湖南科技大学课程教案
（章节、专题首页）

授课教师：王志喜　　职称：副教授　　单位：计算机科学与工程学院

课 程 名 称	算法设计与分析
章节、专题	动态规划方法
教学目标及基 本 要 求	熟悉动态规划方法的基本思想和基本步骤，能够使用动态规划方法求解矩阵连乘、多段图问题和最短路径问题等常见问题。
教 学 重 点	矩阵连乘问题和最短路径问题的动态规划算法
教 学 难 点	多段图问题、最短路径问题和最长公共子序列问题的动态规划算法
教学内容与时 间 分 配	（1）动态规划方法的基本思想和基本步骤（0.5课时） （2）矩阵连乘问题的动态规划算法（1课时） （3）多段图问题的动态规划算法（0.5课时） （4）最短路径问题的动态规划算法（0.75课时） （5）最长公共子序列问题的动态规划算法（0.5课时） （6）0/1背包问题的动态规划算法（0.75课时） 共计4课时。
习　　题	第6.7.1节（基础知识题），第6.7.2节（实验题）。

第6章　动态规划方法

本章首先介绍动态规划方法的基本思想，包括最优化原理、使用动态规划方法的基本要素以及动态规划方法的基本步骤。然后介绍矩阵连乘问题、多段图问题、最短路径问题、最长公共子序列问题和0/1背包问题等问题的动态规划算法。

- 动态规划方法的基本思想
- 矩阵连乘问题的动态规划算法
- 使用动态规划方法的基本步骤
- 多段图问题的动态规划算法
- 最短路径问题的动态规划算法
- 最长公共子序列问题的动态规划算法
- 0/1背包问题的动态规划算法

6.1 动态规划方法的基本思想

动态规划方法是处理分段过程最优化问题的一类及其有效的方法。在实际生活中，有一类问题的活动过程可以分成若干个阶段，而且在任一阶段后的行为依赖于该阶段的状态，而与该阶段之前的过程如何达到这种状态的方式无关。这类问题的解决是一个多阶段的决策过程。在1950年代，贝尔曼（Richard Bellman）等人提出了解决这类问题的“最优化原理”，创建了求解最优化问题的一种新的算法设计方法——动态规划方法。用动态规划方法设计的算法称为动态规划算法。

6.1.1 最优化原理

多阶段过程的最优决策序列应当具有这样的性质：无论过程的初始状态和初始决策是什么，其余决策相对于初始决策所产生的状态都构成一个最优决策序列。

对于一个多阶段决策的问题，最优决策是否存在依赖于该问题是否具有最优子结构性质（原问题的最优解包含了子问题的最优解）。而是否采用动态规划方法还要看该问题的子问题是否有重叠。问题的最优子结构性质和子问题的重叠性是使用动态规划方法的两个基本要素。先看2个例子。

6.1.2 多段图问题的最优子结构性质

1. 问题描述

【多段图】一个多段图 $G=(V,E)$ 是一个有向加权图，它的顶点集 V 划分成 $m>2$ 个不相交的子集 V_i，$0\le i<m$，其中，V_0 和 V_{m-1} 都只有一个顶点（分别称为源和汇），所有边的始点和终点都在相邻的两个子集中。图7-1给出了一个多段图实例。

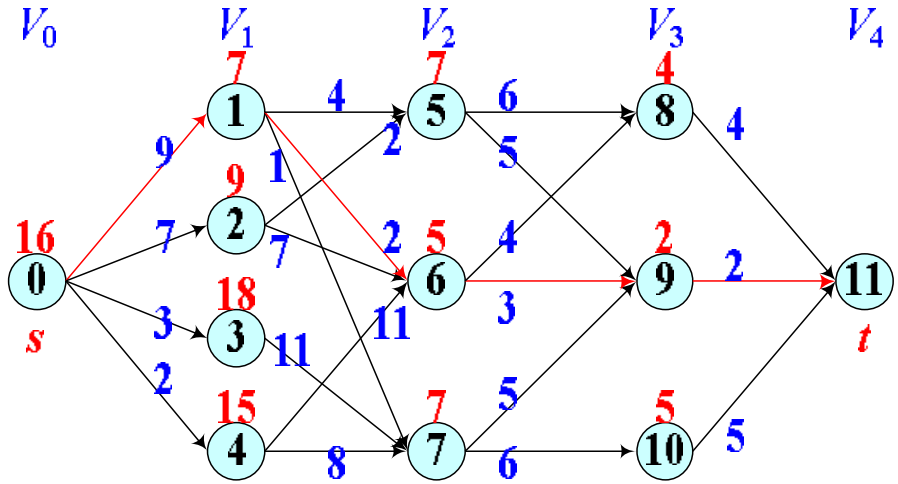
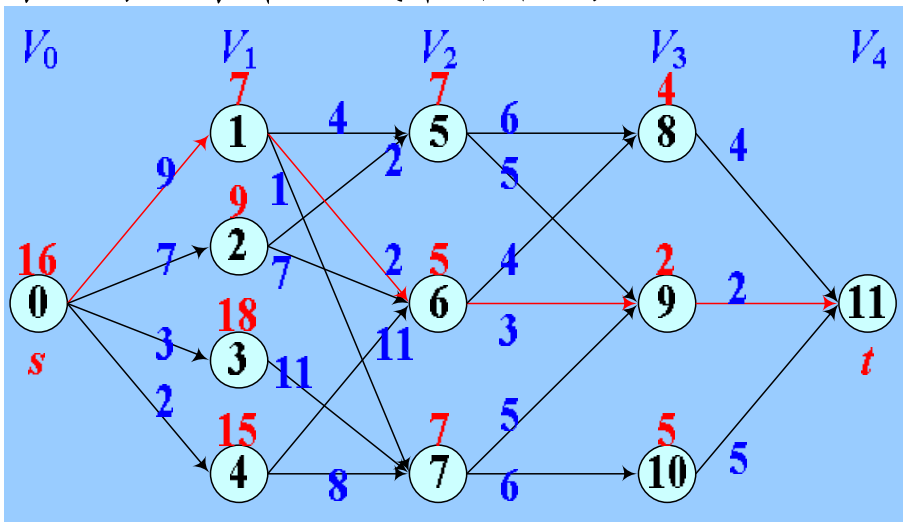


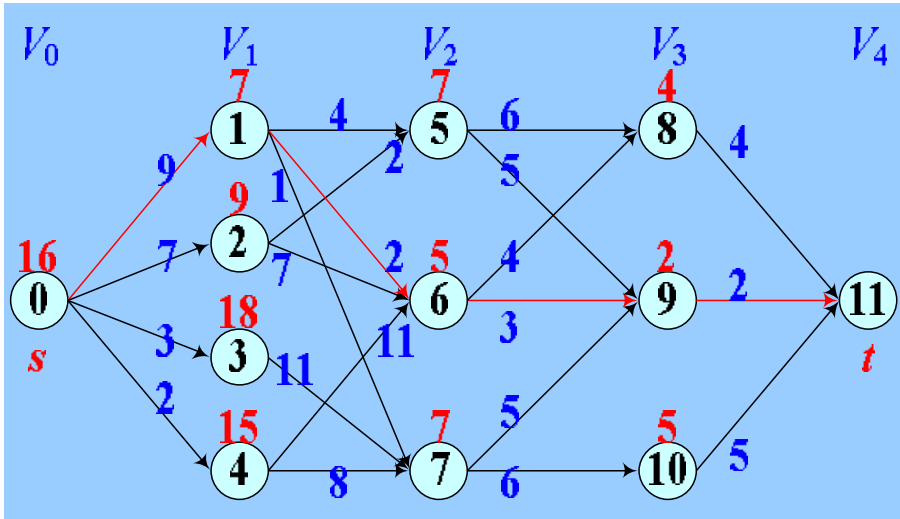
图7-1 一个多段图

【多段图问题】求由源到汇的最小成本路径（最短路径）。例如，对于图7-1所示的多段图，由源到汇的一条最小成本路径为0-1-6-9-11。



2. 最优子结构性质

对于每一条由源 s 到汇 t 的路径，可以看作在 $m-2$ 个阶段作出的某个决策序列，第 i（$0 \le i < m-2$）步决策就是确定 V_{i+1} 中哪个顶点属于该路径。假设路径 $s, v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, t$ 是一条由 s 到 t 的最短路径。若从 s（初始状态）开始，已经作出了到顶点 v_1 的决策（初始决策），则 v_1 就是初始决策产生的状态。若将 v_1 看成某个子问题的初始状态，则求解这个子问题就是找一条由 v_1 到 t 的最短路径。实际上，路径 $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, t$ 一定是一条由 v_1 到 t 的最短路径。否则，设路径 $v_1, q_2, \ldots, q_{m-2}, t$ 比 $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, t$ 更短，则路径 $s, v_1, q_2, \ldots, q_{m-2}, t$ 比 $s, v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, t$ 更短，与 $s, v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}, t$ 是 s 到 t 的最短路径矛盾。这说明多段图问题具有最优子结构性质。



6.1.3 矩阵连乘问题的最优子结构性质

1. 问题描述

给定 n 个数字矩阵 $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$，其中 A_i 与 A_{i+1} 是可乘的，$0 \le i < n-1$。求矩阵连乘 $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ 的加括号方法，使得所用的数乘次数最少。

如果矩阵 A 和 B 分别是 $p \times r$ 和 $r \times q$ 矩阵，则它们的乘积 $C = AB$ 是 $p \times q$ 矩阵，其 $(i, j)-$ 元素为

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{r-1} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 0, \ldots, p-1 \ , \ j = 0, \ldots, q-1)$$

因而 AB 所用的数乘次数是 prq。

3个以上矩阵连乘需要考虑乘积次序问题，即加括号方法。例如，3个矩阵连乘的加括号方法有 $((A_0 A_1) A_2)$ 和 $(A_0 (A_1 A_2))$ 两种。设 A_0, A_1, A_2 分别是 $50 \times 5, 5 \times 100, 100 \times 10$ 矩阵，则两种乘法次序所用的数乘次数分别为 $50 \times 5 \times 100 + 50 \times 100 \times 10 = 75000$ 和 $5 \times 100 \times 10 + 50 \times 5 \times 10 = 7500$。

对于 n 个矩阵的连乘积，如果用 $P(n)$ 表示连乘积的完全加括号方法数（计算次序总数），则有如下递推关系

$$P(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ \sum_{k=1}^{n-1}P(k)P(n-k) & n>1\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}P(n)&\geq 2P(1)P(n-1)=2P(n-1)\geq 2^2P(n-2)\\ &\geq\ldots\geq 2^{n-1}P(1)=2^{n-1}=0.5\times 2^n\end{aligned}$$

显然，$P(n)$ 随 n 指数增长，不能希望列举所有可能次序的连乘积，从中找到数乘次数最少的次序。

$\alpha=(A_0(A_1A_2))(A_3A_4)$
$\beta=((A_0A_1)A_2)(A_3A_4)$

$\alpha=(A_0(A_1A_2))(A_3A_4)$
$\beta=((A_0A_1)A_2)(A_3A_4)$

2. 最优子结构性质

事实上，矩阵连乘积问题具有最优子结构性质，可以采用动态规划方法，在多项式时间内找到最优的连乘积次序。

用 $A[i..j]$ 表示连乘积 $A_iA_{i+1}\dots A_j$。假设计算 $A[0..(n-1)]$ 的一个最优次序 α 在矩阵 A_k 和 A_{k+1} 之间（ $0\le k<n-1$ ）将连乘积分开，则完全加括号方式为 $((A_0A_1\dots A_k)(A_{k+1}\dots A_{n-1}))$。依此次序，首先分别计算 $A[0..k]$ 和 $A[(k+1)..(n-1)]$，然后将计算结果相乘得到 $A[0..(n-1)]$。易知，$A[0..(n-1)]$ 的一个最优次序所包含的子链 $A[0..k]$ 和 $A[(k+1)..(n-1)]$ 的次序也一定是最优的。否则，$A[0..(n-1)]$ 存在另一个计算次序比 α 更优，与 α 是计算 $A[0..(n-1)]$ 的一个最优次序矛盾。所以，矩阵连乘问题具有最优子结构性质。

6.1.4 动态规划方法的基本思路

首先确定原问题的最优值和其子问题的最优值之间的递推关系，然后递归地构造出最优解。最优子结构性质是最优化原理得以采用的先决条件。一般说来，分阶段选择策略确定最优解的问题往往会形成一个决策序列。Bellman认为，利用最优化原理以及所获得的递推关系式去求解最优决策序列，可以使枚举数量急剧下降。

这里有一个问题值得注意：最优子结构性质提示我们使用最优化原理产生的算法是递归算法，很可能增加时间与空间复杂度。例如，用递推式直接计算矩阵连乘积 $A[0..(n-1)]$ 的算法的时间复杂度将是 $\Omega(2^n)$（在6.2.1小节中说明）。

可以利用子问题的重叠性想办法避免重复计算而得到效率更高的算法。

6.2 矩阵连乘问题与动态规划的基本步骤

6.2.1 矩阵连乘问题的递归算法

首先建立原问题与子问题最优值之间的递推关系，然后依据最优值的递推关系用自顶向下的方式进行计算，在计算过程中记录构造最优解的相关信息。

- $(A_0A_1A_2A_3)(A_4A_5A_6)$
- $(A_0A_1A_2A_3A_4)(A_5A_6)$

1. 建立递推关系

设 $c(i,j)$ 为用最优法计算 $A[i..j]$ 的消耗，$\mathrm{kay}(i,j)$ 为用最优法计算 $A[i..j]$ 加括号方式的断点。矩阵 $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ 的行数和列数分别是 (r_0, r_1)，(r_1, r_2)，…，(r_{n-1}, r_n)。$A[i..j]$ 的最优算法包括用最优算法计算 $A[i..k]$ 和 $A[(k+1)..j]$ 以及计算 $A[i..k]\times A[(k+1)..j]$。因为 $A[i..k]$ 和 $A[(k+1)..j]$ 的行数与列数分别是 (r_i, r_{k+1}) 和 (r_{k+1}, r_{j+1})，所以计算 $A[i..k]\times A[(k+1)..j]$ 需要的数乘次数为 $r_i r_{k+1} r_{j+1}$。根据最优化原理，可得到如下递推式。

$$\begin{cases} c(i,i)=0 & 0\le i<n \\ c(i,j)=\min\limits_{i\le k<j}\{c(i,k)+c(k+1,j)+r_i r_{k+1} r_{j+1}\} \\ \mathrm{kay}(i,j)=\text{取得上述最小值的}k & 0\le i<j<n \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(i,i)=0 & 0\le i<n \\ c(i,j)=\min\limits_{i\le k<j}\{c(i,k)+c(k+1,j)+r_i r_{k+1} r_{j+1}\} & 0\le i<j<n \\ \mathrm{kay}(i,j)=\text{取得上述最小值的}k & \end{cases}$$

2. 计算最优值

（1）变量声明及初始化。

```
#include "algorithm.h"
// 求计算A[0 .. n)的最优消耗(备忘录方法)
auto MatrixChain1(int r[], int n)
{   // 一维数组r为各矩阵的行数和列数
    Matrix<int> kay(n, n); // 二维数组kay用于构造最优次序
```

（2）递推公式的实现。

```
    function<int(int, int)>
    C = [&](int i, int j) // 求计算A[i .. j]的最优消耗
    {   if(j <= i) return 0; // 只有一个矩阵
        // 有多个矩阵, 从k = i开始计算最小项, 并更新kay
        int u = (int)inf;
        for(int k = i; k < j; ++k)
        {   int t = C(i, k) + C(k + 1, j) + r[i] * r[k + 1] * r[j + 1];
            if(t < u) u = t, kay(i, j) = k; // 找到更小的项
        }
        return u;
    };
```

（3）递推公式的调用。

```
    int i = 0, j = n - 1;
    return pair{C(i, j), kay}; // 成组的返回值(消耗, 断点)
}
```

3. 复杂性分析

如果用 $T(n)$ 表示该算法的计算 $A[0..(n-1)]$ 的时间，则

$$T(n)=\begin{cases} C_1 & n=2 \\ C_2+\sum_{k=1}^{n-1}(T(k)+T(n-k)+C_3) & n>2 \end{cases}$$

当 $n>2$ 时，有 $T(n)\geq 2T(n-1)\geq\ldots\geq 2^{n-1}T(2)=C\times 2^n$，从而，$T(n)=\Omega(2^n)$。

- $((A_0A_1A_2A_3)A_4)(A_5A_6)$
- $((A_0A_1A_2A_3)(A_4A_5))A_6$

6.2.2 动态规划方法

实际上，在使用递归算法自顶向下求解具有最优子结构性质的问题时，每次产生的子问题并不总是新的，有些问题多次重复计算。动态规划方法正是利用了这种子问题的重叠性质，对每一个问题只求解一次，将解保存在一个表格中，在需要再次求解时，只需用常数时间简单查看一下结果。

通常，不同的子问题的个数随原问题的输入规模呈多项式增长。因此，使用动态规划方法通常只需要多项式时间，从而获得较高的效率。所以，使用动态规划方法求解的问题应具备另一个基本要素——子问题的重叠性。

例如，在矩阵连乘积问题中，若用 $c(i,j)$ 表示由第 i 个矩阵到第 j 个矩阵的连乘积所用的最少数乘次数，则计算 $c(0,n-1)$ 的子问题只有 $\Theta(n^2)$ 个。这是因为，对于 $0 \le i < j < n$，不同的有序对 (i,j) 对应于不同的子问题，而不同有序对个数为 $n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$。用动态规划方法求解此问题时，在计算过程中，保存已解决的子问题答案，而在需要用到时只是简单检查一下，保证每个子问题只计算一次，从而避免了大量的重复计算。

动态规划可以使用自顶向下或自底向上的方法。

自顶向下方法也称为备忘录方法，通常需要使用递归，在递归过程中检查子问题的重叠性。

自底向上方法通常称为动态规划方法，通常使用迭代方法实现，在迭代过程中避免子问题重复计算。

一般来说，当所有子问题都至少需要求解一次时，用动态规划方法比用备忘录方法要好，因为动态规划方法没有任何多余的计算，通常可以利用规则表格来减少计算时间和空间需求。当有一部分子问题不必求解时，则用备忘录方法比较有利，因为备忘录方法使用递归结构，对于不需要求解的子问题，没有必要再进行下一层递归，从而使得该方法只计算那些确实需要求解的子问题。

6.2.3 矩阵连乘问题的备忘录方法

1. 算法描述

用递归方法求 c 的值，在递归过程中检查已经计算过的 $c(i,j)$。

（1）变量声明及初始化。

```
// 求计算A[0 .. n)的最优消耗(备忘录方法)
auto MatrixChain2(int r[], int n)
{   // 一维数组r保存各矩阵的行数和列数
    Matrix<int> c(n, n, 0); //用c[i, j]记录计算A[i .. j]的消耗, 初始值为0
    Matrix<int> kay(n, n); //二维数组kay用于构造最优次序
```

（2）递推公式的实现。

```
function<int(int, int)>
C = [&](int i, int j) // 求计算A[i .. j]的最优消耗
{   if(c(i, j) > 0) return c(i, j); // c(i, j)已经确定
    if(j <= i) return 0; // 只有一个矩阵
    // 有多个矩阵, 从k = i开始计算最小项, 并更新kay
    c(i, j) = (int)inf;
    for(int k = i; k < j; ++k)
    {   int t = C(i, k) + C(k + 1, j) + r[i] * r[k + 1] * r[j + 1];
        if(t < c(i, j)) c(i, j) = t, kay(i, j) = k; // 找到更小的项
    }
    return c(i, j);
};
```

（3）递推公式的调用。

```
int i = 0, j = n - 1;
return pair{C(i, j), kay}; // 消耗, 断点
}
```

$$\begin{cases} c(i,i)=0 & 0\le i<n \\ c(i,j)=\min\limits_{i\le k<j}\{c(i,k)+c(k+1,j)+r_i r_{k+1} r_{j+1}\} & 0\le i<j<n \\ \text{kay}(i,j)=\text{取得上述最小值的}k & \end{cases}$$

2. 复杂性分析

在该算法中，每个 c 和 kay 只需计算一次，每次计算 c 和 kay 的主要计算量取决于程序中的for循环。因为for循环的计算量为 $O(n)$，共有 $O(n^2)$ 个 c 和 kay，所以，该算法的计算时间为 $O(n^3)$。

```
for(k = i + 1 to j - 1)
{   t = C(i, k) + C(k + 1, j) + r[i] * r[k + 1] * r[j + 1];
    if(t < c[i, j]) c[i, j] = t, kay[i, j] = k;
}
```

6.2.4 矩阵连乘问题的动态规划算法

1. 算法描述

（1）变量声明及初始化。

```
// 求计算A[0 .. n)的最优消耗(动态规划方法)
auto MatrixChain3(int r[], int n)
{   // 一维数组r保存各矩阵的行数和列数
    Matrix<int> c(n, n, 0); //用c[i, j]记录计算A[i .. j]的消耗, 初始值为0
    Matrix<int> kay(n, n); //二维数组kay用于构造最优次序
```

（2）用迭代方法求解c的递推式。因为需要先计算规模小的子问题，也就是先计算i和j差距小的$c(i,j)$，所以需要按照“$i=n-2, n-3, \ldots, 0, j=i+1, i+2, \ldots, n-1$”的顺序计算$c(i,j)$，并保证每个$c$和kay只计算一次。

```
for(int i = n - 2; i >= 0; --i) // 计算c(i, j)和kay(i, j), 其中j>i
{   for(int j = i + 1; j < n; ++j)
    {   // 从k = i开始计算最小项, 并更新kay
        c(i, j) = (int)inf;
        for(int k = i; k < j; ++k)
        {   int t = c(i, k) + c(k + 1, j) + r[i] * r[k + 1] * r[j + 1];
            if(t < c(i, j)) c(i, j) = t, kay(i, j) = k; // 找到更小的项
        }
    }
}
```

（3）返回结果。

```
int i = 0, j = n - 1;
return pair{c(i, j), kay}; // 消耗, 断点
}
```

$$\begin{cases} c(i,i)=0 & 0\le i<n \\ c(i,j)=\min\limits_{i\le k<j}\{c(i,k)+c(k+1,j)+r_i r_{k+1} r_{j+1}\} & 0\le i<j<n \\ \mathrm{kay}(i,j)=\text{取得上述最小值的}k & \end{cases}$$

2. 复杂性分析

该算法的主要计算量取决于程序中对 i, j, k 的三重循环。因为循环体内的计算量为 $O(1)$，三重循环的总次数是 $O(n^3)$，所以，算法的计算时间为 $O(n^3)$。

```
for(i = n - 2 to 0)
{   for(j = i + 1 to n - 1)
    {   c[i, j] = c[i, i] + c[i + 1, j] + r[i] * r[i + 1] * r[j + 1];
        kay[i, j] = i;
        for(k = i + 1 to j - 1)
        {   t = c[i, k] + c[k + 1, j] + r[i] * r[k + 1] * r[j + 1];
            if(t < c[i, j]) c[i, j] = t, kay[i, j] = k;
        }
    }
}
```

6.2.5 矩阵连乘问题的最优解

注意，上述三个算法只是明确给出了矩阵最优连乘次序所用的数乘次数，并未明确给出最优连乘次序，即完全加括号方法。但是以kay(*i*, *j*)为元素的二维数组给出了足够的信息。事实上，kay(*i*, *j*) = *k*说明计算连乘积 $A[i..j]$ 的最佳方式应该在矩阵 A_k 和 A_{k+1} 之间断开，即最优加括号方式为 $(A[i..k])(A[(k+1)..j])$。下列算法按照二维数组kay指示的加括号方式输出计算 $A[i..j]$ 的最优次序。

```
void Traceback(const Matrix<int> &kay) // 通过kay得到的最优方案
{   function<void(int, int)>
    Trace = [&](int i, int j) // 通过kay(i, j)得到A[i .. j]的最优方案
    {   if(j <= i) return; // 只有一个矩阵
        int k = kay(i, j);
        Trace(i, k), Trace(k + 1, j);
        cout << "M(" << i << "," << k << ")*";
        cout << "M(" << k + 1 << "," << j << ")=";
        cout << "M(" << i << "," << j << ")" << endl;
    };
    Trace(0, kay.rows() - 1); // i = 0, j = n - 1
}
```

6.2.6 一个示例☼

1. 测试程序

使用5个矩阵进行测试，行列数分别是10×5、5×1、1×10、10×2和2×10。

```
int main()
{   int n = 5; // 矩阵个数
    int r[n + 1] = {10, 5, 1, 10, 2, 10};
    auto [c, kay] = MatrixChain1(r, n);
    cout << "递归方法:\n", Traceback(kay);
    tie(c, kay) = MatrixChain2(r, n);
    cout << "备忘录方法:\n", Traceback(kay);
    tie(c, kay) = MatrixChain3(r, n);
    cout << "动态规划方法:\n", Traceback(kay);
}
```

2. 测试结果分析

三种方法结果相同，测试结果分析如图7-2所示。

	递归	备忘录	动态规划
Cost	*	$\begin{pmatrix} 0 & 50 & 150 & 90 & 190 \\ 0 & 0 & 50 & 30 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
kay	$\begin{pmatrix} * & 0 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & 2 & 3 \\ * & * & * & * & 3 \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$		

结果	M(0, 0) * M(1, 1) = M(0, 1) // kay(0, 1)=0
	M(2, 2) * M(3, 3) = M(2, 3) // kay(2, 3)=2
	M(2, 3) * M(4, 4) = M(2, 4) // kay(2, 4)=3
	M(0, 1) * M(2, 4) = M(0, 4) // kay(0, 4)=1		

图7-2　矩阵连乘的测试结果分析

6.2.7 动态规划方法的基本步骤

通常分为4个阶段。这4个阶段是一个整体，必要时才分步完成，很多时候是统一完成的。

（1）分析最优解的结构。确定要解决的问题具有最优子结构性质，这是使用动态规划方法的基础。

（2）建立递推关系。建立原问题与子问题最优值之间的递推关系。例如在矩阵连乘问题中，递推关系为

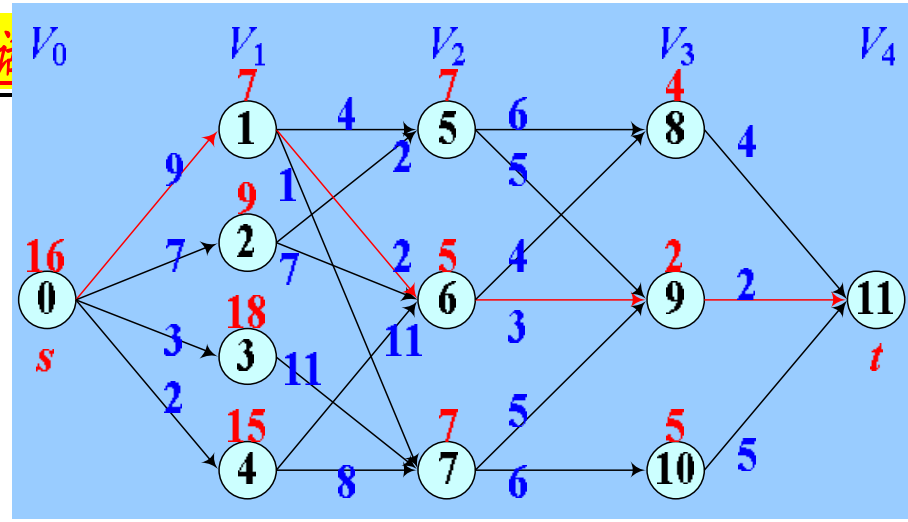
$$\begin{cases} c(i,i)=0 & 0\le i<n \\ c(i,j)=\min\limits_{i\le k<j}\{c(i,k)+c(k+1,j)+r_i r_{k+1} r_{j+1}\} & 0\le i<j<n \\ \mathrm{kay}(i,j)=\text{取得上述最小值的}k & \end{cases}$$

（3）计算最优值。依据递推关系式用自底向上或自顶向下的方式进行计算，在计算过程中保存已经解决的子问题答案。每个子问题只计算一次，而在需要再次求解时只需简单查看一下，从而避免大量的重复计算，最终获得多项式时间的算法。

（4）构造最优解。依据求最优值时记录的相关信息，构造出最优解。

6.3 多段图问题

6.3.1 递推关系



对于一个 m 段图，需要作出 $m-2$ 次决策，第 i 次决策就是确定第 $i+1$ 阶段应该选取哪个顶点，经过 $m-2$ 次决策形成从源点 s 到汇点 t 的最小成本路径。问题的关键是怎样在某个阶段选取合适的顶点，使得已经选取的顶点序列加上新选取的顶点形成的新路径的成本仍然是最小的。这是一个递推过程，需要找出相应的递推公式。

将图中的所有顶点从源点 s 到汇点 t 按段序统一编号，$C(j)$ 表示顶点 j 到汇点 t 的最短路径的成本，$c(j,r)$ 表示边 (j,r) 的成本，$\mathrm{NextSect}(j)$ 表示顶点 j 所属阶段的后一阶段。

在上述规定下，要计算 $C(j)$，只需在 $\mathrm{NextSect}(j)$ 中选取使得 $c(j,r)+C(r)$ 最小的 r 即可，即 $C(j)=\min\{c(j,r)+C(r)\mid r\in \mathrm{NextSect}(j)\}$。例如，对于图7-1所示的多段图，$C(6)=\min\{4+C(8),3+C(9)\}=5$。

显然，在上述规定下，源点 s 到汇点 t 的最短路径的成本就是 $C(s)$。

6.3.2 动态规划算法

1. 最小成本

如果使用邻接矩阵表示多段图，不显式指定每一段包含哪些顶点，则可以将

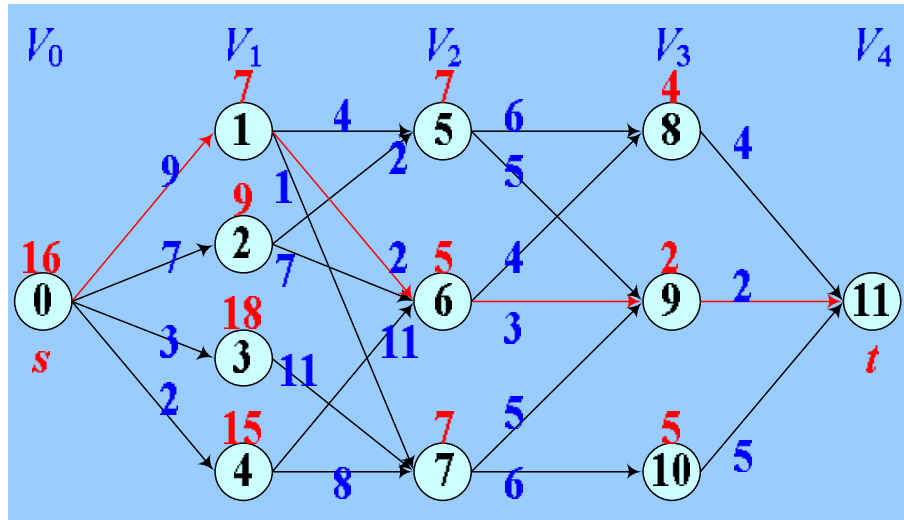
$$C(j)=\min\{c(j,r)+C(r)\mid r\in \mathrm{NextSect}(j)\}$$

改为

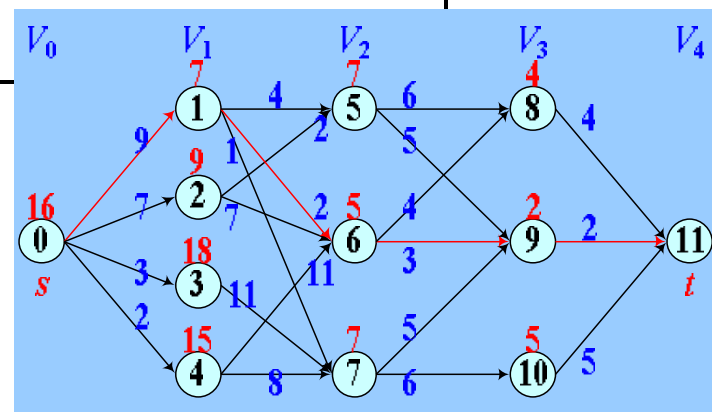
$$C(j)=\min\{c(j,r)+C(r)\mid j<r<n\}$$

因为每个子问题都需要计算，这里使用动态规划方法从规模最小的子问题开始逐步计算源点 s 到汇点 t 的最短路径的成本 $C(s)$，也就是从由汇点开始寻找最小成本路径，用由后向前的处理方法计算源点 s 到汇点 t 的最短路径的成本 $C(s)$。

另外，为了方便获得最小成本路径，可以使用 $\mathrm{Next}(j)$ 记录顶点 j 到汇点的最短路径中 j 的后继顶点。

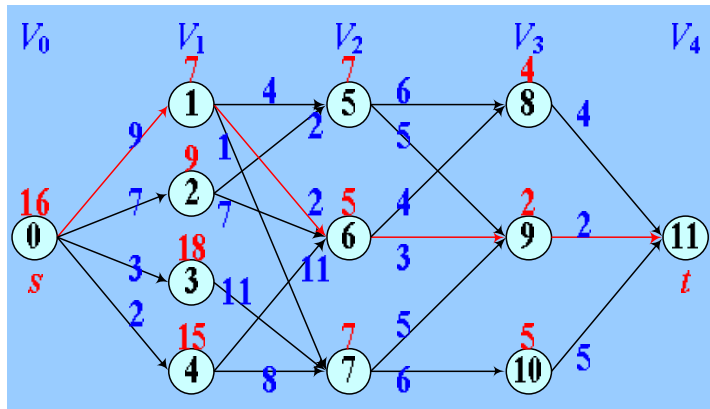


```
#include "algorithm.h"
auto MultiGraph(const Matrix<double> &G)
{   // 邻接矩阵G, 顶点按段序统一编号
    int n = G.rows(), t = n - 1; // 顶点数, 汇点
    vector<double> C(n); // C[j]是j到汇点的最小成本
    vector<int> Next(n); // Next[j]是j到汇点的最短路径中j的后继顶点
    C[t] = 0; // 汇点成本为0
    for(int j = t - 1; j >= 0; --j) // 从最后一个顶点开始往前计算
    {   // 从j的后一个阶段中选择顶点r, 使G(j, r)+C[r]最小
        int r = j + 1;
        for(int i = r; i < n; ++i)
            if(G(j, i) + C[i] < G(j, r) + C[r]) r = i;
        C[j] = G(j, r) + C[r], Next[j] = r;
    }
    return pair{C[0], Next}; // 最优成本, 后继顶点
}
```



显然，r 的确定可以在 $O(n)$ 时间内完成（内层for循环）。因此，完成向前处理的for循环需耗时 $O(n^2)$（因为对任何顶点 j，均需对 $r \in [(j+1),(n-1)]$ 进行处理）。

```
for(int j = t - 1; j >= 0; --j) // 从最后一个顶点开始往前计算
{   // 从j的后一个阶段中选择顶点r, 使G(j, r)+C[r]最小
    int r = j + 1;
    for(int i = r; i < n; ++i)
        if(G(j, i) + C[i] < G(j, r) + C[r]) r = i;
    C[j] = G(j, r) + C[r], Next[j] = r;
}
```

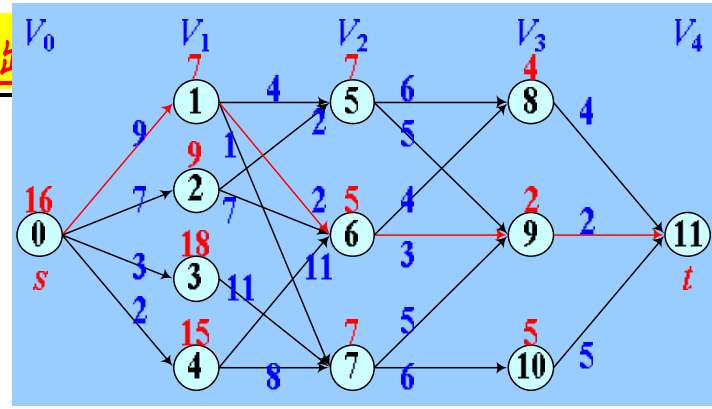


2. 最短路径

使用记录下来的决策生成最短路径。$\mathrm{Next}(j)$ 记录了顶点 j 到汇点的最短路径中 j 的后继顶点，由此可以很容易地求出从源点到汇点的最小成本路径。

```
auto MultiGraph(const vector<int> &Next, int m)
{   // 记录下来的决策, 段数
    vector<int> X(m); // X[i]是最短路径中第i阶段选取的顶点
    X[0] = 0;
    for(int i = 0; i < m - 1; ++i)
        X[i + 1] = Next[X[i]];
    return X;
}
```

生成路径的for循环需耗时 $O(m)$。因为 $m < n$，所以也可以说生成路径的for循环需耗时 $O(n)$。



6.3.3 测试

1. 测试程序

使用图7-1所示的图。

```
int main()
{   int n = 12, m = 5;
    Matrix<double> G(n, n, inf); //  空图(权值无穷大)
    G(0, 1) = 9, G(0, 2) = 7, G(0, 3) = 3, G(0, 4) = 2; // V0-V1
    G(1, 5) = 4, G(1, 6) = 2, G(1, 7) = 1, G(2, 5) = 2, G(2, 6) = 7,
                 G(3, 7) = 11, G(4, 6) = 11, G(4, 7) = 8; // V1-V2
    G(5, 8) = 6, G(5, 9) = 5, G(6, 8) = 4, G(6, 9) = 3,
                 G(7, 9) = 5, G(7, 10) = 6; // V2-V3
    G(8, 11) = 4, G(9, 11) = 2, G(10, 11) = 5; // V3-V4
    auto [C, Next] = MultiGraph(G);
    cout << C << endl; // 16
    auto X = MultiGraph(Next, m);
    cout << to_string(X, m, "-") << endl; // 0-1-6-9-11
}
```

2. 计算步骤

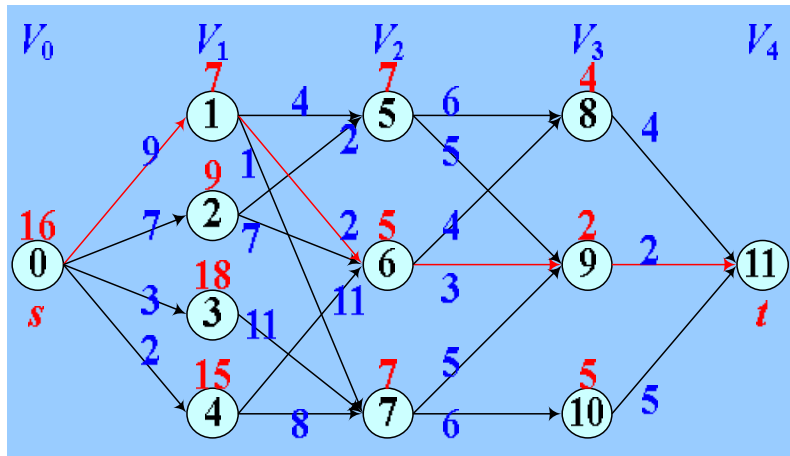
最小成本计算步骤如下。

$$C(8)=4, C(9)=2, C(10)=5$$

$$C(5)=\min\{6+C(8), 5+C(9)\}=7$$
$$C(6)=\min\{4+C(8), 3+C(9)\}=5$$
$$C(7)=\min\{5+C(9), 6+C(10)\}=7$$

$$C(1)=\min\{4+C(5), 2+C(6), 1+C(7)\}=7$$
$$C(2)=\min\{2+C(5), 7+C(6)\}=9$$
$$C(3)=11+C(7)=18$$
$$C(4)=\min\{11+C(6), 8+C(7)\}=15$$

$$C(0)=\min\{9+C(1), 7+C(2), 3+C(3), 2+C(4)\}=16$$



决策记录步骤如下。

$$\mathrm{Next}(8)=\mathrm{Next}(9)=\mathrm{Next}(10)=11$$
$$\mathrm{Next}(5)=\mathrm{Next}(6)=\mathrm{Next}(7)=9$$
$$\mathrm{Next}(1)=6,\mathrm{Next}(2)=5,\mathrm{Next}(3)=7,\mathrm{Next}(4)=7$$
$$\mathrm{Next}(0)=1$$

设这条最小成本路径是 $s=0,v_1,v_2,v_3,t=11$，则

$$v_1=\mathrm{Next}(s)=\mathrm{Next}(0)=1$$
$$v_2=\mathrm{Next}(v_1)=\mathrm{Next}(1)=6$$
$$v_3=\mathrm{Next}(v_2)=\mathrm{Next}(6)=9$$

6.4 每对顶点之间的最短路径

6.4.1 问题描述

已知 $G=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点的加权图（有向或无向），用邻接矩阵表示。求图中每对顶点之间最短路径的长度，即求矩阵 A，A 中的元素 $A(i,j)$ 表示 G 中的顶点 i 和 j 之间最短路径的长度。

这里首先针对权值非负的情况分析最优子结构性质和递推关系，然后放宽该条件构造动态规划算法。

6.4.2 最优子结构性质与递推关系

1. 最优子结构性质

考察 G 中一条由 i 到 j 的最短路径（$i \neq j$）。该路径由 i 出发，通过一些中间顶点（也可能没有），在 j 处结束。可以假定这条路径不含圈，如果有圈，则可去掉这个圈，这是因为去掉圈后不会增加路径长度。如果 k 是这条路径上的一个中间顶点，那么由 i 到 k 和由 k 到 j 的两条子路径分别是由 i 到 k 和由 k 到 j 的最短路径。否则，这条路径就不是由 i 到 j 的最短路径（如图7-3所示）。

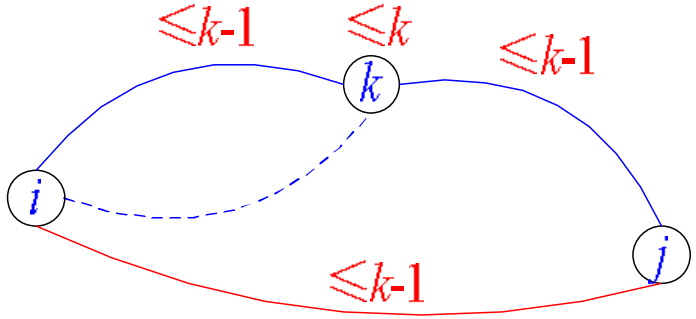
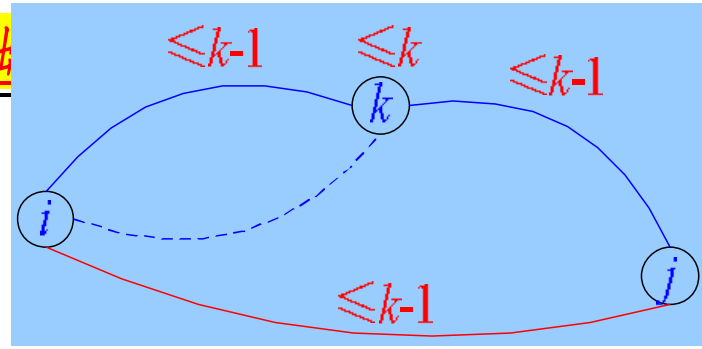


图7-3 两点间最短路径



2. 递推关系

由上述分析可知，每对顶点之间的最短路径是一个递推的过程。如图7-3所示，分析递推过程的关键有以下几点。

（1）将顶点从0开始编号。若 k 是 i 到 j 的最短路径上编号最高的中间顶点，则 i 到 k 和 j 到 k 的最短路径上不会有比编号 $k-1$ 还大的中间顶点。

（2）用 $A_{ij}^{[k]}$ 表示从 i 到 j 的中间顶点最大编号不超过 k 的最短路径 α 的长度。如果 α 不经过顶点 k，那么 α 的中间顶点最大编号不超过 $k-1$，所以 $A_{ij}^{[k]}=A_{ij}^{[k-1]}$；如果 α 经过顶点 k，那么 $A_{ij}^{[k]}=A_{ik}^{[k-1]}+A_{kj}^{[k-1]}$。

（3）要获得从 i 到 j 的中间顶点最大编号不超过 k 的最短路径的长度，需要考察不经过 k（长度为 $A_{ij}^{[k-1]}$）和经过 k（长度为 $A_{ik}^{[k-1]}+A_{kj}^{[k-1]}$）这两种情况，选取长度较小的。因此，$A_{ij}^{[k]}=\min\left(A_{ij}^{[k-1]},A_{ik}^{[k-1]}+A_{kj}^{[k-1]}\right),0\le k<n$。

综上所述，要获得任意顶点间的最短路径，可以先建立一个初始矩阵 $A^{[-1]}$，它等于成本矩阵COST。然后求中间顶点最大编号为0的任意顶点间最短路径矩阵 $A^{[0]}$，再求中间顶点最大编号为1的最短路径矩阵 $A^{[1]}$，以此类推，直到求出 $A^{[n-1]}$。

根据上述分析，可以构造出下列获得任意顶点间最短距离的Floyd算法。其中 $A(i,j)$存储i到j的最短距离，Next(i,j)存储i到j的最短路径中i的后继顶点。

$$A_{ij}^{[k]} = \min\left(A_{ij}^{[k-1]}, A_{ik}^{[k-1]} + A_{kj}^{[k-1]}\right), 0 \le k < n$$

$$A_{ij}^{[k]} = \min\left(A_{ij}^{[k-1]}, A_{ik}^{[k-1]} + A_{kj}^{[k-1]}\right), 0 \le k < n$$

6.4.3 动态规划算法

1. 任意顶点间最小成本（最优值）

```
#include "algorithm.h"
auto Floyd(const Matrix<double> &G)
{   int n = G.rows(); // n是顶点数
    auto A = G; // A(-1)=G, A(i, j)是i到j的最短距离
    Matrix<int> Next(n, n); // Next(i, j)是i到j的最短路径中i的后继顶点
    for(int i = 0; i < n; ++i) //  建立初始Next
        for(int j = 0; j < n; ++j)
            Next(i, j) = j;
    for(int k = 0; k < n; ++k) // A(0)到A(n-1)的循环控制
        for(int i = 0; i < n; ++i)
            for(int j = 0; j < n; ++j)
            {   auto t = A(i, k) + A(k, j);
                if(t < A(i, j)) A(i, j) = t, Next(i, j) = Next(i, k);
            }
    return pair{A, Next}; //  最短距离, 后继顶点
}
```

2. 检查结果的正确性

如果图中有负权值的边，则需要检查结果的正确性。要判断结果是否正确，只需要判断“对任何 $0 \le i, j, k < n$ 都有 $A_{ij}^{[n-1]} \le A_{ik}^{[n-1]} + A_{kj}^{[n-1]}$”是否成立[①]。

```
bool ValidFloyd(const Matrix<double> &A) // 判断结果的正确性
{   int n = A.rows();
    for(int i = 0; i < n; ++i)
        for(int j = 0; j < n; ++j)
            for(int k = 0; k < n; ++k)
                if(A(i, j) > A(i, k) + A(k, j)) return false;
    return true;
}
```

① Wang Zhixi, Wang Yana, Hu Binliang, Liu Yu. An Algorithm of Plus - Closures of Loop - Nonnegative Matrices over Idempotent Semirings and its Applications[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 347-350: 2208 - 2213

3. 复杂性分析

过程Floyd计算 $A^{[n-1]}$ 所需要的时间是 $\Theta(n^3)$。这是因为最内层循环体共迭代了 n^3 次，而且整个循环的耗时与矩阵 A 中的数据无关，耗时 $\Theta(n^3)$。

很容易看出，过程ValidFloyd耗时 $O(n^3)$。

4. 任意顶点间最短路径（最优解）

```
auto Path(int i, int j, const Matrix<int> &Next) // 最短路径(i, j)的所有顶点
{   vector<int> X; // 记录最短路径中的顶点
    for(; i != j; i = Next(i, j)) X.push_back(i);
    X.push_back(j);
    return X;
}
```

显然，构造一条最短路径需要的时间是 $O(n)$，这是因为一条最短路径最多包含 n 个顶点。

6.4.4 一个实例☼

1. 实例分析

对于如图7-4所示的有向加权图，Floyd算法得到的Dist、Next和最短路径如图7-5所示。

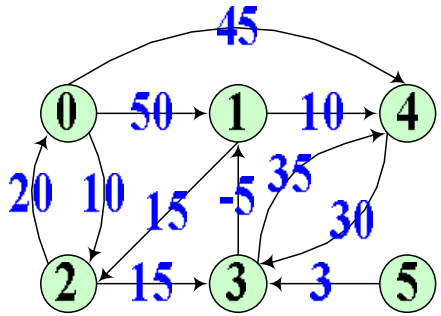


图7-4 一个有向加权图

Dist

0	20	10	25	30	inf
35	0	15	30	10	inf
20	10	0	15	20	inf
30	-5	10	0	5	inf
60	25	40	30	0	inf
33	-2	13	3	8	0

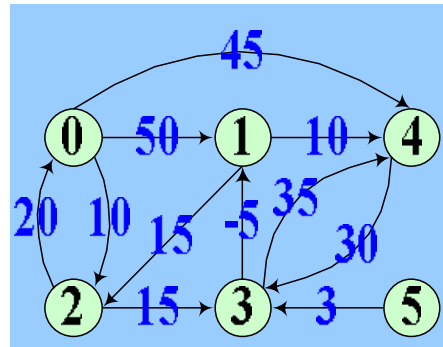
Next

2	2	2	2	2	5
2	2	2	2	4	5
0	3	3	3	3	5
1	1	1	1	1	5
3	3	3	3	4	5
3	3	3	3	3	5

AllPath

0	0-2-3-1	0-2	0-2-3	0-2-3-1-4	0
1-2-0	1	1-2	1-2-3	1-4	1
2-0	2-3-1	2	2-3	2-3-1-4	2
3-1-2-0	3-1	3-1-2	3	3-1-4	3
4-3-1-2-0	4-3-1	4-3-1-2	4-3	4	4
5-3-1-2-0	5-3-1	5-3-1-2	5-3	5-3-1-4	5

图7-5　Floyd算法实例分析



2. 显示所有最短路径

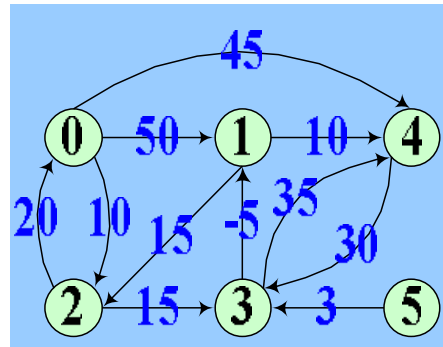
```
void Path(const Matrix<int> &Next) // 显示所有最短路径
{   int n = Next.rows();
    for(int i = 0; i < n; ++i)
    {   for(int j = 0; j < n; ++j)
        {   auto X = Path(i, j, Next);
            cout << to_string(X, X.size(), "-") << " ";
        }
        cout << endl;
    }
}
```

3. 测试程序

使用如图7-4所示的赋权有向图，测试结果如图7-5所示。

```
int main()
{   Matrix<double> G =
    {   {0, 50, 10, inf, 45, inf},
        {inf, 0, 15, inf, 10, inf},
        {20, inf, 0, 15, inf, inf},
        {inf, -5, inf, 0, 35, inf},
        {inf, inf, inf, 30, 0, inf},
        {inf, inf, inf, 3, inf, 0}
    };
    auto [A, Next] = Floyd(G);
    if(not ValidFloyd(A)) return -1;
    Path(Next);
}
```

i \ j	0	1	2	3	4	5
0	0	0-2-3-1	0-2	0-2-3	0-2-3-1-4	0
1	1-2-0	1	1-2	1-2-3	1-4	1
2	2-0	2-3-1	2	2-3	2-3-1-4	2
3	3-1-2-0	3-1	3-1-2	3	3-1-4	3
4	4-3-1-2-0	4-3-1	4-3-1-2	4-3	4	4
5	5-3-1-2-0	5-3-1	5-3-1-2	5-3	5-3-1-4	5



6.5 最长公共子序列※

6.5.1 问题

1. 相关定义

给定序列 $X=x_1x_2\ldots x_m$，$Z=z_1z_2\ldots z_k$。若存在一个严格递增的下标序列 $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$，使得对所有 $j=1,2,\ldots,k$，都有 $z_j=x_{i_j}$，则称 Z 是 X 的子序列。例如，序列 $Z=BCDB$ 是序列 $X=ABCBDAB$ 的子序列，相应的递增下标序列为(2, 3, 5, 7)。

给定序列 X 和 Y，若序列 Z 既是 X 的子序列又是 Y 的子序列，则称 Z 是序列 X 和 Y 的公共子序列。例如，序列{1, 2, 2}是序列{1, 2, 2, 1}和{1, 2, 1, 2}的公共子序列。

2. 问题描述

给定序列 $X=x_1x_2\ldots x_m$ 和 $Y=y_1y_2\ldots y_n$，找出 X 和 Y 的最长公共子序列。

6.5.2 最优子结构性质与递推关系

1. 最优子结构性质

下面分3种情形讨论最长公共子序列问题的最优子结构性质。这里假定序列 $X=x_1x_2\ldots x_m$ 和 $Y=y_1y_2\ldots y_n$ 的最长公共子序列为 $Z=z_1z_2\ldots z_k$，并且为了方便，将序列 $X=x_1x_2\ldots x_m$ 的前缀 $x_1x_2\ldots x_i$ 记作 X_i（$0\leq i\leq m$）。

（1）若 $x_m=y_n$，则 $z_k=x_m=y_n$，且 Z_{k-1} 是 X_{m-1} 和 Y_{n-1} 的最长公共子序列。例如，因为$BCBA$是$ABCBDA$和$BDCABA$的最长公共子序列，所以BCB是$ABCBD$和$BDCAB$的最长公共子序列。

（2）若 $x_m\neq y_n$ 且 $z_k\neq x_m$，则 Z 是 X_{m-1} 和 Y 的最长公共子序列。例如，因为BCB是$ABCBD$和$BDCAB$的最长公共子序列，所以BCB是$ABCB$和$BDCAB$的最长公共子序列。

（3）若 $x_m\neq y_n$ 且 $z_k\neq y_n$，则 Z 是 X 和 Y_{n-1} 的最长公共子序列。

由此可见，2个序列的最长公共子序列包含了这2个序列前缀的最长公共子序列。因此，最长公共子序列问题具有最优子结构性质。

2. 递推关系

由最长公共子序列问题的最优子结构性质建立原问题与子问题最优值之间的递推关系。用 $c(i,j)$ 记录序列 $X_i=x_1x_2\dots x_i$ 和 $Y_j=y_1y_2\dots y_j$ 的最长公共子序列的长度。当 $i=0$ 或 $j=0$ 时，空序列是 X_i 和 Y_j 的最长公共子序列，所以 $c(i,j)=0$。由最优子结构性质可知

$$c(i,j)=\begin{cases}0 & i=0 \ \vee \ j=0\\ c(i-1,j-1)+1 & i,j>0 \ \wedge \ x_i=y_j\\ \max\{c(i,j-1),c(i-1,j)\} & i,j>0 \ \wedge \ x_i\neq y_j\end{cases}$$

(1) 若 $x_m=y_n$，则 $z_k=x_m=y_n$，且 Z_{k-1} 是 X_{m-1} 和 Y_{n-1} 的最长公共子序列。

(2) 若 $x_m\neq y_n$ 且 $z_k\neq x_m$，则 Z 是 X_{m-1} 和 Y 的最长公共子序列。

(3) 若 $x_m\neq y_n$ 且 $z_k\neq y_n$，则 Z 是 X 和 Y_{n-1} 的最长公共子序列。

$$c(i,j)=\begin{cases}0 & i=0 \ \vee \ j=0\\ c(i-1,j-1)+1 & i,j>0 \ \wedge \ x_i=y_j\\ \max\{c(i,j-1),c(i-1,j)\} & i,j>0 \ \wedge \ x_i\neq y_j\end{cases}$$

6.5.3 动态规划算法

1. 计算最长公共子序列的长度

按照子问题规模由小到大（即原序列长度由小到大）的顺序计算。

```
#include "algorithm.h"
template<class Seq>
auto LCSSize(const Seq &X, const Seq &Y)
{   int m = X.size(), n = Y.size();
    Matrix<int> C(m + 1, n + 1); // (m+1) * (n+1)矩阵C
    for(int i = 0; i <= m; ++i)
        for(int j = 0; j <= n; ++j)
            if(i <= 0 or j <= 0) C(i, j) = 0;
            else if(X[i - 1] == Y[j - 1]) C(i, j) = C(i - 1, j - 1) + 1;
            else C(i, j) = max(C(i - 1, j), C(i, j - 1));
    return C; // C(m, n)为最长公共子序列的长度
} // 耗时O(m * n)
```

【复杂性】初始化耗时$O(mn)$。循环体执行一次耗时$O(1)$，共执行$O(mn)$次，共耗时$O(mn)$。由此可见，该算法共耗时$O(mn)$。

$$c(i,j)=\begin{cases}0 & i=0 \ \vee \ j=0\\ c(i-1,j-1)+1 & i,j>0 \ \wedge \ x_i=y_j\\ \max\{c(i,j-1),c(i-1,j)\} & i,j>0 \ \wedge \ x_i\neq y_j\end{cases}$$

2. 构造最长公共子序列

```
template<class Seq>
auto LCS(const Seq &X, const Seq &Y)
{   auto C = LCSSize(X, Y); // 计算最优值, 耗时O(m * n)
    // 记下原序列长度和公共子序列长度
    int i = X.size(), j = Y.size(), k = C(i, j);
    Seq Z;
    while(k > 0) // 逆向记录最长公共子序列
        if(X[i - 1] == Y[j - 1])
            Z.push_back(X[i - 1]), --i, --j, --k;
        else if(C(i, j) == C(i - 1, j))
            --i; // 使用X[(i-1)]和Y[j]的最长公共子序列
        else // 即C(i, j) == C(i, j-1)
            --j; // 使用X[i]和Y[(j-1)]的最长公共子序列
    reverse(begin(Z), end(Z)); // 反转结果得到最长公共子序列
    return Z;
} // 耗时O(m * n)
```

若 $x_m=y_n$，则 $z_k=x_m=y_n$，且 Z_{k-1} 是 X_{m-1} 和 Y_{n-1} 的最长公共子序列。

若 $x_m\neq y_n$ 且 $z_k\neq x_m$，则 Z 是 X_{m-1} 和 Y 的最长公共子序列。

若 $x_m\neq y_n$ 且 $z_k\neq y_n$，则 Z 是 X 和 Y_{n-1} 的最长公共子序列。

【复杂性】计算最优值耗时$O(mn)$。循环体执行一次耗时$O(1)$，由每次执行循环体都会导致i或j减少可知，循环体共执行$O(m+n)$次，共耗时$O(m+n)$。反转结果耗时$O(\min(m,n))$。由此可见，该算法共耗时$O(mn)$。

```
template<class Seq>
auto LCS(const Seq &X, const Seq &Y)
{   auto C = LCSSize(X, Y); // 计算最优值
    // 记下原序列长度和公共子序列长度
    int i = X.size(), j = Y.size(), k = C(i, j);
    Seq Z;
    while(k > 0) // 逆向记录最长公共子序列
        if(X[i - 1] == Y[j - 1])
            Z.push_back(X[i - 1]), --i, --j, --k;
        else if(C(i, j) == C(i - 1, j))
            --i; // 使用X[(i-1)]和Y[j]的最长公共子序列
        else // 即C(i, j) == C(i, j-1)
            --j; // 使用X[i]和Y[(j-1)]的最长公共子序列
    reverse(begin(Z), end(Z)); // 反转结果得到最长公共子序列
    return Z;
} // 耗时 O(m * n)
```

3. 测试程序☼

```
int main()
{   string X = "ABCBDAB", Y = "BDCABA";
    cout << "LCS(" << X << ", " << Y << ") = " << LCS(X, Y) << endl;
    vector<int> U = {1, 2, 2, 1}, V = {1, 2, 1, 2};
    cout << "LCS(" << U << ", " << V << ") = " << LCS(U, V) << endl;
}
```

```
LCS(ABCBDAB, BDCABA) = BCBA
LCS(1 2 2 1, 1 2 1 2) = 1 2 2
```

6.6 0/1背包问题※

有 n 件物品，第 i 件重量和价值分别是 w_i 和 v_i 。将其中一些物品装入容量为 c 的背包中，要求每件物品或者整体装入或者不装入。0/1背包问题就是要给出装包算法，使得装入物品的总价值最大。

该问题的形式化描述是，给定正数 c 及正数数组 $\{v_i\}_{i=0}^{n-1}$ 和 $\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$，求满足 $\sum\{w_i x_i\}_{i=0}^{n-1} \le c$ 的0/1数组 $\{x_i\}_{i=0}^{n-1}$，使得 $\sum\{v_i x_i\}_{i=0}^{n-1}$ 最大。

6.6.1 最优子结构性质和递推关系

1. 最优子结构性质

设 $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ 是原问题的一个最优解，则 $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ 是子问题“求满足 $\sum\{w_i x_i\}_{i=1}^{n-1} \le c - w_0 y_0$ 的0/1数组 $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$，使得 $\sum\{v_i x_i\}_{i=1}^{n-1}$ 最大”的一个最优解。

否则，设 $(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ 是上述子问题的一个比 $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ 更优的解。此时 $\sum\{v_i z_i\}_{i=1}^{n-1} > \sum\{v_i y_i\}_{i=1}^{n-1}$，且 $\sum\{w_i z_i\}_{i=1}^{n-1} \le c - w_0 y_0$。因此 $v_0 y_0 + \sum\{v_i z_i\}_{i=1}^{n-1} > \sum\{v_i y_i\}_{i=0}^{n-1}$，且 $w_0 y_0 + \sum\{w_i z_i\}_{i=1}^{n-1} \le c$。

这说明 $(y_0, z_1, \ldots, z_{n-1})$ 是原问题的一个比 $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ 更优的解，与 $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ 是原问题的最优解矛盾。

2. 递推关系

设原问题的子问题“求满足 $\sum\{w_k x_k\}_{k=i}^{n-1} \le y$ 的0/1数组 $\{x_k\}_{k=i}^{n-1}$，使得 $\sum\{v_k x_k\}_{k=i}^{n-1}$ 最大”的最优值为 $m(i,y)$，即 $m(i,y)$ 是背包容量为 y，可选择物品为 $i, i+1, \ldots, n-1$ 时0/1背包问题的最优值。由0/1背包问题的最优子结构性质，可以建立计算 $m(i,y)$ 的递推关系式如下。

$$m(n-1,y) = \text{iif}(\ w_{n-1} > y, 0, v_{n-1})$$

for i=0 to n-2

$$m(i,y) = \begin{cases} m(i+1,y) & w_i > y \\ \max\{m(i+1,y), m(i+1,y-w_i)+v_i\} & w_i \le y \end{cases}$$

【说明】

- 对于物品n-1，若$w_{n-1}>y$，则该物品不能装包；否则，该物品可以装包。
- 对于物品i（$0\le i<n-1$），若$w_i>y$，则只能在剩余物品中选择最优装包方式；否则可选择是否将物品i装包。
- 若物品i不装包，则可在剩余物品中按容量y选择最优装包方式；若物品i装包，则可在剩余物品中按容量$y-w_i$选择最优装包方式。从这两种方式中选取较优的装包方式。

$$m(n-1,y)=\text{iif}(\ w_{n-1}>y,0,v_{n-1})$$

for i=0 to n-2

$$m(i,y)=\begin{cases} m(i+1,y) & w_i>y \\ \max\{m(i+1,y),m(i+1,y-w_i)+v_i\} & w_i\le y \end{cases}$$

6.6.2 算法描述与分析

基于以上讨论，当 $w_i(0 \leq i < n)$ 和 c 为正数时，若用一种称为剩余表的数据结构 m 来存储 $m(i,y)$ 的值，则可以设计出解0/1背包问题的下述动态规划算法（因为有大量子问题不需要计算，这里采用备忘录方法）。该剩余表是一个map数组，第 i 号元素表示当前正在考虑的物品，map记录的第一个分量表示背包当前剩余容量 y，第二个分量存储 $m(i,y)$ 的值。由此可知，剩余表的变量类型可规定为“vector<map<double, double>>”。

1. 计算最优值

（1）变量声明及初始化。

```
#include "Knap.h" // PrintSolution
auto Knap_v(vector<double> &V, vector<double> &W, double c)
{   // 效益数组, 重量数组, 容量, 这一组物品是按照重量升序排列的
    int n = min(V.size(), W.size()); // 物品数
    vector<map<double, double>> M(n); // 剩余表
    Sort(V, W); // 将物品按单价降序排列
```

（2）递推公式的实现。

```
function<double(int, double)>
m = [&](int i, double y) // 最优值m(i, y)
{   if(M[i].find(y) != M[i].end()) return M[i][y]; // 已经计算过，返回
    // 否则，开始递归计算
    auto &v = M[i][y]; // 创建m(i, y)
    if(i >= n - 1) v = (W[i] > y) ? 0 : V[i];
    else if(W[i] > y) v = m(i + 1, y);
    else v = max(m(i + 1, y), m(i + 1, y - W[i]) + V[i]);
    return v;
}; // 调用m(0, c)耗时O(n^2 * 2^n)
```

（3）递推公式的调用。

```
auto fv = m(0, c); // 最优值
return M;
} // 耗时O(n^2 * 2^n)
```

$m(n-1,y) = \text{iif}(\ w_{n-1} > y, 0, v_{n-1})$

for i=0 to n-2

$$m(i,y) = \begin{cases} m(i+1,y) & w_i > y \\ \max\{m(i+1,y), m(i+1,y-w_i)+v_i\} & w_i \le y \end{cases}$$

2. 构造最优解

按上述算法计算出剩余表 m 后，$m(0,c)$ 给出了所要求的0/1背包问题的最优值。相应的最优解可由下述算法计算。如果 $m(0,c)>m(1,c)$，则 $x_0=1$，否则 $x_0=0$。当 $x_0=0$ 时，由 $m(1,c)$ 继续构造最优解。当 $x_0=1$ 时，由 $m(1,c-w_0)$ 继续构造最优解。依此类推，可构造出相应的最优解 $(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$。

（1）计算剩余表。耗时 $O(n^2\times 2^n)$。

```
auto Knap(vector<double> &V, vector<double> &W, double c)
{   // 效益数组, 重量数组, 容量
    int n = min(V.size(), W.size()); // 物品数
    auto M = Knap_v(V, W, c); // 计算剩余表, 耗时O(n^2 * 2^n)
```

（2）计算最优解。耗时$O(n^2)$。

```
// 计算最优解, 耗时O(n^2)
vector<bool> X(n, 0); // 解向量初始化为0
double y = c; // 剩余容量初始值为c
for(int i = 0; i < n - 1; ++i) // i in [0 .. n-2]
    if(M[i][y] > M[i + 1][y])
        X[i] = 1, y -= W[i];
if(M[n - 1][y] > 0) // i = n-1
    X[n - 1] = 1;
```

（3）返回结果。

```
    return pair{M[0][c], X}; // 最优值, 最优解
} // 耗时O(n^2 * 2^n)
```

$m(n-1,y) = \text{iif}(\ w_{n-1} > y, 0, v_{n-1})$

for i=0 to n-2

$$m(i,y) = \begin{cases} m(i+1,y) & w_i > y \\ \max\{m(i+1,y),\ m(i+1,y-w_i)+v_i\} & w_i \le y \end{cases}$$

3. 复杂性分析

这是因为子问题个数是 (i,y) 对的总数，而 i 有 n 种取值，y 可能有 2^n 种取值，所以子问题个数为 $O(n\times 2^n)$。由求解每个子问题耗时 $O(\log 2^n)=O(n)$ 可知，计算最优值的算法耗时 $O(n^2\times 2^n)$。

容易看出，构造最优解的算法耗时 $O(n\log 2^n)=O(n^2)$。

实际上，0/1背包问题属于 NPC，目前没有找到有效算法。

```
{   if(M[i].find(y) != M[i].end()) return M[i][y];
    auto &v = M[i][y];
    if(i >= n - 1) v = (W[i] > y) ? 0 : V[i];
    else if(W[i] > y) v = m(i + 1, y);
    else v = max(m(i + 1, y), m(i + 1, y - W[i]) + V[i]);
    return v;
};
```

```
vector<bool> X(n, 0);
double y = c;
for(int i = 0; i < n - 1; ++i)
    if(M[i][y] > M[i + 1][y])
        X[i] = 1, y -= W[i];
if(M[n - 1][y] > 0) // i = n-1
    X[n - 1] = 1;
```

4. 剩余表

设有5件物品，重量数组和效益数组分别是$W = \{2, 2, 6.5, 5, 4\}$和$V = \{6, 3, 5.5, 4, 6\}$，背包容量为10，则上述算法生成的剩余表如图7-6所示。由图7-6可以看出，该算法只计算了18个子问题，比子问题总数5*32少很多。

w:*v*	*i*	1.5	2	3.5	4	6	8	10
2:6	0							15
2:3	1						9	10
4:6	2					6	6	10
6.5:5.5	3		0		0	6	6	10
5:4	4	0	0	0	0	6	6	6

图7-6　剩余表

$$m(n-1,y) = \text{iif}(\ w_{n-1} > y, 0, v_{n-1})$$

for i=0 *to* n-2

$$m(i,y) = \begin{cases} 0 & w_i > y \\ \max\{m(i+1,y),\ m(i+1,y-w_i)+v_i\} & w_i \le y \end{cases}$$

6.6.3 测试程序☼

```
int main()
{   int n = 5;
    vector<double> V = {6, 3, 5.5, 4, 6}; // 效益数组
    vector<double> W ={2, 2, 6.5, 5, 4}; // 重量数组
    double c = 10; // 背包容量
    auto [fv, X] = Knap(V, W, c);
    cout << "最优值: " << fv << endl;
    PrintSolution(V, W, X);
}
```

```
最优值: 15
效益: 6 3 6 5.5 4
重量: 2 2 4 6.5 5
答案: 1 1 1 0 0
```

6.7 练习题

6.7.1 基础知识题

1. 使用一种程序设计语言或伪代码描述计算矩阵连乘最优次序的递归算法，并分析其时间复杂性。

2. 使用一种程序设计语言或伪代码描述求矩阵连乘最优次序的备忘录方法(使用递归方法)，并分析其时间复杂性。

3. 使用一种程序设计语言或伪代码描述求矩阵连乘最优次序的动态规划算法(使用循环结构)，并分析其时间复杂性。

4. 使用一种程序设计语言或伪代码描述求任意顶点间最短路径的动态规划算法，并分析其时间复杂性。

5. 使用一种程序设计语言实现多段图的动态规划算法，并分析其时间复杂性。

6.7.2 实验题

1. 使用一种程序设计语言实现求任意两个有限序列的最长公共子序列的动态规划算法，并分析其时间复杂性。

2. 使用一种程序设计语言或伪代码描述求解0/1背包问题的动态规划算法，并分析其时间复杂性(假设所使用的程序设计语言已经定义vector和map等数据结构)。

3. 改写Floyd算法的程序，从一个有向图的邻接矩阵开始计算其自反传递闭包RTC。若从顶点i到顶点j有通路，则RTC[i][j]=1，否则RTC[i][j]=0。要求代码的复杂性为$O(n^3)$，其中n为图的顶点数。

4. 使用一种程序设计语言实现求解下列子集和问题的动态规划算法，并分析其时间复杂性。

设$S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$是一个正整数的集合，t是一个正整数，寻找S的满足$\sum S' \le t$且使得$\sum S'$最大的子集S'。

【提示】可通过将S当作0/1背包问题的效益数组和重量数组，t当作背包容量，参考0/1背包问题的动态规划算法来构造该算法。

6.7.3 进阶训练题

1. 请使用非递归方法输出矩阵连乘积最优次序，并分析其时间复杂性。

2. 旅行商问题的动态规划算法。使用动态规划方法从一个无向加权图中选取一条总权值最小的Hamilton回路。

3. 顶点覆盖问题的动态规划算法。为最小顶点覆盖问题（输出一个最小顶点覆盖）设计动态规划算法。

4. 集合覆盖问题的动态规划算法。已知一个有限集X和X的一组子集F，如果F中所有子集的并等于X，则称F覆盖X。请使用动态规划方法从F中选取一组覆盖X且子集数目最少的子集。

5. 最大团问题的动态规划算法。为最大团问题（输出一个最大团）设计动态规划算法。

6. 子集和问题的动态规划算法。使用动态规划方法从一个正整数集W中选取一个和最接近正整数t的子集。

7. 均衡划分问题的动态规划算法。为均衡划分问题（将一个正整数集分为和最接近的两个子集）设计动态规划算法。

8. 多机调度问题的动态规划算法。为多机调度问题（输出一种最优调度）设计

动态规划算法。

9. 着色问题的动态规划算法。对一个无向图的每个顶点着色，使图中任何两个相邻顶点都不同色，请使用动态规划方法选取一种颜色数目最少的着色方案。

10. CNF-SAT的动态规划算法。为CNF-SAT设计动态规划算法，用于计算给定合取范式的最大可满足子句数并输出一种最优赋值。相关概念参阅“问题的复杂性”一章（11.2.3和11.4.3小节）。

11. 考查课选题问题的动态规划算法。某一门考查课的任课老师准备了n道考核候选题，每位考生选取m道题完成，要求每两个考生的选题方案之间至少有k道题是不相同的，请问这些候选题能够保证多少考生能够顺利按照要求完成选题。为该问题设计动态规划算法。

12. 考查课出题问题的动态规划算法。某一门考查课的考核方法是由任课老师准备一些考核候选题，每位考生选取m道题完成，要求每两个考生的选题方案之间至少有k道题是不相同的，请问任课老师至少需要准备多少道候选题才能保证n个考生能够顺利按照要求完成选题。为该问题设计动态规划算法。