2015 ～ 2016 学年第一学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》 （A 卷　共 4 页）

一、填空题

1、 设n元向量$\alpha=[\frac{1}{3},0,\cdots,0,\frac{1}{3}]^T$，矩阵$A=E-\alpha\alpha^T$是$B=E+k\alpha\alpha^T$的逆矩阵，其中$E$为$n$阶单位阵，则参数$k$的值为______.

2、 线性空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$的子空间$W=\{\begin{bmatrix} a-b & 0 \\ b & a+b \end{bmatrix},|a,b\in\mathbf{R}\}$的维数是____.

3、 设方阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & b & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$的特征值为2,2,6，则参数$a$的值为____，参数$b$的值为____.

4、 设2阶方阵A的每一行元素之和为3，且$|A+2E|=0$，则A^2+A^{-1}的全部特征值为____.

5、 设A为3阶实对称矩阵，且$S^{-1}AS=diag(10,1,1)$，其中$S=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & k \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则参数$k$的值为____.

二、单项选择题

1、 将3阶方阵A的第1行与第3行交换得到B，再将矩阵B的第2列加到第3列上得到单位阵E_3，则A的逆矩阵为(　)

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2、 设A为$m\times n$矩阵，B为$n\times m$矩阵，且方阵BA满秩，则以下说法正确的是(　)

(A) A的列向量组线性无关，B的行向量组线性无关;

(B) A的列向量组线性无关，B的列向量组线性无关;

(C) A的行向量组线性无关，B的行向量组线性无关;

(D) A的行向量组线性无关，B的列向量组线性无关。

3、 设$\eta=[1,2,1,0]^T$是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，其中$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为4元列向量，则一下结论错误的是(　)

(A) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关

(B) α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

(C) α_1可$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$由线性表示

(D) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关

4、 设方阵A与B相似，则下列命题中正确的有()个

(1) A^n 与B^n 相似（n为正整数）

(2) 存在可逆阵P,Q，使得$PAQ=B$

(3) A与B的特征值、特征向量相同

(4) A^T与B^T相似

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

5、 与正定矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$合同的矩阵为()

(A) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

三、设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 问x为何值时，A可对角化？并说明理由；

(2) 当A可对角化时，计算A^n（n为正整数）.

四、已知R^4中的向量组$\alpha_1=[1,2,3,5]^T,\alpha_2=[2,5,5,12]^T,\alpha_3=[-3,-8,a-8,-19]^T,\alpha_4=[0,1,-1,a+1]^T,\alpha_5=[3,7,8,b+17]^T$，试问$\alpha_5$可否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示？若能表示，试求全部表达方式.

五、在线性空间$R^{2\times2}$上定义变换$\sigma(X)=PXP,\forall X\in R^{2\times2}$，其中$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求证σ是$R^{2\times2}$上的线性变换；

(2) 求σ在$R^{2\times2}$的标准基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵$M_1$.

(3) 求σ在$R^{2\times2}$的基$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},B_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},B_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$下的矩阵$M_2$.

六、设向量组$(I):\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间$R^3$的一个基.

(1) 证明$(II):\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\beta_3=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$ 也是R^3的一个基;

(2) 求由基(II)到基(I)的过渡矩阵;

(3) 求由基(II)到基$(III):\gamma_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\gamma_2=\alpha_1+\alpha_2,\gamma_3=\alpha_3$ 的过渡矩阵.

七、设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2+6x_2x_3+6x_2x_3$.

(1) 求一个正交线性替换，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形，并写出标准形；

(2) 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

八、设A,B为n阶正交阵，且$|A|=-|B|$，求证：0是方阵$A+B$的特征值.