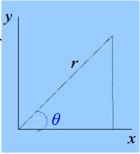
湖南科技大学课程教案
（章节、专题首页）

授课教师：王志喜　　　　　　职称：副教授　　　　　单位：计算机科学与工程学院

课 程 名 称	计算机图形学，数字图像处理，计算机图形图像技术
章节、专题	必备的数学基础
教学目标及基本要求	熟悉一些必备的数学基础知识。
教 学 重 点	
教 学 难 点	
教学内容与时间分配	（1）极坐标（0.2课时） （2）向量（0.2课时） （3）矩阵和行列式（0.2课时） （4）三角函数（0.2课时） （5）线性插值（0.2课时） 共计1课时。
习　　题	



附录C　必备的数学基础

本附录简要复习学习计算机图形学和数字图像处理必备的部分数学基础知识。

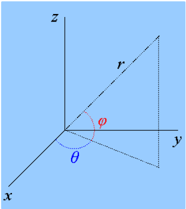
C.1　极坐标

（1）极坐标转换为直角坐标的计算公式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

（2）球面坐标转换为直角坐标的计算公式为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases}$$



C.2 向量

（1）向量长度的计算公式为

$$|\vec{u}|=|(u_1,u_2,u_3)|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

（2）向量单位化的计算公式为

$$\vec{u}/|\vec{u}|=(u_1,u_2,u_3)\Big/\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

（3）2个向量的和为

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$$

（4）2个向量的差为

$$\vec{u}-\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)-(v_1,v_2,v_3)=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$$

（5）2个向量的内积（点积）为

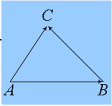
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\cdot(v_1,v_2,v_3)=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

（6）2个向量的外积（叉积）为

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$$
$$=\vec{i}\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}u_3&u_1\\v_3&v_1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}$$
$$=(u_2v_3-v_2u_3,u_3v_1-v_3u_1,u_1v_2-v_1u_2)$$

（7）一组等长向量 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_n}$ 的平均单位向量为

$$\vec{v}=\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\ldots+\overrightarrow{v_n}\right)\Big/\left|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\ldots+\overrightarrow{v_n}\right|$$



（8）三角形 ABC 的法向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \\ &= (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \times (x_c - x_b, y_c - y_b, z_c - z_b)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\ &= (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \times (x_c - x_a, y_c - y_a, z_c - z_a)\end{aligned}$$

C.3 矩阵和行列式

以3阶方阵为例说明。

（1）2个矩阵的和为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

（2）2个矩阵的差为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{pmatrix}$$

（3）2个矩阵的积为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

（4）矩阵的转置为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

（5）逆矩阵的计算方法为（举例说明）

因为

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(2)\rightleftharpoons(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\3&2&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2)-(1)\times 3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-1&-2&-3&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[(2)+(3)\times 2]{(1)-(3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-1&0\\0&-1&0&-3&2&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(1)+(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&-1&0&-3&2&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{(2)\times(-1)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&3&-2&-1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

所以

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\3&-2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

（6）矩阵行列式的计算方法为（举例说明）

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times(1\times2-1\times1)+2\times(1\times1-1\times2)+3\times(1\times1-1\times1)$$

$$=1-2+0=-1$$

C.4 三角函数

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha}e^{i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

C.5　线性插值

【问题】设 $y=f(x)$ 是一个线性函数。请根据给定的 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 写出该线性函数的表达式。

【解答】由

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

得

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)+y_0$$

或

$$y=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x+\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}$$