15章习题答案

- 1.设c(i)为多段图上节点1到目的节点的最短路长度，试列出动态规划的递归式.并就课堂上的例子给出求解过程.

解、

设C(i)为多段图上节点1到节点i的最短路长度，设E为多段图的边的集合，令$A(i)=\{j \mid (j, i)\in E\}$，则递归式为

$$C(i)=\min\{C(j)+c_{ji} \mid j\in A(i)\};$$

2．写出以下背包问题实例的求解过程（递归、元组法）

$n=5,\ P=[6,3,5,4,6], w=[2,2,6,5,4],\ c=10$

- 证明当重量和效益值均为整数时动态规划算法的时间复杂度为

$$O(\min\{2^n, n\Sigma_{1\le i\le n} p_i, nc\})$$

提示:P(i)中每个元组(P,W),都有$P\le\Sigma_{i\le j\le n} p_j$和

$W\le c$. 所以$|P(i)|\le 1+\min\{c, \Sigma_{i\le j\le n} p_j\}$

- 3．设g(i,x)表示物品1,…,i，背包容量x的0/1背包问题的优化效益值。
- (1)试写出g(i,x)满足的动态规划递归关系式
- (2)就以下实例
- n=4,c=20,w=(10,15,6,9),p=(2,5,8,1)
- 计算,并回溯求出优化的物品装法。

$g(i,x)=\max\{g(i-1,x),g(i-1,x-wi)+p_i\}$，$x \geq w_i$

$g(i,x)=g(i-1,x)$, $x<w_i$

对实例：n=4,c=20,w=(10,15,6,9),p=(2,5,8,1)，用元组法计算*g*(4,20)。

- P(1)={(0,0)},(10,2)},Q={(15,5)}
- P(2)={ (0,0)},(10,2), (15,5)},Q={(6,8),(16,10)}
- P(3)={(0,0),(6,8),(16,10)}
- 因(6,8)+(9,1)=(15,9),效益值为9，小于(16,10)的效益值10。所以优化的效益值为10。
- 回溯求解：g(4,20)=g(3,20)，所以x4=0；
- g(3,20)≠g(2,20)，所以x3=1；
- g(2,14)=g(1,14)，所以x2=0；
- g(1,14)≠0，所以x1=1；

3. 子集和数问题：设$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$ 为n个正数的集合，试找出满足以下条件的和数最大的子集J:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \geq c, \quad \sum_{i \in J} s_i \leq c,$$

c是任意给定的常数.

- 该问题是NP-难度问题，试用动态规划法设计一算法.

- 设f(i , y)为{si,…,sn}的约束为y的子集和数问题的优化值,则以下递归式成立

$$f(n,y)=\begin{cases} s_n, & y \ge s_n \\ 0, & y < s_n \end{cases}$$

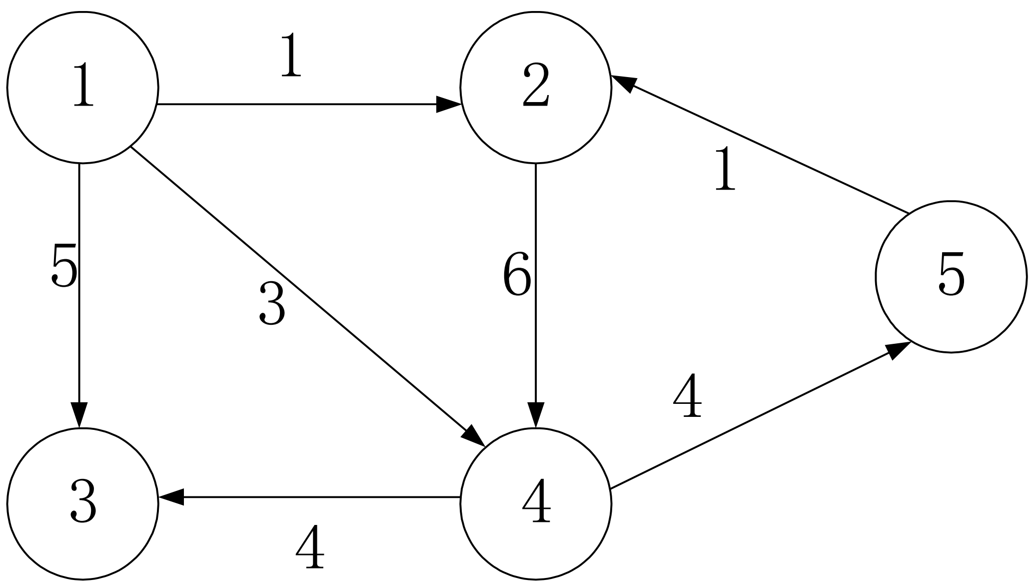
$$f(i,y)=\begin{cases} \max\{f(i+1,y), f(i+1,y-s_i)+s_i\}, & y \ge s_i \\ f(i+1,y), & 0 \le y < s_i \end{cases}$$

- 这是背包问题的特例, 可用元组法求解.

4. 用动态规划法求解以下矩阵乘法链:

r=(10,20,50,1,100), 给出优化的乘法顺序和元素乘法数目.

5. 用动态规划法求下图中各点间的最短路



习题19

- 假设一个项目由n个任务组成,任务之间有先后关系,即某些任务必须在它的先行任务完成后才能执行.整个项目要求在时间t以前完成.假定完成每个任务有2种方式,不同方式所需成本和时间不同. 试设计一个能在给定时间t以前完成所有任务且成本最小的方案.

- 假设项目的n个任务已按拓扑顺序排好，编号为1到n；任务1先执行，接下来是任务2，等等。又假定任务i按第一种方式需花费成本C(i,1)，时间T(i,1)；按第2种方式需成本C(i,2) ，时间T(i,2) 。
- 令cost(i, j)＝任务1到i能在j时间内完成的最小成本，列出cost(i, j)满足的动态规划递归关系式。
- 设n＝3, T=(2,1,4; 3,2,1)

  C=(1,5,2; 2,3,4)，t=8

  试计算cost(4,8)和优化的完成任务方案。

如果在时间j内无法安排前i个任务约定$cost(1,j)=\infty$ 。

令 $cost(0,j)=\infty$ 当$j\le 0$；

$=0 \qquad j>0$

有以下递归关系:

$cost(1,j)=\infty \quad j<T(1,1)$

$=C(1,1) \quad T(1,1)\le j<T(1,2)$ (假定$T(1,1)<T(1,2)$)

$=\min\{C(1,1),C(1,2)\} \quad T(1,2)\le j$ //

$cost(i,j)=\min\{cost(i-1,j-T(i,1))+C(i,1),$

$cost(i-1,j-T(i,2))+C(i,2)\} \quad i>0$

- 就题中实例，计算可得：
- $cost(1,j)=\infty \quad j<2$
- $=1 \quad j\geq 2$
- $cost(2,j)=\infty \quad j<3$
- $=6 \quad 3\leq j<4$
- $=4 \quad j\geq 4$
- $cost(3,j)=\infty \quad j<4$
- $cost(3,j)=10 \quad 4\leq j<5$
- $cost(3,j)=8 \quad 5\leq j<8$
- $cost(3,j)=6 \quad j\geq 8$