2013～2014 学年第二学期阶段考试试卷

《线性代数及其应用》（A 卷　　共 3 页）

（考试时间：2014 年 4 月 11 日）

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

一、（共 35 分）

1. （15 分）求线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$向量形式的通解.

2. （10 分）设线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + (\lambda - 2)x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (\lambda - 2)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，求参数 λ 的值.

3. （10 分）设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$，求 $3A_{21} - 5A_{23} - 12A_{24}$（其中 A_{ij} 为 (i, j) 元的代数余子式）.

二、(共 36 分，每小题 12 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 元列向量，$\boldsymbol{A}_{3\times3} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$，

$\boldsymbol{B}_{3\times3} = [\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3, 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_3]$，且 $|\boldsymbol{B}| = 6$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

2．设实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^{-1} = 2\boldsymbol{XA}^{-1} - 2\boldsymbol{E}_4$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^m$ 及 $|\boldsymbol{A}^m|$（其中 m 为正整数）.

三、(共 29 分)

1.（12 分） 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\-8\end{bmatrix}$$

的秩以及它的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

2.（8 分）设 $\mathbb{P}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关. 试判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性相关性，并说明理由.

3.（9 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n $(n\geq 3)$ 阶非零实方阵，且 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵且 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}$.

阶段考试答案

一、

1.**解** 对方程组的增广矩阵作初等行变换,

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\3&-1&1&1&0\\1&0&1&2&1\\1&-3&-2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3-r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&2&1&-2&-3\\0&1&1&1&0\\0&-2&-2&-2&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&1&1&1&0\\0&2&1&-2&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+(-2)r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&1&1&1&0\\0&0&-1&-4&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&1&0&-3&-3\\0&0&1&4&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-2&-2\\0&1&0&-3&-3\\0&0&1&4&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

因为 $r(\tilde{A})=r(A)=3<4$, 所以方程组有无穷多组解.

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2+2x_4,\\x_2=-3+3x_4,\\x_3=3-4x_4.\end{cases}$$

求得方程组的通解为

$$X=\begin{bmatrix}-2\\-3\\3\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\3\\-4\\1\end{bmatrix},\ \ k \text{ 为任意常数.}$$

2.**解** 由于该齐次线性方程组有非零解, 则其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=0.$$

另一方面, 有

$$D\ \underline{\underline{c_2-c_3}}\ \begin{vmatrix}\lambda&0&2\\-2&\lambda-4&2\\2&4-\lambda&\lambda-2\end{vmatrix}\underline{\underline{r_3+r_2}}\begin{vmatrix}\lambda&0&2\\-2&\lambda-4&2\\0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda-4).$$

因此, $\lambda=0$ 或 $\lambda=4$.

3.**解** $3A_{21}-5A_{23}-12A_{24}=\begin{vmatrix}1&4&9&16\\3&0&-5&-12\\1&2&3&4\\1&8&27&64\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&4&4&4\\1&2&3&4\\1&8&27&64\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}4&4&4&4\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=4V(1,2,3,4)$$

$$=4(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=4\times12=48.$$

二、

1.**解** 由 $\boldsymbol{B}_{3\times3}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&3\\1&2&0\\1&-3&-2\end{bmatrix}$

得 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&3\\1&2&0\\1&-3&-2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&-3&-5\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\times(-19)=6.$

从而,$|\boldsymbol{A}|=-\dfrac{6}{19}$.

2.**解** $|A^*|=-8$.

由 $|A|^{4-1}=|A^*|=-8$ 得 $|A|=-2$.

对 $AXA^{-1}+2E=2XA^{-1}$ 两边同右乘 A得

$$AX+2A=2X.$$

两边再同 左乘 A^*得

$$|A|X+2|A|E=2A^*X.$$

代入 $|A|=-2$ 得

$$-2X-4E=2A^*X,$$

$$X+2E=-A^*X$$

整理得 $(E+A^*)X=-2E.$

由 $[E+A^*\vdots-2E]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1&0&0&1&-2&0&0&0\\0&-1&0&-2&0&-2&0&0\\0&0&-1&0&0&0&-2&0\\0&0&0&2&0&0&0&-2\end{array}\right]$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

可知 $E+A^*$ 可逆, 求得

$$X=(E+A^*)^{-1}(-2E)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.**解**

对 $\boldsymbol{A}$ 进行分块 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

于是,$\boldsymbol{A}^m=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^m \end{bmatrix}$.

下面求 $\boldsymbol{B}^m$ 与 $\boldsymbol{C}^m$.

记 $\boldsymbol{B}=2E_2+\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=2E_2+\boldsymbol{G}$. 由于 $\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{G}^m=\boldsymbol{O}, m\geq 3$. 又 E_2 与 $\boldsymbol{G}$ 可交换, 应用二项式定理得

$$\boldsymbol{B}^m=(2E_2+\boldsymbol{G})^m=(2E_2)^m+m(2E_2)^{m-1}\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 2^m & 3m\cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}[1\ \ 2]$ 得

$$\boldsymbol{C}^m=(tr\boldsymbol{C})^{m-1}\boldsymbol{C}=4^{m-1}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{2m-1} & 2^{2m} \\ 2^{2m-2} & 2^{2m-1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{于是 } \boldsymbol{A}^m=\begin{bmatrix} 2^m & 3m\cdot 2^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2m-1} & 2^{2m} \\ 0 & 0 & 2^{2m-2} & 2^{2m-1} \end{bmatrix}.$$

由 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$ 得

$|\boldsymbol{A}^m|=|\boldsymbol{B}^m||\boldsymbol{C}^m|=|\boldsymbol{B}|^m|\boldsymbol{C}|^m=0.$

三、

1.**解** $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4+r_1\times(-3)]{\substack{r_2+r_1\times(-2)\\ r_3+r_1\times(-5)}}\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&3&-6&-3&-3\\0&7&-14&-7&-7\\0&4&-8&-4&-11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&1&-2&-1&-1\\0&4&-8&-4&-11\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times(-4)}\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&1&-2&-1&-1\\0&0&0&0&-7\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{\substack{r_3\times(-\frac{1}{7})\\ r_2+r_3}}\begin{bmatrix}1&-1&3&2&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$;

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为向量组的一个极大无关组;

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

2. **答**: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

理由一：由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

又由已知得 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C}$.

因为 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$, 所以 $\boldsymbol{C}$ 可逆.

从而 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r([\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$, 所以, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

理由二: 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

又由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1$ 得

$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1]\xrightarrow{\text{列}}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$.

因此,$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r([\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3])=r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3])=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

从而,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

理由三: 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1$ 可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出. 又从上述关系式中可得

$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$. 说明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 于是, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价.$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$. 因此, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

3.**证明** 由 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $[A_{ij}]^{\mathrm{T}}=[-a_{ij}]^{\mathrm{T}}$, 从而 $A_{ij}=-a_{ij}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geq 3)$ 非零实方阵, 所以,$\boldsymbol{A}$ 中必有非零行. 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行为非零行. 于是有

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=-a_{i1}^2-a_{i2}^2-\cdots-a_{in}^2<0.$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

由 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}|$; 又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 从而 $(-1)^n|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 因为 $|\boldsymbol{A}|<0$ 且 $n\geq 3$, 所以,$|\boldsymbol{A}|=-1$.

因此,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\boldsymbol{A}^{-1}$.

2014-2015 学年第一学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》

整理：2017 级理科试验班 4 班 冬，阳

题号	一	二	三	四	成绩	核分人签字
得分						

得分	

一、（共 25 分）

1. (15 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-\ 5x_5=3, \\ 2x_1-4x_2+3x_3+\ \ x_4-11x_5=6, \\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4-12x_5=6, \\ 3x_1-6x_2+3x_3+2x_4-13x_5=t \end{cases}$$

有解，求参数 t 及线性方程组的(向量形式)通解.

2. (10 分) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，而 M_{3j}, A_{3j} 分别是 $a_{3j}\ (j=1,2,3,4)$ 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$；

(2) 求 $M_{31}+2M_{32}+3M_{33}+4M_{34}$.

得分	

二、（共 20 分）

1. (8 分) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 是用 4 阶行列式定义的多项式，求 $f(x)$ 的 4 次项系数 a_4 与 3 次项系数 a_3.

2. (12 分) 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，求 A^{2014} 与 $|A^{2014}|$.

学院______________专业__________________ ______班 年级________学号__________________姓名_____________ 共 2 页 第 2 页

得分	

三、（共 32 分）

1. (11 分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&3&2\\3&6&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}$，$AX=3X+4B$，求矩阵 X.

2. (11 分) 设 A, B 分别为 n, $s(\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，M^* 为 $M=\begin{bmatrix}A&C\\O&B\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵，求证 $M^*=\begin{bmatrix}|B|A^*&-A^*CB^*\\O&|A|B^*\end{bmatrix}$.

3. (10 分) 设 $\mathbb{F}^n$ 中的向量组 (Ⅰ) $=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 线性无关，求证向量组 (Ⅱ) $=\{\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2-3\alpha_3, \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3\}$ 线性无关.

得分	

四、（共 23 分）

1. (13 分) 设

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\7\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\\7\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\3\end{bmatrix},\quad \alpha_5=\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\\3\end{bmatrix},$$

求向量组 (Ⅰ) $=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ 的一个极大无关组 (Ⅰ′)，并用 (Ⅰ′) 线性表示 (Ⅰ) 中的其余向量.

2. (10 分) 设 n 阶方阵 $A=E_n-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，其中 α 为 n 元非零列向量，求证

(1) $A^2=A$ 的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$；

(2) 当 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$ 时，A 为降秩矩阵.

14151 线性代数期中考试试卷解析

一、满分 25 分.

1.(15 分)设线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-5x_5=3, \\ 2x_1-4x_2+3x_3+x_4-11x_5=6, \\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4-12x_5=6, \\ 3x_1-6x_2+3x_3+2x_4-13x_5=t \end{cases}$$

有解，求参数t及线性方程组的(向量形式)通解.

知识点 增广矩阵消元法、有解判定、通解.

解 对增广矩阵作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & -11 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -12 & 6 \\ 3 & -6 & 3 & 2 & -13 & t \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & t-9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{(r_3-r_2)/3} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_2-r_3]{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8 \end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}}.$$

因为线性方程组有解，所以

$$0=t-8 \Rightarrow t=8.$$

令自由未知量$x_2=k_1, x_5=k_2$，得全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2k_1 \\ k_1 \\ 1+3k_2 \\ 1+2k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{F}.$$

2.(10 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，而$M_{3j}, A_{3j}$分别是$a_{3j}(j=1,2,3,4)$的余子式、代数余子式.

(1) 求$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$；

(2) 求$M_{31}+2M_{32}+3M_{33}+4M_{34}$.

知识点 $a_{i1}A_{i'1}+a_{i2}A_{i'2}+a_{i3}A_{i'3}+a_{i4}A_{i'4}=\delta_{ii'}|\boldsymbol{A}|$、余子式与代数余子式、行列式的性质、行列式的按多行展开公式或准上三角行列式.

解 (1) $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=0$.

(2) $M_{31}+2M_{32}+3M_{33}+4M_{34}=1A_{31}+(-2)A_{32}+3A_{33}+(-4)A_{34}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&-2&3&-4\\1&0&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\2&0&6&0\\1&0&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_4}-\begin{vmatrix}4&2&3&1\\1&3&2&4\\0&0&6&2\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}4&2\\1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}6&2\\1&1\end{vmatrix}=-10\times4=-40.$$

二、满分 20 分.

1.（8 分）设 $f(x)=\begin{vmatrix}3x&x&1&2\\1&x&1&-1\\1&1&x&2\\x&1&2&x\end{vmatrix}$ 是用 4 阶行列式定义的多项式，求 $f(x)$ 的 4 次项系数 a_4 与 3 次项系数 a_3.

知识点　行列式的性质、行列式的按行完全展开公式.

解　$f(x)=\begin{vmatrix}3x&x&1&2\\1&x&1&-1\\1&1&x&2\\x&1&2&x\end{vmatrix}\xlongequal[c_1-c_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}3x-4&0&0&3\\2&x&1&-1\\-1&1&x&2\\0&1&2&x\end{vmatrix}=(3x-4)x^3+\cdots$，

其中省略部分中 x 的次数不超过 2．可知

$$a_4=3,\qquad a_3=-4.$$

2.（12 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{2014}$ 与 $|\boldsymbol{A}^{2014}|$.

知识点　准对角矩阵的幂、行列式的性质、方阵乘积的行列式.

解　(1) 记 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}_1^{2014}=\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}[1,-1]\right)^{2014}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\left([1,-1]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)^{2013}[1,-1]=-2^{2013}\boldsymbol{A}_1,$$

$$\boldsymbol{A}_2^{2014}=\begin{bmatrix}1&-2014\\0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{2014}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{2014}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{2014}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}2^{2013}&-2^{2013}&0&0\\-2^{2013}&2^{2013}&0&0\\\hdashline 0&0&1&-2014\\0&0&0&1\end{array}\right].$$

(2) $\mathrm{row}_2\,\boldsymbol{A}=-\mathrm{row}_1\,\boldsymbol{A}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}^{2014}|=|\boldsymbol{A}|^{2014}=0$.

三、满分 32 分.

1. (11 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&3&2\\3&6&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=3\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

知识点　用初等行变换法求解矩阵方程.

解　$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{B}$，

$$[\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},4\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc:cc}-3&2&1&4&0\\2&0&2&4&4\\3&6&-1&4&8\end{array}\right]\xrightarrow[r_2/2]{(r_1+r_3)/8}\left[\begin{array}{ccc:cc}0&1&0&1&1\\1&0&1&2&2\\3&6&-1&4&8\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(r_3-6r_1-3r_2)/(-4)}\left[\begin{array}{ccc:cc}0&1&0&1&1\\1&0&1&2&2\\0&0&1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&2&1\end{array}\right]\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\2&1\end{bmatrix}.$$

2. (11 分) 设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 分别为 $n, s(\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵，求证 $\boldsymbol{M}^*=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

知识点　准上三角矩阵的行列式、逆矩阵、伴随矩阵.

证　分三步完成.

(1) $|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0\Rightarrow \boldsymbol{M}$ 可逆；

(2) 用分块求逆法或分块初等行变换法，可知 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{M}^*=|\boldsymbol{M}|\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.　　□

3. (10 分) 设 $\mathbb{F}^n$ 中的向量组(Ⅰ) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，求证向量组(Ⅱ) $=\{\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关.

知识点　线性无关向量组的判定.

解　设 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

整理得

$$(x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2x_1+x_2+4x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-3x_1+x_2+9x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

因为(Ⅰ)线性无关，所以

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1+x_2+4x_3=0,\\-3x_1+x_2+9x_3=0.\end{cases}$$

解之得 $x_1=x_2=x_3=0$，故知(Ⅱ)也线性无关.　　□

四、满分 23 分.

1. (13 分) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\\3\end{bmatrix},$$

求向量组$(\mathrm{I})=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$的一个极大无关组$(\mathrm{I}')$，并用$(\mathrm{I}')$线性表示$(\mathrm{I})$中的其余向量.

知识点　用初等行变换法求列向量组的极大无关组、表示关系式.

解　$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&1&-3\\2&-1&4&3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-9\\0&1&-1&0&16\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

可知$(\mathrm{I}')=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$是向量组$(\mathrm{I})$的一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=3\boldsymbol{\alpha}_1-8\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_4.$$

注　(I)的极大无关组不唯一，除$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$外，在$(\mathrm{I})=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$中任选三个向量，都组成$(\mathrm{I})$的一个极大无关组.

2.(10分)设n阶方阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{\alpha}$为$n$元非零列向量，求证

(1)　$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$；

(2)　当$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$时，$\boldsymbol{A}$为降秩矩阵.

知识点　方阵的多项式与幂、可逆矩阵.

证　(1)　因为

$$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}_n^2-2\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow 2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1.$$

(2)　假设$\boldsymbol{A}$为满秩矩阵，则$\boldsymbol{A}$可逆，

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\Rightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n\Rightarrow\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},$$

与$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$矛盾！从而假设错误，得证$\boldsymbol{A}$为降秩矩阵.　　□

2014～2015 学年第二学期期中考试试题

《线性代数及其应用》

（考试时间：2015 年 4 月 24 日）

题号	满分	得分
一	27	

1. （13 分）求线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=-1, \\ x_1+x_2+\ x_3+4x_4-3x_5=\ 0, \\ x_1-x_2+3x_3-2x_4-\ x_5=-2, \\ 3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=-2 \end{cases}$ 的向量形式的通解.

2. （14 分）讨论当 λ 取何值时齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2\ +x_3\ =0, \\ 2x_1-x_2\ +\lambda x_3=0, \\ 4x_1+x_2+\lambda^2x_3=0 \end{cases}$ 有非零解, 并求出其相应的向量形式的通解.

题号	满分	得分
二	23	

1. （10 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & b \\ a & a & \cdots & a & b & a \\ a & a & \cdots & b & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a & a \\ b & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$.

2. （13 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$，而 M_{ij}, A_{ij} 分别是 $a_{ij}(i, j=1, 2, 3, 4)$ 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $M_{21}+3M_{22}+4M_{23}+M_{24}$； (2) 求 $A_{12}-A_{32}-A_{42}$.

题号	满分	得分
三	24	

1. (14 分) 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^*=8\boldsymbol{XA}^{-1}+12\boldsymbol{E}_4$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

2. (10 分) 设$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$为 3 元列向量，$\boldsymbol{A}_{3\times 3} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$，且$|\boldsymbol{A}| = -1$，$\boldsymbol{B}^*$是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{B}_{3\times 3} = [2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3]$，求$|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^*|$.

题号	满分	得分
四	26	

1. (12 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & 1 & c \\ 16 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & 0 & 9 & 45 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}$ 的秩$r(\boldsymbol{A}) = 1$.

(1) 试确定a, b, c的值.

(2) 试将矩阵$\boldsymbol{A}$分解成一个列矩阵与一个行矩阵的乘积，并求$\boldsymbol{A}^m$.（m为正整数）

2. (8 分) 设$\mathbb{P}^n$中的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 证明：对于任意常数$k$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, k\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

3. (6 分) 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$为n元列向量, b为常数, 记分块矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}^*$是矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵. 证明:矩阵$\boldsymbol{Q}$可逆的充分必要条件是$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \neq b$.

2014-2015(2) 期中试题参考答案

一、

1.(13 分)**解**　对方程组的增广矩阵作初等行变换,

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & -7 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1 \\ r_3-r_1}} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -6 & 2 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

因为 $r(\tilde{A})=r(A)=2<5$, 所以方程组有无穷多组解.

同解方程组为　$\begin{cases} x_1=-1-2x_3-x_4+2x_5, \\ x_2=1+x_3-3x_4+x_5. \end{cases}$

方程组的通解为

$$X=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数.}$$

2.(14 分)**解**　**法一**　当系数行列式 $|A|=0$ 时, 齐次线性方程组有非零解.

而

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 4 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}=V(2,-1,\lambda)=(-1-2)(\lambda-2)(\lambda+1),$$

故当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$ 时, 所给齐次线性方程组有非零解.

当 $\lambda=2$ 时,　$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$r(A)=2<3$, 方程组有无穷多组解.

同解方程组为　$\begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=0. \end{cases}$

方程组的通解为　$X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, k 为任意常数.

当 $\lambda=-1$ 时, $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\4&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

$r(A)=2<3$, 方程组有无穷多组解.

同解方程组为 $\left\{\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=-x_3.\end{array}\right.$

方程组的通解为 $X=k\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

法二 对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&\lambda\\4&1&\lambda^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&\lambda-2\\0&-3&\lambda^2-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&\lambda-2\\0&0&(\lambda-2)(\lambda+1)\end{bmatrix}.$$

当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$ 时,$r(A)=2<3$, 所给齐次线性方程组有非零解.

(以下同法一)

二、

1.(10 分)**解** $$D_n\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix}(n-1)a+b&a&\cdots&a&a&b\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&b&a\\(n-1)a+b&a&\cdots&b&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\(n-1)a+b&b&\cdots&a&a&a\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&a&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\ldots,n-1]{r_i-r_n}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&b-a\\0&0&\cdots&0&b-a&0\\0&0&\cdots&b-a&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&b-a&\cdots&0&0&0\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&a&a\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}.$$

另解:$$D_n\xlongequal{c_n+c_1+c_2\cdots+c_{n-1}}\begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&a&(n-1)a+b\\a&a&\cdots&a&b&(n-1)a+b\\a&a&\cdots&b&a&(n-1)a+b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&a&a&(n-1)a+b\\b&a&\cdots&a&a&(n-1)a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\ldots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & (n-1)a+b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}.$$

2.(13 分)**解**

(1) $M_{21}+3M_{22}+4M_{23}+M_{24}=-A_{21}+3M_{22}-4A_{23}+A_{24}$

$=-(A_{21}-3M_{22}+4A_{23}-A_{24})=0.$ (异乘为零)

(2) $$A_{12}-A_{32}-A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}=-22.$$

三、

1.(14 分)**解** $|A|=4.$

对 $AXA^*=8XA^{-1}+12E_4$ 两边同右乘 A得

$$AX|A|=8X+12A.$$

代入 $|A|=4$ 整理得 $(A-2E)X=3A.$

$$[A-2E\vdots 3A]=\left[\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & -9 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

求得

$$X=(A-2E)^{-1}(3A)=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

另解: $X=3(A-2E)^{-1}A.$

$$[A-2E\vdots E]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1&0&0&0&1&0&0&0\\0&-1&0&0&0&1&0&0\\1&0&-1&0&0&0&1&0\\0&-3&0&2&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&-1&0&-1&0\\0&0&0&1&0&-\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right].$$

得 $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\-1&0&-1&0\\0&-\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

从而

$$X=3(A-2E)^{-1}A=3\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\-1&0&-1&0\\0&-\frac{3}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\0&-3&0&0\\-6&0&-3&0\\0&-9&0&6\end{bmatrix}.$$

2.(10 分)**解** $|2A^{\mathrm{T}}(B-A)B^*|=2^3|A||B-A||B^*|=-8|B-A||B|^2.$

由 $B_{3\times3}=[2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&-1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$

得 $|B|=|A|\begin{vmatrix}2&3&1\\-1&-1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&0&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=-3.$

$B_{3\times3}-A_{3\times3}=[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&3&1\\-1&-2&0\\0&-2&0\end{bmatrix}$

得 $|B-A|=|A|\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&-2&0\\0&-2&0\end{vmatrix}=-2.$

从而,$|2A^{\mathrm{T}}(B-A)B^*|=-8\times(-2)\times9=144.$

四、

1.(12 分)**解**

(1) 因为 $r(A)=1$, 所以 $\begin{vmatrix}a&1\\16&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&1\\0&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&c\\8&40\end{vmatrix}=0.$

解得 $a=2,b=0,c=5.$

(2) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 16 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & 0 & 9 & 45 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}[2,0,1,5]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. (注: 分解不唯一)

$$A^m=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{m-1}A=36^{m-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 16 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & 0 & 9 & 45 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}.$$

2.(8 分)**证**　反证法.

假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关, 所以向量 $k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表达方式唯一, 设为

$$k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

从而 $\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3-k\boldsymbol{\beta}_1$.

又因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 记为 $\boldsymbol{\beta}_1=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}_2=(k_1-kl_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-kl_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-kl_3)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

与题设 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示矛盾. 故假设不成立. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

3.(6 分)**证**　$PQ=\begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*A+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*\boldsymbol{\alpha}+|A|b \end{bmatrix}$.

因为 $A^*A=|A|E$, 故 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*A+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=-|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$.

又因 A 为可逆矩阵, 故 $A^*=|A|A^{-1}$,

于是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*\boldsymbol{\alpha}+|A|b=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

从而 $PQ=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & |A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}$.

$|PQ|=|P||Q|=|A|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

代入 $|P|=|A|\neq 0$, 得 $|Q|=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

因此矩阵 Q 可逆 $\Leftrightarrow$ $|Q|\neq 0$ $\Leftrightarrow b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $b\neq\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

2016～2017 学年第一学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》（A 卷 共 4 页）

（考试时间：2016 年 11 月 4 日）

一、填空题与单项选择题（共15分，每小题3分）

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$ ________.

2.当$p =$________时，向量$\alpha = [-5, 1, p, 7]^{\mathrm{T}}$可由$\beta_1 = [3, 1, 5, -1]^{\mathrm{T}}, \beta_2 = [1, -1, -1, -3]^{\mathrm{T}}, \beta_3 = [3, 5, 13, 7]^{\mathrm{T}}$线性表示.

3.设A是n阶方阵，则$\left| |A^{\mathrm{T}}|A^* \right| =$（　　　）.

(A) $|A|^n$； (B) $|A|^{2n-1}$ ； (C) $|A|^{2n}$； (D) $|A|^{2n+1}$

4.下列说法错误的有（　　　）个.

(1) 初等矩阵都是奇异的；

(2) 初等矩阵均为对称矩阵；

(3) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵；

(4) 初等矩阵的逆阵仍是初等矩阵；

(5) 初等矩阵的乘积仍是初等矩阵.

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4

5.设A, B均为$m \times n$阶矩阵,且$A^{\mathrm{T}}B = E_n$.则（　　　）.

(A) A为降秩矩阵； (B) $n > m$； (C) $r(A) = m$； (D) $r(A) = n$

二、(共14分）当a为何值时齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + ax_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解?并求出其相应的向量形式的通解.

三、(共24分)

1.(10分)计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 & a_1-b \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2-b & a_2 \\ a_3 & a_3 & \cdots & a_3-b & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1}-b & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n-b & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$.

2.(14分)设$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & a_{13} & 0 \\ 1 & 8 & a_{23} & 5 \\ 0 & 9 & a_{33} & -6 \\ 2 & 5 & a_{43} & -3 \end{bmatrix}$.$M_{ij},A_{ij}$分别是$a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$的余子式、代数余子式.

(1)求$2A_{13}-A_{23}-2A_{43}$;　　(2)求$M_{13}+M_{23}+M_{33}$.

四、(共28分)1.(14分)设$A^*=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,且$A^{-1}BA=A^*B-E$.试不计算$A$与$A^{-1}$,而直接求矩阵$B$.

2.(14分)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为3元列向量,$A_{3\times3}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, $B_{3\times3}=[2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,-4\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3,6\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3]$,且$A^2=E_3$. 求(1)$(AB)^{2016}$;(2)$|(A+B)^{2016}|$.

五、(共19分)

1.(10分)若P^n中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.证明向量组$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\beta_2=\alpha_2-\alpha_1,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1,\beta_4=\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

2.(9分)

(1)证明奇数阶反对称矩阵必不可逆;

(2)设反对称矩阵$A_{n\times n}$可逆,$B=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$,其中$\alpha_{n\times1}\neq\mathbf{0}$.求$r(B)$.

2016-2017(1)期中试题参考答案

一、填空题及单项选择题（共15分，每小题3分）

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;　　2. $p=-3$;　　3. B;　　4. C;　　5. D.

二、(14分)**解**　**法一**　当系数行列式$|A|=0$时,齐次线性方程组有非零解.

而

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a+1 & -4 \\ 0 & 3 & -a-2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-(a+5)(a-2).$$

故当$a=-5$或$a=2$时,所给齐次线性方程组有非零解.

当$a=-5$时,　$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$r(A)=2<3$,方程组有无穷多组解.

同解方程组为　$\begin{cases} x_1=-2x_3, \\ x_2=-x_3. \end{cases}$

方程组的通解为　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k为任意常数.

当$a=2$时,　$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$r(A)=2<3$,方程组有无穷多组解.

同解方程组为　$\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_3, \\ x_2=\frac{4}{3}x_3. \end{cases}$

方程组的通解为　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, k为任意常数.

注　通解也可表示为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, k为任意常数.

法二　对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$A=\begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -a-2 \\ 0 & a+1 & -4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -(a+2) \\ 0 & 0 & (a+5)(a-2) \end{bmatrix}$.

当$a=-5$或$a=2$时,$r(A)=2<3$,所给齐次线性方程组有非零解.(以下同法一)

三、1.(10分)**解**

$$D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i - b & \sum_{i=1}^{n} a_i - b & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_i - b & \sum_{i=1}^{n} a_i - b & \sum_{i=1}^{n} a_i - b \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 - b & a_2 \\ a_3 & a_3 & \cdots & a_3 - b & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} - b & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n - b & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\ldots,n-1]{c_j-c_n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{n} a_i - b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -b & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} b^{n-1} (\sum_{i=1}^{n} a_i - b).$$

2.（14分） (1) $2A_{13} - A_{23} - 2A_{43} = 2A_{13} - A_{23} + 0A_{33} - 2A_{43}$

$= -(-2A_{13} + A_{23} + 0A_{33} + 2A_{43}) = -(a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} + a_{41}A_{43}) = 0.$

(2)$M_{13}+M_{23}+M_{33} = A_{13}-A_{23}+A_{33}+0A_{43} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 0 & 13 & 2 \\ 0 & 23 & 7 \end{vmatrix} = -2(91-46) = -90.$

四、1.（14分）**解** 对$A^{-1}BA = A^*B - E$两边同左乘A得 $BA = |A|B - A.$

再两边同右乘A^*得, $B|A| = |A|BA^* - |A|E.$

整理得 $B(A^* - E) = E. \quad \Rightarrow B = (A^* - E)^{-1}.$

$[A^* - E \vdots E] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 7 \end{array}\right].$

故$B = (A^* - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -9 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}.$

2.（14分）**解**（1）$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = AC$,其中$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$

由$C=\begin{bmatrix}2&-4&6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,得$r(C)=1$.

又$A^2=E_3$,

$(AB)^{2016}=(AAC)^{2016}=C^{2016}=(\mathrm{tr}C)^{2015}C$

$$=(-3)^{2015}\begin{bmatrix}2&-4&6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}=-3^{2015}\begin{bmatrix}2&-4&6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}.$$

（2）由$A^2=E_3$得$|A^2|=|A|^2=1$.

$$|(A+B)^{2016}|=|A+AC|^{2016}=|A(E+C)|^{2016}=\left|A\begin{bmatrix}3&-4&6\\1&-1&3\\-1&2&-2\end{bmatrix}\right|^{2016}$$

$$=|A|^{2016}\begin{vmatrix}3&-4&6\\1&-1&3\\-1&2&-2\end{vmatrix}^{2016}=(|A|^2)^{1008}\cdot(-2)^{2016}=2^{2016}.$$

五、1（10分）

证明　　令$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=\mathbf{0}$

代入$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\beta_2=\alpha_2-\alpha_1,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1,\beta_4=\alpha_4-\alpha_1$,整理得

$$(k_1-k_2-k_3-k_4)\alpha_1+(2k_1+k_2)\alpha_2+(3k_1+k_3)\alpha_3+(4k_1+k_4)\alpha_4=\mathbf{0}.$$

由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关得$\begin{cases}k_1-k_2-k_3-k_4=0,\\2k_1+k_2=0,\\3k_1+k_3=0,\\4k_1+k_4=0.\end{cases}$　　（1）

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&0&0&0\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&1\end{vmatrix}=10\neq0.$$

依据克拉默法则，方程组（1）只有零解，即只能$k_1=k_2=k_3=k_4=0$.

故向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

2.（9分）(1)**证明**　设A为n阶反对称矩阵,其中n为奇数.则$A^{\mathrm{T}}=-A$.

$|A|=|A^{\mathrm{T}}|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$,得$|A|=0$.故$A$不可逆.

(2) 据(1)之结论,由A为可逆的反对称矩阵知A的阶数n是偶数,$|A_{n\times n}|\neq0$.

作矩阵$C_{(n+1)\times(n+1)}=\begin{bmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}$.

因为$C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}&-\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A&-\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=-C$,所以$C$为奇数阶反对称矩阵,$|C|=0$.

$|B|=\begin{vmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{vmatrix}=-|C|=0$.

又$|A_{n\times n}|\neq0$,故$r(B)=n$.

一、填空题与单项选择题（共 18 分，每小题 3 分）

1. 当 $a=$____ 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+(a-1)x_2+4x_3 &= 0, \\ ax_1 \quad -5x_2 \quad +x_3 &= 0, \\ -2x_1+3x_2+(a-2)x_3 &= 0 \end{cases}$ 有非零实数解.

2. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 7 & -4 & -4 \end{bmatrix}^{-1} =$ ____________

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,4,-3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-3,6,9,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-2,9,4,-9]^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$___

4. 下列说法错误的是（　　）.

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^m$;

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$;

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$;

(D) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 $n\times 1$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, 则 $r(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})-r(\boldsymbol{B})=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 下列结论错误的有（　）个.

(1) 若对于 n 元向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$, 有一组常数 $k_1,k_2,\ldots,k_s$, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性相关.

(2) 若对于 n 元向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$, 有常数 $k_1=k_2=\ldots=k_s=0$, 使得 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s=0$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性无关.

(3) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s(s>2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 中有包含着 $s-1$ 个向量的部分组线性相关.

(4) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1,β_2 均可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 则向量组 β_1,β_2 线性相关.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

一、填空题与单项选择题（共 18 分，每小题 3 分）

1. 当 $a=$____ 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+(a-1)x_2+4x_3 &=0, \\ ax_1 \quad -5x_2 \quad +x_3 &=0, \\ -2x_1+3x_2+(a-2)x_3 &=0 \end{cases}$ 有非零实数解.

知识点 齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} \underline{2} & a-1 & 4 \\ a & -5 & 1 \\ \underline{-2} & 3 & a-2 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & a+2 & a+2 \\ a & -5 & 1 \\ -2 & 3 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a+2 & 0 \\ a & -5 & 6 \\ -2 & 3 & a-5 \end{vmatrix} = -(a+2)(a^2-5a+12) = 0$$

$a=-2.$

3. 设向量组 $\alpha_1=[1,2,3,4,-3]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,-3,6,9,6]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[1,-2,9,4,-9]^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$__

知识点 矩阵三秩相等 $r(A)=r$(行向量组)$=r$(列向量组)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 9 & 4 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$r=3.$

二、(15 分) 当 p 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+ & x_2- & 2x_3+ & 6x_4=0, \\ 3x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4=p, \\ & x_2+ & 2x_3+ & 2x_4=2, \\ 5x_1+ & 2x_2- & 3x_3+ & 5x_4=11 \end{cases}$ 有解? 并在有解时, 求出其向量形式通解.

解. 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换, 化为行阶梯形矩阵.

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2-r_1]{r_4-r_1-r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -5 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 11-p \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_4+r_3}]{r_1\leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -5 & p \\ 0 & -1 & -8 & 16 & -2p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13-p \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+r_2]{r_2\leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -5 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & 2-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13-p \end{array}\right]$$

方程组有解, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 即 $p=13$. 此时

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-2r_3 \\ r_1-3r_3}]{-\frac{1}{6}r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

方程组的向量形式解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall\, k\in\mathbb{P}.$ □

三、（共 31 分）

1.（16 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&-1&-3\\3&-5&0&0\\2&-3&0&0\end{bmatrix}$. M_{ij},A_{ij} 分别是元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列元素的余子式之和； (2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和.

解. (1) $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}=-A_{12}+A_{22}-A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix}0&-1&1&2\\0&1&-1&-3\\3&-1&0&0\\2&1&0&0\end{vmatrix}$

$=-0+0-2-3$

$=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\2&1\end{vmatrix}=-5.$

(2) $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和即为 $\boldsymbol{A}^*$ 中各元素之和.

$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&-5\\2&-3\end{vmatrix}=-1\Rightarrow \boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}.$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}O&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&O\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&-5\\2&-3\end{bmatrix}$.

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}O&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&O\end{bmatrix}$.

而 $\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}3&2\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&5\\-2&3\end{bmatrix}$.

于是 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&3&-5\\0&0&2&-3\\-3&-2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和为 -6. □

2.（15 分）设 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $\boldsymbol{AXA}^* = \boldsymbol{XA}^{-1} + 3\boldsymbol{A}^*$. 试不计算 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 而求解未知矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解. $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{AXA}^*)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{XA}^{-1})\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} + 3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*$.

由于 $|\boldsymbol{A}^*| = 8 = |\boldsymbol{A}|^3 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = 2$. 于是

$$4\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} + 6\boldsymbol{A}^* \Rightarrow (4\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X} = 6\boldsymbol{A}^*.$$

作初等行变换

$$[4\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^* \vdots 6\boldsymbol{A}^*] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 12 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{3}r_4]{\frac{1}{2}r_i, i=1,2,3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 - r_3]{r_2 - r_4} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

说明 $4\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^*$ 可逆, 且 $\boldsymbol{X} = 6(4\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. □

四、(16 分) 设 $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\3a&3b&3c\\5a&5b&5c\end{bmatrix}$, 满足 $abc\neq 0$. 矩阵 $B=P^{2017}AQ^{2017}$, 其中 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 求 (1) $r(A)$; (2) B^{2017}.

$$A\to\begin{bmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

解. (1) $r(A)=1$.

(2) $P^{2017}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2017&0&1\end{bmatrix}$, $Q^{2017}=Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 于是

$$B=P^{2017}AQ^{2017}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2017&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b&c\\3a&3b&3c\\5a&5b&5c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&a&c\\3b&3a&3c\\2022b&2022a&2022c\end{bmatrix}.$$

由于 $r(B)=1$, 故

$$\begin{aligned}B^{2017}&=(\mathrm{tr}B)^{2016}B\\&=(b+3a+2022c)^{2016}\begin{bmatrix}b&a&c\\3b&3a&3c\\2022b&2022a&2022c\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

五、证明题（共 20 分）

1.（12 分）若 $\mathbb{P}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 证明当 $ab\neq 0$ 时, 向量组

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+(1+a)\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+(1-a)\boldsymbol{\alpha}_4,$

$\boldsymbol{\beta}_3=(1+b)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+(1-b)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$

线性无关.

证明. 令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]$, $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$, 则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\\1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记作}}\boldsymbol{AC}.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{C}$,

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\\1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[c_2-c_1]{c_4-c_3}\begin{vmatrix}1&0&1+b&-b\\1&0&1&-b\\1+a&-a&1&0\\1&-a&1&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_4}\begin{vmatrix}1&0&1+b&-b\\1&0&1&-b\\a&0&0&0\\1&-a&1&0\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}1&1+b&-b\\1&1&-b\\a&0&0\end{vmatrix}=a^2b^2\neq 0.$$

因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆. 则 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})=r(\boldsymbol{A})$.

但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, $r(\boldsymbol{A})=4$. 于是 $r(\boldsymbol{B})=4$, 也即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关. □

2.（8 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n, |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0.$

证明：矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

证明. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2=1$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 同理 $|\boldsymbol{B}|^2=1$ 且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

由于 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$, 故 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=-1$.

另外

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| \\
&= |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{B}| \\
&= |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cdot|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = -|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}| \\
&= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|.
\end{aligned}$$

可得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

2017～2018学年第二学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》（A卷　　共3页）

（考试时间：2018年4月27日）

题号	一	二	三	四	成绩	核分人签字
得分						

一、填空题与单项选择题（共30分，每小题5分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&-1&3\\0&0&1&-2\\-1&-2&0&0\\3&4&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ________________

2. 设线性方程组 $\begin{cases}(\lambda-1)x_1+2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(\lambda-4)x_2+2x_3=0,\\4x_1+2x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$ ____________

3. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为4元列向量，已知 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=5$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|=-1$，则

$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ __________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第2行的2倍加到第1行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第2行与第3行互换得到矩阵 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=$（　　　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\2&1&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

5. 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\3&0&0\\2&1&0\end{bmatrix}$ 相抵的矩阵是（　　　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}0&0&1\\3&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则必有(　　　　　).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$　　(B) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$　　(C) $|\boldsymbol{B}^*|\neq 0$　　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=0$

二、(16 分) 当 a 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-7, \\ x_1+3x_3-x_4=8, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2a+2, \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-11 \end{cases}$ 有解？并求其向量形式的通解.

三、(共 28 分)

1. (14 分) 设 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & 0 & 6 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$，$A_{ij}$ 分别是 (i,j) 元 $(i,j=1,2,3,4)$ 的余子式和代数余子式. 求（1）$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}$；（2）$M_{13}+2M_{23}+3M_{33}+4M_{43}$.

2. (14 分) 设 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

四、(共 26 分)

1. （16 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$，$f(x)=(x+1)^{2k}$，其中 k 为正整数，求 $f(\boldsymbol{A})$.

2. (10 分) 设 n 元向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关. 试判断向量组 $k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$（其中 k,l 为常数）的线性相关性，并说明理由.

一、填空题及单项选择题（共 30 分， 每小题 5 分）

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　2. 5或-4　3. 32　4. A　5. C　6. D.

二、(16 分)解 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行初等行变换.

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{\substack{2' \\ r_2-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{2'} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix}.$$ 6分

当 $a=-2$ 时，$r(\bar{A})=r(A)=3<4$，方程组有无穷多解. 此时 ---------9分

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ------ 11分

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2-3x_3, \\ x_2=5+2x_3, \\ x_4=-10 \end{cases}$ 其中 x_3 为自由变量 --- 12分

则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall k\in P$$ -----------16分

三、(共 28 分)

1. (14 分)解

(1) 方法 1 ------6分

$$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{\substack{2' \\ r_4-2r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{分块}]{2'} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}=4\times 20=80.$$ -----9分

方法 2

------ 5分

$$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-2&2&4&1\\3&3&1&2\\-4&4&0&6\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2}\begin{vmatrix}2&1&2&-1\\0&2&4&1\\6&3&1&2\\0&4&0&6\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+(-3)r_1}\begin{vmatrix}2&1&2&-1\\0&2&4&1\\0&0&-5&5\\0&4&0&6\end{vmatrix}$$

2'

$$=2\begin{vmatrix}2&4&1\\0&-5&5\\4&0&6\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}2\begin{vmatrix}2&4&5\\0&-5&0\\4&0&6\end{vmatrix}=2(-5)\begin{vmatrix}2&5\\4&6\end{vmatrix}=-10(12-20)=80.$$ ------ 9分

（2） $M_{13}+2M_{23}+3M_{33}+4M_{43}=A_{13}-2A_{23}+3A_{33}-4A_{43}$ ------- 2分

$=a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}+a_{41}A_{43}=0$.（异乘为零）- — 5分

2.（14 分）**解**　由 $AX=B+X$ 整理得 $(A-E)X=B$. ------ 3分

由 $|A-E|\neq 0$ 知 $A-E$ 可逆.

$$[A-E\ B]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&1&1&2&0\\4&-2&1&1&-1&1\\-3&2&-1&1&0&-1\end{array}\right]$$ ----- 5分

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&1&1&2&0\\0&0&-1&-1&-5&1\\-1&1&0&2&2&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&-2&-2&1\\2&-1&1&1&2&0\\0&0&1&1&5&-1\end{array}\right]$$ ----- 8分

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&-2&-2&1\\0&1&1&5&6&-2\\0&0&1&1&5&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+r_2]{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&4&1&-1\\0&0&1&1&5&-1\end{array}\right].$$ --- 12分

故 $X=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&1&-1\\1&5&-1\end{bmatrix}$. -------- 14分

法二：由 $AX=B+X$ 整理得 $(A-E)X=B$. -------- 3分

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-3&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\2&-1&0\\-1&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$，所以 $A-E$ 可逆．可得

$X=(A-E)^{-1}B$. 7分

$$[A-E\ E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&1&1&0&0\\4&-2&1&0&1&0\\-3&2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&2\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right],$$

求得 $(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\2&-1&0\end{bmatrix}$. ------------11分

$$X=(A-E)^{-1}B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&1&-1\\1&5&-1\end{bmatrix}$$ ---------14分

四、(共26分)

1. (16分) **解** $f(A)=(A+E)^{2k}$. ---------1分

记 $B=A+E=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&4&3\\0&0&3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}$，其中 $B_1=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}$.

则 $f(A)=\begin{bmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}^{2k}=\begin{bmatrix}B_1^{2k}&O\\O&B_2^{2k}\end{bmatrix}$. ---------4分

$B_1=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}=-2E+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=-2E+C$

因为 $C^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=O$，所以 $C^m=O(m\geq 2)$. ----------7分

又 C 与 $-2E$ 可交换，则由二项式定理得

$B_1^{2k}=(-2E+C)^{2k}=(-2E)^{2k}+2k(-2E)^{2k-1}C=\begin{bmatrix}2^{2k}&-2^{2k}\cdot k\\0&2^{2k}\end{bmatrix}$. ------10分

$B_2^{2}=\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^2&0\\0&5^2\end{bmatrix}$，从而 $B_2^{2k}=\begin{bmatrix}5^{2k}&0\\0&5^{2k}\end{bmatrix}$. -------14分

因此，$f(A)=\begin{bmatrix}2^{2k}&-2^{2k}\cdot k&0&0\\0&2^{2k}&0&0\\0&0&5^{2k}&0\\0&0&0&5^{2k}\end{bmatrix}$. --------16分

2. (10分) **解**

(1) 当 $k=0$ 时，所给向量组为 $\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$. 2′

因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以部分组 α_2,α_3 线性无关. 又向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，可知向量 α_4 可由 α_2,α_3 线性表示，且表达方式唯一，不妨设为

$$\alpha_4 = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 . \quad 2' \qquad (*)$$

此时, 显然$l\alpha_4$也可由α_2,α_3线性表示, 故向量组$l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性相关. -------- 5分

(2) 当$k \neq 0$时，向量组$k\alpha_1 + l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

运用反证法.

假设向量组$k\alpha_1 + l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 则由$\alpha_2,\alpha_3$线性无关可知，$k\alpha_1 + l\alpha_4$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 且表达方式唯一, 不妨设为$k\alpha_1 + l\alpha_4 = l_1\alpha_2 + l_2\alpha_3$. 2′

将(*)式代入整理可得 $\alpha_1 = \frac{1}{k}[(l_1 - lk_1)\alpha_2 + (l_2 - lk_2)\alpha_3]$,

即向量α_1可由α_2,α_3线性表示, 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关矛盾. 2′

故向量组$k\alpha_1 + l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性无关. ---------10分

18191 线性代数期中试题解析(2018.11.16)

一、填空题与单项选择题(共 30 分，6 个小题，每小题 5 分).

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$的第3行元素的代数余子式之和为 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=$ $\underline{56}$.

解 原式$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=8\times(-7)=-56$.

考察知识点 行列式的按一行展开公式(的逆向使用)

次准下三角行列式

2. 设 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=$ $\underline{-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}{6}}$.

解 因为 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=-6\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}{6}$.

考察知识点 用分离因子法判定可逆、求逆矩阵

3. 设4阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为$\frac{1}{3}$，则$|(3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}+5(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}|=$ $\underline{48}$.

解 原式$=|[(3\boldsymbol{A})^{-1}+5\boldsymbol{A}^*]^{\mathrm{T}}|=|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}+\frac{5}{3}\boldsymbol{A}^{-1}|=2^4|\boldsymbol{A}|^{-1}=16\times 3=48$.

考察知识点 方阵的转置矩阵、倍矩阵、逆矩阵的行列式

4. 设n阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵，则(C).

(A) $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$ (B) $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$

(C) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$ (D) 当$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时，$|\boldsymbol{B}|=0$

考察知识点 初等变换不改变方阵的退化性

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则(B).

(A) 当$m>n$时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$满秩 (B) 当$m>n$时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$降秩

(C) 当$m<n$时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$满秩 (D) 当$m<n$时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$降秩

考察知识点 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant n$ 或 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant r(\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant n$

6. 设向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$线性无关，$\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}\}$线性相关，则(D).

(A) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$线性相关 (B) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$线性无关

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 可由$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$线性表示 (D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$线性表示

解 因为$\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$线性无关，$\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}\}$线性相关，所以$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$线性表示，也可由$\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$线性表示.

考察知识点 向量组的线性相关性

二、(16 分)求线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=-2 \end{cases}$ 的向量形式的通解.

解 对增广矩阵作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&p+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-2r_2\\r_2\times(-1)}]{\substack{r_1+r_2\\r_3-r_2}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

当 $p+8=0$，即 $p=-8$ 时，令自由未知量 $x_3=k_1,\ x_4=k_2$，可知通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+4k_1-\ k_2\\1-2k_1-2k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}，\ \forall k_1,k_2\in\mathbb{F}.$$

当 $p+8\neq 0$，即 $p\neq -8$ 时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

令自由未知量 $x_4=k$，可知通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-\ k\\1-2k\\0\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}，\ \forall k\in\mathbb{F}.$$

考察知识点 用增广矩阵消元法求解含参数线性方程组

三、计算题(共 32 分，2 个小题，每小题 16 分).

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\-2&4&0\\3&1&1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 因为 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$，且

$$[\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-7&0&0\\-2&1&0&4&-7&0\\3&1&-2&-6&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-7&0&0\\0&1&0&-10&-7&0\\0&1&-2&15&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(r_3-r_2)/(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-7&&\\0&1&0&-10&-7&\\0&0&1&-\frac{25}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\-10&-7&0\\-\frac{25}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

考察知识点 用初等行变换法求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 型矩阵方程：

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times s}=\boldsymbol{B}_{m\times s}\Leftrightarrow \boldsymbol{PA}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times s}=\boldsymbol{PB}_{m\times s}，\ \forall \boldsymbol{P}_{m\times m}\text{ 可逆.}$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^m$，其中 m 为任意正整数.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\end{bmatrix}，\text{其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$r(\boldsymbol{B})=1\Rightarrow \boldsymbol{B}^m=(\operatorname{tr}\boldsymbol{B})^{m-1}\boldsymbol{B}=2^{m-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2^{m-1}&-2^{m-1}\\-2^{m-1}&2^{m-1}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{J}^3=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J})^m=\boldsymbol{E}^m+\mathrm{C}_m^1\boldsymbol{E}^{m-1}(-\boldsymbol{J})^1+\mathrm{C}_m^1\boldsymbol{E}^{m-1}(-\boldsymbol{J})^2$$

$$=\boldsymbol{E}-m\boldsymbol{J}+\frac{m(m-1)}{2}\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix}1&-m&\frac{m(m-1)}{2}\\0&1&-m\\0&0&1\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^m=\left[\begin{array}{cc:ccc}2^{m-1}&-2^{m-1}&&&\\-2^{m-1}&2^{m-1}&&&\\\hdashline&&1&-m&\frac{m(m-1)}{2}\\&&&1&-m\\&&&&1\end{array}\right].$$

考察知识点 准对角矩阵的幂

用秩1法求方阵的幂、用拆和法求方阵的幂

四、证明题(共 22 分，2 个小题，第 1 小题 14 分，第 2 小题 8 分).

1. 设向量组(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性无关，

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$，

判断向量组(Ⅱ)$=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\}$的线性相关性，并说明理由.

解 因为

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3+x_4\boldsymbol{\beta}_4=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+2x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2x_1-3x_2-3x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_1+4x_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_1+3x_2-2x_3)\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0,\\ -2x_1-3x_2-3x_3=0,\\ x_1+4x_2-x_3=0,\\ x_1+3x_2-2x_3=0 \end{cases} \left(\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-3&-3\\1&4&-1\\1&3&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&2&-2\\0&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{\substack{r_3-2r_2\\r_4-r_2}}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0,$$

所以(Ⅱ)线性无关.

考察知识点 用定义法判别向量组的线性相关性

只有零解的齐次线性方程组的判别

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，求证 $n\times n$ 齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 必有非零解.

证 只需证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，事实上，

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Rightarrow|\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}|^2=1\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=\pm1,$$

$$|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|\Rightarrow|\boldsymbol{B}|=\mp1,$$

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\frac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\frac{|\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2|}{-1}=-|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0. \qquad \square$$

考察知识点 用行列式法判别有非零解的 $n\times n$ 齐次线性方程组

用乘积法计算行列式

整理：理学院 2017 级严班 Johnson

2018～2019 学年第二学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》(共 3 页)

(考试时间：2019 年 4 月 19 日)

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题与单项选择题(共 30 分，每小题 5 分)

1. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 a 满足的条件是__________________.

2．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 元列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]$. 若 $|\boldsymbol{A}|=1$, 且矩阵

$\boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\right]$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\right|=$________.

3．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^m=$ ______________________ (m 为大于 2 的整数).

4．下列说法错误的是(　　).

(A)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$；

(B)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$；

(C)设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；

(D)设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

5．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有(　　).

(A) $\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right|=0$　　(B) $\left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=0$　　(C) $\left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\right|=0$　　(D) $\left|\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|=0$

6．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中向量组，则下列说法正确的是(　　).

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(B)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ $(t<s)$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(C)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意含有 $s-1$ 个向量的部分组都线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(D)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能由其余的向量线性表示，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

二、(17 分)当 b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2-\ \ x_3-\ 2x_4=0 \\ x_1+2x_2-\ 3x_3-\ 5x_4=-1 \\ x_1+4x_2+\ \ x_3+\ 2x_4=1 \\ x_1+7x_2+7x_3+10x_4=b \end{cases}$ 有解？并求其相应的向量形式的通解.

三、(12 分)

计算 n 阶行列式 $\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$.

四、(18 分)设实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

且 $2\boldsymbol{AXA}^*=\boldsymbol{XA}^{-1}+5\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位阵，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

五、(14 分)已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,8,9,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,1,9]^{\mathrm{T}}$.

(1)若向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，求向量$\boldsymbol{\beta}$的全部表达式；

(2)若$\boldsymbol{\gamma}=[3,k,-7,13]^{\mathrm{T}}$，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}$线性无关，求参数$k$的值.

六、(9 分)设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$均为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$可逆.证明：若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BA})$.

2018-2019-02 期中试题参考答案

一、填空题与单项选择题（共 30 分，每小题 5 分）

1. $a=-3$或 1； 2. $-\dfrac{2}{3}$； 3. $\begin{bmatrix} -5^{m-1} & 3\cdot 5^{m-1} & 0 & 0 \\ -2\cdot 5^{m-1} & 6\cdot 5^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；（若只有一个主对角块正确，给 3 分）

4. B； 5. A； 6. D.

二、(17 分)解 对方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 施行初等行变换，

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 10 & b \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & b \end{array}\right]$$ ··························5 分

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right],$$ ··························7 分

当 $b=4$ 时，$r(\tilde{A})=r(A)=3<4$，方程组有无穷多解. 此时 ··························10 分

$$\tilde{A}\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-3+7x_3, \\ x_2=\ \ 1-2x_3, \\ x_4=\ \ \ 0 \end{cases}$ 其中 x_3 为自由变量. ··························13 分

则方程组的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall k\in\mathbb{P}$. ··························17 分

三、(12 分)解 法 1

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \overset{c_j-c_1}{\underset{j=2,3,\ldots,n}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 2 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ n+a & -a & \cdots & -a & -a \end{vmatrix}$$ ······4 分

$$\xlongequal{r_n+r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 2 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ……………………8 分

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}(a+\frac{n(n+1)}{2})$$.……………………………………………12 分

解法 2 $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\ldots,n]{r_i-ir_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & \cdots & a & -2a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & -(n-1)a \\ a & 0 & \cdots & 0 & -na \end{vmatrix}$$ ……4 分

$$\xlongequal{c_n+nc_1+(n-1)c_2+\cdots+2c_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ……………………8 分

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}(a+\frac{n(n+1)}{2})$$ ……………………12 分

解法 3

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2}+a & \dfrac{n(n+1)}{2}+a & \cdots & \dfrac{n(n+1)}{2}+a & \dfrac{n(n+1)}{2}+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

………4 分

$$\xlongequal[j=1,2,\ldots,n-1]{c_j-c_n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n(n+1)}{2}+a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$ ………………………8 分

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}(a+\frac{n(n+1)}{2}).$$ ……………………12 分

四、(18 分)解法 1

$$|A^*|=\left|\begin{array}{cc:cc}3&2&0&0\\-1&-1&0&0\\ \hdashline 0&0&2&5\\0&0&1&3\end{array}\right|=\begin{vmatrix}3&2\\-1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix}=(-3+2)(6-5)=-1,$$ ……………………2 分

$\Rightarrow |A|^3=|A^*|=-1\Rightarrow |A|=-1.$ ……………………4 分

对 $2AXA^*=XA^{-1}+5E$ 两边同右乘 A 得　$2|A|AX=X+5A$， ……………7 分

再两边同左乘 A^* 得　$2|A|^2X=A^*X+5|A|E$， ……………9 分

整理得　$(A^*-2E)X=5E$. ……………11 分

从而　$X=5(A^*-2E)^{-1}$. ……………………13 分

将 A^*-2E 分块，$A^*-2E=\begin{bmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}$，其中 ……………………14 分

$B_1=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix}$可逆，$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}3&2\\-1&-1\end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix}0&5\\1&1\end{bmatrix}$可逆，$B_2^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-5\\-1&0\end{bmatrix}$. …16 分（每个逆矩阵 1 分）

因此 $X=5(A^*-2E)^{-1}=5\begin{bmatrix}B_1^{-1}&O\\O&B_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&10&0&0\\-5&-5&0&0\\0&0&-1&5\\0&0&1&0\end{bmatrix}$. ……………18 分（分块求逆公式 1 分，结果 1 分）

解法 2

…………　整理得　$(A^*-2E)X=5E$. ………11 分

$$\left[A^*-2E \vdots 5E\right]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&2&0&0&5&0&0&0\\-1&-3&0&0&0&5&0&0\\0&0&0&5&0&0&5&0\\0&0&1&1&0&0&0&5\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2+r_1}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&2&0&0&5&0&0&0\\0&-1&0&0&5&5&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&5\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]$$ 14 分

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&15&10&0&0\\0&1&0&0&-5&-5&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&5\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right].$$ ……………16 分

所以 $X=\begin{bmatrix}15&10&0&0\\-5&-5&0&0\\0&0&-1&5\\0&0&1&0\end{bmatrix}$ ……………18 分

五、（14 分）解

（1）$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_1\begin{bmatrix}1\\8\\9\\5\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+2k_2\\8k_1\\9k_1+k_2\\5k_1+9k_2\end{bmatrix}$ 其中 k_1, k_2 为常数. …………2 分

（2） **解法 1** 因为 α_1,α_2 线性无关，因此 α_1,α_2,γ 线性无关当且仅当 γ 不能由 α_1,α_2 线性表示，即非齐次方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\gamma$ 无解， 必有 $r(A)\neq r(\bar{A})$. 而 …………6 分

$$\bar{A}=[\alpha_1,\alpha_2\,\vdots\,\gamma]=\left[\begin{array}{cc:c}1&2&3\\8&0&k\\9&1&-7\\5&9&13\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:c}1&2&3\\0&-16&k-24\\0&-17&-34\\0&-1&-2\end{array}\right].$$ …………10 分

$$\to\left[\begin{array}{cc:c}1&2&3\\0&1&2\\0&-16&k-24\\0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:c}1&2&3\\0&1&2\\0&0&k+8\\0&0&0\end{array}\right]$$ …………12 分

必有 $k+8\neq0$, 因此 $k\neq-8$. ……………………14 分

解法 2 α_1,α_2,γ 线性无关当且仅当齐次方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\gamma=0$ 只有零解，必有 $r(A)=3$, …………6 分

令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]=\begin{bmatrix}1&2&3\\8&0&k\\9&1&-7\\5&9&13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-16&k-24\\0&-17&-34\\0&-1&-2\end{bmatrix}.$ …………10 分

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-16&k-24\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&k+8\\0&0&0\end{bmatrix}$$ …………12 分

因为 $r(A)=3$, 所以 $k\neq-8$. …………14 分

六、(9 分) 证法 1

因为 $A^2=A$，所以 $A(A-B-E)=A^2-AB-A=-AB$. …………2 分

又因为 $A-B-E$ 可逆，所以 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(-A(A-B-E))=\mathrm{r}(-A)=\mathrm{r}(A)$. ………4 分

同理,因为 $A^2=A$，所以 $(A-B-E)A=A^2-BA-A=-BA$. 从而 ………6 分

$r(BA)=r(-(A-B-E)A)=r(-A)=r(A)$. ………8 分

因此 $r(AB)=r(BA)$. ………9 分

证法 2 因为 $A-B-E$ 可逆, 所以

$r(AB)=r((A-B-E)AB) \quad =r(A^2B-BAB-AB)$. ………3 分

又因为 $A^2=A$，所以上式 $=r(AB-BAB-AB)=r(-BAB)$. ………4 分

同理, $r(BA)=r(BA(A-B-E))=r(BA^2-BAB-BA)=r(BA-BAB-BA)=r(-BAB)$, ...8 分

因此 $r(AB)=r(BA)$. ………9 分