2018～2019 学年第二学期第一次月考试卷

《高等数学 2B》（共 3 页）

（考试时间：2019 年 3 月 29 日, 14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	成绩	核分人签字
满分	32	32	24	12	100	
得分						

一、解答题（共 32 分，每小题 8 分）

1. (1) 写出曲线 $L:\begin{cases} 9x^2-4y^2=36, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面 S 的方程;

(2) 求旋转曲面 S 与平面 $x+y+z=0$ 的交线在 xOz 面上的投影曲线方程.

2. 由方程 $2z-e^z+2xy=3$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，且 $z(1,2)=0$，求全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}$.

3. 求函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处方向导数的最大值.

4. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上的点，使该点处的切平面平行于平面 $x+4y+6z=0$，并写出切平面方程.

二、计算题（共 32 分，每小题 8 分）

1. 求曲线$C:\begin{cases}2x-\mathrm{e}^y+z^2=9,\\2x^2+y^2-3z^2=6\end{cases}$在点$M(3,0,2)$ 处的切线方程和法平面方程 .

2. 已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又函数

$g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

3. 求二元函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

4. 求椭圆$\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=4,\\z=0\end{cases}$上的点到点$M(0,0,2)$ 的最长距离和最短距离.

三、计算题（共 24 分,每小题 8 分）

1. 计算 $I=\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:\ |x|+|y|\le 1$.

2. 计算 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$，其中 $D: 1\le x^2+y^2\le 2$.

3. 计算 $I=\iint\limits_{D}\sin\dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=2$ 和曲线 $x=y^3$ 所围成的闭区域.

四、解答题（本题 12 分）

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，

(1) 求偏导数 $f_x'(0,0)$ 及 $f_y'(0,0)$；

(2) 讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微;

(3) 讨论函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续.

2018～2019 学年第二学期第一次月考参考答案

《高等数学 2B》（考试时间：2019 年 3 月 29 日 14：00--16：00）

一、解答题（共 32 分，每小题 8 分）

1. (1) 写出曲线 $L:\begin{cases}9x^2-4y^2=36,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面 S 的方程;

（2）求旋转曲面 S 与平面 $x+y+z=0$ 的交线在 xOz 面上的投影曲线方程.

解：(1) 绕 y 轴的旋转曲面 S 的方程为 $9x^2+9z^2-4y^2=36$.

(2) 由方程组 $\begin{cases}9x^2+9z^2-4y^2=36,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 消去 y,

将 $y=-(x+z)$ 代入曲面 S 的方程 $9x^2+9z^2-4y^2=36$, 得

$$5x^2+5z^2-8xz=36,$$

故所求投影曲线的方程为 $\begin{cases}5x^2+5z^2-8xz=36,\\ y=0\end{cases}$.

2. 由方程 $2z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，且 $z(1,2)=0$,求全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}$.

解：令 $F(x,y,z)=2z-\mathrm{e}^z+2xy-3$, 则

$F_x'=2y,\ F_y'=2x,\ F_z'=2-\mathrm{e}^z$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=-\frac{F_x'}{F_z'}\Big|_{(1,2)}=\frac{2y}{\mathrm{e}^z-2}\Big|_{(1,2)}=-4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=-\frac{F_y'}{F_z'}\Big|_{(1,2)}=\frac{2x}{\mathrm{e}^z-2}\Big|_{(1,2)}=-2.$$

故 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=-4\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y$.

3. 求函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处方向导数的最大值.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_M=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\Big|_M=\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_M=\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}\Big|_M=\dfrac{4}{9}$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\Big|_M=-\frac{4}{9},$$

于是函数在点 M 处的梯度 $\boldsymbol{grad}\,u\big|_M=\dfrac{2}{9}(1,2,-2)$,

$$\left|\boldsymbol{grad}\,u\big|_M\right|=\frac{2}{9}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\frac{2}{3}.$$

故函数 u 在点 $M(1,2,-2)$ 处方向导数的最大值即 $\left|\boldsymbol{grad}\,u\big|_M\right|=\dfrac{2}{3}$.

4. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上的点，使该点处的切平面平行于平面 $x+4y+6z=0$，并写出切平面方程.

解：设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$， 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,

$F_x'\big|_{M_0}=2x_0$, $F_y'\big|_{M_0}=4y_0$, $F_z'\big|_{M_0}=6z_0$,

切平面平行于 $x+4y+6z=0$, 令 $\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{4y_0}{4}=\dfrac{6z_0}{6}=t$, 得

$x_0=\dfrac{1}{2}t,\ y_0=\dfrac{1}{2}t,\ z_0=t$, 代入曲面方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$,

$\dfrac{1}{4}t^2+2t^2+3t^2=21$, 得 $t=\pm2$,

切点为 $M_0(1,2,2)$ 或 $M_0(-1,-2,-2)$.

故切平面为 $x-1+4(y-2)+6(z-2)=0$ 或 $x+1+4(y+2)+6(z+2)=0$.

即 $x+4y+6z\mp21=0$.

二、计算题（共 32 分，每小题 8 分）

1. 求曲线 $C:\begin{cases}2x-\mathrm{e}^y+z^2=9,\\ 2x^2+y^2-3z^2=6\end{cases}$ 在点 $M(3,0,2)$ 处的切线方程和法平面方程.

解：曲面 $2x-\mathrm{e}^y+z^2=9$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2,-\mathrm{e}^y,2z)\big|_M=(2,-1,4)$,

曲面 $2x^2+y^2-3z^2=6$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(4x,2y,-6z)\big|_M=(12,0,-12)$,

切线的方向向量 $\vec{s}=\dfrac{1}{12}\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=(1,6,1)$.

于是切线方程为 $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z-2}{1}$,

法平面方程为 $x-3+6y+z-2=0$, 即 $x+6y+z-5=0$.

2. 已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又函数

$g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right]$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解：令 $u=xy,\ v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\,f_u'+x\,f_v',\qquad \frac{\partial g}{\partial y}=x\,f_u'-y\,f_v',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2 f_{uu}''+2xy\,f_{uv}''+x^2 f_{vv}''+f_v',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2 f_{uu}''-2xy\,f_{uv}''+y^2 f_{vv}''-f_v',$$

于是 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{uu}''+f_{vv}'')=x^2+y^2$.

3. 求二元函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

解：由 $\begin{cases}f_x'=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0,\\ f_y'=2\mathrm{e}^{2x}(y+1)=0\end{cases}$ 解得驻点 $M_0(\dfrac{1}{2},-1)$.

$A=f_{xx}''\big|_{M_0}=2\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+2)\big|_{M_0}=2\mathrm{e}$,

$B=f_{xy}''\big|_{M_0}=\mathrm{e}^{2x}(4y+4)\big|_{M_0}=0,\quad C=f_{yy}''\big|_{M_0}=2\mathrm{e}^{2x}\big|_{M_0}=2\mathrm{e}$,

由于 $B^2-AC=0-4\mathrm{e}^2<0$ 且 $A>0$,

所以 $M_0(\dfrac{1}{2},-1)$ 为极小值点，且函数的极小值为 $f(\dfrac{1}{2},-1)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

4. 求椭圆 $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 上的点到点 $M(0,0,2)$ 的最长距离和最短距离.

解：椭圆上的点 $P(x,y,0)$ 到点 $M(0,0,2)$ 的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

令 $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+4+\lambda\,(5x^2-6xy+5y^2-4)$,

由 $\begin{cases}F_x'=2x+10\lambda x-6\lambda y=0,\\ F_y'=2y+10\lambda y-6\lambda x=0,\\ 5x^2-6xy+5y^2-4=0\end{cases}$ 解得

四个驻点 $M_1(1,1,0), M_2(-1,-1,0), M_3(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0), M_4(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$.

$d\big|_{M_1}=d\big|_{M_2}=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6},\quad d\big|_{M_3}=d\big|_{M_4}=\sqrt{(\pm\dfrac{1}{2})^2+(\mp\dfrac{1}{2})^2+(-2)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

故椭圆上的点到点 $M(0,0,2)$ 的最长距离为 $\sqrt{6}$，最短距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

三、计算题（共 24 分,每小题 8 分）

1. 计算 $I=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D: $|x|+|y|\le 1$.

解：$I=\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=8\iint\limits_{D_1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (其中D_1是D在第一象限部分,利用对称性)

$=8\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\mathrm{d}y=8\int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$

2. 计算 $I=\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$, 其中 $D: 1\le x^2+y^2\le 2$.

解：$I=\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-(x^2+y^2)}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\rho\sqrt{4-\rho^2}}$

$=2\pi\left(\arcsin\frac{\rho}{2}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=2\pi\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{6}.$

3. 计算 $I=\iint\limits_D \sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=2$ 和曲线 $x=y^3$ 所围成的闭区域.

解：$I=\iint\limits_D \sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^3}\sin\frac{x}{y}\,\mathrm{d}x$

$=-\int_1^2\left(y\cos\frac{x}{y}\right)\Big|_y^{y^3}\mathrm{d}y$

$=-\int_1^2(y\cos y^2-y\cos 1)\,\mathrm{d}y$

$=-\frac{1}{2}\sin 4+\frac{1}{2}\sin 1+\frac{3}{2}\cos 1.$

四、解答题（本题 12 分）

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

(1) 求偏导数 $f'_x(0,0)$ 及 $f'_y(0,0)$; (2) 讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微;

(3) 讨论函数 $f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 点 $(0,0)$ 处是否连续.

解：(1) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x}=0,$

同理可求 $f'_y(0,0)=0.$

(2) $\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\rho}$ $\left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$

$=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\rho}\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho}}{\rho}=0,$

故函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(3) $f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$,

二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x'(x,y)$ 不存在,

所以 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.