2011-2012(一)

一、填空题 1. $y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{3}y_3^2$ 2. $n-k$ 3. $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ 5. $\lambda_1=0$

二、选择题 ABBDD

三、(1) 因为 B 与 A 相似, 所以 B 与 A 具有相同的特征值, 因此 B 的特征值也为 $2,-2,1$. 可得 $|B|=2\times(-2)\times 1=-4$,

B^* 的特征值为 $\mu_1=\dfrac{|B|}{2}=-2,\mu_2=\dfrac{|B|}{-2}=2,\mu_3=\dfrac{|B|}{1}=-4$.

(2) 法一:

由 (1) 知,B 的特征值为 $2,-2,1$. 设 λ 为 B 的特征值, 则 $f(B)=B^2-2B$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda$. 因此 $f(B)$ 特征值为 $f(2),f(-2),f(1)$, 即为 $0,8,-1$. 于是 $|f(B)|=|B^2-2B|=0\times 8\times(-1)=0$.

法二:

由于 B 与 A 相似, 所以 $f(B)$ 与 $f(A)$ 也相似, 于是 $|f(B)|=|f(A)|$. 设 λ 为 A 的特征值, 则 $f(A)=A^2-2A$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda$. 因此 $f(A)$ 特征值为 $f(2),f(-2),f(1)$, 即为 $0,8,-1$. 于是 $|f(A)|=|A^2-2A|=0\times 8\times(-1)=0$. 从而 $|f(B)|=|f(A)|=0$.

四、(1) 因为

$$(1+x+x^2,1+x,1,1+x+x^2+x^3)=(1,x,x^2,x^3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $S=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 由已知 $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ 可得 $f(x)$ 在基 (I) 下的坐标为 $X=$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. 从而 $f(x)$ 在基 (II) 下的坐标为 $Y = S^{-1}X$. 由于

$$[S \vdots X] = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:r} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right],$$

所以 $Y = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(3) 由 $g(x)$ 在基 (II) 下的坐标为 $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, 可得 $g(x)$ 在基 (I) 下的坐标为 $X = SY = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

五、(1) 设 λ 是 A 的相应于特征向量 ξ 的特征值, 则有 $A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

整理得

$$\begin{cases} -1 = \lambda, \\ 2 + a = \lambda, \\ 1 + b = -\lambda, \end{cases}$$

解得 $\lambda = -1, a = -3, b = 0$.

(2) 由 (1) 得 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

A 的特征多项式为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 + c_2 - c_3} \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & -2 \\ \lambda + 1 & \lambda + 3 & -3 \\ -\lambda - 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda + 2 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3.$$

得 A 的特征值为 $\lambda=-1$(三重).

对 $\lambda=-1$(三重), 解 $((-1)\cdot E-A)X=0$.

$$-E-A=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以特征值 -1 的几何重数等于 $n-r(-E-A)=3-2=1\neq 3$(其代数重数), 因此 A 不可对角化.

六、(1)**证**由题设 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

记 $S=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

因为 $|S|=1\neq 0$, 所以 S 可逆; 又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基, 所以 β_1,β_2,β_3 也是 R^3 的一个基.

法二：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-1&2\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

所以,$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$, 从而 β_1,β_2,β_3 线性无关. 又 $dimR^3=3$, 所以 β_1,β_2,β_3 是 R^3 的一个基.

(2) 设 σ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 B, 则有

$$B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&-1&2\\1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&-2&3\\1&-3&2\end{bmatrix}.$$

(或 $AS=\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&1&1\\1&-3&2\end{bmatrix}$.

$$[S\vdots AS]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&1&-2\\0&1&-1&0&1&1\\0&0&1&1&-3&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&1\\0&1&-1&1&-2&3\\0&0&1&1&-3&2\end{array}\right]$$

,

得 $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.)

(3) 由 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3$ 知 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, 于是, $\sigma(\alpha)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为

$$X'=AX=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

七、(1) 记所给非齐次方程组 $AX=\beta$ 的三个线性无关的解为 X_1,X_2,X_3.

令 $\eta_1=X_1-X_2,\eta_2=X_2-X_3$. 易知 η_1,η_2 线性无关, 且 $A\eta_1=0,A\eta_2=0$.

由此可知齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系至少含有 2 个线性无关的解向量. 于是 $n-r(A)=4-r(A)\geq 2$, 得 $r(A)\leq 2$. 另一方面, 由于所给系数矩阵 A 的第一行向量与第二行向量不成比例, 可知 $r(A)\geq 2$. 综上,$r(A)=2$.

(2)

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & 1+a \end{array}\right].$$

因为 $r(A)=2$, 所以 $\dfrac{-1}{1-a}=\dfrac{1}{3-a}=\dfrac{-5}{b-a}$.

解得 $a=2,b=-3$. 于是

$$\tilde{A}\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

得 $AX=0$ 的一个基础解系 $\eta_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

及 $AX=\beta$ 的一个特解 $X_0=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

所以,$AX=\beta$ 的通解为

$$X=X_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix},\forall k_1,k_2\in P.$$

八、 所给二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}3&4&-2\\4&3&2\\-2&2&6\end{bmatrix}$.

由 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-4&2\\-4&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-7&\lambda-7&0\\-4&\lambda-3&-2\\2&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$

$\overset{c_2-c_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-7&0&0\\-4&\lambda+1&-2\\2&-4&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-7)\begin{vmatrix}\lambda+1&-2\\-4&\lambda-6\end{vmatrix}$

$=(\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14)=(\lambda-7)^2(\lambda+2)$,

得 A 的特征值为 $\lambda_1=7$(二重),$\lambda_2=-2$.

对 $\lambda_1=7$(二重), 解 $(7E-A)X=0$.

$7E-A=\begin{bmatrix}4&-4&2\\-4&4&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

得正交的两个特征向量 $X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},X_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-4\end{bmatrix}$.

对 $\lambda_2=-2$, 解 $(-2E-A)X=0$.

$-2E-A=\begin{bmatrix}-5&-4&2\\-4&-5&-2\\2&-2&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得特征向量 $X_3=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$.

单位化:

$\eta_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\eta_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{18}}\\-\frac{1}{\sqrt{18}}\\-\frac{4}{\sqrt{18}}\end{bmatrix},\eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

作正交矩阵 $S=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 则用正交替换 $X=SY$ 化二次型 f 为标准形 $f=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$.

(2) 二次型的正惯性指数为 2, 符号差为 1.

九、设 λ 为实方阵 A 的特征值. 由 $A^2-4A+3E=0$ 得 $\lambda^2-4\lambda+3=0$. 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$. 因为 2 不是 A 的特征值, 所以 $2E-A$ 可逆.

记 $B=(2E-A)^T(2E-A)$.

因为 $B^T=[(2E-A)^T(2E-A)]^T=(2E-A)^T(2E-A)=B$, 所以 B 为实对称矩阵.

对 $\forall X\neq 0$, 因为 $2E-A$ 为可逆矩阵, 所以恒有 $(2E-A)X\neq 0$. 于是恒有

$$X^TBX=X^T(2E-A)^T(2E-A)X=[(2E-A)X]^T[(2E-A)X]=((2E-A)X,(2E-A)X)>0,$$

因此,$B=(2E-A)^T(2E-A)$ 为正定矩阵.