

整理：理学院 2017 级严班 Johnson

2018~2019 学年第二学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》(共 3 页)

(考试时间：2019 年 4 月 19 日)

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题与单项选择题(共 30 分，每小题 5 分)

1. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 a 满足的条件是_____.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 元列向量, 矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$. 若 $|A| = 1$, 且矩阵

$B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_2 - 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$, 则 $\left| \left(\frac{1}{2} B \right)^{-1} \right| =$ _____.

3. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^m =$ _____ (m 为大于 2 的整数).

4. 下列说法错误的是().

- (A) 设 A, B, C 是 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 则 $CAB = E$;
- (B) 设 A, B 是 n 阶矩阵, 则 $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;
- (C) 设 A 是可逆矩阵, 且 $AB = AC$, 则 $B = C$;
- (D) 设 A 与 B 相抵, 则 $r(A) = r(B)$.

5. 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, B 是 $n \times m$ 非零矩阵, 且 $AB = O$, 则必有().

- (A) $|A^T A| = 0$ (B) $|AA^T| = 0$ (C) $|B^T B| = 0$ (D) $|BB^T| = 0$

6. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 \mathbb{P}^n 中向量组, 则下列说法正确的是().

- (A) 若 α_s 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表示, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关;
- (B) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 有部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t (t < s)$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关;
- (C) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意含有 $s - 1$ 个向量的部分组都线性无关, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关;
- (D) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能由其余的向量线性表示, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

二、(17 分) 当 b 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 10x_4 = b \end{cases}$ 有解? 并求其相应的向量形式的通解.

学院_____专业_____班 年级_____学号_____姓名_____

共 3 页 第 2 页

三、(12 分)

计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$.

四、(18 分) 设实矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

且 $2AXA^* = XA^{-1} + 5E$ ，其中 E 为 4 阶单位阵，求矩阵 X .

五、(14 分)已知向量组 $\alpha_1 = [1, 8, 9, 5]^T, \alpha_2 = [2, 0, 1, 9]^T$.

(1)若向量 β 可由向量组 α_1, α_2 线性表示, 求向量 β 的全部表达式;

(2)若 $\gamma = [3, k, -7, 13]^T$, 且向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ 线性无关, 求参数 k 的值.

六、(9 分)设 A, B 均为 n 阶方阵, 且 $A - B - E$ 可逆.证明: 若 $A^2 = A$, 则 $r(AB) = r(BA)$.

