湖南科技大学课程教案
（章节、专题首页）

授课教师：王志喜　　　　职称：副教授　　　　单位：计算机科学与工程学院

课 程 名 称	计算机图形图像技术
章节、专题	二维图形变换
教学目标及基本要求	（1）掌握二维基本变换的原理。 （2）掌握二维变换的复合方法以及二维坐标变换。 （3）掌握二维对象的观察流程及二维对象的裁剪。
教 学 重 点	二维基本变换，二维变换的复合，二维坐标变换，规范化变换，线段的裁剪，多边形的裁剪
教 学 难 点	二维变换的复合，Cohen-Sutherland算法，Sutherland-Hodgeman算法
教学内容与时间分配	（1）二维基本变换以及反射与旋转（1.2课时） （2）二维变换的复合（1.2课时） （3）二维观察流程及相关变换（0.7课时） （4）二维裁剪（0.9课时） 共计4课时。
习　　　题	第4.6.1节（基础知识题）。

第4章　二维图形变换

4.1　二维基本变换

4.1.1　三种基本变换

二维的平移、旋转和缩放是三种基本的二维变换。其他变换通常可以通过这三种基本变换复合得到。

1. 平移

（1）含义。将物体沿直线路径从一个位置移到另一个位置。如图4-1所示。

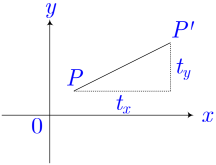


图4-1　平移

（2）变换方程。由图4-1容易看出，该变换的变换方程为

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

（3）矩阵形式。将变换方程改写成矩阵形式，可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

2. 旋转

（1）含义。将物体沿 xy 平面内的圆弧路径重定位。如图4-2所示。

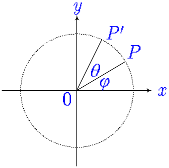


图4-2 旋转

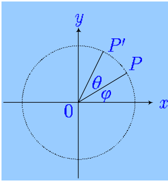
（2）变换方程。规定基准点（旋转中心）为原点。

在极坐标系中，点的原始坐标为 $(x,y)=(r\cos\phi, r\sin\phi)$，变换后的坐标为

$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi+\theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' = r\sin(\phi+\theta) = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

所以变换方程为

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



（3）矩阵形式。将变换方程改写成矩阵形式，可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha}e^{i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

3. 缩放

（1）含义。对 x 和 y 坐标分别乘以一个系数。如图4-3所示。

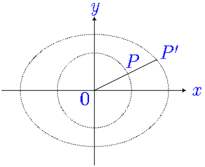


图4-3　缩放

（2）变换方程。根据含义直接可得

$$\begin{cases} x' = x \times s_x \\ y' = y \times s_y \end{cases}$$

（3）矩阵形式。将变换方程改写成矩阵形式，可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4. 物体的变换

- 一般物体：对物体各点变换。
- 多边形表示的物体：变换各多边形顶点。

4.1.2 矩阵表示和齐次坐标

1. 齐次坐标

- 引入目的。将任何二维变换都表示为矩阵乘法。
- 表示方法。用三元组 (x_h, y_h, h) 表示坐标 (x, y)。其中， $x = x_h / h$ ， $y = y_h / h$ 。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. 三种基本变换的矩阵表示

（1）平移。用 $T(t_x, t_y)$ 表示。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

（2）旋转。用 $R(\theta)$ 表示。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

（3）缩放。用 $S(s_x, s_y)$ 表示。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x \times s_x \\ y' = y \times s_y \end{cases}$$

4.1.3 逆变换

1. 平移

如图4-4所示。易知 $T^{-1}(t_x, t_y) = T(-t_x, -t_y)$ 。变换方程为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

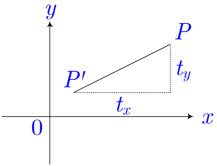


图4-4 平移的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 旋转

如图4-5所示。易知 $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)=R^{T}(\theta)$ 。变换方程为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

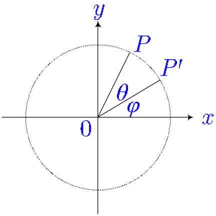


图4-5　旋转的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 缩放

如图4-6所示。易知 $S^{-1}(s_x, s_y) = S(1/s_x, 1/s_y)$ 。变换方程为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

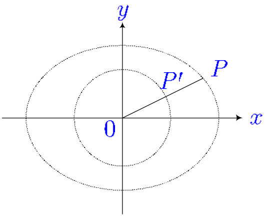


图4-6　缩放的逆

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 二维反射与旋转

一些二维变换虽然不是二维基本变换，但是因为这些变换形式简单，又很常用，我们可以将它们当做扩充的二维基本变换。这里只介绍最常用的反射和旋转。

4.2.1 反射

1. 对x轴反射

如图4-7所示。相当于 $S(1,-1)$ 。变换方程为

$$y' = -y$$

变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

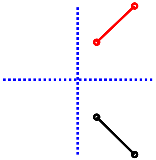


图4-7 对x轴反射

2. 对y轴反射

如图4-8所示。相当于 $S(-1,1)$ 。变换方程为

$$x' = -x$$

变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

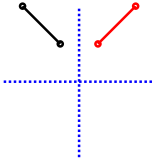


图4-8　对y轴反射

3. 对原点反射

如图4-9所示。相当于 $S(-1,-1)$ 或 $R(180°)$ 。变换方程为

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

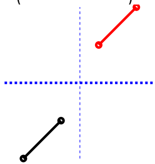


图4-9　对原点反射

4. 对$y=x$反射

如图4-10所示。变换方程为

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

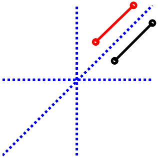


图4-10　对$y=x$反射

5. 对*y*=-*x*反射

如图4-11所示。变换方程为

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

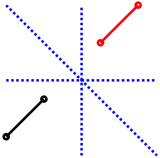


图4-11　对*y*=-*x*反射

4.2.2　旋转

1. 正交的单位向量组变换到坐标轴方向

将正交的单位向量组 $\vec{u}=(u_1,u_2)$ 和 $\vec{v}=(v_1,v_2)$ 分别变换成沿 x 轴和 y 轴的单位向量（如图4-12所示）。求该变换的变换矩阵。

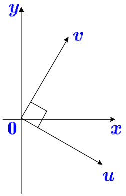


图4-12　正交的单位向量组

2. 变换矩阵的构造

因为 $\vec{u}=(u_1,u_2)$ 和 $\vec{v}=(v_1,v_2)$ 是正交的单位向量组，所以 $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1$，$\vec{u}\bullet\vec{v}=\vec{v}\bullet\vec{u}=0$。考虑变换矩阵

$$R=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1u_1+u_2u_2 \\ v_1u_1+v_2u_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\vec{u}|^2 \\ \vec{v}\bullet\vec{u} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (u_1,u_2)\Rightarrow x$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1v_1+u_2v_2 \\ v_1v_1+v_2v_2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{u}\bullet\vec{v} \\ |\vec{v}|^2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (v_1,v_2)\Rightarrow y$$

所以该变换的变换矩阵就是 R。

3. 旋转矩阵的特性

当 $u_2v_1 < 0$ 时，上述变换矩阵 R 实际上代表一个旋转变换，称为旋转矩阵。

（1）逆变换。$R^{-1} = R^T$。这是因为

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x \Rightarrow (u_1, u_2)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y \Rightarrow (v_1, v_2)$$

实际上，旋转变换的逆变换也是一个旋转变换（证明略）。

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）正交性。

行向量 $\vec{u}=(u_1, u_2)$ 和 $\vec{v}=(v_1, v_2)$ 是正交的单位向量组。

列向量 $\vec{u}'=(u_1, v_1)$ 和 $\vec{v}'=(u_2, v_2)$ 也是正交的单位向量组。因为由 $R^{-1}=R^T$ 可知 $R^T \times R = I$，即

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1^2+v_1^2 & u_1u_2+v_1v_2 & 0 \\ u_2u_1+v_2v_1 & u_2^2+v_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$u_1^2+v_1^2=u_2^2+v_2^2=1\,,\quad u_1u_2+v_1v_2=0$$

即

$$|\vec{u}'| = |\vec{v}'| = 1\,,\quad \vec{u}' \bullet \vec{v}' = 0$$

$$\left(\begin{array}{c:c:c} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

4.2.3 3种变换矩阵的对比

平移、旋转、缩放的对比。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3 二维变换的复合

这里首先说明变换复合的方法，然后说明变换复合的必要性。

4.3.1 变换复合的基本方法

设对位置 P 依次进行变换 M_1 和 M_2，则变换以后的位置 P' 可以使用下列公式计算。

$$P' = M_2 \times (M_1 \times P) = (M_2 \times M_1) \times P = M \times P$$

由此可知，变换复合实际上就是计算各变换矩阵的乘积。

后续小节首先观察同种变换复合的一些性质，然后构造几种比较复杂又很常用的二维图形变换。

4.3.2 同种变换的复合

包括同种变换的复合以及一致缩放与旋转的复合。

1. 连续旋转

下面证明，两个连续的旋转变换 $R(\theta_2)$ 和 $R(\theta_1)$ 在复合时满足相加性，即 $R(\theta_1)\times R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2)$。

$$
\begin{aligned}
R(\theta_1)\times R(\theta_2) &= \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2 & 0\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= R(\theta_1+\theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}1 & 0 & t_x\\ 0 & 1 & t_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\quad
\begin{pmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

2. 连续平移和连续缩放

使用与连续旋转同样的办法可以证明，两个连续的平移变换 $T(u_x, u_y)$ 和 $T(t_x, t_y)$ 在复合时满足满足相加性，即 $T(t_x, t_y) \times T(u_x, u_y) = T(t_x + u_x, t_y + u_y)$ 。

同样，也可以证明两个连续的缩放变换 $S(u_x, u_y)$ 和 $S(s_x, s_y)$ 在复合时满足相乘性，即 $S(s_x, s_y) \times S(u_x, u_y) = S(s_x u_x, s_y u_y)$ 。

3. 交换性

由

$$
\begin{aligned}
&T(t_x, t_y) \times T(u_x, u_y) = T(t_x + u_x, t_y + u_y) = T(u_x, u_y) \times T(t_x, t_y) \\
&R(\theta_1) \times R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2) \times R(\theta_1) \\
&S(s_x, s_y) \times S(u_x, u_y) = S(s_x u_x, s_y u_y) = S(u_x, u_y) \times S(s_x, s_y)
\end{aligned}
$$

可知，两个连续的同种变换在复合时可以交换变换的顺序，即两个连续的同种变换在复合时满足交换性。

4. 一致缩放与旋转的复合

一致缩放是缩放系数为 (s,s) 的缩放变换。

（1）先缩放后旋转。

$$R(\theta)\times S(s,s)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\cos\theta & -s\sin\theta & 0\\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（2）先旋转后缩放。

$$S(s,s)\times R(\theta)=\begin{pmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\cos\theta & -s\sin\theta & 0\\ s\sin\theta & s\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由此可知，一致缩放与旋转在复合时可以交换缩放与旋转的顺序。

4.3.3 几种复杂变换的构造

1. 通用基准点旋转

【问题】如图4-13所示。已知旋转角为 θ，基准点位置为 $P_r(x_r, y_r)$，请构造该旋转变换的变换矩阵。

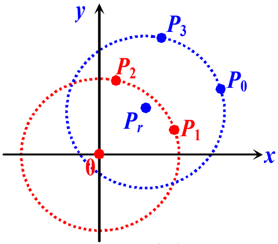
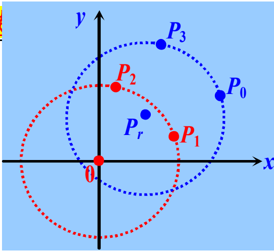


图4-13 通用基准点旋转



【变换构造】

（1）使基准点与原点重合：$T_1 = T(-x_r, -y_r)$

$$P_1 = T_1 \times P_0$$

（2）绕原点旋转：$R = R(\theta)$

$$P_2 = R \times P_1$$

（3）使基准点回到原处：$T_2 = T(x_r, y_r)$

$$P_3 = T_2 \times P_2$$

由 $P_3 = M \times P_0 = T_2 \times R \times T_1 \times P_0$ 可知，完整变换为

$$
\begin{aligned}
M &= T_2 R T_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta) + y_r \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_r \sin\theta + y_r(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. 通用固定点缩放♫

【问题】已知缩放系数为 s_x 和 s_y，固定点（缩放中心）位置为 $P_f(x_f, y_f)$，请构造该缩放变换的变换矩阵。

【变换的构造】

（1）使固定点与原点重合：$T_1 = T(-x_f, -y_f)$。

（2）以原点为固定点缩放：$S = S(s_x, s_y)$。

（3）使固定点回到原处：$T_2 = T(x_f, y_f)$。

完整变换为

$$
\begin{aligned}
M &= T_2 S T_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s_x & 0 & x_f(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. 通用定向缩放

【问题】在如图4-14所示的方向上，用 s_1 和 s_2 作为缩放系数，请构造完成这种缩放的变换矩阵。

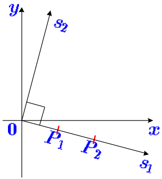
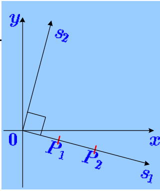


图4-14　定向缩放



【变换构造】

（1）使 s_1 和 s_2 方向与坐标轴重合：R_1。

将 $\overline{P_1P_2}$ 单位化，得 $\vec{u}=\overline{P_1P_2}/|\overline{P_1P_2}|=(u_1,u_2)$。

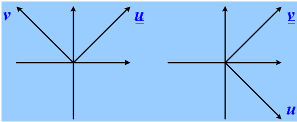
令 $\vec{v}=(-u_2,u_1)$，从而

$$R_1=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（2）缩放：$S=S(s_x,s_y)$。

（3）使 s_1 和 s_2 的方向回到原方向：$R_2=R_1^{-1}$。

完整变换为



$$R_1 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = S(s_x, s_y)$$

$$R_2 = R_1^{-1}$$

$$\begin{aligned} M &= R_2 S R_1 \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & 0 \\ u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1 u_1^2 + s_2 u_2^2 & u_1 u_2 (s_1 - s_2) & 0 \\ u_1 u_2 (s_1 - s_2) & s_1 u_2^2 + s_2 u_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. 含缩放的旋转变换

【问题】已知旋转中心和缩放中心均为 (x_0, y_0)，旋转角度为 θ，缩放系数为 (s, s)（一致缩放），请构造该带缩放的旋转变换的变换矩阵。

【注】OpenCV中的C函数cv2DRotationMatrix()和C++函数getRotationMatrix2D()就是用来计算这个变换矩阵的。

【变换的构造】

（1）使旋转中心与原点重合：$T_1 = T(-x_0, -y_0)$。

（2）以原点为固定点缩放：$S = S(s, s)$。

（3）以原点为旋转中心旋转：$R = R(\theta)$。

（4）使固定点回到原处：$T_2 = T(x_0, y_0)$。

完整变换为

$$
\begin{aligned}
M &= T_2 R S T_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & x_0(1-s\cos\theta)+y_0 s\sin\theta \\ s\sin\theta & s\cos\theta & -x_0 s\sin\theta + y_0(1-s\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

【注】实际上，旋转与一致缩放（$s_x = s_y$）可交换（证明留作练习），所以这里的步骤（2）和步骤（3）可以交换顺序。

4.3.4 二维坐标变换

1. 问题

如图4-15所示，新坐标系的原点为 (x_0, y_0)，新坐标系正 x 轴的单位向量为 $\vec{u}=(u_1, u_2)$，正 y 轴的单位向量为 $\vec{v}=(v_1, v_1)$，请构造从旧坐标系到新坐标系的变换。

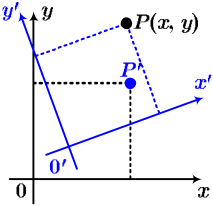


图4-15　二维坐标系变换

2. 变换矩阵的构造

（1）使新坐标系的原点与旧坐标系的原点重合：

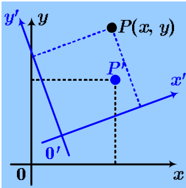
$$T = T(-x_0, -y_0)$$

（2）使新坐标系的 x 轴与旧坐标系的 x 轴重合： R 。

这是一个旋转变换，将正交的单位向量组 $\vec{u} = (u_1, u_2)$ 和 $\vec{v} = (v_1, v_2)$ 分别变换成沿 x 轴和 y 轴的单位向量。

$$R = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

完整变换为



$$
\begin{aligned}
M &= RT \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -u_1x_0 - u_2y_0 \\ v_1 & v_2 & -v_1x_0 - v_2y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. 举例

【问题】已知 $P_0(3,3)$ 和 $P_1(6,7)$，新坐标系的原点位于旧坐标系的 P_0，新坐标系的 y 轴为 P_0P_1，请构造从旧坐标系到新坐标系的坐标变换矩阵。

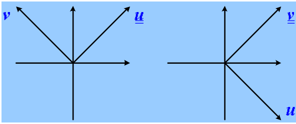
【解答】

（1）使新原点与旧原点重合：$T = T(-3,-3)$。

（2）使新 y 轴与旧 y 轴重合：R。

因为 $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1} / |\overrightarrow{P_0P_1}| = (0.6, 0.8)$，$\vec{u} = (0.8, -0.6)$，所以

$$R = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



完整变换为

$$T = T(-3, -3)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M &= RT \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 & -4.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3.5 合并特性

1. 结合律

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

2. 交换性

- 一般不满足。
- 类型相同，可交换。如两个连续的平移、两个连续的旋转和两个连续的缩放。
- 旋转与一致缩放（$s_x = s_y$）可交换（证明留作练习）。

3. 通用变换公式

如图4-16所示。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs_{xx} & rs_{xy} & trs_x \\ rs_{yx} & rs_{yy} & trs_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

旋转缩放项　　平移项

图4-16　通用变换公式

4. 变换后坐标的显式计算

$$\begin{cases} x' = x \times rs_{xx} + y \times rs_{xy} + trs_x \\ y' = x \times rs_{yx} + y \times rs_{yy} + trs_y \end{cases}$$

共4次乘法，4次加法。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta)+y_r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_r\sin\theta+y_r(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & x_f(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1u_1^2+s_2u_2^2 & u_1u_2(s_1-s_2) & 0 \\ u_1u_2(s_1-s_2) & s_1u_2^2+s_2u_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & -u_1x_0-u_2y_0 \\ v_1 & v_2 & -v_1x_0-v_2y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.6 变换复合的必要性

变换复合最主要的目的是节省计算时间。假设一个复合变换由10次基本变换组成，共有1000个坐标需要变换（不多，例如犹他茶壶共3000多个面片，至少有9000多个坐标需要变换）。统计共需要多少次乘法计算，用乘法次数代表计算时间。

- 使用分步骤变换。每个坐标每次变换需要4次乘法，从而总乘法次数为4×10×1000=40000。
- 使用复合变换。因为变换复合需要完成9次矩阵乘法，乘法次数为3×3×3×9=243，而坐标变换需要的乘法次数为4×1000=4000，所以总乘法次数为243+4000=4243。

$$\begin{cases} x' = x \times rs_{xx} + y \times rs_{xy} + trs_x \\ y' = x \times rs_{yx} + y \times rs_{yy} + trs_y \end{cases}$$

4.4 二维观察流程及相关变换

4.4.1 二维观察流程

1. 模型坐标系与世界坐标系

- MC（模型坐标系）。建立单个物体模型时使用的局部坐标系。如图4-17所示。
- WC（世界坐标系）。为整个场景建立的一个统一的全局坐标系。如图4-17所示。

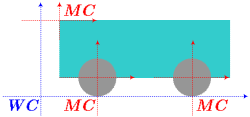


图4-17 模型坐标系与世界坐标系

2. 观察流程

这里先说明二维观察流程，再补充说明相关概念。二维观察流程如图4-18所示。

（1）模型变换：在 *WC* 中构造场景，从 *MC* 变换到 *WC*，如图4-17所示。

（2）观察变换：在 *WC* 平面中设置 *VC*（观察坐标系），在 *VC* 中定义窗口，从 *WC* 变换到 *VC*。

（3）规范化变换：在 *NC*（规范化坐标系）中定义视区，将 *VC* 映射为 *NC*。

（4）工作站变换：裁剪掉视区外部分，视区内图形映射到 *DC*（设备坐标系）。工作站变换通常由设备驱动程序完成，可以保证观察和变换独立于输出设备。

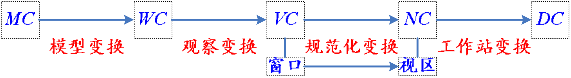
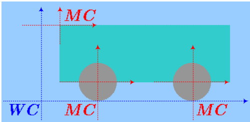
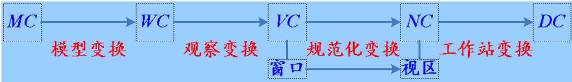


图4-18　二维观察流程



3. 相关概念

- VC（观察坐标系）。指定观察窗口时建立的方便裁剪的坐标系。
- NC（规范化坐标系）。既独立于具体设备，又可以很容易地转换成设备坐标系的一种中间坐标系。例如，GLUT的程序窗口使用的坐标系。
- DC（设备坐标系）。实际设备使用的坐标系。
- 窗口。也称作裁剪窗口或观察窗口，指定场景中需要显示的区域（通常是矩形区域）。
- 视区或视口。窗口映射到设备的一个显示区域（通常是 NC 中的一个矩形区域）。



4.4.2 模型变换

1. 已知条件

使用模型坐标系建立物体模型，建立世界坐标系以后，模型坐标系的原点位于世界坐标系的 $P_0(x_0, y_0)$ 位置，模型坐标系的 x 轴和 y 轴在世界坐标系中的的单位向量分别为 $\vec{u}=(u_1, u_2)$ 和 $\vec{v}=(v_1, v_2)$ 。

2. 变换矩阵的构造

首先构造从世界坐标系到模型坐标系的变换，然后计算该变换的逆变换。

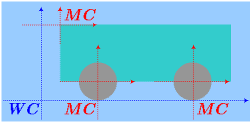
（1）使模型坐标系的原点与世界坐标系的原点重合： $T=T(-x_0, -y_0)$

（2）使模型坐标系的坐标轴与世界坐标系的坐标轴重合： R

$$R=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（3）计算上述2个变换复合以后的逆变换。

完整变换为



$$
\begin{aligned}
M &= (RT)^{-1} = T^{-1}R^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & x_0 \\ u_2 & v_2 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.4.3 观察变换

1. 观察坐标系的设置

- 观察参考点。VC 的原点 (x_0, y_0)。
- 观察向量 $\vec{V}$。VC 的正 y 方向。

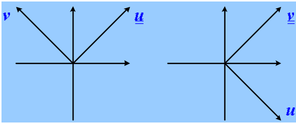
2. 观察变换

（1）使 VC 的原点与 WC 的原点重合：$T = T(-x_0, -y_0)$。

（2）使 VC 的正 y 方向与 WC 的正 y 方向重合：R。

将 $\vec{V}$ 单位化，得到 VC 正 y 方向的单位向量 $\vec{v} = \vec{V}/|\vec{V}| = (v_1, v_2)$；由此可以得到 VC 正 x 方向的单位向量 $\vec{u} = (v_2, -v_1)$。从而

$$R = \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



完整变换为

$$R=\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T=T(-x_0,-y_0)$$

$$\begin{aligned} M &= RT \\ &= \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 & -v_2x_0+v_1y_0 \\ v_1 & v_2 & -v_1x_0-v_2y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.4.4 规范化变换

也可称作窗口变换，是窗口到视口的映射。

1. 一般规范化变换

（1）特点。如图4-19所示，对象在 NC 中的相对位置与在 VC 中的相对位置相同。

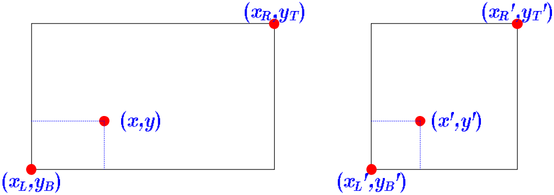


图4-19　一般规范化变换

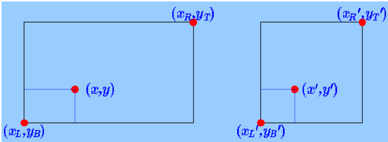
（2）变换公式推导。已知窗口为 $(x_L, y_B) \sim (x_R, y_T)$，视区为 $(x_L', y_B') \sim (x_R', y_T')$，现将窗口中位于 (x, y) 的点映像到视区中坐标为 (x', y') 的点，请构造变换公式和变换矩阵。

为了使视区与窗口中的对象有同样的相对位置，必须满足

$$\begin{cases} \dfrac{x' - x_L'}{x_R' - x_L'} = \dfrac{x - x_L}{x_R - x_L} \\[2ex] \dfrac{y' - y_B'}{y_T' - y_B'} = \dfrac{y - y_B}{y_T - y_B} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x_R' - x_L'}{x_R - x_L}(x - x_L) + x_L' \\[2ex] y' = \dfrac{y_T' - y_B'}{y_T - y_B}(y - y_B) + y_B' \end{cases}$$



经整理，可得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x_R' - x_L'}{x_R - x_L} x + \dfrac{x_R x_L' - x_L x_R'}{x_R - x_L} \\ y' = \dfrac{y_T' - y_B'}{y_T - y_B} y + \dfrac{y_T y_B' - y_B y_T'}{y_T - y_B} \end{cases}$$

从而得到变换矩阵为

$$M_{\text{norm}} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_R' - x_L'}{x_R - x_L} & 0 & \dfrac{x_R x_L' - x_L x_R'}{x_R - x_L} \\ 0 & \dfrac{y_T' - y_B'}{y_T - y_B} & \dfrac{y_T y_B' - y_B y_T'}{y_T - y_B} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x_R' - x_L'}{x_R - x_L}(x - x_L) + x_L' \\ y' = \dfrac{y_T' - y_B'}{y_T - y_B}(y - y_B) + y_B' \end{cases}$$

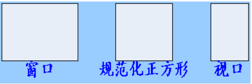
2. OpenGL中的规范化变换

在OpenGL中，规范化变换分解成两个变换，分别是窗口到规范化正方形（标准正方形）的变换和规范化正方形到视口的变换。其中，规范化正方形规定为$(-1,-1)\sim(1,1)$。

（1）窗口到规范化正方形的变换。此时$x_L'=-1$，$y_B'=-1$，$x_R'=1$，$y_T'=1$，所以

$$M_{\text{norm}}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{x_R-x_L} & 0 & -\dfrac{x_R+x_L}{x_R-x_L}\\ 0 & \dfrac{2}{y_T-y_B} & -\dfrac{y_T+y_B}{y_T-y_B}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

在OpenGL中，可用gluOrtho2D(left, right, bottom, top)定义一个二维裁剪窗口，并生成窗口到规范化正方形的变换。



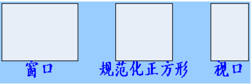
$$\begin{pmatrix}\dfrac{x_R'-x_L'}{x_R-x_L} & 0 & \dfrac{x_Rx_L'-x_Lx_R'}{x_R-x_L}\\ 0 & \dfrac{y_T'-y_B'}{y_T-y_B} & \dfrac{y_Ty_B'-y_By_T'}{y_T-y_B}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（2）规范化正方形到视口的变换。此时 $x_L=-1$，$y_B=-1$，$x_R=1$，$y_T=1$，所以

$$M_{\text{norm}}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_R'-x_L'}{2} & 0 & \dfrac{x_R'+x_L'}{2}\\ 0 & \dfrac{y_T'-y_B'}{2} & \dfrac{y_T'+y_B'}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

在OpenGL中，使用glViewport(L, B, W, H)定义一个视口，并生成规范化正方形到视口的变换。因为 $x_L'=L$，$y_B'=B$，$x_R'=L+W$，$y_T'=B+H$，所以该变换矩阵是

$$M_{\text{norm}}=\begin{pmatrix}W/2 & 0 & L+W/2\\ 0 & H/2 & B+H/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}\dfrac{x_R'-x_L'}{x_R-x_L} & 0 & \dfrac{x_Rx_L'-x_Lx_R'}{x_R-x_L}\\ 0 & \dfrac{y_T'-y_B'}{y_T-y_B} & \dfrac{y_Ty_B'-y_By_T'}{y_T-y_B}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4.5　二维裁剪

4.5.1　相关概念

1. 裁剪算法

识别图形在指定区域以内部分或以外部分的过程。

2. 裁剪窗口

用来裁剪对象的区域。

3. 点的裁剪

使用下列公式判断 (x, y) 是否在裁剪区域以内。

$$\begin{cases} x_L \le x \le x_R \\ y_B \le y \le y_T \end{cases}$$

4.5.2 线段的裁剪

有好几种线段裁剪算法，如Cohen-Sutherland算法、梁友栋-Barsky算法、Nicholl-Lee-Nicholl算法等，这里只介绍Cohen-Sutherland算法。

1. 区域码

标识端点相对于窗口边界的位置。

2. 坐标区域与区域码各位的关系

从右到左编码：$b_T b_B b_R b_L$（上、下、右、左）。

3. 如何对端点编码

如图4-20所示，方法如下。

$$\begin{cases} b_L = 1, & \text{if} \quad x < x_L \\ b_R = 1, & \text{if} \quad x > x_R \end{cases} \qquad \begin{cases} b_B = 1, & \text{if} \quad y < y_B \\ b_T = 1, & \text{if} \quad y > y_T \end{cases}$$

1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110

1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110

图4-20　如何对端点编码

4. 算法描述

线段与窗口的几种关系如图4-21所示。算法描述如下。

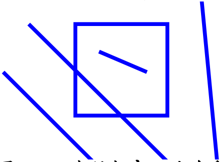


图4-21　线段与窗口的关系

（1）对端点编码。

（2）是否完全在内：两端点区域码均为0，保留，退出。

（3）是否完全在外：两端点区域码按位与不等于0，舍弃，退出。

（4）不能确定：两端点区域码按位与等于0。找到线段的一个外端点，将线段与相应边界求交，舍弃外端点与交点之间的部分。对剩余部分重复上述过程，直到线段被舍弃或找到窗口以内的部分为止。

1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110

5. 交点计算

设端点为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 。

- 与 $x = c$ 的交点。 $y = y_1 + m(c - x_1)$ 。
- 与 $y = c$ 的交点。 $x = x_1 + (c - y_1) / m$ 。

6. 举例

【问题】已知线段 AB 的端点坐标分别是 $A(-5,10)$ 和 $B(10,-5)$，裁剪窗口为 $(0,0)\sim(10,10)$，请使用Cohen-Sutherland算法计算裁剪以后剩余的线段。

【解答】

左边界为 $x=0$，右边界为 $x=10$，下边界为 $y=0$，上边界为 $y=10$。

A 区域码为0001，B 区域码为0100。两端点区域码的与为0000。

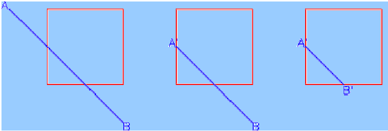
A 是一外端点，位于窗口左边，AB 与左边界 $x=0$ 求交，由 $m=(-5-10)/(10+5)=-1$，$y=y_1+m(c-x_1)=10-(0+5)=5$ 得交点 $A'=(0,5)$。舍弃 AA'，保留 $A'B$。

A' 区域码为0000，B 区域码为0100。两端点区域码的与为0000。

B 是一外端点，位于窗口的下边，$A'B$ 与下边界 $y=0$ 求交，由 $1/m=-1$，$x=x_1+(c-y_1)/m=-5-(0-10)=5$ 得交点 $B'=(5,0)$。舍弃 $B'B$，保留 $A'B'$。

A' 区域码为0000，B' 区域码为0000。所以裁剪后剩余线段为 $A'B'$，端点坐标分别为 $A'=(0,5)$ 和 $B'=(5,0)$。结果如图4-22所示。

1001	1000	1010
0001	0000	0010
0101	0100	0110



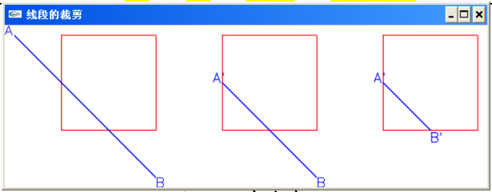


图4-22　裁剪举例

4.5.3 多边形的裁剪

直接使用线段裁剪算法处理多边形可能得不到正确解（如图4-23所示）。

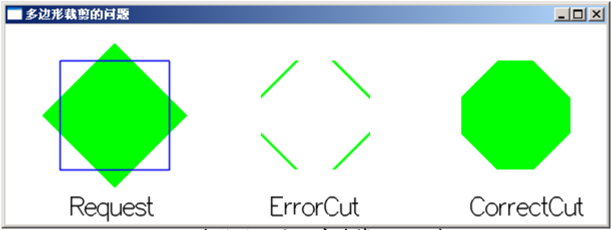


图4-23 直接使用线段裁剪算法处理多边形

Sutherland-Hodgeman算法是一种相对简单的多边形裁剪算法（Sutherland，Hodgeman，1974），其基本思想是逐边裁剪。

1. 算法步骤

（1）用左边界裁剪多边形，按顺序（如顺时针方向）产生新顶点序列，如图4-24第1部分所示。

（2）用右边界裁剪多边形，按顺序产生新顶点序列，如图4-24第2部分所示。

（3）用下边界裁剪多边形，按顺序产生新顶点序列，如图4-24第3部分所示。

（4）用上边界裁剪多边形，按顺序产生新顶点序列，如图4-24第4部分所示。

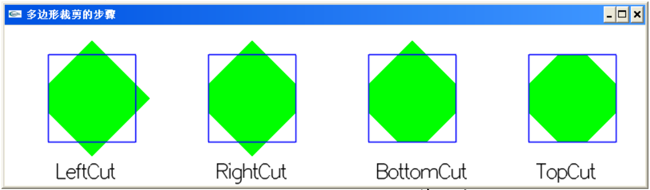


图4-24 Sutherland-Hodgeman算法步骤

2. 相邻顶点的处理方法

设 V_1 和 V_2 是相邻顶点，V_1V_2 与相应边界的交点（若有）为 V_1'，则处理办法如下。

- 外 → 内：保存 V_1' 和 V_2（如图4-25[1]所示）。
- 内 → 内：保存 V_2（如图4-25[2]所示）。
- 内 → 外：保存 V_1'（如图4-25[3]所示）。
- 外 → 外：不保存（如图4-25[4]所示）。

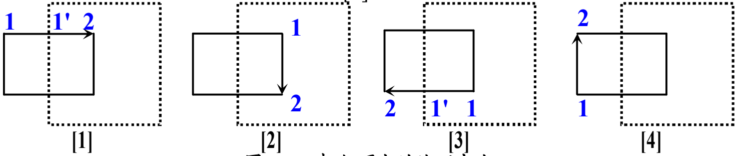


图4-25　相邻顶点的处理方法

3. 算法应用举例

已知某多边形的顶点分别是 $A(-1,0)$、$B(1,2)$ 和 $C(3,0)$，裁剪窗口为 $(0,1)\sim(3,3)$（如图4-26左上部分所示），请使用Sutherland-Hodgeman算法计算该多边形被裁剪以后剩余的部分。

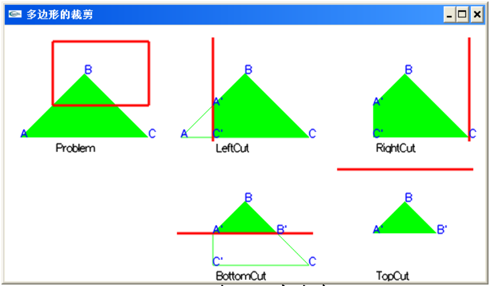


图4-26　多边形裁剪举例

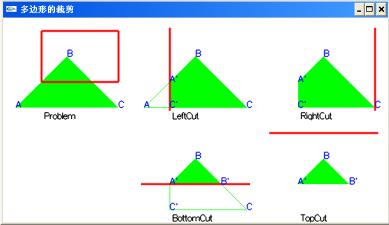
初始顶点集合：$V_0=\{A,B,C\}$。

（1）左裁剪。顶点集合 $V_1=\varnothing$。

- 对 AB，A 在左边界外，B 在左边界内，且 AB 与左边界的交点为 $A'=(0,1)$，故 $V_1=\{A',B\}$。
- 对 BC，B 和 C 都均在左边界内，故 $V_1=\{A',B,C\}$。
- 对 CA，C 在左边界内，A 在左边界外，CA 与左边界的交点 $C'=(0,0)$，故 $V_1=\{A',B,C,C'\}$。

如图4-26中上部分所示。

（2）右裁剪。A'、B、C 和 C' 均在右边界内，故顶点集合 $V_2=\{A',B,C,C'\}$。如图4-26右上部分所示。



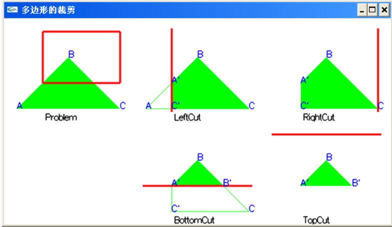
（3）下裁剪。顶点集合 $V_3=\varnothing$。

- 对 $A'B$， A' 和 B 均在下边界内，故 $V_3=\{B\}$。
- 对 BC， B 在下边界内， C 在下边界外，且 BC 与下边界的交点为 $B'=(2,1)$，故 $V_3=\{B,B'\}$。
- 对 CC'， C 和 C' 均在下边界外，故 $V_3=\{B,B'\}$。
- 对 $C'A'$， C' 在下边界外， A' 在下边界内，且 $C'A'$ 与下边界的交点 $A'=(0,1)$，故 $V_3=\{B,B',A',A'\}=\{B,B',A'\}$。

如图4-26中下部分所示。

（4）上裁剪。 B 、 B' 和 A' 均在上边界内，故顶点集合 $V_4=\{B,B',A'\}$。

所以，裁剪以后的多边形为 $BB'A'$，其中 $B=(1,2)$， $B'=(2,1)$， $A'=(0,1)$。如图4-26右下部分所示。



4.6 练习题

4.6.1 基础知识题

1. 通过对$R(\theta_1)$和$R(\theta_2)$矩阵表示的旋转变换合并得到$R(\theta_1)\times R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2)$，证明两个复合的旋转是相加的。

2. 证明下列每个操作序列对是可以交换的。

（1）两个连续的旋转。

（2）两个连续的平移。

（3）两个连续的缩放。

3. 证明一致缩放和旋转形成可交换的操作对，但一般缩放和旋转不是可交换的操作对。

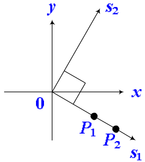
4. 已知旋转角为θ，旋转中心为(x_0, y_0)，请构造该旋转变换的变换矩阵。

5. 已知旋转角为60度，旋转中心为(1, 2)，请构造该旋转变换的变换矩阵M，结果至少保留3位小数（也可使用无理数）。

6. 已知缩放系数为s_x和s_y，固定点位置为(x_0, y_0)，请构造该缩放变换的变换矩阵。

7. 已知旋转中心和缩放中心均为(x_0, y_0)，旋转角度为θ，缩放系数为(s, s)（一致缩放），请构造该带缩放的旋转变换的变换矩阵（OpenCV中的C函数cv2DRotationMatrix()和C++函数getRotationMatrix2D()就是用来计算这个变换矩阵的）。

8. 在如图所示的方向上，用s_1=2和s_2=3作为缩放系数，请构造完成这种缩放的变换矩阵，其中固定点为原点，且方向s_1上两点的坐标分别为(2, -1)和(6, -4)。



9. 确定反射轴为直线y=3x/4的反射变换的变换矩阵。

10. 已知A(3, 3)和B(6, 7)，新坐标系统的原点位置定义在旧坐标系统的A处，新的y轴为AB，请构造完整的从旧坐标系统到新坐标系统的坐标变换矩阵。

11. 已知A(3, 3)和B(6, 7)，新坐标系统的原点位置定义在旧坐标系统的A处，新的x轴为AB，请构造完整的从旧坐标系统到新坐标系统的坐标变换矩阵。

12. 已知$A(3, 3)$和$B(6, 7)$，请构造一个变换，使AB与x轴重合。

13. 已知$A(3, 3)$和$B(6, 7)$，请构造一个变换，使AB与y轴重合。

14. 已知窗口为(0, 0)~(10, 10)，视区为(1, 1)~(6, 6)，要求将窗口中位于(x, y)的点映像到视区中坐标为(x', y')的点，请构造变换公式和变换矩阵。

15. 已知某线段的两个端点坐标分别是(-5, 10)和(10, -5)，裁剪窗口为(0, 0)~(10, 10)，请使用Cohen-Sutherland算法计算出裁剪以后剩余的线段。

16. 已知某多边形的顶点分别是$A(-1, 0)$、$B(1, 2)$和$C(3, 0)$，裁剪窗口为(0, 1)~(3, 3)，请使用Sutherland-Hodgeman算法计算出该多边形被裁剪以后剩余的部分。

4.6.2 阶段实习题

1. 在默认的坐标值范围内任意指定线段的两个端点坐标和裁剪窗口，请使用Cohen-Sutherland算法构造一个完成该裁剪任务的完整程序，并对各种情况进行测试。

要求：首先，用黑色绘制原线段；然后，用蓝色画出窗口边界；最后，用红色绘制裁剪后剩余线段。

2. 在默认的坐标值范围内任意指定三角形的三个顶点坐标和裁剪窗口，请使用Sutherland-Hodgeman算法构造一个完成该裁剪任务的完整程序，并对各种情况进行测试。

要求：首先，用红色填充该多边形内部；然后，用蓝色画出窗口边界；最后，用绿色填充剩余多边形内部。