线性方程组

一、填空题

1、设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1, a_2, \dots, a_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，且 $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2=1$． 如果 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为____________________.

2、设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为____________________.

3、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的通解是__________.

4、设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$r(\boldsymbol{A})=3$，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数为______.

5、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 均为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，$k_1,k_2,\dots,k_t\in\mathbf{P}$．若 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解，则 $k_1+k_2+\cdots+k_t=$____________.

6、设 3 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是其 3 个解向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left[1,2,3\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\left[3,5,7\right]^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为______________.

二、选择题

1、齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

2、设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ (　　).

(A) 当 $m>n$ 时只有零解　　(B) 当 $m>n$ 时必有非零解

(C) 当 $m<n$ 时只有零解　　(D) 当 $m<n$ 时必有非零解

3、设 $n(n\ge 3)$ 元线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个线性无关的解，则(　　)为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,-2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

4、设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系(　　).

(A) 不存在　　(B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量　　(D) 含有三个线性无关的解向量

5、设 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]$ 为 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=0$ 的基础解系可为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

6、设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个互异的解，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解必定是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$　(B) $k\boldsymbol{\alpha}_1$　(C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　(D) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

7、设有 $m\times n$ 齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$，现有 4 个命题

① 若 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 的解，则有 $r(\boldsymbol{A})\ge r(\boldsymbol{B})$；

② 若 $r(\boldsymbol{A})\ge r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 的解;

③ 若 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 同解，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

④ 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ 同解.

以上命题正确的是 _____；

(A)①②　(B)①③　(C)②④　(D)③④

8、设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{4\times 7},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{2\times 7}$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\mathbf{0}$ (　　).

(A) 无共同解　(B) 只有共同零解

(C) 必有共同非零解　(D) 同解

9、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元列向量，若 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}$，则线性方程组(　　).

(A) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解　(B) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}$ 仅有零解　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}$ 必有非零解

10、对于 n 元线性方程组, 下列命题正确的是(　　).

(A) 如果 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解

(B) 如果 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解

(C) 如果 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有两个不同的解，则 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有无穷多解

(D) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$

11、设有 3×4 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$，若(　　)成立，则该方程组一定有解.

(A) $r(\boldsymbol{A})=1$　(B) $r(\boldsymbol{A})=2$　(C) $r(\boldsymbol{A})=3$　(D) $r(\boldsymbol{A})=4$

12、设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，对任意 m 元列向量 $\boldsymbol{\beta}$，线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解，则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关　(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关　(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

13、设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个不同的解，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为其导出组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为(　　).

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$

14、设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×5 实矩阵，且行向量组线性无关，则下列结论中错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 只有零解

(B) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 必有非零解

(C) 对任意 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^4$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多解

(D) 对任意 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^4$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 必有唯一解

15、设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$，则联立的三条直线$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0,\end{cases}$ $(a_i^2+b_i^2\neq 0,$ $i=1,2,3)$交于一点的充要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关　　(B) $r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关

三、解答题

1、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，若

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+t\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+t\boldsymbol{\alpha}_1,$$

讨论实数t满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

2、设矩阵$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$均为4元列向量，其中$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关. $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

3、设4元线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}_5$有通解$\left[2,-1,3,3\right]^{\mathrm{T}}+k\left[1,0,-2,1\right]^{\mathrm{T}}$，其中$k$为任意常数，$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]$为4阶方阵.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_5$能否由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示？若不能，说明理由；若能，则表示之.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_2$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示？若不能，说明理由；若能，则表示之.

4、设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\b\\2b\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix}$. 试问：$a,b$取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示式唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示式不唯一？写出一般表示式.

5、设4元线性方程组(I)$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$且线性方程组(II)的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\left[-1,1,2,4\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=\left[1,0,1,1\right]^{\mathrm{T}}$.

(1) 求(I)的一个基础解系；

(2) 求(I)与(II)的公共解.

6、设齐次线性方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\\a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0\end{cases}$的系数矩阵为$\boldsymbol{A}$，$M_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{A}$划去第j列所得到的行列式，证明：如果M_j不全为0，则$[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$是该方程组的基础解系.

7、设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，若存在正整数k，使得线性方程组$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$有解向量$\boldsymbol{\alpha}$，且$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，

证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \cdots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

8、设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，证明$r(\boldsymbol{A}^n) = r(\boldsymbol{A}^{n+1})$.

答案与提示

一、填空题

1、解 因为$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \cdots + a_n^{\ 2} = 1$，所以$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 1$. 此时

$$\boldsymbol{A\alpha} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{0},$$

则$\boldsymbol{\alpha}$为齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的一个非零解. 又$r(\boldsymbol{A}) = n-1$，则方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的基础解系只含有$n - r(\boldsymbol{A}) = 1$个解，因此$\boldsymbol{\alpha}$可作为方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的一个基础解系，故方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的通解为$k\boldsymbol{\alpha}$，其中$k$为任意常数.

2、解 记$\boldsymbol{X}_0 = [1, 1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}}$. 因为$\boldsymbol{A}$的各行元素之和均为零，所以

$$\boldsymbol{AX}_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0},$$

因此$\boldsymbol{X}_0$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的解. 又$r(\boldsymbol{A}) = n-1$，则方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的基础解系只含有$n - r(\boldsymbol{A}) = 1$个解，因此$\boldsymbol{X}_0$可作为方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的一个基础解系，故方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的通解为$k\boldsymbol{X}_0$，其中$k$为任意常数.

3、解 因为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以$r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$，因此$|\boldsymbol{A}| = 0$. 此时$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{O}$，表明$\boldsymbol{A}$的每一列都是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的解. 又$r(\boldsymbol{A}) = 2$，则$r(\boldsymbol{A}^*) = 1$(书 73 页 29 题的结论).，因此$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的基础解系含有$3 - r(\boldsymbol{A}^*) = 2$个解. 因为$\boldsymbol{A}$的任意两个列向量均线性无关，所以$\boldsymbol{A}$的任意两个列向量都可以是$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的基础解系，因此$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的通解为

$$\boldsymbol{X} = k_1[1, 2, -1]^{\mathrm{T}} + k_2[1, 0, 1]^{\mathrm{T}}，\text{其中} k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

4、3.

5、解 由题设，知$\boldsymbol{A\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}, i = 1, 2, \ldots, t$. 又$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t$是方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$的解，则

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t) = \boldsymbol{\beta} \\ \Rightarrow & k_1(\boldsymbol{A\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{A\alpha}_2) + \cdots + k_t(\boldsymbol{A\alpha}_t) = \boldsymbol{\beta} \\ \Rightarrow & (k_1 + k_2 + \cdots + k_t)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}, \end{aligned}$$

即$(k_1 + k_2 + \cdots + k_t - 1)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$. 因为$\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{\beta}$线性无关，因此$k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$.

6、解 因为$r(\boldsymbol{A}) = 2$，所以方程组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$的导出组$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$的基础解系所含向量的个数为$3 - r(\boldsymbol{A}) = 3 - 2 = 1$. 记

$$\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-2\boldsymbol{\alpha}_1=[3,5,7]^{\mathrm{T}}-2[1,2,3]^{\mathrm{T}}=[1,1,1]^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{\eta}$ 可作为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\eta}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}+k[1,1,1]^{\mathrm{T}}，其中 k 为任意常数.$$

二、选择题

1、选择(B)

解 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.

2、选择(B).

解 注意到，$\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶方阵. 当 $m>n$ 时，有 $r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{A})\le n<m$，因此方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解. 当 $m<n$ 时，如果取 $\boldsymbol{A}=[1,0],\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_1$，此时方程组只有零解； 如果取 $\boldsymbol{A}=[1,0],\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，此时方程组有非零解.

3、选择(C) (利用任意 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都可以是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，这一结论).

4、应选(B).

解 由题设，知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，因此 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})<n$. 此时 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$ 或 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$ 又 $\boldsymbol{A}^*\ne\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，因此 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，故齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-r(\boldsymbol{A})=1$ 个解.

5、应选(D).

解 因为 $[1,0,1,0]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，且 $4-r(\boldsymbol{A})=1$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_3$，$r(\boldsymbol{A})=3$. 因为 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，因此方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $4-r(\boldsymbol{A}^*)=3$ 个解. 又

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=[-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\xrightarrow{列}[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{0}]=\boldsymbol{B},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

因为 $r(\boldsymbol{A})=3<4$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，因而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$，表明 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可作为方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 选择(D). (另外 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也可作为基础解系)

6、选择(D).

解 事实上，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 互异，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为非零向量. 又 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $n-r(\boldsymbol{A})=1$ 个解，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 可作为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 另外 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 有可能为零向量，所以选项(B)和(C)都不正确.

7、选择(B).

解 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间含于 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间，因此

$n-r(\boldsymbol{A})\le n-r(\boldsymbol{B})$，即$r(\boldsymbol{A})\ge r(\boldsymbol{B})$.

若$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$同解，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$的解空间相同，因此$n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{B})$，即$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

若取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A})>r(\boldsymbol{B})$. 而$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$的通解分别为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\forall k\in\mathbf{P}；\quad \boldsymbol{X}=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\forall k_1,k_2\in\mathbf{P}.$$

若取$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$. 而$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$的通解分别为

$$\boldsymbol{X}=k_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\forall k_1\in\mathbf{P}；\quad \boldsymbol{X}=k_2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\forall k_2\in\mathbf{P}.$$

8、选择(C).

解 因为齐次线性方程组$\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\\\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\end{cases}$的系数矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$为$6\times7$矩阵，所以$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\le6<7$ (未知量的个数)，故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$有共同非零解.

9、选择(D).

解 因为$r(\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}$，所以

$$r(\boldsymbol{A})\le r\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}\right]\le r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A}),$$

因此$r\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha}\right]=r(\boldsymbol{A})$，即方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$的系数矩阵和增广矩阵的秩相等，故方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}$有解.(无法确定是无穷多解，还是唯一解)

注意到，齐次线性方程组$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$的未知量个数为$n+1$. 此时

$$r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})\le n<n+1,$$

则线性方程组$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$有非零解.

10、选择(C).

解 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$只有零解(有非零解)的充要条件是$r\left(\boldsymbol{A}\right)=n$ ($r\left(\boldsymbol{A}\right)<n$)，此时无法判断$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$是否有解，所以选项(A)和(B)都不正确.

若方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有两个不同的解，即$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有无穷多解，则$r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)<n$，因此$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解，即有无穷多解.

因为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解的充要条件是 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=n$，所以当 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 不一定有解.

11、选择(C).

解 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]$. 又增广矩阵 $\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right]$ 为 3×5 矩阵，则 $r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]\le 3$. 若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $r\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right]=1$ 或 2，因此方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有可能出现无解. 若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]=3$，因此 $r(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]=3$，故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 一定有解.

12、选择(A).

解 记 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]$. 因为对任意 m 元列向量 $\boldsymbol{\beta}$，线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解，所以对于 m 元列向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i (i=1,2,\ldots,m)$， $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 有解 $\boldsymbol{X}_i$ $(i=1,2,\ldots,m)$. 此时

$$\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_m\right]=\left[\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\ldots,\boldsymbol{AX}_m\right]=\left[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_m\right]=\boldsymbol{E}_m,$$

因此

$$m=r(\boldsymbol{E}_m)=r\left(\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_m\right]\right)\le r(\boldsymbol{A})\le m,$$

故 $r(\boldsymbol{A})=m$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关.

13、选择(A).

解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，且线性无关，因此可作为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 又 $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，因此方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2),\ \text{其中}\ k_1,k_2\ \text{为任意常数}.$$

14、选择(D).

解 因为 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，所以 $r(\boldsymbol{A})=4$.

选项(A)，因为 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})=4$，且方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的未知量个数为 4，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

选项(B)，因为 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=4<5$ (未知量个数)，因此 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

选项(C)，方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵 $\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right]$ 是 4×6 矩阵，则 $r\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right]\le 4$. 又

$$4=r(\boldsymbol{A})\le r\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right]\le 4,$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}\right]=4<5$，即方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩相等，且小于未知量个数，因此 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多解.

15、选择(D).

解 由三条直线交于一点，知方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ 有唯一解(未知量的个数为 2)，当且仅当 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2$，即系数矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$ 和增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\vdots-\boldsymbol{\alpha}_3]$ 的秩都为 2，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

三、解答题

1、解 因为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$均为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合，所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$均为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解.

设$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{0}$，即

$$(x_1+tx_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(tx_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(tx_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(tx_3+x_4)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以

$$\begin{cases} x_1 + tx_4 = 0, \\ tx_1 + x_2 = 0, \\ tx_2 + x_3 = 0, \\ tx_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

方程组的系数行列式为$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix}=1-t^4$. 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即$t\neq\pm 1$时，方程组只有零解. 此时向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$线性无关，因此$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

2、**解** 法 1 因为$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，所以$[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$为非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的一个解. 又$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，

$$\boldsymbol{A}=\left[2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]\xrightarrow{\text{列}}\left[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{0}\right],$$

且$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，因而$r(\boldsymbol{A})=3$，故齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有$4-r(\boldsymbol{A})=1$个解. 而$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，所以$[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系. 从而方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$\boldsymbol{X}=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

法 2 记$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4 .$$

将$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$代入上式，得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，所以$\begin{cases} 2x_1+x_2-3=0, \\ -x_1+x_3=0, \\ x_4-1=0, \end{cases}$ 即$\begin{cases} x_1= \quad + x_3, \\ x_2=3-2x_3, \\ x_4=1, \end{cases}$ 因此方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=[0,3,0,1]^{\mathrm{T}}+k[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

3、解 (1) 因为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}_5$的通解为$\left[2,-1,3,3\right]^{\mathrm{T}}+k\left[1,0,-2,1\right]^{\mathrm{T}}$($k$为任意常数)，所以$\left[2,-1,3,3\right]^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\alpha}_5$的解，且$\left[1,0,-2,1\right]^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解，即

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_5,\ \boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_5 = 2(2\boldsymbol{\alpha}_3 - \boldsymbol{\alpha}_4) - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + 7\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，则有 $\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4$. 因为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含有1个解 $\left[1, 0, -2, 1\right]^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$，$4 - r(\boldsymbol{A}) = 1$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_4 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$，$r(\boldsymbol{A}) = 3$. 又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\right] = \left[\boldsymbol{\alpha}_1, k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3 + k_3\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\right] \\ &\xrightarrow{\text{列}} \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\right] = \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}_3, -\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_3\right] \\ &\xrightarrow{\text{列}} \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\right] = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{O}] = \boldsymbol{C},\end{aligned}$$

则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{C}) = r(\boldsymbol{B}) \le 2 < 3$，与 $r(\boldsymbol{A}) = 3$ 相矛盾！故 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示.

4、解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$，则

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

法 1 对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_3 - r_2 \\ r_2 - r_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 - br_2]{r_2 - ar_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & b(a-1) & 1-b(4-2a) \end{array}\right].$$

当 $a \ne 1, b \ne 0$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 3$，则方程组有唯一解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一地由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a = 1$ 时， $\tilde{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{array}\right]$,

若 $b \ne \dfrac{1}{2}$，则 $r(\boldsymbol{A}) \ne r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，因此方程组无解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

若 $b = \dfrac{1}{2}$，则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 2 < 3$，因此方程组有无穷多解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性示，且表示式不唯一. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 2 - x_3, \\ x_2 = 2, \end{cases}$ 因此

$$\boldsymbol{\beta} = (2-k)\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3\text{，其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

当 $b = 0$ 时， $\tilde{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$,

则 $r(\boldsymbol{A}) \ne r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，因此方程组无解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

法 2 方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}=-b(a-1).$$

当 $a\neq 1, b\neq 0$ 时，方程组有唯一解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可唯一地由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a=1$ 时，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b \end{array}\right]$.

若 $b\neq\dfrac{1}{2}$，则 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，因此方程组无解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

若 $b=\dfrac{1}{2}$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<3$，因此方程组有无穷多解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示式不唯一. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=2-x_3, \\ x_2=2, \end{cases}$ 因此

$$\boldsymbol{\beta}=(2-k)\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3，\text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

当 $b=0$ 时，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & 4-3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$,

则 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，因此方程组无解，表明 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

5、解 (1) 对方程组(I)的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=2<4$，因此齐次线性方程组(I)有非零解. 其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=\ \ 2x_3-x_4, \\ x_2=-\ \ x_3+x_4, \end{cases}$ 求得一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=[2,-1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

(2) 设 $y_1\boldsymbol{\eta}_1+y_2\boldsymbol{\eta}_2=y_3\boldsymbol{\xi}_1+y_4\boldsymbol{\xi}_2$ (公共解)，则

$$\begin{cases} 2y_1-y_2+y_3-y_4=0, \\ -y_1+y_2-y_3=0, \\ y_1-2y_3-y_4=0, \\ y_2-4y_3-y_4=0. \end{cases}$$

对方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其同解方程组为$\begin{cases} y_1 = y_4, \\ y_2 = y_4, \\ y_3 = 0, \end{cases}$ 故(I)与(II)的公共解为$k\boldsymbol{\xi}_2$(公共解为$y_1 = y_2, y_2$自由变量的解或者$y_3 = 0, y_4$为自由变量的解)，其中k为任意常数.

6、证 易知

$$0 = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = a_{i1}M_1 - a_{i2}M_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}M_n,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

则$[M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n]^{\mathrm{T}}$是方程组的一个解.

又$r(\boldsymbol{A}_{(n-1)\times n}) \le n-1$，且$M_j$不全为0，即$\boldsymbol{A}$有$n-1$阶子式不等于零，因此$r(\boldsymbol{A}) = n-1$，故方程组的基础解系含有1个解，因此非零解$\left[M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n\right]^{\mathrm{T}}$可作为方程组的基础解系.

7、证 设有数$l_0, l_1, \ldots, l_{k-1}$，使得$l_0\boldsymbol{\alpha} + l_1\boldsymbol{A\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$. 等式两边同乘以$\boldsymbol{A}^{k-1}$，得

$$l_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} + l_1\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{\alpha} + \cdots + l_{k-1}\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, m \ge k+1$，因此$l_0\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$. 由题设，知$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha} \ne \boldsymbol{0}$，所以$l_0 = 0$. 同理可证$l_1 = l_2 = \cdots = l_{k-1} = 0$，因此向量组$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \ldots, \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$线性无关.

8、证 设$\boldsymbol{X}_0$是$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$. 此时$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0}$，因此$\boldsymbol{X}_0$也是$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的解.

反之，设$\boldsymbol{X}_0$是$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$. 此时$\boldsymbol{A}^{n+k}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{A}^{k-1}(\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}_0) = \boldsymbol{0}, k \ge 2$.

如果$\boldsymbol{X}_0$不是$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 \ne \boldsymbol{0}$. 此时$n+1$个$n$元列向量$\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{AX}_0, \cdots, \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0$必线性相关，因此存在不全为零的$k_0, k_1, \ldots, k_n$，使得

$$k_0\boldsymbol{X}_0 + k_1\boldsymbol{AX}_0 + \cdots + k_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}.$$

等式两边同时左乘$\boldsymbol{A}^n$，得

$$k_0\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 + k_1\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X}_0 + \cdots + k_n\boldsymbol{A}^{2n}\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0},$$

则$k_0\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$，而$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 \ne \boldsymbol{0}$，因此$k_0 = 0$. 同理可证$k_1 = \cdots = k_n = 0$，矛盾！故$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{0}$.

表明$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$同解，即解空间相同，维数也相同，因此

$$n - r(\boldsymbol{A}^n) = n - r(\boldsymbol{A}^{n+1}),$$

即$r(\boldsymbol{A}^n) = r(\boldsymbol{A}^{n+1})$.