16171《线性代数及其应用》期末试卷解析(2016 年 12 月 23 日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分	15	15	18	12	10	10	14	6	100

一、填空题(共 15 分，共 5 小题，每小题 3 分).

1、**考察知识点**　线性空间的维数.

(A 卷)实空间$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c\end{bmatrix}\middle| a,\,b,\,c\in\mathbb{R}\right\}$的维数为______.

解　应填 $\underline{3}$. 事实上，$\{\boldsymbol{E}_{11},\,\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{21},\,\boldsymbol{E}_{22}\}$是$W$的一个基.

(B 卷)实空间$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & 0\end{bmatrix}\middle| a,\,b\in\mathbb{R}\right\}$的维数为______.

解　应填 $\underline{2}$. 事实上，$\{\boldsymbol{E}_{11},\,\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{21}\}$是$W$的一个基.

2、**考察知识点**　有无穷多解的抽象型非齐次线性方程组的通解.

设4元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是它的三个解向量，且$\boldsymbol{\eta}_1=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，则该非齐次线性方程组的通解为______________.

解　应填 $\underline{\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix},\ \forall k\in\mathbb{F}}$. 事实上，$\boldsymbol{\eta}_1$为一个特解，$\{2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}\}$为对应的齐次线性方程组的一个基础解系.

3、**考察知识点**　实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交.

(A 卷)设$\boldsymbol{\alpha}_1=[7,\,5,\,k]^{\mathrm{T}},\,\boldsymbol{\alpha}_2=[2,\,-1,\,-8]^{\mathrm{T}}$为实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量，则$k=$______.

解　应填 $\underline{\frac{9}{8}}$. 事实上，$\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\Rightarrow k=\frac{9}{8}$.

(B 卷)设$\boldsymbol{\alpha}_1=[7,\,5,\,k]^{\mathrm{T}},\,\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,\,2,\,8]^{\mathrm{T}}$为实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量，则$k=$______.

解　应填 $\underline{-\frac{3}{8}}$. 事实上，$\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2\Rightarrow k=-\frac{3}{8}$.

4、**考察知识点**　方阵的 Laurent 多项式的特征值、用特征值法计算方阵的行列式.

(A 卷)设2阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{A}^{-1}|=$______.

解　应填 $\underline{-63}$. 事实上，2阶方阵$\boldsymbol{A}$的全体特征值为$1,\,3$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{A}^{-1}$的全体特征值为$-7,\,9$，可知$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{A}^{-1}|=-63$.

(B 卷)设2阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-8\boldsymbol{A}^{-1}|=$______.

解　应填 $\underline{-12}$. 事实上，2阶方阵$\boldsymbol{A}$的全体特征值为$1,\,2$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-8\boldsymbol{A}^{-1}$的全体特征值为$-6,\,2$，可知$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-8\boldsymbol{A}^{-1}|=-12$.

5、**考察知识点**　实对称矩阵的全体特征值与对应实二次型用正交线性替换法化得的标

准形之间的关系.

(A 卷)设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2，且$\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}$，则$3$元实二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$经过正交线性替换可化为标准形____________.

解 应填$\underline{5y_1^2+5y_2^2+0y_3^2}$. 事实上，$3$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的全体特征值为$5, 5, 0$.

(B 卷)设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为2，且$\boldsymbol{A}^2=4\boldsymbol{A}$，则$3$元实二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$经过正交线性替换可化为标准形____________.

解 应填$\underline{4y_1^2+4y_2^2+0y_3^2}$. 事实上，$3$阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的全体特征值为$4, 4, 0$.

二、单项选择题(共 15 分，共 5 小题，每小题 3 分).

1、**考察知识点** 相似关系的定义与性质.

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为同阶方阵，$\boldsymbol{A}$可逆，则下列叙述错误的是( ).

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征值必为$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$的特征值之和 (B) $\boldsymbol{AB}$相似于$\boldsymbol{BA}$

(C) $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$的特征多项式相同 (D) 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$相似，则$\boldsymbol{B}$可逆

解 应选(A). 事实上，(A)有反例：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$的全体特征值为$1, -1$，$\boldsymbol{B}$的全体特征值为$0, 0$，但$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的全体特征值为$\mathrm{i}, -\mathrm{i}$.

2、**考察知识点** 方阵相似，则迹相等，且行列式相等.

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&a&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&5&b\\0&3&1\end{bmatrix}$相似，则( ).

(A) $a=2, b=0$ (B) $a=2, b=1$ (C) $a=3, b=0$ (D) $a=3, b=1$

解 应选(C). 事实上，

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}\Rightarrow 0+a+4=1+5+1\Rightarrow a=3,$$

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2&-3\\0&1&1\\1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&5&b\\0&3&1\end{vmatrix}\Rightarrow 5=5-3b\Rightarrow b=0.$$

3、**考察知识点** 用列向量组的线性相关性做非齐次线性方程组的唯一解判定.

设非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解，$\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}]$，则下列叙述错误的是( ).

(A) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关 (B) $\boldsymbol{A}$的列秩与$\tilde{\boldsymbol{A}}$的列秩相等

(C) $\tilde{\boldsymbol{A}}$的列向量组线性无关 (D) $\boldsymbol{A}$的列向量组与$\tilde{\boldsymbol{A}}$的列向量组等价

解 应选(C). 事实上，$\tilde{\boldsymbol{A}}$的列向量组一定线性相关.

4、**考察知识点** 实对称矩阵的合同关系的判别.

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同的充要条件为( ).

(A) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似 (B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$具有相同的特征值

(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$具有相同的秩 (D) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$具有相同的正、负惯性指数

解 应选(D). 事实上，(A)、(B)既非充分条件，也非必要条件；(C)仅为必要条件；只有(D)为充要条件.

5、**考察知识点**　正定矩阵的判别.

下列结论中，一定正确的是(　　).

① 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 有 n 个正特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵

② 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶正定矩阵，则对任意正实数 a, b，矩阵 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 正定

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵（$n\geqslant 2$），则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵

④ 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵

(A) ①和②　　　　(B) ②和③　　　　(C) ②和④　　　　(D) ③和④

解　应选(B). 事实上，②、③正确，①、④错误.

三、(共 18 分，共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 11 分)

1、**考察知识点**　向量组的秩与极大无关组，坐标化方法.

在线性空间 $\mathbb{F}[x]_3$ 中，设

$$f_1(x)=1+x^2+x^3,\quad f_2(x)=-1+2x+7x^2+9x^3,\quad f_3(x)=-2+x-x^2,$$

$$f_4(x)=2x+6x^2+8x^3,\quad f_5(x)=x+x^3,$$

求向量组(I) $=\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\}$ 的秩与极大无关组.

解　$\mathbb{F}[x]_3$ 有自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$，在该基下，由坐标化方法，得

$$\begin{bmatrix}1&-1&-2&0&0\\0&2&1&2&1\\1&7&-1&6&0\\1&9&0&8&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&-1&-2&0&0\\0&2&1&2&1\\0&0&-3&-2&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

可知 $r(\mathrm{I})=3$，$(\mathrm{I}')=\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ 为(I)的一个极大无关组.

2、**考察知识点**　方阵的相似对角化，方阵的幂.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&k\\0&0&-1\\0&2&3\end{bmatrix}$ 可对角化，求 k 与 $\boldsymbol{A}^{10}$.

解　$\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.

$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow 3-r(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E}_3)=2\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=1\Leftrightarrow k=2$.

法 1　$\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E}_3\to\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ 是属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的极大无关特征向量组.

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$ 是属于特征值 $\lambda_3=2$ 的特征向量.

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{S}$ 可逆，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(1, 1, 2)$，可知

$$A^{10}=[S\,\mathrm{diag}(1,1,2)S^{-1}]^{10}=S\,\mathrm{diag}(1,1,1024)S^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&2048\\0&-1&-1024\\0&1&2048\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&-2&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2046&2046\\0&-1022&-1023\\0&2046&2047\end{bmatrix}.$$

法 2　令 $m(x)=(x-1)(x-2)$，则 $m(A)=O$.

设 $x^{10}=q(x)m(x)+ux+v$，则 $1^{10}=u+v,\ 2^{10}=2u+v\Rightarrow u=1023,\ v=-1022$，

$$A^{10}=1023A-1022E_3=\begin{bmatrix}1&2046&2046\\0&-1022&-1023\\0&2046&2047\end{bmatrix}.$$

四、(12 分) **考察知识点**　参数型线性方程组.

讨论参数 s, t 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1-\ x_2+2x_3+3x_4=-1,\\-x_1\qquad\ -2x_3-\ x_4=1,\\2x_1-2x_2+5x_3+7x_4=-3,\\-2x_1+5x_2+7x_3+sx_4=t-9\end{cases}$$

有唯一解、无解、有无穷多解？在有无穷多解时，求其通解.

解　$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&3&-1\\-1&0&-2&-1&1\\2&-2&5&7&-3\\-2&5&7&s&t-9\end{array}\right]\xrightarrow[r_4+2r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-2r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&3&-1\\0&-1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\\0&3&11&s+6&t-11\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{r_1-r_2-2r_3\\r_4+3r_2-11r_3}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&1\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&s+1&t\end{array}\right]=\tilde{R}.$$

(1) 当 $s+1\neq 0$，即 $s\neq -1$ 时，$\tilde{R}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&1+\frac{t}{s+1}\\0&1&0&0&\frac{2t}{s+1}\\0&0&1&0&-1-\frac{t}{s+1}\\0&0&0&1&\frac{t}{s+1}\end{array}\right]$，有唯一解 $\begin{bmatrix}1+\frac{t}{s+1}\\\frac{2t}{s+1}\\-1-\frac{t}{s+1}\\\frac{t}{s+1}\end{bmatrix}$.

(2) 当 $s=-1$ 且 $t\neq 0$ 时，无解.

(3) 当 $s=-1$ 且 $t=0$ 时，令自由未知量 $x_4=k$，可知通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\ k\\2k\\-1-\ k\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \forall k\in\mathbb{F}.$$

五、(10 分) **考察知识点**　基变换与坐标变换.

设 $(\mathrm{I})=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $(\mathrm{II})=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是线性空间 V 的两个基，且

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-2\boldsymbol{\beta}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3.$$

(1) 求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵；

(2) 求向量$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3$在基(Ⅰ)下的坐标.

解 (1) 因为由基(Ⅱ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵为$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}$，且$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=9\boldsymbol{E}$，所以由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{9}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{\xi}$在基(Ⅱ)下的坐标为$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，在基(Ⅰ)下的坐标为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{y}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$.

六、(10 分) **考察知识点** 线性变换及其方阵表示，由方阵诱导的线性变换.

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}$，定义对应法则$\sigma$为$\sigma(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\forall\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$.

(1) 求证σ是$\mathbb{R}^3$的线性变换；

(2) 求σ在基$\{\boldsymbol{\beta}_1=[2,0,0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2=[0,4,6]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_3=0,3,5]^{\mathrm{T}}\}$下的表示方阵.

证 (1) 显然$\sigma(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$.

对任意$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$，$k\in\mathbb{R}$，有

$$\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\sigma(\boldsymbol{x})+\sigma(\boldsymbol{y}),$$
$$\sigma(k\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=k\sigma(\boldsymbol{x}),$$

从而得证σ是$\mathbb{R}^3$的线性变换. □

解 (1) 因为σ在$\mathbb{R}^3$的自然基(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3\}$下的表示方阵就是$\boldsymbol{A}$，由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)$=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}$，所以$\sigma$在基(Ⅱ)下的表示方阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&-3\\0&-6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\2&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\7&-4&7\\-8&6&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&4&3\\14&26&23\\-16&-24&-22\end{bmatrix}.$$

七、(14 分) **考察知识点** 用正交线性替换法化实二次型为标准形、实二次型的规范形.

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$.

（1）求一个正交线性替换，将实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形，并写出标准形；

（2）求实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

解 （1） $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

法 1 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-2 & 2\\ -2 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}\overset{\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{c}_1}{\underset{\boldsymbol{c}_3+2\boldsymbol{c}_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda-2 & \lambda-3 & 2\lambda-6\\ -1 & \lambda-3 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}\overset{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{\underset{\boldsymbol{r}_1-2\boldsymbol{r}_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda+3 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 0\\ -2 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-3)^2(\lambda+3)$，

可知 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=-3$.

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$，

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知 $\{\boldsymbol{x}_1=[1, 1, 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{x}_2=[2, 0, 1]^{\mathrm{T}}\}$ 为属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的线性无关特征向量组.

对特征值 $\lambda_3=-3$，

$$\boldsymbol{A}-(-3)\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知 $\boldsymbol{x}_3=[-1, 1, 2]^{\mathrm{T}}$ 为属于特征值 $\lambda_3=-3$ 的特征向量.

对 $\{\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\}$ 做施密特正交单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{\xi}_1=[1, -1, 1]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1, 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}[1, -1, 1]^{\mathrm{T}}.$$

对 $\boldsymbol{x}_3$ 直接做单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{x}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}[-1, 1, 2]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 经过正交线性替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化为标准形

$$g(\boldsymbol{y})=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2.$$

法 2 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$[2+2+(-1)]-(3+3)=-3,$$

所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 经过正交线性替换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

化为标准形 $g(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$.

(2) $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形为 $h(\boldsymbol{z}) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

注 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 的标准正交特征向量组的典型取法还有

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \text{ 或 } \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

八、(6 分) **考察知识点** 向量组的线性相关性.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为 n 阶（$n \geqslant 3$）方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，求证向量组 $\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\}$ 线性无关.

证 设 $k_1\boldsymbol{\beta} + k_2\boldsymbol{A\beta} + k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$，则

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_2(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3) = \boldsymbol{0},$$

即

$$(k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}.$$

由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，可知

$$k_1 + k_2\lambda_1 + k_3\lambda_1^2 = k_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_2^2 = k_1 + k_2\lambda_3 + k_3\lambda_3^2 = 0,$$

法 1 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是方程 $k_1 + k_2x + k_3x^2 = 0$ 的三个互异的根，必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

法 2 因为 $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$，所以必有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

从而得证向量组 $\{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\}$ 线性无关. □

注 $W = L\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的 3 维子空间，(I) $= \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 是 W 的一个基，W 中的向量 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 在基 (I) 下的坐标分别为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \end{bmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0 \Rightarrow \{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{A\beta}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\} \text{ 线性无关.} \qquad \square$$