

# 11.3 最短路问题

## Shortest Path Problem

邹术才

2018年11月22日星期四

# 最短路径 (Shortest Path)

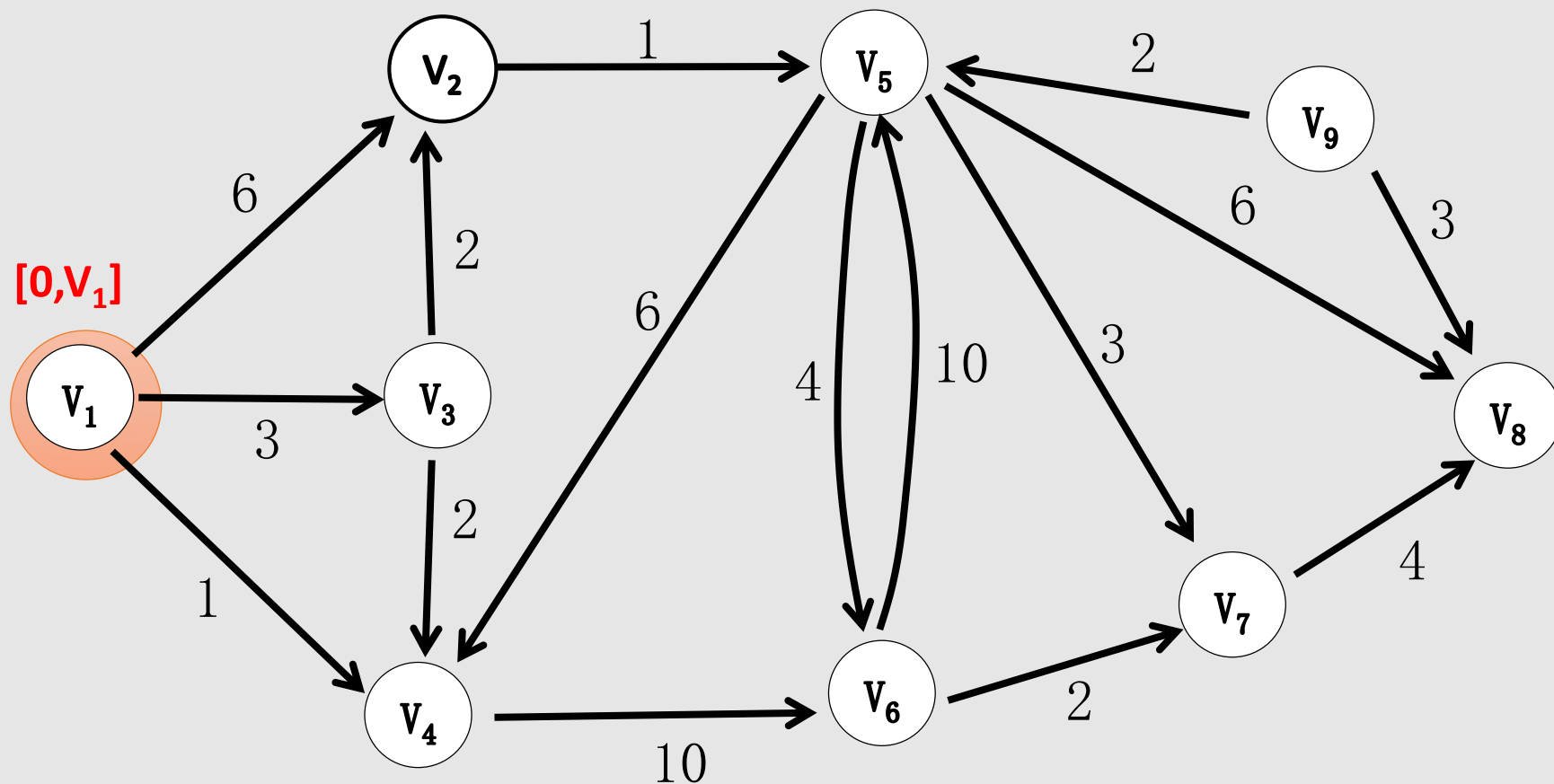
- **最短路径问题：** 如果从图中某一顶点(称为源点)到达另一顶点(称为终点)的路径可能不止一条，如何找到一条路径使得沿此路径上各边上的权值总和达到最小。
- **问题解法**
  - 边上权值非负情形的单源最短路径问题
    - Dijkstra算法
  - 边上权值为任意值的单源最短路径问题
    - Bellman-Ford算法
  - 所有顶点之间的最短路径
    - Floyd算法

# Dijkstra 标号法

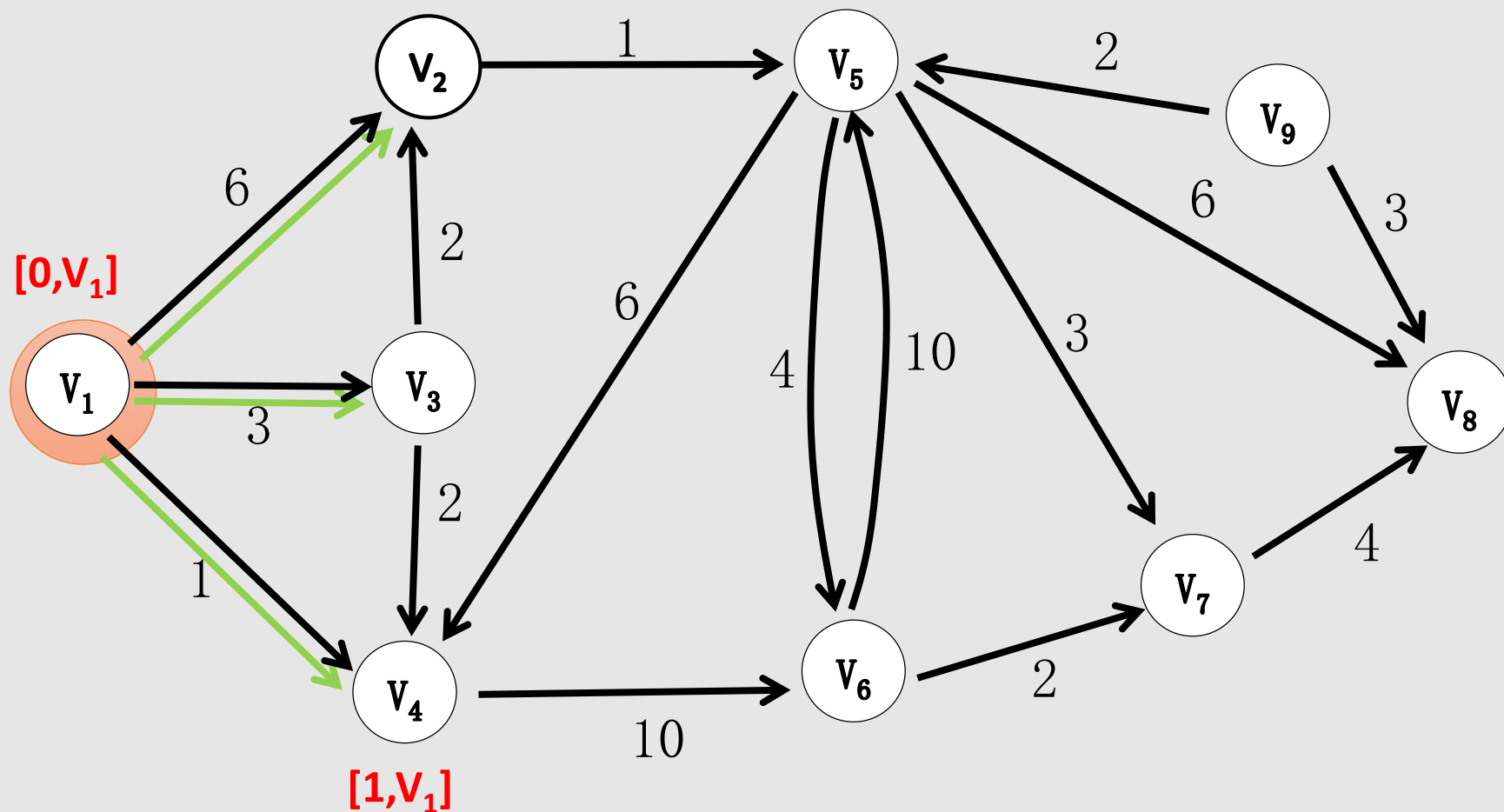
- 基本思想：从起点 $V_s$ 开始，逐步给每一个节点 $V_j$ 标号  $[d_j, V_i]$   
其中  $d_j$  为起点 $V_s$ 到 $V_j$ 的最短距离  
 $V_i$ 为该最短路线上的前一个节点
- 算法步骤：
  - ①、给起点 $V_1$ 标号 $[0, v_1]$
  - ②、把顶点集 $V$ 分成两部分： $V_A$ ：已经标号点集  
 $V_B$ ：未标号点集
  - ③、考虑所有这样的边 $(V_i, V_j)$ ，其中 $V_i \in V_A, V_j \in V_B$ 。  
挑选其中与起点 $V_1$ 距离最短 $\min\{d_i + C_{ij}\}$ 的 $V_j$ ，对 $V_j$ 进行标号
  - ④、重复②③，直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ ，则 $d_t$ 即为 $V_1$ 到 $V_t$ 的最短距离，反向追踪可求出最短路

① 给起点 $V_1$ 标号 $[0, V_1]$  已经标号点集  
②、把顶点集 $V$ 分成:

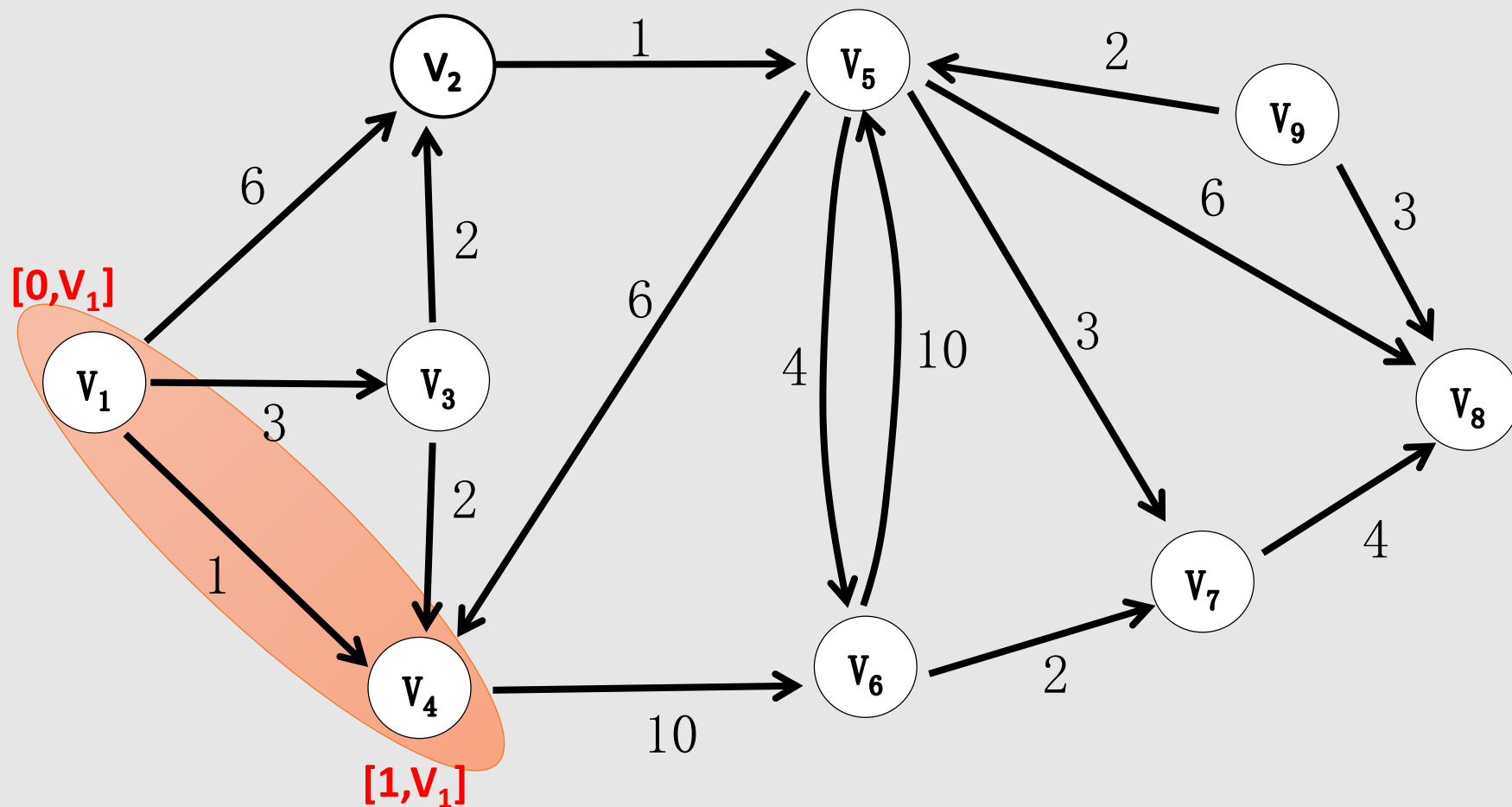
$V_A$ : 已经标号点集  
 $V_B$ : 未标号点集



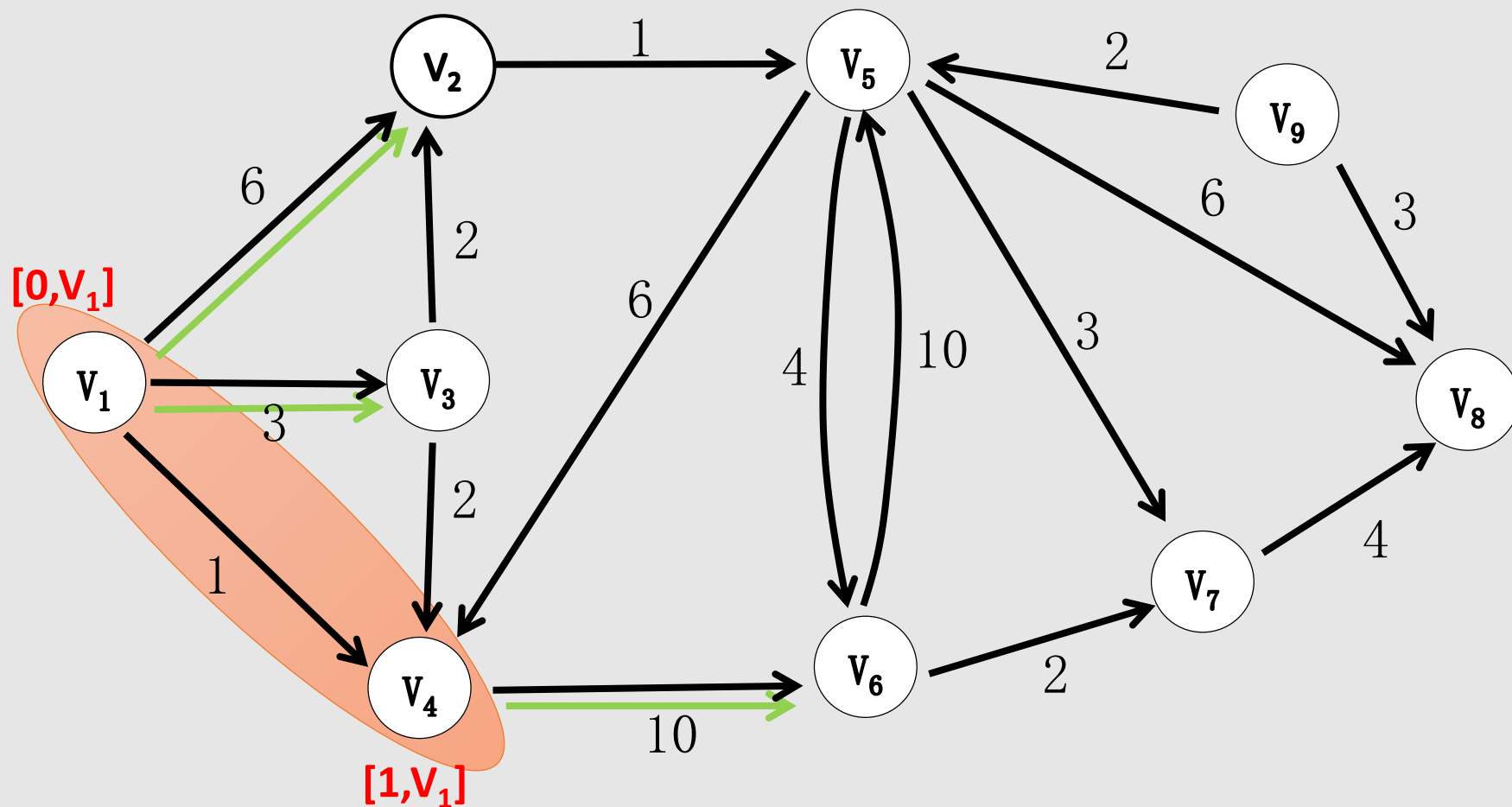
③、考虑所有这样的边 $(V_i, V_j)$ , 其中 $V_i \in V_A, V_j \in V_B$ 。  
挑选其中与起点 $V_1$ 距离最短 $\min\{d_i + C_{ij}\}$ 的 $V_j$ ,  
对 $V_j$ 进行标号。



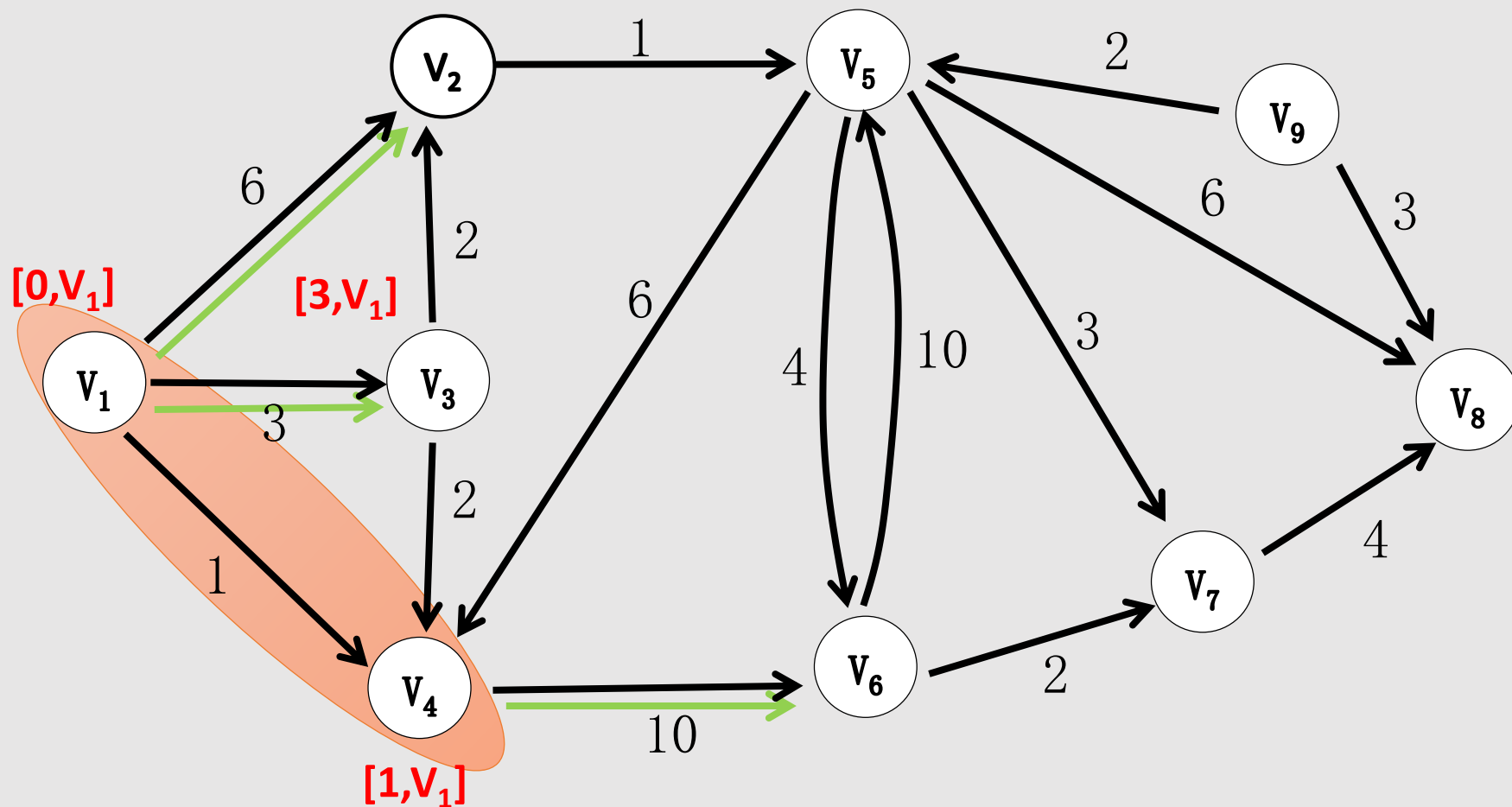
③、考虑所有这样的边 $(V_i, V_j)$ , 其中 $V_i \in V_A, V_j \in V_B$ 。  
挑选其中与起点 $V_1$ 距离最短 $\min\{d_i + C_{ij}\}$ 的 $V_j$ ,  
对 $V_j$ 进行标号。



④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路

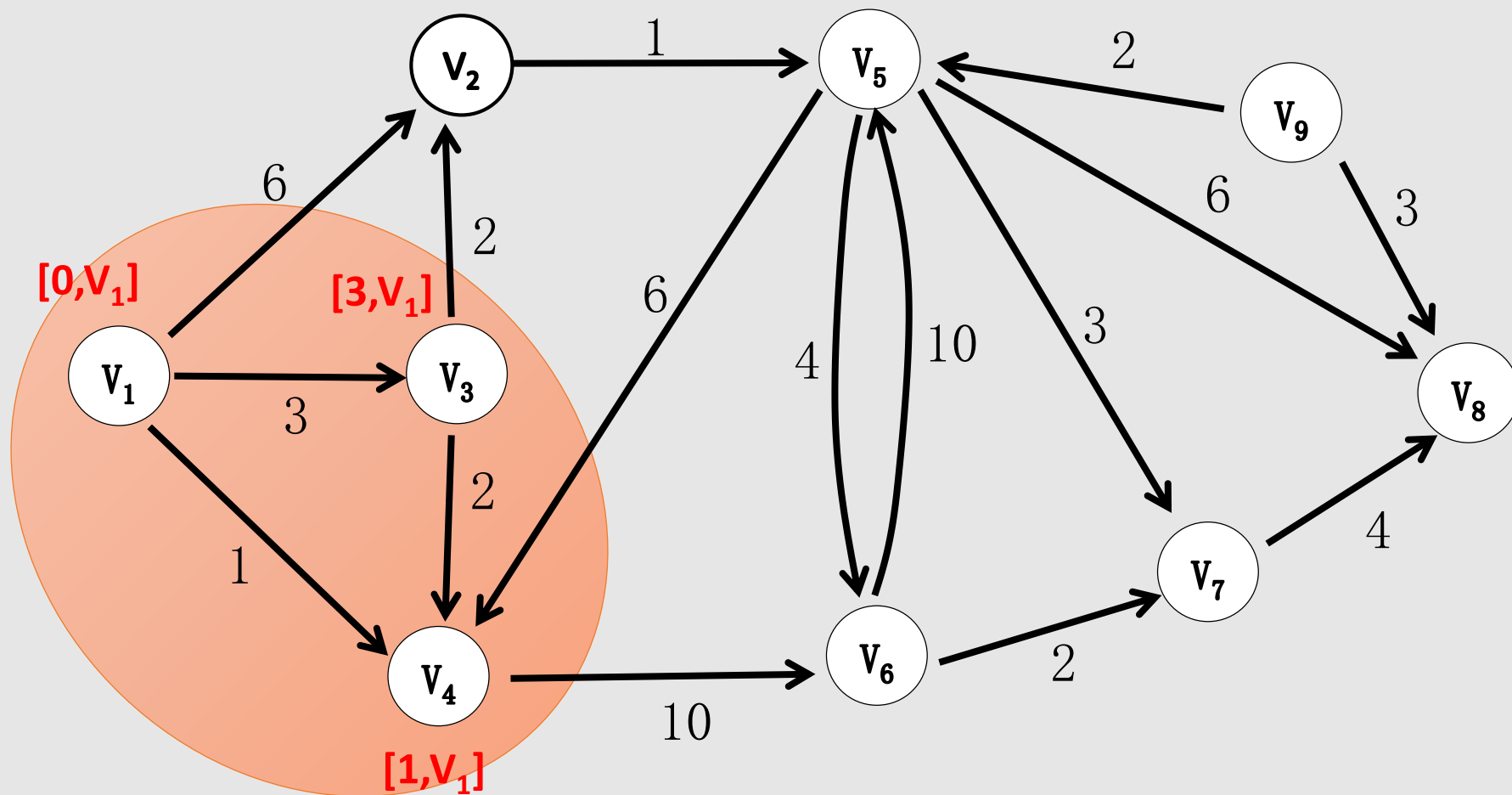


④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路

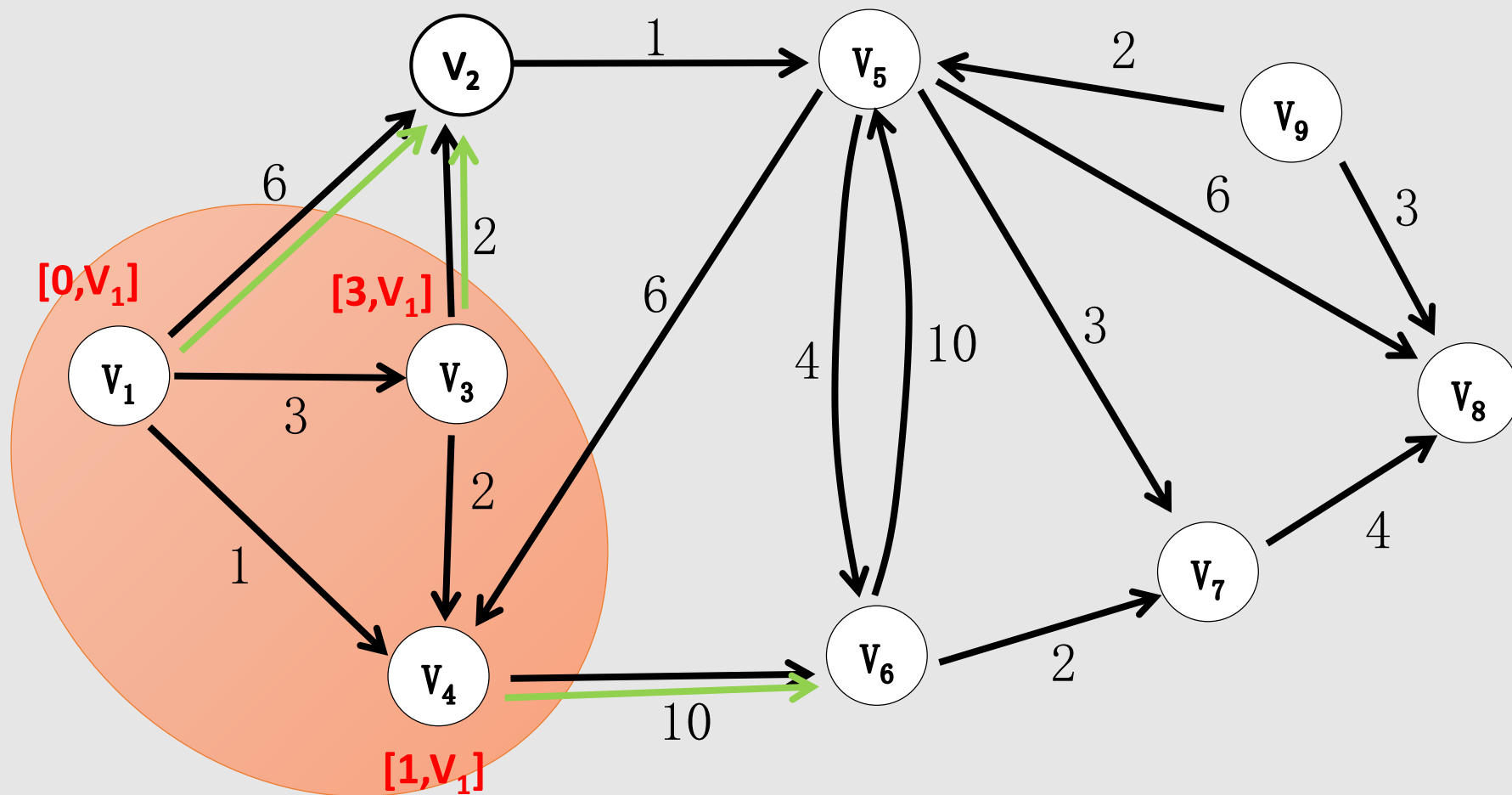




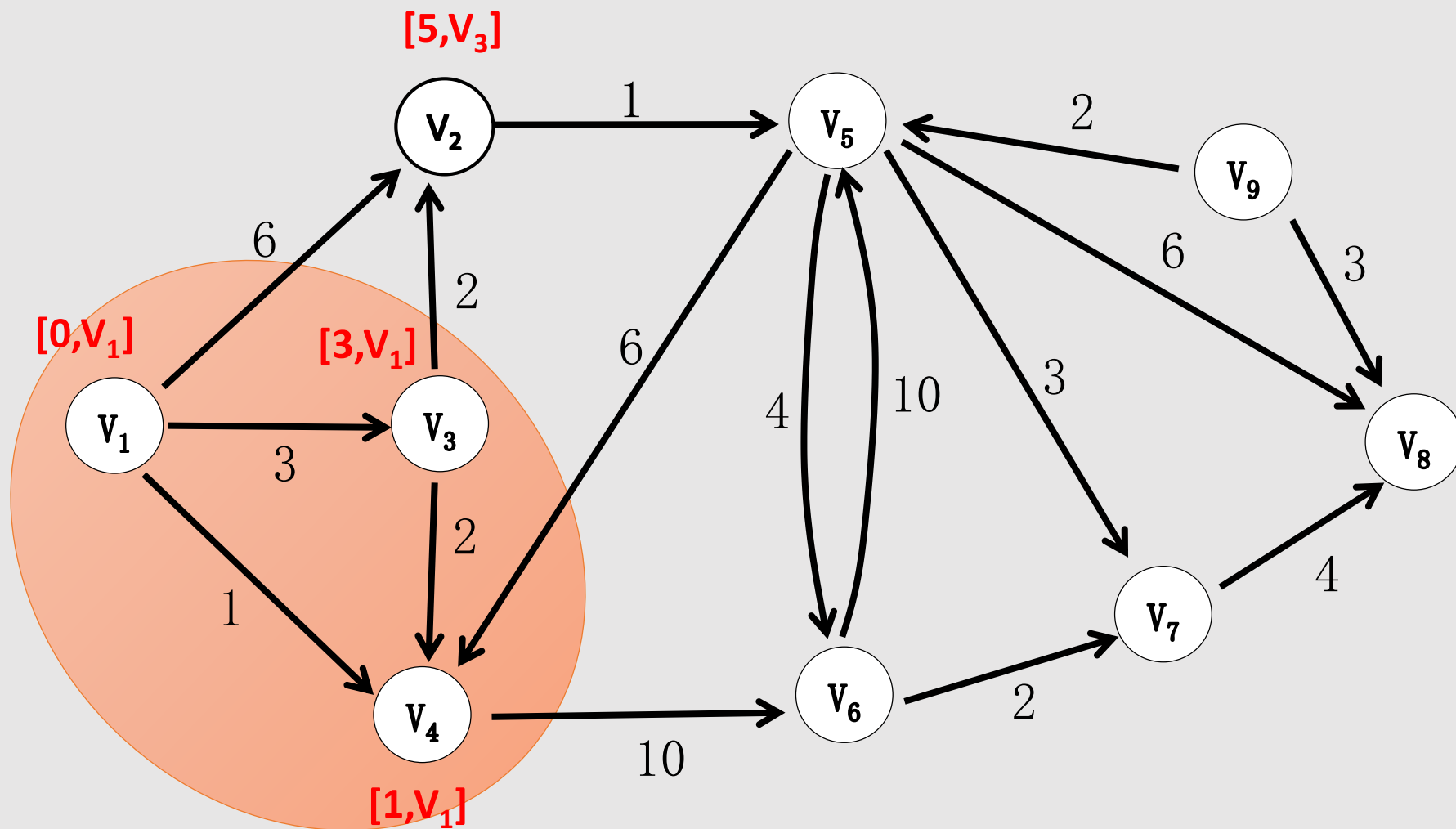
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



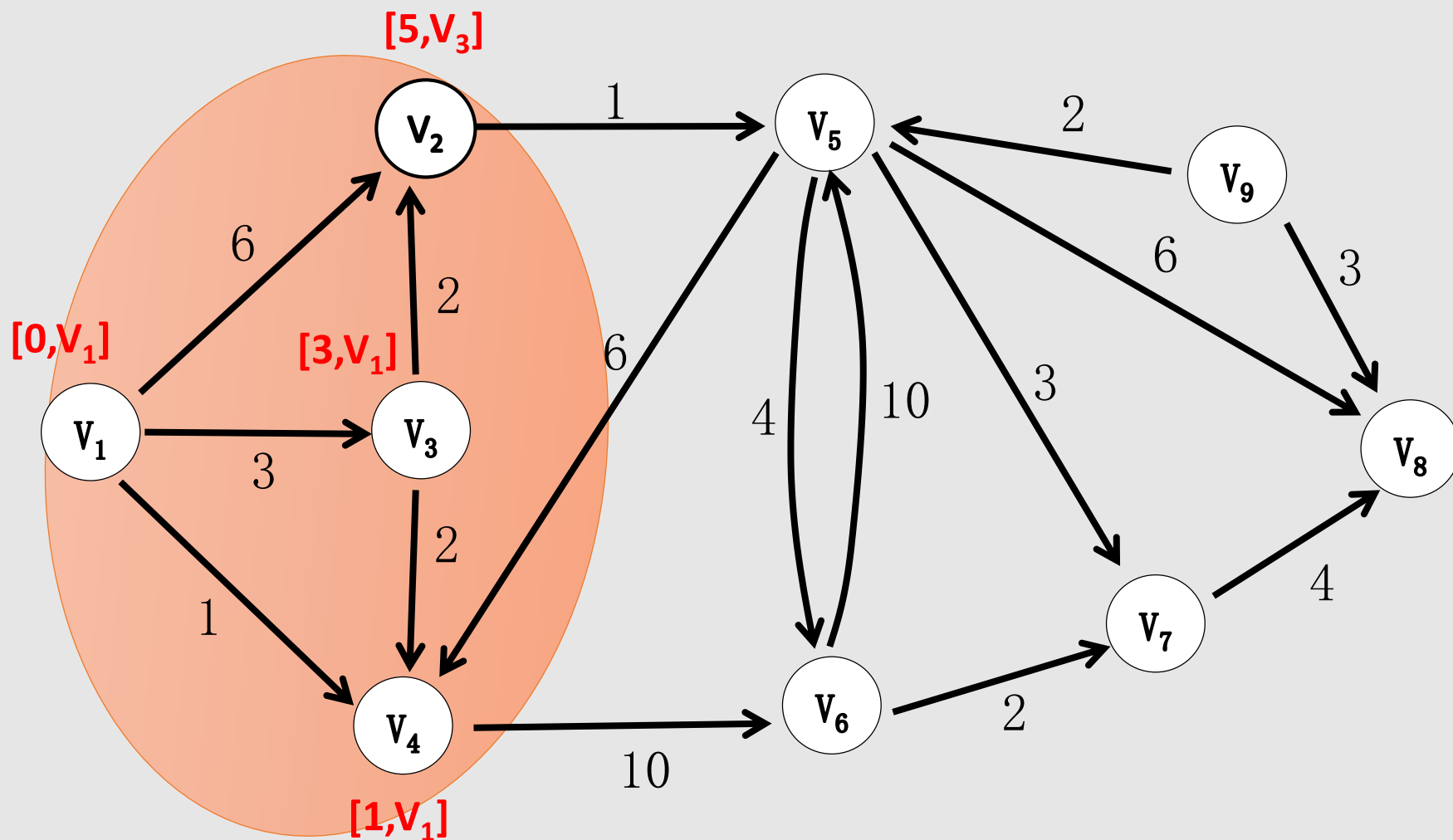
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



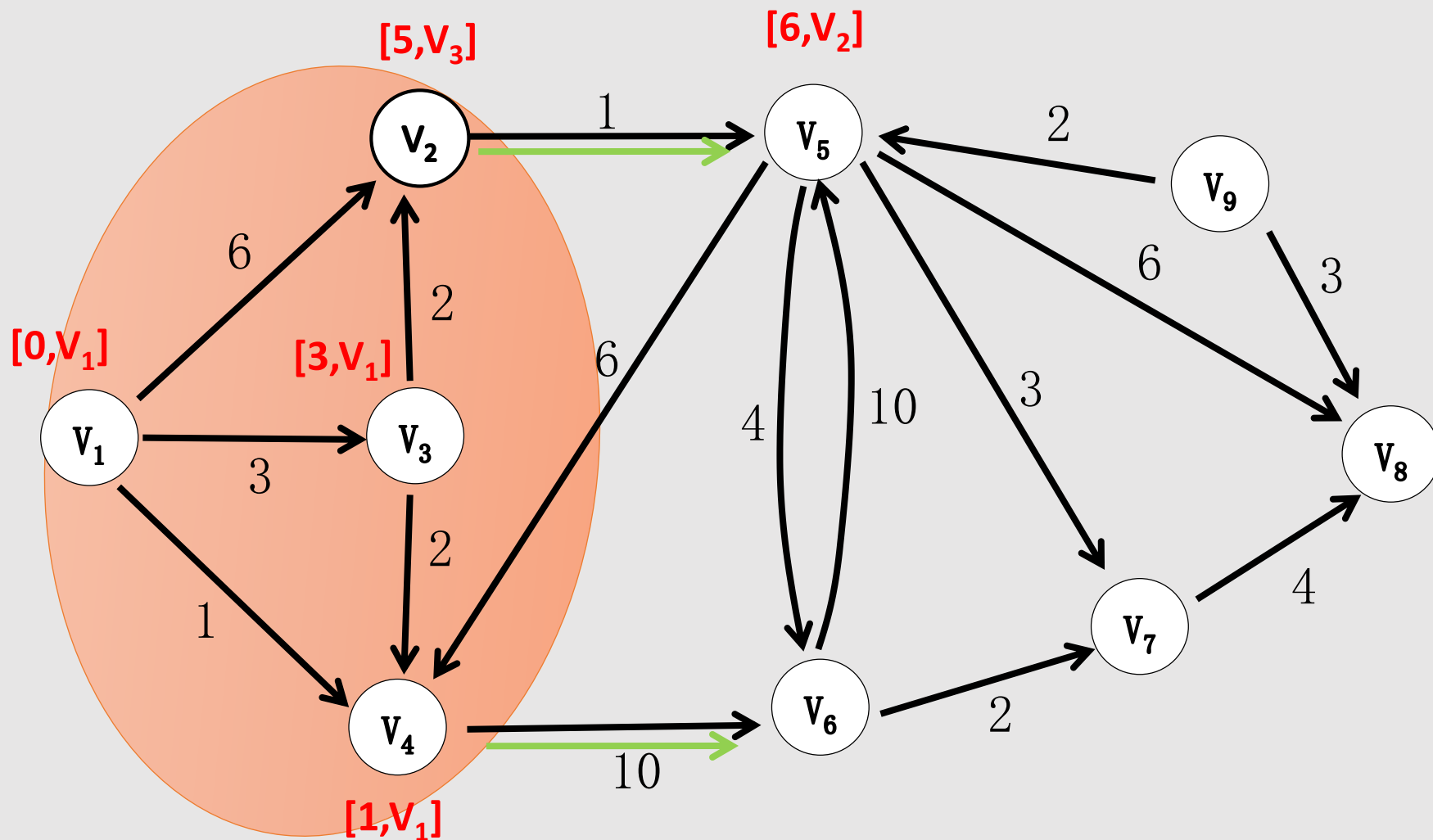
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



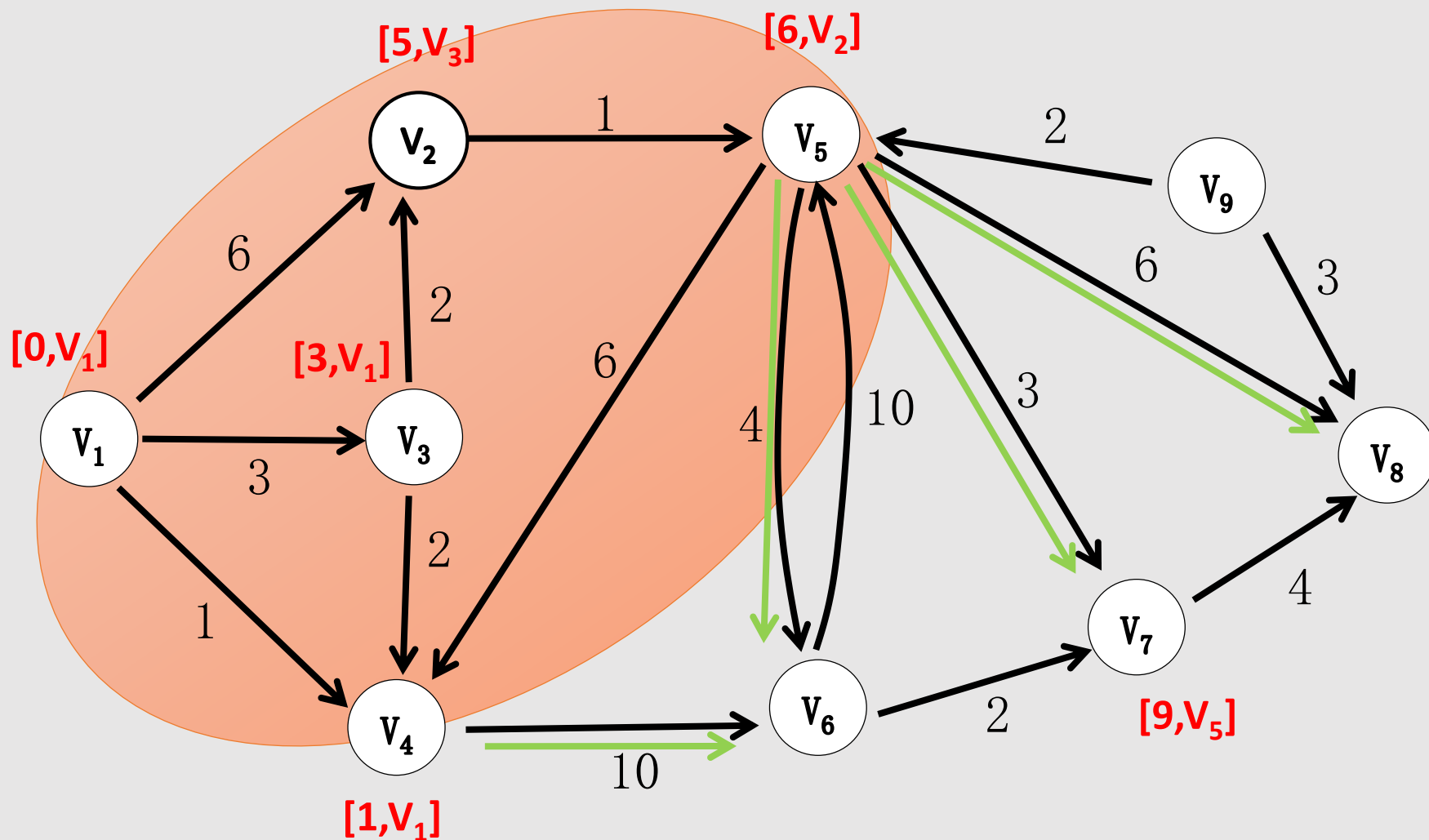
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



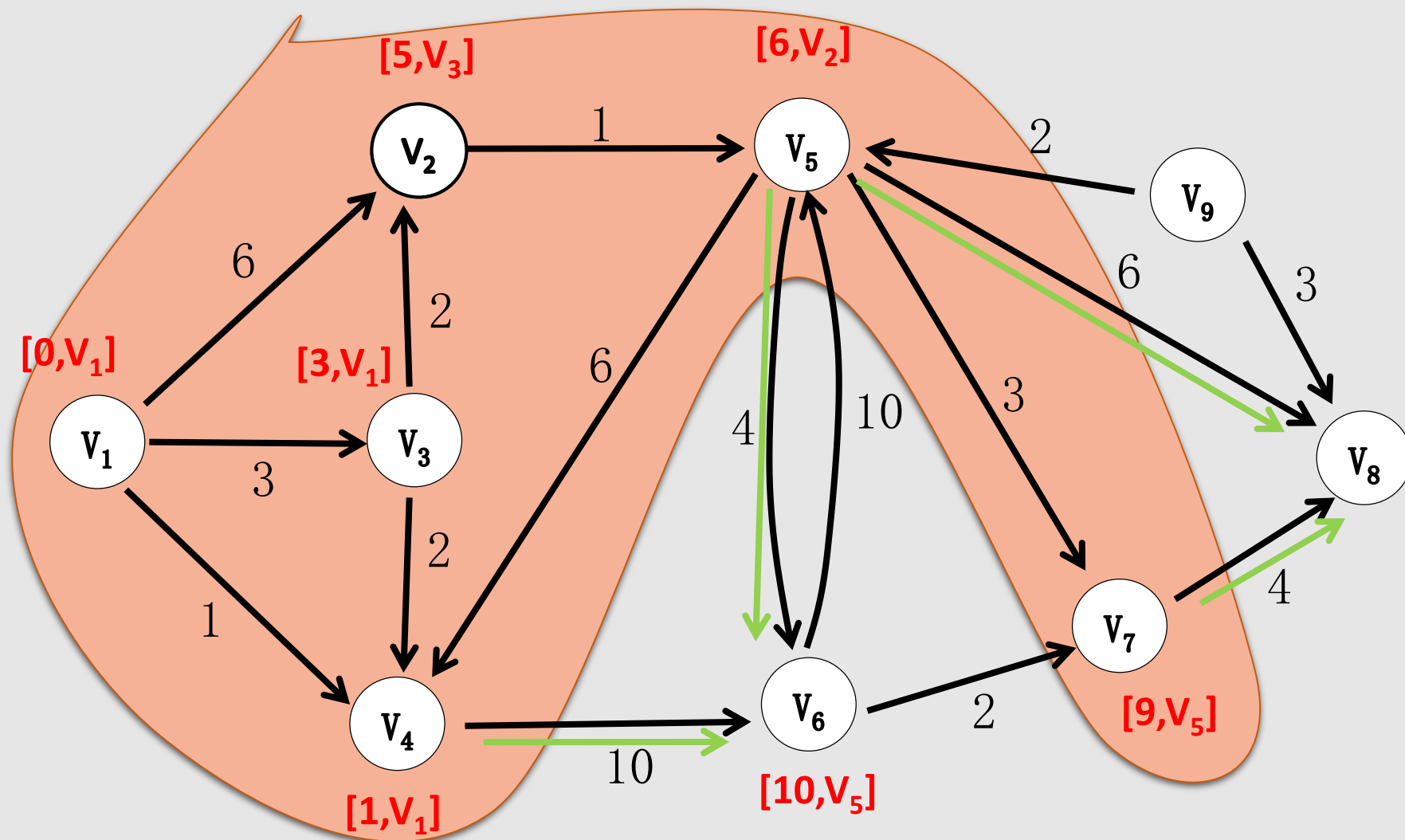
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



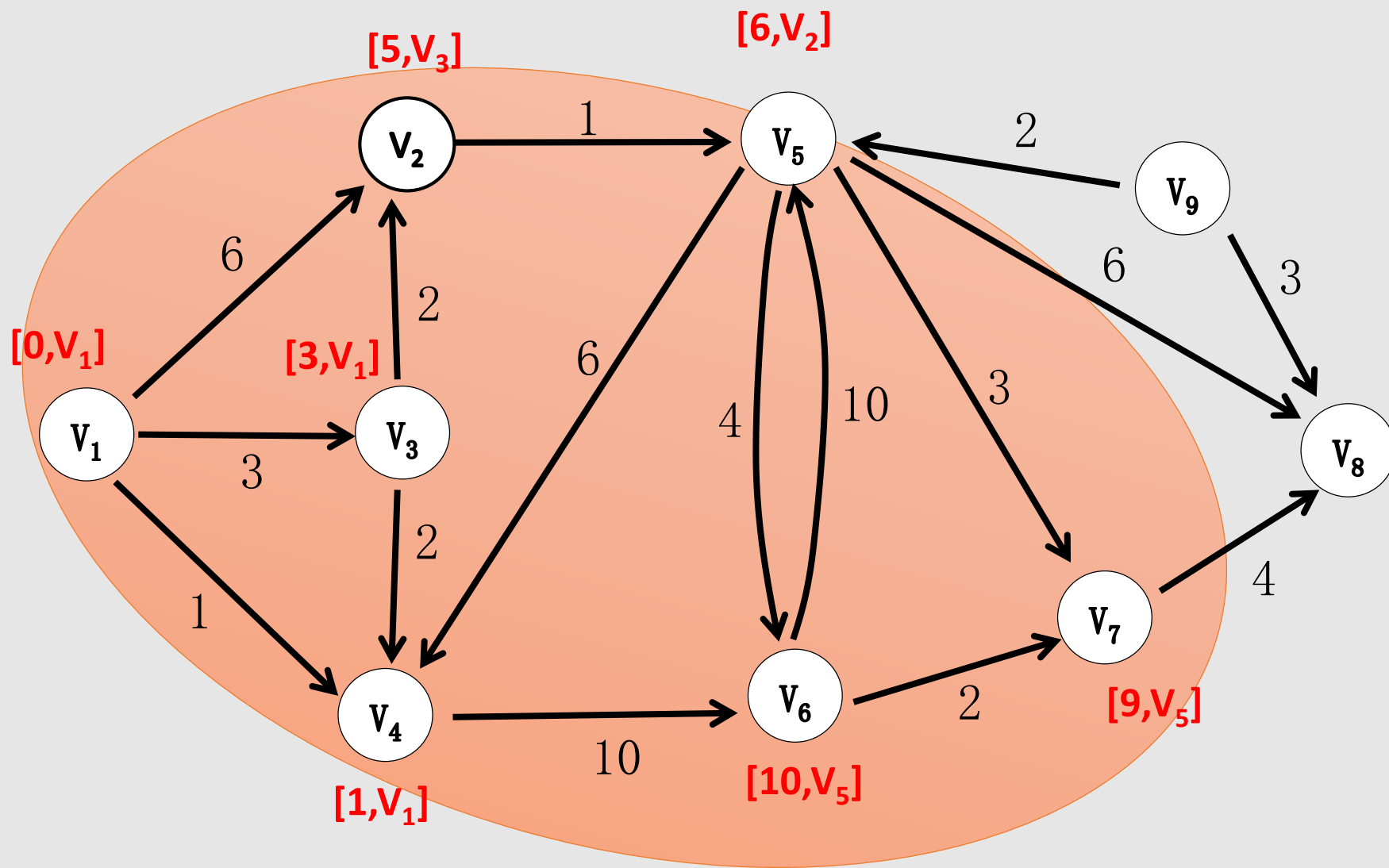
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路

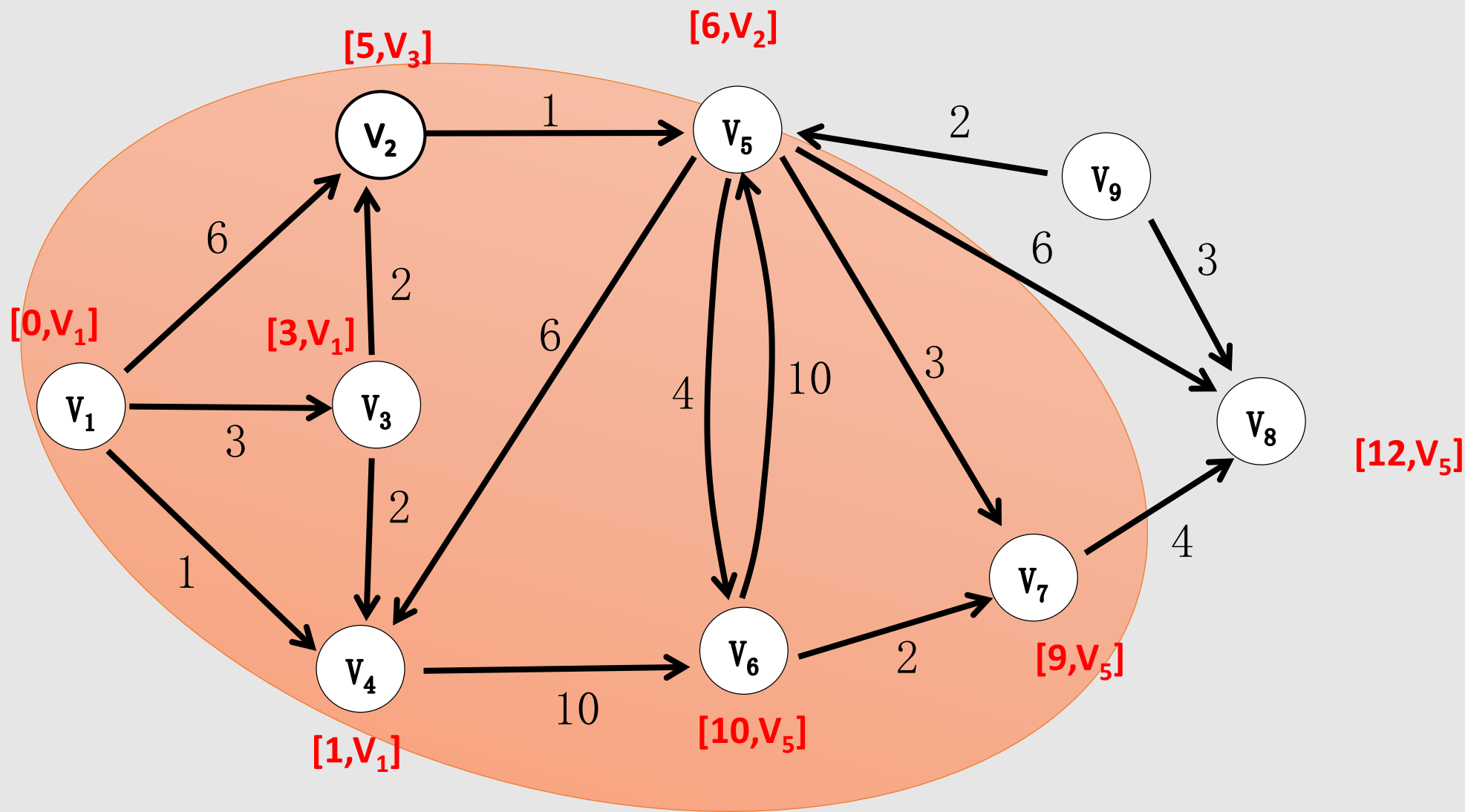


④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路

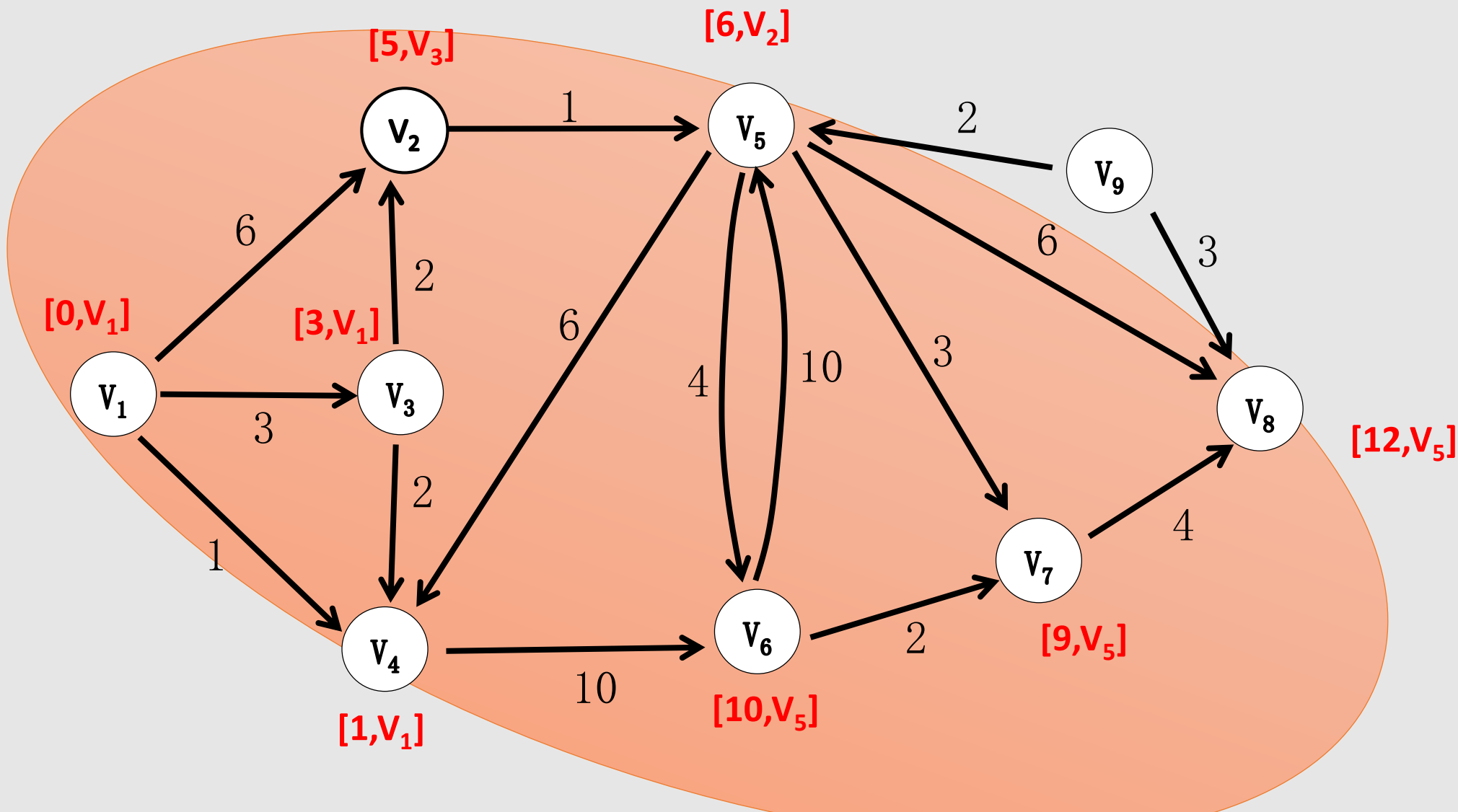




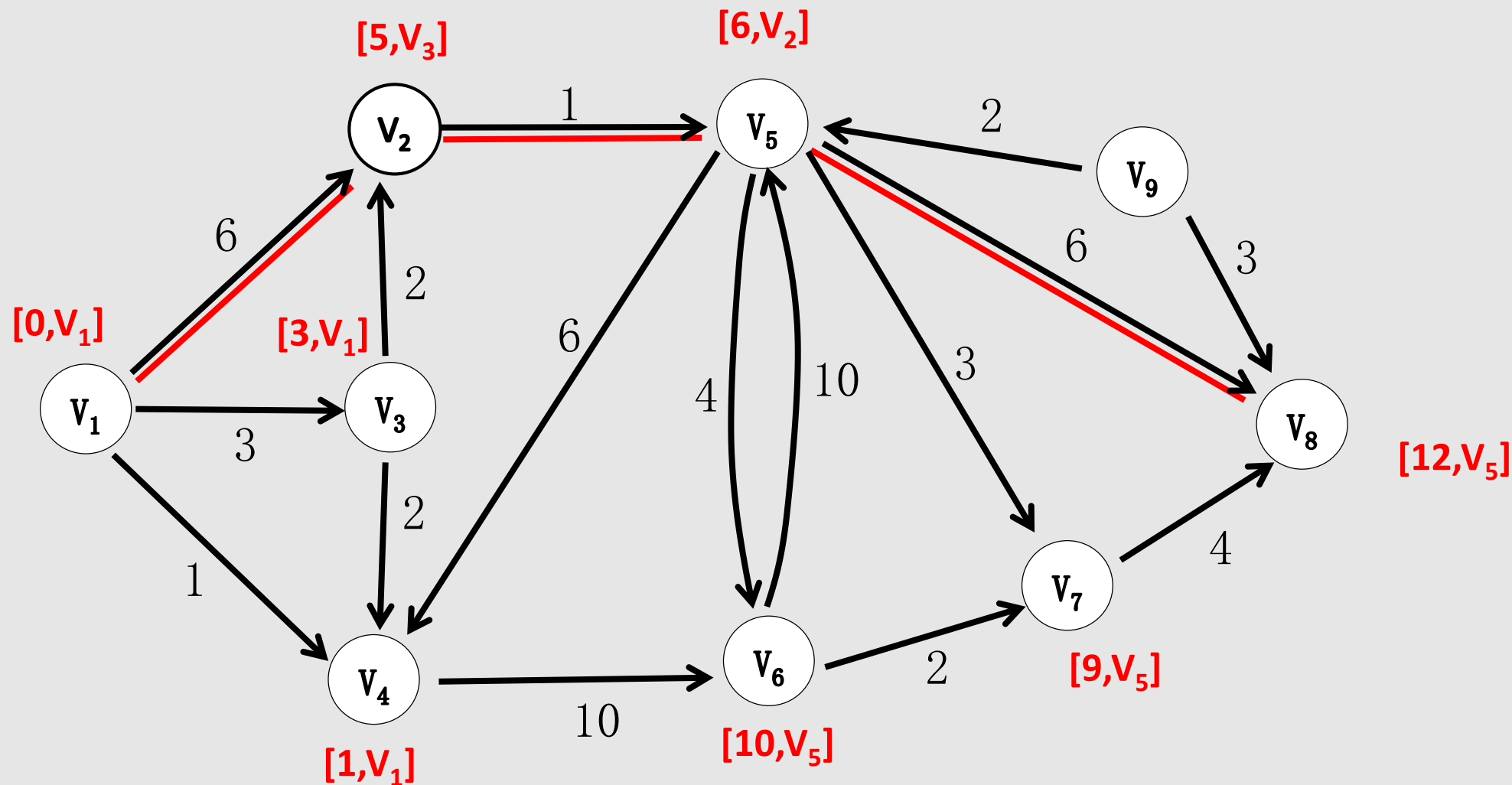
④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



④、重复②③, 直至终点 $V_t$ 标上号 $[d_t, V_i]$ , 则 $d_t$ 即为 $V_1$  到 $V_t$ 的最短距离, 反向追踪可求出最短路



# Dijkstra算法的矩阵版本

点	$W_{ij}$									$d^{(t)}(v_1, v_j)$					
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$
$v_1$	0	6	3	1						0	0	0	0	0	0
$v_2$		0			1					6	6 →	5	5	5	5
$v_3$		2	0	2						3	3	3	3	3	3
$v_4$				0		10				1	1	1	1	1	1
$v_5$				6	0	4	3	6					→ 6	6	6
$v_6$					10	0	2				→ 11	11	11 →	10	10
$v_7$							0	4						→ 9	9
$v_8$							0							→ 12	12
$v_9$					2			3	0						

# Bellman-Ford算法

- 又称列表法 或者 逐次逼近法：
- 基本思想：如果P是D中的从 $V_s$  到  $V_t$  的最短路， $V_i$  是P中的一个点，那么 $V_s$ 沿着P到 $V_i$ 的路是从 $V_s$ 到 $V_i$ 的最短路。

所以总有如下方程：
$$d(v_s, v_t) = \min_i \{ d(v_s, v_i) + w_{ij} \}$$

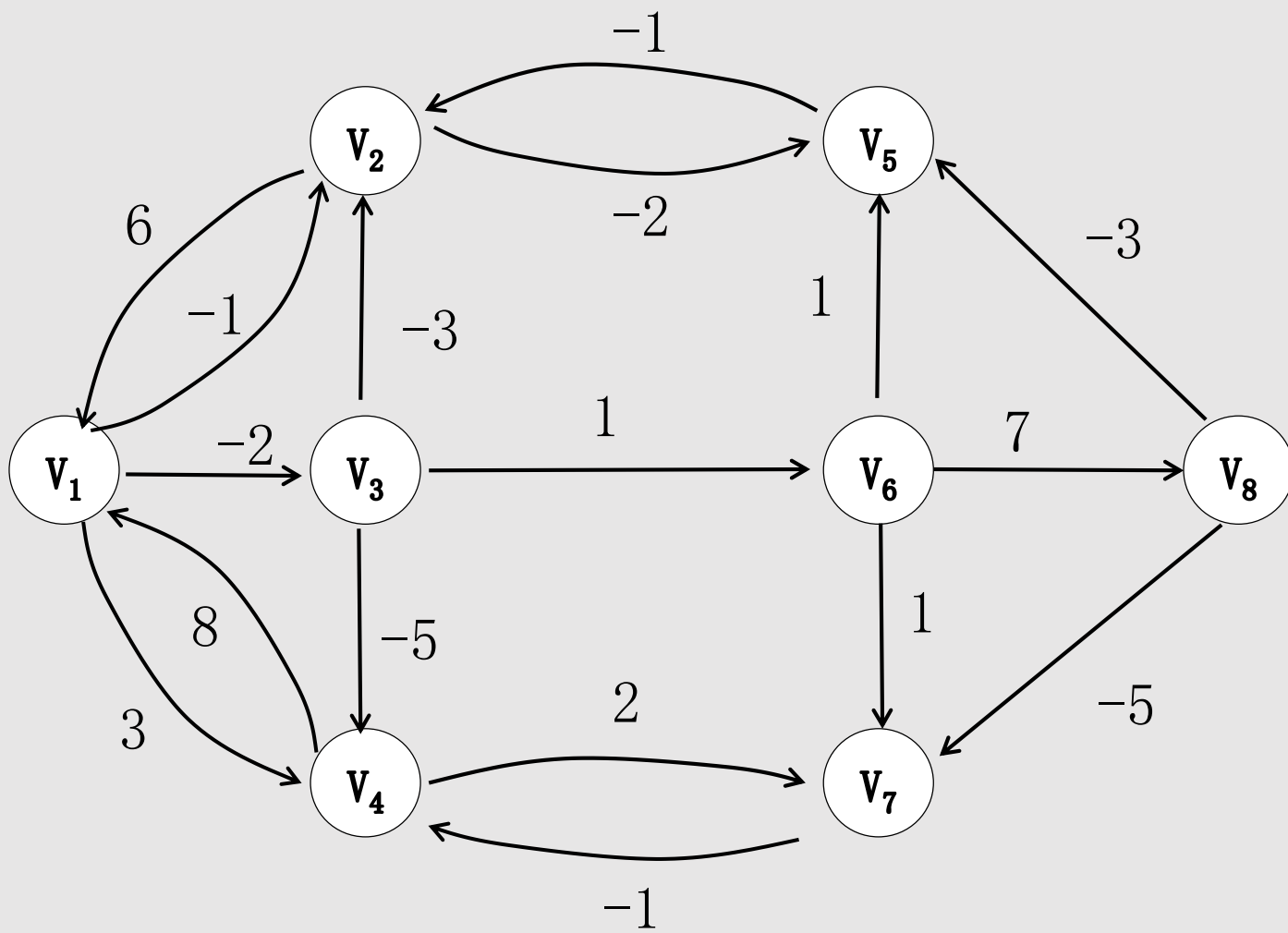
算法步骤： ① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$

③ 当进行到第k步时，有

$$d^{(k)}(v_s, v_j) = d^{(k-1)}(v_s, v_j), j=1, 2, \dots, p$$

则停止迭代，否则回到第②步



$$\textcircled{1} \quad \text{令 } d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$$

$$\textcircled{2} \quad d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$$

点	$w_{ij}$							
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	-1	-2	3				
$v_2$	6	0			2			
$v_3$		-3	0	-5		1		
$v_4$				0			2	
$v_5$		-1			0			
$v_6$					1	0	1	7
$v_7$				-1			0	
$v_8$					-3		-5	0

$$\textcircled{1} \quad \text{令 } d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$$

$$\textcircled{2} \quad d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6



$$\textcircled{1} \quad \text{令 } d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$$

$$\textcircled{2} \quad d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> ,v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>					d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )						
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>						v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )		
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>				t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \cdots p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \cdots p$

点	w <sub>ij</sub>							v <sub>8</sub>	t=1	d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> ,v <sub>j</sub> )		
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>			t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6



① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

$$\textcircled{1} \quad \text{令 } d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$$

$$\textcircled{2} \quad d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>					d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )						
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>									d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>				t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>							v <sub>8</sub>	d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>		t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	t=1	t=2	t=3	t=4
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6



$$\textcircled{1} \quad \text{令 } d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$$

$$\textcircled{2} \quad d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	t=1	t=2	t=3	t=4
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

$$\textcircled{1} \quad \text{令 } d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j=1, 2, \dots, p)$$

$$\textcircled{2} \quad d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j=1, 2, \dots, p$$

点	$w_{ij}$								$d^{(t)}(v_1, v_j)$			
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	t=1	t=2	t=3	t=4
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	$w_{ij}$				$d^{(t)}(v_1, v_j)$							
	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	t=1	t=2	t=3	t=4
$v_1$	0	-1	-2	3					0	0	0	0
$v_2$	6	0			2				-1	-5	-5	-5
$v_3$		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
$v_4$				0			2		3	-7	-7	-7
$v_5$		-1			0					1	-3	-3
$v_6$					1	0	1	7		-1	-1	-1
$v_7$				-1			0			5	-5	-5
$v_8$					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \cdots p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \cdots p$

点	w <sub>ij</sub>					d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )						
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \dots, p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )				
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>			t=1	t=2	t=3	t=4	
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0	
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5	
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2	
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7	
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3	
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1	
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5	
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6	

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \cdots p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \cdots p$

点	w <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )				
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>			t=1	t=2	t=3	t=4	
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0	
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5	
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2	
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7	
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3	
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1	
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5	
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6	

① 令  $d^{(1)}(v_s, v_j) = w_{sj} (j = 1, 2, \cdots p)$

②  $d^{(t)}(v_s, v_j) = \min_i \{ d^{(t-1)}(v_s, v_i) + w_{ij} \}, j = 1, 2, \cdots p$

点	w <sub>ij</sub>							v <sub>8</sub>	d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>		t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6



对比di jstra算法和列表法：

点	W <sub>ij</sub>									d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )					
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	v <sub>9</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6
v <sub>1</sub>	0	6	3	1						0	0	0	0	0	0
v <sub>2</sub>		0			1					6	6	5	5	5	5
v <sub>3</sub>		2	0	2						3	3	3	3	3	3
v <sub>4</sub>				0		10				1	1	1	1	1	1
v <sub>5</sub>				6	0	4	3	6					6	6	6
v <sub>6</sub>					10	0	2				11	11	11	10	10
v <sub>7</sub>							0	4						9	9
v <sub>8</sub>							0							12	12
v <sub>9</sub>					2			3	0						

点	W <sub>ij</sub>								d <sup>(t)</sup> (v <sub>1</sub> , v <sub>j</sub> )			
	v <sub>1</sub>	v <sub>2</sub>	v <sub>3</sub>	v <sub>4</sub>	v <sub>5</sub>	v <sub>6</sub>	v <sub>7</sub>	v <sub>8</sub>	t=1	t=2	t=3	t=4
v <sub>1</sub>	0	-1	-2	3					0	0	0	0
v <sub>2</sub>	6	0			2				-1	-5	-5	-5
v <sub>3</sub>		-3	0	-5		1			-2	-2	-2	-2
v <sub>4</sub>				0			2		3	-7	-7	-7
v <sub>5</sub>		-1			0					1	-3	-3
v <sub>6</sub>					1	0	1	7		-1	-1	-1
v <sub>7</sub>				-1			0			5	-5	-5
v <sub>8</sub>					-3		-5	0			6	6

## Floyd算法

Floyd算法基本步骤：

(1)输入权矩阵 $\mathbf{D}^{(1)}=\mathbf{D}$ ； $\mathbf{D}^{(1)}$ 称为一步最短距离矩阵。

(2)计算二步最短距离矩阵  $D^{(2)} = (d^{(2)}_{ij})_{n \times n}$ 。设 $v_i$ 到 $v_j$ 经过一个中间点 $v_r$ 两步到达 $v_j$ ，则 $v_i$ 到 $v_j$ 的最短距离为

$$d^{(2)}_{ij} = \min_r \{d^1_{ir} + d^1_{rj}\}$$

(3)重复(2)步，计算 $k$ 步最短距离矩阵  $D^{(k)} = (d^{(k)}_{ij})_{n \times n}$ 。设 $v_i$ 经过中间点 $v_r$ 到达 $v_j$ ， $v_i$ 经过 $k-1$ 步到达点 $v_r$ 的最短距离为

$$d^{(k)}_{ij} = \min \{d^{(k-1)}_{ir} + d^{(k-1)}_{rj}\}$$

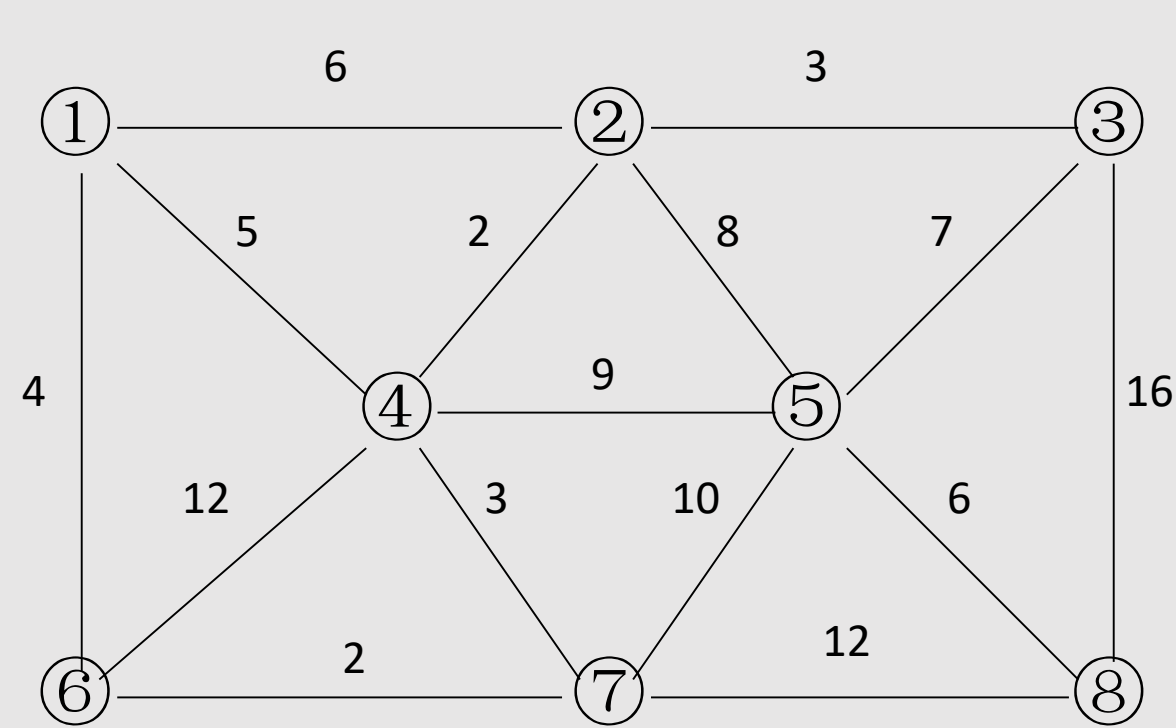
(4) 当  $D^{(k)} = D^{(k-1)}$  时,停止迭代,  $d^{(k)}_{ij}$  就是 $v_i$ 到 $v_j$ 的最短路。

结论： 设图的点数为 $n$ 并且 $c_{ij} \geq 0$ ，迭代次数 $k$ 由下式估计得到

$$2^{k-1} - 1 < n - 2 \leq 2^k - 1$$

$$k - 1 < \frac{\lg(n - 1)}{\lg 2} \leq k$$

例：



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 d_{43}^{(2)} &= \min \{c_{41} + c_{13}, c_{42} + c_{23}, c_{43} + c_{33}, c_{44} + c_{43}, c_{45} + c_{53}, c_{46} + c_{63}, c_{47} + c_{73}, c_{48} + c_{83}\} \\
 &= \min \{5 + \infty, 2 + 3, \infty + 0, 0 + \infty, 9 + 7, 0 + \infty, \infty + \infty, 10 + \infty, 6 + 16\} = 5
 \end{aligned}$$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

最短距离表 $D^{(2)}$

$$\begin{aligned}
 d_{43}^{(2)} &= \min \{ c_{41} + c_{13}, c_{42} + c_{23}, c_{43} + c_{33}, c_{44} + c_{43}, c_{45} + c_{53}, c_{46} + c_{63}, c_{47} + c_{73}, c_{48} + c_{83} \} \\
 &= \min \{ 5 + \infty, 2 + 3, \infty + 0, 0 + \infty, 9 + 7, 0 + \infty, \infty + \infty, 10 + \infty, 6 + 16 \} = 5
 \end{aligned}$$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>14</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	$\infty$
$v_2$	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>5</b>	<b>14</b>
$v_3$	<b>9</b>	<b>3</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	$\infty$	<b>17</b>	<b>13</b>
$v_4$	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>0</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>15</b>
$v_5$	<b>14</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>0</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>6</b>
$v_6$	<b>4</b>	<b>10</b>	$\infty$	<b>5</b>	<b>12</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>14</b>
$v_7$	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>17</b>	<b>3</b>	<b>10</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>12</b>
$v_8$	$\infty$	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>6</b>	<b>14</b>	<b>12</b>	<b>0</b>

最短距离表 $D^{(2)}$



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	$\infty$	5	$\infty$	4	$\infty$	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$\infty$	3	0	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$	16
$v_4$	5	2	$\infty$	0	9	12	3	$\infty$
$v_5$	$\infty$	8	7	9	0	$\infty$	10	6
$v_6$	4	$\infty$	$\infty$	12	$\infty$	0	2	$\infty$
$v_7$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	$\infty$	16	$\infty$	6	$\infty$	12	0

最短距离表 $D^{(1)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

以此迭代，计算所有 $D^{(2)}$ 中的元素

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	18
$v_2$	6	0	3	2	8	7	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	10	8	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	7	10	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	8	3	10	2	0	12
$v_8$	18	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(3)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	18
$v_2$	6	0	3	2	8	7	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	10	8	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	7	10	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	8	3	10	2	0	12
$v_8$	18	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(3)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	18
$v_2$	6	0	3	2	8	7	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	10	8	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	7	10	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	8	3	10	2	0	12
$v_8$	18	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(3)}$



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	$\infty$
$v_2$	6	0	3	2	8	10	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	$\infty$	17	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	10	$\infty$	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	17	3	10	2	0	12
$v_8$	$\infty$	14	13	15	6	14	12	0

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$v_1$	0	6	9	5	14	4	6	18
$v_2$	6	0	3	2	8	7	5	14
$v_3$	9	3	0	5	7	10	8	13
$v_4$	5	2	5	0	9	5	3	15
$v_5$	14	8	7	9	0	12	10	6
$v_6$	4	7	10	5	12	0	2	14
$v_7$	6	5	8	3	10	2	0	12
$v_8$	18	14	13	15	6	14	12	0

最短距离表 $D^{(2)}$

最短距离表 $D^{(3)}$

重复以此迭代， 计算所有 $D^{(4)}$ 中的元素,发现 $D^{(4)}=D^{(3)}$ 则停止

# More

1. WINQSB运筹学软件:
2. [Optimization-using-R](#) :
3. [Matlab运筹学中的应用](#)
4. 画图以及图形建模: <http://igraph.org/>