2014～2015 学年第二学期期末考试试卷

《线性代数及其应用》 （A卷 共4页）

（考试时间：2015年6月19日） 2017级理学院严班 Johnson整理

一、填空题（共15分，每小题3分）

1. 设矩阵A由3阶单位矩阵E_3交换第1、2行得到，矩阵B由E_3交换第1、3列得到，矩阵$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$，则$A^{15}CB^{16}=$ ________.

2. 设4元非齐次线性方程组$AX=\beta$的系数矩阵的秩等于2，且$X_1=[5,2,-1,1]^T$，$X_2=[2,1,3,0]^T$，$X_3=[0,3,-1,1]^T$为它的三个线性无关解，则方程组$AX=\beta$的通解为 ________.

3. 设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & c \\ b & d & 5 \end{bmatrix}$的特征值为6，2，2．如果A可对角化，则参数a的值为 ________.

4. 设A是秩为2的3阶实对称矩阵，方阵B与A正交相似，且$B^2=4B$，则方阵B的全部特征值为 ________.

5. 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+x_2^2+2tx_2x_3+4x_3^2$的正惯性指数为3，则参数t的取值范围是 ________.

二、单项选择题（共15分，每小题3分）

1. 设A，B为同阶方阵，E为单位矩阵，则下列叙述中正确的有（ ）个．

① 若$A^2=0$，则$(E-A)^{-1}=E+A$　　② 若$A^2=A$，则$A=0$或$A=E$

③ 若$AX=AY$且A可逆，则$X=Y$　　④ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设n元齐次线性方程组$AX=0$的系数矩阵A的秩为n-3，且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为方程组$AX=0$的3个线性无关的解向量，则$AX=0$的一个基础解系为（ ）．

A. $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$　　B. $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3$

C. $\alpha_1-2\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_3$　　D. $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3$

3. 下列线性空间的子集中，构成子空间的是（ ）．

A. 实空间R^3的子集$W=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\}$

B. 实空间R^n的分量之和等于1的向量全体

C. 实空间$R^{n\times n}$中所有n阶实反对称矩阵组成的子集

D. 实空间$R^{n\times n}$中所有n阶正定矩阵组成的子集

4. 设A，B为同阶方阵，则以下说法中正确的是（ ）．

A. 若A和B的特征多项式相同，则A与B相似　　B. 若A与B相似，则A与B特征向量相同．

C. 若A可逆，则AB与BA相似　　D. 若A与B相似，则A与B合同．

5. 设x_1,x_2,x_3为矩阵$A_{3\times3}$的分别属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=5$的线性无关特征向量，且$S^{-1}AS=\mathrm{diag}(5,3,3)$，则下列S的取法正确的有（ ）

① $S=[x_3,x_2,x_1]$ ② $S=[x_1,x_3,x_2]$ ③ $S=[5x_3,x_1-x_2,x_1+x_2]$ ④ $S=[x_1+x_2,3x_2,x_1]$

A. ①和③ B. ①和④ C. ②和③ D. ②和④

三、共18分，每小题9分

1. 求向量组$\alpha_1=[1,0,2,3]^T$, $\alpha_2=[1,1,3,5]^T$, $\alpha_3=[1,-1,a+2,1]^T$, $\alpha_4=[1,2,4,a+8]^T$, $\alpha_5=[1,1,4,5]^T$的秩以及它的一个极大无关组.

2. 设$f(x)=x^2-2x+5$，A是3阶方阵，且A的全体主对角元素之和为1，又$|A+E|=|E-A|=0$，求$f(A)$的全部特征值及$|3E_3-A^*|$.

四（12分）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\4&2&1\\2&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\3&10\\1&4\\1&a\end{bmatrix}$，判断参数a取何值时，矩阵方程$AX=B$有解，求出所有矩阵X.

五（12分）在线性空间$R[x]_3$中，取定两个基(I) $x^3,x^2,x,1$和(II) $x^3+2x^2, 3x^3+7x^2, 3x+1, 4x+3$.

(1) 求由基(II)到基(I)的过渡矩阵.

(2) 求在两个基下具有相同坐标的元素.

六（10分）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性空间$R^3$的一个基，$\sigma$是定义在$R^3$上的线性变换，且$\sigma(\alpha_1)=\alpha_1$, $\sigma(\alpha_2)=-2\alpha_2$, $\sigma(\alpha_3)=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

(1) 求线性变换σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵A

(2) 求线性变换σ在基$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3$下的矩阵B.

七（13分）设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$

(1) 求一个正交线性替换，将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形，并写出标准形；

(2) 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形

八（5分）设A为n阶方阵，α_1,α_2为A的分别属于特征值1，-2的特征向量，向量α_3,α_4分别满足$A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_4$. 证明向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.