2017 ～ 2018 学年第一学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》 （A 卷　共 4 页）

2017级理学院严班　Johnson整理

一、填空题

1、子空间$W=\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\in \mathrm{R}^4 \mid x_1+x_2=0,x_3+x_4=0\}$的维数为____________________.

2、设向量组$(\mathrm{I})\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$和 $(\mathrm{II})\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩均为 2，向量组$(\mathrm{III})\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 3，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为___.

3、设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2$，则$|\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=$______.

4、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$与矩阵$\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(2,2,-4)$相似，则$a=$_______.

5、设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，且$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互异，对应的特征向量依次为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，则参数$k$的取值范围是____________.

二、选择题

1、设矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则下列结论中错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^2$与$\boldsymbol{B}^2$相似　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$相似　　(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$相似　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$相似

2、设向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，但不可由(I)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表示，记(II)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$，则(　　).

(A) 向量$\boldsymbol{\alpha}_m$不可由向量组(I)线性表示，也不可由向量组(II)线性表示

(B) 向量$\boldsymbol{\alpha}_m$不可由向量组(I)线性表示，但可由向量组(II)线性表示

(C) 向量$\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组(I)线性表示，也可由向量组(II)线性表示

(D) 向量$\boldsymbol{\alpha}_m$可由向量组(I)线性表示，但不可由向量组(II)线性表示

3、设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解，则(　　).

(A) 向量$\boldsymbol{\beta}$可由矩阵$\boldsymbol{A}$的线性无关的列向量组线性表示

(B) 向量$\boldsymbol{\beta}$可由矩阵$\boldsymbol{A}$的线性无关的行向量组线性表示

(C) 向量$\boldsymbol{\beta}$可由矩阵$\boldsymbol{A}$的线性相关的列向量组线性表示

(D) 向量$\boldsymbol{\beta}$可由矩阵$\boldsymbol{A}$的线性相关的行向量组线性表示

4、设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$正定矩阵当且仅当$\boldsymbol{A}$的特征值(　　).

(A) 全为正数　　(B) 全小于 1　　(C) 全大于 1　　(D) 全为 1

5、设实对称矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$合同，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则实二次型$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$的规范形为(　　).

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ (B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ (C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

三、1、求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\5\\-1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{bmatrix}$的秩和一个极大无关组，并用该极大无关组线性表示其余向量.

2、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\b\end{bmatrix}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的对应于特征值$\lambda$的特征向量，求常数$a,b$的值以及$\lambda$的值.

四、试问a取何值时，线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\2x_1+(a+2)x_2-x_3=a,\\-x_1-x_2+ax_3=a-1\end{cases}$有唯一解，无解，无穷多解？在有解时求其通解.

五、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是线性空间$V$的一个基，且$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$也是$V$的一个基;

(2) 求由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵;

(3) 求$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

六、设σ是线性空间R^3上的线性变换，规定$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[y,z,x]^{\mathrm{T}},\forall\boldsymbol{\alpha}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}\in R^3$.

(1) 求σ在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$下的矩阵$\boldsymbol{A}$;

(2) 求σ在标准基$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$下的矩阵$\boldsymbol{B}$.

七、求一个正交线性替换，将实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=7x_1^2+10x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$化为标准形，并写出其标准形.

八、设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$分别是长度为 1,2 的 3 元列向量，且$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交，记$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 证明(1) $r(\boldsymbol{A})\le 2$；(2) 矩阵$\boldsymbol{A}$可对角化.

答案

填空题: 1、2.　　2、3.　　3、6.　　4、3.　　5、$k\ne 2$.

选择题:　DBACC

三、1、秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 2、$a=2,b=-2,\lambda=-1$或$a=2,b=1,\lambda=\frac{1}{5}$.

四、$a\ne 0,a\ne -1$，唯一解$[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[\frac{1}{a},1-\frac{1}{a},1]$；$a=0$，无解；$a=-1$，无穷多解$\boldsymbol{X}=[-3,5,0]^{\mathrm{T}}+k[2,-3,1]^{\mathrm{T}}$.

五、过渡矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}$；坐标$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.　　六、(1) $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}4&9&0\\-2&-4&1\\1&2&0\end{bmatrix}$.　　七、$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=12$.