第一次高数月考辅导

- **时间：1小时**
- **题型：共9道大题，计算和解答题8个，证明题1个**
- 1、两个重要极限
- 2、极限存在的两个准则
- 3、无穷小量阶的比较
- 4、等价无穷小代换定理
- 5、有界量乘以无穷小量型的极限
- 6、求函数的连续区间，求函数的间断点并判断类型
- 7、利用函数的间断点，确定函数中待定参数的值
- 8、判断函数在一点的可导性

- 两个重要极限

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. $$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

已知 a 为不等于 0 的常数 $(a>0)$，求极限

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x\ln a)\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right) \quad (a\neq 0)$$

【解析】(1) 由对数函数的性质，对原式做恒等变形

$$\ln(x\ln a)\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right) = (\ln x+\ln\ln a)\ln\left(\frac{\ln a+\ln x}{\ln x-\ln a}\right) = \ln\left(\frac{\ln a+\ln x}{\ln x-\ln a}\right)^{(\ln x+\ln\ln a)}$$

$$原式 = \lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}}\right]^{2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln\ln a}{\ln x-\ln a}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \ln e^{\ln a^2} = 2\ln a.$$

• 极限存在的两个准则☆

• 迫敛准则

函数极限存在的迫敛准则

设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内满足 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

数列极限存在的迫敛准则

若对于数列 u_n, v_n, w_n, 存在 $N_0 \in N^*$,使得当 $n > N_0$ 时有 $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$,且 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n = A$,则 $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = A$.

• 单调有界准则（数列）

单调递增有上界或单调递减有下界的数列必有极限。

学会合理放缩

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

【解】记：$x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$,

则 $\dfrac{1+2+\cdots n}{n^2+n+n}\le x_n\le\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}\therefore\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}\le x_n\le\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$,

$\therefore$ 由迫敛性，得：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

均值不等式：

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdots a_n}$$

对数不等式: $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x \quad (x > -1)$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

即证“单调”与“有界”

证明：数列 $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots\sqrt{a}}}$ (n个根式，$a>0,n=1,2,\ldots$) 极限存在, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证明】$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$

用数学归纳法可证：$x_{n+1}>x_n$, 此即证 $\{x_n\}$ 是单调递增的。

事实上，$0<x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}=\sqrt{a}+1.$

由上式可知：$\{x_n\}$ 单调递增有上界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$ 存在，对 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两边取得极限：$l=\sqrt{a+l}$

解得：$l=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$和$l=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$(舍负)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$

- 构造函数法

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = a > 1$, 且满足递推

$$x_{n+1} = 1 + \ln\left(1 + \frac{x_n^2}{1 + \ln x_n}\right), n = 2, 3, \cdots$$

求证:$\{x_n\}$ 收敛, 并求出极限值.

- 推出通项

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正整数列，且

$$a_1 = b_1 = 1, a_n + \sqrt{3} b_n = \left(a_{n-1} + \sqrt{3} b_{n-1}\right)^2,$$

证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛，并求其极限值。

- # 无穷小量阶的比较/等价无穷小代换定理☆

（1）设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是当 $x \to x_0$ 时的无穷小量。

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量，或称当 $x \to x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小量，记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

（2）若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小量。特别地，当 $c = 1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，记作

$$\alpha(x) \sim \beta(x)\,(x \to x_0)\,.$$

（3）若 $\alpha(x)$ 与 $\beta^k(x)\,(k > 0)$ 是同阶无穷小量，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta^k(x)\,(k > 0)$ 的 k 阶无穷小量。

当 $x \to 0$ 时:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \alpha \neq 0$$

确定 α 的值，使得当 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ 与 x^α 是同阶无穷小。

【解】因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^\alpha}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^\alpha(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^\alpha(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{2x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{4x^\alpha}.$$

所以，为使当 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$ 与 x^α 是同阶无穷小，必须且只需 $\alpha=3$.

易错！加减运算下的无穷等价代换定理

- 保证用着顺手。
- 不能滥用。

设当$x \to x_0$时$\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$，而$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$存在且不等于1，

则当$x \to x_0$时$\alpha_1(x) - \beta_1(x) \sim \alpha_2(x) - \beta_2(x)$。

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x^2 - 3\sin x^3}{x^2}$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x^2}{3\sin x^3} = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2 - 3x^3}{x^2} = 2$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{\cos x^2}}{x^3}$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2\sin x}-\sqrt{\cos x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2\sin x}+\sqrt{\cos x^2}\right)}{x^3\left(\sqrt{1+x^2\sin x}+\sqrt{\cos x^2}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2\sin x-\cos x^2}{x^3\left(\sqrt{1+x^2\sin x}+\sqrt{\cos x^2}\right)}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x^3}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2\sin x}+\sqrt{\cos x^2}}$$

$$=(0+1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

求 $\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

【解】

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$\ln\cos x=\ln(1+\cos x-1)\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{1-\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}x)^2}=-\frac{4}{\pi^2}$$

已知 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n > 0\,(n \geq 2)$，且 $f(x) = \left[\dfrac{a_1^x + a_2^x + a_3^x + \cdots a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}$，求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \max\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \min\{a_1, a_2, \ldots a_n\}$$

- # 有界量乘以无穷小量型的极限

如果 $f(n) \to 0$，同时 $g(n)$ 有界，那么 $f(n)g(n) \to 0$

常见的有界量有 $\sin x, \arcsin x, \arctan x$.

- **沉着冷静,注意观察**

函数形式同理，无论$g(x)$有多么复杂，但凡有界，只要$f(x) \to 0$，
那么$f(x)g(x) \to 0$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

【解】因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=0 \quad |\sin(n!)|\le 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}=0.$$

- # 求函数的连续区间
求函数的间断点并判断类型

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续。

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续。

（1）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若函数 $f(x)$ 在点 x_0 没有定义，或者 $f(x)$ 在点 x_0 有定义但不连续，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点或不连续点。

（2）设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，否则，称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点。

（3）设 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点。若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的可去间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则 $f(x)$ 的跳跃间断点。

（4）设 x_0 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点，若 $f(x)$ 在点 x_0 附近无限震荡，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的震荡间断点。

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}(x\geqslant 0)$，试求 $f(x)$ 的表达式，指出函数 $f(x)$ 的连续区间和间断点

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

显然，$f(x)$ 在 $x\neq 1$ 时是连续的，由于 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$，而 $f(1)=\frac{1}{2}$，知 $f(x)$ 的连续区间为 $[0,1)$ 和 $(1,+\infty)$，而 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点。

清楚x在哪一点处函数没有意义

判断这两个函数的间断点

$$f(x)=\frac{1-2\cdot 3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}\cdot\arctan\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\begin{cases}(1+|x|)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ e, & x=0\end{cases}$$

当$x\neq 0$时，$f(x)$显然连续

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2\cdot 3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=-\pi$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-2\cdot 3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}\cdot\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$$

- **利用函数的间断点，确定函数中待定参数的值**

设 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续，且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$，求 a

$a=1$

已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-mx+8}{x^2-(2+n)x+2n}=\dfrac{1}{5}$，求常数 m,n 的值

$m=6, n=12$

• 判断函数在一点的可导性

导数极限，导数连续

Δ 导数定义

导数极限定理

定理 1 （导数极限定理）若函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1）在闭区间 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上连续，

2）在开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 及 $(x_0, x_0, +\delta)$ 内可导，

3）$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=k$，（$k$ 为有限值）.

则 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=k$，即

$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$.

设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,其中函数$g(x)$有二阶连续导数，且$g(0)=1, g'(0)=-1$,

求$f'(0)$

学数学，做数学题，最重要的是信心

- 一个小时，九个大题
- 基本掌握考点知识点
- 往年真题（近三年）都做了，有时间可以再做更早几年的真题改错，反思
- 看学习辅导例题，尽可能把上面的习题也做了（无答案，可同学间交流）（去年有一道原题出自该书）
- 证明题大概率从“极限存在的两个准则”里出（非权威）
- 遇到卡壳没思路的题超过五分钟直接做下一题（建议）
- 思路清晰，书写步骤清晰
- 放轻松，这样的考试还有许多次

祝大家在第一次高数月考中取得好成绩