# 2014～2015 学年第一学期期末考试试卷参考答案

## 《 线性代数及其应用 》（A 卷）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、 $\underline{39}$ ；2、 $\underline{-\frac{4}{3}}$ ；3、 $\underline{a\neq -2 \text{且} a\neq 1}$ ；4、 $\underline{-1}$ ；5、 $\underline{2}$ ，$\underline{y_1^2+y_2^2-y_3^2}$

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

BAACB

三、（共 16 分，每题 8 分）

1、**解**

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+b-d & -c-d \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}+d\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=L\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$

$\{\boldsymbol{A}_i\}$ 在 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的标准基下的坐标组为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 的秩为 3，故向量组 $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 的秩为 3，从而 $\dim W=3$；

且 $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3\}$ 是 $W$ 的一个基.

（另外 $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_4\}$ 或 $\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 或 $\{\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4\}$ 也是基）

2、**解** $|\lambda\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2),$

$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$ 互异，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

$\lambda_1=2$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=[3,1]^{\mathrm{T}}$

$\lambda_2=-2$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{X}_2=[1,-1]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ 线性无关.

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{S}$ 为可逆阵，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(2,-2)$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{SDS}^{-1}$，

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{SD}^n\boldsymbol{S}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&\\&-2\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1&1\\1&-3\end{bmatrix}=2^{n-2}\begin{bmatrix}3+(-1)^n&3(1+(-1)^{n+1})\\1+(-1)^{n+1}&1+(-1)^n\cdot 3\end{bmatrix}.$$

四、（共 12 分）**解**（1） 因为由基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\7&5&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&5\end{bmatrix}$，

所以由基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2&0&0\\-7&3&0&0\\0&0&-5&3\\0&0&2&-1\end{bmatrix}$；

（2）【解法 1】$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4=7\boldsymbol{\alpha}_1+17\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_4$，

由坐标定义，向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的坐标为$[7,17,-2,-3]^{\mathrm{T}}$.

【解法 2】设向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的坐标为$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$.

向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$下的坐标为$[1,2,1,-1]^{\mathrm{T}}$，由坐标变换公式得

$$X=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\7&5&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\17\\-2\\-3\end{bmatrix}.$$

五、（共 12 分）

**解**（1）$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=[1,0,0]^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}=-1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=[0,-1,1]^{\mathrm{T}}=0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1-1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3,\end{cases}$

故$\sigma$在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

（2）【解法 1】 $\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=[0,-1,1]^{\mathrm{T}},\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=[-1,0,1]^{\mathrm{T}},\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=[0,0,1]^{\mathrm{T}},\end{cases}$

设$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{B}_{3\times 3}$，

即$\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{B}$，解该矩阵方程

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&0&-1&0\\0&1&1&-1&0&0\\1&1&1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&0&-1&0\\0&1&0&-1&1&0\\1&0&0&2&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&0\end{array}\right]$$

得 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$.

【解法 2】由标准基$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

设$\sigma$在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的矩阵为$\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

或 $\boldsymbol{SB}=\boldsymbol{AS}$, 其中 $\boldsymbol{AS}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$,

$$[\boldsymbol{S},\boldsymbol{AS}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&0&-1&0\\0&1&1&-1&0&0\\1&1&1&1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&0\end{array}\right].$$

得 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-1&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}$.

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&1&-3&2&1\\0&0&-4&0&b-4\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&\frac{b}{2}\\0&1&0&2&4-\frac{3b}{4}\\0&0&1&0&1-\frac{b}{4}\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

六、(共 11 分)

**证**(1) 设 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$， $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，则 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=f(\lambda)\boldsymbol{X}$， $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$.

因为 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}_{n\times n}$，所以 $f(\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$, 故 $f(\lambda)=0$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1,\ldots\lambda_r,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-r}$，其中 $\lambda_1,\ldots\lambda_r$ 为 $r(\neq 0)$ 个非零特征值.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\dots\lambda_r,0,\dots,0]$,

故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=r$.

**解**(3) 设 $\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值，则 $\lambda^2-3\lambda=0$, 或 $\lambda\in\{0,3\}$.

又 $r(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 有 $r\,(\neq 0,n)$ 个非零特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\underbrace{3,\dots3}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r}$.

$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\underbrace{-1,\dots-1}_{r},\underbrace{2,\dots,2}_{n-r}$,

从而 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(-1)^r\cdot 2^{n-r}$.

七、（15 分）**解** 二次型 $f$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-4&-2\\-4&1&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}$.

因为 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&4&2\\4&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$.

对特征值 5，解方程组 $(5\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，可求得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,-2]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=-\frac{1}{5}[4,-5,2]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\left[\frac{\sqrt5}{5},0,\ -\frac{2\sqrt5}{5}\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\left[-\frac{4\sqrt5}{15},\frac{\sqrt5}{3},-\frac{2\sqrt5}{15}\right]^{\mathrm{T}}$.

对特征值 $-4$，解方程组 $(-4\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[2,2,1]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得 $\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\frac{1}{3}[2,2,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt5}{5}&-\frac{4\sqrt5}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2\sqrt5}{5}&-\frac{2\sqrt5}{15}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交阵，且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(5,5,-4)$.

故二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 经正交线性替换 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt5}{5}&-\frac{4\sqrt5}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2\sqrt5}{5}&-\frac{2\sqrt5}{15}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$

化为标准形 $g(\boldsymbol{Y})=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

【备注】：求特征值5的特征向量时，同解方程组为$2x_1+2x_2+x_3=0,$

可观察得正交的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,-4]^{\mathrm{T}}$，

单位化后为$\boldsymbol{\eta}_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}，-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\left[\frac{2}{6},\frac{\sqrt{2}}{6},-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\left[-\frac{5}{2},2,1\right]^{\mathrm{T}}$，

单位化后为$\boldsymbol{\eta}_1=\left[0,\frac{\sqrt{5}}{5}，-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{\eta}_1=\left[-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{2\sqrt{5}}{15}\right]^{\mathrm{T}}$.

八、(4分）**证** $\mathbb{R}^3$空间中的四个3元向量一定线性相关，所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$必线性相关，

从而存在不全为零的数$k_1,k_2,l_1,l_2$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$.

记$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2,$

由数$k_1,k_2,l_1,l_2$不全为零 以及$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都线性无关可知$\boldsymbol{\eta}$为非零向量.