Advanced Calculus

သတိ : စာကိုမကျက်ပါနှင့်။
နားလည်အောင်ဖတ်ပြီးစဉ်းစားပါ။

Vector

- Vector ဆိုသည်မှာ A List of Values <1, 4, 5, 2, 3, …> တစ်ခု ဖြစ်သည်။ Vector သည် Value တစ်ခုထက် ပိုပါဝင်သော Quantity တစ်ခု ဖြစ်သည်။

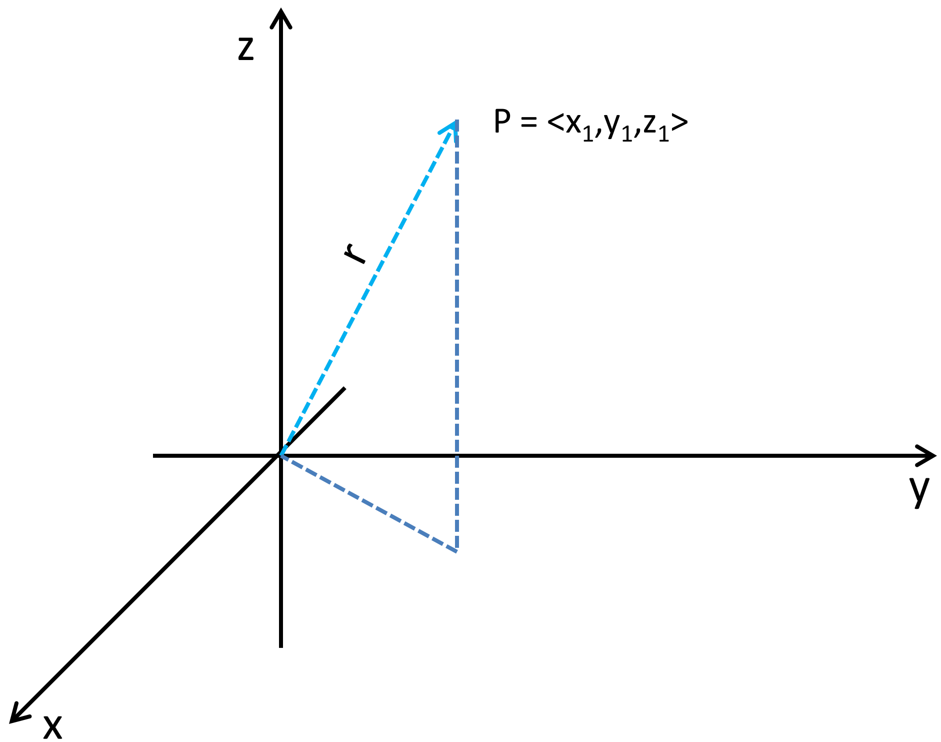
- Value တစ်ခုသာ ပါဝင်သော Quantity တစ်ခုကို Scalar ဟုခေါ်သည်။

- **v** = <2, 3, 4> သည် Vector တစ်ခုဖြစ်သည်။ Vector တစ်ခုတွင် ပါဝင်သော Values များကို Component ဟုခေါ်ပြီး၊ Vector Component များသည် တစ်ခုကို တစ်ခု Orthogonal (ထောင့်မှန်) ဖြစ်ကြသည်။

- Vector များမှာ Direction နှင့် Magnitude ပါဝင်သည်။

- A set of all possible vectors with equal number of components များပါဝင်သော Space တစ်ခုကို Vector Space ဟုခေါ်သည်။

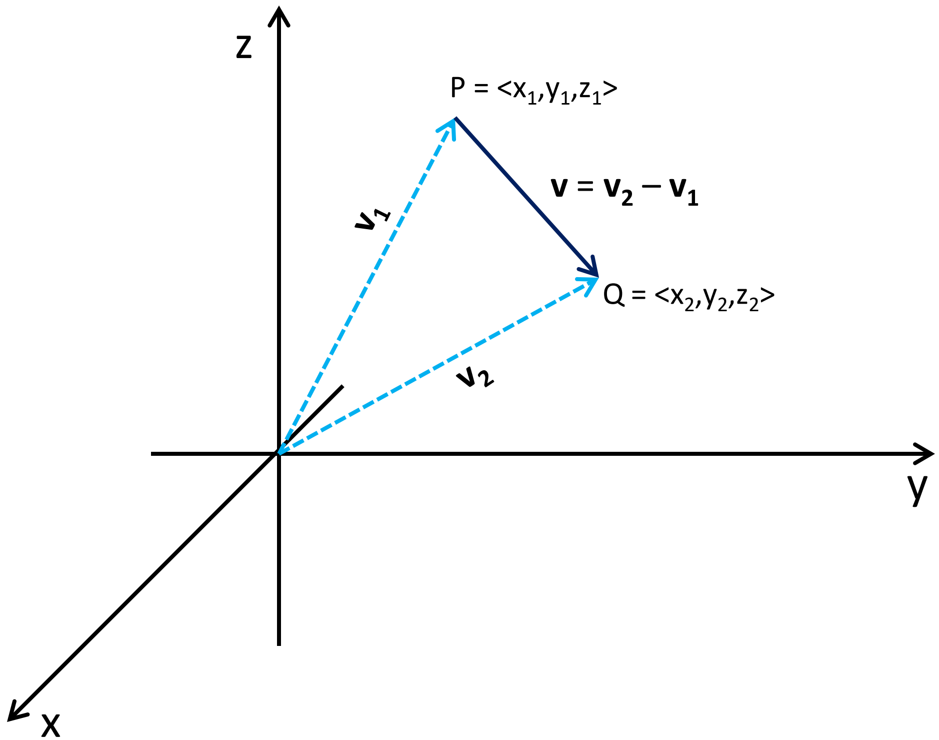
Position Vector



- Space တစ်ခုမှာ Origin <0, 0, 0> မှ Point $<x_1, y_1, z_1>$ တစ်ခုသို့ ဆွဲထားသော Directional Arrow တစ်ခုကို Position Vector **r** ဟုခေါ်သည်။

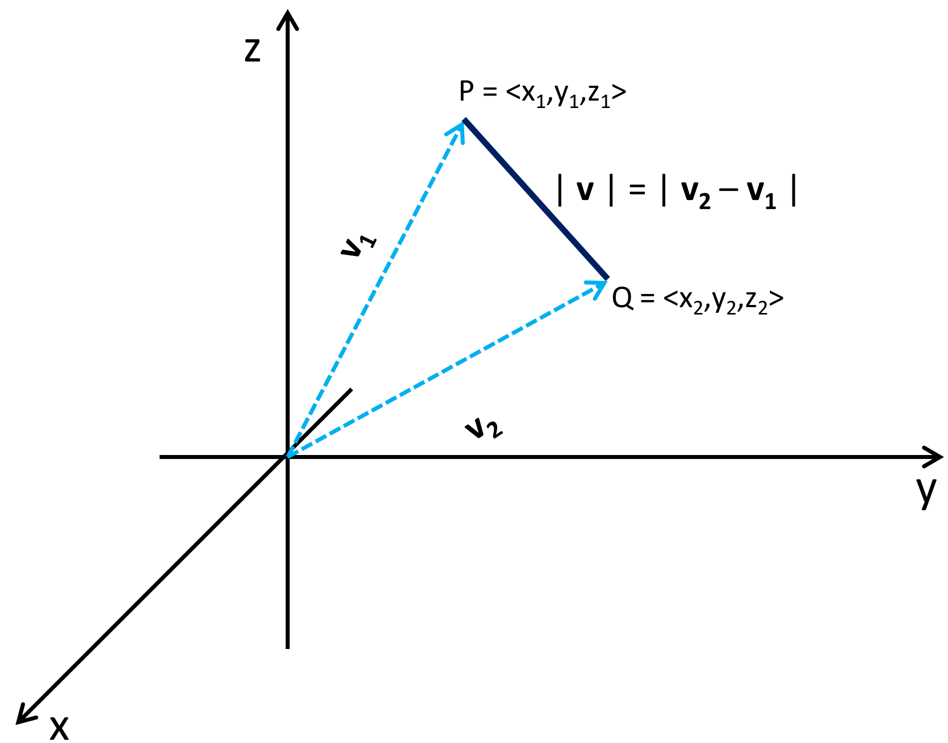
- Position Vector တစ်ခုသည် Origin <0, 0, 0> မှ ဘယ်လောက်ကွာဝေးပြီး ဘယ် Direction မှာ ရှိသည်ကို ကိုယ်စားပြုသည်။

Displacement Vector



- Displacement Vector သည် Position Vector နှစ်ခုကို ခြားနားခြင်းဖြင့် ရရှိသော Vector တစ်ခုဖြစ်သည်။

Magnitude of Displacement Vector

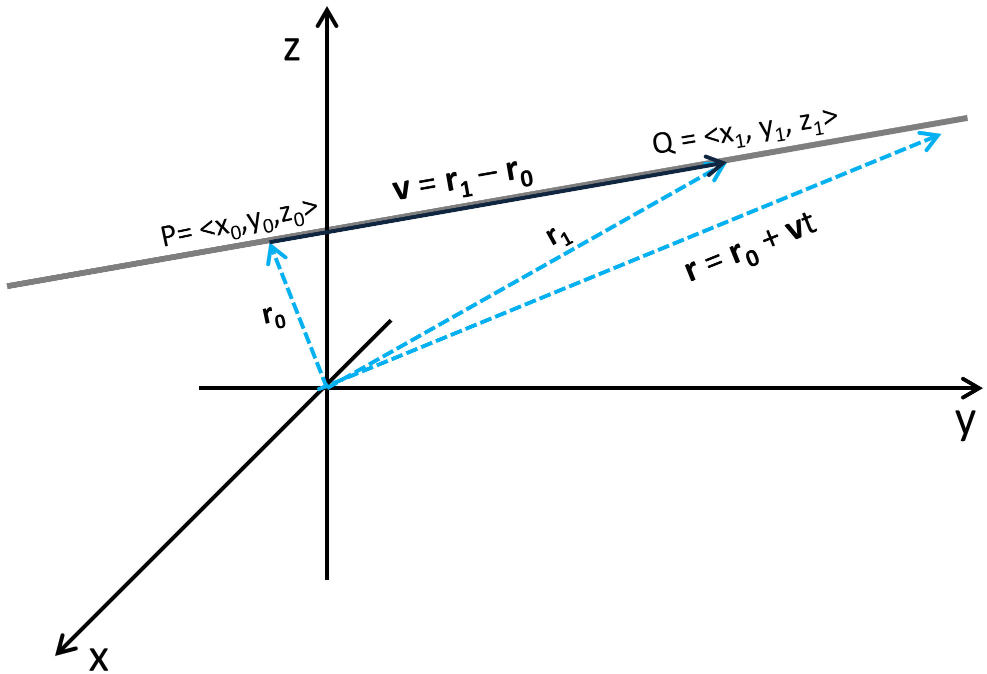


- Displacement Vector သည် Position Vector နှစ်ခုကို ခြားနားခြင်းဖြင့် ရရှိသော Vector တစ်ခုဖြစ်သည်။

- Magnitude of Displacement Vector |v| သည် Distance between 2 Points in Space ဖြစ်သည်။

|**v**| = Distance between **P** and **Q**

Line Equation in Space



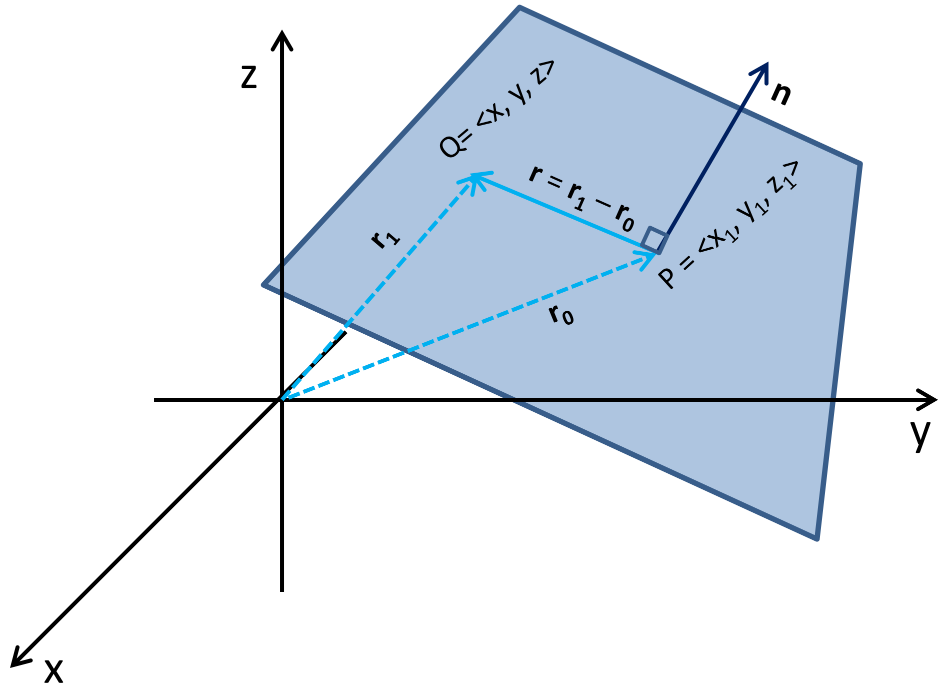
- ပုံမှန်အားဖြင့် Line Equation ကို $y = mx + b$ သို့မဟုတ် $y = m(x - x_0) + y_0$ ဖြင့်ဖော်ပြကြသည်။ သို့သော် ဒီ Line Equation က 2 Dimensional Space မှာသာ ဖော်ပြနိုင်သည်။

- N-Dimensional မှာ Line Equation ကိုဖော်ပြဖို့ 1 Point (P) on the line တစ်ခုနှင့် Displacement Vector **v** parallel with the line သို့မဟုတ် 2 Points (P and Q) on the line တို့လိုအပ်သည်။

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

$$\langle x(t), y(t), z(t)\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \langle x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\rangle t$$

Plane Equation in Space



- N-Dimensional မှာ Plane Equation ကိုဖော်ပြဖို့ Displacement Vector **r** on the plane တစ်ခုနှင့် Normal Vector **n** perpendicular to the plane သို့မဟုတ် a given Point P and an arbitrary point Q on the plane နှင့် Normal Vector **n** perpendicular to the plane တို့ လိုအပ်သည်။

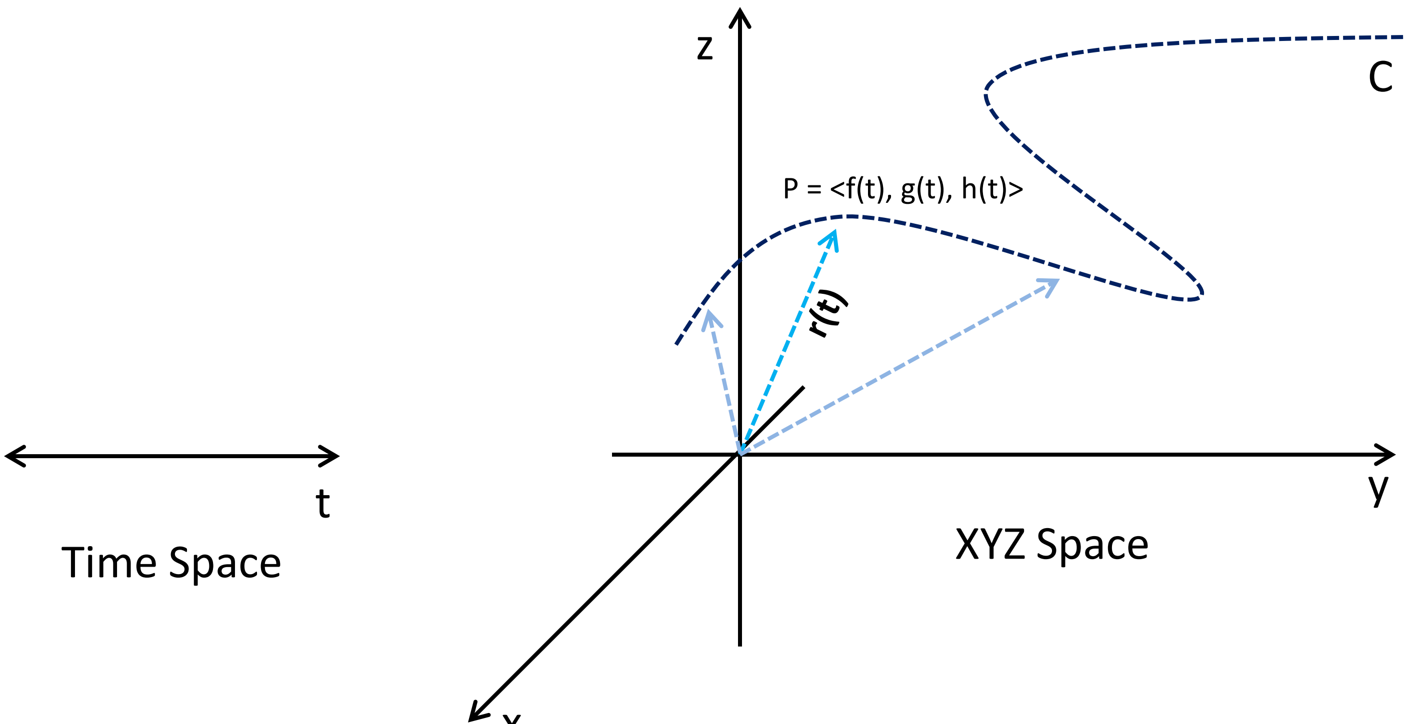
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$\langle a, b, c\rangle \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Vector Function

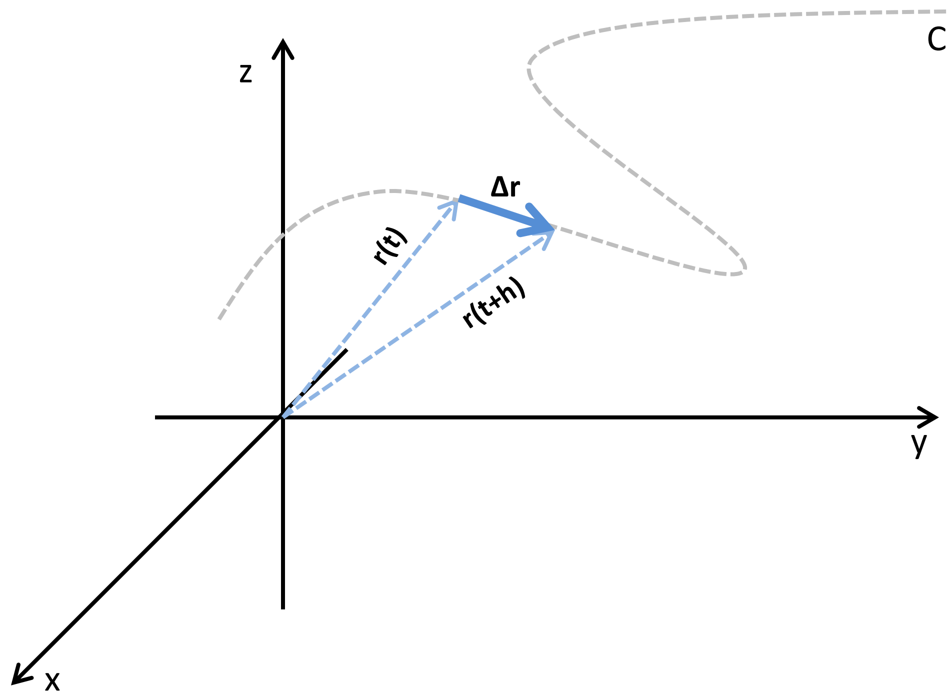


- Position Vector Function တစ်ခုသည် a Function of Position Vector with respect to Time (t) ဖြစ်သည်။

- တစ်နည်းအားဖြင့် **r** (t) သည် Position Vector များကို Time Domain အားဖြင့် ဖော်ပြသော function တစ်ခုဖြစ်ကြပါသည်။

```
r(t) = <f(t), g(t), h(t)> where x = f(t), y = g(t), z = h(t)
```

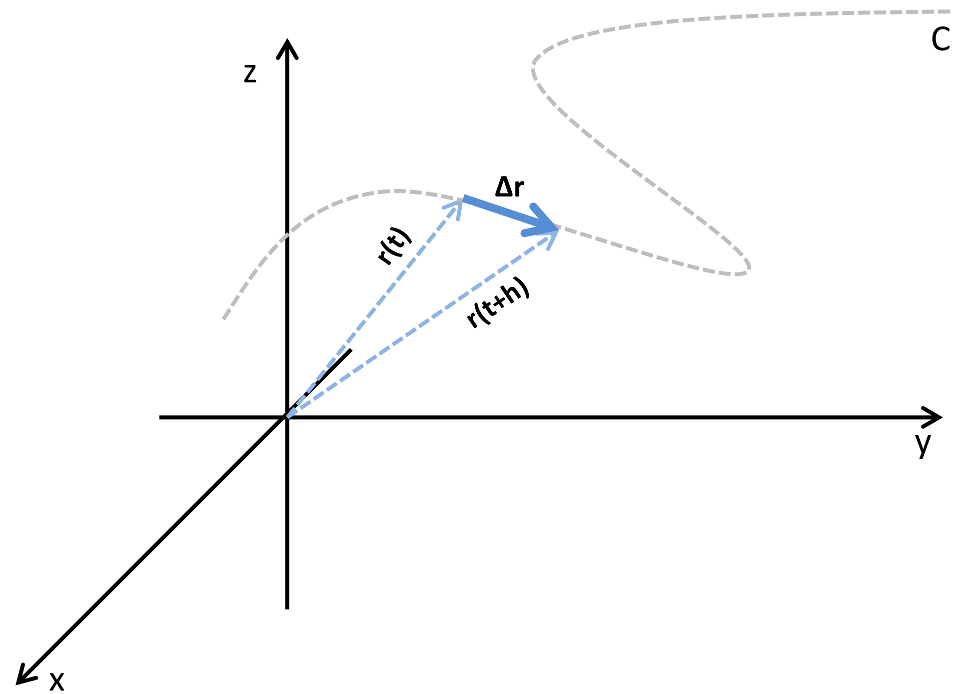
Displacement of Vector Function



- Position Vector နှစ်ခု ခြားနားခြင်းအားဖြင့် Displacement Vector တစ်ခု ရကြောင်း ပြောခဲ့ပါသည်။
- ဒါဆိုရင် Vector Function **r**(t) မှရရှိသော Position Vector နှစ်ခုကို ခြားနားခြင်းအားဖြင့် Displacement Vector တစ်ခု ရရှိပါသည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် Displacement သည် Change in Position ဖြစ်သည်။ Displacement Vector သည် Curve of Vector Function နှင့် Parallel (Tangential) ဖြစ်သည်။

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$$

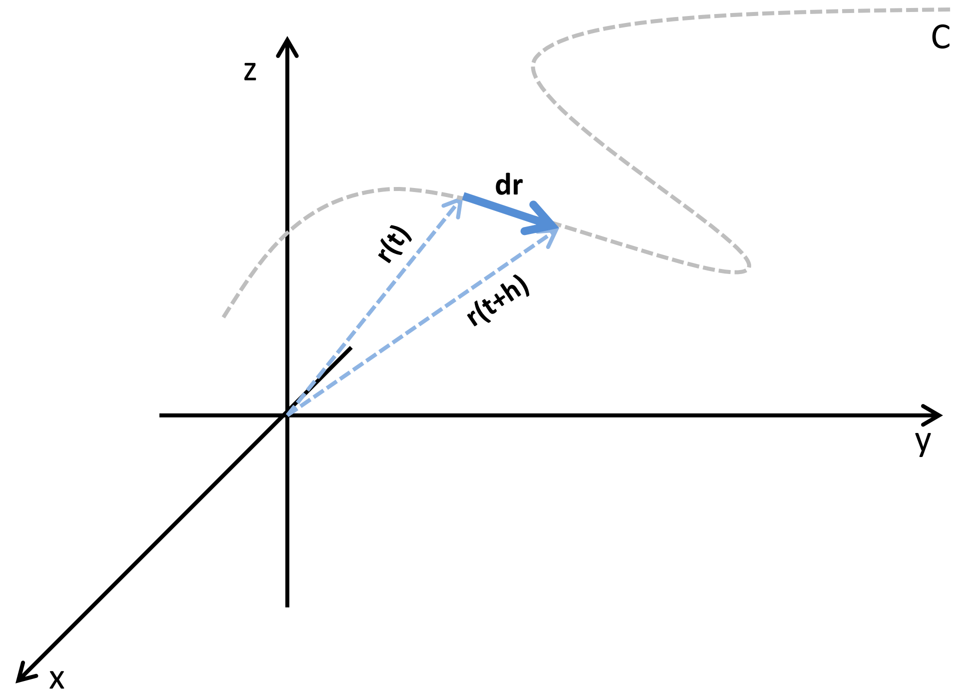
Rate of Change of Displacement



- ဒါဆိုရင် Difference in Position Vector နှင့် Time Difference တို့၏ Ratio သည် Rate of Change of Displacement ဖြစ်သွားသည်။

$$\text{Rate of Change of Displacement} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

Derivative of Vector Function



- ဒါဆိုရင် Instantaneous Rate of Change of Displacement သည် Derivative of Position Vector Function ဖြစ်သည်။ ဒါကို Velocity ဟုလည်း ခေါ်သည်။ Velocity သည် Vector တစ်ခုဖြစ်ပြီ Curve of Vector Function နှင့် Tangential ဖြစ်သည်။

$$\mathbf{r}'(t) = \text{Velocity} = \text{Derivative of Vector Function} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)}{h}$$

- သက်ဆိုင်ရာ Vector Component တစ်ခုခြင်းကို Differentiate လုပ်ခြင်းဖြင့် $\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h't(t) \rangle$ Derivative Vector ကို ရရှိသည်။

Integral of Vector Function

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)dt = <\int_a^b f(t)dt, \int_a^b g(t)dt, \int_a^b h(t)dt>$$

- Integral of Vector Function သည် Accumulation of Vector Function ဖြစ်သည်။ သက်ဆိုင်ရာ Vector Component တစ်ခုခြင်းကို Integrate လုပ်ခြင်းဖြင့် Integral Vector ကို ရရှိသည်။
- တကယ်လို့သာ Vector Function က Velocity Vector Function **v**(t) = **r**’(t) ဆိုပါက Integral of Velocity Function သည် Accumulation of Displacement ဖြစ်သည်။
- Integral of Vector Function သည် Vector Function တစ်ခုဖြစ်သည်။
- တကယ်လို့သာ Velocity Vector Function **v**(t) ဆိုပါက Integral of the Magnitude of Velocity Function |**v**(t)| = |**r**’(t)| သည် Accumulation of Distance ဖြစ်သည်။

$$\int_a^b |\boldsymbol{r}(t)|dt$$

Scalar and Vector Functions

- Functions များကို အကြမ်းအားဖြင့် Scalar နှင့် Vector ဟုခွဲခြားနိုင်ပါသည်။ ထို့အတူ Variable များကိုလည်း Scalar နှင့် Vector ဟု ခွဲခြားနိုင်ပါသည်။

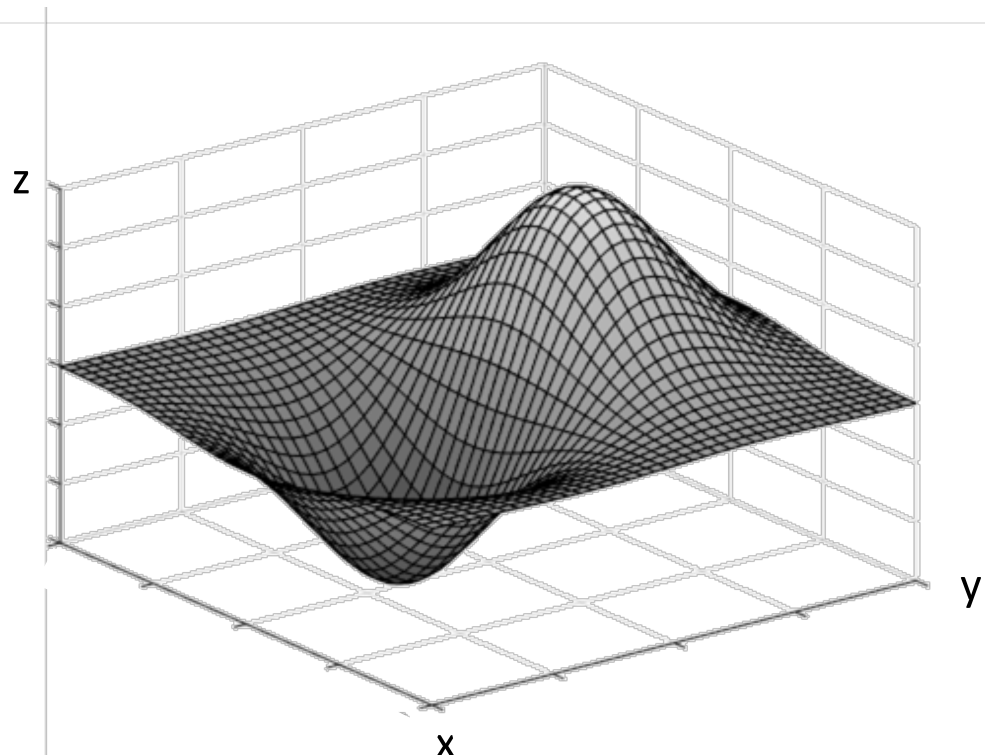
- Scalar Function များကို
  - Single (**1**) Input Variable Function with Single (**1**) Output Variable. y = f(x)
  - Multiple (**N**) Input Variable Function with Single (**1**) Output Variable. ဒါကို Vector Input Variable Function with Scalar Output လို့လည်း ပြောနိုင်ပါသည်။ g = f(x, y, z)

- Vector Function များကို
  - Single (**1**) Input Variable Function with Multiple (**N**) Output Variable. ဒါကို Scalar Input Variable Function with Vector Output လို့လည်း ပြောနိုင်ပါသည်။ **r**(t) = <x, y, z> = <f(t), g(t), h(t)>။ ဒါကို Positional Vector Function အနေဖြင့် ပြောခဲ့ပါသည်။
  - **N** Input Variable Function with **N** Output Variable. ဒါကို Vector Input Variable Function with Vector Output လို့လည်း ပြောနိုင်ပါသည်။ Vector Field Function လို့လည်း ပြောကြပါသည်။ **r**(x, y, z) = <x, y, x> = <f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)>
  - **N** Input Variable Function with **M** Output Variable. ဒါကို Mapping Function လို့လည်း ပြောနိုင်ပါသည်။ **r**(u, v) = <x, y, z> = <f(u, v), g(u, v), h(u, v)>

Multivariable Scalar Function

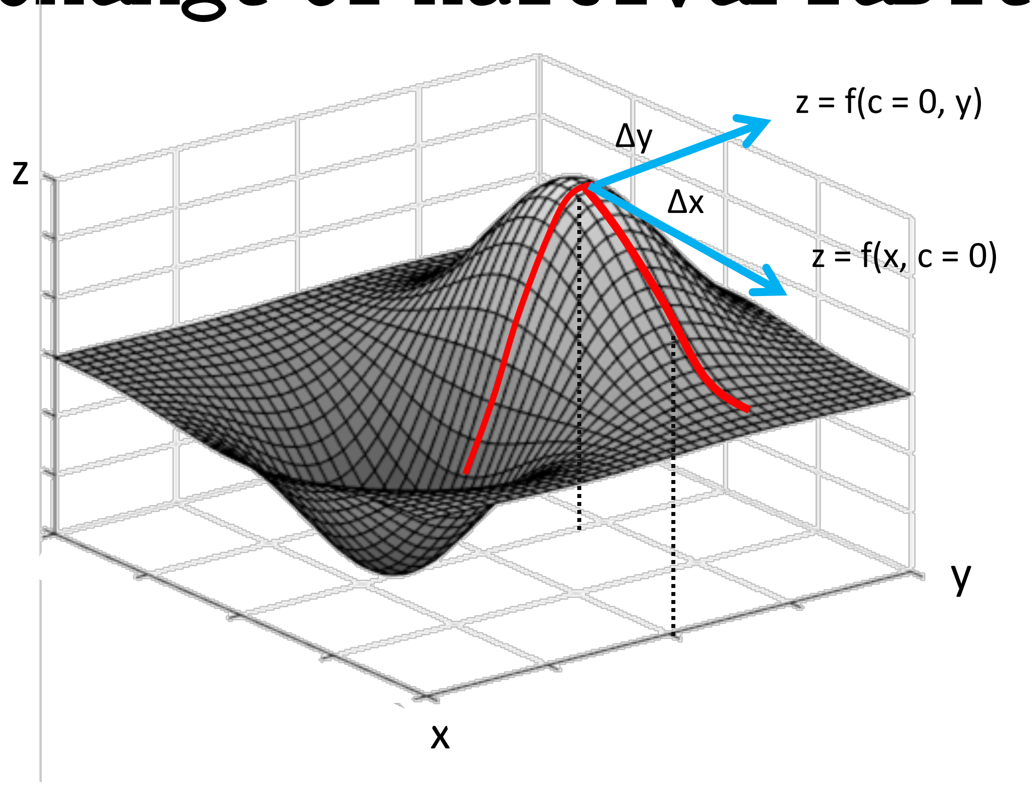
$z = f(x, y)$

$z = f(\mathbf{r})$, where $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$



- z သည် 2 Variable Scalar Function တစ်ခု ဖြစ်သည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် 2 Dimensional Vector Variable Input Function with Scalar Output ဖြစ်သည်။

Rate of Change of Multivariable Function

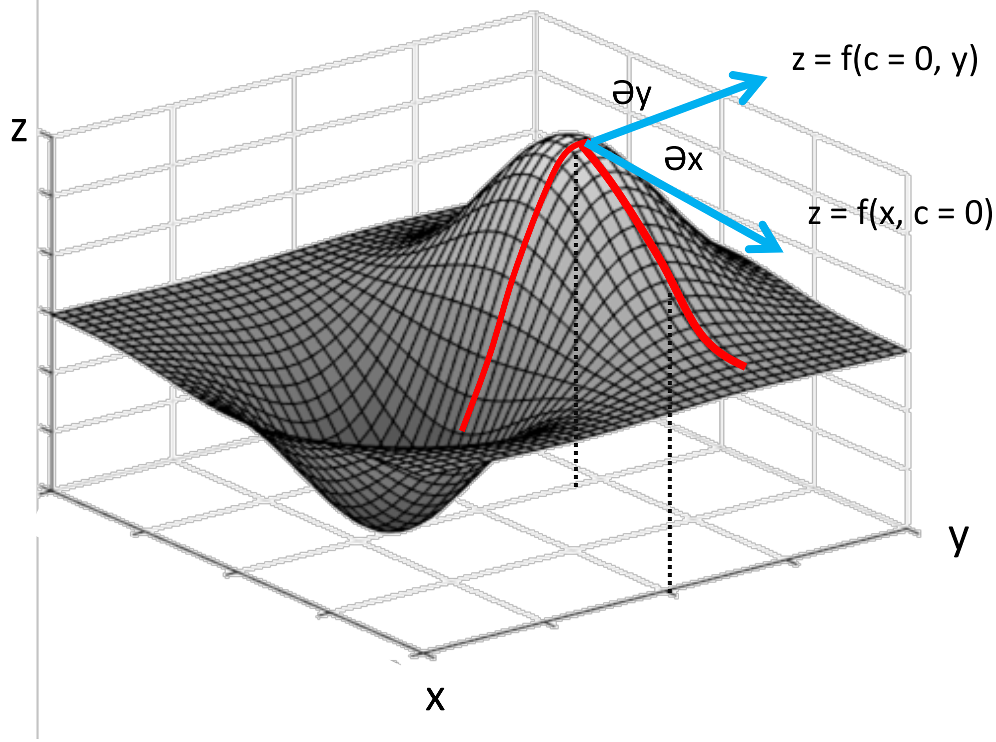


- z ကို တောင်ကုန်းတစ်ခု လို့ ယူဆထားပါ။ လူတစ်ယောက် တောင်ကုန်းပေါ်ကို Y Direction အတိုင်းပြေးတက်သွားပြီး X Direction အတိုင်းပြေးဆင်းလာတယ် ဆိုပါတော့။ Y Direction အတိုင်းပြေးတက်သွားရင် Y ပဲပြောင်းမှာ ဖြစ်သည်။ ထို့အတူ X Direction အတိုင်းဆို X ပဲပြောင်းမှာ ဖြစ်သည်။

- Rate of Change of z with respect to Y Direction = $\dfrac{\Delta z}{\Delta y}$

- Rate of Change of z with respect to X Direction = $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}$

Partial Derivative of Multivariable Function



- ဒါဆိုရင် 2 Variable Scalar Function အတွက် Derivative နှစ်ခုရမည် ဖြစ်သည်။ Derivative က Complete မဖြစ်တဲ့ အတွက် Partial Derivative ဟုခေါ်သည်။
- Partial Derivative of z with respect to Y Direction = $\frac{\partial z}{\partial y}$
- Partial Derivative of z with respect to X Direction = $\frac{\partial z}{\partial x}$

Multivariable Scalar Function

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

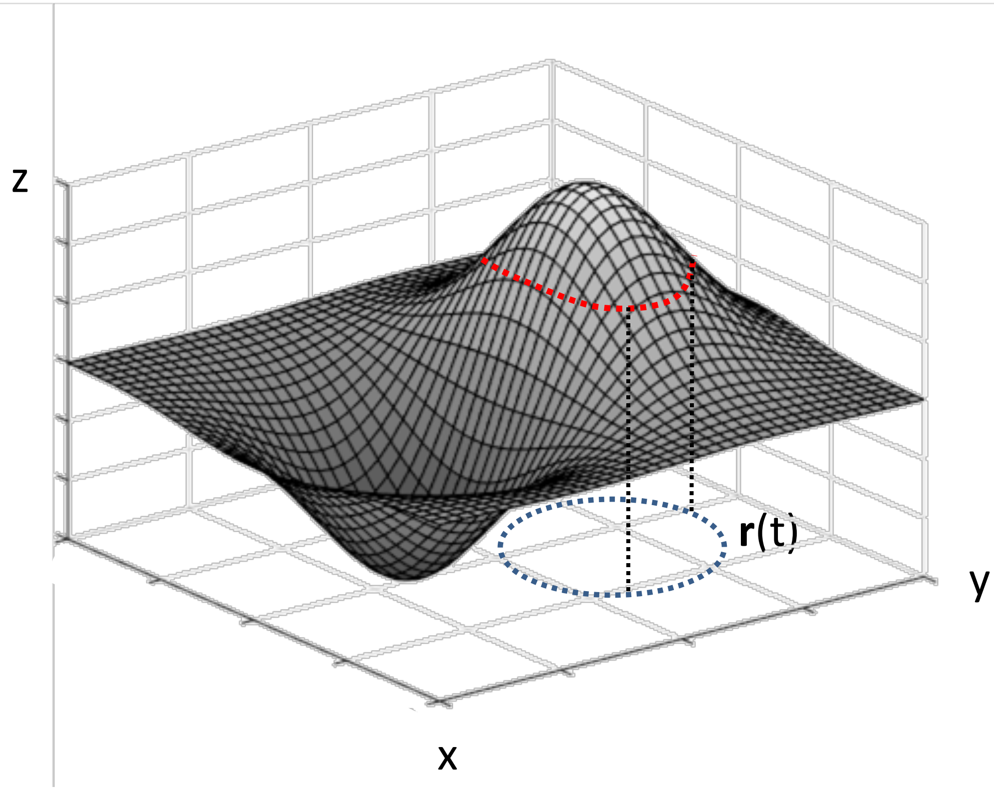
$$z = f(\mathbf{r}) \text{ , where } \mathbf{r} = <x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n>$$

- z သည် N Variable Scalar Function တစ်ခု ဖြစ်သည်။တစ်နည်းအားဖြင့် N Dimensional Vector Variable Input Function with Scalar Output ဖြစ်သည်။

- **2** Variable Scalar Function မှာ **2** Partial Derivative ရှိသည့်အတွက် **N** Variable Scalar Function မှာ **N** Partial Derivative ရှိသည်။

Chain Rule

z = f(**r**) , where **r** = <f(t), g(t)>



- z ကို တောင်ကုန်းတစ်ခုလို့ ယူဆထားပါ။ ဒီတစ်ခါတော့ လူတစ်ယောက်က တောင်ကုန်းပေါ်မှာ ပတ်ချာလည် ပြေးမည်ဆိုပါတော့။ ဒါဆိုရင် Rate of Change က ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။

More Chain Rule

$z = f(\mathbf{r})$, where $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$

$r(t) = \langle x, y \rangle = \langle f(t), g(t) \rangle$

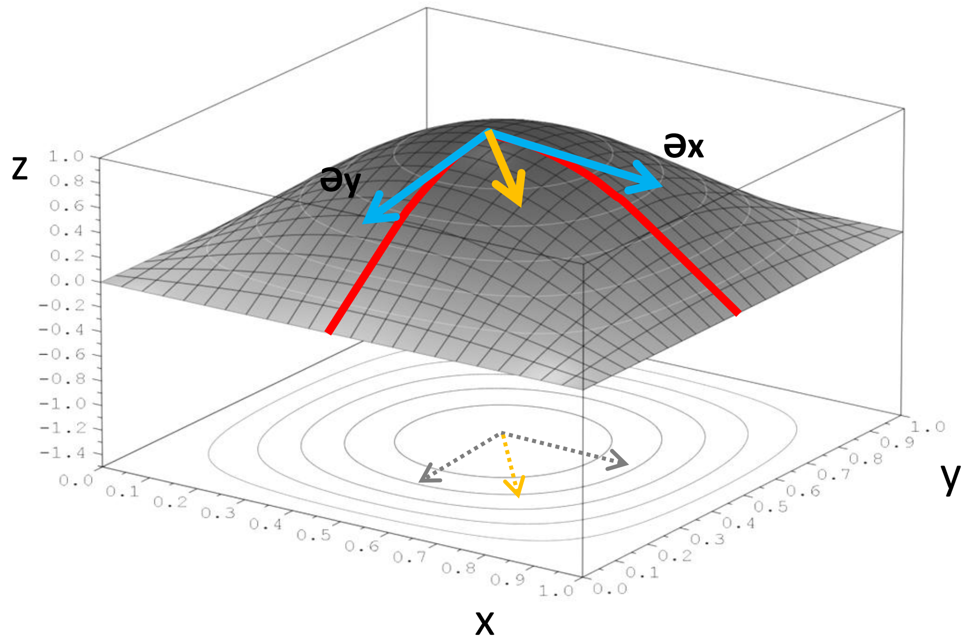
$z(t) = f(\mathbf{r}(t))$

- ဒါဆိုရင်

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial f}\frac{df}{dt} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{dg}{dt}$$

Gradient Vector

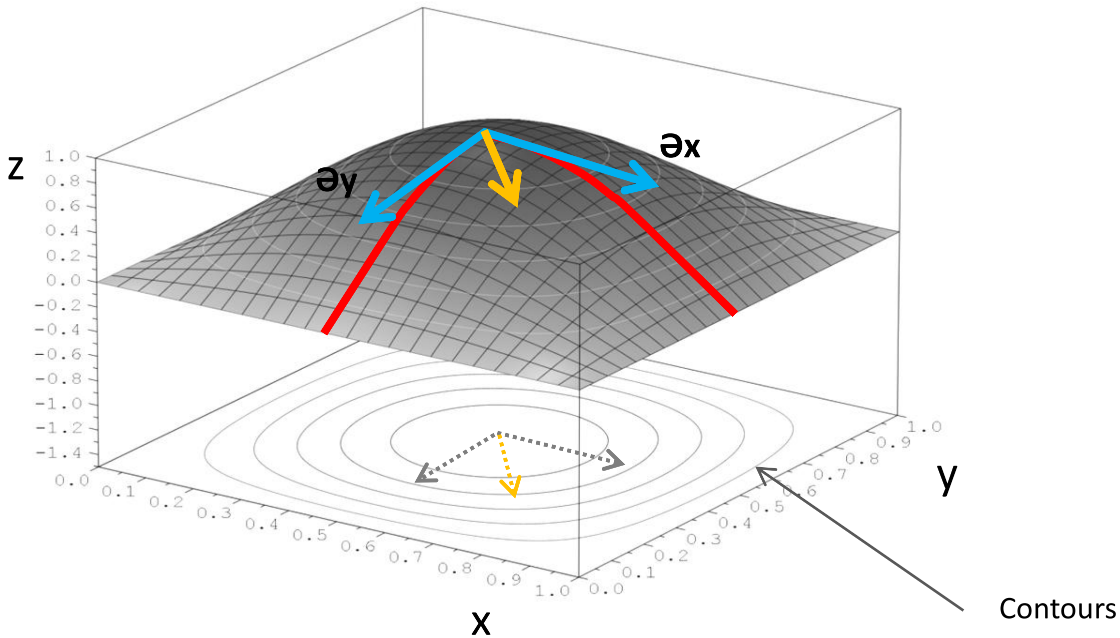


- z = f (x, y) ဆိုတဲ့ 2 Variable Scalar Function မှာ $\frac{\partial z}{\partial x}$ နှင့် $\frac{\partial z}{\partial y}$ ဆိုပြီး Partial Derivative နှစ်ခု ရှိပါသည်။

- တကယ်လို့သာ ဒီ Partial Derivative နှစ်ခုကို Vector တစ်ခု အနေနဲ့ ယူဆရင် ဘယ်လို အဓိပ္ပါယ်ရမလဲ။

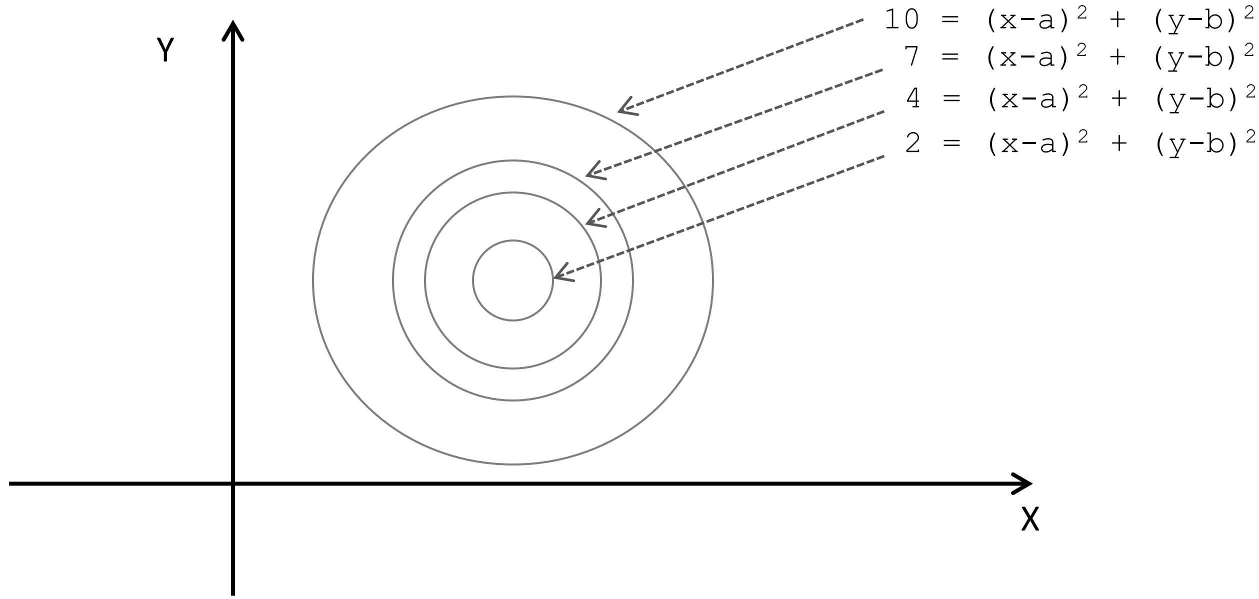
$$\nabla f = < \frac{\partial z}{\partial x} , \frac{\partial z}{\partial y} >$$

More Gradient Vector



- Gradient of $z = f(x, y)$ သည် 2 Dimensional Vector တစ်ခု ဖြစ်ပြီး Contours များနှင့် Orthogonal ဖြစ်ပါသည်။
- Gradient Vector သည် Steepest Ascent or Steepest Descent တစ်နည်းအားဖြင့် The Fastest Change ရှိသော Direction ကို အမြဲ Point လုပ်ပါသည်။
- ဒီအချက်ပေါ်မူတည်ပြီး Gradient Descent ဆိုပြီး နောက်ပိုင်းမှာ Optimization များကို လုပ်ကြတာဖြစ်သည်။
- N Variable Scalar Function အတွက် Gradient Vector သည် N Dimensional Vector တစ်ခု ဖြစ်သည်။

Contours



- $z = f(x, y)$ သည် 2 Dimensional Scalar Function တစ်ခု ဖြစ်သည်။ တကယ်လို့ z ရဲ့ တန်ဖိုးက Constant တစ်ခုသာ ဆိုရင်

$$\text{For dimension} = 2,\ f(x,y) = k = \text{constant}$$

$$\text{For dimension} = n,\ f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k = \text{constant}$$

- ဒါကို Contour Function သို့မဟုတ် Level Function ဟုခေါ်သည်။
- Gradient Vector သည် Contours များကို အမြဲ Orthogonal ဖြစ်သည်။

More Contours

- N Dimensional Scalar Function တစ်ခု ဟာ Constant တန်ဖိုး တစ်ခုသာ ဆိုရင် Contour Function တစ်ခု ဖြစ်သွားနိုင် ပါသည်။

- ဒါဆိုရင် z = f(x, y) ကို Contour Function တစ်ခု အဖြစ် ပြောင်းမည်ဆိုပါက

```
For dimension = 2,

        f(x, y) = z

        f(x, y) - z = 0   (The solution must exist)
```

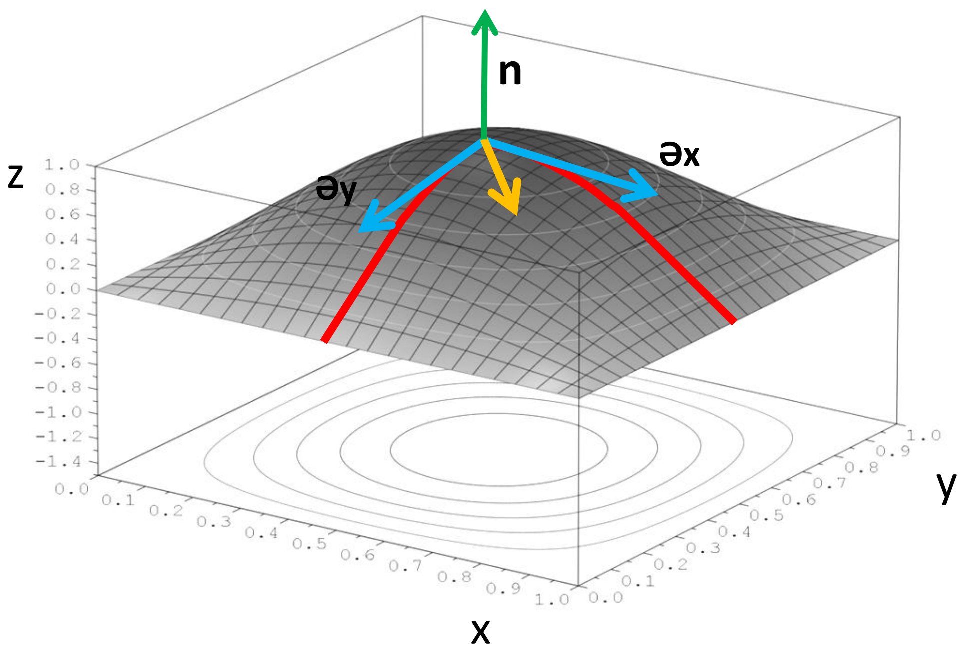
For dimension = n,

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = z$$

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - z = 0 \quad \text{(The solution must exist)}$$

- ထို့ကြောင့် N Dimensional Scalar Function တစ်ခု ဟာ (N+1) Dimensional Scalar Function ရဲ့ Contour Function တစ်ခု ဖြစ်သွားနိုင်ပါသည်။

Normal to Contours



- Gradient Vector သည် Contour Function များနှင့် ထောင့်မှန်ကျသည် ဟုဆိုခဲ့ပါသည်။

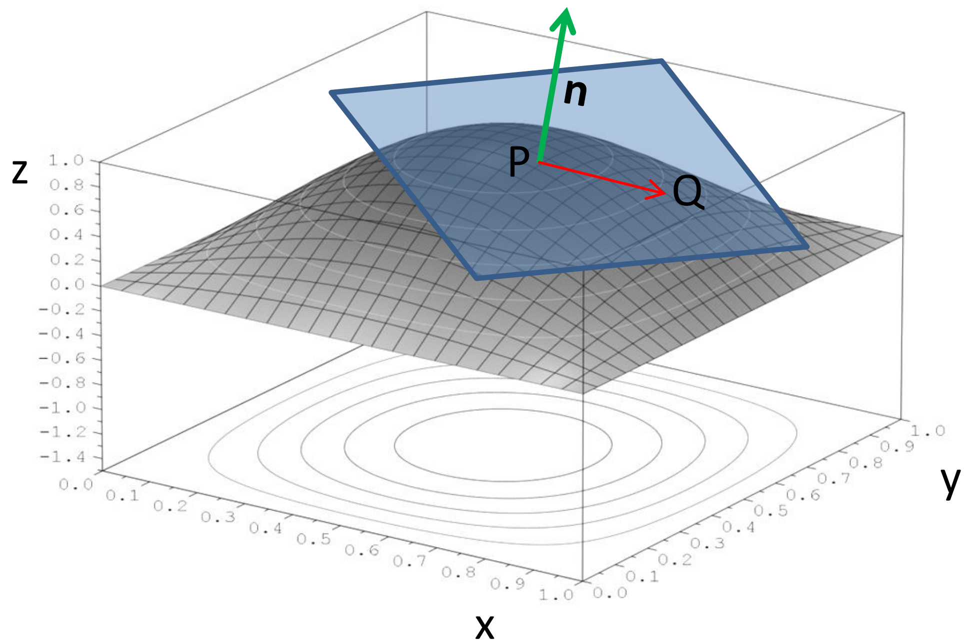
- ဒါဆိုရင် z = f (x, y) သည် w = f (x, y, z) ရဲ့ Contour Function at zero [f (x, y) – z = 0] ဖြစ်သည်ဆိုပါက w ရဲ့ Gradient Vector သည် z = f (x, y)၏ Normal Vector ဖြစ်သွားမည် ဖြစ်သည်။

- တောင်ကုန်းတစ်ခု ပေါ်မှာ ဝါးလုံးတစ်ခု ထောင်သည်ဟု ယူဆကြည့်ပါ။ ထိုဝါးလုံးသည် Normal Vector ဖြစ်သည်။

For dimension = 2, Normal Vector = Gradient of [f(x, y) - z]

For dimension = n, Normal Vector = Gradient of [$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - z$]

Tangent Plane



- Plane Equation တစ်ခုအတွက် Normal Vector တစ်ခု၊ Point P တစ်ခုနှင့် Arbitrary Point Q တစ်ခုတို့ လိုအပ်သည်။

- ဒါဆိုရင် z = f (x, y)ရဲ့ Tangent Plane တစ်ခုကို လွယ်လွယ်ကူကူ ရှာကြည့်လို့ ရပါသည်။

For dimension = 2, Tangent Plane = Gradient of [f(x, y) - z] . $<x - x_0, y - y_0, z - z_0>$

For dimension = n, Tangent Plane = Gradient of [$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - z$] . $<x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, z - z_0>$

Tangent and Gradient Vectors

- အခု ကျွန်တော်တို့ Derivative Vector 2 မျိုးကို ပြောခဲ့ ပြီးပါပြီ။

- Tangent (Velocity) Vector က **r**’(t) ဖြစ်သည်။ Tangent Vector သည် Single Variable Vector Function များ၏ Vector Derivative ဖြစ်ပြီး Vector Function များနှင့် Tangential ဖြစ်သည်။ အများအားဖြင့် Tangent Vector များသည် Temporal Derivative များ (Rate of change with respect to Time) ဖြစ်ကြသည်။

- Gradient Vector က $\nabla f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ ဖြစ်သည်။ Gradient Vector သည် Multiple Variable Scalar Function များ၏ Vector Derivative ဖြစ်ပြီး Contours of Function $[f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = k]$ များနှင့် Perpendicular ဖြစ်သည်။ အများအားဖြင့် Gradient Vector များသည် Spatial Derivative (Rate of Change with respect to Space)များ ဖြစ်ကြသည်။

Optimization

- အရင်က Optimization အကြောင်းကို ပြောခဲ့ပါသည်။ Profit Function သို့မဟုတ် Cost Function တို့ရဲ့ Maximum သို့မဟုတ် Minimum ကို ရှာခြင်းအားဖြင့် Optimization ကို လုပ်ကြပါသည်။

- လက်တွေ့အားဖြင့် Profit Function သို့မဟုတ် Cost Function တို့သည် y = f(x) ဆိုပြီး Single Variable ပဲရှိသော ရိုးရှင်းသော Function များ မဟုတ်ကြပါ။

- Variableတွေ များစွာ ပါဝင်သော ရှုပ်ထွေးသော Function များ ဖြစ်ကြပါသည်။ ဥပမာ၊ ဟင်းတစ်ခွက် အတွက် ကုန်ကျစရိတ်မှာ ပါဝင်ပစ္စည်းများရဲ့စရိတ်၊ သယ်ယူပို့ဆောင်စရိတ်၊ သိုလှောင်မှုစရိတ်၊ အလုပ်သမားစရိတ် စသည်ဖြင့် အများကြီးပါဝင်ပါသည်။

```
Cost = f(ingredients, transportation, storage, labor)
```

- ဒါဆိုရင် Profit Function သို့မဟုတ် Cost Function တို့သည် အများအားဖြင့် Multivariable Scalar Function များဖြစ်ကြသည်။

$$\text{Profit or Cost} = z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- ထို့ကြောင့်

$$\text{For Maximum Profit or Minimum Cost,} \quad \nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

More Optimization

For Maximum Profit or Minimum Cost, $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

…

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

- N Variable Function အတွက် N Equations ရှိမှာ ဖြစ်ပြီး $\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ ဖြစ်မည့် x_n တန်ဖိုးများကို ရှာရမည် ဖြစ်ပါသည်။

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \text{ if } x_1 = a_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \text{ if } x_2 = a_2$$

…

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \text{ if } x_n = a_n$$

Maximum or Minimum = $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Constrained Optimization

- ဖော်ပြခဲ့သော Optimization ကို Classical Optimization လို့ခေါ်ပါသည်။ သို့သော် လက်တွေ့မှာက Classical Optimization များကို သိပ်မသုံးကြပါ။

```
Cost = f(ingredients, transportation, storage, labor)
```

- ဟင်းတစ်ခွက် အတွက် ကုန်ကျစရိတ်မှာ ပါဝင်ပစ္စည်းများရဲ့စရိတ်၊ သယ်ယူပို့ဆောင်စရိတ်၊ သိုလှောင်မှုစရိတ်၊ အလုပ်သမားစရိတ် စသည်ဖြင့် အများကြီးပါဝင်ပါလို့ ပြောခဲ့ပါသည်။

- အမှန်တော့ လက်တွေ့မှာ ဒီထက် ပိုရှုပ်ထွေးပါသည်။ ဥပမာ၊ ဝယ်လို့ရနိုင်သော ပါဝင်ပစ္စည်းများက အကန့်အသက်ရှိမည်ဖြစ်သည်။ ပြီးတော့ သိုလှောင်တာကလည်း အများကြီး သိုလှောင်လို့ ရချင်မှ ရမည်။

```
Constraints

Ingredients                 <= 200 Items

Storage                     <= 300 Items
Transportation               <= 10 1km
Labor                       <= 4 People
```

- ဒါဆိုရင် Optimization, subject to Constraints ကို Constrained Optimization လို့ခေါ်ပါသည်။ လက်တွေ့မှာ အင်မတန် အသုံးကျပါသည်။

Constraints

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k = constant$$

- $g(x)$ သည် Constraints တစ်ခု ဖြစ်သည်။ $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k$ ကို Equality Constraint ဟု ခေါ်သည်။
- အရင်က ပြောခဲ့ဘူးသည် $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) =$ constant ဆိုရင် $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ သည် Contour (Level) Function တစ်ခု ဖြစ်သည်။

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) < k$$

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) > k$$

- $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) < k$ သို့မဟုတ် $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) > k$ ကို Inequality Constraint ဟု ခေါ်သည်။ Inequality Constraint များသည် Contour Boundary အတွင်းမှာ သို့မဟုတ် အပြင်မှာ လို့ ဆိုလိုပါသည်။

Lagrange Multiplier

$$\text{Profit or Cost} = z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k = \text{constant}$$

- $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ သည် Equality Constraint တစ်ခု ဖြစ်ပြီး $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ကို Optimize subject to $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k$ လုပ်မည် ဆိုပါက

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

- The ratio of the gradient of f နှင့် the gradient of g တို့သည် λ ဖြစ်သည်။ λ သည် Constant တစ်ခု ဖြစ်ပြီး Lagrange Multiplier ဟုခေါ်သည်။ For multiple equality constraints,

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_1 \nabla g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda_n \nabla h(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ တို့သည် Lagrange Multiplier များဖြစ်ကြသည်။

Lagrangian Optimization

- Lagrange Multiplier များကို သုံးပြီး Optimization လုပ်ခြင်းကို Langrangian Optimization ဟု ခေါ်သည်။
- Langrangian Optimization ကို လုပ်ဖို့ Constraints များသည် Equality Constraints ဖြစ်ရမည် ဖြစ်သည်။

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$\nabla L_{x_n} = 0$$

$$\nabla L_{\lambda_n} = 0$$

- L = Lagrangian Function ဖြစ်ပြီး f သည် Objective Function နှင့် g_i သည် Eqaulity Constraints များ ဖြစ်သည်။
- ပြီးလျှင် Gradient of L with respect to $x_n = 0$ နှင့် Gradient of L with respect to $\lambda_n = 0$ တို့ကို ဖြေရှင်းခြင်း ဖြင့် x variables နှင့် λ တန်ဖိုးများကို ရရှိမည် ဖြစ်သည်။

Karush-Kuhn-Tucker conditions

- Langrangian Optimization ကို လုပ်ဖို့ Constraints များသည် Equality Constraints ဖြစ်ဖို့ လိုအပ်သည်။
- ဒါဆိုရင် Inequality Constraints များကို ဘယ်လို တွက်မလဲ။ Karush-Kuhn-Tucker Conditions က ဒါကို ဖြေရှင်းဖို့ လုပ်တာဖြစ်သည်။
- Karush-Kuhn-Tucker Conditions အရ Inequality Constraints များသည် Less Than or Less Than or Equal to Zero သာဆိုရင်

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i h_i (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

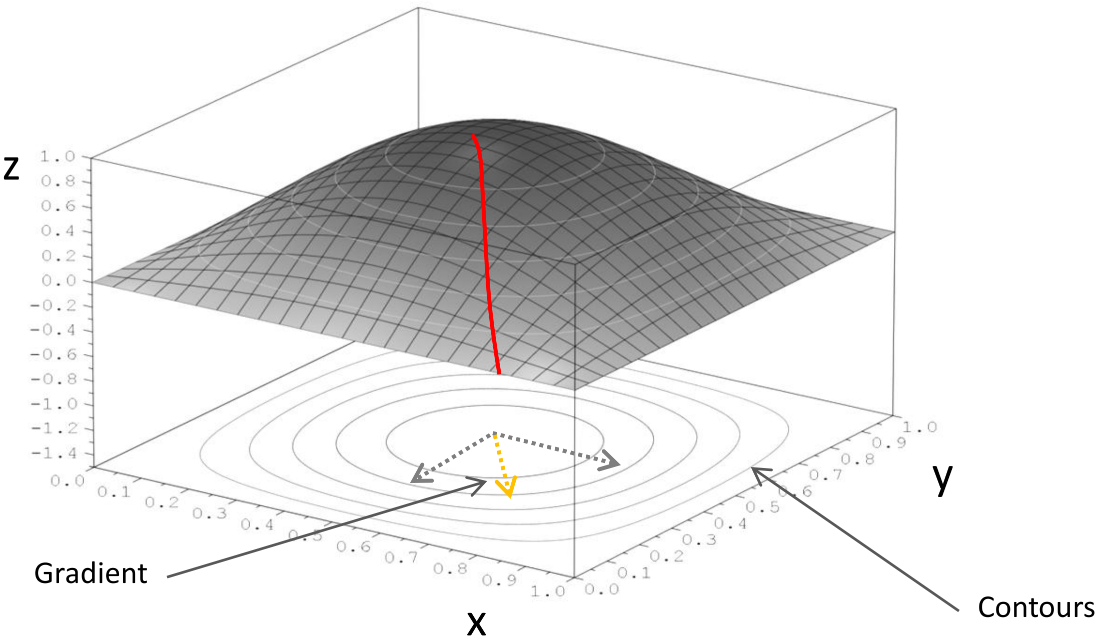
$$\nabla L_{x_n} = 0$$

$$\nabla L_{\lambda_n} = 0$$

$$\mu_i h_i (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \text{ and } \mu_i >= 0$$

- f သည် Objective Function၊ g_i သည် Eqaulity Constraints များ၊ h_i သည် Inequality Constraints များ ဖြစ်သည်။

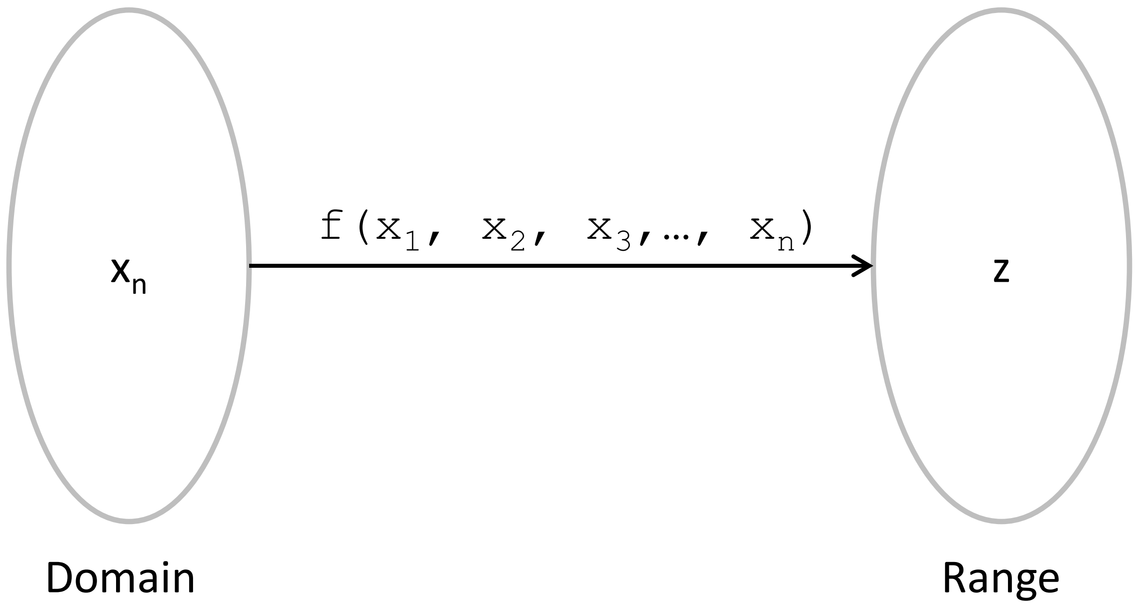
Gradient Descent and Ascent



- Gradient Descent သို့မဟုတ် Ascent သည် Gradient ၏ Direction အတိုင်း တောင်ကုန်းပေါ်မှ ပြေးဆင်းခြင်း၊ ပြေးတက်ခြင်းကို ဆိုလိုပါသည်။

- Gradient Descent သည် Machine Learning (အထူးသဖြင့် Supervised Learning) မှာ အခရာကြသော Technique တစ်ခု ဖြစ်ပါသည်။

Function



- Function တစ်ခုသည် Domain မှ Range ကို ဆက်သွယ်ပေးသော Relation တစ်ခု ဖြစ်သည်။
- ပုံမှန်အားဖြင့်ကျွန်တော်တို့သည် Domain နှင့် Function ကို သိရှိထားပြီး Range ကိုရှာဖွေခြင်း ဖြစ်သည်။
- တကယ်လို့ ကျွန်တော်တို့က Domain နှင့် Range ကို သိရှိထားပြီး Function ကို မသိဘူးဆိုပါတော့။ ဥပမာ၊ တနင်္လာနေ့မှာ အပူချိန်က 30° C၊ အင်္ဂါနေ့မှာ 26° C၊ . . . ၊ တနင်္ဂနွေမှာ 33° C ဆိုပါတော့။ ဒါဆိုရင် နေ့များနှင့် အပူချိန်ရဲ့ Function က ဘာဖြစ်မလဲ။

Supervised Learning

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

- တကယ်လို့ Function တစ်ခုသည် Linear Function ဖြစ်သည် ဆိုပါက၊ တစ်နည်းအားဖြင့် z = Linear Combination of Parameters $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ နှင့် Variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ သာ ဆိုပါက

If f is linear function, $Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ where a_n = parameters

- ပုံမှန်အားဖြင့် Function Parameters များကို ကျွန်တော်တို့ ကြိုသိထားကြပါသည်။

$$Z = 2x + 4y + 5 \text{ (Parameters = 2,4,5)}$$

- Supervised Learning မှာ Parameters $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ တန်ဖိုးများကို ကျွန်တော်တို့ မသိပါ။ သို့သော် Variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ များနှင့် Output (Range) တန်ဖိုးများကို သိပါသည်။ ကျွန်တော်တို့က Parameters တန်ဖိုးများကို ရှာချင်တာ ဖြစ်သည်။

- ဒါကြောင့် Z သည် Function of Variables မဟုတ်တော့ ဘဲ Function of Parameters ဖြစ်သွားမည်။

$Z = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, since $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ have become known constants

- Initial Value Problem အရ တကယ်လို့ ကျွန်တော်တို့ Initial Values များနှင့် Rate of Change ကိုသာ သိရင် Final Values များကို တွက်ချက်လို့ ရမှာ ဖြစ်ပါသည်။

- Parameters $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ရဲ Initial Values များကို Arbitrarily ထားလို့ ရပါသည်။

- ဒါဆိုရင် Rate of Change of Parameters များကို ဘယ်လို တွက်မလဲ။

More Supervised Learning

- Arbitrarily ယူဆထားသော Initial Parameters များ နှင့် Known Variables များဖြင့် တွက်ချက်ထားသော Z တန်ဖိုးသည် U ဖြစ်သည် ဆိုပါတော့။

- သို့သော တကယ်ဖြစ်သင့်သော Z တန်ဖိုးသည် Y ဖြစ်သည် ဆိုပါတော့။ Y တန်ဖိုးကို Dataset မှ ရရှိထားခြင်း ဖြစ်သည်။

$$\text{Error} = Y - U, \text{ where } U = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \text{ and } Y = \text{constant}$$

- ဒါဆိုရင် Error တန်ဖိုးသည် Y – U ဖြစ်သည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် Error သည် Function of Parameters တစ်ခု ဖြစ်သည်။ ဒါဆိုရင် Rate of Change of Error with respect to parameters သည်

$$\text{Rate of Change of Error} = \nabla[Y - f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)]$$

- ထို့ကြောင့်

$$\text{Parameters}(t + 1) = \text{Parameters}(t) + \text{Rate of Change of Error}(t)$$

- ကျွန်တော်တို့က Rate of Change of Error (t)က နောက်ဆုံး zero ဖြစ်သွားသည့် အထိ တွက်ချက်ရမှာ ဖြစ်ပါသည်။

- တစ်နည်းအားဖြင့် Supervised Learning သည် Variable နှင့် Output တန်ဖိုးများကို မူတည်ပြီး Function ကို ပြန်လည်တွက်ချက်တာ ဖြစ်သည်။

- Supervised Learning မှာ Parameters များကို Weights ဟု ခေါ်ကြသည်။

- အခု ကျွန်တော်တို့က Z function ကို Linear ဖြစ်သည်ဟု ယူဆထားခြင်း ဖြစ်သည်။ Z function သည် Linear မဟုတ်ပါက ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။

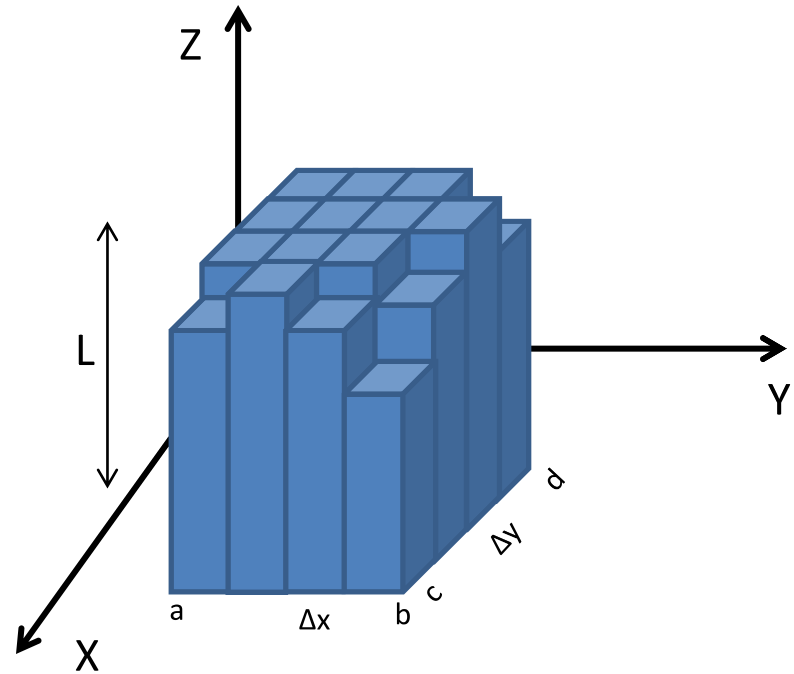
Volume

- ဖော်ပြပါပုံရဲ့ Area (Between a and b, c and d) ကိုရှာချင်လျှင်

$$V = L * (\Delta x * n) * (\Delta y * m)$$

where n = 4, m = 4

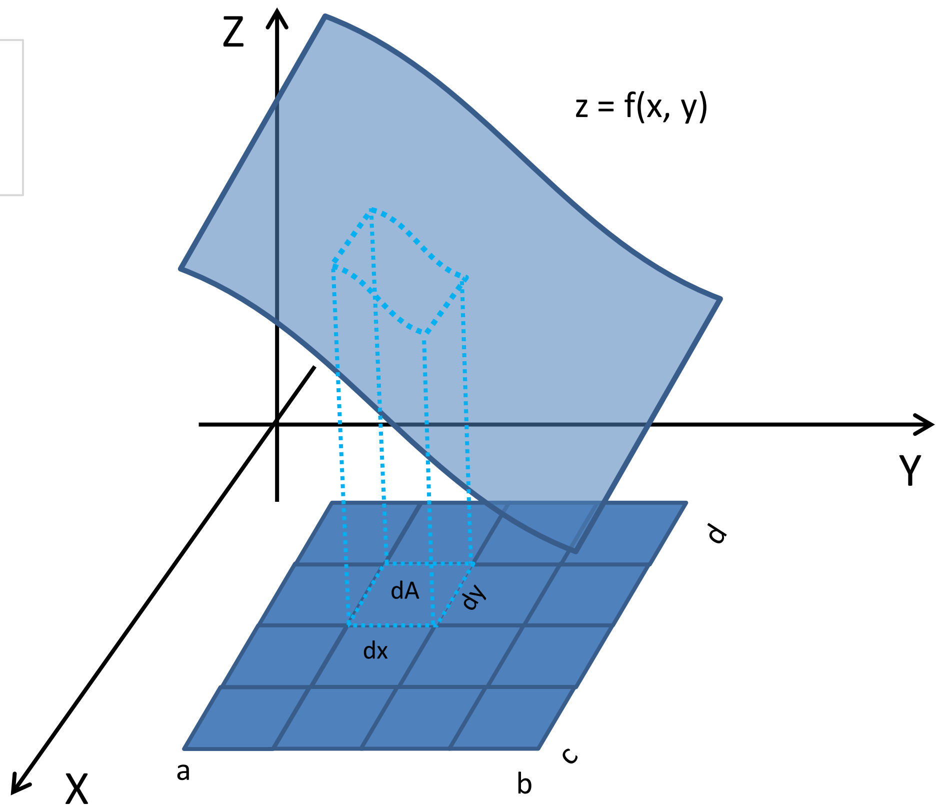
$$V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} L\,\Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} L\,\Delta A$$



Double Integral

$$\iint f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

- Volume under a Surface Function သည် သက်ဆိုင်ရာ Integral များကို ဆင့်ကာဆင့်ကာ Integrate လုပ်ခြင်းပင် ဖြစ်သည်။
- ပထမ y ကို Constant ထားပြီး f(x, y) ကို dx ဖြင့် a မှ b သို့ Integrate လုပ်မည်။
- ပြီးလျှင် ရရှိလာသော Integral f(x,y) with respect to dx ကို dy ဖြင့် c မှ d သို့ Integrate ထပ်လုပ်မည်။



Triple Integral

$$\iiint f(x,y,z)\,dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- Triple Integral သည် Double Integral ကို Extend လုပ်ထားခြင်း ဖြစ်သည်။
- အမှန်တော့ Multivariable Function များ အတွက် Multiple Integral များကို လုပ်ဆောင်လို့ ရသည်။

Mapping Function

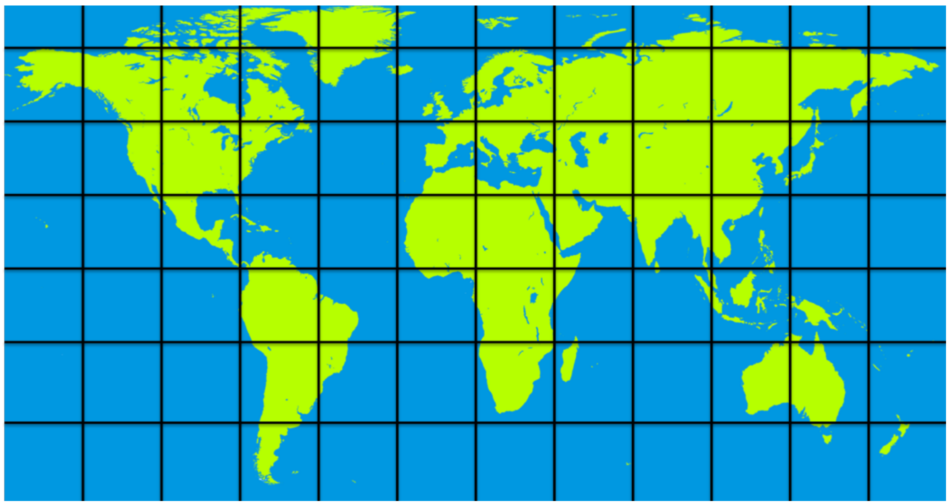
- ကျွန်တော်တို့သည် အခုအထိ Single Variable Vector Function များနှင့် Multiple Variable Scalar Function များကို ပြောခဲ့ပါသည်။

- အခု ကျွန်တော်တို့ **N** Variable Function with **M** Output Variable ကို ဆွေးနွေးပါမည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် ဒီ Function အမျိုးအစားကို Mapping Function သို့မဟုတ် Projection Function များဟု ခေါ်ကြပါသည်။

Map and Globe

- ကျွန်တော်တို့ စဉ်းစားမိလား မသိဘူး။ ဘာလို့ ကမ္ဘာ့မြေပုံက အပြားကြီး ဖြစ်ပြီး ကမ္ဘာလုံးကြီးက လုံးနေတယ် ဆိုတာ။

Map



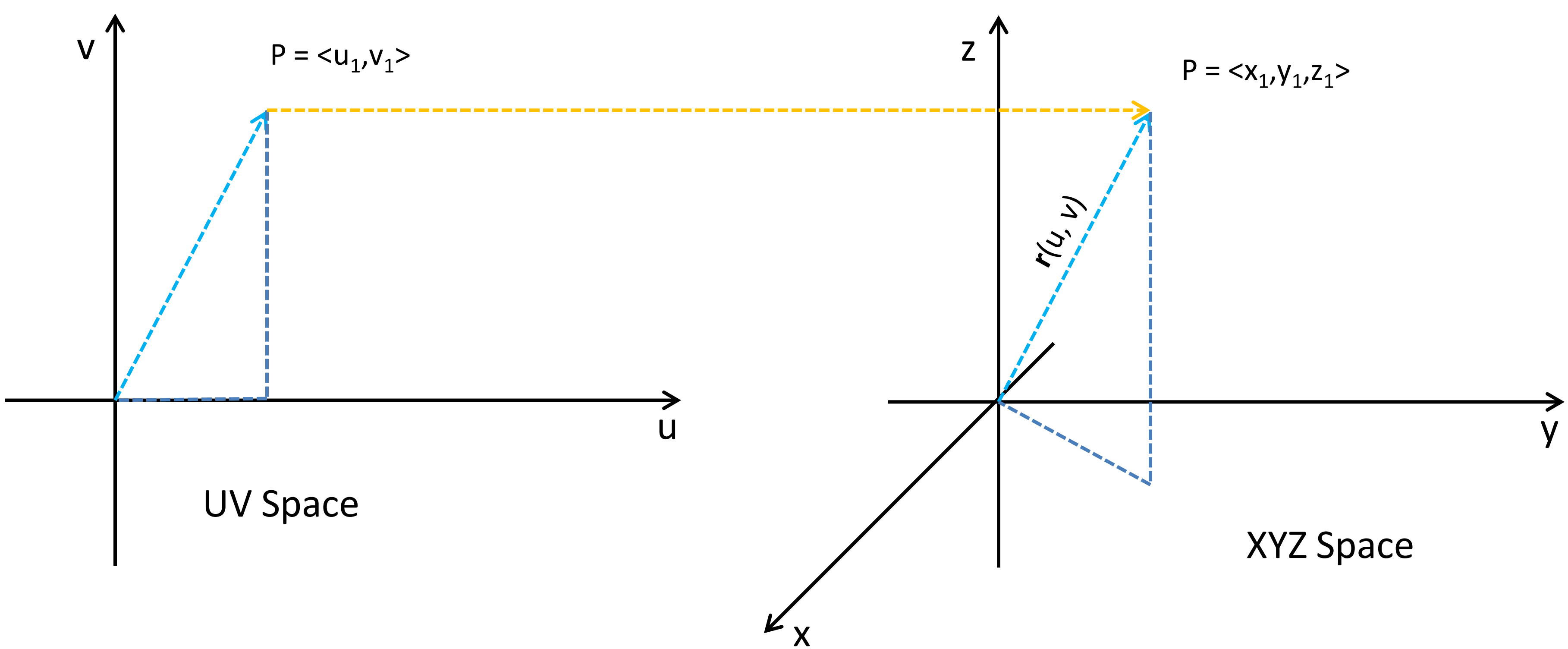
Globe

- ကမ္ဘာ့မြေပုံပေါ်က မျဉ်းဖြောင့်များသည် ကမ္ဘာလုံးပေါ်တွင် မျဉ်းကွေးများ ဖြစ်သွားကြသည်။
- သူတို့ 2 ခု ဘယ်လိုများ ဆက်သွယ်နေကြပါလဲ။

Vector Function

- ကျွန်တော်တို့ Single Variable Vector Function **r**(t) အကြောင်းကို ပြောခဲ့ပါသည်။ Single Variable တစ်ခုကို N Dimension Vector များနှင့် Mapping လုပ်ပေးတာ ဖြစ်သည်။

- တကယ်လို့ 2 Variable Vector Function **r**(u, v) ဆိုရင် ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။ 2 Dimensional Vector <u, v> တစ်ခုကို N Dimension Vector များနှင့် Mapping လုပ်ပေးတာ ဖြစ်သည်။



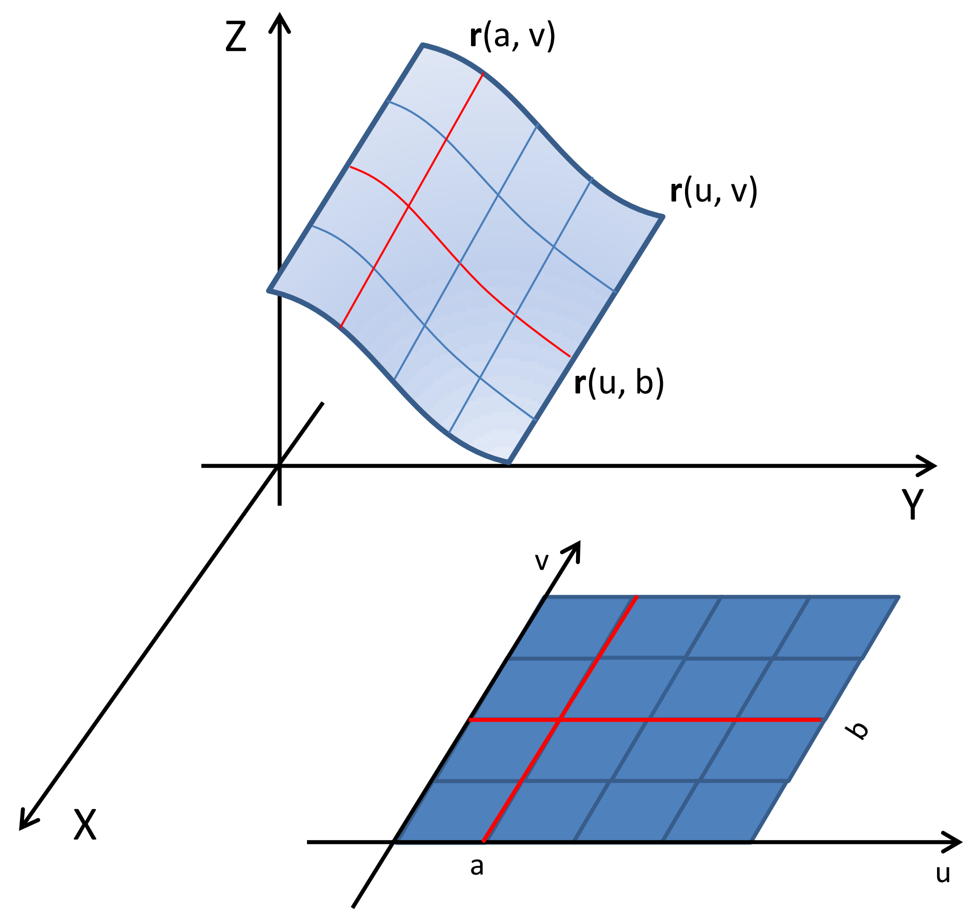
Vector Function

$\mathbf{r}(u, v) = \langle f(u,v), g(u,v), h(u,v) \rangle$

- UV Plane ပေါ်မှာ ရှိသော Point တစ်ခုချင်းကို XYZ Space ပေါ်တွင် Locate လုပ်ခြင်းဖြင့် Surface တစ်ခုကို ရရှိပါသည်။

- **r**(t) သည် N Dimensional မှာ ရှိသော **Curve** တစ်ခုကို ကိုယ်စားပြုပြီး **r**(u, v) သည် N Dimensional မှာ ရှိသော **Surface** တစ်ခုကို ကိုယ်စားပြုပါသည်။

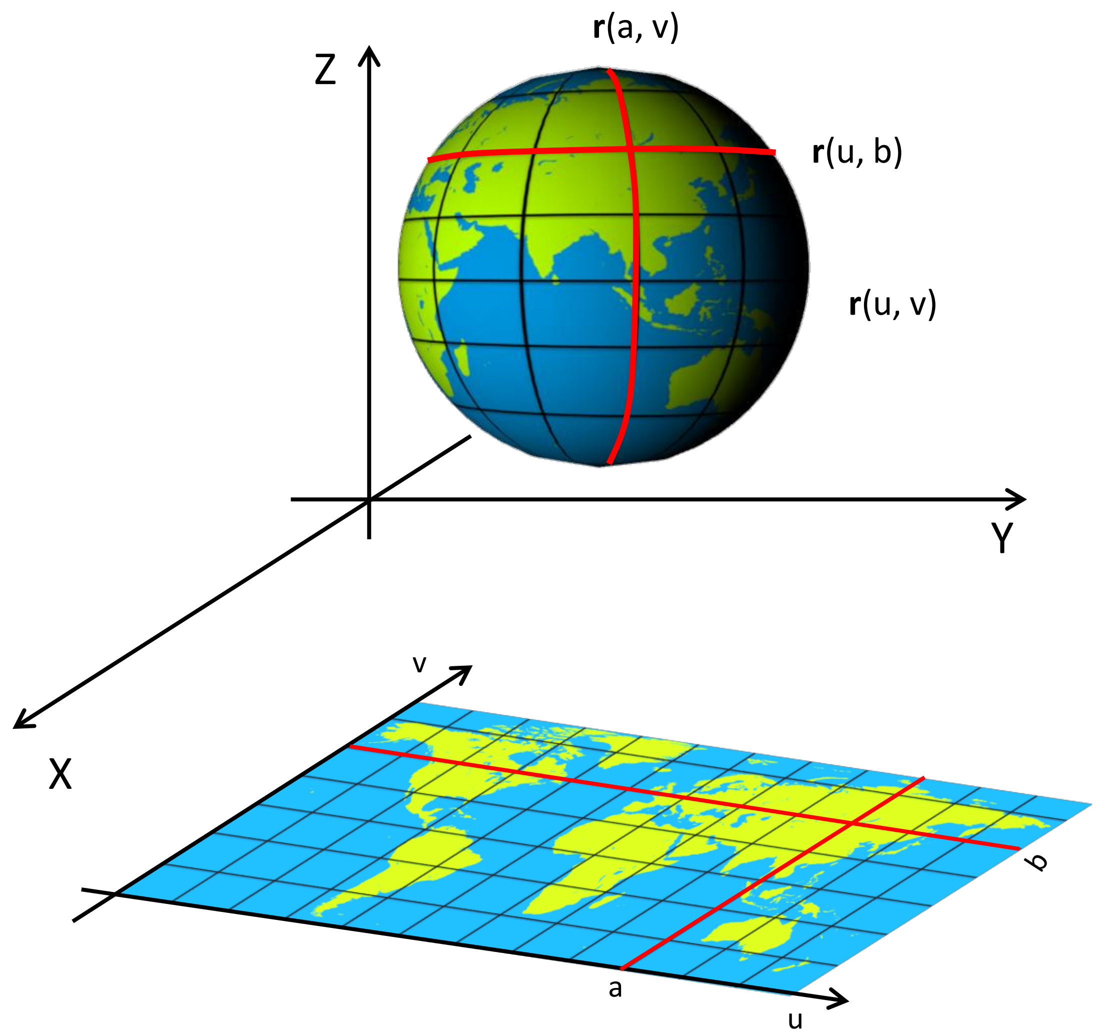
- တကယ်လို့ **r**(u, v = constant) သို့မဟုတ် **r**(u = constant, v) ဆိုပါက **r**(u, v) Surface ပေါ်ရှိ Curve များကို ရရှိမှာ ဖြစ်ပြီး ထို Curve များကို Grid Curve ဟု ခေါ်ကြသည်။ Latitude၊ Longitude များ သည် Grid Curve များ ဖြစ်ကြပါသည်။



Vector Function

```
r(u, v) = <a*sin(u)cos(v), a*sin(u)sin(v), a*cos(u)>
```

- တကယ်လို့ ကမ္ဘာ့မြေပုံ ကို UV Plane လို့ ယူဆကြည့်ပါက **r** (u, v) သည် ကမ္ဘာလုံးကြီးပေါ်ရှိ Surface ဖြစ်သွားမည်။
- ဒီလို 2D Plane ကို 3 or More Dimensional Surface ပေါ်သို့ Map လုပ်ခြင်းသည် အင်မတန် အသုံးဝင်ပါသည်။
- Computer Graphics တွင် ဒီလို လုပ်ခြင်းကို Texture Mapping ဟုခေါ်ကြသည်။



Derivative Vector Function

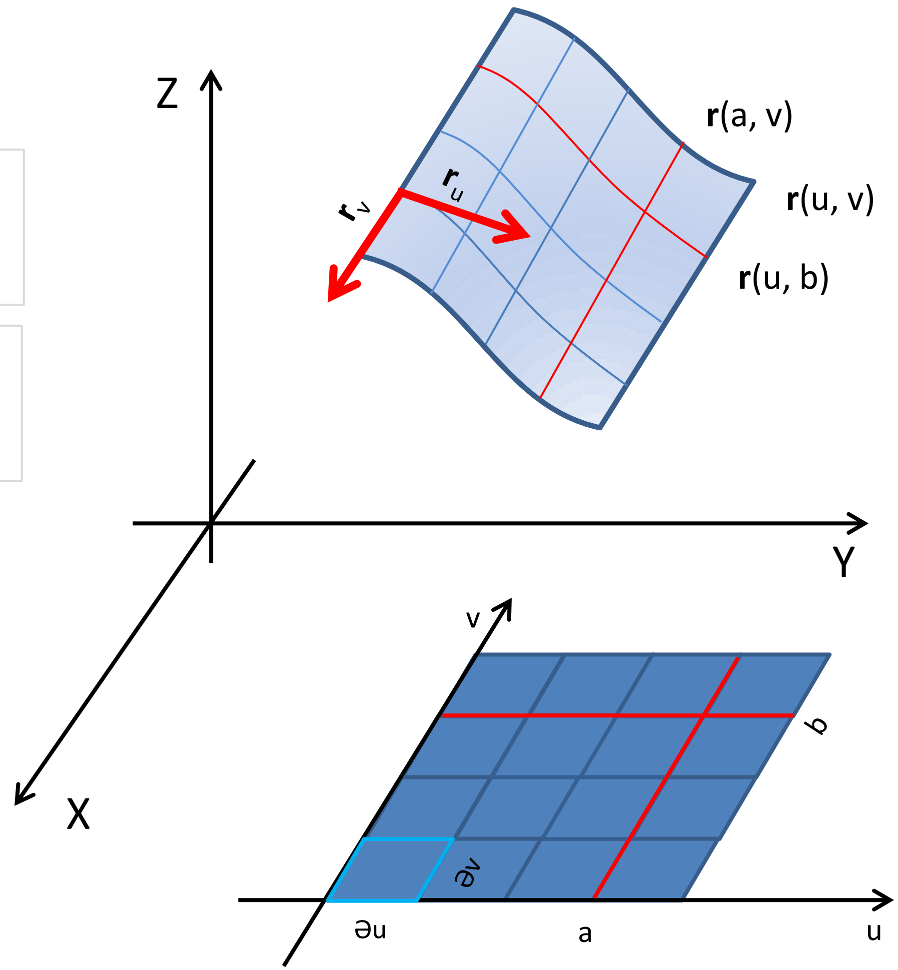
`r(u, v) = <f(u,v), g(u,v), h(u,v)>`

- တကယ်လို့ **r** (u, v) ကို ∂u နှင့် ∂v တို့နှင့် Differentiate လုပ်မည်ဆိုပါက

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial r}{\partial u} = < \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial u} >$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial r}{\partial v} = < \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial v} >$$

- $\mathbf{r}_u$ နှင့် $\mathbf{r}_v$ တို့သည် Tangent Vector များဖြစ်ကြပြီး Grid Curve များနှင့် Tangential ဖြစ်ကြသည်။ ထို့ကြောင့် Surface နှင့်လည်း Tangential ဖြစ်သည်။
- $\mathbf{r}_u$ နှင့် $\mathbf{r}_v$ တို့သည် Derivative Vector များ ဖြစ်သော်လည်း Gradient Vector မဟုတ်ပါ။ $\mathbf{r}_u$ နှင့် $\mathbf{r}_v$ တို့သည် Grid Curve များ၏ Velocity (Tangent) Vector များ ဖြစ်သည်။

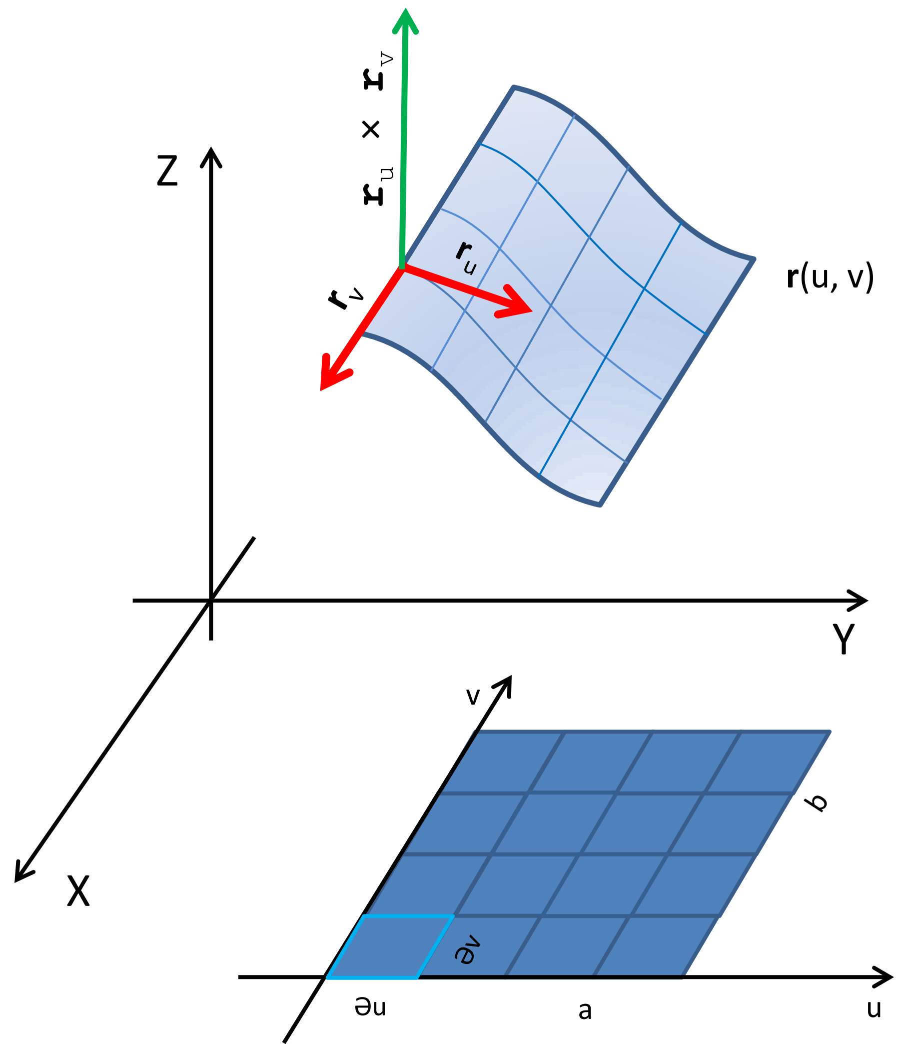


Cross Product

- $\mathbf{r}_u$ နှင့် $\mathbf{r}_v$ တို့ကို Cross Product လုပ်မည်ဆိုပါတော့

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- **Cross Product of $\mathbf{r}_u$ နှင့် $\mathbf{r}_v$** တို့သည် Normal Vector ဖြစ်ပြီး Grid Curve များနှင့် Perpendicular ဖြစ်ကြသည်။ ထို့ကြောင့် Surface နှင့်လည်း Perpendicular ဖြစ်ကြသည်။

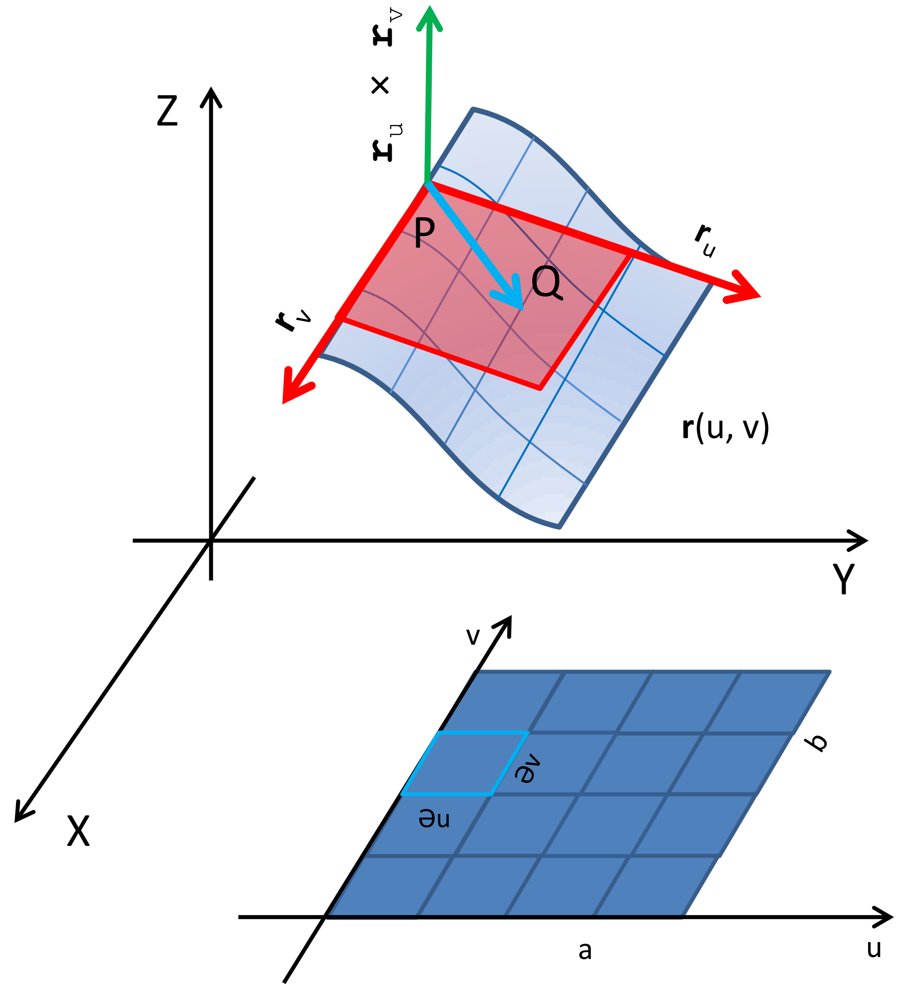


Tangent Plane

- $\mathbf{r}_u$ နှင့် $\mathbf{r}_v$ တို့ကို Cross Product သည် Surface နှင့် Normal ဖြစ်သည့်အတွက်

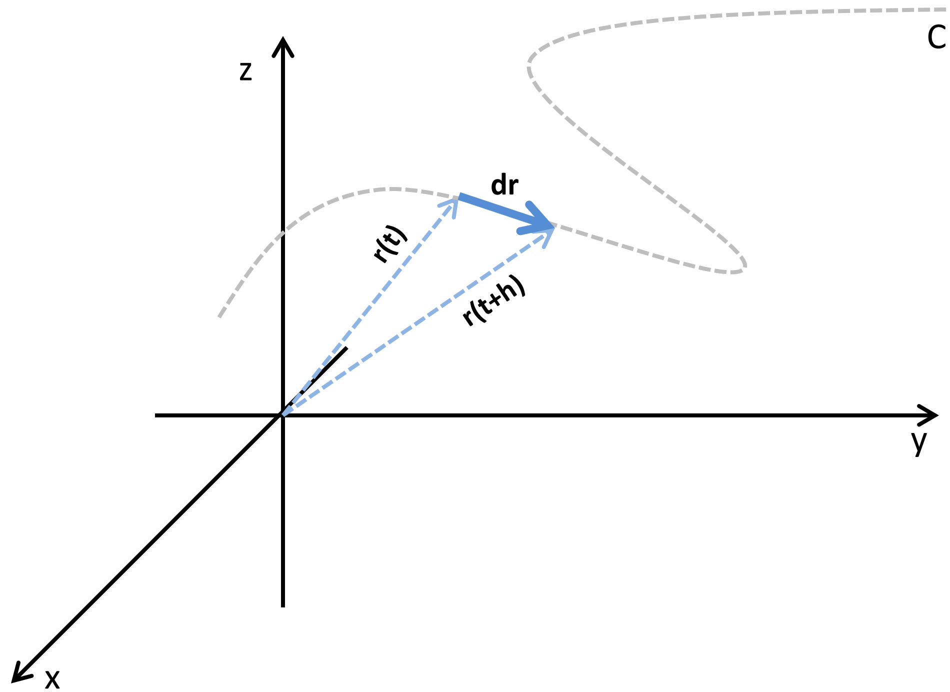
$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- Tangent Plan to any Space Surface ကို လွယ်လွယ်ကူကူ ရှာလို့ ရသွားပါမည်။



Tangent Plane to any surface = $[\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v] \cdot \langle x_1 - a_1, x_2 - a_2, .., z - z_0 \rangle$

Curve Length



- Space Curve တစ်ခုရဲ့ Curve Length သည်

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dr}{dt}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$$

$$|\mathbf{dr}| = |\mathbf{r}'(t)|dt = ds$$

$$\text{Curve Length} = \int_a^b |d\boldsymbol{r}| = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

Surface Area

- Space Surface တစ်ခုရဲ့ Surface Area သည်

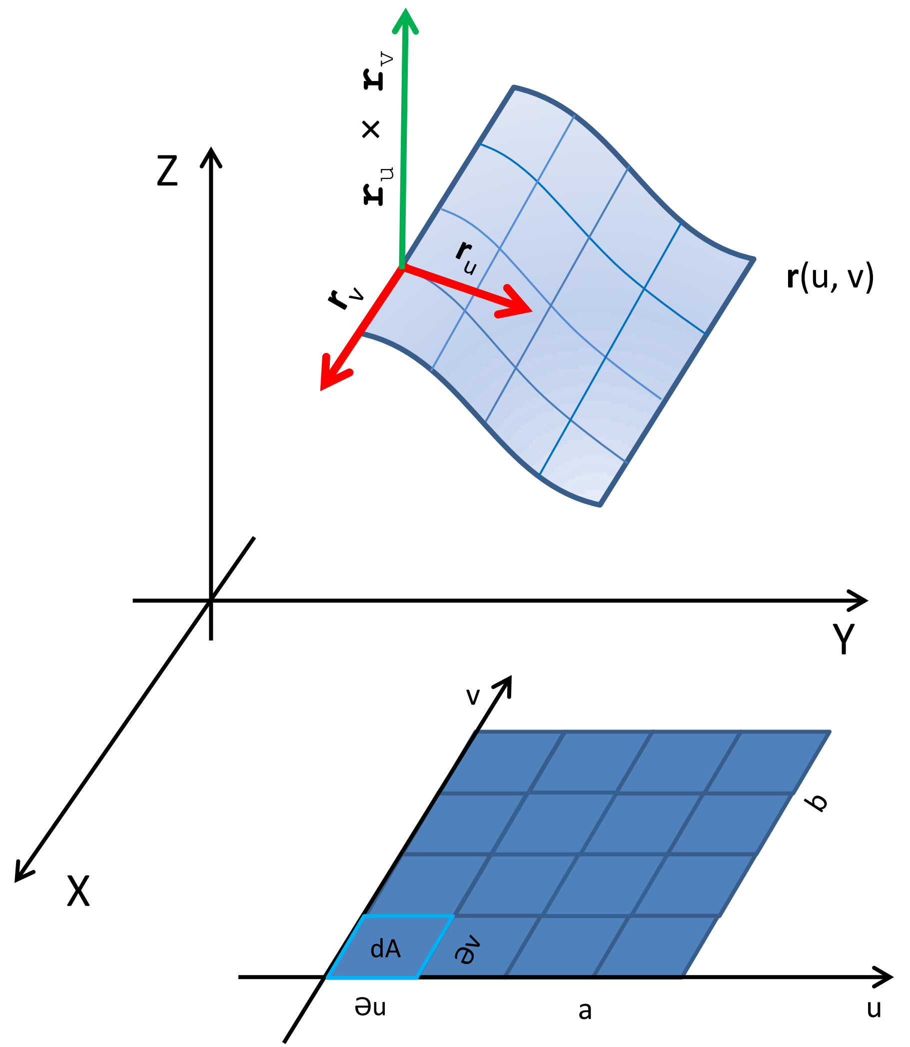
$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial r}{\partial u} \qquad \partial \mathbf{r} = \mathbf{r}_u \, \partial u$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial r}{\partial v} \qquad \partial \mathbf{r} = \mathbf{r}_v \, \partial v$$

$$d\mathbf{S} = \partial \mathbf{r} \times \partial \mathbf{r} = \mathbf{r}_u \, \partial u \times \mathbf{r}_v \, \partial v = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v] \, du \, dv$$

$$\left| d\mathbf{S} \right| = \left| \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \right| du \, dv = dA$$

$$\text{Surface Area} = \int_c^d \int_a^b |d\boldsymbol{S}| = \int_c^d \int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, du dv$$



Vector Field

- ကျွန်တော်တို့သည် အခုအထိ Single Variable Vector Function များနှင့် Multiple Variable Scalar Function များကို ပြောခဲ့ပါသည်။

- ပြီးတော့ ကျွန်တော်တို့ **N** Variable Function with **M** Output Variable ကို ဆွေးနွေးခဲ့ပါသည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် ဒီ Function အမျိုးအစားကို Mapping Function သို့မဟုတ် Projection Function များဟု ခေါ်ကြပါသည်။

- နောက်ဆုံးအနေဖြင့် **N** Variable Function with **N** Output Variable ကို ဆွေးနွေးပါမည်။ ဒီ Function အမျိုးအစားကို Vector Field Function များဟု ခေါ်ကြပါသည်။

Vector Field

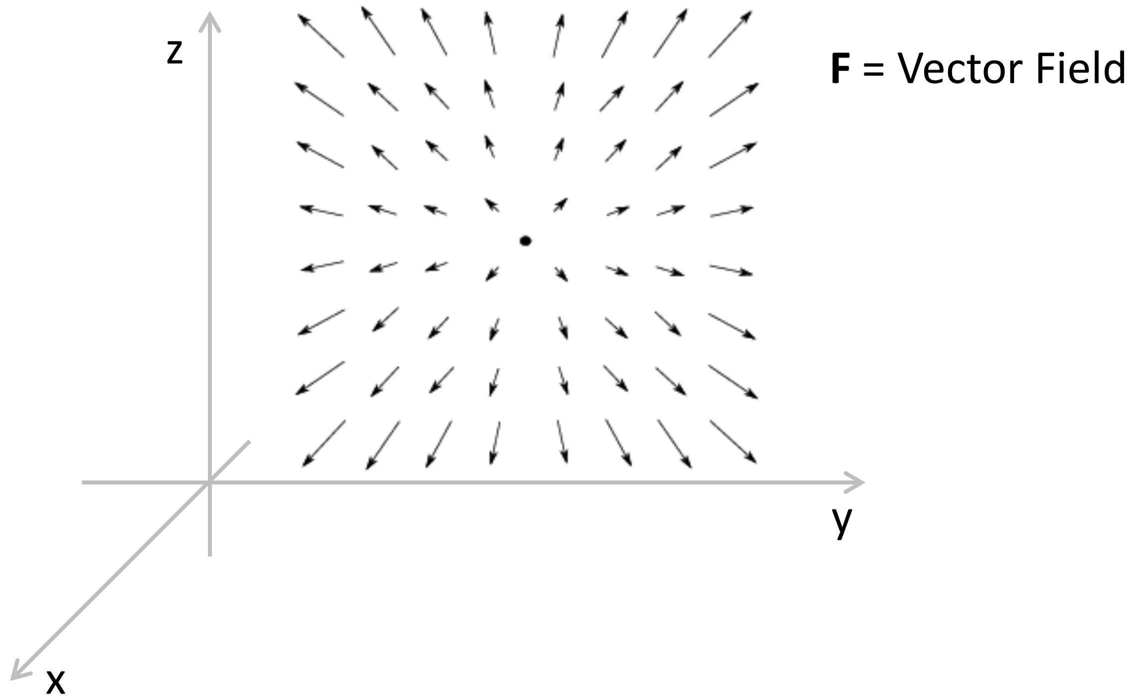
- ကမ္ဘာကြီးက ကမ္ဘာပေါ်ရှိ အရာအားလုံးကို ဗဟိုကို ဦးတည်ပြီး ဆွဲငင်ပါသည်။ ဒါသည် Gravitational Field ကို ဖြစ်စေပါသည်။

- ကမ္ဘာပေါ်တွင် ဟိုမှ ဒီမှ လေများတိုက်ခတ်လျက်ရှိသည်။ လေတိုက်နှုန်းများသည် နေရာပေါ်မူတည်ပြီး ပြောင်းလဲလျက်ရှိပါသည်။ ဒါသည် Turbulence Field ကို ဖြစ်စေပါသည်။

- သမုဒ္ဒရာထဲတွင် လှိုင်းများ၊ ရေစီးကြောင်းများ ဖြစ်ပေါ်လျက်ရှိပါသည်။ နေရာပေါ်မူတည်ပြီး ရေစီးကြောင်းများ ပြောင်းလဲလျက် ရှိပါသည်။ ဒါသည် Torrent Field ကိုဖြစ်စေပါသည်။

- Gravitational Field၊ Turbulence Field၊ Torrent Field အားလုံးသည် Vector Field များဖြစ်ပါသည်။

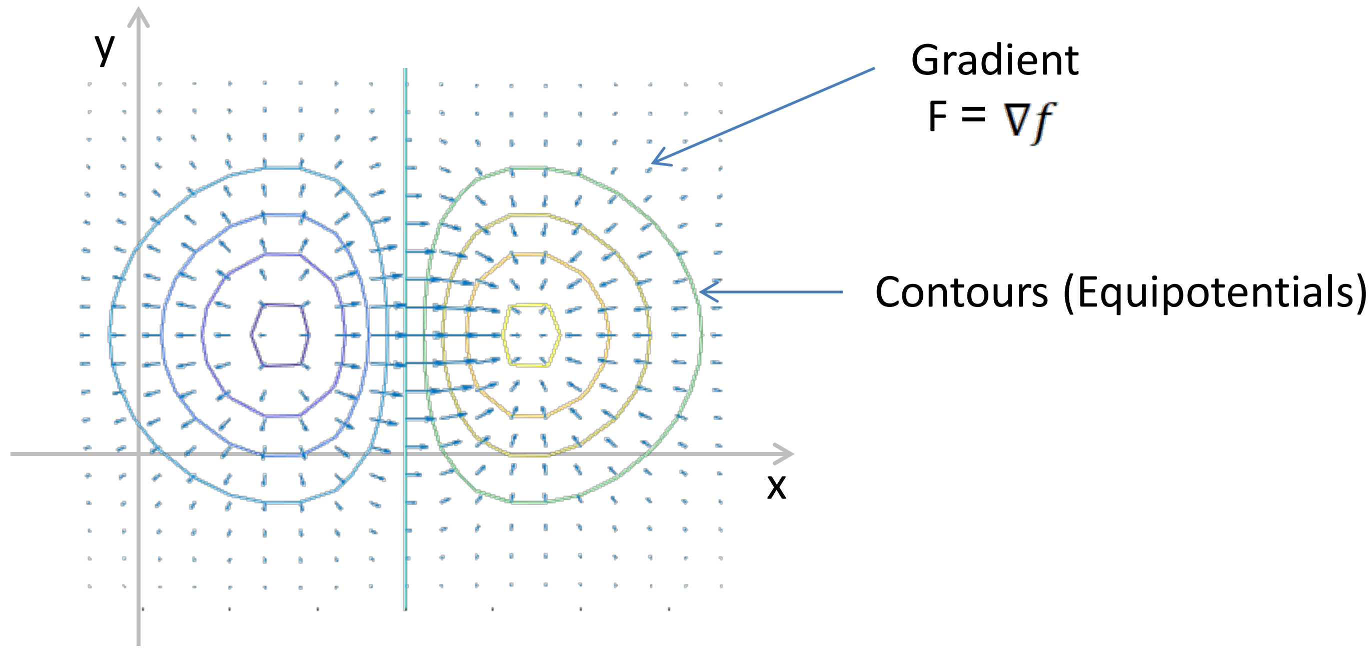
Vector Field



$$\mathbf{Z} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \langle f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \dots,\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle$$

- Vector Field အတွင်းရှိ Point များသည် Vector တစ်ခုကို ကိုယ်စားပြုပါသည်။
- Vector Field Function သည် Position Vector များကို Input အနေဖြင့်ယူပြီး Field Vector များကို Output ထုတ်ပေးပါသည်။

Gradient Field

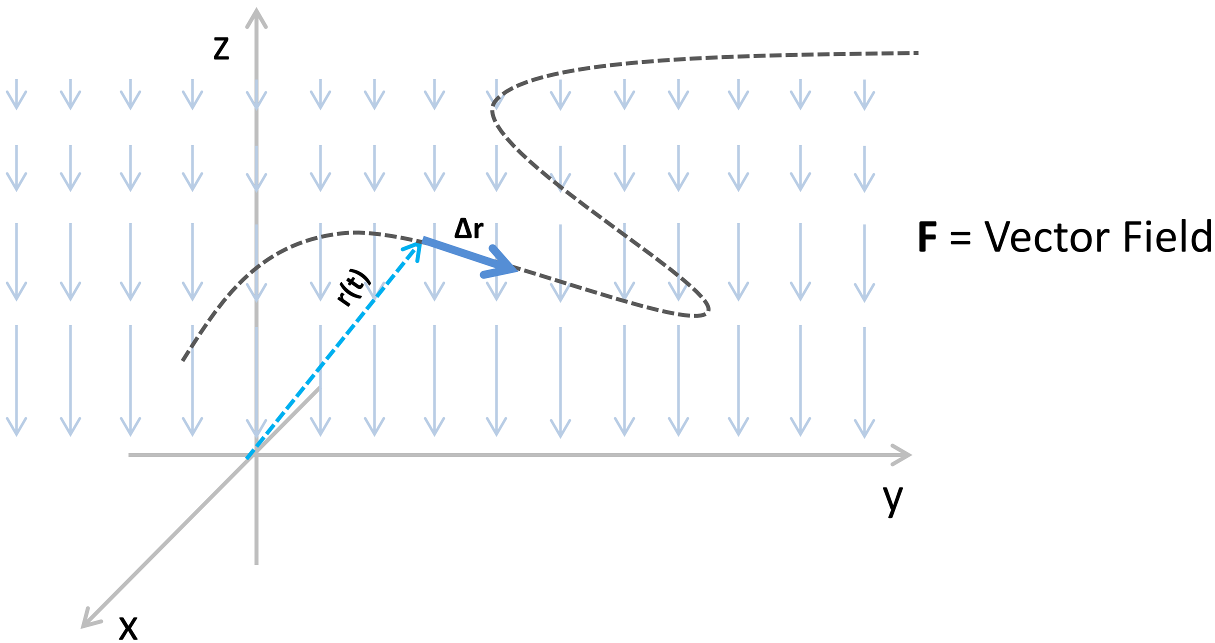


- Vector Field တစ်ခုသည် Gradient Field တစ်ခုလည်း ဖြစ်နိုင်ပါသည်။ Gradient သည် Scalar Function တစ်ခု၏ Spatial Derivative ဖြစ်သည်။ ထို Scalar Function ကို Potential Function ဟုခေါ်သည်။

- Vector Field တစ်ခုသည် Gradient Field တစ်ခုဆိုပါက ထို Vector Field သည် Conservative Field တစ်ခု ဖြစ်သည်။

- Vector Field Gradient Field တစ်ခုဆိုပါက Contours များကို Equipotentials များဟု ခေါ်သည်။

Space Curve in Vector Field



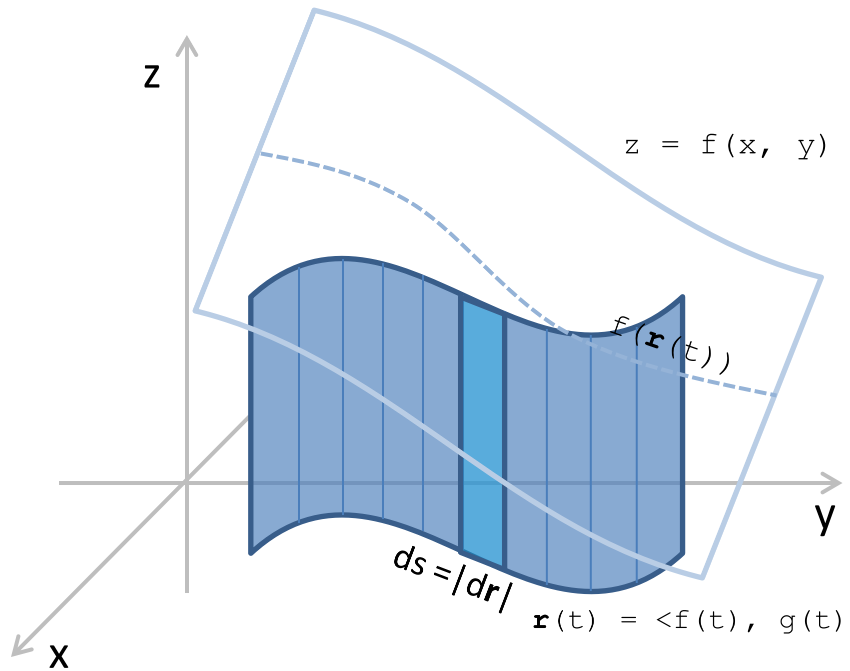
- တကယ်လို့ ကမ္ဘာမြေကြီး ဆွဲငင်အားအတွင်းမှာ လေယာဉ်တစ်စီး ပျံသည်ဆိုပါတော့။
- ဒါသည် Vector Field အတွင်းရှိ Space Curve တစ်ခု ဖြစ်သွားမည်။

Scalar Line Integral

- Integral ကို Area Under a Function f(x) လို့ ကျွန်တော်တို့ define လုပ်ခဲ့ပါသည်။

- z = f(x,y) က Scalar Function တစ်ခု ဖြစ်ပြီး လိုချင်တဲ့ Area က Area between f(x, y) and Space Curve **r**(t) ဆိုပါက ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။

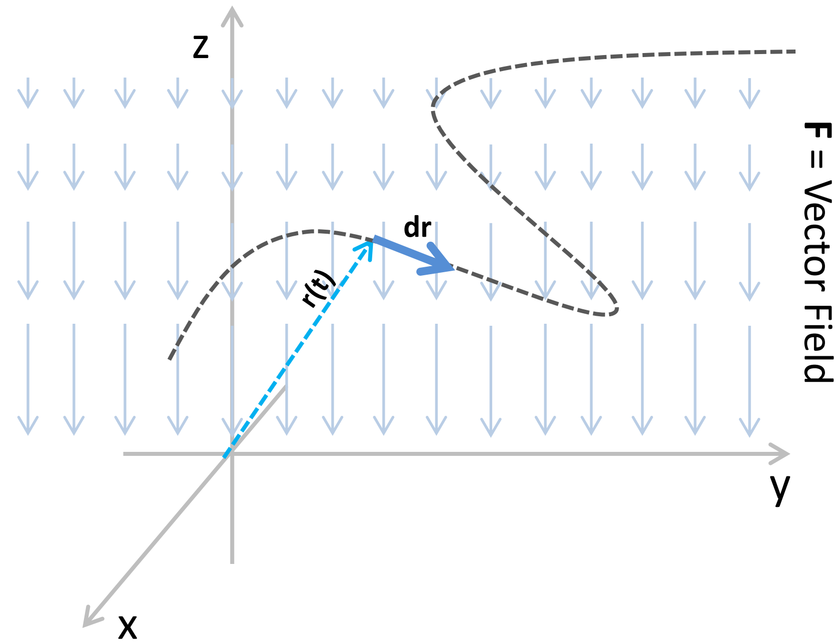
- Area between a **Space Curve** and a **Scalar Function** ကို Scalar Line Integral လို့ ခေါ်ပါသည်။



Scalar Line Integral (N Dimension) = $\int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_3)\,ds$ = $\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt$

Vector Line Integral

- ကျွန်တော်တို့ Space Curve in Vector Field ကို ပြောခဲ့ပါသည်။
- **z** = **F** (x, y, z) က Vector Function တစ်ခု ဖြစ်ပြီး လိုချင်တဲ့ Area က Area between **F** and **r** (t) ဆိုပါက ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။
- Area between a **Space Curve** and a **Vector Field** ကို Vector Line Integral လို့ ခေါ်ပါသည်။



Vector Line Integral (N Dimension) = $\int_a^b \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \ldots, x_3)\,.d\boldsymbol{r} = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)).\boldsymbol{r}'(t)dt$

Scalar and Vector Line Integral

Scalar Line Integral (N Dimension) = $\int_a^b f(x_1, x_2, \ldots, x_3)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$

Vector Line Integral (N Dimension) = $\int_a^b \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \ldots, x_3) \,.\, d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \ldots, x_3) \,.\, \boldsymbol{r}'(t)dt$

$$\int_a^b \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_a^b < \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R} > . < \boldsymbol{x}'(t), \boldsymbol{y}'(t), \boldsymbol{z}'(t) > dt$$

$$= \int_a^b < \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R} > . < d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{z} >$$

$$= \int_a^b Pdx + Qdy + Rdz$$

Fundamental Theorem of Line Integral

$$\int_a^b \nabla f . d\boldsymbol{r} = f\big(\boldsymbol{r}(b)\big) - f(\boldsymbol{r}))$$

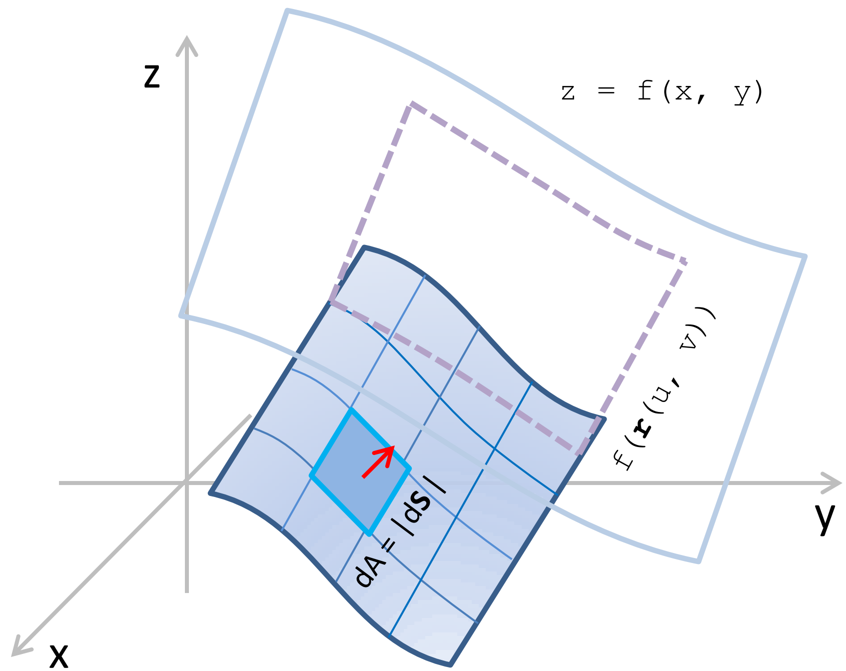
$$\oint \nabla f . d\boldsymbol{r} = 0$$

- တကယ်လို့သာ Vector Field သည် Scalar Function တစ်ခုရဲ Gradient Field သာဆိုပါက ထို Vector Field သည် Conservative ဖြစ်ပြီး Vector Line Integral သည် Path Independent ဖြစ်သည်။

- Conservative Vector Field (Gradient Field) ၏ Close Path (စမှတ်နှင့် ဆုံးမှတ်တူသည်) တစ်ခုရဲ့ Vector Line Integral သည် အမြဲ Zero ဖြစ်သည်။

Scalar Surface Integral

- z = f (x,y) က Scalar Function တစ်ခု ဖြစ်ပြီး လိုချင်တဲ့ Area က Area between f (x, y) and Space Surface **r** (u, v) ဆိုပါက ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။
- Volume between a **Space Surface** and a **Scalar Function** ကို Scalar Surface Integral လို့ ခေါ်ပါသည်။



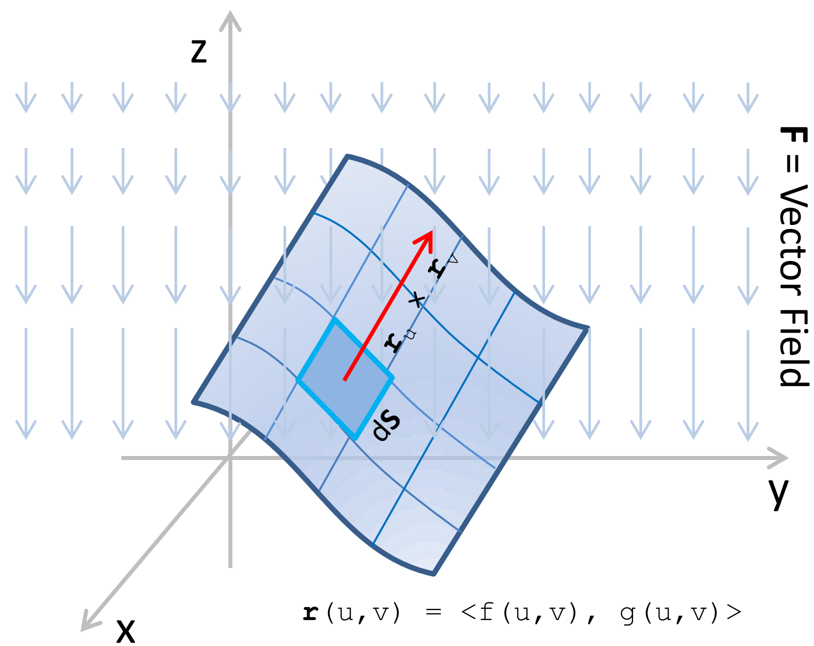
r(u,v) = <f(u,v), g(u,v)>

Scalar Surface Integral = $\iint f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)dA$ = $\iint f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|dudv$

Vector Surface Integral

- **z** = **F**(x, y, z) က Vector Field တစ်ခု ဖြစ်ပြီး လိုချင်တဲ့ Area က Area between f(x, y) and Space Surface **r**(u, v) ဆိုပါက ဘယ်လို ဖြစ်မလဲ။

- Volume between a **Space Surface** and a **Vector Field** ကို Vector Surface Integral လို့ ခေါ်ပါသည်။

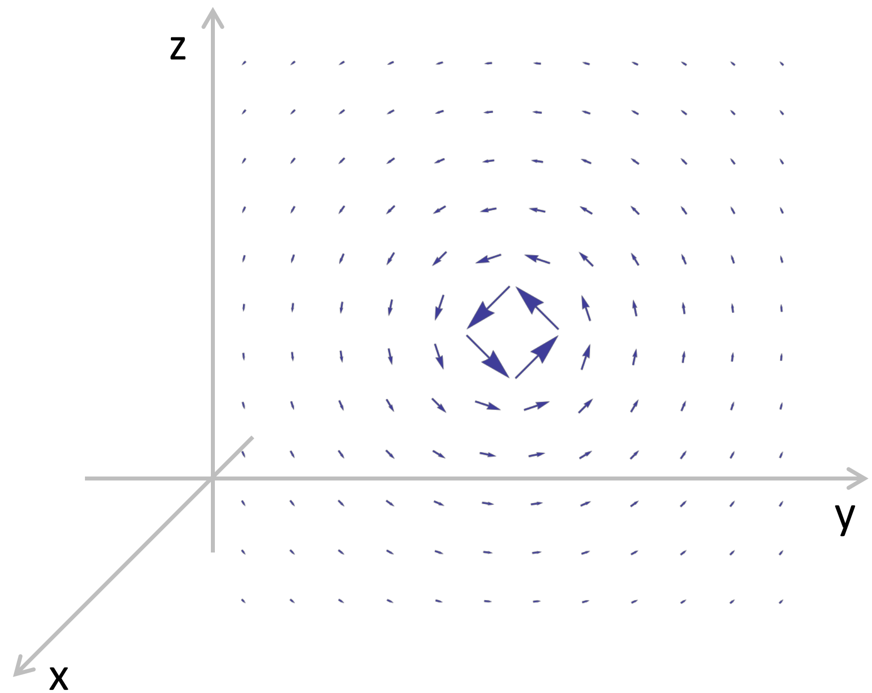


Vector Surface Integral = $\iint \boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \, . \, d\boldsymbol{S} = \iint f(\boldsymbol{r}(u,v))[\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v] du dv$

Curl

$$\text{Curl} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$



- Vector Field တစ်ခုရဲ့ Rotation ကို တိုင်းတာခြင်း ဖြစ်သည်။
- ဝဲ (Whirlpool) သို့မဟုတ် မုန်တိုင်း (Storm) တစ်ခုလို့ မြင်ကြည့်ပါ။
- Anticlockwise လည်ပါက Positive Curl ဖြစ်ပြီး Curl Vector သည် Axis of Rotation နှင့် Perpendicular ဖြစ်သည်။ (Right Thumb Rule)
- Curl Vector of Conservative Vector Field သည် အမြဲ Zero ဖြစ်သည်။

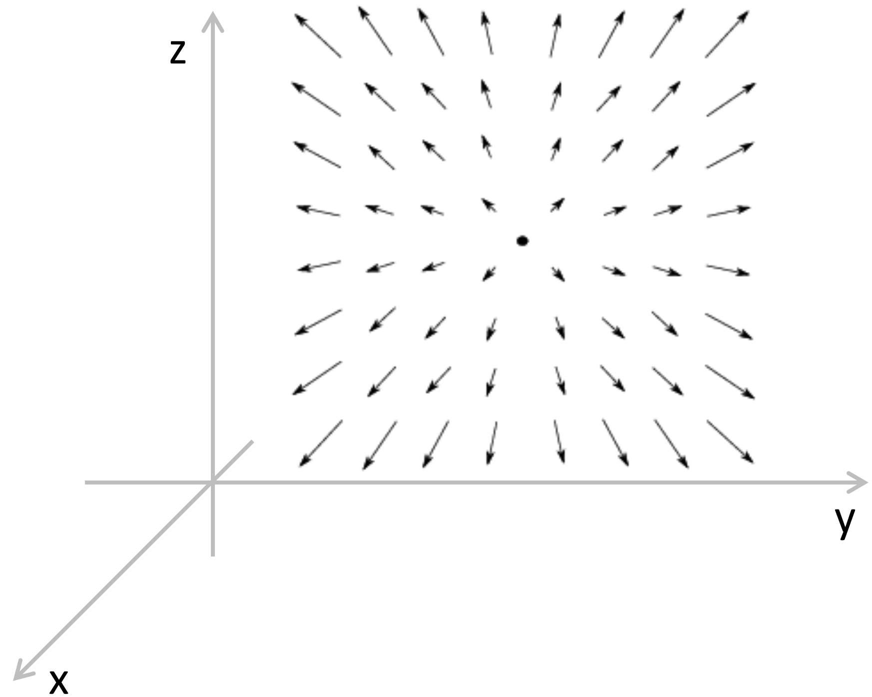
$$\nabla \times \nabla f = 0$$

Divergence

Divergence = $\nabla . \mathbf{F}$

$$\nabla . \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R$$

- Vector Field တစ်ခုရဲ့ Flux ကို တိုင်းတာခြင်း ဖြစ်သည်။
- ပေါက်ကွဲခြင်း (Explosion) ၊ အလင်းဖြာခြင်း (Radiation) ကို မြင်ကြည့်ပါ။
- Divergence သည် Scalar ဖြစ်ပြီး Positive Divergence က အပြင်ပေါက်ထွက်ပြီး Negative Divergence က အတွင်းသို့ ဝင်မည်ဖြစ်သည်။
- Curl Vector မှာ Divergence မရှိပါ။



$$\nabla . [\nabla \times f] = 0$$

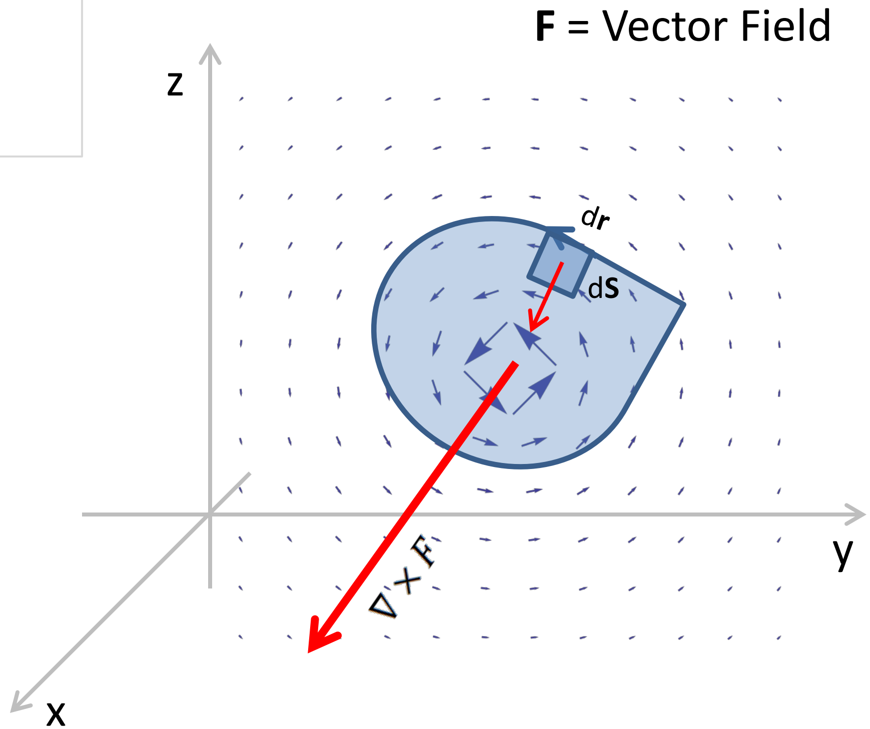
Green's Theorem

$$\oint \mathbf{F}.\, d\boldsymbol{r} = \iint [\nabla \times \boldsymbol{F}].\, d\boldsymbol{S}$$

- Vector Field အတွင်းရှိ Close Loop ရဲ Line Integral in **Tangential Direction** သည် ထို Close Loop ကြောင့် ဖြစ်ပေါ်လာသော **Plane** (Bounded Region by Close Loop) နှင့် ထို Vector Field ၏ **Curl** တို့၏ Surface Integral နှင့် အတူတူ ဖြစ်သည်။

- တစ်နည်းအားဖြင့် Green's Theorem သည် Line Integral နှင့် Surface Integral တို့၏ ဆက်စပ်မှုကို ဖော်ပြသော Theorem တစ်ခု ဖြစ်သည်။

- ပထမ Green's Theorem က Curl ပေါ်အခြေခံပါသည်။



$\mathbf{dr} = \mathbf{r}'(t)\,dt$

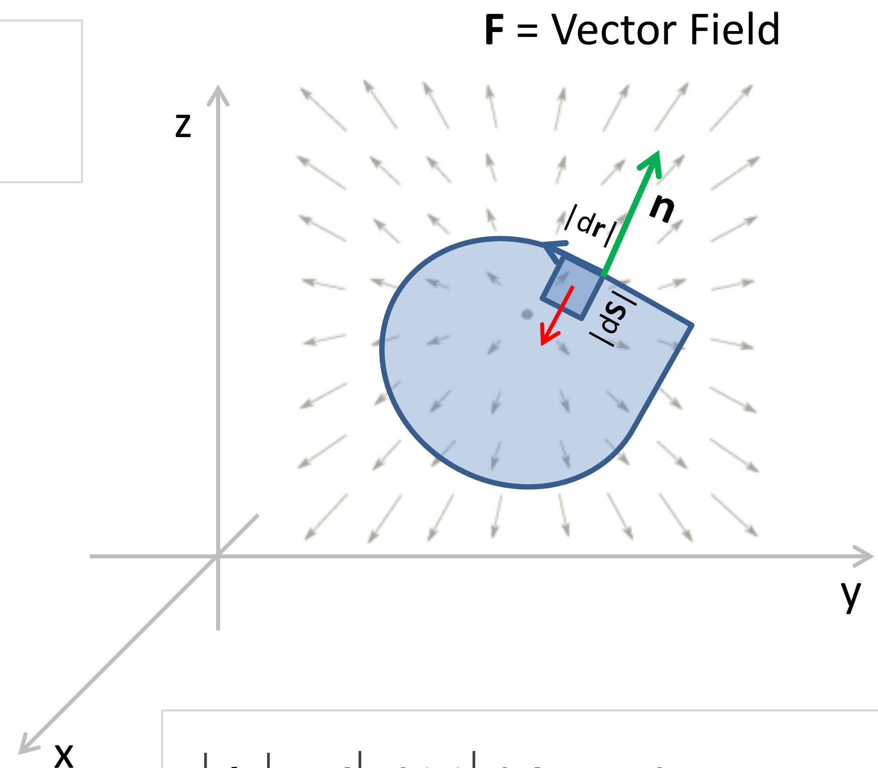
$d\mathbf{S} = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]\,du\,dv$

Green's Theorem

$$\oint \mathbf{F} \,.\, |\mathbf{dr}|\mathbf{n} = \iint [\nabla \,.\, \mathbf{F}] \,|\mathrm{d}\mathbf{S}|$$

- Vector Field အတွင်းရှိ Close Loop ရဲ Line Integral in **Normal Direction** သည် ထို Close Loop ကြောင့် ဖြစ်ပေါ်လာသော **Plane** (Bounded Region by Close Loop) နှင့် ထို Vector Field ၏ **Divergence** တို့၏ Surface Integral နှင့် အတူတူ ဖြစ်သည်။

- ဒုတိယ Green's Theorem က Divergence ပေါ်အခြေခံပါသည်။



$$|\mathbf{dr}|\mathbf{n} = [|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{dt}]\,\mathbf{n} = \mathbf{n}\mathrm{ds}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}$$

$$|\mathrm{d}\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv} = \mathrm{dA}$$

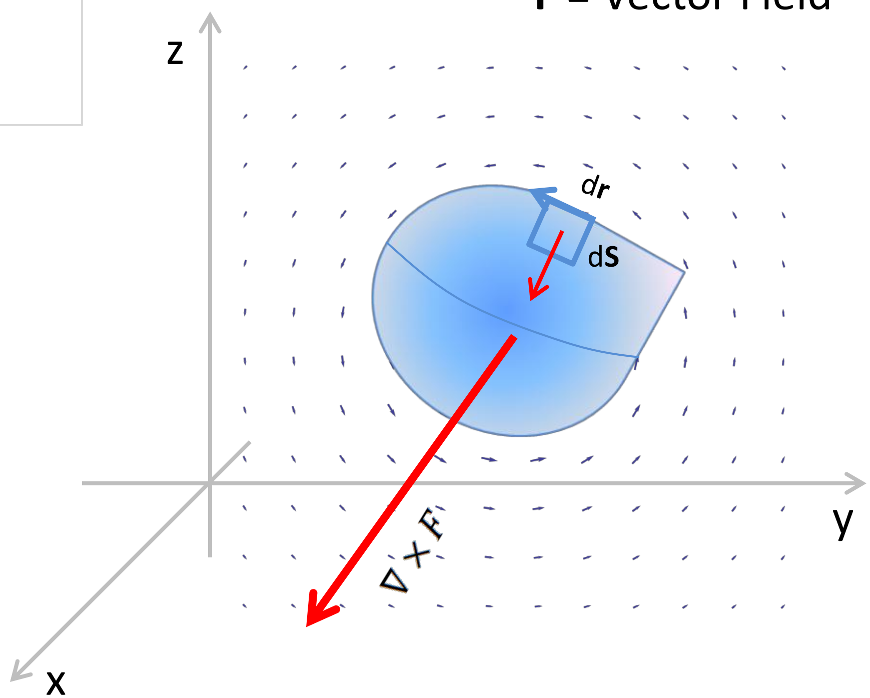
Stokes' Theorem

$$\oint \mathbf{F}.\, d\boldsymbol{r} = \iint [\nabla \times \boldsymbol{F}].\, d\boldsymbol{S}$$

- Strokes' Theorem သည် ပထမ Green's Theorem နှင့် အတူတူဖြစ်သည်။ သို့သော် Close Loop ကြောင့် ဖြစ်လာသော Region သည် Plane မဟုတ်တော့ဘဲ Surface ဖြစ်သွားသည်။

- Vector Field အတွင်းရှိ Close Loop ရဲ Line Integral in **Tangential Direction** သည် ထို Close Loop ကြောင့် ဖြစ်ပေါ်လာသော **Surface** နှင့် ထို Vector Field ၏ **Curl** တို့၏ Surface Integral နှင့် အတူတူ ဖြစ်သည်။

F = Vector Field



$\mathbf{dr} = \mathbf{r}'(t)\,dt$

$d\mathbf{S} = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]\, du\, dv$

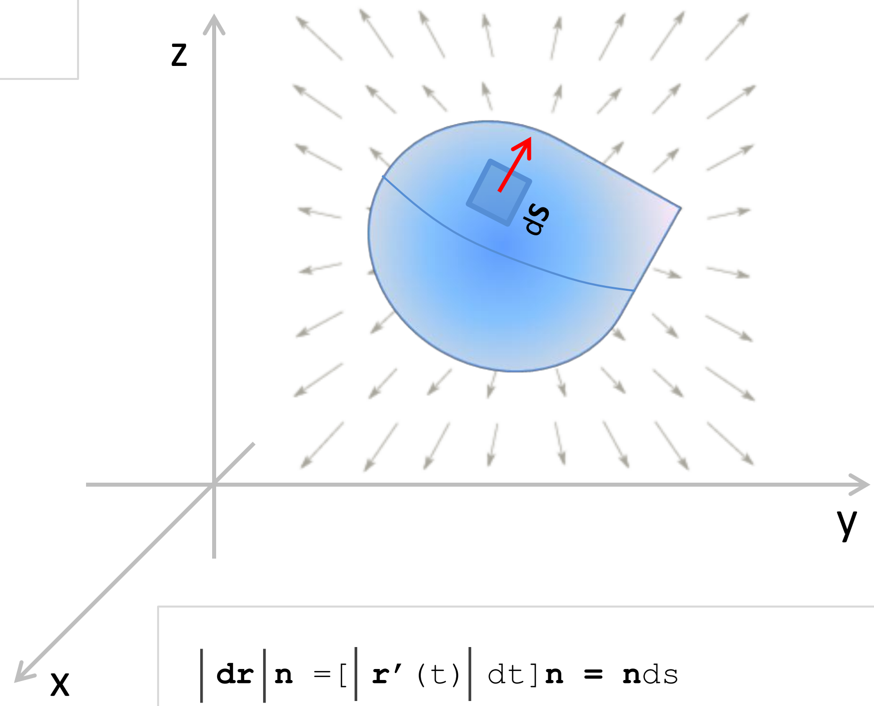
Gauss's (Divergence) Theorem

$$\iint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint [\nabla \cdot \mathbf{F}]\, dV$$

- Vector Field အတွင်းရှိ Close Surface ရဲ့ Surface Integral သည် ထို Close Surface ကြောင့် ဖြစ်ပေါ်လာသော **Region** (Bounded Region by Close Loop) နှင့် ထို Vector Field ၏ **Divergence** တို့၏ Volume Integral (Triple Integral) နှင့် အတူတူ ဖြစ်သည်။

- တစ်နည်းအားဖြင့် Divergence Theorem သည် Surface Integral နှင့် Volume (Triple) Integral တို့၏ ဆက်စပ်မှုကို ဖော်ပြသော Theorem တစ်ခု ဖြစ်သည်။

F = Vector Field



$$|d\mathbf{r}|\mathbf{n} = [|\mathbf{r}'(t)|\, dt]\mathbf{n} = \mathbf{n}\, ds$$

$$d\mathbf{S} = [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v]\, du\, dv$$

$$|d\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv = dA$$

Summary

- ဒါဆိုရင်တော့ Advanced Calculus က လုံလောက် သလောက်ရှိသွားပါပြီ။
- Calculus သည် Deterministic Causality နှင့် Deterministic Change ဖြစ်နိုင်သော နေရာတိုင်းမှာ မရှိမဖြစ် သုံးရပါသည်။
- ထို့ကြောင့် Classical Physics (without Quantum Physics) သည် Calculus အပေါ်အခြေခံထားသည် ဆိုလျှင် မမှားပါ။