2018～2019 学年第一学期期中考试试卷和答案

《高等数学 2A》

（共 3 页，另附 2 页草纸）

（考试时间：2018 年 11 月 16 日, 13:30-15:30）

题号	一	二	三	四	五	成绩	核分人签字
满分	15	15	8	40	22	100	
得分							

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. “ $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有界”是“ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在”的（　B　）条件.

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要

2. 已知 $f'(x)=g'(x)$，则下述结论正确的是(　D　)．

(A) $f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数　　(B) $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数

(C) $f(x)=g(x)$　　(D) $f(x)=g(x)+C$（C 为某一常数）

3. 设函数 $f(u)$ 可导，函数 $y=f(x^3)$ 当自变量 x 在 $x=1$ 处取增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为0.3，则 $f'(1)=$（　A　）．

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5

4. 若函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=\sin^2[\sin(x+1)]$，$f(0)=4$，则 $f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 当自变量 $y=4$ 时的导数值为（　C　）．

(A) $\dfrac{1}{\sin^2(\sin 4)}$　　(B) $\dfrac{1}{\sin^2(\sin 5)}$　　(C) $\dfrac{1}{\sin^2(\sin 1)}$　　(D) 0

5. 设 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $f(x)-\sin x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列结论错误的是（　D　）．

(A) $a=0$　　(B) $b=1$　　(C) $c=0$　　(D) $d=\dfrac{1}{2}$

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$______________. 1

2. 已知 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h}=$______________. 10

3. 设 $y=(x^2+x+2)\sin x$，则 $y^{(10)}(0)=$______________. 10

4. 若方程 $y+2\sqrt{y+x}=2x^2$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的图像过点 $(1,0)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$______________. $\dfrac{3}{2}$

5. 不定积分 $\int \mathrm{e}^{2\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x=$______________. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2\sin x}+C$

三、计算题（共 8 分）

试确定 a 和 b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\le 2,\\ x^2+b, & x>2\end{cases}$ 在其定义域内处处可导.

解　由函数处处可导知 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$，

即　$2a+1=4+b$.

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{ax+1-(2a+1)}{x-2}=a,$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+b-(2a+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+b-(4+b)}{x-2}=4,$$

由左右导数相等可知，$a=4$.

所以　$b=5$.

四、计算题（共 40 分，每小题 8 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\sin x}$.

解法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

解法二：由 Taylor 公式 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{e^x-1}=7$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}$

解 由条件知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

所以 $7=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=7$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t(\cos t-\sin t)}{\cos t}=e^t(1-\tan t)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d\left(e^t(1-\tan t)\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(e^t(1-\tan t)\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{e^t(1-\tan t-\mathrm{sce}^2 t)}{\cos t},$$

所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$.

4. 设 $y=f\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$，而 $f'(x)=\arcsin x$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

解：令 $u=\dfrac{x}{1+x}$，则 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{(1+x)^2}$,

所以 $\dfrac{dy}{dx}=f'\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$$=\frac{1}{(1+x)^2}\arcsin\frac{x}{1+x},$$

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{24}$.

5. 求 $f(x)=x^2-\ln(1+x^2)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的值域.

解：显然 $f(x)=x^2-\ln(1+x^2)$ 在 $[-2,1]$ 上连续，因此 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 内一定有最大值与最小值.

由 $f'(x)=2x-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{2x^3}{1+x^2}=0$,

得唯一的驻点 $x=0\in[-2,1]$.

因为 $f(-2)=4-\ln 5>f(1)=1-\ln 2>f(0)=0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值为 $f(-2)=4-\ln 5$，最小值为 $f(0)=0$.

故 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的值域为 $[0,4-\ln 5]$.

五、解答和证明题（共 22 分，第 1 小题 8 分，第 2、3 小题每题 7 分）

1. 求曲线 $y=\dfrac{x-1}{\mathrm{e}^{2x}}$ 的凹凸区间与拐点的坐标.

解：$y'=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2(x-1)\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}}=\dfrac{3-2x}{\mathrm{e}^{2x}}$,

$$y''=\left(\frac{3-2x}{\mathrm{e}^{2x}}\right)'=\frac{-2\mathrm{e}^{2x}-2(3-2x)\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}}=\frac{4(x-2)}{\mathrm{e}^{2x}},$$

令 $y''=0$, 解得 $x=2$, 此时 $y=\mathrm{e}^{-4}$.

当 $x>2$ 时，$y''>0$, 函数是严格凹函数；当 $x<2$ 时，$y''<0$, 函数是严格凸函数.

所以凸区间 $(-\infty,2]$，凹区间 $[2,+\infty)$，拐点 $(2,\mathrm{e}^{-4})$.

2. 求曲线 $y=(x+1)\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})\quad(x>0)$ 的斜渐近线方程.

解：斜渐近线的斜率：$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})=1$,

截距 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})-1\right)\right]+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})}{\frac{1}{x}}+1=\frac{1}{\mathrm{e}}+1.$$

求截距的解法二：

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-x\right]=\lim_{t\to0^+}\left[(\frac{1}{t}+1)\ln(\mathrm{e}+t)-\frac{1}{t}\right](令t=\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(t+1)\ln(\mathrm{e}+t)-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\left[\ln(\mathrm{e}+t)+\frac{t+1}{\mathrm{e}+t}\right]=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$$

所以渐近线的方程是 $y=x+1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3.设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续,在开区间 $(0,2)$ 内可导，且有 $f(0)=f(2)=0$,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=5$.

证明: (1)存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=\eta$； (2)存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.

证明：(1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=5$，所以 $f(1)=2$.

设 $F(x)=f(x)-x$，由条件知 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，且 $F(1)=1>0$，$F(2)=-2<0$，

根据零点定理，至少存在一个 $\eta\in(1,2)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 解法一：

设 $G(x)=xf(x)-x^2$，由条件知 $G(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且

$G(0)=G(\eta)=0$，根据罗尔中值定理，至少存在一个 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $G'(\xi)=0$，即

$f(\xi)+\xi f'(\xi)-2\xi=0$，也即 $f'(\xi)=\dfrac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.

(2) 解法二：

设 $G(x)=xf(x),H(x)=x^2$, 由条件知 $G(x)$ 和 $H(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内

可导，且 $G(0)=H(0)=0,G(\eta)=\eta f(\eta),H(\eta)=\eta^2$，根据柯西中值定理,

至少存在一个 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $\dfrac{G(\eta)-G(0)}{F(\eta)-F(0)}=\dfrac{G'(\xi)}{H'(\xi)}$,

即 $\dfrac{\eta f(\eta)}{\eta^2}=\dfrac{\xi f'(\xi)+f(\xi)}{2\xi}$， 也即 $1=\dfrac{\xi f'(\xi)+f(\xi)}{2\xi}$,

从而 $f'(\xi)=\dfrac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$.