将向读者介绍一些语言数据信息集结算子，如：广义的导出有序加权平均（GIOWA）算子、语言的有序加权平均（LOWA）算子、拓展的有序加权平均（EOWA）算子、拓展的加权算术平均（EWAA）算子和语言的混合集结（LHA）算子等. 同时，对于属性权重信息完全未知且属性值为语言的多属性决策问题，介绍一些基于上述算子的多属性决策方法，并给出了应用实例.

7.1　基于 GIOWA 算子的多属性决策方法

7.1.1　GIOWA 算子

定义 7.1[186]　设 $\hat{a}=[a^L, a^M, a^U]$，其中 $0<a^L\leqslant a^M\leqslant a^U$，称 $\hat{a}$ 为一个三角模糊数，其特征函数（隶属函数）可表示为

$$\mu_{\hat{a}}(x)=\begin{cases}(x-a^L)/(a^M-a^L), & a^L\leqslant x\leqslant a^M,\\ (x-a^U)/(a^M-a^U), & a^M\leqslant x\leqslant a^U,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

为了方便起见，事先给出下列有关三角模糊数的两种运算法则：

(1) $\hat{a}+\hat{b}=[a^L,a^M,a^U]+[b^L,b^M,b^U]=[a^L+b^L,a^M+b^M,a^U+b^U]$,

(2) $\beta\hat{a}=[\beta a^L,\beta a^M,\beta a^U]$,其中 $\beta\geqslant 0$.

定义 7.2[294] 称 IOWA 为导出的有序加权平均(IOWA)算子,若

$$\mathrm{IOWA}_w(\langle\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\pi_n,\alpha_n\rangle)=\sum_{j=1}^n w_j b_j,$$

其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是与 IOWA 相关联的加权向量,$w_j\in[0,1](j\in N)$,$\sum_{j=1}^n w_j=1$. $\langle\pi_i,\alpha_i\rangle$ 为 OWA 对,b_j 是 $\pi_i(i\in N)$ 中第 j 大的元素所对应的 OWA 对中的第二个分量,并且称 $\langle\pi_i,\alpha_i\rangle$ 中的第一个分量 π_i 为诱导分量,α_i 为数值分量.

下面介绍一种具有更广泛意义上的 IOWA 算子.

定义 7.3[241] 若

$$\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)=\sum_{j=1}^n w_j b_j,$$

其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是与 GIOWA 相关联的加权向量,$w_j\in[0,1](j\in N)$,$\sum_{j=1}^n w_j=1$,$\langle\xi_i,\pi_i,\alpha_i\rangle$ 是一个三元数据,其第一个分量 ξ_i 表示第二个分量 π_i 的重要性程度或特性,第二个分量 π_i 是第三个分量 α_i 的主体,且 b_j 是 $\xi_i(i\in N)$ 中第 j 大的元素所对应的三元数据中的第三个分量(即 b_j 通过下述方式获得:首先对数据组中的所有三元数据按其第一个分量 $\xi_i(i\in N)$ 的大小进行排序,然后取 b_j 为排在第 j 个位置上的三元数据中的第三个分量),则称函数 GIOWA 是广义的 IOWA 算子(或称 GIOWA 算子).

GIOWA 算子的特点是:数据 $\langle\xi_i,\pi_i,\alpha_i\rangle$ 与 w_i 没有任何联系,w_i 只与集结过程中顺序的第 i 个位置有关,对元素 $\alpha_i(i\in N)$ 加权集结时并不是按其本身值大小,而是基于 $\langle\xi_i,\pi_i,\alpha_i\rangle$ 中与 α_i 相对应的 $\xi_i(i\in N)$ 的值. π_i 一般为问题的属性,用语言或数值来表示;ξ_i 一般为 π_i 的重要程度、特性等(如权重、序号、成绩等),用数值或语言来表示;α_i 一般为属性值或其他表征 α_i 的量,用数值表示(如实数、区间数、三角模糊数等).

例 7.1 考虑下列三元数据组 $\langle\xi_i,\pi_i,\alpha_i\rangle(i=1,2,3,4)$:〈No. 2,Johnson,160〉,〈No. 1,Brown, 70〉,〈No. 4, Smith, 20〉,〈No. 3, Anderson,100〉. 利用加权向量 $w=(0.1,0.2,0.3,0.4)$ 对它们进行集结. 首先根据 $\xi_i(i=1,2,3,4)$ 所给出的序号对上述四个三元数据进行排序,由于 $\xi_2>\xi_1>\xi_4>\xi_3$,故为〈No. 1,Brown,70〉,〈No. 2,Johnson,160〉,〈No. 3,Anderson,100〉,〈No. 4,Smith,20〉. 因此

$$b_1=\alpha_2=70, b_2=\alpha_1=160, b_3=\alpha_4=100, b_4=\alpha_3=20,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\langle\xi_2,\pi_2,\alpha_2\rangle,\langle\xi_3,\pi_3,\alpha_3\rangle,\langle\xi_4,\pi_4,\alpha_4\rangle)\\
&=\mathrm{GIOWA}_w(\langle\text{No. 2},\text{Johnson},160\rangle,\langle\text{No. 1},\text{Brown},70\rangle,\\
&\quad\langle\text{No. 4},\text{Smith},20\rangle,\langle\text{No. 3},\text{Anderson},100\rangle)\\
&=0.1\times70+0.2\times160+0.3\times100+0.4\times20=77.
\end{aligned}$$

特别地,对于两个三元数据:$\langle\xi_i,\pi_i,\alpha_i\rangle$和$\langle\xi_j,\pi_j,\alpha_j\rangle$,若 $\xi_i=\xi_j$,则在集结过程中把 α_i 和 α_j 平均,得到相应的三元数据$\left\langle\xi_i,\pi_i,\dfrac{\alpha_i+\alpha_j}{2}\right\rangle$和$\left\langle\xi_j,\pi_j,\dfrac{\alpha_i+\alpha_j}{2}\right\rangle$. 类似地,可解决 3 个或 3 个以上三元数据中第一个分量均相等的情形.

类似 1.1 节中的定理证明,GIOWA 算子具有下列性质[241]:

定理 7.1(置换不变性)　设$(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)$是任一数据向量,$(\langle\xi_1',\pi_1',\alpha_1'\rangle,\cdots,\langle\xi_n',\pi_n',\alpha_n'\rangle)$是$(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)$的任一置换,则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)\\
&=\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1',\pi_1',\alpha_1'\rangle,\cdots,\langle\xi_n',\pi_n',\alpha_n'\rangle).
\end{aligned}$$

定理 7.2(幂等性)　设$(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)$是任一数据向量,若对任意 $i\in N$,有 $\alpha_i=\alpha$,则 $\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)=\alpha$.

定理 7.3(单调性)　设$(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)$和$(\langle\xi_1,\pi_1,\bar\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\bar\alpha_n\rangle)$是两个数据向量,若对任意 $i\in N$,有 $\alpha_i\leqslant\bar\alpha_i$,则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)\\
&\leqslant\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\bar\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\bar\alpha_n\rangle).
\end{aligned}$$

定理 7.4(介值性)　GIOWA 算子介于 max 算子和 min 算子之间,即

$$\min_i(\alpha_i)\leqslant\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\pi_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)\leqslant\max_i(\alpha_i).$$

定理 7.5　若 $w=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n}\right)$,则相应的 GIOWA 算子为算术平均算子,即

$$\mathrm{GIOWA}_w(\langle\xi_1,\rho_1,\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\xi_n,\pi_n,\alpha_n\rangle)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\alpha_i.$$

定理 7.6　若对任意 $i\in N$,有 $\xi_i=\alpha_i$,则 GIOWA 算子即为 OWA 算子,即 OWA 算子是 GIOWA 算子的一个特例.

定理 7.7　若对任意 $i\in N$,有 $\pi_i=\xi_i$,则 GIOWA 算子为 IOWA 算子,即 IOWA 算子是 GIOWA 算子的一个特例.

7.1.2 基于 GIOWA 算子的多属性决策方法[241]

1. 对于只有单个决策者的情形

步骤 1 对于某一多属性决策问题，设 X 和 U 分别为方案集和属性集. 决策者给出方案 $x_i \in X$ 在属性 $u_j \in U$ 下的语言评估 r_{ij}，并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$，且 $r_{ij}\in S$，其中

$S=\{$极差，很差，差，较差，一般，较好，好，很好，极好$\}$

为语言标度. 与该标度相对应的三角模糊数表达形式为

极差$=[0,0.1,0.2]$；很差$=[0.1,0.2,0.3]$；差$=[0.2,0.3,0.4]$；

较差$=[0.3,0.4,0.5]$；一般$=[0.4,0.5,0.6]$；较好$=[0.5,0.6,0.7]$；

好$=[0.6,0.7,0.8]$；很好$=[0.7,0.8,0.9]$；极好$=[0.8,0.9,1]$.

其中， 极好$>$很好$>$好$>$较好$>$一般$>$较差$>$差$>$很差$>$极差.

步骤 2 利用 GIOWA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$：

$$z_i(\boldsymbol{w}) = \mathrm{GIOWA}_{\boldsymbol{w}}(\langle r_{i1},\pi_1,\hat{\alpha}_{i1}\rangle,\cdots,\langle r_{im},\pi_m,\hat{\alpha}_{im}\rangle) = \sum_{j=1}^{m} w_j b_{ij},$$

其中 $r_{ij}\in S$，$u_j\in U$，$\hat{\alpha}_{ij}$ 是与 r_{ij} 对应的三角模糊数，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 是 GIOWA 算子的加权向量，$w_j\in[0,1](j\in M)$，$\sum\limits_{j=1}^{m} w_j=1$，且 $\hat{b}_{ij}$ 是 $r_{il}(l\in M)$ 中第 j 大的元素所对应的三元数据中的第三个分量.

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$ 对方案进行排序和择优.

2. 对于多个决策者的情形

步骤 1 对于某一多属性决策问题，设 X，U 和 D 分别为方案集、属性集和决策者集. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$，并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$，且 $r_{ij}^{(k)}\in S$.

步骤 2 利用 GIOWA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$：

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})=\mathrm{GIOWA}_{\boldsymbol{w}}(\langle r_{i1}^{(k)},u_1,\hat{\alpha}_{i1}^{(k)}\rangle,\cdots,\langle r_{im}^{(k)},u_m,\hat{\alpha}_{im}^{(k)}\rangle)=\sum_{j=1}^{m} w_j b_{ij}^{(k)},$$

其中 $r_{ij}^{(k)}\in S$，$u_j\in U$，$\hat{\alpha}_{ij}^{(k)}$ 是与 $r_{ij}^{(k)}$ 对应的三角模糊数，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$ 是 GIOWA 的加权向量，$w_j\in[0,1](j\in M)$，$\sum\limits_{j=1}^{m} w_j=1$，且 $\hat{b}_{ij}^{(k)}$ 是 $r_{il}^{(k)}(l\in M)$ 中第 j

大的元素所对应的三元数据中的第三个分量.

步骤 3　再利用 GIOWA 算子对 t 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结,得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{w}')(i\in N)$:

$$\begin{aligned} z_i(\boldsymbol{w}') &= \mathrm{GIOWA}_{w'}(\langle z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}),d_1,\hat{\alpha}_i^{(1)}\rangle,\cdots,\langle z_i^{(t)}(\boldsymbol{w}),d_t,\hat{\alpha}_i^{(t)}\rangle) \\ &= \sum_{k=1}^{t} w_k' b_i^{(k)}, \end{aligned}$$

其中 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})\in S$, $d_k\in D$, $\hat{\alpha}_i^{(k)}$ 是与 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})$对应的三角模糊数, $\boldsymbol{w}'=(w_1',w_2',\cdots,w_t')$是 GIOWA 的加权向量, $w_k'\in[0,1](k=1,2,\cdots,t)$, $\sum_{k=1}^{t} w_k'=1$,且 $\hat{b}_i^{(k)}$ 是 $z_i^{(l)}(\boldsymbol{w})(l=1,2,\cdots,t)$中第 k 大的元素所对应的三元数据中的第三个分量.

步骤 4　利用 $z_i(\boldsymbol{w}')(i\in N)$对所有决策方案进行排序和择优.

7.1.3　实例分析

例 7.2　考虑某个风险投资公司进行高科技项目投资问题,有 4 个备选企业(方案)$x_i(i=1,2,3,4)$可供选择.从企业能力角度对企业进行评价,首先制定了 7 项评估指标(属性)[171]:u_1——销售能力;u_2——管理能力;u_3——生产能力;u_4——技术能力;u_5——资金能力;u_6——风险承担能力;u_7——企业战略一致性.现由 3 位决策者 $d_k(k=1,2,3)$对每个企业的各项指标进行评估,分别得到 3 个评估矩阵(见表 7.1～表 7.3).试确定最佳企业.

表 7.1　决策者 d_1 给出的评估矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	较好	很好	很好	一般	较好	好	好
x_2	很好	好	一般	好	很好	较好	较差
x_3	好	好	很好	较好	极好	很好	好
x_4	好	好	较差	较好	很好	较好	较好

表 7.2　决策者 d_2 给出的评估矩阵 $\boldsymbol{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	较好	好	很好	一般	好	好	极好
x_2	一般	较好	一般	较好	好	好	较好
x_3	很好	较好	好	好	极好	极好	较好
x_4	一般	较好	一般	较好	一般	较好	较差

表 7.3 决策者 d_3 给出的评估矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
x_1	一般	好	好	较好	很好	好	很好
x_2	好	较好	较好	好	一般	好	较差
x_3	好	较好	好	好	好	很好	好
x_4	一般	较好	较差	较好	一般	一般	较好

下面利用 7.1.2 节中的方法进行求解：

步骤 1 假设 $w=(0.2,0.1,0.15,0.2,0.1,0.15,0.1)$，利用 GIOWA 算子对评估矩阵 R_k 的第 i 行语言评估信息进行集结，得出决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估 $r_i^{(k)}(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$. 先求决策者 d_1 对各方案的综合属性评估信息. 因为

$$r_{11}^{(1)}=\text{较好},r_{12}^{(1)}=\text{很好},r_{13}^{(1)}=\text{很好},r_{14}^{(1)}=\text{一般},$$
$$r_{15}^{(1)}=\text{较好},r_{16}^{(1)}=\text{好},r_{17}^{(1)}=\text{好},$$

因此

$$r_{12}^{(1)}=r_{13}^{(1)}>r_{16}^{(1)}=r_{17}^{(1)}>r_{11}^{(1)}=r_{15}^{(1)}>r_{14}^{(1)}.$$

由 7.1.2 节中所给的语言标度可知：与 $r_{1j}^{(1)}(j=1,2,\cdots,7)$对应的三角模糊数分别为

$$\hat{\alpha}_{11}^{(1)}=[0.5,0.6,0.7],\hat{\alpha}_{12}^{(1)}=[0.7,0.8,0.9],\hat{\alpha}_{13}^{(1)}=[0.7,0.8,0.9],$$
$$\hat{\alpha}_{14}^{(1)}=[0.4,0.5,0.6],\hat{\alpha}_{15}^{(1)}=[0.5,0.6,0.7],\hat{\alpha}_{16}^{(1)}=[0.6,0.7,0.8],$$
$$\hat{\alpha}_{17}^{(1)}=[0.6,0.7,0.8],$$

所以

$$\hat{b}_{11}^{(1)}=\hat{b}_{12}^{(1)}=\hat{\alpha}_{12}^{(1)}=\hat{\alpha}_{13}^{(1)}=[0.7,0.8,0.9],$$
$$\hat{b}_{13}^{(1)}=\hat{b}_{14}^{(1)}=\hat{\alpha}_{16}^{(1)}=\hat{\alpha}_{17}^{(1)}=[0.6,0.7,0.8],$$
$$\hat{b}_{15}^{(1)}=\hat{b}_{16}^{(1)}=\hat{\alpha}_{11}^{(1)}=\hat{\alpha}_{15}^{(1)}=[0.5,0.6,0.7],$$
$$\hat{b}_{17}^{(1)}=\hat{\alpha}_{14}^{(1)}=[0.4,0.5,0.6],$$

因此利用 GIOWA 算子以及三角模糊数运算法则，得

$$z_1^{(1)}(w)=\mathrm{GIOWA}_w(\langle r_{11}^{(1)},u_1,\hat{\alpha}_{11}^{(1)}\rangle,\langle r_{12}^{(1)},u_2,\hat{\alpha}_{12}^{(1)}\rangle,\cdots,\langle r_{17}^{(1)},u_7,\hat{\alpha}_{17}^{(1)}\rangle)$$
$$=\sum_{j=1}^{7}w_j\hat{b}_{1j}^{(1)}=[0.6,0.7,0.8]=\text{好}.$$

类似地，可得 $z_2^{(1)}(w)=$好，$z_3^{(1)}(w)=$很好，$z_4^{(1)}(w)=$较好.

对于 d_2 和 d_3，有

$$z_1^{(2)}(w)=\text{好},z_2^{(2)}(w)=\text{较好},z_3^{(2)}(w)=\text{很好},z_4^{(2)}(w)=\text{一般},$$
$$z_1^{(3)}(w)=\text{好},z_2^{(3)}(w)=\text{较好},z_3^{(3)}(w)=\text{好},z_4^{(3)}(w)=\text{一般}.$$

步骤 2　假设 $w'=(0.3,0.5,0.2)$，再利用 GIOWA 算子把由 3 个决策者所获得的方案 x_i 的综合属性评估值 $z_i^{(k)}(w)(k=1,2,3)$ 进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $z_i(w')(i=1,2,3,4)$：

$$z_1(w') = \mathrm{GIOWA}_{w'}(\langle z_1^{(1)}(w),d_1,\hat{\alpha}_1^{(1)}\rangle,\langle z_1^{(2)}(w),d_2,\hat{\alpha}_1^{(2)}\rangle,\langle z_1^{(3)}(w),d_3,\hat{\alpha}_1^{(3)}\rangle) = \text{好},$$

$$z_2(w') = \mathrm{GIOWA}_{w'}(\langle z_2^{(1)}(w),d_1,\hat{\alpha}_2^{(1)}\rangle,\langle z_2^{(2)}(w),d_2,\hat{\alpha}_2^{(2)}\rangle,\langle z_2^{(3)}(w),d_3,\hat{\alpha}_2^{(3)}\rangle) = \text{较好},$$

$$z_3(w') = \mathrm{GIOWA}_{w'}(\langle z_3^{(1)}(w),d_1,\hat{\alpha}_3^{(1)}\rangle,\langle z_3^{(2)}(w),d_2,\hat{\alpha}_3^{(2)}\rangle,\langle z_3^{(3)}(w),d_3,\hat{\alpha}_3^{(3)}\rangle) = \text{很好},$$

$$z_4(w') = \mathrm{GIOWA}_{w'}(\langle z_4^{(1)}(w),d_4,\hat{\alpha}_4^{(1)}\rangle,\langle z_4^{(2)}(w),d_4,\hat{\alpha}_4^{(2)}\rangle,\langle z_4^{(3)}(w),d_4,\hat{\alpha}_4^{(3)}\rangle) = \text{一般}.$$

步骤 3　利用 $z_i(w')(i=1,2,3,4)$ 对各方案进行排序，得

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4,$$

故最佳企业为 x_3.

7.2　基于 LOWA 算子的多属性决策方法

7.2.1　决策方法

定义 7.4[226]　设 LOWA：$S^n \to S$，若

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \max_j \min(w_j,b_j),$$

其中 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是与 LOWA 相关联的加权向量，$w_j \in S(j\in N)$，且 b_j 是一组语言数据 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 中第 j 大的元素，则称 LOWA 是语言 OWA 算子（简称 LOWA），这里 S 为语言标度，如：

$$S=\{\text{极差},\text{很差},\text{差},\text{较差},\text{一般},\text{较好},\text{好},\text{很好},\text{极好}\}$$

或其他形式，如：$S=\{\text{很低},\text{低},\text{中},\text{高},\text{很高}\}$等. 在第 9 章中，将对 LOWA 算子的性质详细地进行介绍.

下面介绍一种基于 LOWA 算子的多属性决策方法[226].

1. 对于只有单个决策者的情形

步骤 1　对于某一多属性决策问题，决策者给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估值 r_{ij}，并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$，且 $r_{ij}\in S$.

步骤 2　利用 LOWA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集

结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$，其中

$$z_i(\boldsymbol{w}) = \max_j \min\{w_j, b_{ij}\}, \quad i \in N,$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是 LOWA 算子的加权向量，$w_j \in S(j\in M)$，b_{ij} 是 $(r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im})$ 中第 j 大的元素.

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$ 对方案进行排序和择优.

2. 对于多个决策者的情形

步骤 1 对于某一多属性决策问题，决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估 $r_{ij}^{(k)}$，并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$，且 $r_{ij}^{(k)}\in S$.

步骤 2 利用 LOWA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i\in N, k=1,2,\cdots,t)$，其中

$$\begin{aligned} z_i^{(k)}(\boldsymbol{w}) &= \mathrm{LOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \cdots, r_{im}^{(k)}) \\ &= \max_j \min\{w_j, b_{ij}^{(k)}\}, i\in N, \quad k=1,2,\cdots,t, \end{aligned}$$

$\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_m)$ 是与 LOWA 相关联的加权向量，$w_j\in S(j\in M)$，且 $\hat{b}_{ij}^{(k)}$ 是 $(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \cdots, r_{im}^{(k)})$ 中第 j 大的元素.

步骤 3 再利用 LOWA 算子对 t 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,\cdots,t)$ 进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估 $z_i(\boldsymbol{w}')(i\in N)$：

$$z_i(\boldsymbol{w}')=\mathrm{LOWA}_{\boldsymbol{w}'}(z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}), z_i^{(2)}(\boldsymbol{w}), \cdots, z_i^{(t)}(\boldsymbol{w}))=\max_k \min\{w'_k, b_i^{(k)}\}, \quad i\in N,$$

其中 $\boldsymbol{w}'=(w'_1, w'_2, \cdots, w'_t)$ 是 LOWA 算子的加权向量，$w'_k\in S(k=1,2,\cdots,t)$，且 $\hat{b}_i^{(k)}$ 是 $(z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}), z_i^{(2)}(\boldsymbol{w}), \cdots, z_i^{(t)}(\boldsymbol{w}))$ 中第 j 大的元素.

步骤 4 利用 $z_i(\boldsymbol{w}')(i\in N)$ 对方案进行排序和择优.

7.2.2 实例分析

例 7.3 火力配系是对参战的各种火器作适当配置和分工构成火力系统. 坦克分队火力配系是防御战斗中分队指挥员实施火力指标的重要内容. 火力配系方案的优劣对能否达成作战目的、提高防御的稳定性、有效地杀伤敌人和保护自己具有重要的意义. 我坦克第三连于肖山地域组织防御，我指挥员有 4 个火力配系方案可供选择. 评估指标（属性）主要有[114]：u_1——利用地形隐蔽程度；u_2——降低敌机动性的程度；u_3——与障碍结合程度；u_4——相互火力协同程度；u_5——对空防御程度；u_6——与主要防御方向的接近程度；u_7——接近敌行动的程度；u_8——降低敌备优势程度. 现有 3 组评估数据（见表 7.4～表 7.6），问我指挥员如何选择火力配系方案？

表 7.4　决策矩阵 R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	高	很高	很高	中	高	高	很高	高
x_2	很高	高	中	高	很高	高	高	高
x_3	高	高	很高	中	很高	很高	高	很高
x_4	高	高	低	中	很高	中	高	高

表 7.5　决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	中	高	很高	中	高	很高	中	高
x_2	高	中	中	中	很高	高	很高	中
x_3	中	中	高	高	很高	很高	很高	高
x_4	中	中	中	中	很高	高	中	中

表 7.6　决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	中	高	高	中	很高	高	中	高
x_2	高	中	中	很高	高	中	很高	高
x_3	很高	高	高	高	很高	很高	高	很高
x_4	中	中	低	中	很高	高	中	中

利用 7.2.1 节中的方法进行求解.

步骤 1　设 w=(中,中,很高,高,很高,高,高,中),利用公式

$$z_i^{(k)}(w)=\mathrm{LOWA}_w(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{i8}^{(k)})$$
$$=\max_j\min\{w_j,b_{ij}^{(k)}\}(i=1,2,3,4,k=1,2,3),$$

对决策矩阵 R_k 的第 i 行的属性值进行集结,得到评估数据表 7.4～表 7.6 中各方案的综合评估值 $z_i^{(k)}(w)(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$:

$z_1^{(1)}(w)$ = 很高,$z_2^{(1)}(w)$ = 高,$z_3^{(1)}(w)$ = 很高,$z_4^{(1)}(w)$ = 高,

$z_1^{(2)}(w)$ = 高,$z_2^{(2)}(w)$ = 高,$z_3^{(2)}(w)$ = 很高,$z_4^{(2)}(w)$ = 中,

$z_1^{(3)}(w)$ = 高,$z_2^{(3)}(w)$ = 高,$z_3^{(3)}(w)$ = 很高,$z_4^{(3)}(w)$ = 中.

步骤 2　设 w'=(中,很高,高),利用 LOWA 算子

$$z_i(w')=\mathrm{LOWA}_{w'}(z_i^{(1)}(w),z_i^{(2)}(w),z_i^{(3)}(w)),i=1,2,3,4,$$

对评估数据表 7.4～表 7.6 中给出的各方案的综合评估值 $z_i^{(k)}(w)(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$进行集结,得到各方案的群体综合评估值 $z_i(w')(i=1,2,3,4)$:

$z_1(w')=$高，$z_2(w')=$高，$z_3(w')=$很高，$z_4(w')=$中.

步骤 3 利用 $z_i(w')(i=1,2,3,4)$ 对各方案进行排序，得

$$x_3 \succ x_1 x_2 \succ x_4,$$

故最佳方案为 x_3.

上述两种方法计算虽然简便、快捷，但结果较为粗略，易于遭成决策信息的丢失. 下面分别介绍一种既简洁、又不丢失任何决策信息的实用方法，即基于 EOWA 算子的多属性决策方法，以及基于 EOWA 算子和 LHA 算子的多属性群决策方法.

7.3 基于 EOWA 算子的多属性决策方法

7.3.1 EOWA 算子

考虑到决策者在进行定性测度时，一般需要适当的语言评估标度，为此，可事先设定语言评估标度 $S=\{s_\alpha \mid \alpha=-L,\cdots,L\}$，$S$ 中的术语个数一般为奇数，如语言评估标度可取

$$S=\{s_{-1},s_0,s_1\}=\{\text{低},\text{中},\text{高}\},$$

$$S=\{s_{-2},s_{-1},s_0,s_1,s_2\}=\{\text{很差},\text{差},\text{一般},\text{良},\text{优}\},$$

$S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差，很差，差，较差，稍差，一般，稍好，较好，好，很好，极好$\}$等，且满足下列条件：

(1) 若 $\alpha>\beta$，则 $s_\alpha>s_\beta$；

(2) 存在负算子 $\mathrm{neg}(s_\alpha)=s_{-\alpha}$.

为了便于计算和避免丢失决策信息，我们在原有标度 $S=\{s_\alpha \mid \alpha=-L,\cdots,L\}$ 的基础上定义一个拓展标度 $\bar{S}=\{s_\alpha \mid \alpha\in[-q,q]\}$，其中 $q(q>L)$ 是一个充分大的自然数，且若 $\alpha\in\{-L,\cdots,L\}$，则称 s_α 为本原术语；若 $\alpha\notin\{-L,\cdots,L\}$，则称 s_α 为拓展术语. 拓展后的标度仍满足条件(1)和(2).

注 7.1 一般地，决策者运用本原术语评估决策方案，而拓展术语只在运算和排序过程中出现.

下面定义语言评估标度的运算法则[249]：

定义 7.5 设 $s_\alpha,s_\beta\in\bar{S}$，$y,y_1,y_2\in[0,1]$，则

(1) $s_\alpha\oplus s_\beta=s_{\alpha+\beta}$；

(2) $s_\alpha\oplus s_\beta=s_\beta\oplus s_\alpha$；

(3) $ys_\alpha=s_{y\alpha}$；

(4) $y(s_\alpha\oplus s_\beta)=ys_\alpha\oplus ys_\beta$；

(5) $(y_1+y_2)s_\alpha=y_1 s_\alpha \oplus y_2 s_\alpha$.

定义 7.6[249]　设 EOWA: $\bar{S}^n \to \bar{S}$,若

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=w_1 s_{\beta_1}\oplus w_2 s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s_{\beta_n}=s_{\bar\beta}, \tag{7.1}$$

其中 $\bar\beta=\sum_{j=1}^{n} w_j\beta_j$, $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$**是与** EOWA **相关联的加权向量**, $w_j\in[0,1](j\in N)$, $\sum_{j=1}^{n} w_j=1$,**且** s_{β_j} **是一组语言数据**$(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})$**中第** j **大的元素,则称函数** EOWA **是扩展的有序加权平均**(EOWA)**算子**.

例 7.4　**假设** $w=(0.2,0.3,0.1,0.4)$,**则**

$\mathrm{EOWA}_w(s_2,s_3,s_1,s_{-1})=0.2\times s_3\oplus 0.3\times s_2\oplus 0.1\times s_1\oplus 0.4\times s_{-1}=s_{4.3}$.

EOWA **算子具有下列性质**[249].

定理 7.8(置换不变性)

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=\mathrm{EOWA}_w(\dot s_{\alpha_1},\dot s_{\alpha_2},\cdots,\dot s_{\alpha_n}),$$

其中$(\dot s_{\alpha_1},\dot s_{\alpha_2},\cdots,\dot s_{\alpha_n})$**是语言数据组**$(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})$**的任一置换**.

证明　**设**

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n}) = w_1 s_{\beta_1}\oplus w_2 s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s_{\beta_n},$$
$$\mathrm{EOWA}_w(\dot s_{\alpha_1},\dot s_{\alpha_2},\cdots,\dot s_{\alpha_n}) = w_1 \dot s_{\beta_1}\oplus w_2 \dot s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n \dot s_{\beta_n}.$$

由于$(\dot s_{\alpha_1},\dot s_{\alpha_2},\cdots,\dot s_{\alpha_n})$**是语言数据组**$(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})$**的任一置换,因此** $s_{\beta_j}=\dot s_{\beta_j}(j\in N)$,**于是**

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=\mathrm{EOWA}_w(\dot s_{\alpha_1},\dot s_{\alpha_2},\cdots,\dot s_{\alpha_n}).$$

定理证毕.

定理 7.9(齐次性)　**若对任意** $j\in N$,**有** $s_{\alpha_j}=s_\alpha$,**则**

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=s_\alpha.$$

证明　**因为对任意** $j\in N$,**有** $s_{\alpha_j}=s_\alpha$,**于是**

$$\begin{aligned}\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n}) &= w_1 s_{\beta_1}\oplus w_2 s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s_{\beta_n}\\ &= w_1 s_\alpha\oplus w_2 s_\alpha\oplus\cdots\oplus w_n s_\alpha\\ &= (w_1+w_2+\cdots+w_n)s_\alpha\\ &= s_\alpha.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 7.10(单调性)　**若对任意** $i\in N$,**有** $s_{\alpha_i}\leqslant s'_{\alpha_i}$,**则**

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})\leqslant \mathrm{EOWA}_w(s'_{\alpha_1},s'_{\alpha_2},\cdots,s'_{\alpha_n}).$$

证明　**设**

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n}) = w_1 s_{\beta_1}\oplus w_2 s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s_{\beta_n},$$
$$\mathrm{EOWA}_w(s'_{\alpha_1},s'_{\alpha_2},\cdots,s'_{\alpha_n}) = w_1 s'_{\beta_1}\oplus w_2 s'_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s'_{\beta_n}.$$

由于对任意 $i\in N$，有 $s_{\alpha_i}\leqslant s'_{\alpha_i}$，则 $s_{\beta_i}\leqslant s'_{\beta_i}$，因此

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})\leqslant \mathrm{EOWA}_w(s'_{\alpha_1},s'_{\alpha_2},\cdots,s'_{\alpha_n}).$$

定理证毕.

定理 7.11（介值性）

$$\min_i(s_{\alpha_i})\leqslant \mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})\leqslant \max_i(s_{\alpha_i}).$$

证明 设 $\max\limits_i(s_{\alpha_i})=s_\beta$ 且 $\min\limits_i(s_{\alpha_i})=s_\alpha$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})&=w_1s_{\beta_1}\oplus w_2s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_ns_{\beta_n}\\&\leqslant w_1s_\beta\oplus w_2s_\beta\oplus\cdots\oplus w_ns_\beta\\&=(w_1+w_2+\cdots+w_n)s_\beta\\&=s_\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})&=w_1s_{\beta_1}\oplus w_2s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_ns_{\beta_n}\\&\geqslant w_1s_\alpha\oplus w_2s_\alpha\oplus\cdots\oplus w_ns_\alpha\\&=(w_1+w_2+\cdots+w_n)s_\alpha\\&=s_\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$\min_i(s_{\alpha_i})\leqslant \mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})\leqslant \max_i(s_{\alpha_i}),$$

定理证毕.

定理 7.12（EAA 算子） 若 $w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，则 EOWA 算子退化为 EAA 算子，即

$$\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=s_{\bar{\alpha}},$$

其中 $\bar{\alpha}=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j$.

证明 由于加权向量 $w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$，因此

$$\begin{aligned}\mathrm{EOWA}_w(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})&=w_1s_{\beta_1}\oplus w_2s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_ns_{\beta_n}\\&=\frac{1}{n}(s_{\beta_1}\oplus s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus s_{\beta_n})\\&=\frac{1}{n}(s_{\alpha_1}\oplus s_{\alpha_2}\oplus\cdots\oplus s_{\alpha_n})\\&=s_{\bar{\alpha}}.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 7.13 若 $w=(1,0,\cdots,0)$，则 EOWA 算子退化为 max 算子，即

$$\text{EOWA}_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = \max_i(s_{\alpha_i}).$$

证明 因为 $w=(1,0,\cdots,0)$,故

$$\begin{aligned}\text{EOWA}_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) &= w_1 s_{\beta_1} \oplus w_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\beta_n} \\ &= s_{\beta_1} = \max_i(s_{\alpha_i}).\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 7.14 若 $w=(0,0,\cdots,1)$,则 EOWA 算子退化为 min 算子,即

$$\text{EOWA}_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = \min_i(s_{\alpha_i}).$$

证明 因为 $w=(0,0,\cdots,1)$,故

$$\begin{aligned}\text{EOWA}_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) &= w_1 s_{\beta_1} \oplus w_2 s_{\beta_2} \oplus \cdots \oplus w_n s_{\beta_n} \\ &= s_{\beta_n} = \min_i(s_{\alpha_i}).\end{aligned}$$

定理证毕.

更一般地,我们有:若 $w_j=1, w_i=0$,且 $i\neq j$,则 $\text{EOWA}_w(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n})=s_{\beta_j}$,其中 s_{β_j} 是数据组$(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n})$中第 j 大的元素.

7.3.2 决策方法

下面介绍一种基于 EOWA 算子的多属性决策方法. 具体步骤如下[249]:

步骤 1 对于多属性决策问题,决策者给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估 r_{ij},并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$,且 $r_{ij}\in S$.

步骤 2 利用 EOWA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$,其中

$$z_i(\boldsymbol{w}) = \text{EOWA}_w(r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}).$$

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$对所有决策方案进行排序和择优.

7.3.3 实例分析

例 7.5 对某经济特区 4 个企业的知识管理绩效的大小进行评估. 主要评价指标(属性)为[90]: u_1——顾客赢利性;u_2——顾客满意度;u_3——大顾客比例;u_4——单位顾客销售额;u_5——重复订单比例和忠诚顾客比例;u_6——内部结构投资额;u_7——信息技术投资额;u_8——支持员工比例;u_9——员工周转率;u_{10}——支持员工资历和洛奇比例;u_{11}——知识员工工龄;u_{12}——员工受教育程度;u_{13}——知识员工比例;u_{14}——知识员工人均利润;u_{15}——知识员工资历. 语言评估标度为 $S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差,很差,差,较差,稍差,一般,稍好,较好,好,很好,极好$\}$. 有关原始资料如表 7.7 所示.

表 7.7　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_2	s_0	s_0	s_0	s_3	s_3	s_4
x_2	s_3	s_0	s_{-2}	s_0	s_3	s_4	s_3	s_2
x_3	s_2	s_3	s_4	s_4	s_2	s_2	s_2	s_3
x_4	s_4	s_3	s_3	s_0	s_3	s_0	s_3	s_3
x_5	s_2	s_2	s_0	s_0	s_0	s_3	s_3	s_4

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_0	s_0	s_2	s_2	s_0	s_{-1}
x_2	s_{-1}	s_0	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_0	s_0
x_3	s_2	s_0	s_{-1}	s_3	s_2	s_2	s_2
x_4	s_0	s_3	s_0	s_2	s_0	s_3	s_2
x_5	s_2	s_0	s_0	s_2	s_2	s_0	s_{-1}

利用 EOWA 算子(假设 $w=(0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.16,0.09,0.08,0.07,0.06,0.05,0.04,0.03)$)对评估矩阵 R 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策方案 x_i 综合属性评估值.

$$\begin{aligned} z_1(w)=&0.03\times s_4\oplus 0.04\times s_3\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.06\times s_2\oplus 0.07\times s_2\oplus 0.08\times s_2\oplus\\ &0.09\times s_2\oplus 0.16\times s_2\oplus 0.09\times s_0\oplus 0.08\times s_0\oplus 0.07\times s_0\oplus\\ &0.06\times s_0\oplus 0.05\times s_0\oplus 0.04\times s_0\oplus 0.03\times s_{-1}=s_{1.28}\\ z_2(w)=&0.03\times s_4\oplus 0.04\times s_3\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.06\times s_3\oplus 0.07\times s_2\oplus 0.08\times s_0\oplus\\ &0.09\times s_0\oplus 0.16\times s_0\oplus 0.09\times s_0\oplus 0.08\times s_0\oplus 0.07\times s_0\oplus\\ &0.06\times s_{-1}\oplus 0.05\times s_{-1}\oplus 0.04\times s_{-1}\oplus 0.03\times s_{-2}=s_{0.62}\\ z_3(w)=&0.03\times s_4\oplus 0.04\times s_4\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.06\times s_3\oplus 0.07\times s_3\oplus 0.08\times s_2\oplus\\ &0.09\times s_2\oplus 0.16\times s_2\oplus 0.09\times s_2\oplus 0.08\times s_2\oplus 0.07\times s_2\oplus\\ &0.06\times s_2\oplus 0.05\times s_2\oplus 0.04\times s_0\oplus 0.03\times s_{-1}=s_{2.05}\\ z_4(w)=&0.03\times s_4\oplus 0.04\times s_3\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.06\times s_3\oplus 0.07\times s_3\oplus 0.08\times s_3\oplus\\ &0.09\times s_3\oplus 0.16\times s_3\oplus 0.09\times s_2\oplus 0.08\times s_2\oplus 0.07\times s_0\oplus\\ &0.06\times s_0\oplus 0.05\times s_0\oplus 0.04\times s_0\oplus 0.03\times s_0=s_{2.11} \end{aligned}$$

利用 $z_i(w)(i=1,2,3,4)$对所有决策方案进行排序,可得

$$x_4\succ x_3\succ x_1\succ x_2,$$

故最优方案为 x_4.

7.4　基于 EOWA 算子和 LHA 算子的多属性群决策方法

7.4.1　EWAA 算子

定义 7.7[249]　设 EWAA：$\bar{S}^n \to \bar{S}$，如果

$$\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = \omega_1 s_{\alpha_1} \oplus \omega_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\alpha_n} = s_{\bar{\alpha}}, \qquad (7.2)$$

其中 $\bar{\alpha} = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \alpha_j$，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ 是语言数据 $s_{\alpha_j}(j \in N)$ 的加权向量，且 $s_{\alpha_j} \in \bar{S}$，$\omega_j \in [0,1](j \in N)$，$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$，则函数 EWAA 称为扩展的加权算术平均(EWAA)算子.

特别地，若 $\omega = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$，则函数 EWAA 称为扩展的算术平均(EAA)算子.

例 7.6　假定 $\boldsymbol{\omega} = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_2, s_3, s_1, s_{-1}) &= 0.2 \times s_2 \oplus 0.3 \times s_3 \oplus 0.1 \times s_1 \oplus 0.4 \times s_{-1} \\ &= s_1.\end{aligned}$$

EWAA 算子具有下列性质[249].

定理 7.15(介值性)

$$\min_i(s_{\alpha_i}) \leqslant \mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) \leqslant \max_i(s_{\alpha_i}).$$

证明　设 $\max_i(s_{\alpha_i}) = s_\beta$，$\min_i(s_{\alpha_i}) = s_\alpha$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\alpha_1} \oplus \omega_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\alpha_n} \\ &\leqslant \omega_1 s_\beta \oplus \omega_2 s_\beta \oplus \cdots \oplus \omega_n s_\beta \\ &= s_\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) &= \omega_1 s_{\alpha_1} \oplus \omega_2 s_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \omega_n s_{\alpha_n} \\ &\geqslant \omega_1 s_\alpha \oplus \omega_2 s_\alpha \oplus \cdots \oplus \omega_n s_\alpha \\ &= s_\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$\min_i(s_{\alpha_i}) \leqslant \mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) \leqslant \max_i(s_{\alpha_i}).$$

定理证毕.

定理 7.16(齐次性)　若对任意 $j \in N$，有 $s_{\alpha_j} = s_\alpha$，则

$$\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots, s_{\alpha_n}) = s_\alpha.$$

证明 因为对任意 $j\in N$,有 $s_{\alpha_j}=s_\alpha$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})&=\omega_1 s_{\alpha_1}\oplus\omega_2 s_{\alpha_2}\oplus\cdots\oplus\omega_n s_{\alpha_n}\\&=\omega_1 s_\alpha\oplus\omega_2 s_\alpha\oplus\cdots\oplus\omega_n s_\alpha\\&=(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n)s_\alpha\\&=s_\alpha.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 7.17(单调性) 若对任意 $i\in N$,有 $s_{\alpha_i}\leqslant s'_{\alpha_i}$,则

$$\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})\leqslant\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s'_{\alpha_1},s'_{\alpha_2},\cdots,s'_{\alpha_n}).$$

证明 设

$$\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=\omega_1 s_{\alpha_1}\oplus\omega_2 s_{\alpha_2}\oplus\cdots\oplus\omega_n s_{\alpha_n},$$

$$\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s'_{\alpha_1},s'_{\alpha_2},\cdots,s'_{\alpha_n})=\omega_1 s'_{\alpha_1}\oplus\omega_2 s'_{\alpha_2}\oplus\cdots\oplus\omega_n s'_{\alpha_n}.$$

由于对任意 $i\in N$,有 $s_{\alpha_i}\leqslant s'_{\alpha_i}$,则

$$\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})\leqslant\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(s'_{\alpha_1},s'_{\alpha_2},\cdots,s'_{\alpha_n}).$$

定理证毕.

从定义 7.5 和定义 7.6 可知:一方面,EOWA 算子只对语言数据所在的位置进行加权,另一方面,EWAA 算子只对语言数据本身进行加权.因此 EOWA 算子和 EWAA 算子均具有一定的片面性.为克服此缺点,下面介绍一个语言混合集结(LHA)算子.

7.4.2 LHA 算子

定义 7.8 设 LHA: $\bar{S}^n\to\bar{S}$,若

$$\mathrm{LHA}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{w}}(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})=w_1 s_{\beta_1}\oplus w_2 s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s_{\beta_n},$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 是与 LHA 相关联的加权向量(位置向量),$w_j\in[0,1]$ $(j\in N)$, $\sum_{j=1}^n w_j=1$. s_{β_j} 是加权数据组$(\bar{s}_{\alpha_1},\bar{s}_{\alpha_2},\cdots,\bar{s}_{\alpha_n})$中第 j 大的元素,这里 $\bar{s}_{\alpha_i}=n\omega_i s_{\alpha_i}$ $(i\in N)$,$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是数据组 s_{α_i} $(i\in N)$的加权向量,$\omega_j\in[0,1]$ $(j\in N)$, $\sum_{j=1}^n\omega_j=1$,且 n 是平衡因子.

例 7.7 设 $s_{\alpha_1}=s_2,s_{\alpha_2}=s_3,s_{\alpha_3}=s_1,s_{\alpha_4}=s_{-1}$ 为一组语言数据,$\boldsymbol{\omega}=(0.2,0.3,0.1,0.4)$为其加权向量,$\boldsymbol{w}=(0.2,0.3,0.1,0.4)$是 LHA 算子的加权向量.根据定义 7.7 计算可得

$$\bar{s}_{\alpha_1}=4\times0.2\times s_2=s_{1.6},\bar{s}_{\alpha_2}=4\times0.3\times s_3=s_{3.6},$$

$$\bar{s}_{\alpha_3}=4\times0.1\times s_1=s_{0.4},\bar{s}_{\alpha_4}=4\times0.4\times s_{-1}=s_{-1.6},$$

因此

$$s_{\beta_1}=s_{3.6},s_{\beta_2}=s_{1.6},s_{\beta_3}=s_{0.4},s_{\beta_4}=s_{-1.6},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{LHA}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{w}}(s_2,s_3,s_1,s_{-1})&=0.2\times s_{3.6}\oplus 0.3\times s_{1.6}\oplus 0.1\times s_{0.4}\oplus 0.4\times s_{-1.6}\\&=s_{0.6}.\end{aligned}$$

定理 7.18　EWAA 算子是 LHA 算子的一个特例.

证明　设 $w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$,因此

$$\begin{aligned}\mathrm{LHA}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{w}}(s_{\alpha_1},s_{\alpha_2},\cdots,s_{\alpha_n})&=w_1 s_{\beta_1}\oplus w_2 s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus w_n s_{\beta_n}\\&=\frac{1}{n}(s_{\beta_1}\oplus s_{\beta_2}\oplus\cdots\oplus s_{\beta_n})\\&=\omega_1 s_{\alpha_1}\oplus\omega_2 s_{\alpha_2}\oplus\cdots\oplus\omega_n s_{\alpha_n}\\&=s_{\bar{\alpha}},\end{aligned}$$

其中 $\bar{\alpha}=\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j\alpha_j$. 定理证毕.

定理 7.19　EOWA 算子是 LHA 算子的一个特例.

证明　设 $\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$,则 $\bar{s}_{\alpha_i}=s_{\alpha_i}(i\in N)$. 定理得证.

从定理 7.18 和定理 7.19 可知,LHA 算子同时推广了 EWAA 算子和 EOWA 算子,它不仅体现了数据本身的重要性程度,而且还反映了数据所在位置的重要性程度.

7.4.3　决策方法

下面介绍一种基于 EOWA 算子和 LHA 算子的多属性决策方法[249]. 具体步骤如下:

步骤 1　对于多属性决策问题,属性权重信息完全未知. t 位决策者的权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$,$\lambda_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,t)$,$\sum\limits_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$,并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,且 $r_{ij}^{(k)}\in S$.

步骤 2　利用 EOWA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$:

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})=\mathrm{EOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)}),\quad i\in N,k=1,2,\cdots,t.$$

步骤 3　再利用 LHA 算子对 t 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评

估 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i\in N, k=1,2,\cdots,t)$进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估 $z_i(\boldsymbol{w}')(i\in N)$，其中

$$\begin{aligned} z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') &= \mathrm{LHA}_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}'}(z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}), z_i^{(2)}(\boldsymbol{w}), \cdots, z_i^{(t)}(\boldsymbol{w})) \\ &= w_1' b_i^{(1)} \oplus w_2' b_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus w_t' b_i^{(t)}, \quad i\in N, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{w}'=(w_1', w_2', \cdots, w_t')$是 LHA 算子的加权向量，$w_k'\in[0,1](k=1,2,\cdots,t)$，$\sum_{k=1}^{t} w_k'=1$，$b_i^{(k)}$ 是一组加权数据$(t\lambda_1 z_i^{(1)}(\boldsymbol{w}), t\lambda_2 z_i^{(2)}(\boldsymbol{w}), \cdots, t\lambda_t z_i^{(t)}(\boldsymbol{w}))$中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 4 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')(i\in N)$对所有决策方案进行排序和择优.

7.4.4 实例分析

例 7.8 本例用例 7.4 对 7.4.3 节中的方法进行说明. 假设有关原始资料来源于 3 位决策者所给出的语言评估矩阵(如表 7.8～表 7.10 所示)，并假定其权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(0.3, 0.4, 0.3)$. 试确定最佳方案.

表 7.8 决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_1	s_2	s_{-1}	s_0	s_0	s_4	s_3	s_4
x_2	s_3	s_0	s_{-2}	s_1	s_3	s_4	s_4	s_0
x_3	s_2	s_3	s_4	s_3	s_2	s_2	s_4	s_3
x_4	s_4	s_3	s_4	s_0	s_3	s_0	s_2	s_3

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_1	s_0	s_2	s_3	s_0	s_{-1}
x_2	s_{-1}	s_0	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_0	s_1
x_3	s_2	s_1	s_0	s_3	s_2	s_3	s_2
x_4	s_0	s_4	s_0	s_2	s_{-1}	s_3	s_2

表 7.9 决策矩阵 $\boldsymbol{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_3	s_1	s_{-1}	s_0	s_1	s_3	s_2	s_3
x_2	s_4	s_0	s_{-2}	s_1	s_3	s_4	s_3	s_3
x_3	s_2	s_3	s_4	s_3	s_2	s_4	s_2	s_3
x_4	s_4	s_2	s_3	s_0	s_2	s_0	s_3	s_4

续表

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_0	s_1	s_2	s_3	s_0	s_{-2}
x_2	s_{-1}	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_0	s_0	s_1
x_3	s_3	s_0	s_{-1}	s_3	s_4	s_2	s_3
x_4	s_0	s_3	s_1	s_2	s_0	s_4	s_0

表 7.10　决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_4	s_0	s_0	s_2	s_3	s_2	s_4
x_2	s_3	s_0	s_0	s_0	s_3	s_4	s_3	s_4
x_3	s_2	s_2	s_4	s_3	s_2	s_1	s_2	s_3
x_4	s_4	s_3	s_4	s_0	s_3	s_1	s_3	s_3

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
x_1	s_2	s_0	s_0	s_3	s_2	s_0	s_{-2}
x_2	s_{-1}	s_0	s_1	s_{-1}	s_0	s_0	s_0
x_3	s_3	s_0	s_{-1}	s_3	s_1	s_2	s_4
x_4	s_{-2}	s_3	s_2	s_2	s_2	s_3	s_2

利用 7.4.3 **节中方法的求解过程如下：**

步骤 1　利用 EOWA **算子(假设** $\boldsymbol{w}=(0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.16,0.09,0.08,0.07,0.06,0.05,0.04,0.03)$**)对评估矩阵** $\boldsymbol{R}_k$ **中第** i **行的语言评估信息进行集结，得到决策者** d_k **给出的决策方案** x_i **综合属性评估值** $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$：

$$z_1^{(1)}(\boldsymbol{w})=0.03\times s_4\oplus 0.04\times s_4\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.06\times s_3\oplus 0.07\times s_2\oplus 0.08\times s_2\oplus 0.09\times s_2\oplus 0.16\times s_1\oplus 0.09\times s_1\oplus 0.08\times s_0\oplus 0.07\times s_0\oplus 0.06\times s_0\oplus 0.05\times s_0\oplus 0.04\times s_{-1}\oplus 0.03\times s_{-1}=s_{1.27},$$

类似地，有

$$z_2^{(1)}(\boldsymbol{w})=s_{0.55},z_3^{(1)}(\boldsymbol{w})=s_{2.39},z_4^{(1)}(\boldsymbol{w})=s_{2.01},$$
$$z_1^{(2)}(\boldsymbol{w})=s_{1.25},z_2^{(2)}(\boldsymbol{w})=s_{0.78},z_3^{(2)}(\boldsymbol{w})=s_{2.62},$$
$$z_4^{(2)}(\boldsymbol{w})=s_{1.87},z_1^{(3)}(\boldsymbol{w})=s_{1.53},z_2^{(3)}(\boldsymbol{w})=s_{0.83},$$
$$z_3^{(3)}(\boldsymbol{w})=s_{2.12},z_4^{(3)}(\boldsymbol{w})=s_{2.40}.$$

步骤 2　再利用 LHA **算子(假定** $\boldsymbol{w}'=(0.2,0.6,0.2)$**)对** 3 **位决策者给出的决策方案** x_i **的综合属性评估值** $z_i^{(k)}(w)(k=1,2,3)$**进行集结. 首先利用** $\boldsymbol{\lambda}$，t **以及**

$z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$，求解 $t\lambda_k z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$，得

$$3\lambda_1 z_1^{(1)}(\boldsymbol{w}) = s_{1.143},3\lambda_1 z_2^{(1)}(\boldsymbol{w}) = s_{0.495},3\lambda_1 z_3^{(1)}(\boldsymbol{w}) = s_{2.151},$$
$$3\lambda_1 z_4^{(1)}(\boldsymbol{w}) = s_{1.809},3\lambda_2 z_1^{(2)}(\boldsymbol{w}) = s_{1.500},3\lambda_2 z_2^{(2)}(\boldsymbol{w}) = s_{0.936},$$
$$3\lambda_2 z_3^{(2)}(\boldsymbol{w}) = s_{3.144},3\lambda_2 z_4^{(2)}(\boldsymbol{w}) = s_{2.244},3\lambda_3 z_1^{(3)}(\boldsymbol{w}) = s_{1.377},$$
$$3\lambda_3 z_2^{(3)}(\boldsymbol{w}) = s_{0.747},3\lambda_3 z_3^{(3)}(\boldsymbol{w}) = s_{1.908},3\lambda_3 z_4^{(3)}(\boldsymbol{w}) = s_{2.160}.$$

因此可求方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$：

$$z_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}') = 0.2\times s_{1.500} \oplus 0.6\times s_{1.143} \oplus 0.2\times s_{1.377} = s_{1.4040},$$
$$z_2(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}') = 0.2\times s_{0.936} \oplus 0.6\times s_{0.747} \oplus 0.2\times s_{0.495} = s_{0.7344},$$
$$z_3(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}') = 0.2\times s_{3.144} \oplus 0.6\times s_{2.151} \oplus 0.2\times s_{1.908} = s_{2.3010},$$
$$z_4(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}') = 0.2\times s_{2.244} \oplus 0.6\times s_{2.160} \oplus 0.2\times s_{1.809} = s_{2.1066}.$$

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$ 对方案进行排序

$$x_3 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_2,$$

故最优方案为 x_3.

属性权重为实数且属性值为语言的多属性决策方法及应用

第
8
章

对于属性权重确知(即为实数),且决策者以语言形式给出属性值的多属性决策问题,本章将分别介绍基于 EWAA 算子的多属性决策方法,以及基于 EWAA 算子和 LHA 算子的多属性群决策方法,并且把它们应用于解决企业的管理信息系统评估问题.

8.1 基于 EWAA 算子的多属性决策方法

下面介绍一种基于 EWAA 算子的多属性决策方法. 具体步骤如下:

步骤 1 对于某一多属决策问题,设 X 和 U 分别为方案集和属性集. 决策者给出方案 $x_i \in X$ 在属性 $u_j \in U$ 下的语言评估值 r_{ij},并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$,且 $r_{ij}\in S$.

步骤 2 利用 EWAA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$:

$$\begin{aligned}z_i(\boldsymbol{\omega}) &= \mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}) \\ &= \omega_1 r_{i1} \oplus \omega_2 r_{i2} \oplus \cdots \oplus \omega_m r_{im}, \quad i \in N,\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$为属性的权重向量.

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$值对方案 $x_i(i\in N)$进行排序和择优.

8.2 实例分析

例 8.1 管理信息系统的评价指标(属性)主要包括以下 15 个[60]:

(1) 领导支持 u_1：管理信息系统主管领导对系统的建设、运行维护的支持是保证系统建设成功的极为重要的因素，也是系统正常运行、产生效益的重要因素.

(2) 先进性 u_2：所建管理信息系统在总体上是先进的，且能产生较大效益的，而且具有较长的生命周期.

(3) 可维护性 u_3：这是很重要的一个指标，系统的维护、扩充以及修改是经常的，如果系统可维护性差，则系统的生命力就差.

(4) 资源利用情况 u_4：管理信息系统集中了许多高附加值的设备(硬、软件及其构成的系统)以及信息和人力资源，这三大资源中最重要的是信息的利用. 信息资源的利用程度也是一个重要的指标.

(5) 安全可靠 u_5：管理信息系统的系统资源和信息资源不受自然和人为有害因素的威胁和危害.

(6) 经济性 u_6：用户使用管理信息系统费用的大小.

(7) 及时性 u_7：对管理信息系统用户来说，信息的及时提供并能使用是用户极为关心的事情.

(8) 友好性 u_8：用户使用管理信息系统很方便，人机界面良好.

(9) 实用性 u_9：管理信息系统的实际使用在日常事物中对决策和管理的支持.

(10) 服务程度 u_{10}：这里主要是指对各级管理人员和决策者的服务程度.

(11) 共享性 u_{11}：本系统信息的共享程度.

(12) 引导性 u_{12}：示范引导的意思，某一管理信息系统的建设应对围歼系统产生示范引导作用.

(13) 重要性 u_{13}：管理信息系统对外部环境影响的大小.

(14) 效益性 u_{14}：管理信息系统对外部社会效益和经济效益.

(15) 信息量 u_{15}：管理信息系统对社会提供的信息量大小.

下面应用上述评价指标(属性)对某 4 个企业的管理信息系统进行评价. 假定语言评估标度为

$S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差，很差，差，较差，稍差，一般，稍好，较好，好，很好，极好$\}$. 有关原始资料如表 8.1 所示. 已知属性的权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.07,0.08,0.06,0.05,0.09,0.07,0.04,0.06,0.05,0.08,\\0.09,0.06,0.04,0.09,0.07).$$

表 8.1　决策矩阵 R

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_3	s_1	s_0	s_2	s_0	s_4	s_4	s_4
x_2	s_3	s_2	s_1	s_1	s_3	s_2	s_3	s_2
x_3	s_2	s_3	s_4	s_3	s_2	s_2	s_4	s_3
x_4	s_2	s_3	s_4	s_0	s_3	s_1	s_3	s_4
	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_3	s_0	s_0	s_3	s_2	s_0	s_1	
x_2	s_1	s_0	s_0	s_{-1}	s_{-1}	s_1	s_1	
x_3	s_2	s_0	s_0	s_3	s_4	s_2	s_0	
x_4	s_0	s_3	s_1	s_2	s_1	s_3	s_2	

利用 EWAA 算子对评估矩阵 R 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\omega)(i=1,2,3,4)$：

$$\begin{aligned}z_1(\boldsymbol{\omega})=&0.07\times s_3\oplus 0.08\times s_1\oplus 0.06\times s_0\oplus 0.05\times s_2\oplus 0.09\times s_0\oplus 0.07\times s_3\oplus\\&0.04\times s_4\oplus 0.06\times s_4\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.08\times s_0\oplus 0.09\times s_0\oplus\\&0.06\times s_3\oplus 0.04\times s_2\oplus 0.09\times s_0\oplus 0.07\times s_1=s_{1.48},\\z_2(\boldsymbol{\omega})=&0.07\times s_3\oplus 0.08\times s_2\oplus 0.06\times s_1\oplus 0.05\times s_1\oplus 0.09\times s_3\oplus 0.07\times s_2\oplus\\&0.04\times s_3\oplus 0.06\times s_2\oplus 0.05\times s_1\oplus 0.08\times s_0\oplus 0.09\times s_0\oplus\\&0.06\times s_{-1}\oplus 0.04\times s_{-1}\oplus 0.09\times s_1\oplus 0.07\times s_1=s_{1.24},\\z_3(\boldsymbol{\omega})=&0.07\times s_2\oplus 0.08\times s_3\oplus 0.06\times s_4\oplus 0.05\times s_3\oplus 0.09\times s_2\oplus 0.07\times s_2\oplus\\&0.04\times s_4\oplus 0.06\times s_3\oplus 0.05\times s_2\oplus 0.08\times s_0\oplus 0.09\times s_0\oplus\\&0.06\times s_3\oplus 0.04\times s_4\oplus 0.09\times s_2\oplus 0.07\times s_0=s_{2.05},\\z_4(\boldsymbol{\omega})=&0.03\times s_2\oplus 0.04\times s_3\oplus 0.05\times s_4\oplus 0.06\times s_0\oplus 0.07\times s_3\oplus 0.08\times s_1\oplus\\&0.09\times s_3\oplus 0.16\times s_4\oplus 0.09\times s_0\oplus 0.08\times s_3\oplus 0.07\times s_1\oplus\\&0.06\times s_2\oplus 0.05\times s_1\oplus 0.04\times s_3\oplus 0.03\times s_2=s_{2.22}.\end{aligned}$$

利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$ 对所有决策方案进行排序，得到

$$x_4\succ x_3\succ x_1\succ x_2,$$

故最优方案为 x_4.

8.3　基于 EWAA 算子和 LHA 算子的多属性群决策方法

下面介绍基于 EWAA 算子和 LHA 算子的多属性群决策方法，具体步骤如下：

步骤 1 对于某一多属性决策问题,属性权重的权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$,$\omega_j\geqslant 0(j\in M)$,$\sum_{j=1}^{m}\omega=1$. t 位决策者的权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$,$\lambda_k\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots,t)$,$\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$,并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,且 $r_{ij}^{(k)}\in S$.

步骤 2 利用 EWAA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$:

$$\begin{aligned}z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})&=\mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)})\\&=\omega_1 r_{i1}^{(k)}\oplus\omega_2 r_{i2}^{(k)}\oplus\cdots\oplus\omega_m r_{im}^{(k)},\quad i\in N,k=1,2,\cdots,t.\end{aligned}$$

步骤 3 再利用 LHA 算子对 t 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结,得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i\in N)$:

$$\begin{aligned}z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})&=\mathrm{LHA}_{\boldsymbol{\lambda},w}(r_i^{(1)}(\omega),r_i^{(2)}(\omega),\cdots,r_i^{(t)}(\omega))\\&=w_1 b_i^{(1)}\oplus w_2 b_i^{(2)}\oplus\cdots\oplus w_t b_i^{(t)},\quad i\in N,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_t)$是 LHA 算子的加权向量,$w_k\in[0,1](k=1,2,\cdots,t)$,$\sum_{k=1}^{t}w_k=1$,$b_i^{(k)}$ 是一组加权数据$(t\lambda_1 z_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega}),t\lambda_2 z_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}),\cdots,t\lambda_t z_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}))$中第 k 大的元素,t 是平衡因子.

步骤 4 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})(i\in N)$对方案 $x_i(i\in N)$进行排序和择优.

8.4 实例分析

例 8.2 本例用例 8.1 对 8.3 节中的方法进行说明. 假设有关原始资料来源于 3 位决策者所给出的语言评估矩阵(如表 8.2 和表 8.3 所示),并假定其权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(0.3,0.4,0.3)$.

表 8.2 决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_7	s_8	s_4	s_5	s_7	s_8	s_9	s_9
x_2	s_9	s_5	s_4	s_6	s_9	s_9	s_9	s_5
x_3	s_8	s_9	s_9	s_8	s_7	s_8	s_9	s_9
x_4	s_9	s_8	s_8	s_6	s_8	s_5	s_8	s_8

续表

	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_7	s_6	s_7	s_6	s_8	s_6	s_5	
x_2	s_7	s_5	s_6	s_4	s_6	s_5	s_7	
x_3	s_7	s_6	s_5	s_9	s_7	s_8	s_6	
x_4	s_7	s_9	s_6	s_7	s_5	s_8	s_8	

表 8.3　决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_8	s_7	s_6	s_6	s_7	s_8	s_7	s_6
x_2	s_8	s_6	s_5	s_6	s_8	s_9	s_8	s_8
x_3	s_8	s_9	s_7	s_8	s_7	s_9	s_6	s_8
x_4	s_8	s_7	s_8	s_6	s_7	s_5	s_8	s_9
	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_7	s_7	s_6	s_7	s_7	s_6	s_4	
x_2	s_4	s_5	s_4	s_5	s_5	s_6	s_7	
x_3	s_7	s_5	s_4	s_7	s_9	s_8	s_7	
x_4	s_6	s_8	s_5	s_7	s_5	s_7	s_9	

表 8.4　决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_4	s_0	s_0	s_2	s_3	s_1	s_4
x_2	s_2	s_0	s_1	s_0	s_2	s_4	s_3	s_4
x_3	s_2	s_3	s_3	s_3	s_2	s_1	s_2	s_4
x_4	s_3	s_3	s_4	s_0	s_3	s_2	s_3	s_3
	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	
x_1	s_2	s_1	s_0	s_3	s_3	s_0	s_{-1}	
x_2	s_0	s_0	s_2	s_{-1}	s_0	s_2	s_0	
x_3	s_3	s_1	s_{-1}	s_3	s_3	s_2	s_3	
x_4	s_0	s_3	s_2	s_3	s_2	s_4	s_3	

已知属性的权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.07,0.08,0.06,0.05,0.09,0.07,0.04,0.06,0.05,\\0.08,0.09,0.06,0.04,0.09,0.07).$$

下面利用 8.3 节中方法进行求解. 具体步骤如下:

步骤 1 利用 EWAA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$：

$$\begin{aligned}z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=&0.07\times s_2\oplus 0.08\times s_3\oplus 0.06\times s_{-1}\oplus 0.05\times s_0\oplus 0.09\times s_2\oplus 0.07\times s_3\oplus\\&0.04\times s_4\oplus 0.06\times s_4\oplus 0.05\times s_4\oplus 0.08\times s_2\oplus 0.09\times s_1\oplus\\&0.06\times s_2\oplus 0.06\times s_1\oplus 0.04\times s_3\oplus 0.09\times s_1\oplus 0.07\times s_0\\=&s_{1.74}.\end{aligned}$$

类似地，可得

$$z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.38},z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.55},z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.43},$$
$$z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.58},z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.28},z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.18},$$
$$z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.01},z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.54},z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.32},$$
$$z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.11},z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.65}.$$

步骤 2 再利用 LHA 算子（假定它的加权向量为 $w=(0.2,0.6,0.2)$）对 3 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(k=1,2,3)$进行集结.

首先利用$\boldsymbol{\lambda}$，t 以及 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$，求解 $t\lambda_k z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$，得

$$3\lambda_1 z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.566},3\lambda_1 z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.242},3\lambda_1 z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.295},$$
$$3\lambda_1 z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.187},3\lambda_2 z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.896},3\lambda_2 z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.536},$$
$$3\lambda_2 z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.616},3\lambda_2 z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.412},3\lambda_3 z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.386},$$
$$3\lambda_3 z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.188},3\lambda_3 z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{1.899},3\lambda_3 z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=s_{2.385}.$$

因此可求方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\lambda,w)(i=1,2,3,4)$

$$z_1(\boldsymbol{\lambda},w)=0.2\times s_{1.896}\oplus 0.6\times s_{1.566}\oplus 0.2\times s_{1.386}=s_{1.5960},$$
$$z_2(\boldsymbol{\lambda},w)=0.2\times s_{1.536}\oplus 0.6\times s_{1.242}\oplus 0.2\times s_{1.188}=s_{1.2900},$$
$$z_3(\boldsymbol{\lambda},w)=0.2\times s_{2.616}\oplus 0.6\times s_{2.295}\oplus 0.2\times s_{1.899}=s_{2.2800},$$
$$z_4(\boldsymbol{\lambda},w)=0.2\times s_{2.412}\oplus 0.6\times s_{2.385}\oplus 0.2\times s_{2.187}=s_{2.3508}.$$

步骤 3 利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i=1,2,3,4)$对所有决策方案进行排序，得

$$x_4\succ x_3\succ x_1\succ x_2.$$

故最优方案为 x_4.

属性权重和属性值均为语言的多属性决策方法及应用

第 9 章

本章将向读者介绍语言加权取大(LWM)算子和混合语言加权平均(HLWA)算子等概念. 针对属性权重和属性值均以语言形式给出的多属性决策问题,分别介绍基于 LWM 算子的多属性决策法,以及基于 LWM 算子和 HLWA 算子的多属性群决策方法,并分别把它们应用于解决虚拟企业合作伙伴选择和教师质量评估等实际问题.

9.1 基于 LWM 算子的多属性决策方法

9.1.1 LWM 算子

定义 9.1[248] 设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是一组语言数据,若

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\},$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$是语言数据 $\alpha_i(i \in N)$的加权向量,且 $\alpha_i, \omega_i \in S, i \in N$,则函数 LWM 称为语言加权取大(LWM)算子,该算子是通常的加权取大(WM)算子[39]的拓展.

例 9.1 假定$\boldsymbol{\omega} = (s_{-2}, s_3, s_4, s_1)$,则

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(s_{-3}, s_4, s_2, s_0) = \max\{\min\{s_{-2}, s_{-3}\}, \min\{s_3, s_4\}, \min\{s_4, s_2\}, \min\{s_1, s_0\}\} = s_3.$$

定理 9.1[248] LWM 算子关于语言数据 α_i 单调增加.

证明 假设 $\alpha_i < \alpha_i', \alpha_j = \alpha_j' (j \neq i)$,则

$$\min\{\omega_i, \alpha_i\} \leqslant \min\{\omega_i, \alpha_i'\},$$

$$\min\{\omega_j, \alpha_j\} = \min\{\omega_j, \alpha_j'\}, \quad j \neq i,$$

因此对任意 $j \in N$,有

$$\max_j \min\{\omega_j, \alpha_j\} \leqslant \max_j \min\{\omega_j, \alpha'_j\},$$

即

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \leqslant \mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha'_1, \alpha'_2, \cdots, \alpha'_n).$$

定理证毕.

定理 9.2[248] 设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是一组语言数据，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$为其加权向量. 若对任意 $i \in N$，有 $w_i \geqslant \alpha_i$，则

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \max_i \{\alpha_i\}.$$

证明 因为对任意 $i \in N$，有 $w_i \geqslant \alpha_i$，故 $\min\{\omega_i, \alpha_i\} = \alpha_i$，因此

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\} = \max_i \{\alpha_i\}.$$

定理证毕.

从定理 9.2 可以看出，语言取大算子是 LWM 算子的一个特例.

定理 9.3[248] 设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是一组语言数据，$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$为其加权向量，则

$$\begin{aligned} s_{-L} &\leqslant \min\{\min_i\{\omega_i\}, \min_i\{\alpha_i\}\} \\ &\leqslant \mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \\ &\leqslant \max\{\max_i\{\omega_i\}, \max_i\{\alpha_i\}\} \leqslant s_L. \end{aligned}$$

特别地，若存在某一 i，使得 $\min\{\omega_i, \alpha_i\} = s_L$，则 $\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = s_L$. 若对任意 $i \in N$，有 $\min\{\omega_i, \alpha_i\} = s_{-L}$，则 $\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = s_{-L}$.

证明

$$\begin{aligned} \mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\} \leqslant \max_i \max\{\omega_i, \alpha_i\} \\ &= \max_i\{\max_i\{\omega_i\}, \max_i\{\alpha_i\}\} \leqslant \max_i\{s_L, s_L\} = s_L, \\ \mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\} \geqslant \min_i \min\{\omega_i, \alpha_i\} \\ &= \min_i\{\min_i\{\omega_i\}, \min_i\{\alpha_i\}\} \geqslant \max_i\{s_{-L}, s_{-L}\} = s_{-L}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} s_{-L} &\leqslant \min\{\min_i\{\omega_i\}, \min_i\{\alpha_i\}\} \leqslant \mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \\ &\leqslant \max\{\max_i\{\omega_i\}, \max_i\{\alpha_i\}\} \leqslant s_L. \end{aligned}$$

特别地，若存在某一 i，使得 $\min\{\omega_i, \alpha_i\} = s_L$，则

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\} = s_L.$$

若对任意 $i \in N$，有 $\min\{\omega_i, \alpha_i\} = s_{-L}$，则

$$\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\} = s_{-L}.$$

定理证毕.

9.1.2 决策方法

下面介绍一种基于 LWM 算子的多属性决策方法[248]. 具体步骤如下：

步骤 1　对于某一多属性决策问题，设 X 和 U 分别为方案集和属性集. 决策者给出方案 $x_i \in X$ 在属性 $u_j \in U$ 下的语言评估值 r_{ij}，并得到评估矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times m}$，且 $r_{ij}\in S$. 属性的权重向量为 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，$\omega_j\in S$，$j\in M$.

步骤 2　利用 LWM 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$：

$$z_i(\omega)=\max_j \min\{\omega_j, r_{ij}\}, i\in N.$$

步骤 3　利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 对方案 $x_i(i\in N)$ 进行排序和择优.

9.2 实例分析

虚拟企业的概念最初是由美国 Lehigh 大学于 1991 年在其《21 世纪制造企业的战略》报告中提出的[130]，它是指不同地域、不同工作性质的若干个企业针对某个具体生产任务所组成的暂时的动态联盟结构，由承接这一任务并拥有主要生产资源（包括人力、物资、设备或技术条件等）的企业领头，在全球范围内寻找所需要的合作伙伴，相互合作以保证快速、高效、低成本地完成整个生产任务[189]. 虚拟企业是 21 世纪企业进行生产经营和市场竞争的主要形式，能否选择出灵捷的、有竞争力和相容的合作伙伴，关系到虚拟企业的成败. 由于组建虚拟企业的目的之一就是获取优势互补，而这种"优势"就是各成员的核心竞争力，因此，选择合作伙伴的首要步骤就是识别潜在合作伙伴的核心能力，看潜在的合作伙伴的核心能力是否能弥补自身核心能力的部分或全部不足之处. 若潜在的合作伙伴的核心能力不具有互补性，那么此企业在此阶段就淘汰出局；否则就进入下一阶段的考核. 虚拟企业合作伙伴的选择下一步就对通过核心竞争力检测的企业进行综合评价，根据综合评价的结果选择理想的合作伙伴. 潜在合作伙伴综合评价包括两个方面的内容：综合评价指标体系的确定与评价方法的选择. 美国东库一家专门从事顾问的华伦公司建议采用如下所述的八个指标（属性）评价潜在的联盟（合作）伙伴[172].

（1）推动力 u_1：在所有联盟中，联盟的企业必须清楚知道，其联盟的推动力是什么.

（2）互补性 u_2：彼此间能否达到优势互补的目的.

（3）相处性 u_3：企业之间的文化上是否合得起来.

（4）双赢性 u_4：是否彼此都能从联盟中获益.

（5）集中焦点 u_5：需知道联盟后的经营焦点是什么.

（6）整合性 u_6：业务或组织上能否精简.

（7）成长性 u_7：联盟能否使联盟快速成长.

（8）一致性 u_8：公司联盟不是上面几个领导同意就能成功的，联盟公司的中层班干部也要一心一德，才能贯彻始终.

下面将说明 9.1 节中方法在虚拟企业合作伙伴选择中的应用.

例 9.2 某虚拟企业拟选择一个合作伙伴进行合作，共有 4 个潜在的合作伙伴（方案）$x_i(i=1,2,3,4)$ 可供选择. 决策者依据上述八个指标（属性）利用语言标度 $S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差，很差，差，较差，稍差，一般，稍好，较好，好，很好，极好$\}$，对这 4 个潜在的合作伙伴进行评估，得到下列决策矩阵 $\boldsymbol{R}$（如表 9.1 所示）. 属性的权重向量为 $\boldsymbol{\omega}=(s_{-2},s_0,s_2,s_3,s_4,s_{-1},s_2,s_4)$. 试确定最佳合作伙伴.

表 9.1 决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_1	s_2	s_0	s_4	s_2	s_3	s_{-2}	s_0
x_2	s_0	s_2	s_4	s_2	s_{-1}	s_{-2}	s_4	s_1
x_3	s_2	s_1	s_2	s_4	s_4	s_{-1}	s_2	s_5
x_4	s_2	s_4	s_2	s_{-1}	s_1	s_4	s_4	s_2

利用 LWM 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$：

$$\begin{aligned}
z_1(\boldsymbol{\omega}) &= \max_j \min\{\omega_j, r_{1j}\} \\
&= \max\{\min\{s_{-2},s_1\},\min\{s_0,s_2\},\min\{s_2,s_0\},\min\{s_3,s_4\}, \\
&\qquad \min\{s_4,s_2\},\min\{s_{-1},s_3\},\min\{s_2,s_{-2}\},\min\{s_4,s_0\}\} \\
&= \max\{s_{-2},s_0,s_0,s_3,s_2,s_{-2},s_0\} \\
&= s_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2(\boldsymbol{\omega}) &= \max_j \min\{\omega_j, r_{2j}\} \\
&= \max\{\min\{s_{-2},s_0\},\min\{s_0,s_2\},\min\{s_2,s_3\},\min\{s_3,s_2\}, \\
&\qquad \min\{s_4,s_{-1}\},\min\{s_{-1},s_{-2}\},\min\{s_2,s_4\},\min\{s_4,s_1\}\} \\
&= \max\{s_{-2},s_0,s_2,s_2,s_{-1},s_{-2},s_2,s_1\} \\
&= s_2,
\end{aligned}$$

$$z_3(\boldsymbol{\omega}) = \max_j \min\{\omega_j, r_{3j}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\{\min\{s_{-2}, s_2\}, \min\{s_0, s_1\}, \min\{s_2, s_2\}, \min\{s_3, s_4\}, \\
&\qquad \min\{s_4, s_3\}, \min\{s_{-1}, s_{-1}\}, \min\{s_2, s_2\}, \min\{s_4, s_5\}\} \\
&= \max\{s_{-2}, s_0, s_2, s_3, s_3, s_{-1}, s_2, s_4\} \\
&= s_4, \\
z_4(\boldsymbol{\omega}) &= \max_j \min\{\omega_j, r_{4j}\} \\
&= \max\{\min\{s_{-2}, s_2\}, \min\{s_0, s_4\}, \min\{s_2, s_1\}, \min\{s_3, s_{-1}\}, \\
&\qquad \max\{s_4, s_1\}, \min\{s_{-1}, s_1\}, \min\{s_2, s_4\}, \min\{s_4, s_2\}\} \\
&= \max\{s_{-2}, s_0, s_1, s_{-1}, s_1, s_{-1}, s_2, s_2\} \\
&= s_2.
\end{aligned}
$$

利用 $z_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4)$对所有决策方案进行排序,得

$$x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4,$$

故最优方案(最佳合作企业)为 x_3.

9.3 基于 LWM 算子和 HLWA 算子的多属性群决策方法

9.3.1 HLWA 算子

在 7.2 节中,给出了 LOWA 算子的概念,即

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \max_j \min(w_j, b_j),$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$是 LOWA 算子的加权向量,$\alpha_i \in S(i \in N)$,$w_j \in S(j \in M)$,且 b_j 是一组语言数据$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$中第 j 大的元素.

例 9.3 假定 $\boldsymbol{w}=(s_{-2}, s_{-3}, s_{-1}, s_{-4})$,且

$$\alpha_1 = s_0, \alpha_2 = s_1, \alpha_3 = s_{-1}, \alpha_4 = s_{-2},$$

则由 LOWA 算子的定义,可得

$$b_1 = s_1, b_2 = s_0, b_3 = s_{-1}, b_4 = s_{-2},$$

因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LOWA}_w(s_0, s_1, s_{-1}, s_{-2}) &= \max\{\min\{s_{-2}, s_1\}, \min\{s_{-3}, s_0\}, \\
&\qquad \min\{s_{-1}, s_{-1}\}, \min\{s_{-4}, s_{-2}\}\} \\
&= s_{-1}
\end{aligned}
$$

下面研究 LOWA 算子的一些优良性质[248]:

定理 9.4(置换不变性) 设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是一组语言数据,则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \mathrm{LOWA}_w(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \cdots, \dot{\alpha}_n),$$

其中$(\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \cdots, \dot{\alpha}_n)$是$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$的任一置换.

证明 设

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_i\min\{w_j,b_j\},$$

且

$$\mathrm{LOWA}_w(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,\cdots,\dot{\alpha}_n)=\max_j\min\{w_j,\dot{b}_j\}.$$

由于$(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,\cdots,\dot{\alpha}_n)$是$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的任一置换，可得 $b_j=\dot{b}_j(j\in N)$，因此

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathrm{LOWA}_w(\dot{\alpha}_1,\dot{\alpha}_2,\cdots,\dot{\alpha}_n).$$

定理证毕.

定理 9.5（单调性） 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$和$(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n')$是两组语言数据，若对任意 $i\in N$，有 $\alpha_i\leqslant\alpha_i'$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n').$$

证明 设

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_j\min\{w_j,b_j\},$$

且

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n')=\max_j\min\{w_j,b_j'\}.$$

由于对任意 $i\in N$，有 $\alpha_i\leqslant\alpha_i'$，因此 $b_j\leqslant b_j'$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n').$$

定理证毕.

定理 9.6 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是一组语言数据，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$是算子 LOWA 的加权向量.

（1）若对任意 $j\in N$，有 $w_j\geqslant b_j$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_i\{\alpha_i\},$$

因此语言取大算子是 LOWA 的一个特例.

（2）若对任意 $j\neq n$，有 $w_n\geqslant b_n$ 且 $w_n\leqslant w_j$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\min_i\{\alpha_i\}.$$

因此，语言取小算子也是 LOWA 的一个特例.

证明 （1）由于对任意 $j\in N$，有 $w_j\geqslant b_j$，因此

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_j\min\{w_j,b_j\}=\max_j\{b_j\}=\max_i\{\alpha_i\}.$$

（2）由于对任意 $j\neq n$，有 $w_n\geqslant b_n$ 且 $w_n\leqslant w_j$，因此

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\min\{w_n,b_n\}=b_n=\min_i\{\alpha_i\}.$$

定理证毕.

定理 9.7（介值性） 设$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是一组语言数据，则

$$\begin{aligned}s_{-L}&\leqslant\min\{\min_j\{w_j\},\min_i\{\alpha_i\}\}\\&\leqslant\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\end{aligned}$$

$$\leqslant \max\{\max_j\{w_j\},\max_i\{\alpha_i\}\}\leqslant s_L.$$

特别地，若存在某一 j，使得 $\min\{w_j,b_j\}=s_L$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=s_L,$$

若对任意 $j\in N$，有 $\min\{w_j,b_j\}=s_{-L}$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=s_{-L}.$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)&=\max_j\min\{w_j,b_j\}\leqslant\max_j\max\{w_j,b_j\}\\&=\max\{\max_j\{w_j\},\max_j\{b_j\}\}\\&=\max\{\max_j\{w_j\},\max_i\{\alpha_i\}\}\\&\leqslant s_L,\\\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)&=\max_j\min\{w_j,b_j\}\geqslant\max\{\min_j\{w_j\},\min_j\{b_j\}\}\\&\geqslant\min\{\min_j\{w_j\},\min_j\{b_j\}\}\\&=\min\{\min_j\{w_j\},\min_i\{\alpha_i\}\}\\&\geqslant s_{-L}.\end{aligned}$$

特别地，若存在某一 $j\in N$，使得 $\min\{w_j,b_j\}=s_L$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_j\min\{w_j,b_j\}=s_L.$$

若对任意 $j\in N$，有 $\min\{w_j,b_j\}=s_{-L}$，则

$$\mathrm{LOWA}_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_j\min\{w_j,b_j\}=s_{-L}.$$

定理证毕.

从 LWM 算子和 LOWA 算子的定义可知：一方面，LWM 算子中的加权向量是对语言数据自身进行加权；另一方面，LOWA 算子中的加权向量是对语言数据所在的位置进行加权. 因此 LWM 算子和 LOWA 算子分别代表不同的方面，且仅考虑其中的某一面，故而具有一定的片面性. 为了解决这个缺陷，下面将给出一种混合语言加权平均(HLWA)算子.

定义 9.2[248]　一个混合语言加权平均(HLWA)算子是一个映射 HLWA：$S^n\to S$，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$是与该算子相关联的加权向量，且 $w_j\in S(j\in M)$使得

$$\mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\max_j\min\{w_j,b_j\},$$

其中 b_j 是一组加权语言数据 $\bar{\alpha}_i(\bar{\alpha}_i=\min\{\omega_i,\alpha_i\},i\in N)$中第 j 个最大的语言数据，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是一组语言数据$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的加权向量，且 $\omega_i\in S$，$i\in N$.

例 9.4　假定 $\alpha_1=s_0,\alpha_2=s_1,\alpha_3=s_{-1},\alpha_4=s_{-2}$是一组语言数据，$\boldsymbol{\omega}=(s_0,s_{-2},$

s_{-2}, s_{-3})为其加权向量,$w=(s_{-2}, s_{-3}, s_{-1}, s_{-4})$是 HLWA 算子的加权向量. 由定义 9.2,可得

$$\bar{\alpha}_1 = \min\{s_0, s_0\} = s_5, \qquad \bar{\alpha}_2 = \min\{s_{-2}, s_1\} = s_{-2},$$
$$\bar{\alpha}_3 = \min\{s_{-1}, s_{-1}\} = s_{-1}, \quad \bar{\alpha}_4 = \min\{s_{-2}, s_{-3}\} = s_{-3}.$$

因此

$$b_1 = s_0,\ b_2 = s_{-1},\ b_3 = s_{-2},\ b_4 = s_{-3},$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\omega},w}\{s_0, s_1, s_{-1}, s_{-2}\} &= \max\{\min\{s_{-2}, s_0\}, \min\{s_{-3}, s_{-1}\}, \\ &\qquad \min\{s_{-1}, s_{-2}\}, \min\{s_{-4}, s_{-3}\}\} \\ &= s_{-2}. \end{aligned}$$

定理证毕.

定理 9.8[248] LWM 算子是 HLWA 算子的一个特例.

证明 设 $w=(s_L, s_L, \cdots, s_L)$,则

$$\begin{aligned} \mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= \max_j \min\{w_j, b_j\} = \max_j\{b_j\} = \max_i\{\bar{\alpha}_i\} \\ &= \max_i \min\{\omega_i, \alpha_i\}. \end{aligned}$$

定理证毕.

定理 9.9[248] LOWA 算子是 HLWA 算子的一个特例.

证明 设 $\boldsymbol{\omega}=(s_L, s_L, \cdots, s_L)$,则 $\bar{\alpha}_i=\min\{\omega_i, \alpha_i\}=\alpha_i, i\in N$. 定理证毕.

从定理 9.8 和定理 9.9 可知:HLWA 算子推广了 LWM 和 LOWA 算子,它不仅考虑了每个语言数据本身的重要性程度,而且还体现了其所在位置的重要性程度.

9.3.2 决策方法

下面介绍一种基于 LWM 算子和 HLWA 算子多属性群决策方法. 具体步骤如下[248]:

步骤 1 对于某一多属性群决策问题,设 X,U 和 D 分别为方案集、属性集和决策者集,且设 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$为属性的权重向量,$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t)$为决策者的权重向量,且 $\omega_j, \lambda_k\in S(j\in M, k=1,2,\cdots,t)$. 设决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言数据评估值(属性值)$r_{ij}^{(k)}$,并得到决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,且 $r_{ij}^{(k)}\in S$.

步骤 2 利用 LWM 算子对决策矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 中第 i 行的属性值进行集结,得到决策者 d_k 所给出的决策方案 x_i 综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i\in N, k=1,2,\cdots,t)$:

$$z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \cdots, r_{im}^{(k)}) = \max_j \min\{\omega_j, r_{ij}^{(k)}\}, i\in N, k=1,2,\cdots,t.$$

步骤 3 利用 HLWA 算子对 t 位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值

$z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})(i\in N)$：

$z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})=\mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}}(z_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega}),z_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}),\cdots,z_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}))=\max\limits_k\min\{w_k,b_i^{(k)}\}(i\in N)$，

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_t)$是 HLWA 算子的加权向量，且 $w_k\in S(k=1,2,\cdots,t)$，$b_i^{(k)}$ 是一组加权语言数据$(\alpha_i^{(1)},\alpha_i^{(2)},\cdots,\alpha_i^{(t)})$中第 k 大的语言数据，其中

$$\alpha_i^{(l)}=\min\{\lambda_l,z_i^{(l)}(\boldsymbol{\omega})\},l=1,2,\cdots,t.$$

步骤 4　利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})(i\in N)$对方案进行排序和择优.

9.4　实例分析

在素质教育评估过程中，评估者事先需要对评估对象进行认知、了解和考察，然后依据一定的标准进行评估. 评估结果必然被评估者的主观判断所左右，这种伴随着评价过程而存在的模糊性是人们对社会信息处理过程的基本特征的必然反映. 为使评估的可信度和合理性提高，不但不应该回避评定者主观的模糊性，反而应把它充分反映出来. 因此对诸如学校的办学质量、学生的综合素质以及教师质量等的评估，一般直接用“优”、“良”、“差” 等语言形式给出，评价结果较为理想.

例 9.5　南京市某所中学在对其教师质量进行评估时，首先制定了 8 项评估指标（属性）：u_1——科学文化素质；u_2——思想道德素质；u_3——身体心理素质；u_4——教学和学习指导能力；u_5——科学研究能力；u_6——理解学生心理能力；u_7——教学管理能力；u_8——独立自学能力. 属性的权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(s_1,s_0,s_4,s_3,s_3,s_0,s_2,s_1),s_j\in S,$$

其中语言标度集

$S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差，很差，差，较差，稍差，一般，稍好，较好，好，很好，极好$\}$.

现有 3 位评估者 $d_k(k=1,2,3)$（其权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(s_0,s_4,s_2)$）依据上述各项指标利用术语标度集 S 对该校的 4 位体育教师（方案）$x_i(i=1,2,3,4)$的评估结果如表 9.2 表 9.4 所示. 试确定最佳体育教师.

表 9.2　评估者 d_1 给出的决策矩阵 R_1

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_2	s_4	s_4	s_1	s_2	s_3	s_4	s_2
x_2	s_4	s_3	s_1	s_2	s_4	s_3	s_2	s_3
x_3	s_3	s_2	s_4	s_1	s_4	s_4	s_3	s_4
x_4	s_2	s_3	s_0	s_1	s_4	s_1	s_3	s_3

表 9.3　评估者 d_2 给出的决策矩阵 R_2

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_0	s_3	s_3	s_0	s_2	s_4	s_1	s_2
x_2	s_2	s_1	s_0	s_0	s_4	s_3	s_4	s_0
x_3	s_0	s_1	s_4	s_3	s_4	s_3	s_4	s_2
x_4	s_1	s_1	s_1	s_1	s_2	s_3	s_1	s_0

表 9.4　评估者 d_3 给出的决策矩阵 R_3

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	s_1	s_3	s_3	s_1	s_4	s_3	s_1	s_2
x_2	s_2	s_1	s_1	s_2	s_2	s_0	s_4	s_3
x_3	s_4	s_3	s_2	s_2	s_4	s_3	s_3	s_4
x_4	s_1	s_1	s_0	s_0	s_1	s_3	s_1	s_4

下面利用 9.4 节中所给的方法进行求解：

步骤 1　利用 LWM 算子对决策矩阵 R_k 中第 i 行的属性值进行集结，得到决策者 d_k 所给出的决策方案 x_i 综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$：

$$z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{11}^{(1)},r_{12}^{(1)},\cdots,r_{18}^{(1)})=s_6,$$
$$z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{21}^{(1)},r_{22}^{(1)},\cdots,r_{28}^{(1)})=s_5,$$
$$z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{31}^{(1)},r_{32}^{(1)},\cdots,r_{38}^{(1)})=s_6,$$
$$z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{41}^{(1)},r_{42}^{(1)},\cdots,r_{48}^{(1)})=s_2,$$
$$z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{11}^{(2)},r_{12}^{(2)},\cdots,r_{18}^{(2)})=s_3,$$
$$z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{21}^{(2)},r_{22}^{(2)},\cdots,r_{28}^{(2)})=s_3,$$
$$z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{31}^{(2)},r_{32}^{(2)},\cdots,r_{38}^{(2)})=s_4,$$
$$z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{41}^{(2)},r_{42}^{(2)},\cdots,r_{48}^{(2)})=s_2,$$
$$z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{11}^{(3)},r_{12}^{(3)},\cdots,r_{18}^{(3)})=s_3,$$
$$z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{21}^{(3)},r_{22}^{(3)},\cdots,r_{28}^{(3)})=s_2,$$
$$z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{31}^{(3)},r_{32}^{(3)},\cdots,r_{38}^{(3)})=s_3,$$
$$z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{LWM}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{41}^{(3)},r_{42}^{(3)},\cdots,r_{48}^{(3)})=s_1.$$

步骤 2　假定 $w=(s_4,s_2,s_1)$，利用 HLWA 算子对三位决策者给出的方案 x_i 的综合属性值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(k=1,2,3,4)$ 进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性值 $z_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i=1,2,3,4)$：

$$z_1(\boldsymbol{\lambda},w)=\mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\lambda},w}(z_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega}),z_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega}),z_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega}))=s_3,$$

$$z_2(\boldsymbol{\lambda}, w) = \mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\lambda}, w}(z_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega}), z_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega}), z_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega})) = s_3,$$

$$z_3(\boldsymbol{\lambda}, w) = \mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\lambda}, w}(z_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega}), z_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega}), z_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega})) = s_4,$$

$$z_4(\boldsymbol{\lambda}, w) = \mathrm{HLWA}_{\boldsymbol{\lambda}, w}(z_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega}), z_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega}), z_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega})) = s_2,$$

步骤 3　利用 $z_i(\boldsymbol{\lambda}, w)(i=1,2,3,4)$ **对体育教师** $x_i(i=1,2,3,4)$ **进行排序，得**

$$x_3 \succ x_1 x_2 \succ x_4,$$

故最佳体育教师为 x_3.

第 4 篇

不确定语言型多属性决策方法及应用

属性权重完全未知且属性值为不确定语言的多属性决策方法及应用

第10章

由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性，当专家们受一些主、客观因素（如时间紧迫，专业知识结构和水平，对某些评估不感兴趣或者对某些比较敏感的问题不想发表意见等）制约时他们往往所给出的评估信息是不完全的，因此对不完全信息下的语言多属性决策（一般称之为不确定语言型多属性决策）问题的研究也具有重要的理论与实际应用价值. 目前国内外有关该类问题的研究成果极少. 本章首先介绍不确定语言变量的运算法则，并且介绍一些不确定语言集结算子，如：不确定 EOWA (UEOWA)算子、不确定 EWAA (UEWAA)算子和不确定语言混合集结(ULHA)算子等. 同时分别介绍基于 UEOWA 算子的多属性决策方法，以及基于 UEOWA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法，并把它们应用于解决供应链管理的合作伙伴选择问题.

10.1 基于 UEOWA 算子的多属性决策方法

10.1.1 UEOWA 算子

定义 10.1[252] 设 $\tilde{\mu}=[s_a, s_b]$，$s_a, s_b \in \bar{S}$，s_a 和 s_b 分别是 $\tilde{\mu}$ 的下限和上限，则称 $\tilde{\mu}$ 为不确定语言变量.

设 $\tilde{S}$ 是所有不确定语言变量的集合. 考虑任意两个语言变量 $\tilde{\mu}=[s_a, s_b]$，$\bar{v}=[s_c, s_d] \in \tilde{S}$，$\beta, \beta_1, \beta_2 \in [0,1]$，定义它们的运算法则如下[252]：

(1) $\tilde{\mu}\oplus\tilde{v}=[s_a,s_b]\oplus[s_c,s_d]=[s_a\oplus s_c,s_b\oplus s_d]=[s_{a+c},s_{b+d}]$;

(2) $\beta\tilde{\mu}=\beta[s_a,s_b]=[\beta s_a,\beta s_b]=[s_{\beta a},s_{\beta b}]$;

(3) $\tilde{\mu}\oplus\tilde{v}=\tilde{v}\oplus\tilde{\mu}$;

(4) $\beta(\tilde{\mu}\oplus\tilde{v})=\beta\tilde{\mu}\oplus\beta\tilde{v}$;

(5) $(\beta_1+\beta_2)\tilde{\mu}=\beta_1\tilde{\mu}\oplus\beta_2\tilde{\mu}$.

定义 10.2[252] 设 $\tilde{\mu}=[s_a,s_b]$,$\tilde{v}=[s_c,s_d]\in\tilde{S}$,且设 $l_{ab}=b-a$,$l_{cd}=d-c$,则 $\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v}$ 的可能度定义如下:

$$p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})=\max\left\{1-\max\left(\frac{d-a}{l_{ab}+l_{cd}},0\right),0\right\}. \tag{10.1}$$

类似地,$\tilde{v}\geqslant\tilde{\mu}$ 的可能度定义如下:

$$p(\tilde{v}\geqslant\tilde{\mu})=\max\left\{1-\max\left(\frac{b-c}{l_{ab}+l_{cd}},0\right),0\right\}.$$

由定义 10.2,易证下列结论[252].成立

定理 10.1 设 $\tilde{\mu}=[s_a,s_b]$,$\tilde{v}=[s_c,s_d]$,$\tilde{\gamma}=[s_e,s_f]\in\tilde{S}$,则

(1) $0\leqslant p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})\leqslant 1$,$0\leqslant p(\tilde{v}\geqslant\tilde{\mu})\leqslant 1$.

(2) $p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})=1$ 当且仅当 $d\leqslant a$. 类似地,$p(\tilde{v}\geqslant\tilde{\mu})=1$ 当且仅当 $b\leqslant c$.

(3) $p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})=0$ 当且仅当 $b\leqslant c$. 类似地,$p(\tilde{v}\geqslant\tilde{\mu})=0$ 当且仅当 $d\leqslant a$.

(4) $p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})+p(\tilde{v}\geqslant\tilde{\mu})=1$. 特别地,$p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{\mu})=1/2$.

(5) $p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})\geqslant 1/2$ 当且仅当 $a+b\geqslant c+d$. 特别地,$p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})=1/2$ 当且仅当 $a+b=c+d$.

(6) $p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{v})\geqslant 1/2$ 且 $p(\tilde{v}\geqslant\tilde{\gamma})\geqslant 1/2$,则 $p(\tilde{\mu}\geqslant\tilde{\gamma})\geqslant 1/2$.

定义 10.3[252] 设 UEAA: $\tilde{S}^n\to\tilde{S}$,若

$$\mathrm{UEAA}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)=\frac{1}{n}(\tilde{\mu}_1\oplus\tilde{\mu}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{\mu}_n), \tag{10.2}$$

则称函数 UEAA 是不确定的 EAA (UEAA)算子.

例 10.1 给定一组不确定语言变量

$$\tilde{\mu}_1=[s_2,s_4],\tilde{\mu}_2=[s_3,s_4],\tilde{\mu}_3=[s_1,s_3],\tilde{\mu}_4=[s_2,s_3],$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{UEAA}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_3,\tilde{\mu}_4)&=\frac{1}{4}([s_2,s_4]\oplus[s_3,s_4]\oplus[s_1,s_3]\oplus[s_2,s_3])\\&=[s_2,s_{3.5}].\end{aligned}$$

定义 10.4 设 UEOWA: $\tilde{S}^n\to\tilde{S}$,若

$$\mathrm{UEOWA}_w(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)=w_1\tilde{v}_1\oplus w_2\tilde{v}_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde{v}_n, \tag{10.3}$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$是与 UEOWA 相关联的加权向量,$w_j\in[0,1]$($j\in$

N)，$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$，$\tilde{\mu}_i \in \tilde{S}$，且 $\tilde{v}_j$ 是一组不确定语言变量($\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \cdots, \tilde{\mu}_n$)中第 j 大的元素，则称函数 UEOWA 是不确定的 EOWA (UEOWA)算子.

特别地，若 $w = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$，则 UEOWA 算子退化为 UEAA 算子.

UEOWA 算子在应用过程中一般可按以下几个步骤进行：

步骤 1　事先由第 1 章中确定 UEOWA 算子加权向量的方法或利用(5.13)和(5.14)两式来确定加权向量 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$.

步骤 2　对于以不确定语言给定的一组不确定语言变量($\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \cdots, \tilde{\mu}_n$)，利用(10.1)式对它们进行两两比较，建立可能度矩阵(模糊互补判断矩阵)$\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$，其中 $p_{ij} = p(\tilde{\mu}_i \geqslant \mu_j)$. 然后由(4.6)式求得排序向量 $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n)$，再按 $\boldsymbol{\upsilon}_i$ ($i \in N$)的大小对不确定语言变量 $\tilde{\mu}_i$ ($i \in N$)进行排序，得到 $\tilde{v}_j$ ($j \in N$).

步骤 3　根据算子

$$\mathrm{UEOWA}_w(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \cdots, \tilde{\mu}_m) = w_1 \tilde{v}_1 \oplus w_2 \tilde{v}_2 \oplus \cdots \oplus w_n \tilde{v}_n,$$

计算结果.

例 10.2　假设 $w = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$，给定一组不确定语言变量

$$\tilde{\mu}_1 = [s_2, s_4], \tilde{\mu}_2 = [s_3, s_4], \tilde{\mu}_3 = [s_1, s_3], \tilde{\mu}_4 = [s_2, s_3].$$

利用(10.1)式对这 4 个不确定语言变量进行两两比较，并建立可能度矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.750 & 0.667 \\ 0.667 & 0.50 & 1 & 1 \\ 0.250 & 0 & 0.5 & 0.333 \\ 0.333 & 0 & 0.667 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

根据(4.6)式，得到可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\upsilon = (0.271, 0.347, 0.174, 0.208),$$

利用 υ_i ($i = 1, 2, 3, 4$)对不确定语言变量 $\tilde{\mu}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$)按下降序进行排列，可得

$$\tilde{v}_1 = [s_3, s_4], \tilde{v}_2 = [s_2, s_4], \tilde{v}_3 = [s_2, s_3], \tilde{v}_4 = [s_1, s_3].$$

因为 $w = (0.3, 0.2, 0.4, 0.1)$，故利用不确定 UEOWA 算子对这 4 个不确定语言变量进行集结，得

$$\begin{aligned} \mathrm{UEOWA}_w(\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4) &= 0.3 \times [s_3, s_4] \oplus 0.2 \times [s_2, s_4] \oplus \\ &\quad 0.4 \times [s_2, s_3] \oplus 0.1 \times [s_1, s_3] \\ &= [s_{0.9}, s_{1.2}] \oplus [s_{0.4}, s_{0.8}] \oplus [s_{0.8}, s_{1.2}] \oplus [s_{0.1}, s_{0.3}] \\ &= [s_{2.2}, s_{3.5}]. \end{aligned}$$

10.1.2 决策方法

下面介绍一种基于 UEOWA 算子的多属性决策方法.具体步骤如下[252]:

步骤 1 对于某一多属性决策问题,设 X 和 U 分别为方案集和属性集. 决策者给出方案 $x_i \in X$ 在属性 $u_j \in U$ 下的语言评估值 r_{ij},并得到评估矩阵 $\widetilde{R}=(r_{ij})_{n\times m}$,且$r_{ij}\in\widetilde{S}$.

步骤 2 利用 UEOWA 算子对评估矩阵 $\widetilde{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$:

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{w}) = \mathrm{UEOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}).$$

步骤 3 利用可能度公式(10.1),算出各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})(i\in N)$之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{w})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{w}))(i,j\in N)$,并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 4 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$,并按其分量大小对方案进行排序,即得到最优方案.

10.1.3 实例分析

供应链管理强调供应链中的企业建立战略合作伙伴关系,以降低供应链总成本、降低库存水平、增强信息共享、改善相互之间的交流以及产生更强的竞争优势. 影响供应链协作的因素是多方面的,因此合作伙伴的选择是一个非常复杂的问题. 特别是供应链核心企业在进行伙伴企业选择时,必须多方面权衡各种因素,全面考察潜在的伙伴企业,从中作出最优选择. 在影响供应链伙伴决策的因素中,响应时间(交货期)与供应能力、质量与技术水平、价格与成本、服务水平是成功的关键因素;同时为了保证动态联盟的敏捷性,能对新产品的需求作出快速的反应,要求构成供应链的企业具有较强的创新能力和敏捷性;企业的管理水平与文化应具备先进性和较好的兼容性;为了适应可持续发展中国家的要求,环境因素显得日益重要;物流与信息流因素也是影响供应链的关系之一,在进行伙伴选择时应当考虑到物流因素的影响. 因此,响应时间(交货期)与供应能力 u_1、质量与技术水平 u_2、价格与成本 u_3、服务水平 u_4、创新能力和敏捷性 u_5、管理水平与文化 u_6、物流与信息流 u_7、环境 u_8 这八个方面是影响核心企业伙伴选择的主要决策因素[17].

下面把 10.1.2 节中的方法应用于解决供应链管理的合作伙伴选择问题.

例 10.3 某供应链核心企业拟选择一个伙伴企业进行合作,共有 4 个备选伙伴企业(方案)$x_i(i=1,2,3,4)$可供选择. 决策者利用语言评估标度

$S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差,很差,差,较差,稍差,一般,稍好,较好,好,很好,极好$\}$

依据上述八个因素(属性)对这四个企业进行评估. 评估结果(用决策矩阵

R 表示)如表 10.1 所示. 试确定最佳合作伙伴.

表 10.1　决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_4]$	$[s_4, s_5]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_4, s_5]$	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_{-2}, s_{-1}]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$
x_4	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$

利用 10.1.2 节中方法的求解过程如下:

步骤 1　利用(10.1)式对表 10.1 中每个方案所在的行中各不确定语言数据进行两两比较,并建立下列 4 个可能度矩阵

$$P^{(1)}=\begin{pmatrix}0.5&0&1&0&0.333&0&1&0.667\\1&0.5&1&0.667&0.750&0.333&1&1\\0&0&0.5&0&0&0&1&0.333\\1&0.333&1&0.5&0.667&0&1&1\\0.667&0.250&1&0.333&0.5&0&1&0.750\\1&0.667&1&1&1&0.5&1&1\\0&0&0&0&0&0&0.5&0\\0.333&0&0.667&0&0.250&0&1&0.5\end{pmatrix},$$

$$P^{(2)}=\begin{pmatrix}0.5&0.667&0&0.250&1&1&0&0.333\\0.333&0.5&0&0&1&1&0&0\\1&1&0.5&1&1&1&0.667&1\\0.750&1&0&0.5&1&1&0.250&0.667\\0&0&0&0&0.5&1&0&0\\0&0&0&0&0&0.5&0&0\\1&1&0.333&0.750&1&1&0.5&1\\0.667&1&0&0.333&1&1&0&0.5\end{pmatrix},$$

$$P^{(3)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.333 & 0 & 0 & 1 & 0.667 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.333 & 0 \\ 0.667 & 1 & 0.5 & 0 & 0.333 & 1 & 0.750 & 0.250 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.667 \\ 1 & 1 & 0.667 & 0 & 0.5 & 1 & 1 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.333 & 0.667 & 0.250 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0.750 & 0.333 & 0.667 & 1 & 1 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$P^{(4)}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.333 & 1 & 0.667 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.667 & 0 & 0.5 & 1 & 0.750 & 0 & 0.250 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.250 & 0 & 0 & 0 \\ 0.333 & 0 & 0.250 & 0.750 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.667 & 1 \\ 1 & 0 & 0.750 & 1 & 1 & 0.333 & 0.5 & 0.667 \\ 1 & 0 & 0.667 & 1 & 1 & 0 & 0.333 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

根据(4.6)**式,得到可能度矩阵** $P^{(i)}(i=1,2,3,4)$ **的排序向量**

$$\boldsymbol{v}^{(1)}=(0.1161,0.1652,0.0863,0.1518,0.1339,0.1816,0.0625,0.1027),$$

$$\boldsymbol{v}^{(2)}=(0.1205,0.1042,0.1816,0.1458,0.0804,0.0625,0.1711,0.1339),$$

$$\boldsymbol{v}^{(3)}=(0.1161,0.0863,0.1339,0.1816,0.1518,0.0625,0.1027,0.1652),$$

$$\boldsymbol{v}^{(4)}=(0.0982,0.1875,0.1161,0.0670,0.0863,0.1637,0.1473,0.1339).$$

利用向量 $\boldsymbol{v}^{(i)}(i=1,2,3,4)$ **中的分量分别对表** 10.1 **中第** i **行的所有不确定语言数据** $r_{ij}(j=1,2,\cdots,8)$ **按降序进行排列,再利用** UEOWA **算子(假设其加权向量** $w=(0.15,0.10,0.12,0.10,0.12,0.13,0.15,0.13)$**)对其进行集结,得**

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(w) &= \mathrm{UEOWA}_w(r_{11},r_{12},\cdots,r_{18}) \\ &= 0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\oplus 0.10\times[s_1,s_3]\oplus \\ &\quad\ 0.12\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_2]\oplus 0.15\times[s_0,s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2},s_0] \\ &= [s_{0.85},s_{2.31}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2(w) &= \mathrm{UEOWA}_w(r_{21},r_{22},\cdots,r_{28}) \\ &= 0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus 0.10\times[s_1,s_2]\oplus \\ &\quad\ 0.12\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_1]\oplus 0.15\times[s_{-1},s_0]\oplus 0.13\times[s_{-2},s_{-1}] \\ &= [s_{0.46},s_{1.80}], \end{aligned}$$

$$\tilde{z}_3(w) = \mathrm{UEOWA}_w(r_{31},r_{32},\cdots,r_{38})$$

$$=0.15\times[s_4,s_5]\oplus 0.10\times[s_3,s_5]\oplus 0.12\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus$$
$$0.12\times[s_2,s_3]\oplus 0.13\times[s_1,s_3]\oplus 0.15\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]$$
$$=[s_{1.85},s_{3.31}]$$

$$\tilde{z}_4(w)=\text{UEOWA}_w(r_{41},r_{42},\cdots,r_{48})$$
$$=0.15\times[s_4,s_5]\oplus 0.10\times[s_3,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_3]\oplus$$
$$0.12\times[s_1,s_3]\oplus 0.13\times[s_1,s_2]\oplus 0.15\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]$$
$$=[s_{1.46},s_{2.98}].$$

步骤 2　利用可能度公式(10.1)算出各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(w)(i=1,2,3,4)$之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(w)\geqslant\tilde{z}_i(w)),(i,j=1,2,3,4)$并建立可能度互补矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.6607 & 0.1575 & 0.2852\\ 0.3393 & 0.5 & 0 & 0.1189\\ 0.8425 & 1 & 0.5 & 0.6208\\ 0.7148 & 0.8811 & 0.3792 & 0.5\end{pmatrix}$$

步骤 3　利用公式(4.6)求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2169,0.1632,0.3303,0.2896),$$

按其分量大小对方案进行排序,得

$$x_3\succ x_4\succ x_1\succ x_2,$$

故最优方案为 x_3.

10.2　基于 UEOWA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法

10.2.1　UEWAA 算子

定义 10.5[252]　设 UEWAA: $\widetilde{S}^n\to\widetilde{S}$,若

$$\text{UEWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)=\omega_1\tilde{\mu}_1\oplus\omega_2\tilde{\mu}_2\oplus\cdots\oplus\omega_n\tilde{\mu}_n,$$

其中$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$为不确定语言变量 $\tilde{\mu}_i(i\in N)$的加权向量,且 $\omega_j\in[0,1]$ $(j\in N)$, $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$, 则称函数 UEWAA 是不确定的 EWAA (UEWAA)算子.

特别地,若$\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$,则 UEWAA 算子退化为 UEAA 算子.

例 10.4　假设$\boldsymbol{\omega}=(0.1,0.3,0.2,0.4)$,并给定一组不确定语言变量

$$\tilde{\mu}_1=[s_3,s_5],\ \tilde{\mu}_2=[s_1,s_2],\ \tilde{\mu}_3=[s_3,s_4],\ \tilde{\mu}_4=[s_0,s_2],$$

则

$$\begin{aligned}\text{UEWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_3,\tilde{\mu}_4)&=0.1\times[s_3,s_5]\oplus 0.3\times[s_1,s_2]\oplus\\&\quad 0.2\times[s_3,s_4]\oplus 0.4\times[s_0,s_2]\\&=[s_{0.3},s_{0.5}]\oplus[s_{0.3},s_{0.6}]\oplus[s_{0.6},s_{0.8}]\oplus[s_0,s_{0.8}]\\&=[s_{1.2},s_{2.7}].\end{aligned}$$

从定义 10.4 和定义 10.5 可知：一方面，UEOWA 算子只对语言数据所在的位置进行加权；另一方面，UEWAA 算子只对语言数据本身进行加权. 因此，UEOWA 算子和 UEWAA 算子均具有一定的片面性. 为克服此缺点，下面介绍一种不确定语言混合集结(ULHA)算子.

10.2.2 ULHA 算子

定义 10.6[252] 设 ULHA：$\tilde{S}^n\to\tilde{S}$，若

$$\text{ULHA}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{w}}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)=w_1\tilde{v}_1\oplus w_2\tilde{v}_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde{v}_n,$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$是与 ULHA 相关联的加权向量(位置向量)，$w_j\in[0,1](j\in N)$，$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$. $\tilde{v}_j$ 是加权的不确定语言变量组$(\tilde{\mu}_1',\tilde{\mu}_2',\cdots,\tilde{\mu}_n')$ $(\tilde{\mu}_i'=n\omega_i\tilde{\mu}_i,i\in N)$中第 j 大的元素，这里$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是不确定语言变量组$(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)(i\in N)$的加权向量，$\omega_j\in[0,1](j\in N)$，$\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$，且 n 是平衡因子，则称函数 ULHA 为不确定的语言混合集结(ULHA) 算子.

例 10.5 设 $\tilde{\mu}_1=[s_0,s_1]$ $\tilde{\mu}_2=[s_1,s_2]$ $\tilde{\mu}_3=[s_{-1},s_2]$ $\tilde{\mu}_4=[s_{-2},s_0]$为一组不确定语言数据，$\boldsymbol{\omega}=(0.2,0.3,0.1,0.4)$为其加权向量，$\boldsymbol{w}=(0.3,0.2,0.3,0.2)$是 ULHA 算子的加权向量. 由定义 10.6，有

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1'&=4\times0.2\times[s_0,s_1]=[s_0,s_{0.8}],\\\tilde{\mu}_2'&=4\times0.3\times[s_1,s_2]=[s_{1.2},s_{2.4}],\\\tilde{\mu}_3'&=4\times0.1\times[s_{-1},s_2]=[s_{-0.4},s_{0.8}],\\\tilde{\mu}_4'&=4\times0.4\times[s_{-2},s_0]=[s_{-3.2},s_0].\end{aligned}$$

利用(10.1)式对这 4 个不确定语言变量进行两两比较，并建立可能度矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5&0&0.6&1\\1&0.5&1&1\\0.4&0&0.5&0.909\\0&0&0.091&0.5\end{pmatrix},$$

根据(4.6)式,得到可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{v}=(0.2583,0.3750,0.2341,0.1326).$$

利用 $v_i(i=1,2,3,4)$ 对不确定语言变量 $\tilde{\mu}_i'(i=1,2,3,4)$ 按下降序进行排列,可得

$$\tilde{v}_1=[s_{1.2},s_{2.4}],\ \tilde{v}_2=[s_0,s_{0.8}],$$
$$\tilde{v}_3=[s_{-0.4},s_{0.8}],\tilde{v}_4=[s_{-3.2},s_0],$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{ULHA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_3,\tilde{\mu}_4)&=0.3\times[s_{1.2},s_{2.4}]\oplus 0.2\times[s_0,s_{0.8}]\oplus\\&\quad 0.3\times[s_{-0.4},s_{0.8}]\oplus 0.2\times[s_{-3.2},s_0]\\&=[s_{-0.40},s_{1.12}].\end{aligned}$$

定理 10.2[252]　UEWAA 算子是 ULHA 算子的一个特例.

证明　设 $w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$,因此

$$\begin{aligned}\mathrm{ULHA}_{\boldsymbol{\omega},w}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)&=w_1\tilde{v}_1\oplus w_2\tilde{v}_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde{v}_n\\&=\frac{1}{n}(\tilde{v}_1\oplus\tilde{v}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{v}_n)\\&=\omega_1\tilde{\mu}_1\oplus\omega_2\tilde{\mu}_2\oplus\cdots\oplus\omega_n\tilde{\mu}_n.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 10.3[252]　UEOWA 算子是 ULHA 算子的一个特例.

证明　设 $\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)$,则 $\tilde{\mu}_i'=\tilde{\mu}_i(i\in N)$. 定理证毕.

从定理 10.2 和定理 10.3 可知,ULHA 算子同时推广了 UEWAA 算子和 UEOWA 算子,它不仅体现了数据本身的重要性程度,而且还反映了数据所在位置的重要性程度.

10.2.3　决策方法

下面介绍一种基于 UEOWA 算子和 ULHA 算子的多属性决策方法[252]. 具体步骤如下:

步骤 1　对于某一多属性决策问题,设 X,U 和 D 分别为方案集、属性集和决策者集. 属性权重信息完全未知. 决策者的权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$, $\lambda_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,t)$, $\sum\limits_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$,并得到评估矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$,且 $r_{ij}^{(k)}\in\tilde{S}$.

步骤 2　利用 UEOWA 算子对矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$:

$$\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{w}) = \mathrm{UEOWA}_{\boldsymbol{w}}(r_{i1}^{(k)}, r_{i2}^{(k)}, \cdots, r_{im}^{(k)}), \quad i \in N, k = 1,2,\cdots,t.$$

步骤 3　再利用 ULHA **算子对** t **位决策者给出的决策方案** x_i **的综合属性评估值** $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,\cdots,t)$**进行集结，得到决策方案** x_i **的群体综合属性评估** $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')(i \in N)$：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') &= \mathrm{ULHA}_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}'}(r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \cdots, r_i^{(t)}) \\ &= w'_1 \tilde{v}_i^{(1)} \oplus w'_2 \tilde{v}_i^{(2)} \oplus \cdots \oplus w'_t \tilde{v}_i^{(t)}, \quad i \in N,\end{aligned}$$

这里，$w' = (w'_1, w'_2, \cdots, w'_t)$**是** ULHA **算子的加权向量**，$w'_k \in [0,1](k=1, 2,\cdots,t)$，$\sum_{k=1}^{t} w'_k = 1$，$\tilde{v}_i^{(k)}$ **是一组加权的不确定语言变量**（$t\lambda_1 \tilde{z}_i^{(1)}(\boldsymbol{w})$，$(t\lambda_2 \tilde{z}_i^{(2)}(\boldsymbol{w}), \cdots, (t\lambda_t^{(t)}(\boldsymbol{w}))$，$(l=1,2,\cdots,t)$**中第** k **大的元素**，t **是平衡因子**.

步骤 4　利用可能度公式（10.1），**算出各方案综合属性评估值** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}')$ $(i \in N)$ **之间的可能度** $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{w}') \geqslant \tilde{z}_j(\lambda, w'))(i, j \in N)$，**并建立可能度矩阵** $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n \times n}$.

步骤 5　利用（4.6）**式求得可能度矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的排序向量** $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$，**并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案**.

10.2.4　实例分析

例 10.6　下面用例 10.1.3 **对** 10.2.3 **中的方法进行说明，假设有** 3 **位决策者所给出的语言评估矩阵**（**如表** 10.2 **表** 10.4 **所示**），**并假定其权重向量为** $\boldsymbol{\lambda} = (0.3, 0.4, 0.3)$.

表 10.2　决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_2]$	$[s_{-1}, s_0]$
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_{-2}, s_0]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_2, s_4]$	$[s_{-2}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_4, s_5]$
x_4	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$

表 10.3　决策矩阵 $\widetilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_2]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_{-2}, s_1]$	$[s_{-2}, s_{-1}]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_4]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$
x_4	$[s_0\ s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$

表 10.4　决策矩阵 $\widetilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4
x_1	$[s_1, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_2	$[s_0, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_2]$	$[s_{-1}, s_0]$
	u_5	u_6	u_7	u_8
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_0, s_1]$	$[s_{-3}, s_{-1}]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$
x_4	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_2, s_5]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_3]$

步骤 1　利用 UEOWA 算子(假设其加权向量 $\boldsymbol{w}=(0.15,0.10.0.12,0.10,0.12,0.13,0.15,0.13)$)对评估矩阵 $\widetilde{R}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$,其中

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(1)}(\boldsymbol{w}) &= 0.15\times[s_2,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus\\ &\quad 0.10\times[s_1,s_3]\oplus 0.12\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_2]\oplus\\ &\quad 0.15\times[s_0,s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2},s_0]\\ &= [s_{0.46},s_{2.21}],\end{aligned}$$

$$\tilde{z}_2^{(1)}(\boldsymbol{w}) = 0.15\times[s_2,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_3]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\oplus$$

$$
\begin{aligned}
&0.10\times[s_1,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_1]\oplus\\
&0.15\times[s_{-1},s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2},s_0]\\
&=[s_{0.55},s_{2.08}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_3^{(1)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_4,s_5]\oplus 0.10\times[s_3,s_4]\oplus 0.12\times[s_3,s_4]\oplus\\
&0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_4]\oplus 0.13\times[s_2,s_3]\oplus\\
&0.15\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-2},s_1]\\
=&[s_{1.85},s_{2.33}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_4^{(1)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_3,s_5]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_4]\oplus\\
&0.10\times[s_2,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus 0.13\times[s_1,s_2]\oplus\\
&0.15\times[s_0,s_1]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_0]\\
=&[s_{1.21},s_{2.70}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_1^{(2)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_1,s_4]\oplus 0.12\times[s_1,s_2]\oplus\\
&0.10\times[s_1,s_2]\oplus 0.12\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_3]\oplus\\
&0.15\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]\\
=&[s_{0.76},s_{2.50}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_2^{(2)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\oplus\\
&0.10\times[s_1,s_4]\oplus 0.12\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]\oplus\\
&0.15\times[s_{-2},s_1]\oplus 0.13\times[s_{-2},s_{-1}]\\
=&[s_{0.30},s_{2.15}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_3^{(2)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_3,s_5]\oplus 0.10\times[s_3,s_5]\oplus 0.12\times[s_3,s_4]\oplus\\
&0.10\times[s_3,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\oplus 0.13\times[s_1,s_3]\oplus\\
&0.15\times[s_0,s_1]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]\\
=&[s_{1.65},s_{3.16}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_4^{(2)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\oplus\\
&0.10\times[s_2,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus 0.13\times[s_1,s_2]\oplus\\
&0.15\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]\\
=&[s_{1.21},s_{2.71}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_1^{(3)}(\boldsymbol{w})=&0.15\times[s_2,s_3]\oplus 0.10\times[s_1,s_4]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus\\
&0.10\times[s_1,s_2]\oplus 0.12\times[s_0,s_3]\oplus 0.13\times[s_0,s_2]\oplus\\
&0.15\times[s_0,s_1]\oplus 0.13\times[s_0,s_1]\\
=&[s_{0.62},s_{2.31}],
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{z}_2^{(3)}(\boldsymbol{w})=0.15\times[s_2,s_3]\oplus 0.10\times[s_1,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_2]\oplus
$$

$$
\begin{aligned}
&0.10\times[s_1,s_2]\oplus 0.12\times[s_0,s_3]\oplus 0.13\times[s_0,s_1]\oplus\\
&0.15\times[s_{-1},s_1]\oplus 0.13\times[s_{-3},s_{-1}]\\
&=[s_{0.08},s_{1.70}],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_3^{(3)}(\boldsymbol{w})&=0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_4]\oplus\\
&\quad 0.10\times[s_1,s_4]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus 0.13\times[s_0,s_3]\oplus\\
&\quad 0.15\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_2]\\
&=[s_{1.11},s_{3.19}],\\
\tilde{z}_4^{(3)}(\boldsymbol{w})&=0.15\times[s_3,s_5]\oplus 0.10\times[s_2,s_5]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus\\
&\quad 0.10\times[s_0,s_3]\oplus 0.12\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_0,s_2]\oplus\\
&\quad 0.15\times[s_{-1},s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_0]\\
&=[s_{0.49},s_{2.71}].
\end{aligned}
$$

步骤 2 再利用 ULHA 算子(假设它的加权向量为 $w'=(0.2,0.6,0.2)$)对三位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(k=1,2,3)$进行集结. 首先利用$\boldsymbol{\lambda}$,t 以及 $z_i^{(k)}(\boldsymbol{w})$,求解 $t\lambda_k r_i^{(k)}(\boldsymbol{w})(i=1,2,3,4,\ k=1,2,3)$得

$$
\begin{aligned}
&3\lambda_1 r_1^{(1)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.414},s_{1.989}],3\lambda_1 r_2^{(1)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.495},s_{1.872}],\\
&3\lambda_1 r_3^{(1)}(\boldsymbol{w})=[s_{1.665},s_{2.097}],3\lambda_1 r_4^{(1)}(\boldsymbol{w})=[s_{1.089},s_{2.430}],\\
&3\lambda_2 r_1^{(2)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.912},s_{3.000}],3\lambda_2 r_2^{(2)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.360},s_{2.580}],\\
&3\lambda_2 r_3^{(2)}(\boldsymbol{w})=[s_{1.980},s_{3.792}],3\lambda_2 r_4^{(2)}(\boldsymbol{w})=[s_{1.452},s_{3.252}],\\
&3\lambda_3 r_1^{(3)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.558},s_{2.079}],3\lambda_3 r_2^{(3)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.072},s_{1.530}],\\
&3\lambda_3 r_3^{(3)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.999},s_{2.871}],3\lambda_3 r_4^{(3)}(\boldsymbol{w})=[s_{0.441},s_{2.439}].
\end{aligned}
$$

由此得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_1(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')&=0.2\times[s_{0.912},s_{3.000}]\oplus 0.6\times[s_{0.558},s_{2.079}]\oplus 0.2\times[s_{0.414},s_{1.989}]\\
&=[s_{0.600},s_{2.245}],\\
\tilde{z}_2(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')&=0.2\times[s_{0.360},s_{2.580}]\oplus 0.6\times[s_{0.495},s_{1.872}]\oplus 0.2\times[s_{0.072},s_{1.530}]\\
&=[s_{0.383},s_{1.945}],\\
\tilde{z}_3(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')&=0.2\times[s_{1.980},s_{3.792}]\oplus 0.6\times[s_{1.665},s_{2.097}]\oplus 0.2\times[s_{0.999},s_{2.871}]\\
&=[s_{1.595},s_{2.591}],\\
\tilde{z}_4(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')&=0.2\times[s_{1.452},s_{3.252}]\oplus 0.6\times[s_{1.089},s_{2.430}]\oplus 0.2\times[s_{0.441},s_{2.439}]\\
&=[s_{1.032},s_{2.596}].
\end{aligned}
$$

步骤 3 利用可能度公式(10.1),算出各方案综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')(i=1,2,3,4)$之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}'))(i,j=1,2,3,4)$,并建立可能度互补矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5806 & 0.2461 & 0.3780\\ 0.4194 & 0.5 & 0.1368 & 0.2921\\ 0.3539 & 0.8632 & 0.5 & 0.6090\\ 0.6220 & 0.7079 & 0.3910 & 0.5\end{pmatrix}.$$

步骤 4　利用(4.6)**式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量**

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2254,0.1957,0.2772,0.2684)$$

按其分量大小对方案进行排序,可得

$$x_3 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_2,$$

故最优方案为 x_3.

属性权重为实数且属性值为不确定语言的多属性决策方法及应用

第 11 章

针对属性权重为实数且属性值为不确定语言的多属性决策问题，本章将分别介绍基于正理想点、基于 UEWAA 算子的多属性决策方法，以及基于正理想点和 LHA 算子、基于 UEWAA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法．同时对上述决策方法均进行实例分析．

11.1 基于正理想点的多属性决策方法

11.1.1 决策方法

定义 11.1[253] 设 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{m\times n}$ 为不确定语言决策矩阵，则称 $\widetilde{\boldsymbol{x}}^{+}=(r_1^{+},r_2^{+},\cdots,r_m^{+})$ 为方案的正理想点，其中

$$r_j^{+}=[r_j^{+L},r_j^{+U}],r_j^{+L}=\max_i\{r_{ij}^L\},$$

$$r_j^{+U}=\max_i\{r_{ij}^U\},\quad j\in M,$$

这里 r_j^{+L} 和 r_j^{+U} 分别为 r_j^{+} 的下限和上限．

定义 11.2[253] 设 $\tilde{\mu}=[s_a,s_b]$ 和 $\tilde{v}=[s_c,s_d]$ 为两个不确定语言变量，$c\geqslant a,d\geqslant b$，则定义

$$D(\tilde{\mu},\tilde{v})=\frac{1}{2}(s_{c-a}\oplus s_{d-b})=s_{\frac{1}{2}(c-a+d-b)}\tag{11.1}$$

为 $\tilde{\mu}$ 和 $\tilde{v}$ 的偏差．

根据定义 11.2，可以定义方案 x_i 和方案正理想点之间的偏差

$$\begin{aligned}D(\widetilde{\boldsymbol{x}}^{+},\widetilde{\boldsymbol{x}}_i)=&\omega_1D(r_1^{+},r_{i1})\oplus\omega_2D(r_2^{+},r_{i2})\oplus\cdots\oplus\\&\omega_mD(r_m^{+},r_{im}),\quad i\in N,\end{aligned}\tag{11.2}$$

其中$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$为属性的权重向量,$\tilde{\boldsymbol{x}}_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})(i\in N)$为相应于方案 x_i 的属性值向量.

显然,$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$值越小,表明方案 x_i 与方案正理想点越贴近,因而方案 x_i 越优.

下面介绍一种基于方案正理想点的多属性决策方法. 具体步骤如下[253]:

步骤 1 对于某一多属性决策问题,设 X 和 U 分别为方案集和属性集. $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$为属性的权重向量,$w_j\geqslant 0(j\in M)$, $\sum_{j=1}^{m}w_j=1$. 决策者给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的不确定语言评估值 r_{ij},并得到评估矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$,且$r_{ij}\in\tilde{S}$. 设 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})(i\in N)$为相应于方案 x_i 的属性值向量,$\tilde{\boldsymbol{x}}^+=(r_1^+,r_2^+,\cdots,r_m^+)$为方案正理想点.

步骤 2 由(11.2)式计算方案 x_i 和方案理想点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^+$ 之间的偏差 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$ $(i\in N)$.

步骤 3 利用 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)(i\in N)$ 对方案进行排序和择优.

11.1.2 实例分析

例 11.1 改革开放以来,我国利用外商直接投资取得了很大成绩,尤其是近年来,外资大量向中国转移. 2002 年我国吸引的外资直接投资量为 527 亿美元,成为世界上吸引外商直接投资最多的国家. 由于我国地域辽阔,而且经济发展极不平衡,各地区投资环境差异很大,所以外商在我国投资面临一个投资区位选择问题. 评估地区投资环境竞争力的主要指标(属性)有[169]:u_1——市场规模;u_2——经济开放度;u_3——企业的市场化程度;u_4——地区信用度;u_5——外资企业审批效率;u_6——交通密度;u_7——通信水平;u_8——产业发展水平;u_9——技术水平;u_{10}——人力资源状况等. 评估者利用语言标度

$S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}=\{$极差,很差,差,较差,稍差,一般,稍好,较好,好,很好,极好$\}$.

根据上述 10 项指标对 5 个候选地区的投资环境竞争力进行评估,评估结果如表 11.1 所示. 已知属性权重向量为

$$\boldsymbol{\omega}=(0.12,0.08,0.10,0.05,0.08,0.11,0.15,0.07,0.11,0.13).$$

表 11.1 决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0,s_1]$	$[s_2,s_5]$	$[s_{-1},s_1]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_3]$
x_2	$[s_1,s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_3]$
x_3	$[s_2,s_4]$	$[s_0,s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_3]$
x_4	$[s_{-2},s_0]$	$[s_3,s_5]$	$[s_0,s_3]$	$[s_0,s_2]$	$[s_0,s_1]$
x_5	$[s_{-1},s_2]$	$[s_1,s_4]$	$[s_0,s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_3]$

续表

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_2	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_5]$	$[s_1, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_5	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_0, s_1]$

下面利用 11.1.1 节中的方法进行求解：

步骤 1　由表 11.1 可得相应于方案 x_i 的属性值向量 $\tilde{x}_i$ 以及方案理想点分别为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1=([s_0,s_1],[s_2,s_5],[s_{-1},s_1],[s_1,s_3],[s_2,s_3],[s_2,s_3],[s_{-1},s_1],[s_1,s_2],[s_2,s_3],[s_2,s_4]),$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_2=([s_1,s_2],[s_1,s_3],[s_1,s_4],[s_0,s_1],[s_1,s_3],[s_0,s_1],[s_3,s_4],[s_3,s_5],[s_1,s_4],[s_2,s_3]),$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_3=([s_2,s_4],[s_0,s_2],[s_1,s_3],[s_2,s_3],[s_2,s_3],[s_0,s_2],[s_2,s_3],[s_3,s_4],[s_1,s_3],[s_2,s_4]),$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_4=([s_{-2},s_0],[s_3,s_5],[s_0,s_3],[s_0,s_2],[s_0,s_1],[s_3,s_4],[s_3,s_4],[s_2,s_4],[s_2,s_3],[s_1,s_3]),$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_5=([s_{-1},s_2],[s_1,s_4],[s_0,s_2],[s_1,s_3],[s_1,s_3],[s_2,s_4],[s_0,s_2],[s_0,s_3],[s_1,s_4],[s_0,s_1]),$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^+=([s_2,s_4],[s_3,s_5],[s_1,s_4],[s_2,s_3],[s_2,s_3],[s_3,s_4],[s_3,s_4],[s_3,s_5],[s_2,s_4],[s_2,s_4]).$$

因此方案 x_i 和方案理想点 $\tilde{x}^+$ 之间的偏差分量如表 11.2 所示：

表 11.2　偏差分量 $D(r_j^+, r_{ij})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(r_j^+, r_{1j})$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_0	s_1	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_0
$D(r_j^+, r_{2j})$	$s_{1.5}$	s_2	s_0	s_2	$s_{0.5}$	s_3	s_0	s_0	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$
$D(r_j^+, r_{3j})$	s_0	s_3	$s_{0.5}$	s_0	s_0	$s_{2.5}$	s_1	$s_{0.5}$	s_1	s_0
$D(r_j^+, r_{4j})$	s_4	s_0	s_1	$s_{1.5}$	s_2	s_0	s_0	s_1	$s_{0.5}$	s_1
$D(r_j^+, r_{5j})$	$s_{2.5}$	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$	$s_{2.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{2.5}$

步骤 2 由(11.2)式计算方案 x_i 和方案理想点 $\tilde{x}^+$ 之间的偏差

$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_1)=s_{1.480},D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_2)=s_{0.930},D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_3)=s_{0.860},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_4)=s_{1.070},D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_5)=s_{1.620}.$$

步骤 3 利用 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)(i=1,2,\cdots,5)$对方案进行排序($D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$值越小，相应的方案 $\tilde{x}_i$ 越靠前)，可得

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_5,$$

故最优方案为 x_3.

11.2 基于理想点和 LHA 算子的多属性群决策方法

11.2.1 决策方法

下面介绍一种基于理想点和 LHA 算子的多属性群决策方法. 具体步骤如下[253]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，设 X,U 和 D 分别为方案集、属性集和决策者集. 属性的权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，$\omega_j\geqslant 0(j\in M)$，$\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j=1$. 决策者的权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$，$\lambda_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,t)$，$\sum\limits_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的不确定语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$，并得到评估矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$，且$r_{ij}^{(k)}\in\tilde{S}$，$r_{ij}^{(k)}=[r_{ij}^{(k)^L},r_{ij}^{(k)^U}]$. 设 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(k)}=(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)})$为决策者 d_k 给出的相应于方案 $x_i(i\in N)$的属性值向量，$\tilde{\boldsymbol{x}}^+=(r_1^+,r_2^+,\cdots,r_m^+)$为方案的正理想点，其中

$$r_j^+=[r_j^{+^L},r_j^{+^U}],r_j^{+^L}=\max_i\max_k\{r_{ij}^{(k)^L}\},$$
$$r_j^{+^U}=\max_i\max_k\{r_{ij}^{(k)^U}\},\quad j\in M. \tag{11.3}$$

步骤 2 由(11.2)式先计算相应于决策者 d_k 的方案 x_i 和方案理想点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^+$ 之间的偏差 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(k)})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$.

步骤 3 再利用 LHA 算子对相应于 t 位决策者的偏差 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(k)})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$进行集结，得到决策方案 x_i 与方案理想点 $\tilde{x}^+$ 之的群体偏差 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)$，其中

$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)=\mathrm{LHA}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}}(D(\tilde{x}^+,\tilde{x}_i^{(1)}),D(\tilde{x}^+,\tilde{x}_i^{(2)}),\cdots,D(\tilde{x}^+,\tilde{x}_i^{(t)}))$$
$$=w_1\tilde{v}_i^{(1)}\oplus w_2\tilde{v}_i^{(2)}\oplus\cdots\oplus w_t\tilde{v}_i^{(t)},i\in N,$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_t)$是 LHA 算子的加权向量，$w_k\in[0,1](k=1,2,\cdots,t)$，$\sum_{k=1}^{t}w_k=1$，$\tilde{v}_i^{(k)}$ 是一组加权的语言变量$(t\lambda_1 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(1)}),t\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(2)}),\cdots,t\lambda_t D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(t)}))$ 中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 4　利用 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+,\tilde{\boldsymbol{x}}_i)(i\in N)$对方案进行排序和择优.

11.2.2　实例分析

例 11.2　本例用例 11.1 对 11.2.1 中的方法进行说明. 假设有三位评估者所给出的语言评估矩阵(如表 11.3 表 11.5 所示)，并假定其权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(0.33,0.35,0.32)$.

表 11.3　决策矩阵 $\tilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_4]$	$[s_2,s_4]$
x_2	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_0,s_2]$	$[s_2,s_3]$
x_3	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_3]$
x_4	$[s_{-1},s_0]$	$[s_4,s_5]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_{-1},s_1]$
x_5	$[s_{-1},s_1]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_3]$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_1,s_3]$	$[s_{-1},s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_3]$
x_2	$[s_{-1},s_1]$	$[s_3,s_5]$	$[s_4,s_5]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$
x_3	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_4]$
x_4	$[s_2,s_4]$	$[s_3,s_5]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_3]$
x_5	$[s_1,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_{-1},s_1]$

表 11.4　决策矩阵 $\tilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0,s_2]$	$[s_2,s_5]$	$[s_{-1},s_1]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_3]$
x_2	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_3]$	$[s_1,s_4]$
x_3	$[s_2,s_5]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_4]$
x_4	$[s_{-2},s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_0,s_1]$	$[s_0,s_2]$
x_5	$[s_{-1},s_3]$	$[s_3,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_4]$	$[s_1,s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_2,s_3]$	$[s_{-1},s_1]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_4]$
x_2	$[s_0,s_2]$	$[s_3,s_5]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$
x_3	$[s_0,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_3,s_5]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$
x_4	$[s_3,s_5]$	$[s_3,s_5]$	$[s_2,s_5]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_2]$
x_5	$[s_2,s_3]$	$[s_0,s_3]$	$[s_0,s_4]$	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_2]$

表 11.5 决策矩阵 $\widetilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_2, s_5]$	$[s_1, s_3]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_{-1}, s_1]$
x_5	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$

	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
x_1	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$
x_2	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_4]$	$[s_4, s_5]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_3]$
x_3	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_4, s_5]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_{-1}, s_1]$

步骤 1 由(11.3)式求方案的理想点

$$\widetilde{x}^+ = ([s_3, s_5], [s_4, s_5], [s_3, s_4], [s_2, s_4], [s_2, s_4], [s_4, s_5], [s_3, s_5], [s_4, s_5], [s_3, s_4], [s_3, s_4]).$$

步骤 2 先计算偏差分量 $D(r_j^+, r_{ij}^{(k)})$(见表 11.6 表 11.8):

表 11.6 偏差分量 $D(r_j^+, r_{ij}^{(1)})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(r_j^+, r_{1j}^{(1)})$	$s_{2.5}$	s_1	s_3	$s_{0.5}$	s_0	$s_{2.5}$	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_1
$D(r_j^+, r_{2j}^{(1)})$	s_2	s_2	$s_{0.5}$	s_2	$s_{0.5}$	$s_{4.5}$	s_0	s_0	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(r_j^+, r_{3j}^{(1)})$	$s_{0.5}$	s_3	s_1	s_0	s_1	s_3	s_1	$s_{1.5}$	s_2	s_0
$D(r_j^+, r_{4j}^{(1)})$	$s_{4.5}$	s_0	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	s_3	$s_{1.5}$	s_0	s_1	$s_{1.5}$	s_1
$D(r_j^+, r_{5j}^{(1)})$	s_4	$s_{1.5}$	s_2	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$	s_2	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{3.5}$

表 11.7 偏差分量 $D(r_j^+, r_{ij}^{(2)})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(r_j^+, r_{1j}^{(2)})$	s_3	s_1	$s_{3.5}$	s_1	$s_{0.5}$	s_2	s_4	s_3	s_1	$s_{0.5}$
$D(r_j^+, r_{2j}^{(2)})$	s_2	s_3	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$	$s_{3.5}$	s_0	s_1	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(r_j^+, r_{3j}^{(2)})$	$s_{0.5}$	s_4	s_2	s_0	s_0	s_3	s_1	$s_{0.5}$	s_2	s_1
$D(r_j^+, r_{4j}^{(2)})$	$s_{4.5}$	s_1	s_3	$s_{2.5}$	s_2	$s_{0.5}$	s_0	s_1	$s_{0.5}$	s_2
$D(r_j^+, r_{5j}^{(2)})$	s_3	s_1	s_3	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$	s_2	$s_{2.5}$	$s_{2.5}$	$s_{1.5}$	$s_{2.5}$

表 11.8　偏差分量 $D(r_j^+, r_{ij}^{(3)})$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$D(r_j^+, r_{1j}^{(3)})$	$s_{2.5}$	s_1	s_3	$s_{0.5}$	s_0	$s_{2.5}$	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	s_1
$D(r_j^+, r_{2j}^{(3)})$	s_2	s_2	s_1	s_2	$s_{0.5}$	$s_{4.5}$	s_0	s_0	$s_{1.5}$	$s_{0.5}$
$D(r_j^+, r_{3j}^{(3)})$	$s_{0.5}$	s_3	s_1	s_0	s_1	s_3	s_1	$s_{1.5}$	s_2	s_0
$D(r_j^+, r_{4j}^{(3)})$	$s_{4.5}$	s_0	$s_{1.5}$	$s_{1.5}$	s_3	$s_{1.5}$	s_0	s_1	$s_{1.5}$	s_1
$D(r_j^+, r_{5j}^{(3)})$	s_4	$s_{1.5}$	s_2	$s_{0.5}$	$s_{0.5}$	s_2	$s_{3.5}$	$s_{2.5}$	$s_{0.5}$	$s_{3.5}$

再计算相应于决策者 d_k 的方案 x_i 和方案正理想点 $\tilde{x}^+$ 之间的偏差：

$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{(1)}) = s_{1.865}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(1)}) = s_{1.315}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3^{(1)}) = s_{1.285},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(1)}) = s_{1.535}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5^{(1)}) = s_{2.295}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{(2)}) = s_{2.085},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(2)}) = s_{1.430}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3^{(2)}) = s_{1.445}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(2)}) = s_{1.645},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5^{(2)}) = s_{2.065}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{(3)}) = s_{1.865}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(3)}) = s_{1.365},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3^{(3)}) = s_{1.285}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(3)}) = s_{1.535}, D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5^{(3)}) = s_{2.295}.$$

步骤 3　利用 LHA 算子(假设它的加权向量为 $w=(0.3,0.4,0.3)$)对相应于 3 位决策者的偏差 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(k)})(i\in N, k=1,2,\cdots,t)$进行集结. 首先利用$\boldsymbol{\lambda}$, t 以及 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(k)})$，求解 $t\lambda_k D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_i^{(k)})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$，得

$$3\lambda_1 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{(1)}) = s_{1.846}, 3\lambda_1 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(1)}) = s_{1.302}, 3\lambda_1 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3^{(1)}) = s_{1.272},$$
$$3\lambda_1 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(1)}) = s_{1.520}, 3\lambda_1 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5^{(1)}) = s_{2.272}, 3\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{(2)}) = s_{2.189},$$
$$3\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(2)}) = s_{1.502}, 3\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3^{(2)}) = s_{1.517}, 3\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(2)}) = s_{1.727},$$
$$3\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5^{(2)}) = s_{2.168}, 3\lambda_3 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1^{(3)}) = s_{1.790}, 3\lambda_2 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2^{(3)}) = s_{1.310},$$
$$3\lambda_3 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3^{(3)}) = s_{1.234}, 3\lambda_3 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4^{(3)}) = s_{1.474}, 3\lambda_3 D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5^{(3)}) = s_{2.203}.$$

然后求得方案 x_i 与方案正理想点 $\tilde{x}^+$ 之的群体偏差 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_i)$：

$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_1) = 0.3 \times s_{2.189} \oplus 0.4 \times s_{1.846} \oplus 0.3 \times s_{1.790} = s_{1.932},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_2) = 0.3 \times s_{1.502} \oplus 0.4 \times s_{1.310} \oplus 0.3 \times s_{1.302} = s_{1.365},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_3) = 0.3 \times s_{1.517} \oplus 0.4 \times s_{1.272} \oplus 0.3 \times s_{1.234} = s_{1.334},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_4) = 0.3 \times s_{1.727} \oplus 0.4 \times s_{1.520} \oplus 0.3 \times s_{1.474} = s_{1.568},$$
$$D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_5) = 0.3 \times s_{2.272} \oplus 0.4 \times s_{2.203} \oplus 0.3 \times s_{2.168} = s_{2.213}.$$

步骤 4　利用 $D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_i)(i=1,2,3,4)$值对方案进行排序($D(\tilde{\boldsymbol{x}}^+, \tilde{\boldsymbol{x}}_i)$值越小，相应的方案 x_i 越靠前)：

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_5,$$

故最优方案为 x_3.

11.3 基于 UEWAA 算子的多属性决策方法

11.3.1 决策方法

下面介绍一种基于 UEWAA 算子的多属性决策方法. 具体步骤如下[253]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，设 X, U 分别为方案集和属性集. 属性的权重向量为 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，$\omega_j \geqslant 0 (j\in M)$，$\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$. 决策者给出方案 $x_i \in X$ 在属性 $u_j \in U$ 下的不确定语言评估值 r_{ij}，并得到评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$，且 $r_{ij}\in \widetilde{S}$.

步骤 2 利用 UEWAA 算子对评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$：

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{EWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im}) = \omega_1 r_{i1} \oplus \omega_2 r_{i2} \oplus \cdots \oplus \omega_m r_{im},\ i\in N.$$

步骤 3 利用(10.1)式，算出各方案综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i\in N)$ 之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\omega)\geqslant \tilde{z}_i(\omega))(i,j\in N)$，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 4 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

11.3.2 实例分析

例 11.3 维修服务是制造企业向客户提供的一种必不可少的服务，是对其特定产品的一种支持，原因在于这部分产品需要定期进行修理和维护. 目前，维修服务已经被客户认为是产品本身的一个组成部分. 如果没有维修服务，客户根本就不会购买企业的产品. 实例证明，那些在维修服务方面做得好的公司其市场销售处于上升的趋势. 反之，那些不注意维修服务的公司其市场销售则处于不利的地位. 市场调查研究显示，维修服务与市场销售具有正相关效应，同时，激烈的市场竞争迫使企业的决策者越来越重视维修服务. 对于有自己的维修服务网络体系的企业来说，在异地的维修服务网点一般情况下都是选择当地的维修商作为自己的维修服务商. 为了实现企业的经营目标，保证维修商能较好地完成维修服务，对维修商进行选择和评价，将是企业的决策者必须面对的问题. 影响维修商选择的因素很多，主要有[320]：u_1——用户满意度；u_2——维修

服务态度；u_3——维修速度；u_4——维修质量；u_5——技术咨询水平；u_6——信息化水平；u_7——管理水平；u_8——收费合理性；u_9——公司规模.

下面应用上述评价因素(属性)对某一地区 5 个维修商进行评价. 假定属性的权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(0.10,0.08,0.12,0.09,0.11,0.13,0.15,0.10,0.12)$. 决策者利用语言评估标度 $S=\{s_\alpha|\alpha=-5,\cdots,5\}$(如可取{极差,很差,差,较差,稍差,一般,稍好,较好,好,很好,极好},{极低,很低,低,较低,稍低,一般,稍高,较高,高,很高,极高}等)所得的评估矩阵如表 11.9 所示.

表 11.9　决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_{-1},s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_{-1},s_0]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_3]$
x_2	$[s_0,s_2]$	$[s_0,s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_3]$	$[s_3,s_4]$
x_3	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_2]$
x_4	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_5]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_2]$
x_5	$[s_0,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_3]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_2]$	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_3]$
x_2	$[s_1,s_3]$	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_4]$
x_3	$[s_{-1},s_1]$	$[s_1,s_3]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_4]$
x_4	$[s_4,s_5]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_3]$
x_5	$[s_2,s_3]$	$[s_0,s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$

下面利用 11.3.1 中的方法进行说明:

步骤 1　利用 UEWAA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结,得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,\cdots,5)$:

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(\boldsymbol{\omega})&=0.10\times[s_{-1},s_1]\oplus 0.08\times[s_3,s_4]\oplus 0.12\times[s_{-1},s_0]\oplus\\&\quad 0.09\times[s_3,s_4]\oplus 0.11\times[s_1,s_3]\oplus 0.13\times[s_1,s_3]\oplus\\&\quad 0.15\times[s_1,s_2]\oplus 0.10\times[s_1,s_2]\oplus 0.12\times[s_0,s_3]\\&=[s_{0.78},s_{2.36}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_2(\boldsymbol{\omega})&=0.10\times[s_0,s_2]\oplus 0.08\times[s_0,s_1]\oplus 0.12\times[s_3,s_4]\oplus\\&\quad 0.09\times[s_1,s_3]\oplus 0.11\times[s_3,s_4]\oplus 0.13\times[s_1,s_3]\oplus\\&\quad 0.15\times[s_3,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_4]\oplus 0.12\times[s_2,s_4]\\&=[s_{1.80},s_{3.34}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_3(\boldsymbol{\omega}) &= 0.10\times[s_1,s_2]\oplus 0.08\times[s_0,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus\\ &\quad 0.09\times[s_1,s_2]\oplus 0.11\times[s_0,s_2]\oplus 0.13\times[s_{-1},s_1]\oplus\\ &\quad 0.15\times[s_1,s_3]\oplus 0.10\times[s_3,s_4]\oplus 0.12\times[s_1,s_4]\\ &= [s_{0.75},s_{2.66}],\\ \tilde{z}_4(\boldsymbol{\omega}) &= 0.10\times[s_1,s_2]\oplus 0.08\times[s_3,s_5]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\oplus\\ &\quad 0.09\times[s_1,s_3]\oplus 0.11\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_4,s_5]\oplus\\ &\quad 0.15\times[s_2,s_4]\oplus 0.10\times[s_2,s_3]\oplus 0.12\times[s_2,s_3]\\ &= [s_{2.04},s_{3.36}],\\ \tilde{z}_5(\boldsymbol{\omega}) &= 0.10\times[s_0,s_2]\oplus 0.08\times[s_2,s_3]\oplus 0.12\times[s_1,s_3]\oplus\\ &\quad 0.09\times[s_2,s_4]\oplus 0.11\times[s_1,s_2]\oplus 0.13\times[s_2,s_3]\oplus\\ &\quad 0.15\times[s_0,s_2]\oplus 0.10\times[s_1,s_3]\oplus 0.12\times[s_2,s_4]\\ &= [s_{1.17},s_{2.96}].\end{aligned}$$

步骤 2 利用(10.1)式计算各方案综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5)$ 之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\omega})\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\omega}))(i,j=1,2,3,4,5)$，并建立可能度互补矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.1795 & 0.4613 & 0.1103 & 0.3531\\ 0.8205 & 0.5 & 0.7507 & 0.4545 & 0.6517\\ 0.5387 & 0.2493 & 0.5 & 0.1920 & 0.4027\\ 0.8897 & 0.5455 & 0.8080 & 0.5 & 0.7042\\ 0.6469 & 0.3483 & 0.5973 & 0.2958 & 0.5\end{pmatrix}.$$

步骤 3 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{v}=(0.1552,0.2339,0.1691,0.2474,0.1944),$$

按其分量大小对方案进行排序，得到

$$x_4\succ x_2\succ x_5\succ x_3\succ x_1,$$

故最优方案为 x_4.

11.4 基于 UEWAA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法

11.4.1 决策方法

下面介绍一种基于 UEWAA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法. 具体步骤如下[254]：

步骤 1　对于某一多属性决策问题，设 X，U 和 D 分别为方案集、属性集和决策者集. 属性权重的权重向量为$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$，且其向量为 $\omega_j\geqslant 0(j\in M)$，$\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$. 决策者的权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$，$\lambda_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,t)$. $\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的不确定语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$，并得到评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$，且$r_{ij}^{(k)}\in\widetilde{S}$.

步骤 2　利用 UEWAA 算子对评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_k$ 中第 i 行的不确定语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i\in N$，$k=1,2,\cdots,t)$：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})&=\mathrm{UEWAA}_{\boldsymbol{\omega}}(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)})\\&=\omega_1 r_{i1}^{(k)}\oplus\omega_2 r_{i2}^{(k)}\oplus\cdots\oplus\omega_m r_{im}^{(k)},\quad i\in N,k=1,2,\cdots,t.\end{aligned}$$

步骤 3　再利用 ULHA 算子对 t 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')(i\in N)$：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')&=\mathrm{ULHA}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}'}(r_i^{(1)},r_i^{(2)},\cdots,r_i^{(t)})\\&=w_1'\tilde{v}_i^{(1)}\oplus w_2'\tilde{v}_i^{(2)}\oplus\cdots\oplus w_t'\tilde{v}_i^{(t)},\quad i\in N,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{w}'=(w_1',w_2',\cdots,w_t')$ 是 ULHA 算子的加权向量，$w_k'\in[0,1]$ $(k=1,2,\cdots,t)$，$\sum_{k=1}^{t}w_k'=1$，$\tilde{v}_i^{(k)}$ 是一组加权的不确定语言变量$(t\lambda_1 r_i^{(1)}(\boldsymbol{\omega})$，$t\lambda_2 r_i^{(2)}(\boldsymbol{\omega}),\cdots,t\lambda_t r_i^{(t)}(\boldsymbol{\omega}))$ 中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 4　利用(10.1)式，算出各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')(i\in N)$ 之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}')\geqslant\tilde{z}_j(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}'))(i,j\in N)$，并建立可能度矩阵$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 5　利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量$\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

11.4.2　实例分析

例 11.4　本例用例 11.2 对 11.4.1 节中的方法进行说明. 假设有关原始资料来源于 3 位决策者所给出的不确定语言评估矩阵(如表 11.10 表 11.12 所示)，并假定其权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(0.35,0.33,0.32)$.

表 11.10　决策矩阵 $\widetilde{R}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0,s_2]$	$[s_3,s_4]$	$[s_{-2},s_0]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_3]$
x_2	$[s_0,s_3]$	$[s_0,s_2]$	$[s_3,s_5]$	$[s_1,s_4]$	$[s_2,s_4]$
x_3	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_1]$
x_4	$[s_0,s_2]$	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_4]$	$[s_2,s_3]$	$[s_0,s_2]$
x_5	$[s_{-1},s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_3]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_2]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2,s_3]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_1]$
x_2	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_4]$	$[s_2,s_3]$
x_3	$[s_{-1},s_0]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_2]$
x_4	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$
x_5	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_5]$

表 11.11　决策矩阵 $\widetilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_{-1},s_0]$	$[s_2,s_3]$	$[s_{-1},s_1]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_2]$
x_2	$[s_0,s_1]$	$[s_0,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$
x_3	$[s_0,s_2]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_2]$	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_1]$
x_4	$[s_1,s_3]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_2]$
x_5	$[s_0,s_1]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2,s_3]$	$[s_0,s_1]$	$[s_1,s_3]$	$[s_0,s_1]$
x_2	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_4]$	$[s_2,s_3]$
x_3	$[s_{-1},s_0]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_1,s_2]$
x_4	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_3]$	$[s_2,s_4]$
x_5	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_5]$

表 11.12　决策矩阵 $\widetilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_1,s_2]$	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_2]$	$[s_2,s_3]$
x_2	$[s_2,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_2]$
x_3	$[s_{-1},s_1]$	$[s_2,s_3]$	$[s_{-1},s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_3]$
x_4	$[s_3,s_4]$	$[s_3,s_4]$	$[s_2,s_3]$	$[s_0,s_2]$	$[s_2,s_3]$
x_5	$[s_{-1},s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_0,s_1]$	$[s_3,s_5]$	$[s_3,s_4]$

续表

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_4]$
x_4	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_3]$
x_5	$[s_{-1}, s_0]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_4]$

步骤 1　利用 UEWAA 算子对评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,k=1,2,3)$：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega}) &= 0.10\times[s_0, s_2]\oplus 0.08\times[s_3, s_4]\oplus 0.12\times[s_{-2}, s_0]\oplus\\ &\quad 0.09\times[s_2, s_4]\oplus 0.11\times[s_2, s_3]\oplus 0.13\times[s_1, s_2]\oplus\\ &\quad 0.15\times[s_0, s_1]\oplus 0.10\times[s_1, s_3]\oplus 0.12\times[s_1, s_2]\\ &=[s_{0.75}, s_{2.16}].\end{aligned}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}&\tilde{z}_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.64}, s_{2.33}],\tilde{z}_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.16}, s_{2.55}],\tilde{z}_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.79}, s_{3.34}],\\ &\tilde{z}_5^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.07}, s_{2.48}],\tilde{z}_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{0.59}, s_{1.81}],\tilde{z}_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.32}, s_{2.60}],\\ &\tilde{z}_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{0.45}, s_{1.89}],\tilde{z}_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.78}, s_{3.10}],\tilde{z}_5^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.25}, s_{2.97}],\\ &\tilde{z}_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.49}, s_{2.77}],\tilde{z}_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.79}, s_{3.11}],\tilde{z}_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.12}, s_{2.67}],\\ &\tilde{z}_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.91}, s_{3.34}],\tilde{z}_5^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.20}, s_{2.51}].\end{aligned}$$

步骤 2　利用 ULHA 算子(假设它的加权向量为 $w=(0.3,0.4,0.3)$)对 3 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(k=1,2,3)$进行集结. 首先利用$\boldsymbol{\lambda}$，$t$ 以及 $\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})$，求解 $t\lambda_k\tilde{z}_i^{(k)}(\boldsymbol{\omega})(i=1,2,3,4,5,k=1,2,3)$，得

$$\begin{aligned}&3\lambda_1\tilde{z}_1^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{0.788}, s_{2.268}],\quad 3\lambda_1\tilde{z}_2^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.722}, s_{2.447}],\\ &3\lambda_1\tilde{z}_3^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.218}, s_{2.678}],\quad 3\lambda_1\tilde{z}_4^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.880}, s_{3.507}],\\ &3\lambda_1\tilde{z}_5^{(1)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.124}, s_{2.604}],\quad 3\lambda_2\tilde{z}_1^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{0.584}, s_{1.792}],\\ &3\lambda_2\tilde{z}_2^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.307}, s_{2.574}],\quad 3\lambda_2\tilde{z}_3^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{0.446}, s_{1.871}],\\ &3\lambda_2\tilde{z}_4^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.762}, s_{3.069}],\quad 3\lambda_2\tilde{z}_5^{(2)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.238}, s_{2.940}],\\ &3\lambda_3\tilde{z}_1^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.401}, s_{2.604}],\quad 3\lambda_3\tilde{z}_2^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.683}, s_{2.923}],\\ &3\lambda_3\tilde{z}_3^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.053}, s_{2.510}],\quad 3\lambda_3\tilde{z}_4^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.795}, s_{2.510}],\\ &3\lambda_3\tilde{z}_5^{(3)}(\boldsymbol{\omega})=[s_{1.128}, s_{2.360}].\end{aligned}$$

由此得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\lambda, w)(i=1,2,3,4,5)$：

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.401}, s_{2.604}] \oplus 0.4 \times [s_{0.788}, s_{2.268}] \oplus 0.3 \times [s_{0.584}, s_{1.792}] = [s_{0.9107}, s_{2.2260}],$$

$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.683}, s_{2.923}] \oplus 0.4 \times [s_{1.722}, s_{2.447}] \oplus 0.3 \times [s_{1.307}, s_{2.574}] = [s_{1.5858}, s_{2.6279}]$$

$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.218}, s_{2.678}] \oplus 0.4 \times [s_{1.053}, s_{2.510}] \oplus 0.3 \times [s_{0.446}, s_{1.871}] = [s_{0.9204}, s_{2.3687}],$$

$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.880}, s_{3.507}] \oplus 0.4 \times [s_{1.762}, s_{3.069}] \oplus 0.3 \times [s_{1.795}, s_{2.510}] = [s_{1.8073}, s_{3.0327}],$$

$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.238}, s_{2.940}] \oplus 0.4 \times [s_{1.124}, s_{2.604}] \oplus 0.3 \times [s_{1.128}, s_{2.359}] = [s_{1.1594}, s_{2.6313}].$$

步骤 3　利用(10.1)**式，计算各方案综合属性评估值** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, w)$ $(i=1,2,3,4,5)$**之间的可能度** $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, w) \geqslant \tilde{z}_j(\boldsymbol{\lambda}, w))$ $(i,j=1,2,3,4,5)$**，并建立可能度矩阵**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2716 & 0.4724 & 0.1648 & 0.3827 \\ 0.7284 & 0.5 & 0.6856 & 0.3295 & 0.5841 \\ 0.5276 & 0.3144 & 0.5 & 0.2100 & 0.4141 \\ 0.8352 & 0.6705 & 0.7900 & 0.5 & 0.6945 \\ 0.6173 & 0.4159 & 0.5859 & 0.3055 & 0.5 \end{pmatrix}$$

步骤 4　利用(4.6)**式求得可能度矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的排序向量**

$$\boldsymbol{\upsilon} = (0.1646, 0.2164, 0.1733, 0.2495, 0.1962).$$

按其分量大小对方案进行排序，得

$$x_4 \succ x_2 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_1.$$

故最优方案为 x_4.

属性权重为区间数且属性值为不确定语言的多属性决策方法及应用

第12章

目前，有关此类问题的研究成果尚未见发表. 本章将首先给出区间集结(IA)算子的概念，然后分别给出基于IA算子的多属性决策方法，以及基于IA算子和ULHA算子的多属性群决策方法，并且应用于解决社会经济系统的决策评价问题.

12.1 基于IA算子的多属性决策方法

12.1.1 决策方法

设 $\tilde{\delta}=[\delta^L,\delta^U]$ 和 $\tilde{\mu}=[s_a,s_b]$ 分别为一个区间数和一个不确定语言变量. 首先定义如下运算法则[254]：

$$\tilde{\delta}\otimes\tilde{\mu}=[\delta^L,\delta^U]\otimes[s_a,s_b]=[s_{a'},s_{b'}].$$

其中 $a'=\min\{\delta^L a,\delta^L b,\delta^U a,\delta^U b\}$, $b'=\max\{\delta^L a,\delta^L b,\delta^U a,\delta^U b\}$.

定义 12.1[254] 设 $(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_n)$ 和 $(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n)$ 分别为一组区间数和一组不确定语言变量，其中 $\tilde{\omega}_j=[\omega_j^L,\omega_j^U]$ $(j\in N)$, $\omega_j^L,\omega_j^U\in R^+$, $\tilde{\mu}_j=[s_{\alpha_j},s_{\beta_j}]$ $(j\in N)$, $s_{\alpha_j},s_{\beta_j}\in\bar{S}$. 定义

$$\mathrm{IA}_{\tilde{\omega}}(\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2,\cdots,\tilde{\mu}_n),$$
$$=\tilde{\omega}_1\otimes\tilde{\mu}_1\oplus\tilde{\omega}_2\otimes\tilde{\mu}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{\omega}_n\otimes\tilde{\mu}_n,$$

则称函数IA为区间集结(IA)算子.

下面给出一种基于IA算子的多属性决策方法. 具体步骤如下[254]：

步骤 1 对于某一多属性决策问题，设 X 和 U 分别为方案集和属性集. 属性的权重信息以区间数形式给出，即 $\tilde{\omega}_j=[\omega_j^L,\omega_j^U],\omega_j^L,\omega_j^U\in\mathbb{R}^+$，并且令 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_m)$. 决策者给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的不确定语言评估 r_{ij}，并得到评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(r_{ij})_{n\times m}$，且 $r_{ij}\in\widetilde{S}$.

步骤 2 利用 IA 算子对评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(i\in N)$：

$$\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=\mathrm{IA}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})=\tilde{\omega}_1\otimes r_{i1}\oplus\tilde{\omega}_2\otimes r_{i2}\oplus\cdots\oplus\tilde{\omega}_m\otimes r_{im},\ i\in N.$$

步骤 3 利用(10.1)式，计算各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})$ $(i\in N)$之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})\geqslant\tilde{z}_j(\tilde{\boldsymbol{\omega}}))$ $(i,j\in N)$，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 4 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

12.1.2 实例分析

例 12.1 社会经济系统的决策评价问题，诸如投资环境的评价、某项改革措施的效益评价以及城市规划方案等系统，涉及政治、经济、技术、生态环境和文化等诸方面的因素，这些决策问题涉及的因素众多，加上所需资料缺乏，其评价过程中常常包含着许多不确定性和模糊性. 有关的评价指标(属性)主要有[112]：u_1——政治环境；u_2——经济环境；u_3——财务环境；u_4——行政环境；u_5——市场环境；u_6——技术条件；u_7——物质基础；u_8——法律环境；u_9——自然环境.

下面应用上述评价因素(属性)对 5 个城市 $x_i(i=1,2,3,4,5)$的投资环境进行评价. 假定属性权重信息以区间数形式给出，即

$$\tilde{\omega}_1=[0.08,0.10],\ \tilde{\omega}_2=[0.05,0.09],\ \tilde{\omega}_3=[0.10,0.12],$$
$$\tilde{\omega}_4=[0.08,0.11],\ \tilde{\omega}_5=[0.10,0.13],\ \tilde{\omega}_6=[0.12,0.14],$$
$$\tilde{\omega}_7=[0.14,0.16],\ \tilde{\omega}_8=[0.09,0.11],\ \tilde{\omega}_9=[0.11,0.15].$$

决策者利用语言评估标度

$S=\{s_{-5},\cdots,s_5\}$

$=\{$极差，很差，差，较差，稍差，一般，稍好，较好，好，很好，极好$\}$

所得的评估矩阵如表 12.1 所示.

表 12.1　决策矩阵 $\widetilde{R}$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_0, s_3]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$
x_3	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_3]$
x_4	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_1, s_4]$

	u_6	u_7	u_8	u_9
x_1	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_1, s_2]$
x_4	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$

下面利用 12.1.1 中的方法进行说明：

步骤 1　利用 IA 算子对评估矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\tilde{\omega})$（$i=1,2,\cdots,5$）：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) =& [0.08,0.10]\otimes[s_1,s_2]\oplus[0.05,0.09]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\&[0.10,0.12]\otimes[s_1,s_2]\oplus[0.08,0.11]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\&[0.10,0.13]\otimes[s_0,s_1]\oplus[0.12,0.14]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\&[0.14,0.16]\otimes[s_{-1},s_2]\oplus[0.09,0.11]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\&[0.11,0.15]\otimes[s_2,s_3]\\=&[s_{0.94},s_{2.69}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_2(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) =& [0.08,0.10]\otimes[s_0,s_3]\oplus[0.05,0.09]\otimes[s_{-1},s_1]\oplus\\&[0.10,0.12]\otimes[s_2,s_3]\oplus[0.08,0.11]\otimes[s_0,s_1]\oplus\\&[0.10,0.13]\otimes[s_2,s_4]\oplus[0.12,0.14]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\&[0.14,0.16]\otimes[s_2,s_3]\oplus[0.09,0.11]\otimes[s_3,s_4]\oplus\\&[0.11,0.15]\otimes[s_1,s_2]\\=&[s_{1.25},s_{2.92}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{z}_3(\tilde{\boldsymbol{\omega}}) =& [0.08,0.10]\otimes[s_0,s_1]\oplus[0.05,0.09]\otimes[s_0,s_2]\oplus\\&[0.10,0.12]\otimes[s_1,s_2]\oplus[0.08,0.11]\otimes[s_0,s_1]\oplus\\&[0.10,0.13]\otimes[s_1,s_3]\oplus[0.12,0.14]\otimes[s_0,s_2]\oplus\\&[0.14,0.16]\otimes[s_2,s_3]\oplus[0.09,0.11]\otimes[s_2,s_3]\oplus\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[0.11,0.15]\otimes[s_1,s_2]\\
&=[s_{0.77},s_{2.41}],\\
\tilde{z}_4(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=&[0.08,0.10]\otimes[s_0,s_1]\oplus[0.05,0.09]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\
&[0.10,0.12]\otimes[s_1,s_2]\oplus[0.08,0.11]\otimes[s_2,s_3]\oplus\\
&[0.10,0.13]\otimes[s_0,s_2]\oplus[0.12,0.14]\otimes[s_1,s_2]\oplus\\
&[0.14,0.16]\otimes[s_3,s_4]\oplus[0.09,0.11]\otimes[s_1,s_3]\oplus\\
&[0.11,0.15]\otimes[s_0,s_2]\\
&=[s_{1.05},s_{2.75}],\\
\tilde{z}_5(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=&[0.08,0.10]\otimes[s_0,s_1]\oplus[0.05,0.09]\otimes[s_0,s_3]\oplus\\
&[0.10,0.12]\otimes[s_1,s_4]\oplus[0.08,0.11]\otimes[s_1,s_2]\oplus\\
&[0.10,0.13]\otimes[s_1,s_4]\oplus[0.12,0.14]\otimes[s_1,s_2]\oplus\\
&[0.14,0.16]\otimes[s_0,s_1]\oplus[0.09,0.11]\otimes[s_0,s_2]\oplus\\
&[0.11,0.15]\otimes[s_2,s_3]\\
&=[s_{0.62},s_{2.70}].
\end{aligned}
$$

步骤 2 利用(10.1)式，计算各方案综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(i=1,2,3,4,5)$ 之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})\geqslant\tilde{z}_j(\tilde{\boldsymbol{\omega}}))$ $(i,j=1,2,3,4,5)$，并建立可能度矩阵

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}
0.5 & 0.4211 & 0.5664 & 0.4754 & 0.5405\\
0.5789 & 0.5 & 0.6495 & 0.5549 & 0.6133\\
0.4336 & 0.3505 & 0.5 & 0.4072 & 0.4812\\
0.5246 & 0.4451 & 0.5928 & 0.5 & 0.5635\\
0.4595 & 0.3867 & 0.5188 & 0.4365 & 0.5
\end{pmatrix}.
$$

步骤 3 利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量

$$\boldsymbol{\upsilon}=(0.2002,0.2198,0.1836,0.2063,0.1901)$$

按其分量大小对方案进行排序

$$x_2\succ x_4\succ x_1\succ x_5\succ x_3,$$

故最优方案为 x_2.

12.2 基于 IA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法

12.2.1 决策方法

下面介绍一种基于 IA 算子和 ULHA 算子的多属性群决策方法. 具体步骤如下[254]：

步骤 1　对于某一多属性决策问题，设 X，U 和 D 分别为方案集、属性集和决策者集. 属性的权重为区间数，即 $\tilde{\omega}_j=[\omega_j^L,\omega_j^U]$，$\omega_j^L,\omega_j^U\in\mathbb{R}^+$，并且令 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}=(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\cdots,\tilde{\omega}_m)$. 决策者的权重向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)$，$\lambda_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,t)$，$\sum_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 决策者 $d_k\in D$ 给出方案 $x_i\in X$ 在属性 $u_j\in U$ 下的不确定语言评估值 $r_{ij}^{(k)}$，并得到评估矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k=(r_{ij}^{(k)})_{n\times m}$，且 $r_{ij}^{(k)}\in\tilde{S}(i\in N,j\in M)$.

步骤 2　利用 IA 算子对评估矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k$ 中第 i 行的不确定语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(i\in N,k=1,2,\cdots,t)$：

$$
\begin{aligned}
r_i^{(k)} &= \mathrm{IA}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}(r_{i1}^{(k)},r_{i2}^{(k)},\cdots,r_{im}^{(k)})\\
&= \tilde{\omega}_1\otimes r_{i1}^{(k)}\oplus\tilde{\omega}_2\otimes r_{i2}^{(k)}\oplus\cdots\oplus\tilde{\omega}_m\otimes r_{im}^{(k)},\quad i\in N.
\end{aligned}
$$

步骤 3　利用 ULHA 算子对 t 位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{\omega})(k=1,2,\cdots,t)$进行集结，得到决策方案 x_i 的群体综合属性评估值 $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w})(i\in N)$：

$$
\begin{aligned}
\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}) &= \mathrm{ULHA}_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{w}}(\tilde{z}_i^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}),\tilde{z}_i^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}),\cdots,\tilde{z}_i^{(t)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}))\\
&= w_1\tilde{v}_i^{(1)}\oplus w_2\tilde{v}_i^{(2)}\oplus\cdots\oplus w_t\tilde{v}_i^{(t)},\quad i\in N,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2\cdots,w_t)$是 ULHA 算子的加权向量，$w_k\in[0,1](k=1,2,\cdots,t)$，$\sum_{k=1}^{t}w_k=1$，$\tilde{v}_i^{(k)}$ 是一组加权的不确定语言变量$(t\lambda_1\tilde{z}_i^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}),t\lambda_2\tilde{z}_i^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}),\cdots,t\lambda_t\tilde{z}_i^{(t)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}))$中第 k 大的元素，t 是平衡因子.

步骤 4　利用(10.1)式，计算各方案综合属性值 $\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(i\in N)$之间的可能度 $p_{ij}=p(\tilde{z}_i(\tilde{\boldsymbol{\omega}})\geqslant\tilde{z}_j(\tilde{\boldsymbol{\omega}}))(i,j\in N)$，并建立可能度矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$.

步骤 5　利用(4.6)式求得可能度矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的排序向量 $\boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2\cdots,\upsilon_n)$，并按其分量大小对方案进行排序，即得到最优方案.

12.2.2　实例分析

例 12.2　本例用例 12.1 对 12.2.1 节中的方法进行说明. 假设有关原始资料来源于 3 位决策者所给出的不确定语言评估矩阵(如表 12.2 表 12.4 所示)，并假定其权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=(0.34,0.33,0.33)$.

表 12.2　决策矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}_1$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_{-1},s_0]$	$[s_0,s_1]$	$[s_3,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_2]$
x_2	$[s_2,s_3]$	$[s_2,s_3]$	$[s_4,s_5]$	$[s_2,s_3]$	$[s_1,s_2]$
x_3	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_2]$	$[s_0,s_1]$	$[s_2,s_4]$	$[s_1,s_3]$

续表

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_4	$[s_0, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$
x_5	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_0, s_1]$
	u_6	u_7	u_8	u_9	
x_1	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_1]$	
x_4	$[s_2, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	
x_5	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	

表 12.3　决策矩阵 $\widetilde{R}_2$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$
x_2	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_0]$
x_4	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_0, s_2]$
x_5	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_5]$	$[s_{-1}, s_0]$
	u_6	u_7	u_8	u_9	
x_1	$[s_0, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$	
x_2	$[s_0, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$	
x_4	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_{-1}, s_0]$	
x_5	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	

表 12.4　决策矩阵 $\widetilde{R}_3$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	$[s_0, s_1]$	$[s_1, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_0, s_1]$
x_2	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_3	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_2]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$
x_4	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_4]$	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_3]$
x_5	$[s_0, s_1]$	$[s_2, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_4]$
	u_6	u_7	u_8	u_9	
x_1	$[s_1, s_3]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_1, s_3]$	
x_2	$[s_2, s_3]$	$[s_0, s_2]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	
x_3	$[s_3, s_4]$	$[s_{-1}, s_1]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	
x_4	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$	$[s_2, s_3]$	
x_5	$[s_1, s_2]$	$[s_0, s_2]$	$[s_1, s_3]$	$[s_3, s_5]$	

步骤1 利用IA算子对评估矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}_k$ 中第 i 行的语言评估信息进行集结，得到决策者 d_k 给出的决策方案 x_i 综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(i=1,2,3,4,5,\ k=1,2,3)$：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=&[0.08,0.10]\otimes[s_{-1},s_0]\oplus[0.05,0.09]\otimes[s_0,s_1]\oplus\\&[0.10,0.12]\otimes[s_3,s_4]\oplus[0.08,0.11]\otimes[s_1,s_2]\oplus\\&[0.10,0.13]\otimes[s_0,s_2]\oplus[0.12,0.14]\otimes[s_3,s_4]\oplus\\&[0.14,0.16]\otimes[s_2,s_3]\oplus[0.09,0.11]\otimes[s_3,s_4]\oplus\\&[0.11,0.15]\otimes[s_1,s_3]\\=&[s_{1.32},s_{2.98}].\end{aligned}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}&\tilde{z}_2^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.60},s_{3.44}],\ \tilde{z}_3^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{0.98},s_{3.13}],\ \tilde{z}_4^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.51},s_{3.26}],\\&\tilde{z}_5^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.24},s_{3.05}],\ \tilde{z}_1^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.23},s_{3.30}],\ \tilde{z}_2^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.03},s_{2.73}],\\&\tilde{z}_3^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.29},s_{2.94}],\ \tilde{z}_4^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{0.49},s_{2.77}],\ \tilde{z}_5^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.22},s_{3.10}],\\&\tilde{z}_1^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.37},s_{3.23}],\ \tilde{z}_2^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.76},s_{3.85}],\ \tilde{z}_3^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.59},s_{3.38}],\\&\tilde{z}_4^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.73},s_{3.67}],\ \tilde{z}_5^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{0.88},s_{3.22}].\end{aligned}$$

步骤2 利用ULHA算子(假设它的加权向量为 $w=(0.3,0.4,0.3)$)对3位决策者给出的决策方案 x_i 的综合属性评估值 $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(k=1,2,3)$进行集结. 首先利用 λ,t 以及 $\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})$，求解 $t\lambda_k\tilde{z}_i^{(k)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})(i=1,2,3,4,5,k=1,2,3)$，得

$$\begin{aligned}&3\lambda_1\tilde{z}_1^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.346},s_{3.040}],\ 3\lambda_1\tilde{z}_2^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.632},s_{3.509}],\\&3\lambda_1\tilde{z}_3^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_1,s_{3.193}],\quad 3\lambda_1\tilde{z}_4^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.540},s_{3.325}],\\&3\lambda_1\tilde{z}_5^{(1)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.265},s_{3.111}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_1^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.218},s_{3.267}],\\&3\lambda_2\tilde{z}_2^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.020},s_{2.703}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_3^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.277},s_{2.911}],\\&3\lambda_2\tilde{z}_4^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{0.485},s_{2.742}],\ 3\lambda_2\tilde{z}_5^{(2)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.208},s_{3.069}],\\&3\lambda_3\tilde{z}_1^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.356},s_{3.198}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_2^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.742},s_{3.812}],\\&3\lambda_3\tilde{z}_3^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.574},s_{3.346}],\ 3\lambda_3\tilde{z}_4^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{1.713},s_{3.633}],\\&3\lambda_3\tilde{z}_5^{(3)}(\tilde{\boldsymbol{\omega}})=[s_{0.871},s_{3.188}].\end{aligned}$$

由此得到决策方案 x_i **的群体综合属性评估值** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda},w)(i=1,2,3,4,5)$：

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(\boldsymbol{\lambda},w)&=0.3\times[s_{1.356},s_{3.198}]\oplus0.4\times[s_{1.218},s_{3.267}]\oplus0.3\times[s_{1.346},s_{3.040}]\\&=[s_{1.298},s_{3.178}],\\\tilde{z}_2(\boldsymbol{\lambda},w)&=0.3\times[s_{1.742},s_{3.812}]\oplus0.4\times[s_{1.632},s_{3.509}]\oplus0.3\times[s_{1.020},s_{2.703}]\\&=[s_{1.481},s_{3.358}],\\\tilde{z}_3(\boldsymbol{\lambda},w)&=0.3\times[s_{1.574},s_{3.346}]\oplus0.4\times[s_{1.277},s_{2.911}]\oplus0.3\times[s_1,s_{3.193}]\\&=[s_{1.283},s_{3.126}],\end{aligned}$$

$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.713}, s_{3.633}] \oplus 0.4 \times [s_{1.540}, s_{3.325}] \oplus 0.3 \times [s_{0.485}, s_{2.742}]$$
$$= [s_{1.275}, s_{3.243}],$$
$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{\lambda}, w) = 0.3 \times [s_{1.265}, s_{3.111}] \oplus 0.4 \times [s_{1.208}, s_{3.069}] \oplus 0.3 \times [s_{0.871}, s_{3.188}]$$
$$= [s_{1.124}, s_{3.117}].$$

步骤 3　利用(10.1)**式，计算各方案综合属性评估值** $\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, w)$ $(i=1,2,3,4,5)$**之间的可能度** $p_{ij} = p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{\lambda}, w) \geqslant \tilde{z}_j(\boldsymbol{\lambda}, w))$ $(i,j=1,2,3,4,5)$，**并建立可能度矩阵**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4517 & 0.5090 & 0.4945 & 0.5198 \\ 0.5483 & 0.5 & 0.5578 & 0.5417 & 0.5773 \\ 0.4910 & 0.4422 & 0.5 & 0.4857 & 0.5219 \\ 0.5055 & 0.4583 & 0.5143 & 0.5 & 0.5350 \\ 0.4697 & 0.4227 & 0.4781 & 0.4650 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

步骤 4　利用(4.6)**式求得可能度矩阵** $\boldsymbol{P}$ **的排序向量**

$$\boldsymbol{\upsilon} = (0.1993, 0.2113, 0.1970, 0.2006, 0.1918),$$

按其分量大小对方案进行排序，得

$$x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_5,$$

故最优方案为 x_2.

参 考 文 献

[1] Aczél J, Alsina C. synthesizing judgements: A functional equation approach. Mathematical Modelling, 1987, 9: 311320

[2] Aczél J, Saaty T L. Procedures for synthesizing ratio judgements. Journal of Mathematical Psychology, 1983, 27: 93102

[3] Anandaligam G. A multiagent multiattribute approach for conflict resolution in acid rain impact mitigation. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1989, 19: 11421153

[4] Aupetit B, Genest C. On some useful properties of the perron eigenvalue of a positive reciprocal matrix in the context of the analytic hierarchy process. European Journal of Operational Research, 1993, 70: 263268

[5] Baberjee A. Rational choice under fuzzy preferences: the orlovsky choice function. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 53: 295299

[6] Barbean E. Perron's result and a decision on admissions tests. Mathematics Magazine, 1986, 59: 1222

[7] Beliakov G. How to build aggregation operators from data. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 903923

[8] Bendoly E, Bachrach D G. A process-based model for priority convergence in multi-period group decision-making. European Journal of Operational Research, 2003, 148: 534545

[9] Blankmeyer E. Approaches to consistency adjustment. Journal of Optimization Theory and Applications, 1987, 54: 479488

[10] Bordogna G, Fedrizzi M, Pasi G. A linguistic modelling of consensus in group decision making based on OWA operators. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1997, 27: 126132

[11] Bouchon-Meunier B, Yager R R, Zadeh L A. Information, Uncertainty, Fusion. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2000

[12] Bouchon-Meunier B, Yager R R, Zadeh L A. Uncertainty in Intelligent and Information Systems. Singapore: World Scientific Publishers, 2000

[13] Bryson N, Mobolurin A. An approach to using the analytic hierarchy process for solving multiple criteria decision making problem. European Journal of Operational Research, 1994, 76: 440454

[14] Bryson N, Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems. European Journal of Operational Research, 1996, 96: 379386

[15] Bubnicki Z. Uncertain variables and their application to decision making problems. IEEE

Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A, 2001, 31: 587596

[16] Calvo T, Mesiar R. Continuous generated associative aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126: 191197

[17] **陈畴镛,徐龙光. 供应链管理中的合作伙伴选择模型. 中国管理科学**, 2001, 9(S): 5762

[18] **陈冬林,黎志成. 信息系统投资项目评价指标确定与灰色综合评价. 系统工程理论与实践**, 2002, 22(2): 100103

[19] **陈勇,罗小明,谷奇平. 数学规划在航天装备体系建设规划计划辅助决策系统研究中的应用. 第五届青年运筹与管理学者大会论文集**, Global-Link Informatics **出版社, 香港**, 2003, 409415

[20] Chen S J, Hwang C L. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making. Berlin: Springer, 1992

[21] Chen C H, Yang K L, Hwang C L. Evaluating attack helicopters by AHP based on linguistic variable weights. European Journal of Operational Research, 1999, 116: 423435

[22] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97: 3348

[23] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122: 277291

[24] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E, Martinez L. A note on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 137: 7183

[25] Cogger K O, Yu P L. Eigenweight vector and least-distance approximation for revealized preference in pairwise weight ratios. Journal of Optimization Theory and Applications, 1985, 46: 483491

[26] Cordón O, Herrera F. A proposal for improving the accuracy of linguistic modelling. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8: 335344

[27] Cordón O, Herrera F, Zwir I. Linguistic modeling by hierarchical systems of linguistic rules. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10: 220

[28] Crawford G, Williams C. A note on the analysis of subjective judgement matrices. Journal of Mathematical Psychology, 1985, 29: 387405

[29] Czyżak P, Słowiński R. Possibilistic construction of fuzzy outranking relation for multiple-criteria ranking. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 81: 123131

[30] **达庆利,刘新旺. 区间数线性规划及其满意解. 系统工程理论与实践**, 1999, 19(4): 37

[31] **达庆利,徐泽水. 不确定多属性决策的单目标最优化模型. 系统工程学报**, 2002, 17(1): 5055

[32] Degani R, Bortolan G. The problem of linguistic approxiation in clinical decision making. International Journal of Approximate Reasoning, 1988, 2: 143162

[33] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. On aggregation operations of linguistic labels. International Journal of Intelligent Systems, 1993, 8: 351370

[34] Delgado M, Verdegay J L, Vila M A. A model for incomplete and vague information in decision making problems. International Journal of Intelligent Systems, 1994, 9: 365378

[35] Delgado M, Herrera F, Herrera-Viedma E, Martínez L. Combining numerical and linguistic information in group decision making. Information Sciences, 1998, 107: 177194

[36] Delgado M, Herrera F, Herrera-Viedma E, Martin-Bautista M J, Martinez L, Vila M A. A communication model based on the 2-tuple fuzzy linguistic representation for a distributed intelligent agent system on internet. Soft Computing, 2002, 6: 320328

[37] Donegan H A, Mcmaster T B M. Directional instability in the eigenvectors of positive reciprocal matrices. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 1999, 8: 200205

[38] Duarte Silva A P, Stam A. On multiplicative priority rating methods for the AHP. European Journal of Operational Research, 2003, 145: 92108

[39] Dubois D, Prade H. Weighted minimum and maximum operations in fuzzy set theory. Information Sciences, 1986, 39: 205210

[40] Dubois D, Fargier H, Perry P, Prade H. A characterization of generalized concordance rules in multicriteria decision making. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 751774

[41] Duckstein L, Zionts S. Multiple Criteria Decision Making, New York: Springer, 1992

[42] **杜晓明,于永利,胡晖. 一种基于案例的多属性综合评价方法. 系统工程与电子技术**, 1999, 21(9): 4548

[43] Facchinetti G, Ricci R G, Muzzioli S. Note on ranking fuzzy triangular numbers, International Journal of Intelligent Systems, 1998, 13: 613622

[44] Fan Z P, Ma J, Zhang Q. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 131: 101106

[45] **樊治平,胡国奋. 区间数多属性决策的一种目标规划方法. 管理工程学报**, 2000, 14(4): 5052

[46] **樊治平,张权. 一种不确定性多属性决策模型的改进. 系统工程理论与实践**, 1999, 19(12): 4247

[47] **樊相如等. 风险投资项目评价. 中南工业大学学报(社会科学版)**, 2002, 8(1): 4347

[48] Fernandez E，Leyva J C. A method based on multiobjective optimization for deriving a ranking from a fuzzy preference relation. European Journal of Operational Research，2004，154：110124

[49] Filev D，Yager R R. Analytic properties of maximum entropy OWA operators. Information Sciences，1995，85：1127

[50] Filev D，Yager R R. On the issue of obtaining OWA operator weights. Fuzzy Sets and Systems，1998，94：157169

[51] Fullér R，Carlsson C. Benchmarking in linguistic importance weighted aggregations. Fuzzy Sets and Systems，2000，114：3541

[52] Fullér R，Majlender P. An analytic approach for obtaining maximal entropy OWA operator weights. Fuzzy Sets and Systems，2001，124：5357

[53] **高峰记. 不完全信息下对方案有偏好的多指标决策. 系统工程理论与实践**，2000，22(4)：9497

[54] Genst C，Lapointe F. On a proposal of Jensen for the analysis of ordinal pairwise preferences using Saaty's eigenvector scaling method. Journal of Mathematical Psychology，1993，37：575610

[55] Golden B L，Wasil E A，Harker P T. The Analytic Hierarchy Process：Applications and Studies，New York：Springer Verlag，1989

[56] Godo L，Torra V. On aggregation operators for ordinal qualitative information. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2000，8：143154

[57] Gonzalez-Pachón J，Gómez D，Montero J，Yañez J. Searching for the dimension of valued preference relations. International Journal of Approximate Reasoning，2003，33：133157

[58] Greco S，Matarazzo B，Słowiński R. Rough approximation of a preference relation by dominance relations. European Journal of Operational Research，1999，117：6383

[59] Greco S，Matarazzo B，Słowiński R. Rough sets methodology for sorting problems in presence of multiple attributes and criteria. European Journal of Operational Research，2002，138：247259

[60] **郭东强，王志江. 管理信息系统综合评价的数学模型. 运筹与管理**，2000，9(3)：7480

[61] Hapke M，Jaszkiewicz A，Słowiński R. Interactive analysis of multiple-criteria project scheduling problems. European Journal of Operational Research，1998，107：315324

[62] Harker P T，Vargas L G. The theory of ratio scale estimation：Saaty's analytic hierarchy process. Management Science，1987，33：13831403

[63] Harsanyi J C. Cardinal welfare，individualistic ethics，and interpersonal comparisons of utility. Journal of Political Economy，1955，63：309321

[64] Hartley R. Linear and Nonlinear Programming：An Introduction to Linear Methods in Mathematical Programming. Ellis Horwood Limited，England，1985

[65] Herrera F, Verdegay J L. Linguistic assessments in group decision. Proc. 1st European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies. Aachen, 1993, 941948

[66] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A sequential selection process in group decision making with linguistic assessment. Information Sciences, 1995, 85: 223239

[67] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Preference degrees over linguistic preference relations in decision making. Operational Research and Decisions, 1995, 3: 3748

[68] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 78: 7387

[69] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79: 175190

[70] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A linguistic decision process in group decision making. Group Decision and Negotiation, 1996, 5: 165176

[71] Herrera F, Herrera-Viedma E. Aggregation operators for linguistic weighted information. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1997, 27: 646655

[72] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Linguistic measures based on fuzzy coincidence for reaching consensus in group decision making. International Journal of Approximate Reasoning, 1997, 16: 309334

[73] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. A rational consensus model in group decision making using linguistic assessments. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 88: 3149

[74] Herrera F, Herrera-Viedma E, Verdegay J L. Choice processes for non-homogeneous group decision making in linguistic setting. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94: 287308

[75] Herrera F, Martínez L. An approach for combining linguistic and numerical information based on 2-tuple fuzzy linguistic representation model in decision-making. International Journal of Uncertainty, Fuzziness, Knowledge-Based Systems, 2000, 8: 539562

[76] Herrera F, Martínez L. A 2 tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8: 746752

[77] Herrera F, Herrera-Viedma E, Martinez L. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 4358

[78] Herrera F, Herrera-Viedma E. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 115: 6782

[79] Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. Multiperson decision-making based on

multiplicative preference relations. European Journal of Operational Research，2001，129：372385

[80] Herrera F，Martínez L. A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranualr hierarchical linguistic contexts in multi-expert decision-making. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics，2001，31：227233

[81] Herrera-Viedma E. Modeling the retrieval process of an information retrieval system using an ordinal fuzzy linguistic approach. Journal of the American Society for Information Science and Technology (JASIST). 2001，52：460475

[82] Herrera F，Herrera-Viedma E，Chiclana E. A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making. International Journal of Intelligent Systems，2003，18：689707

[83] Herrera-Viedma E，Cordon O，Luque M，Lopez A G，Muñoz A N. A model of fuzzy linguistic IRS based on multi-granular linguistic information. International Journal of Approximate Reasoning，2003，34：221239

[84] Herrera-Viedma E，Peis E. Evaluating the informative quality of documents in SGML-format using fuzzy linguistic techniques based on computing with words. Information Processing and Management，2003，39：195213

[85] Herrera-Viedma E，Herrera F，Chiclana F，Luque M. Some issues on consistency of fuzzy preference relations. European Journal of Operational Research，2004，154：98109

[86] Homburg C. Hierarchical multi-objective decision making. European Journal of Operational Research，1998，105：155161

[87] **胡秦生，郑春勇，王惠卿. 模糊多目标系统实用最优化决策方法及应用. 系统工程理论与实践**，1996，16(3)：15

[88] Hwang C L，Yoon K. Multiple Attribute Decision Making and Applications. New York：Springer-Verlag，1981

[89] Hwang C L，Lin M J. Group Decision Making under Multiple Criteria：Methods and Applications. Berlin：Springer，1987

[90] **黄立军. 企业知识管理综合评价的数学模型. 运筹与管理**，2001，10(4)：143150

[91] Islei G，Lockett A G. Judgement modeling based on geometric least square. European Journal of Operational Research，1988，36：2735

[92] Islei G，Lockett A G. Group decision making：Supposition and practice. Socio-Economic Planning Science，1991，25：6781

[93] Iyer N S. A family of dominance rules for multiattribute decision making under uncertainty. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics Part A，2003，33：441450

[94] Jaszkiewicz A，Słtowiński R. Outranking-based interactive exploration of a set of

multicriteria alternatives. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis，1997，6：93106

[95] Jensen R E. An alternative scaling method for priorities in hierarchy structures. Journal of Mathematical Psychology，1984，28：317332

[96] Jensen R E. Comparison of consensus methods for priority ranking problems. Decision Sciences，1986，17：195211

[97] Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. Fuzzy Sets and Systems，1986，18：105118

[98] Kacprzyk J. Roubens M. Non-Conventional Preference Relations in Decision-Making. Berlin：Springer，1988

[99] Kacprzyk J，Yager R R. Linguistic summaries of data using fuzzy logic. International Journal of General Systems，2001，30：133154

[100] Kahneman D，Slovic P，Tversky A. Judgement under Uncertainty：Heuristics and Biases. Cambridge：Cambridge University Press，1982

[101] Kim S H，Ahn B S. Group decision making procedure considering preference strength under incomplete information. Computers and Operations Research，1997，24：11011112

[102] Kim S H，Ahn B S. Interactive group decision making procedure under incomplete information. European Journal of Operational Research，1999，116：498507

[103] Kim S H，Choi S H，Kim J K. An interactive procedure for multiple attribute group decision making with incomplete information：Range-based approach. European Journal of Operational Research，1999，118：139152

[104] Kirkwood C W，Sarin R K. Ranking with partial information：A method and an application. Operations Research，1985，33：3848

[105] Kmietowicz Z W，Pearman A D. Decision theory，linear partial information and statistical dominance. Omega，1984，12：391399

[106] Köksalan M，Ulu C. An interactive approach for placing alternatives in preference classes. European Journal of Operational Journal，2003，144：429439

[107] Kundu S. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making. Fuzzy Sets and Systems，1997，86：357367

[108] Lai V S，Wong B K，Cheung W. Group decision making in a multiple criteria environment：A case using the AHP in software selection. European Journal of Operational Journal，2002，137：134144

[109] Laininen P，Hämäläinen R P. Analyzing AHP-matrices by regression. European Journal of Operational Research，2003，148：514524

[110] Lipovetsky S，Michael Conklin W. Robust estimation of priorities in the AHP. European Journal of Operational Research，2002，137：110122

[111] Li D F，Yang J B. Fuzzy linear programming technique for multiattribute group

decision making. Information Sciences, 2004, 158: 263275
[112] 李随成, 陈敬东, 赵海刚. 定性决策指标体系评价研究. 系统工程理论与实践, 2001, 21(9): 2232
[113] 李占明, 陈德琰. 军用教练机训练效能分析. 系统工程理论与实践, 1991, 11(4): 79
[114] 李志刚, 钟振. 坦克分队火力配系方案模糊优选模型及应用. 第五届中国青年运筹与管理学者大会论文集, Global-Link Informatics 出版社, 香港, 2003, 317321
[115] 李志刚, 钟振. 防御要点选择的灰色聚类分析. 第五届中国青年运筹与管理学者大会论文集, Global-Link Informatics 出版社, 香港, 2003, 401405
[116] 刘家学, 刘耀武. 带有方案偏好信息的多指标决策法. 系统工程与电子技术, 1999, 21(1): 47
[117] 刘家学, 黄德成. 无信息多指标决策的层次-关联优化模型. 系统工程与电子技术, 2000, 22(1): 1112
[118] 刘家学, 黄德成. 多指标决策的最优线性分派法. 系统工程与电子技术, 2000, 22(7): 2527
[119] 刘健. 在多目标决策中利用基点计算权重. 系统工程理论与实践, 2001, 21(4): 2730
[120] 刘树林, 邱菀华. 多属性决策基础理论研究. 系统工程理论与实践, 1998, 18(1): 3843
[121] Ma W Y, Xu J Y, Wei Y X. A practical approach to modifying pairwise comparison matrices and two criteria of modificatory effectiveness. Journal of Systems Science & Systems Engineering, 1993, 2: 334338
[122] Marmol A M, Puerto J, Fernandez F R. The use of partial information on weights in multicriteria decision problems. Journal of Multi-criteria Decision Analysis, 1998, 7: 322329
[123] Marmol A M, Puerto J, Fernandez F R. Sequential incorporation of imprecise information in multiple criteria decision processes. European Journal of Operational Research, 2002, 137: 123133.
[124] Martín J M, Fajardo W, Bianco A, Requena I. Constructing linguistic versions for the multicriteria decision support systems preference ranking organization method. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 711731
[125] Mitchell H B, Estrakh D D. A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 1997, 5: 429436
[126] Mitchell H B, Estrakh D D. An OWA operator with fuzzy ranks. International Journal of Intelligent Systems, 1998, 13: 6981
[127] Mitchell H B, Schaefer P A. A generalized OWA operator. International Journal of Intelligent Systems, 1999, 14: 123143

[128] Mitchell H B, Schaefer P A. Mutiple priorities in an induced ordered weighted averaging operator. International Journal of Intelligent Systems, 2000, 15: 317328

[129] **穆富岭,武昌,吴德伟. 维修保障系统效能评估中的变权综合法初探. 系统工程与电子技术**, 2003, 25(6): 693696

[130] Nagal R, Dove R. 21st century manufacturing enterprise strategy: an industry-led view. Iacocca Institute, Lehigh University, 1991

[131] Nakahara Y. User oriented ranking criteria and its application to fuzzy mathematical programming problem. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 94: 275286

[132] Nettleton D, Torra V. A comparison of active set method and genetic algorithm approaches for learning weighting vectors in some aggregation operators. International Journal of Intelligent Systems, 2001, 16: 10691083

[133] Nurmi H. Approaches to collective decision making with fuzzy preference relations. Fuzzy Sets and Systems, 1981, 6: 249259

[134] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1: 155167

[135] Ovchinnikov S. Invariance properties of ordinal OWA operators. International Journal of Intelligent Systems, 1999, 14: 413418

[136] Pasi G. Modeling users' preferences in systems for information access. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 793808

[137] Pawlak Z, Słowiński R. Rough set approach to multi-attribute decision analysis. European Journal of Operational Research, 1994, 72: 443459

[138] Park K S, Kim S H. Tools for interactive multi-attribute decision making with incompletely identified information. European Journal of Operational Research, 1997, 98: 111123

[139] Park K S, Kim S H, Yoon Y C. Establishing strict dominance between alternatives with special type of incomplete information. European Journal of Operational Research, 1996, 96: 398406

[140] Parkan C. Decision making under partial probability information. European Journal of Operational Research, 1994, 79: 115122

[141] Pekelman D, Sen S K. Mathematical programming models for the determination of attributes weights. Management Science, 1974, 20: 12171229

[142] Pelaez J I, Dona J M. Majority additive-Ordered weighting averaging: A new neat ordered weighting averaging operator based on the majority process. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 469481

[143] Peneva V, Popchev I. Properties of the aggregation operators related with fuzzy relations. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139: 615633

[144] Pfirrmann O, Wapperfeld U, Lerner J. Venture Capital and New Technology Based

Firms：An US-Germany Comparison. Heidelberg：physica-verlg，1997
[145] Pöyhönen M，Hämäläinen R P. On the convergence of multi-attribute weighting methods. European Journal of Operational Research，2001，129：569585
[146] **钱钢，徐泽水. 三种基于理想点的不确定多属性决策最优化模型. 系统工程与电子技术**，2003，25(5)：517519
[147] Rabinowitz G. Some aspects on measuring world influence. Journal of Peace Science，1976，2：4955
[148] Roubens M. Some properties of choice functions based on valued binary relations. European Journal of Operational Research，1989，40：309321
[149] Roubens M. Choice procedures in fuzzy multicriteria decision analysis based on pairwise comparisons. Fuzzy Sets and Systems，1996，84：135142
[150] Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill，New York，1980
[151] Saaty T L. Axiomatic foundations of the analytic hierarchy process. Management Science，1986，20：355360
[152] Saaty T L，Alexander J M. Thinking with Models. New York：Praeger，1981
[153] Saaty T L，Alexander J M. Conflict Resolution：The Analytic Hierarchy Approach. New York：Praeger，1989
[154] Saaty T L，Kearns K P. Analytic Planning-The Organization of Systems. Oxford，England：Pergamon Press，1985
[155] Saaty T L，Vargas L G. The Logic of Priorities：Applications in Business，Energy，Health，and Transportation. Boston，MA：Kluwer-Nijhoff Publishing Co，1982
[156] Saaty T L，Vargas L G. Comparison of eigenvalue，logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios. Mathematical Modeling，1984，5：309324
[157] Saaty T L. Multicriteria Decision Making：The Analytic Hierarchy Process：Planning，Priority Setting，Resource Allocation，The Analytic Hierarchy Process Series：Volume I，Pittsburgh，PA：RMS Publications，1990
[158] Saaty T L. Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process，The Analytic Hierarchy Process Series：Volumes VI，Pittsburgh，PA：RMS Publications，1994
[159] Saaty T L，Vargas L G. Decision Making in Economic，Political，Social and Technological Environments with the Analytic Hierarchy Process. Pittsburgh：RWS Publications，1994
[160] Saaty T L. Decision Making for Leaders，The Analytic Hierarchy Process for Decisions in a Complex World. Pittsburgh：RWS Publications，1995
[161] Saaty T L. The Hierarchy Network Process. Pittsburgh：RWS Publications，1996
[162] Saaty T L，Hu G. Ranking by the eienvector versus other methods in the analytic hierarchy process. Applied Mathematical Letters，1998，11：121125

[163] Saaty T L. Decision Making with Dependence and Feedback：The Analytic Network Process，Pittsburgh，PA：RWS Publications，2001

[164] Saaty T L. Decision-making with the AHP：Why is the principal eigenvector necessary. European Journal of Operational Research，2003，145：8591

[165] Salo A A. Interactive decision aiding for group decision support. European Journal of Operational Research，1995，84：134149

[166] Salo A A，Hämäläinen R P. Preference ratios in multiattribute evaluation（PRIME）-Elicitation and decision procedures under incomplete information. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics—Part A，2001，31：533545

[167] Schaefer P A，Mitchell H B. A generalized OWA operator. International Journal of Intelligent Systems，1999，14：123143

[168] Sengupta A，Pal T K. On comparing interval numbers. European Journal of Operational Research，2000，127：2843

[169] **盛从锋，徐伟宣，许保光. 中国省域投资环境竞争力评价研究. 中国管理科学**，2003，11(3)：7681

[170] Sinha N K，Gupta M M，Zadeh L A. Outline of Computational Theory of Perceptions Based on Computing with Words，Soft Computing & Intelligent Systems，New York：Academic Press，2000

[171] **宋逢明，陈涛涛. 高科技投资项目评价指标体系的研究. 中国软科学**，1999，1：9093

[172] **孙东川，叶飞. 基于虚拟企业的合作伙伴选择系统研究. 科研管理研究**，2001，19(1)：5962

[173] Susmaga R，Słowiński R，Greco S，Matarazzo B. Generation of reducts and rules in multi-attribute and multi-criteria classification. Control and Cybernetics，2000，29：969988

[174] Szmidt E，Kacprzyk J. A consensus-Reaching process under intuitionistic fuzzy preference relation. International Journal of Intelligent Systems，2003，18：837852

[175] **唐克. 目标的熵权模糊决策. 系统工程理论与实践**，1992，12(4)：6873

[176] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making. Fuzzy Sets and Systems，1984，12：117131

[177] **滕春贤，毕克新，宿伟玲，尹得利. 属性综合评价系统在高等学校财务评价中的应用. 系统工程理论与实践**，2000，20(4)：115119

[178] Tong M，Bonissone P P. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics，1980，10：716723

[179] Torra V. Negation functions based semantics for ordered linguistic labels. International Journal of Intelligent Systems，1996，11：975988

[180] Torra V. The weighted OWA Operator. International Journal of Intelligent Systems，

1997，12：153166

[181] Torra V. Aggregation of linguistic labels when semantics is based on antonyms. International Journal of Intelligent Systems，2001，16：513524

[182] Torra V. Learning weights for the quasi-weighted means. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2002，10：653666

[183] Tyebjee T T，Bruno A V. A model of venture capitalist investment activity. Management Science，1984，30(9)：10511066

[184] Ulu C，Köksalan M. An interactive procedure for selecting acceptable alternatives in the presence of multiple criteria. Naval Research Logistics，2001，48：592606

[185] Van Den Honert R C，Lootsma F A. Group preference aggregation in the multiplicative AHP-The model of the group decision process and Pareto optimality. European Journal of Operational Research，1996，96：363370

[186] Van Laarhoven P J M，Pedrycz W. A fuzzy extension of Saaty's priority theory. Fuzzy Sets and Systems，1983，11：229240

[187] Vargas L G. An overview of the analytic hierarchy process and its applications. European Journal of Operational Research，1990，48：28

[188] Walle de Van B. A relational analysis of decision makers' preferences. International Journal of Intelligent Systems，2003，18：775791

[189] Walter R，Georg N. Bottom-up planning approaches in enterprise modelling-the need and the state of the art. Computers in Industry，1997，33：223235

[190] 王登瀛. 多目标决策方法优选的密切值法. 系统工程，1989，7(1)：3336

[191] 王莲芬，许树柏. 层次分析法引论. 北京：中国人民大学出版社，1989

[192] Wang R C，Chuu S J. Group decision-making using a fuzzy linguistic approach for evaluating the flexibility in a manufacturing system. European Journal of Operational Research，2004，154：563572

[193] 王文平. 不完全信息下的多目标优化方法研究. 系统工程学报，1996，11(2)：16

[194] 王应明. 判断矩阵排序方法综述. 决策与决策支持系统，1995，5(3)：101114

[195] 王应明. 应用离差最大化方法进行多指标决策与排序. 系统工程与电子技术，1998，20(7)：2426

[196] Weber M. A method of multiattribute decision making with incomplete information. Management Science，1985，31：13651371

[197] Weber M. Decision making with incomplete information. European Journal of Operational Research，1987，28：4457

[198] White C C，Sage A P，Dozono，S. A model of multiattribute decisionmaking and trade-off weight determination under uncertainty. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics，1984，14：223229

[199] 熊锐，曹锟生. 多目标决策的层次分析法. 系统工程理论与实践，1992，12(6)：

5862

[200] 徐玖平. 多指标(属性)评议双基点优序法. 系统工程, 1992, 10(4): 3943

[201] Xu X Z. The SIR method: A superiority and inferiority ranking method for multiple criteria decision making. European Journal of Operational Research, 2001, 131: 587602

[202] 徐泽水. 层次分析新标度法. 系统工程理论与实践, 1998, 18(10): 7477

[203] Xu Z S, Wei C P. A consistency improving method in the Analytic Hierarchy Process. European Journal of Operational Research, 1999, 116: 443449

[204] 徐泽水. AHP中两类标度法的关系研究. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97101

[205] Xu Z S. Generalized chi square method for the estimation of weights. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107: 183192

[206] 徐泽水. 判断矩阵一致性修正的一种新方法. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 8689

[207] 徐泽水. 关于层次分析中几种标度的模拟评估. 系统工程理论与实践, 2000, 20(7): 5862

[208] Xu Z S, Wei C P. A new method for priorities in the Analytic Hierarchy Process. 运筹学学报, 2000, 4(4): 4754

[209] 徐泽水. 模糊综合评价的排序方法研究. Systems Engineering Systems Science and Complexity Research. Research Information Ltd 出版社, United Kingdom, 2000, 507511

[210] Xu Z S. On consistency of the weighted geometric mean complex judgement matrix in AHP. European Journal of Operational Research, 2000, 126: 683687

[211] Xu Z S. Two methods for deriving members' weights in group decision making. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 2001, 10: 1519

[212] 徐泽水. 多属性决策的两种方差最大化方法. 管理工程学报, 2001, 15(2): 1113

[213] 徐泽水. 一种部分概率信息下的策略优选方法及其应用. 系统工程学报, 2001, 16(3): 228231

[214] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311314

[215] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的最小方差法. 系统工程理论与实践, 2001, 21(10): 9396

[216] 徐泽水, 孙在东. 一种基于方案满意度的不确定多属性决策方法. 系统工程, 2001, 19(3): 7679

[217] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法. 控制与决策, 2001, 16(S): 818821

[218] 徐泽水. 互补判断矩阵的两种排序方法——权的最小平方法及特征向量法. 系统工程理论与实践, 2002, 22(7): 7175

[219] **徐泽水. 部分权重信息下多目标决策方法研究. 系统工程理论与实践**，2002，22(1)：4347

[220] **徐泽水. 基于方案达成度和综合度的交互式多属性决策法. 控制与决策**，2002，17(4)：435438

[221] Xu Z S, Gu H F. An approach to uncertain multi-attribute decision-making with preference information on alternatives. Proceedings of the 9th Bellman Continuum International Workshop on Uncertain Systems and Soft Computing, Beijing, China, 2002, 8995

[222] Xu Z S. Two approaches to improving the consistency of complementary judgement matrix. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 2002, 17: 227235

[223] Xu Z S. On constructing synthetic matrix in the AHP. Journal of Systems Science and Complexity, 2002, 15: 407415

[224] Xu Z S, Da Q L. The uncertain OWA operator. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17: 569575

[225] Xu Z S, Da Q L. The ordered weighted geometric averaging operators. International Journal of Intelligent Systems, 2002, 17: 709716

[226] **徐泽水. 几类多属性决策方法研究. 东南大学博士学位论文**，2002

[227] **徐泽水. 求解不确定型多属性决策问题的一种新方法. 系统工程学报**，2002，17(2)：176181

[228] **徐泽水，达庆利. 多属性决策的组合赋权方法研究. 中国管理科学**，2002，10(2)：8486

[229] **徐泽水，孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法. 管理科学学报**，2002，5(3)：3539

[230] **徐泽水，达庆利. 混合判断矩阵排序的线性目标规划法. 管理科学学报**，2002，5(6)：2428

[231] **徐泽水，达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用. 系统工程学报**，2003，18(1)：6770

[232] **徐泽水，达庆利. 区间型多属性决策的一种新方法. 东南大学学报**，2003，33(4)：498501

[233] Xu Z S, Da Q L. An overview of operators for aggregating information. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18: 953969

[234] Xu Z S, Da Q L. An approach to improving consistency of fuzzy preference matrix. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2003, 2: 312

[235] Xu Z S. Two methods for ranking alternatives in group decision-making with different preference information. Information: An International Journal, 2003, 6: 389394

[236] Xu Z S. On compatibility of interval fuzzy preference relations. Fuzzy Optimization and Decision making, 2004, 3(3): 225233

[237] 徐泽水. 权重信息完全未知且对方案有偏好的多属性决策法. 系统工程理论与实践，2003，23(12)：100103

[238] 徐泽水. 部分权重信息下对方案有偏好的多属性决策法. 控制与决策，2004，19(1)：8588

[239] 徐泽水. 残缺互补判断矩阵. 系统工程理论与实践，2004，24(6)：9197

[240] 徐泽水. 基于语言评估标度中术语指标的多属性群决策法. 系统工程学报（待发表）

[241] 徐泽水. 基于模糊语言评估和 GIOWA 算子的多属性群决策方法. 系统科学与数学，2004，24(2)：218224

[242] Xu Z S，Da Q L. A least deviation method for priorities of fuzzy preference matrix. European Journal of Operational Research，to be published

[243] Xu Z S. Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. International Journal of Approximate Reasoning，2004，36：261270

[244] Xu Z S. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. Information Sciences，2004，7：175182

[245] Xu Z S. Da Q L. An uncertain ordered weighted geometric（UOWG）operator and its application. Information：An International Journal，to be published

[246] Xu Z S. On interactive method for multi-attribute group decision making under uncertainty. Technical Re Port，2003

[247] Xu Z S. Multiple attribute group decision making with multiplicative preference information on alternatives. Technical Report，2003

[248] Xu Z S. The hybrid linguistic weighted averaging operator. Asia Information-Science-Life，to be published.

[249] Xu Z S. A practical approach to group decision making with linguistic information. Technical Report，2003

[250] Xu Z S. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment. Information Science，to be published.

[251] Xu Z S. A procedure based on synthetic projection model for multiple attribute decision-making in uncertain setting. Technical Report，2003

[252] Xu Z S. A direct approach to group decision making with uncertain additive linguistic preference relations. Technical Report，2003

[253] Xu Z S. An ideal-point-based approach to multi-criteria decision making with uncertain linguistic information. Technical Report，2003

[254] Xu Z S. Some new operators for aggregating uncertain linguistic information. Technical Report，2004

[255] Yager R R. A linguistic variable for importance. Journal of Cybernetics，1980，10：

249260

[256] Yager R R. Some questions related to linguistic variables. Busefal, 1982, 10: 5465

[257] Yager R R. Quantified Propositions in a Linguistic Logic. International Journal of Man-Machine Studies, 1983, 19: 195227

[258] Yager R R. Querying knowledge base systems with linguistic information via knowledge trees. International Journal of Man-Machine Studies, 1983, 19: 7395

[259] Yager R R. General multiple objective decision making and linguistically quantified statements. International Journal of Man-Machine Studies, 1984, 21: 389400

[260] Yager R R. On different classes of linguistic variables defined via fuzzy subsets. Kybernetes, 1984, 13: 103110

[261] Yager R R. Measuring the quality of linguistic forecasts. International Journal of Man-Machine Studies, 1984, 21: 253257

[262] Yager R R, Kacprzyk J. Fuzzy linguistic quantifiers and belief qualification in multicriteria and multistage decision making. Control and Cybernetics, 1984, 13: 155173

[263] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, 18: 183190

[264] Yager R R. Higher structures in multi-criteria decision making. International Journal of Man-Machine Studies, 1992, 36: 553570

[265] Yager R R. Applications and extensions of OWA aggregation. International Journal of Man-Machine Studies, 1992, 37: 103132

[266] Yager R R. On the inclusion of importances in multi-criteria decision making in the fuzzy set framework. International Journal of Expert Systems: Research and Applications, 1992, 5: 211228

[267] Yager R R. Toward a general theory of information aggregation. Information Sciences, 1993, 68: 191206

[268] Yager R R. Non-numeric multi-criteria multi-person decision making. International Journal of Group Decision Making and Negotiation, 1993, 2: 8193

[269] Yager R R. Families of OWA operators. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 59: 125148

[270] Yager R R. A general approach to criteria aggregation using fuzzy measures. International Journal of Man-Machine Studies, 1993, 38: 187213

[271] Yager R R. MAM and MOM operators for aggregation. Information Sciences, 1993, 68: 259273

[272] Yager R R, Filev D P, Sadeghi T. Analysis of flexible structured fuzzy logic controllers. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1994, 24: 10351043

[273] Yager R R, Filev D P. Parametrized ‘andlike’ and ‘orlike’ OWA operators. International Journal of General Systems, 1994, 22: 297316

[274] Yager R R, Goldstein L S, Mendels E. FUZMAR: An approach to aggregating market research data based on fuzzy reasoning. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 68: 111

[275] Yager R R. Interpreting linguistically quantified propositions. International Journal of Intelligent Systems, 1994, 9: 541569

[276] Yager R R, Filev D P. Generalizing the modelling of fuzzy logic controllers by parameterized aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 70: 303313

[277] Yager R R. Measures of entropy and fuzziness related to aggregation operators. Information Sciences, 1995, 82: 147166

[278] Yager R R, Kelman A. Decision making under various types of uncertainties. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 1995, 3: 317323

[279] Yager R R, Rybalov A. Uninorm aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80: 111120

[280] Yager R R. On mean type aggregation. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1996, 26: 209221

[281] Yager R R. On the inclusion of variance in decision making under uncertainty. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 1996, 4: 401419

[282] Yager R R. Constrained OWA aggregation. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 81: 89101

[283] Yager R R. On the issue of importance qualification in fuzzy multi-criteria decision making. International Journal of Computational Intelligence and Organizations, 1996, 1: 3548

[284] Yager R R. Quantifier guided aggregation using OWA operators. International Journal of Intelligent Systems, 1996, 11: 4973

[285] Yager R R. A general approach to the fusion of imprecise information. International Journal of Intelligent Systems, 1997, 12: 129

[286] Yager R R, Rybalov A. Understanding the median as a fusion operator. International Journal of General Systems, 1997, 26: 239263

[287] Yager R R, Kacprzyk J. The ordered weighted averaging operators: theory and applications. Norwell, MA: Kluwer, 1997

[288] Yager R R. New modes of OWA information fusion. International Journal of Intelligent Systems, 1998, 13: 661681

[289] Yager R R. Fusion of ordinal information using weighted median aggregation. International Journal of Approximate Reasoning, 1998, 18: 3552

[290] Yager R R. Including importances in OWA aggregations using fuzzy systems modeling.

IEEE Transactions on Fuzzy Systems，1998，6：286294

[291] Yager R R. Structures for prioritized fusion of fuzzy information. Information Sciences 1998，108：7191

[292] Yager R R. Nonmonotonic OWA operators. Soft Computing，1999，3：187196

[293] Yager R R. Decision making under uncertainty with ordinal information. International Journal of Uncertainty，Fuzziness and Knowledge-Based Systems，1999，7：483500

[294] Yager R R. Induced ordered weighted averaging operators. IEEE Transactions On Systems，Man，and Cybernetics，1999，29：141150

[295] Yager R R，Kelman A. An extension of the analytical hierarchy process using OWA operators. International Journal of Fuzzy and Intelligent Systems，1999，7：401417

[296] Yager R R. A game theoretic approach to decision making under uncertainty. International Journal of Intelligent Systems in Accounting，Finance and Management，1999，8：131143

[297] Yager R R. Fuzzy modeling for intelligent decision making under uncertainty. IEEE Transactions on Systems，Man and Cybernetics Part B，2000，30：6070

[298] Yager R R，Kreinovich V. Fair division under interval uncertainty. International Journal of Uncertainty，Fuzziness and Knowledge-Based Systems，2000，8：611618

[299] Yager R R. The power average operator. IEEE Transaction on Systems，Man and Cybernetics Part A，2001，31：724730

[300] Yager R R. The induced fuzzy integral aggregation operator. International Journal of Intelligent Systems，2002，17：10491065

[301] Yager R R. On the evaluation of uncertain courses of action. Fuzzy Optimization and Decision Making，2002，1：1341

[302] Yager R R. On the valuation of alternatives for decision making under uncertainty. International Journal of Intelligent Systems，2002，17：687707

[303] Yager R R. Heavy OWA operators. Fuzzy Optimization and Decision Making，2002，1：379397

[304] Yager R R. Toward a language for specifying summarizing statistics. IEEE Transactions on Systems，Man and Cybernetics Part B，2003，33：177187

[305] Yager R R. Induced aggregation operators. Fuzzy Sets and Systems，2003，137：5969

[306] Yang J B，Xu D L. On the evidential reasoning algorithm for multiple attribute decision analysis under uncertainty. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics Part A，2002，32：289304

[307] Yang J B，Xu D L. Nonlinear information aggregation via evidential reasoning in multiattribute decision analysis under uncertainty. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics Part A，2002，32：376393

[308] Zadeh L A. Fuzzy languages and their relation to human and machine intelligence. Proc. of Intl. Conf. on Man and Computer，Bordeaux，France，1972，130165

[309] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Information Sciences. 1975，8：part I，199249

[310] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Information Sciences. 1975，8：part II，301357

[311] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Information Sciences. 1975，9：part III，4380

[312] Zadeh L A. A fuzzy-algorithmic approach to the definition of complex or imprecise concepts. International Journal of Man-Machine Studies，1976，8：249291

[313] Zadeh L A. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. Comput. Math. Appl. 1983，9：149184

[314] Zadeh L A. Fuzzy Logic-Computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，1996，2：103111

[315] Zadeh L A，Kacprzyk J. Computing with words in Information/Intelligent Systems-part 1：Foundations：part 2：Applications. Heidelberg，Germany：Physica-Verlag，1999，vol. I

[316] Zadeh L A. From computing with numbers to computing with words—from manipulation of measurements to manipulation of perceptions. IEEE Transactions on Circuits and Systems，1999，45：105119

[317] Zahedi F. The analytic hierarchy process：a survey of the method and its applications. Interfaces，1986，16：96108

[318] Zeleny M. Multiple Criteria Decision Making. New York：McGraw-Hill，1982

[319] 张凤林，吴进煌，康文兴，金振中. 反舰导弹武器系统总体性能的评定. Systems Engineering，Systems Science and Complexity Research. Research Information Ltd 出版社，Hemel Hempstead Hp2 7TD，United kingdom，2000，573578

[320] 赵学锋，张金隆. 灰色局势决策在维修商评价中的应用. 中国管理科学，2003，11(2)：6165

[321] Zopounidis C，Doumpos M. Multcriteria classification and sorting methods：A literature review. European Journal of Operational Research，2002，138：229246

索　引

五画

六画

七画

八画

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画