2014～2015 学年第二学期期中考试试题

《线性代数及其应用》

（考试时间：2015 年 4 月 24 日）

题号	满分	得分
一	27	

1. （13 分）求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=-1, \\ x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=-2, \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=-2 \end{cases}$ 的向量形式的通解.

2. （14 分）讨论当 λ 取何值时齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 4x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0 \end{cases}$ 有非零解, 并求出其相应的向量形式的通解.

题号	满分	得分
二	23	

1. （10 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & b \\ a & a & \cdots & a & b & a \\ a & a & \cdots & b & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a & a \\ b & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$.

2. （13 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$，而 M_{ij}, A_{ij} 分别是 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3, 4)$ 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $M_{21}+3M_{22}+4M_{23}+M_{24}$；　　(2) 求 $A_{12}-A_{32}-A_{42}$.

题号	满分	得分
三	24	

1. (14 分) 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^*=8\boldsymbol{XA}^{-1}+12\boldsymbol{E}_4$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

2. (10 分) 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$为 3 元列向量，$\boldsymbol{A}_{3\times3} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$，且$|\boldsymbol{A}| = -1$，$\boldsymbol{B}^*$是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{B}_{3\times3} = [2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3]$，求$|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^*|$.

题号	满分	得分
四	26	

1. (12 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & 1 & c \\ 16 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & 0 & 9 & 45 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}$ 的秩$r(\boldsymbol{A}) = 1$.

(1) 试确定a, b, c的值.

(2) 试将矩阵$\boldsymbol{A}$分解成一个列矩阵与一个行矩阵的乘积，并求$\boldsymbol{A}^m$.（m为正整数）

2. (8 分) 设$\mathbb{P}^n$中的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}$线性表示. 证明：对于任意常数$k$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

3. (6 分) 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$为n元列向量，b为常数, 记分块矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}^*$是矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵. 证明：矩阵$\boldsymbol{Q}$可逆的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \neq b$.