

### 算法基础

第四次作业 (DDL: 2025 年 11 月 23 日 23:59)

解答过程中请写出必要的计算和证明过程

**Q1.** (10 + 10 = 20 分)

对于图一所给的斐波那契堆，黑色节点表示结点的 mark 属性为 true：

- 1) 抽取最小结点 (需要考虑 CONSOLIDATE 操作)，画出每次操作之后的结果。
- 2) 分析该操作的摊还代价。

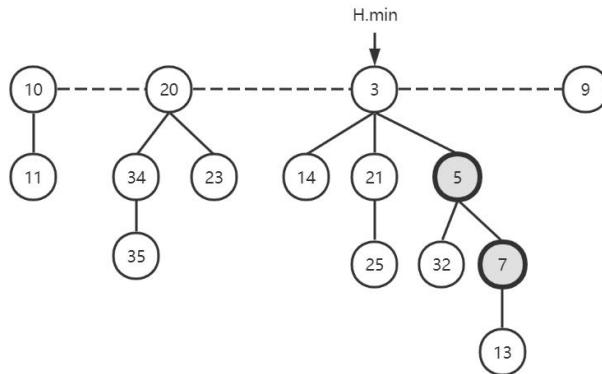


图 1: 斐波那契堆

**Q2.** (20 分)

假设斐波那契堆中的一个根节点  $x$  是被标记的。请说明  $x$  是如何成为一个被标记的根节点的。

**Q3.** (15 + 15 = 30 分) 斐波那契堆删除操作的另一种实现：

Pisano 教授提出了下面的 FIB-HEAP-DELETE 过程的一个变种，声称如果删除的结点不是由  $H.\min$  指向的结点，那么该程序运行地更快。

- (a) 该教授的声称是基于第 10 行可以在  $O(1)$  实际时间完成的这一假设，它的程序可以运行的更快。该假设有什么问题吗？
- (b) 当  $x$  不是由  $H.\min$  指向时，给出 PISANO-DELETE 实际时间的一个好（紧凑）上界。你给出的上界应该以  $x.degree$  和调用 CASCADING-CUT 的次数  $c$  这两个参数来表示。

---

**Algorithm 1:** PISANO-DELETE( $H, x$ )

---

**Input :** A Fibonacci heap  $H$ , a node  $x$

**Output:** Heap  $H$  after deleting node  $x$

```

1 if  $x == H.\min$  then
2   | FIB-HEAP-EXTRACT-MIN( $H$ );
3 end
4 else
5   |  $y \leftarrow x.p$ ;
6   | if  $y \neq NIL$  then
7     |   | Cut( $H, x, y$ );
8     |   | Cascading-Cut( $H, y$ );
9   end
10  | Add  $x$ 's child list to the root list of  $H$ ;
11  | Remove  $x$  from the root list of  $H$ ;
12 end

```

---

**Q4.** (30 分)

为了在算法基础课程期中考试中取得好成绩，小花同学在考前狂刷《算法导论》课后习题。在不刷任何题的情况下，小花能够考  $S$  分。《算法导论》中共有  $n$  道题，刷第  $i$  题能使她的期中考试成绩提升  $s_i$  ( $s_i \geq 0$ )。但与此同时，刷题会产生疲劳，进而影响考试发挥，如果小花一共刷了  $k$  道题，则她会因为疲劳而损失  $\alpha k$  分 ( $\alpha \geq 0$ )。小花不喜欢跳着刷题，也不喜欢倒着刷题，更不喜欢重复刷题，因此她只会从某一题开始刷连续的若干题。假设小花希望让自己的最终分数落入  $[l, r]$ ，请问她有多少种刷题方案？试设计一个具有  $O(n \lg n)$  最坏时间复杂度的算法解决该问题。（在小花所处的平行世界中，考试的分数未必是  $0 \sim 100$  的整数，因此你不能使用计数排序等对数据范围有限制的方法）