Calculus

သတိ : စာကိုမကျက်ပါနှင့်။
နားလည်အောင်ဖတ်ပြီးစဉ်းစားပါ။

Causality

- လောကကြီးမှာ အကြောင်းကြောင့် အကျိုးဖြစ်တယ်လို့ ယေဘုယအားဖြင့် နားလည်ထားကြပါသည်။
- ဒီလို အကြောင်းအကျိုးဆက်စပ်မှုကို လေ့လာပြီး အသုံးချနိုင်လို့လဲ လူ့လောကကြီးတိုးတက်လာတယ် ဆိုရင် မမှားပါဘူး။
- သို့သော် ကြောင်းကျိုးဆက်စပ်မှုများနဲ့ ပတ်သက်ပြီးလို့တော့ လူတွေ အလုံးစုံတော့ နားမလည်သေးပါဘူး။
- အချို့ ကြောင်းကျိုးဆက်စပ်များသည် တိတိကျကျ ပြောနိုင်ပါသည်။ ဒါကို Deterministic ဖြစ်သည်လို့ ပြောပါသည်။
- အချို့ ကြောင်းကျိုးဆက်စပ်များသည် တိတိကျကျ မပြောနိုင်ပါ။ ဒါကို Non-Deterministic ဖြစ်သည်လို့ ပြောပါသည်။
- ဒါကြောင့် Causality ကို Deterministic Causality နဲ့ Non-Deterministic Causality ဆိုပြီး ၂ မျိုးခွဲခြားထားကြပါသည်။

Change

- ပြောင်းလဲခြင်းဆိုတာ ဘာလဲလို့ မေးရင် ဘယ်လိုဖြေမလဲ။
- ပြောင်းလဲခြင်းဆိုတာ အခြေအနေ (State) တစ်ခုမှ တစ်ခုသို့ ကူးပြောင်းသွားခြင်းဖြစ်သည်။
- ပြောင်းလဲခြင်းသည် မပြောင်းလဲခင် အခြေအနေနှင့် ပြောင်းလဲပြီး အခြေအနေတို့ကို ပိုင်းခြားပေးသည်။
- သင်္ချာသဘောအရ ပြောရင် ပြောင်းလဲခြင်းသည် ခြားနားခြင်း (Difference) တစ်ခုဖြစ်သည်။
- Difference = Current State – Previous State
- Difference က သုည (Zero) ထက်ပိုကြီးလျှင် အပေါင်း လက္ခဏာ (Positive Change) ပြောင်းလဲခြင်းဖြစ်ပြီး သုညအောက် ငယ်လျှင် အနုတ် လက္ခဏာ (Negative Change) ပြောင်းလဲခြင်းဖြစ်သည်။
- Difference က သုည ဆိုလျှင်တော့ (No Difference) ပြောင်းလဲခြင်း မရှိပါ။

More Change

- လူတွေက အကြောင်းအကျိုးဆက်စပ်မှု (Causality)ကို ဘာလို့ စိတ်ဝင်စားကြတာလဲ လို့မေးရင် Cause နဲ့ Effect က Change ကို ဖြစ်စေလို့ ပါပဲ။
- နေထွက်လာသည်။ နေဝင်သွားသည်။ နွေရာသီ၊ မိုးရာသီ၊ ဆောင်းရာသီ။ ပြောင်းလဲခြင်းများသည် ကျွန်တော် ပတ်ဝန်းကျင်နှင့် ကျွန်တော်တို့ ကိုယ်တိုင် တွေ့ကြုံရနေပါသည်။
- အချို့ပြောင်းလဲခြင်းများကို ကျွန်တော်တို့ တိတိကျကျ မပြောနိုင်။ ဥပမာ၊ ထီပေါက်မလား။ နောက် တစ်လ ဒီအချိန် မှာ မိုးရွာမလား။
- သို့သော် အချို့ပြောင်းလဲခြင်းများကိုတော့ ကျွန်တော်တို့ တိတိကျကျပြောနိုင်ပါသည်။
- တစ်နည်းအားဖြင့် Deterministic Causality သည် Deterministic Change ကို ဖြစ်စေပါသည်။
- လူတွေက တိတိကျကျ ပြောနိုင်သော Deterministic Change ကို ပိုစိတ်ဝင်စား လာကြပါသည်။

State (Space) and Time

- Deterministic Change ကို လူတွေ အရင်က စိတ်ဝင်တစား လေ့လာကြသော်လည်း သေသေချာချာ နားမလည်ခဲ့ပါ။
- Deterministic Change ကို သေသေချာချာ နားလည်လာသည်က Newton ခေတ်မှ ဖြစ်သည်။
- ပြောင်းလဲခြင်းသည် ခြားနားခြင်း (Difference) တစ်ခုဖြစ်သည်လို့ ဆိုခဲ့ပါသည်။
- Difference = Current State – Previous State
- တစ်နည်းအားဖြင့် Change သည် State Difference တစ်ခုဖြစ်သည်။ States များကို State Space အနေဖြင့် ဖော်ပြလို့ ရပါသည်။ State Space တစ်ခုဆိုသည်မှာ A Set of All Possible States ကို ဆိုလိုသည်။
- သို့သော် ဒါဖြင့် လုံလောက်ပြီလား၊ အချိန်ကိုရော ထည့်မစဉ်းစားတော့ဘူးလားလို့ မေးစရာ ရှိလာသည်။
- ပြောင်းလဲခြင်းသည် State Difference တစ်ခု သာမက Time Difference (အချိန်ခြားနားခြင်း) တစ်ခုလည်း ဖြစ်နေသည်။
- ဒါဆို သူတို့ ၂ ခု ဘယ်လို ဆက်စပ်နေပါလဲ။

Rate of Change

- ပြောင်းလဲခြင်းသည် ခြားနားခြင်းတစ်ခု ဟုဆိုသော်လည်း အခု ချက်ခြင်းကြီး ပြောင်းသွားတာမျိုး မဟုတ်။ နေထွက်လာသည်၊ နေဝင်သွားသည်။ အခု ချက်ခြင်း နေထွက်ပြီး နေဝင်သွားတာမျိုး မဟုတ်။

- ပြောင်းလဲခြင်းတစ်ခု ဖြစ်ဖို့ အချိန်တစ်ခု လိုအပ်သည်။ အချိန်အတိုင်းအတာ တစ်ခုအတွင်း ဘယ်လောက် ခြားနားသွားလဲဆိုတာပင် ပြောင်းလဲခြင်းကို ဆိုလိုဖြစ်သည်။

- ဒါကိုပင် ပြောင်းလဲနှုန်း (Rate of Change) လို့ ဆိုလိုတာဖြစ်သည်။

- ပြောင်းလဲနှုန်းသည် State Difference (State Change)နှင့် Time Difference (Time Change) ရဲ့ အချိုး (Ratio) တစ်ခု ဖြစ်သည်။

```
Rate of Change = State Difference / Time Difference

Rate of Change = (Current State - Previous State) / (Current Time - Previous Time)
```

Instant Change

- ဒီမှာ မေးစရာ တစ်ခုရှိလာသည်။
- ပြောင်းလဲခြင်းများကို အခုချက်ခြင်း ပြောင်းလို့ ရနိုင်မလား။ ဒါကို သီအိုရီ အရရော၊ လက်တွေ့အရရော ဖြစ်နိုင်မလား။
- Rate of Change = $\frac{State\ Difference}{Time\ Difference}$
- ဒီ Ratio အရ Time Difference နည်းလေ ပိုပြီး မြန်လေဖြစ်သည်။ တစ်ကယ်လို့ Time Difference က သုည (Zero) ဖြစ်သွားရင် Instate Change တစ်ခု ဖြစ်သွားမှာ ဖြစ်သည်။
- သို့သော် Time Difference သာ သုည (Zero) ဖြစ်သွားရင် Division By Zero ဖြစ်သွားမှာ ဖြစ်သည်။ Theory အရ မဖြစ်နိုင်။
- လက်တွေ့မှာလည်း ချက်ခြင်းပြောင်းလဲခြင်းဆိုတာ မရှိသေး။ ပြောင်းလဲခြင်းအားလုံး အချိန်တစ်ခု ကြာသည်။
- Instant Change သည် သီအိုရီ အရရော၊ လက်တွေ့အရရော မဖြစ်နိုင်ပါ။
- ထို့ကြောင့် ပြောင်းလဲခြင်း အားလုံးသည် အချိန် တစ်ခုကြာသည်။

Instantaneous Change

- ဟုတ်ပါပြီ။
- Rate of Change = $\dfrac{State\ Difference}{Time\ Difference}$
- ကျွန်တော်တို့ Time Difference ကို Zero လုပ်လို့မရဘူး။ သို့သော် သုညနားကို ကပ်သွားမယ် ဆိုရင်ရော။ ဥပမာ။ 0.000000000000000000001 second။
- ဒါဆိုရင်တော့ Rate of Change သည် အဆမတန် ကြီးလာမှာ ဖြစ်သည်။ State Difference က Zero ဆိုရင်ရော။ ဒါဆိုရင်တော့ Rate of Change ကလဲ Zero ပဲဖြစ်သွားမှာပါ။
- ကဲ၊ ဒီလို လုပ်ရအောင်။ State Difference ကိုလဲ သုညနားကို ကပ်ခိုင်းမယ်။ Time Difference ကိုလဲ သုညနားကို ကပ်ခိုင်းမယ်။
- Rate of Change = $\dfrac{f(x + 0.0000000000000000001) - f(x)}{0.0000000000000000001}$
- ဒါဆိုရင် ဘယ်လို ဖြစ်သွားမလဲ။ ဒါဆိုရင်တော့ အဓိပ္ပါယ် တစ်မျိုး ဖြစ်သွားမှာပါ။ 0.00000000000000000000001 အတွင်းမှာ ပြောင်းလဲသွားသော ပြောင်းလဲခြင်း ပမာဏလို့ ဆိုလိုတာ ဖြစ်သွားမည်။
- ဥပမာ၊ ဘဏ်တိုးနှုန်းက တစ်နှစ်ကို ငွေ 100 မှာ 9 ကျပ် ဆိုရင်၊ 0.00000000000001 Second အတွင်းကို အတိုးဘယ်လောက် ရမလဲ။
- ဒါကို Instantaneous Rate of Change လို့ ခေါ်ပါသည်။

Speed of Light

- Instant Change နဲ့ Instantaneous Change က မတူပါဘူး။
- Instant Change သည် သီအိုရီ အရရော၊ လက်တွေ့အရရော မဖြစ်နိုင်ပါ။
- ဒါဆိုရင် မေးခွန်းထုတ်စရာ ရှိလာပါပြီ။ Instant Change မဖြစ်နိုင်ဘူးဆိုရင် အမြန်ဆုံး Change ဆိုတာ ရှိနိုင်မလား။
- ရှိပါသည်။ Rate of Change မှာ Theory အရ အမြန်ဆုံး (Ultimate Speed) သည် Speed of Light ဖြစ်သည်။ ဘယ်ပြောင်းလဲမှုမဆို Speed of Light ထက်ပိုပြီး မြန်အောင် ပြောင်းလို့မရ။
- ဒါကို အိုင်စတိုင်းက Theory of Special Relativity မှာ ဖော်ပြထားပါသည်။
- ထို့ကြောင့် The Fastest Possible Change သည် Speed of Light ဖြစ်သည်။
- အလင်းရောင်သည် နေမှ ကမ္ဘာကို ရောက်ဖို့ 8 မိနစ်ကြာသည်။ ချက်ခြင်း မရောက်။

Discrete Time

- Rate of Change = $\frac{State\ Difference}{Time\ Difference}$
- Time Difference ကို Zero ထားရင် Theory အရ မဖြစ်နိုင်။
- State Difference ရော၊ Time Difference ရော Zero နားကပ်ထားလိုက်ရင်တော့ Instantaneous Rate of Change ကိုရမည်။
- ဒီတစ်ခါ Time Difference ကို 1 ထားလိုက်ရအောင်။ ဒါဆိုရင်
- Rate of Change = $\frac{State\ Difference}{1}$ = State Difference
- Time Difference ကို 1 လို့ ယူဆထားခြင်းသည် Discrete Time ကို ပြောတာဖြစ်သည်။
- Discrete Time မှာ အနည်းဆုံး Time Difference သည် $\lim_{x \to 0} \Delta t$ မဟုတ်တော့ဘဲ $\lim_{x \to 1} \Delta t$ ဖြစ်သည့် အတွက် Instantaneous Rate of Change = State Difference ဖြစ်သွားသည်။

Recurrent Relations

- Unit of Time က Continuous မဟုတ်တော့ဘဲ Discrete ဖြစ်သွားမယ်ဆိုရင်
- Rate of Change = $\frac{State\ Difference}{1}$ = State Difference

```
State Difference = Current State - Previous State

Current State = Previous State + State Difference

s(n) = s(n-1) + d  where n = 1,2,3,…
```

- ဒါဆို အခုလက်ရှိ အခြေအနေသည် ယခင်အခြေနေကို ခြားနားခြင်းနှင့် Every 1 Unit of Time မှာ ပေါင်းထားခြင်းဖြစ်သည်။

Time Domain Simulation

- ကျွန်တော်တို့က ကွန်ပြူတာကြီးနှင့် တွက်ချက်သည်ဟု ပြောကြသည်။
- အမှန်တော့ ကျွန်တော်တို့က ကွန်ပြူတာပေါ်မှာ Time Domain Simulation လုပ်ကြည့်တာဖြစ်သည်။

```
//Position Vector
Vector P = new Vector(0,0)

for (n=0; n  <= 10000; n++)
{
      P.X = P.X + difference;
      P.Y = P.Y + difference;
}
```

- ဒီလိုအားဖြင့် အရာတစ်ခုရဲ့ Position ကို တွက်ချက်ကြည့်လို့ ရတာဖြစ်သည်။ အရာတစ်ခုရဲ့ တည်နေရာကို တစ်ကြိမ်မှာ တစ်ခါ Update လုပ်ပြီး အကြိမ် 10000 လောက် လုပ်ကြည့်လိုက်တဲ့ အခါမှာ သူ့ရဲ့ ရွေ့လျားမှုကို မြင်ရမှာ ဖြစ်သည်။ ကာတွန်းကားများ ကို Frame by Frame လုပ်သလိုပေါ့။
- Computer Game, Animation များကို Time Domain Simulation ဖြင့်လုပ်ထားတာ ဖြစ်သည်။

N^{th} Order Derivative

- Current State = Previous State + State Difference

- $s(n) = s(n-1) + d$, where $n = 1, 2, 3, \ldots$

- ဒီ Equation အရ Current State သည် Previous State ပေါ်မှာပဲ မူတည်သည်။ တစ်ကယ်လို့ Current State သည် Previous State အပြင် Previous ရဲ့ Previous State ပေါ်မှာပါ မူတည်တယ်ဆိုရင် ဥပမာ၊ Acceleration က d ဆိုပါတော့၊ Position က

```
s(n) = s(n-1) + v(n)
v(n) = v(n-1) + d

v(n) = s(n) - s(n-1)
v(n-1) = s(n-1) - s(n-2)

s(n) = s(n-1) + v(n-1) + d
s(n) = s(n-1) + s(n-1) - s(n-2) + d

s(n) = 2s(n-1) - s(n-2) + d
```

- General Form နဲ့ပြရင် $s(n) = a_1 s(n-1) + a_2 s(n-2) + d$, where $n = 1, 2, 3, \ldots$

- ဒါသည် Second Order Derivative ဖြစ်သွားသည်။ N^{th} Order Derivative ဆိုရင်

$$s(n) = a_1 s(n-1) + a_2 s(n-2) + \ldots + a_k s(n-k) + d, \text{ where } n = 1,2,3,4,5,6,..,m, \; k=1,2,3,\ldots$$

Tangent (Slope) and Derivative

Derivative of f(x) => f'(x) = $\frac{dy}{dx}$

- f'(x) သည် Deferential Function တစ်ခု ဖြစ်ပြီး Derivative of f(x) ဟုခေါ်သည်။
- Derivative Function f'(x) ကို တန်ဖိုးတစ်ခု အစားသွင်းလိုက်ရင် ရရှိလာသော တန်ဖိုး (Number) တစ်ခုကို Tangent (Slope) ဟုခေါ်သည်။

Tangent (Slope) of f(x) at x=4 => f'(4) = $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=4} = 21$

- 21 သည် f(x) ရဲ့ x=4 မှာ ရှိသော Tangent (Slope) တန်ဖိုး တစ်ခု ဖြစ်သည်။
- Derivative သည် Function တစ်ခု ဖြစ်ပြီး Tangent(Slope) သည် Number တစ်ခုဖြစ်သည်။
- တစ်နည်းအားဖြင့် Derivative Function သည် မူလ Function f(x) ပေါ်ရှိ Point {x} တိုင်းအတွက် Tangent(Slope) ကို ထုတ်ပေးသော Function တစ်ခုဖြစ်သည်။

Differentiation

- Differentiation ရဲ့ အခြေခံ အနှစ်သာရသည် Difference (ခြားနားခြင်း) ဖြစ်သည်။
- Differentiation သည် State (Space) Domain နှင့် Time Domain တို့ကို Ratio အနေဖြင့် ဖော်ပြထားခြင်းဖြစ်သည်။
- State (Space) Domain နှင့် Time Domain တို့သည် Continuous Domain ဖြစ်နိုင်သလို Discrete Domain လည်း ဖြစ်နိုင်သည်။
- Discrete Time Domain အပေါ် အခြေခံပါက Differentiation သည် Recurrence Relation ဖြစ်သွားသည်။
- Computer များသည် Recurrent Relation များကို တွက်ချက်ခြင်း ဖြစ်သည်။
- Order of Differentiation သည် ယခင် State ဘယ်နှစ်ခု အပေါ်မူတည်ခြင်းကို ဆိုလိုခြင်း ဖြစ်သည်။
- ယခင် State အပေါ်မှာ တစ်ခုမှ အခြေမခံရင် Zero Order Derivative။ ယခင် State တစ်ခု ပေါ်မှာ First Order Derivative အခြေခံရင် ။ ယခင် State နှစ်ခု ပေါ်မှာ အခြေခံရင် Second Order Derivative ။ စသည်ဖြင့်ပေါ့။

Chain Rule

```
f . g = f(g(x))
```

- g(x) သည် f(x) ရဲ့ Composite Function တစ်ခု ဆိုပါက

```
f'(x) =  f'(g(x))*g'(x)
```

- g(x) = u, f(x) = y ဆိုပါက

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

- Chain Rule ကို ဒီလို စဉ်းစားကြည့်ပါ။ စက္ကန့်များ ပြောင်းလဲခြင်းကြောင့်၊ မိနစ်များ ပြောင်းလဲသွားသည်။ မိနစ်များပြောင်းလဲခြင်းကြောင့် နာရီများ ပြောင်းလဲသွားသည်။ နာရီ ပြောင်းလဲနှုန်းသည် မိနစ်မှ နာရီသို့ ပြောင်းလဲနှုန်း၊ စက္ကန့်မှ မိနစ်သို့ ပြောင်းလဲနှုန်း နှင့် စက္ကန့်ပြောင်းလဲနှုန်းတို့ ပေါ်မူတည်ပါသည်။

- ထို့ကြောင့်

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dm}\frac{dm}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Related Rate

$$V = \pi r^2 h$$

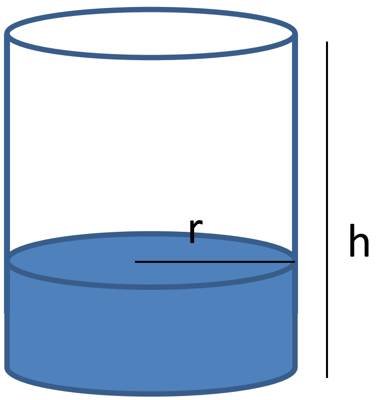
- Cylinder ပုံ ရေတိုင်ကီ တစ်လုံးကို ရေဖြည့်မည် ဆိုပါက ရေတက်နှုန်း (အမြင့်နှုန်း) သည် ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။ ဆိုပါတော့ ရေသွင်းနှုန်းက x Liter per second။ (1 Liter = 1000 cm^3)
- ရေပြည့်နှုန်းသည် $\frac{dV}{dt}$ ဖြစ်သည်။ h = 4r, r = h/4 ဖြစ်သည့် အတွက်

$$V = \pi (h/4)^2 h = 1/16 * \pi h^3$$

- ကျွန်တော်တို့ စိတ်ဝင်စားတာသည် ရေတက်နှုန်း (အမြင့်နှုန်း) ဖြစ်သည့် အတွက် dh/dt ဖြစ်သည်။
- ဒါဆိုရင် ရေတက်နှုန်း $\frac{dh}{dt}$ သည် ရေပြည့်နှုန်း $\frac{dV}{dt}$ နှင့် ဘယ်လို ဆက်သွယ်မလဲ။

$$\frac{dV}{dt} = 3/16 * \pi h^2 * \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} * (1/ (3/16 * \pi h^2)) = x * (1/ (3/16 * \pi h^2))$$



h = 4r

Applications of Derivative

- Differential Calculus လို့ခေါ်သည့် Derivative သည် လက်တွေ့မှာ အင်မတန် အသုံးကျပါသည်။ အသုံးလည်းများပါသည်။

- အရေးကြီးဆုံးသော Applications of Derivative ကိုပြောပါဆိုရင်

- (၁) Optimization
  - အခု လက်ရှိ Machine Learning လို့ လူသိများသော Artificial Intelligence သည် အမှန်တော့ Optimization တစ်ခုသာ ဖြစ်သည်။

- (၂) Initial Value Problem
  - အနာဂတ်ကို ခန့်မှန်းကြည့်ဖို့ Initial Value Problem များသည် အင်မတန် အသုံးဝင်ပါသည်။ လူဦးရေတိုးနှုန်း၊ Rocket ပစ်လွှတ်ခြင်း စသည် တို့သည် Initial Value Problem များ ဖြစ်ကြပါသည်။

Optimization

- စက်ရုံ လုပ်ငန်းရှင် တစ်ယောက်ဆို ပါတော့ သူထုတ်သော ပစ္စည်းတစ်ခု အတွက် ကုန်ကျစရိတ်က 500 ကျပ်ဆိုပါတော့။ Customer များက ပစ္စည်းတစ်ခုကို 600 ကျပ်ဖြင့် ပေးဝယ်သည် ဆိုပါတော့။ ပုံမှန်အားဖြင့် ပစ္စည်းတစ်ခုကို 100 မြတ်သည်။ ဒါဆိုရင် ပစ္စည်းများများ ထုတ်ပြီးရောင်း၊ အမြတ်များမည်ဟု ထင်စရာ ရှိသည်။

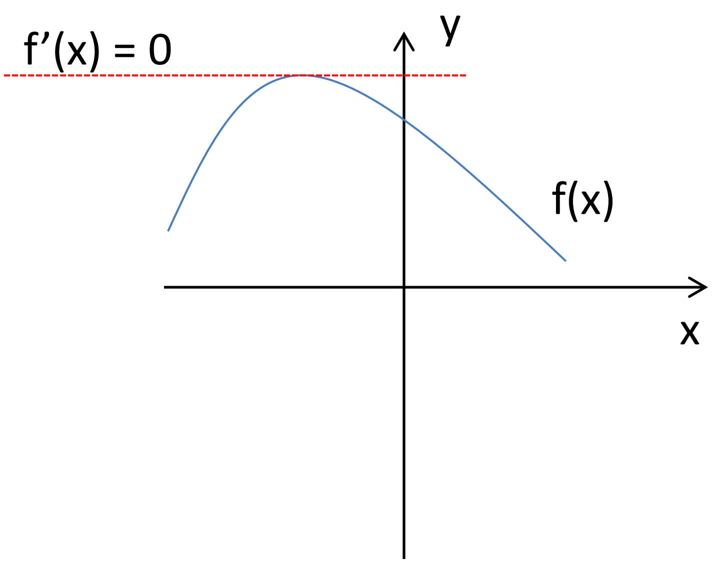
- သို့သော် ဈေးကွက် သဘောတရားအရ ပစ္စည်းပေါ်များလာလေလေ၊ ဈေးကျလာလေလေ ဖြစ်သည်။ ဈေးကွက်ထဲမှာ ပစ္စည်း တစ်သိန်းရောင်းတုန်းက ပစ္စည်းတစ်ခုကို 600 ကျပ်ဖြင့် ပေးဝယ်သည်။ နှစ်သိန်းရောင်းလျှင် ပစ္စည်းတစ်ခုကို 550 ကျပ်ဖြင့်သာ ပေးဝယ်ကြတော့မည်။ ပစ္စည်း ငါးသောင်းပဲရောင်းလျှင် ပစ္စည်းတစ်ခုကို 650 ကျပ်ဖြင့် ပေးဝယ်သည်။

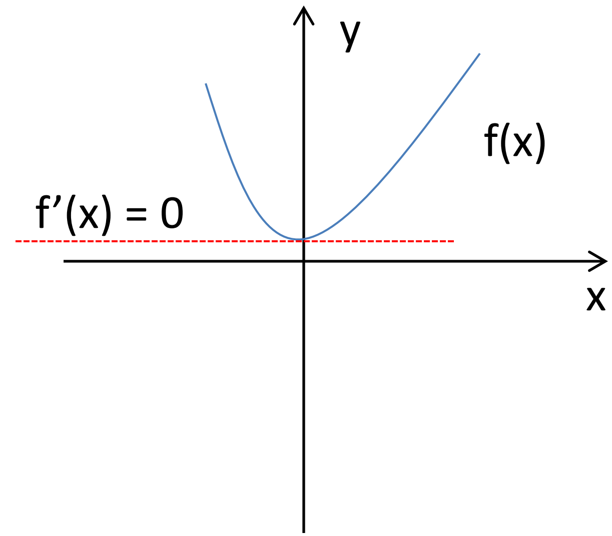
- တစ်ချိန်တည်းမှာပင် ပစ္စည်းရောင်းဈေးတက်သည့်အခါ ဈေးကွက်၏ အခြား အထွေထွေ ကုန်ကျစရိတ်များလည်း တက်လာမည်ဖြစ်သည်။ ထိုအခါ အမြတ်နည်းသွား ပြန်မည်။

- ဒါဆို အမြတ်အများဆုံး ရအောင် ပစ္စည်းဘယ်လောက်ထုတ်ရောင်းသင့်လဲ။

- ဒါသည် Optimization Problem ဖြစ်သည်။ လောကကြီးသည် Trade-Offs အများကြီး ဖြစ်သည်။ တစ်ခုလိုချင်ရင် တစ်ခုလျော့ရသည်။ အားလုံးကောင်းချင်လို့ မရ။

Maxima and Minima



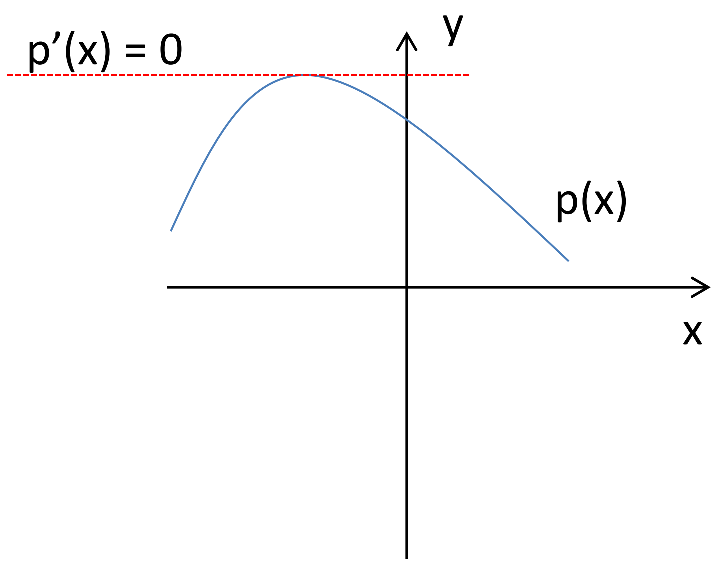


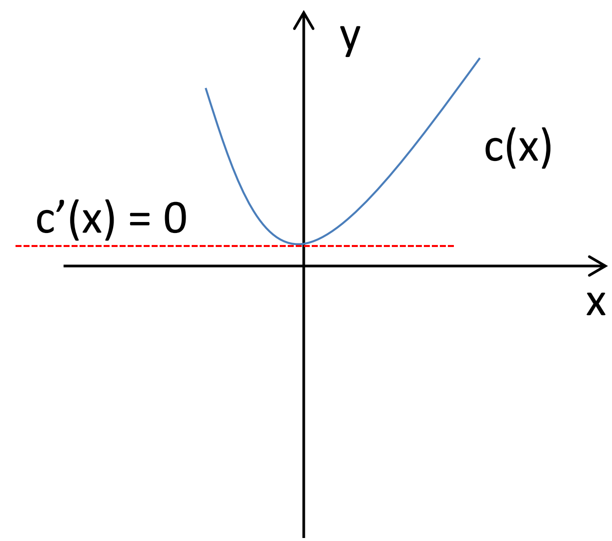
- Derivative a function f (x) သည် zero ဖြစ်သွားပါက f (x) ရဲ့ Maximum သို့မဟုတ် Minimum Point ဖြစ်သွားသည်။

- ထို့ကြောင့် function f (x) ရဲ့ Derivative ကိုရှာခြင်းအားဖြင့် f (x) ရဲ့ Maximum သို့မဟုတ် Minimum Point ကိုရှာဖွေလို့ ရပါသည်။

- Optimization က ဒီအချက်ကို အခြေခံထားတာ ဖြစ်ပါသည်။

Profit and Cost Function





- Profit Function p(x) များအတွက် Maximum ကို ရှာရမည်ဖြစ်ပြီး Cost Function c(x) များအတွက် Minimum ကိုရှာရမည်ဖြစ်သည်။

- အမြတ်များချင်တာလား၊ သို့မဟုတ် ကုန်ကျစရိတ် လျော့ချင်တာလား ပေါ်မူတည်ပြီး တွက်ချက်မှု ကွဲသွားမည်ဖြစ်သည်။

Constrained Optimization

```
Cost = c(x)

Constraints
   x > 3t
  x >= 100
```

- ပစ္စည်း ထုတ်လုပ်မှု ကုန်ကျစရိတ်ကို ချချင်သည် ဆိုလျှင် ပုံမှန်အားဖြင့် c(x) ရဲ့ Minimum ကို ရှာရုံပဲပေါ့။
- သို့သော် လက်တွေ့မှာ အဲဒီလောက် မရိုးရှင်း။ ကိုယ်က ကုန်ကျစရိတ်လျှော့ သော်လည်း ဝယ်ရသည့် ကုန်ကြမ်းဈေးနှုန်းတက်လာလျှင် ဘယ်လို လုပ်မလဲ။
- ဒီလို အခြေအနေတွေကို Constraints ဟုခေါ်သည်။
- Optimization with respect to Constraints ကို Constrained Optimization ဟုခေါ်သည်။
- လက်တွေ့မှာ အသုံးအများဆုံးသော Optimization များဖြစ်သည်။ Management ဆိုသည်မှာလည်း တကယ်တော့ Constrained Optimization ကိုလုပ်ဆောင်ရခြင်းဖြစ်သည်။ စီမံခန့်ခွဲခြင်းဆိုသည်မှာ လူအများ ထင်သလို လူတွေကို ခိုင်းနိုင်ခြင်းကို ဆိုလိုတာမဟုတ်။ Constrained Optimization ကိုလုပ်ဆောင်ရခြင်းသာ ဖြစ်သည်။

Initial Value Problem

- ဘဏ်မှာ ငွေ တစ်သိန်းအပ်ထားချင်သည်။ အတိုးနှုန်းက ငွေ တစ်ရာကို တစ်နှစ်လျှင် 9 ကျပ်ဖြစ်သည်။ ဒါဆိုရင် ငွေ သုံးသိန်း ဖြစ်ဖို့ ဘယ်လောက် ကြာကြာစုရမည်နည်း။
- မူလက မြို့တစ်မြို့မှာ လူဦးရေ တစ်သိန်းရှိသည်။ မွေးဖွားနှုန်းက တစ်နှစ်ကို ငါးသောင်းဖြစ်ပြီး သေဆုံးနှုန်းက တစ်နှစ်ကို နှစ်သောင်း ဖြစ်သည်။ ဒါဆိုရင် လူဦးရေ နှစ်သိန်းဖြစ်ဖို့ ဘယ်လောက်ကြာမည်နည်း။
- Rocket တစ်ခုကို Initial Velocity 200 m/s ဖြင့် ပစ်လွှတ်လိုက်သည်။ ကမ္ဘာကြီးက 9 m/s^2 ဖြင့် ပြန်ဆွဲချသည်။ ဘယ်လောက်ကြာလျှင် Rocket က ကမ္ဘာပတ်လမ်းကြောင်းထဲ ရောက်သွားမည်နည်း။
- ဒါတွေအားလုံးသည် Initial Value Problem များဖြစ်သည်။ လက်ရှိ အခြေအနေ (Current State) နှင့် ပြောင်းလဲနှုန်း (Rate of Change) ပေါ်မူတည်ပြီး အနာဂတ်ကို ကြိုတင်ခန့်မှန်းခြင်း ဖြစ်သည်။

Antiderivative

- Antiderivative လို့ ဆိုတာနဲ့ Derivative ရဲ့ ဆန့်ကျင်ဖက်ကို ဆိုလိုကြောင်း သိမည်ထင်ပါသည်။
- Derivative ရဲ့ အခြေခံ အနှစ်သာရသည် Difference (ခြားနားခြင်း) ဖြစ်သည်။
- Difference = Current State – Previous State
- ဒါဆိုရင် Difference (ခြားနားခြင်း) ရဲ့ ဆန့်ကျင်ဖက်သည် Sum or Summation (ပေါင်းစည်းခြင်း) ဖြစ်သည်။
- Summation = Current State + Previous State
- ယခင်အခြေအနေနှင့် ယခုအခြေအနေတို့ရဲ့ ခြားနားခြင်း မဟုတ်ဘဲ သူတို့ နှစ်ခု ပေါင်းစည်းခြင်း ဆိုတာက ဘယ်လို အဓိပ္ပါယ်ပါလဲ။

Summation

- ဘဏ်မှာ ပိုက်ဆံစုသည် ဆိုပါတော့။ ငွေစုခြင်းသည် အမှန်တော့ ယခင်လမှ ပိုက်ဆံများကို ယခုလ ပိုက်ဆံများ ထပ်ပေါင်းခြင်း ဖြစ်သည်။ ဆိုတော့ ငွေများတိုးပွားလာခြင်းသည် ပိုက်ဆံများ ထပ်ပေါင်းခြင်းကြောင့် ဖြစ်သည်။

- ထို့အတူ လူတစ်ယောက်က 1 နာရီကို 3 မိုင်နှုန်းဖြင့် သွားသည်ဆိုပါတော့။ တစ်နာရီ ကြာတိုင်း 3 မိုင် ထပ်ထပ်ပေါင်းသွားခြင်း ဖြစ်သည်။ 4 နာရီ ကြာပြီးလျှင် စုစုပေါင်း အကွာအဝေးသည် 12 မိုင် ဖြစ်သွားသည်။

- ဒီ သဘောတရားကို Accumulation ဟုခေါ်သည်။

- Antiderivative က ဒီသဘောတရားကို ဆိုလိုတာဖြစ်သည်။

- Antiderivative ရဲ့ အခြေခံ အနှစ်သာရသည် Summation (ပေါင်းစည်းခြင်း) ဖြစ်သည်။

Area

- ဖော်ပြပါပုံရဲ့ Area (Between a and b) ကိုရှာချင်လျှင်

```
A = L * (w * n), where n = 6
```

- ဒါကို တစ်နည်းအားဖြင့်

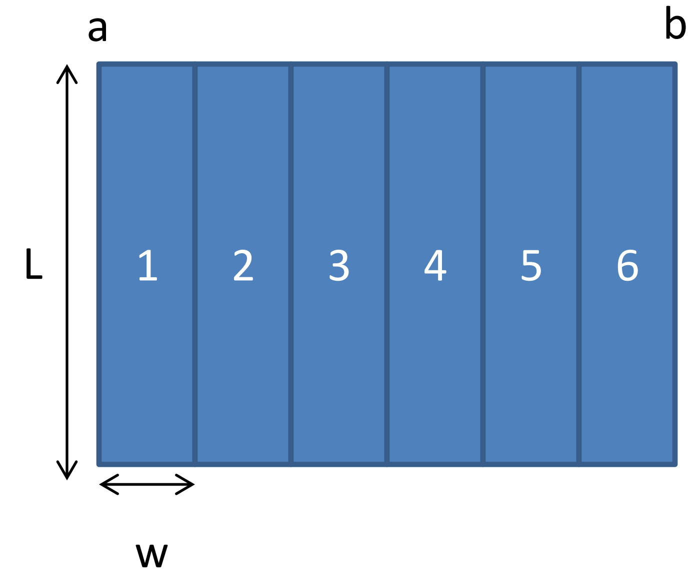
$$A = \sum_{n=1}^{6} L * w_n$$

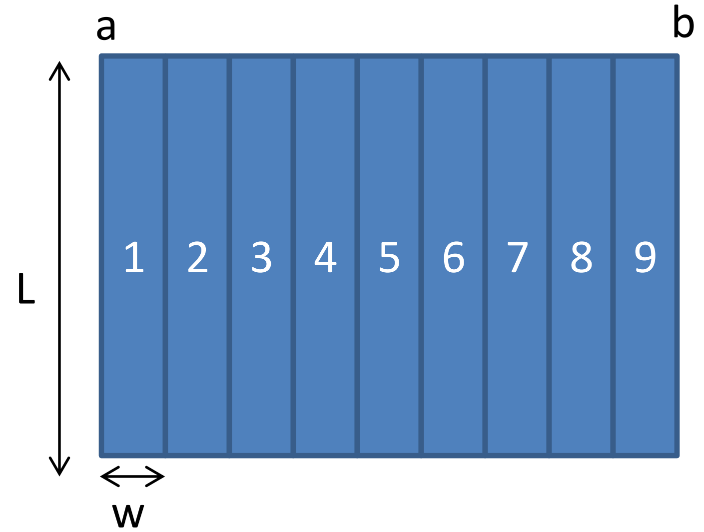
- တကယ်လို့သာ w က ပိုပြီး သေးလိုက်မည်ဆိုပါတော့။
- ဒါဆိုရင် n > 6 ဖြစ်သွားမည်။ w က သေးလေလေ၊ n အရေအတွက်က များလေလေဖြစ်သည်။

- w = (b – a) / n

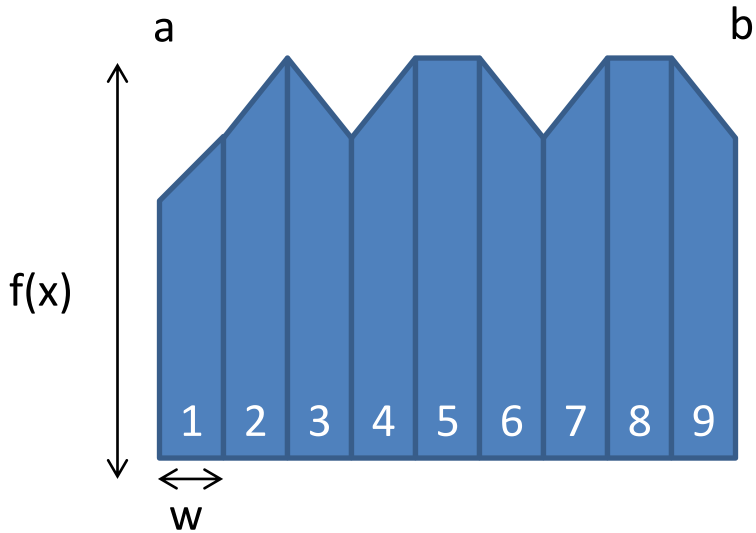
- တကယ်လို့သာ n က တဖြည်းဖြည်းများလာပြီ Infinity နားရောက်သွားလျှင် w က Zero နားရောက်သွားမည်ဖြစ်သည်။

- အမှန်တော့ Area (Between a and b) သည် L နှင့် w တို့၏ Product ကို Accumulate လုပ်ထားခြင်းဖြစ်သည်။





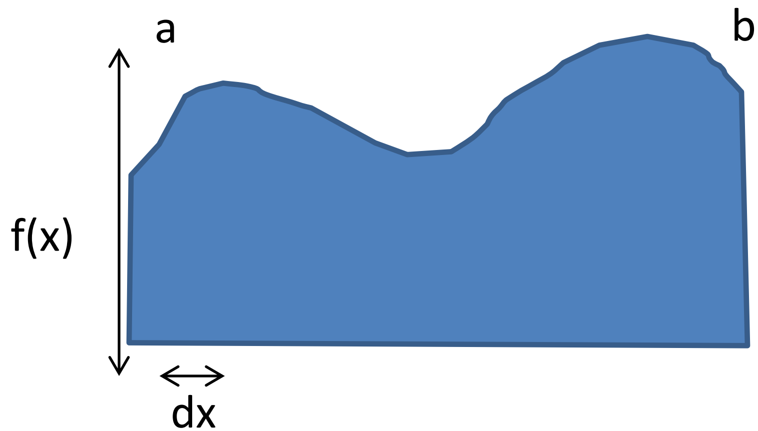
Area Under Function



$$A = \sum_{n=1}^{9} f(x) * w_n$$

- ဖော်ပြပါပုံရဲ့ Area (Between a and b) ကိုရှာချင်လျှင် L = f(x) ဖြစ်သွားသည့် အခါ
- ဒါကို တစ်နည်းအားဖြင့် Area Under a function f(x) Between a and b လို့ခေါ်သည်။

Definite Integral



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

- ဖော်ပြပါပုံရဲ့ Area (Between a and b) ကိုရှာချင်လျှင် L = f(x), w = dx ဖြစ်သွားသည့် အခါ
- ဒါကို တစ်နည်းအားဖြင့် Definite Integral လို့ခေါ်သည်။
- Definite Integral မှာ Interval (between a and b) အမြဲလိုအပ်ပြီး အဲဒီ Interval အတွင်းမှာရှိတဲ့ Area Under the function f(x) ကို ဆိုလိုတာဖြစ်သည်။
- Definite Integral ကရရှိလာသော အဖြေသည် တန်ဖိုး (Number) ဖြစ်ပြီး Area သို့မဟုတ် Total Accumulation ရဲ့ တန်ဖိုးဖြစ်သည်။

Indefinite Integral

Antiderivative = Indefinite Integral = $\int f(x)dx$

- Indefinite Integral သည် Antiderivative ကို ဆိုလိုတာ ဖြစ်သည်။
- Difference = Current State – Previous State (Derivative)
- Summation = Current State + Previous State (Antiderivative)
- Indefinite Integral သည် Antiderivative ကို ဆိုလိုတာ ဆိုရင် Definite Integral နဲ့ ဘယ်လို ဆိုင်တာတုံး။
- Definite Integral (Area Under a Function) နှင့် Indefinite Integral (Antiderivative) တို့၏ ဆက်စပ်ပုံသည် စိတ်ဝင်စားစရာ ကောင်းသည်။

Evaluation Theorem

$$\int_a^b f(x)dx = \mathbf{F(b) - F(a)}$$

- Evaluation Theorem က Definite Integral နဲ့ Indefinite Integral တို့ကို ဆက်စပ်ပေးသော Theorem ဖြစ်ပါသည်။

- F(x) ဟာ Antiderivative of f(x)။ တစ်နည်း F’(x) = f(x) သာဆိုရင်

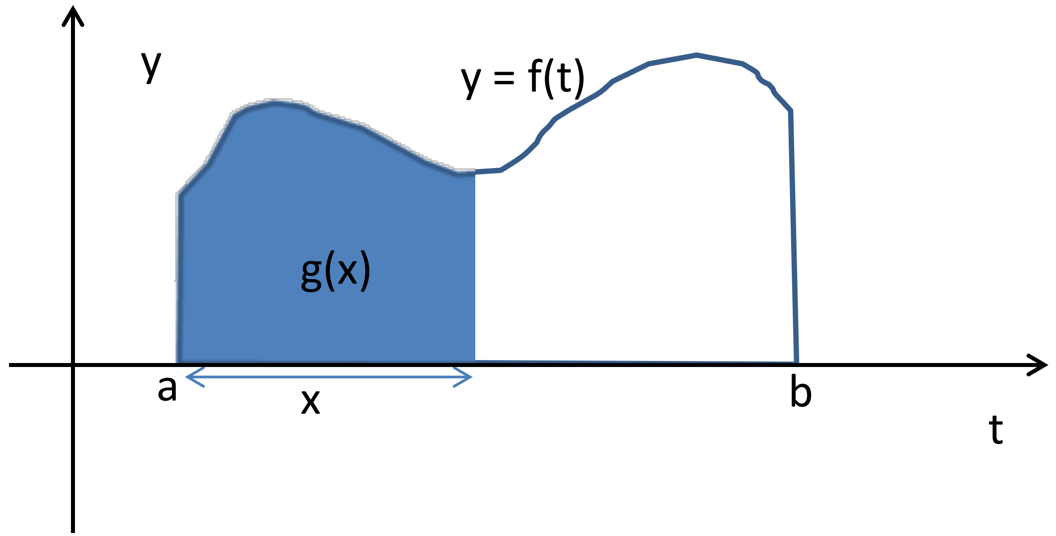
```
Area under a function of f(x) between a and b = Antiderivative of f(b) - Antiderivative of f(a)
```

- စုဘူးထဲကို တစ်လ တစ်ထောင်ထည့်မည် ဆိုပါစို့။

- တစ်လ တစ်ထောင်စုငွေသည် Derivative (Rate of Change) ဖြစ်ပြီး တစ်လတစ်ခါ ပိုတိုးလာသောငွေသည် Antiderivative (Accumulation) ဖြစ်သည်။

- ဒုတိယလမှ ဆဌမလအတွင်း စုငွေပေါင်း = ဆဌမလရှိစုငွေ – ဒုတိယလရှိစုငွေ

Integral Function

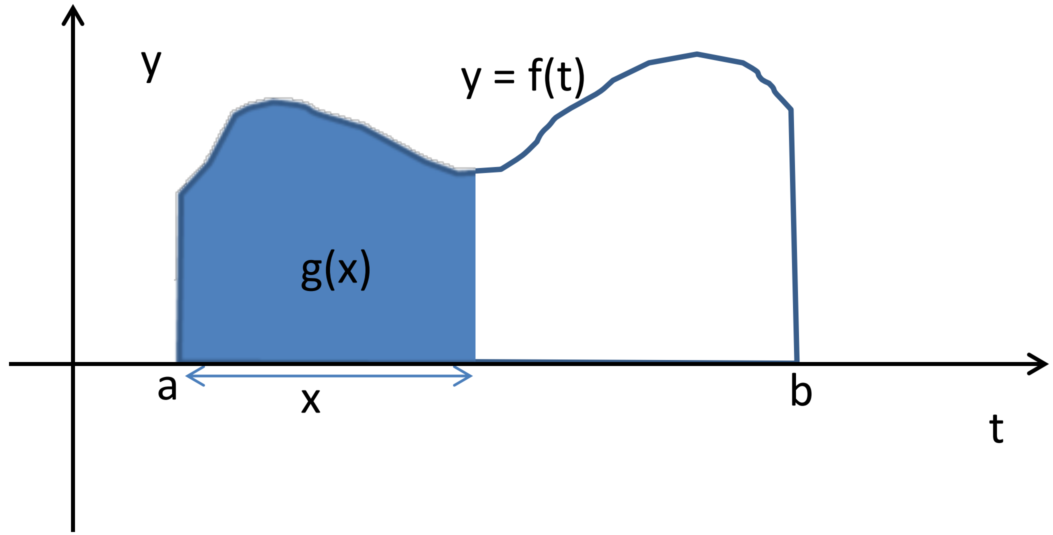


g(x) = $\int_a^x f(t)dt$ x >= a and x <= b

- g(x) သည် Antiderivative of f(t) ဖြစ်သည်။ တစ်နည်း g(x) သည် Accumulation of f(t) ဖြစ်သည်။

- ထိုနည်းတူ Derivative of g(x) သည် f(t) ဖြစ်သည်။ တစ်နည်း Rate of Change of g(x) သည် f(t) ဖြစ်သည်။

Integral Function Example



$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad x >= a \text{ and } x <= b$$

- စုဘူးထဲကို t ရက်မှာ f ကျပ် ထည့်မည် ဆိုပါစို့။ ဒါဆိုရင် f(t) သည် စုငွေ၏ function ဖြစ်သည်။
- ငွေစုခြင်းကို a ရက်မှ b ရက်အတွင်း စုမည်ဆိုပါစို့။ x သည် a ရက်မှ b ရက်အတွင်း ကြိုက်တဲ့ရက် တစ်ခုဖြစ်နိုင်သည်။
- ဒါဆိုရင် a ရက်မှ x ရက်အတွင်း စုငွေသည် g(x) ဖြစ်သည်။ g(x) သည် a ရက်မှ x ရက်အတွင်း စုငွေပေါင်းကို ကိုယ်စားပြုသည်။
- ထို့အတူ g(x) ၏ တိုးပွားလာနှုန်းသည် f(t) ဖြစ်သည်။

Fundamental Theorem of Calculus

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x >= a \text{ and } x <= b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathbf{F(b) - F(a)}$$

- Integral Function နှင့် Evaluation Theorem တို့ နှစ်ခုပေါင်းကို Fundamental Theorem of Calculus ခေါ်သည်။

- Fundamental Theorem of Calculus သည် Derivative, Anitderivative, Definite Integral နှင့် Indefinite Integral တို့ကို အင်မတန် လှပစွာ ချိတ်ဆက်ပေးပါသည်။

Integration

- Integration ရဲ့ အခြေခံ အနှစ်သာရသည် Summation (ပေါင်းစည်းခြင်း) ဖြစ်သည်။
- Integration သည် Difference အပေါ် အခြေခံသော Differentiation နှင့် ဆန့်ကျင်ဖက် ဖြစ်သည်။
- သို့သော်လည်း သူတို့ နှစ်ခုသည် လှလှပပ ချိတ်ဆက်လျက် ရှိသည်။
- သူတို့နှစ်ခု၏ ချိတ်ဆက်မှုကို Fundamental Theorem of Calculus က ဖော်ပြထားသည်။
- Differentiation နည်းတူ Integration သည် Continuous Time Domain ဖြစ်နိုင်သလို Discrete Time Domain လည်း ဖြစ်နိုင်သည်။
- Discrete Time Domain မှာ Integration သည် Sum of Product of a function at every interval တစ်ခု ဖြစ်သွားမည် ဖြစ်သည်.

Substitution Rule

```
f . g = f(g(x))
```

- g(x) သည် f(x) ရဲ့ Composite Function တစ်ခု ဖြစ်ပြီး g(x) = u, f(x) = y ဆိုပါက

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

- Substitution Rule သည် Chain Rule ၏ Counter Part ဖြစ်သည်။

Applications of Integral

- Integral Calculus လို့ခေါ်သည့် Integration သည် လက်တွေ့မှာ အင်မတန် အသုံးကျပါသည်။ အသုံးလည်များပါသည်။
- Integration ကို Accumulation နှင့် ပတ်သက်သော Applications များမှာ သုံးပါသည်။ ငွေစုခြင်း၊ Area သို့မဟုတ် Volume ရှာခြင်း။
- ပြီးတော့ Differentiation နှင့် တွဲပြီး Differential Equations များကို ဖြေရှင်းနိုင်ပါသည်။
- အသုံးများဆုံးသော Application တစ်ခုက Network Flow ဖြစ်ပါသည်။

Network Flow

- ကမ္ဘာပေါ်မှာ ကျွန်တော်တို့ ထုတ်လုပ်၊ သယ်ယူ၊ စုဆောင်း၊ ဖြန့်ဖြူး၊ သုံးစွဲလို့ ရတာသည် 4 မျိုးပဲ ရှိပါသည်။

- (၁) Information (သတင်းအချက်အလက်များ)
- (၂) Currency (ငွေကြေးများ)
- (၃) Merchandize (ကုန်စည်များ)
- (၄) Energy (စွမ်းအင်များ)

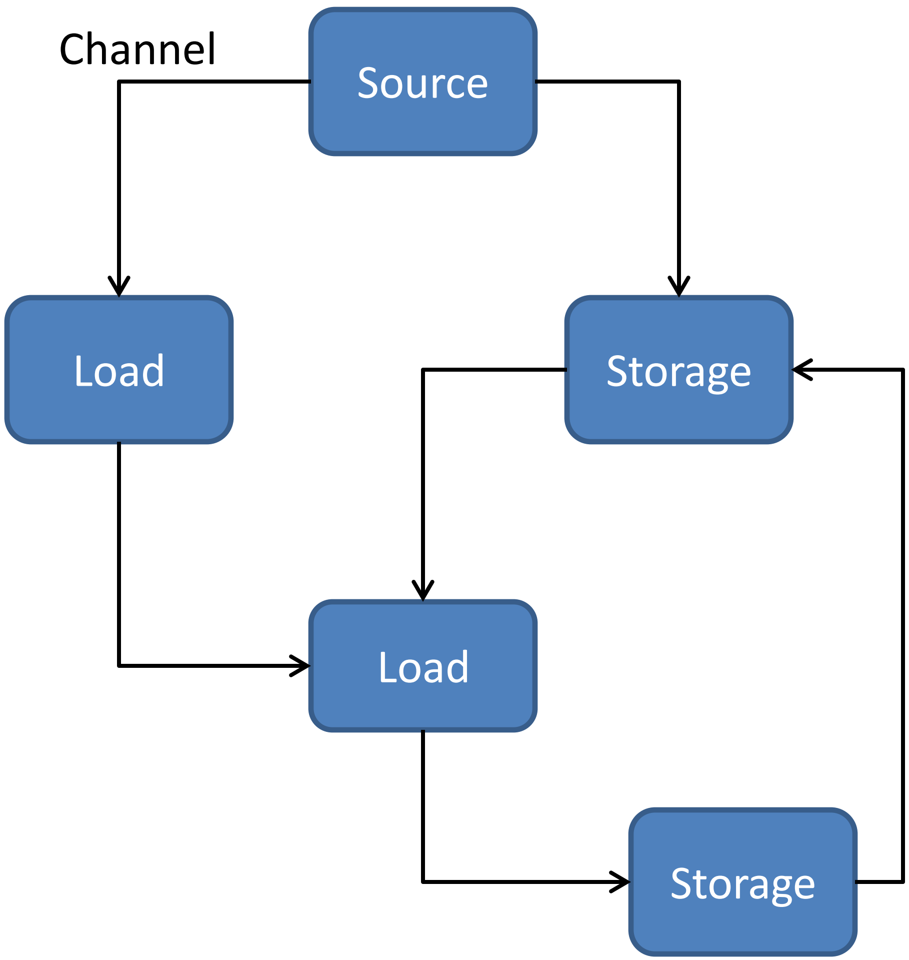
- အမှန်တော့ စီးပွားရေးလုပ်ငန်းအများစုသည် ဒီ 4 မျိုး ထုတ်လုပ်၊ သယ်ယူ၊ စုဆောင်း၊ ဖြန့်ဖြူး၊ သုံးစွဲခြင်းပေါ်မှာ မူတည်နေခြင်း ဖြစ်သည်။

- ဒီ 4 မျိုးအား ထုတ်လုပ်၊ သယ်ယူ၊ စုဆောင်း၊ ဖြန့်ဖြူး၊ သုံးစွဲခြင်းကို ကျွန်တော်တို့က Network Flow ဖြင့် အကြမ်းဖျဉ်း တွက်ချက်ကြည့်လို့ ရပါသည်။

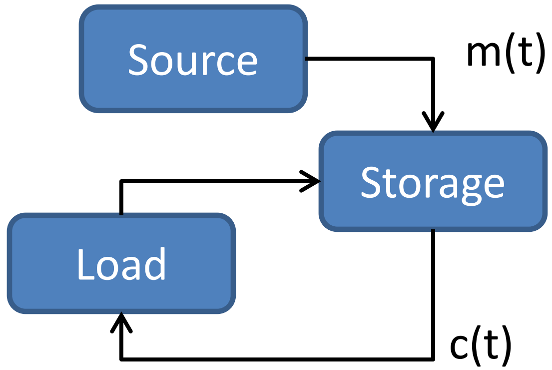
Components of Network Flow

- Network Flow Model မှာ

- (၁) Sources (ထုတ်လုပ်ခြင်း)
- (၂) Channels (သယ်ယူရွှေ့ပြောင်းခြင်း)
- (၃) Storages (စုဆောင်းခြင်း)
- (၄) Loads (သုံးစွဲခြင်း)



Simple Network Model



- ဆိုပါတော့ လွယ်လွယ်ကူကူ Merchandize (စပါး) ထုတ်သည် ဆိုပါတော့။ ထုတ်လုပ်မှုနှုန်းသည် m(t) ဖြစ်သည်။ ဒါဆို စုစုပေါင်းထုတ်သော စပါးများသည် $\int m(t)dt$ ဖြစ်မည်။
- ထုတ်ပြီးစပါးများကို စပါးကျီ (Storage) ထဲထည့်သိမ်းမည်။
- စပါးကျီထဲမှ c(t) နှုန်းဖြင့်စားကြမည် ဆိုပါတော့။ ဒါဆို စုစုပေါင်းစားသုံးမှုသည် $\int c(t)dt$ ဖြစ်မည်။ စားပြီးပိုသော စပါးများကို စပါးကျီထဲ ပြန်ထည့်မည်။
- ဒါဆိုရင် အချိန်မရွေး စပါးကျီထဲမှာ ရှိသော စပါးပမာဏသည်

$$g(t) = \int m(t)dt - \int c(t)dt$$

Summary

- လောကကြီးမှာ အကြောင်းကြောင့် အကျိုးဖြစ်တယ်လို့ ယေဘုယအားဖြင့် နားလည်ထားကြပါသည်။ ဒါကို ကြောင်းကျိုးဆက်စပ်မှု (Causality) လို့ ပြောကြသည်။

- ဒိဋ္ဌဒိဋ္ဌပြောနိုင်သော ကြောင်းကျိုးဆက်စပ်မှုကို Deterministic Causality လို့လည်း သတ်မှတ်ကြသည်။

- Calculus သည် Deterministic Causality ကြောင့် ပြောင်းလဲမှုများ ဖြစ်ပေါ်လာခြင်းကို လေ့လာသော သင်္ချာပညာရပ် ဖြစ်သည်။

- Deterministic Causality ပေါ်မူတည်ပြီး အနာဂတ်ကို ကြိုတင်ခန့်မှန်းမည် (Initial Value Problem)။ အခြေအနေ အရပ်ရပ်ပေါ်မူတည်ပြီ အကောင်းဆုံး လုပ်ဆောင်မည် (Optimization Problem)။

- Calculus အသုံးပြုခြင်းဖြင့် ဒါတွေကို လုပ်ဆောင်လာနိုင်မည်။ ဒါကြောင့် အင်မတန် အသုံးဝင်သော သင်္ချာပညာရပ် ဖြစ်သည်။