2016～2017 学年第二学期《线性代数及其应用》期末试题参考答案

（考试时间：2017 年 6 月 2 日）（A 卷）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、$-\dfrac{9}{2}$；　2、$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$；　3、$3$；　4、$\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&0\end{bmatrix}$；　5、$-12$.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

A C B A B

三、（共 17 分，其中第 1 题 7 分，第 2 题 10 分）

1、(7 分) 解 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，则有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\0&1&1&-2\\2&-3&-1&-4\\-3&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\0&1&1&-2\\0&-9&1&-12\\0&10&-1&13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\0&1&1&-2\\0&0&10&-30\\0&0&-11&33\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&3&-1&4\\0&1&1&-2\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 3， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为该向量组的一个极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(若极大无关组取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$,则 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_4$.)

2、(10 分) 解 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&b&1\\-1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2+a=\lambda,\\2+b+a=\lambda,\\2a=\lambda a,\end{cases}$$

求得 $a=b=0,\lambda=2$

(2) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-1\\-2&\lambda&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\\lambda-2&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\0&\lambda-1&0\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1.$

对于二重根 $\lambda_1=2$， 考虑 2 的几何重数 $=3-r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 而

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

则 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，因此 2 的几何重数 $=1\neq 2=2$ 的代数重数，故 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

四、(12 分) 解 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则有

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=-1,\\ 2x_1+7x_2+(4-a)x_3=0,\\ -2x_1+(a-5)x_2=3+3a.\end{cases}$$

方法 1 对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 2 & 7 & 4-a & 0\\ -2 & a-5 & 0 & 3+3a\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2-a & 2\\ 0 & a+1 & 2 & 1+3a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2-a & 2\\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1\end{array}\right].$$

1) 当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，则方程组有唯一解,可唯一表示.

2) 当 $a=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2\neq 3=r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，则方程组无解. 此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

3) 当 $a=1$ 时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<3$，因此方程组有无穷多解. 此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一.

其同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-7+2x_3,\\ x_2=2-x_3.\end{cases}$

且 $\boldsymbol{\beta}=(-7+2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(2-k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k 为任意常数.

方法 2 方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 4-a\\ -2 & a-5 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2-a\\ 0 & a+1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2-a\\ a+1 & 2\end{vmatrix}=a(a-1).$$

1)当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，则方程组有唯一解,可唯一表示.

2)当 $a=0$ 时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 2 & 7 & 4 & 0\\ -2 & -5 & 0 & 3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],$$

则 $r(\boldsymbol{A})=2\neq 3=r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，因此方程组无解. 此时 $\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

当 $a=1$ 时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&-1\\2&7&3&0\\-2&-4&0&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&3&1&-1\\0&1&1&2\\0&2&2&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-2&-7\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=2<3$，因此方程组有无穷多解. 此时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一.

其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-7+2x_3,\\x_2=\ \ 2-\ \ x_3.\end{cases}$

且 $\boldsymbol{\beta}=(-7+2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(2-k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k 为任意常数.

五、(10 分) 解(1) 由标准基 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2$ 到基(I) $2+3x-x^2,-1-x+x^2,-1-2x+x^2$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\3&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix},$$

因此由基(I) $2+3\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^2,-1-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2,-1-2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2$ 到标准基 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}$,且

$$\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 在基 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=[8,5,-1]^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 在基(I) $2+3x-x^2,-1-x+x^2,-1-2x+x^2$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}$，

则由坐标变换公式，有 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$,即 $\begin{bmatrix}8\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\3&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}$，(或 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}$)，解得

$\boldsymbol{Y}=[7,-4,10]^{\mathrm{T}}$.

六、(10 分) 解(1) 计算

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad \sigma(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&0\end{bmatrix},\qquad \sigma(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

所以 σ 在标准基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{M}_1=\mathrm{diag}[2,2,-1-1]$.

(2) 由标准基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 到基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\5&3&0&0\\0&0&4&2\\0&0&3&2\end{bmatrix}$,

方法一　计算 $S^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 0\\ 5 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}$;

则 σ 在基 B_1,B_2,B_3,B_4 下的矩阵为

$$M_2=S^{-1}M_1S=\begin{bmatrix}-6 & 4 & 0 & 0\\ 10 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & & & \\ & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}.$$

方法二　$M_2=S^{-1}M_1S$

$$=\begin{bmatrix}P^{-1} & O\\ O & Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2E_2 & O\\ O & -E_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P & O\\ O & Q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2P^{-1} & O\\ O & -Q^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P & O\\ O & Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2E_2 & O\\ O & -E_2\end{bmatrix}.$$

方法三

$$\sigma(B_1)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 10\\ 0 & 0\end{bmatrix}=2B_1,$$

$$\sigma(B_2)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 0 & 0\end{bmatrix}=2B_2,$$

$$\sigma(B_3)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -4 & -3\end{bmatrix}=-B_3,$$

$$\sigma(B_4)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -2 & -2\end{bmatrix}=-B_4,$$

所以 σ 在基 B_1,B_2,B_3,B_4 下的矩阵为 $M_2=\mathrm{diag}[2,2,-1-1]$.

七、(14 分)　解 (1)　实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ -1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ \lambda-1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & -2\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

则 A 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

对于 $\lambda_1=1$，求解 $(E-A)X=\mathbf{0}$. 因为

$$E-A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$x_1=x_2-x_3$，求得一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

正交化 ，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

对于$\lambda_3=-2$，求得$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,-2).$$

实二次型$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，化为标准形$y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

注：（对应于$\lambda_1=1$的正交特征向量还可以通过观察取正交的基础解系，例如$\boldsymbol{\beta}_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[2,1,-1]^{\mathrm{T}}$等）

(2)　二次型f不是正定的.

八、(7 分) 证　由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，因此$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$. 又

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\ge r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{E})=n,$$

因而$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，知$s=n-r(\boldsymbol{A})$，且0是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$为对应的线性无关的特征向量. 同理，由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$为齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，知$t=n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，且1是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$为对应的线性无关的特征向量.

注意到$s+t=(n-r(\boldsymbol{A}))+(n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}))=2n-(r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}))=n$.

且$\boldsymbol{A}$的特征值 0 与 1 互异，所以由n个向量构成的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性无关.

又$\dim\mathbf{R}^n=n$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是$\mathbf{R}^n$的一个基.