线 性 代 数 及 其 应 用

天津大学数学系代数教研室　编

前言

线性代数是理工科大学生的一门重要基础课, 其将理论、应用和计算完美地融合起来, 也是在自然科学和工程技术各个领域中广泛应用的数学工具. 随着计算机的普遍使用以及计算机功能的不断增加, 线性代数在实际应用中的重要性也在不断提高, 同时也对线性代数的教学内容从深度和广度上提出了更高的要求.

本书根据全国工科数学课程教学指导委员会制定的《线性代数教学基本要求》, 结合我们多年教学工作中积累的体会和经验, 对由我们课程组在 2009 年出版的《线性代数及其应用》进行了重新编写. 在编写过程中听取了校内外同行们提出的宝贵意见, 结合我们教学工作中发现的问题, 对原有教材的体系和部分内容做了适当的调整和充实, 并在有关内容的论述和定理的证明方法上做了改进. 努力做到重点突出, 难易适度, 使各章内容不仅便于教师讲解, 而且易于学生接受. 本书具有如下特点.

1、本套教材充分考虑了内容的更新, 选入了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料, 充实教材内容, 以适应教育发展和教学改革新形势的需要. 内容安排上由浅入深, 符合认知规律, 理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰, 尽可能通过实际背景引入数学概念, 便于学生理解和掌握.

2、教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具. 所以本套教材对概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排，以及例题、习题的选配等方面, 都是从教学的实际要求出发而做出的, 使其遵循教学活动自身的规律性, 方便教师教与学生学. 参加本教材编写的老师们都是多年从事数学教学和研究, 他们紧紧扣住教学大纲的要求，密切联系本校数学教学的实际, 认真研究了国内各种版本的同类教材, 取长补短, 编出了新意和特色. 相信这套教材在数学教学和教学改革中定能发挥相当的作用, 同时也希望它在教学实践中不断地完善.

3、本教材共分为七章, 较之前出版的教材在结构上有很大调整. 为了让学生尽早接触公理化定义和方法, 在教材一开始就给出了数域的公理化定义, 然后定义了 n 元向量及其运算, 这为后面学习一般线性空间做了铺垫, 同时为介绍矩阵的初等变换、用矩阵消元法解线性方程组等提供了便利.

4、鉴于矩阵及其初等变换在线性代数中的重要作用, 在教材的第一章就对其进行介绍和研究, 并用矩阵及其初等变换研究了一般线性方程组的求解. 行列式的定义采用的是逆序法, 这种方法便于学生理解行列式的性质.

5、在工科院校的基础数学教育中, 线性代数是训练逻辑思维最好的基础数学课程之一.

本教材考虑到定理的证明对加深定理的理解有重要重要, 因此教材中的所有定理和命题都给出了证明. 同时考虑到学生的不同学习水平和所学专业的实际需要, 对一些较难的证明加了“$\star$”号, 对这些证明可以淡化或不读, 对以后的学习不会有影响.

6、学好线性代数的关键是理解和掌握它的基本理论, 并在理论的指导下能够完成习题或解决实际问题. 因此, 本教材各章后都配有适量的习题, 绝大多数的习题是近几年出现的新题型. 习题的难度由浅入深, 难题可以做考研训练.

7、本教材充分考虑到分层次教学的要求, 可供 48 学时和 56 学时等不同层次的需要. 具体的要求在教学日历中充分体现出来.

8、本教材有配套的学习指导书. 它通过各章重点内容总结、典型习题解析、基础知识强化训练等多个环节的设置, 不但指导学生如何学习线性代数, 更全方位地提高学生的解题能力和解决实际问题的能力.

本教材的第一、七章由吴伟执笔, 第二章由王艳执笔, 第三章由崔石花执笔, 第四章由张颖执笔, 第五章由赵志华执笔, 第六章由王健波、王艳玲共同完成. 本教材在编写过程中得到数学系领导的大力支持, 在此, 向他们表示诚挚的感谢.

书中不妥之处, 请老师和同学们多提宝贵意见.

目录

第一章　行列式

第二章　行列式

2.0.1　行列式的定义及性质

1、n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},\end{aligned}$$

式中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 $n!$ 个排列求和.

当 $n=1$ 时, 即为 1 阶行列式, 并规定 $|a|=a$.

2、行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 初等变换性质

2.1 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{kr_i(kc_i)} \boldsymbol{B}$, 其中 $k \neq 0$, 则 $|\boldsymbol{A}| = k^{-1}|\boldsymbol{B}|$.

2.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i+kr_j(c_i+kc_j)} \boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

2.3 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)} \boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|$.

性质 3 等于零的性质

3.1 如果行列式中有零行 (列), 则行列式等于零.

3.2 如果行列式中两行 (列) 相等, 则行列式等于零.

3.3 如果行列式中两行 (列) 成比例, 则行列式等于零.

性质 4 如果行列式的某一行 (列) 中各元素均可以写成两项之和, 则此行列式可以写成两个行列式之和, 即

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n| = |\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_i, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n|.$$

例 2.0.1 已知 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的值, 求 $D_1 = |b^{i-j}a_{ij}|$, 其中 b 为任意非零数.

解 由行列式的定义, 有

$$\begin{aligned}D_1 &= |b^{i-j}a_{ij}| = |c_{ij}| \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{nj_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b^{1-j_1} a_{1j_1} b^{2-j_2} a_{2j_2} \cdots b^{n-j_n} a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = D.
\end{aligned}$$

□

例 2.0.2 求 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 & 0 \\ 2 & 3 & x & 4 \\ 3 & 2 & x & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数.

解　法 1 根据行列式的定义, 只有在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 项中出现 x^4, 也就是 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 2x^4$, 即行列式中 x^4 的系数为 2. 而在 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 两项中出现 x^3, 也就是

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + (-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -x^3 - 8x^3 = -9x^3,$$

即行列式中 x^3 的系数为 -9.

法 2 根据行列式的性质, 有

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 & 0 \\ 2 & 3 & x & 4 \\ 3 & 2 & x & x \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 2x-1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & x & 2 & 0 \\ 2 & 3 & x-4 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & x \end{vmatrix} = D.$$

行列式 D 的展开式中有一项为主对角线元素乘积 $x^2(2x-1)(x-4)$, 且其余各项至多包含 2 个主对角线元素, 也就是最多出现含 x^2 的项. 因此行列式 D 中含 x^4 和 x^3 的项只能出现在主对线元素的乘积中, 即 $x^2(2x-1)(x-4) = 2x^4 - 9x^3 + \cdots$, 从而行列式中 x^4 的系数为 2, x^3 的系数为 -9. □

例 2.0.3 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = m$, 则 $D = \begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{31}+2a_{21} & 3a_{11}+4a_{21} \\ 2a_{12} & a_{32}+2a_{22} & 3a_{12}+4a_{22} \\ 2a_{13} & a_{33}+2a_{23} & 3a_{13}+4a_{23} \end{vmatrix} =$ ________.

解　利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned}
D &\xlongequal{\frac{1}{2}c_1} 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31}+2a_{21} & 3a_{11}+4a_{21} \\ a_{12} & a_{32}+2a_{22} & 3a_{12}+4a_{22} \\ a_{13} & a_{33}+2a_{23} & 3a_{13}+4a_{23} \end{vmatrix} \xlongequal[\frac{1}{4}c_3]{c_3-3c_1} 8\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31}+2a_{21} & a_{21} \\ a_{12} & a_{32}+2a_{22} & a_{22} \\ a_{13} & a_{33}+2a_{23} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{c_2-2c_3} -8\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -8m.
\end{aligned}$$

□

例 2.0.4 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & ac & bc \\ ac & b^2+c^2 & ab \\ bc & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix}$.

解 行列式 D 的第一列可以拆成两项之和, 将 D 写成两个行列式之和, 即

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & ac & bc \\ ac & b^2+c^2 & ab \\ 0 & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b^2 & ac & bc \\ 0 & b^2+c^2 & ab \\ bc & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix}=D_1+D_2.$$

计算行列式 D_1.

$$\begin{aligned} D_1 &= a\begin{vmatrix} a & ac & bc \\ c & b^2+c^2 & ab \\ 0 & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+(-c)c_1} a\begin{vmatrix} a & 0 & bc \\ c & b^2 & ab \\ 0 & ab & c^2+a^2 \end{vmatrix} \\ &= ab\begin{vmatrix} a & 0 & bc \\ c & b & ab \\ 0 & a & c^2+a^2 \end{vmatrix} \xlongequal{c_3+(-a)c_2} ab\begin{vmatrix} a & 0 & bc \\ c & b & 0 \\ 0 & a & c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} \\ &= 2a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

同理计算 $D_2=2a^2b^2c^2$, 因此 $D=D_1+D_2=4a^2b^2c^2$. □

2.0.2 行列式按行 (列) 展开

1、余子式与代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中, 划掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后, 剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式, 称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij}. 称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2、行列式按行 (列) 展开

(1) 行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\ldots,n$$

$$(D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\ldots,n).$$

(2) 行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 中某一行 (列) 的各元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于 0, 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$$

$$(a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j).$$

例 2.0.5 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 1 \\ 2 & x & -1 & 2 \\ -2 & 4 & x & -3 \\ x & -3 & -5 & x \end{vmatrix}$, 求 $f(x)$ 的常数项.

解 $f(x)$ 的常数项为在 $f(x)$ 中取 $x=0$ 时行列式值, 即

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} -2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

□

例 2.0.6 设 n 阶行列式 D 的值为 a, 且每一行元素之和均为 $b(b\neq 0)$, 求 D 的每一列元素的代数余子式之和.

解 记 $D=|a_{ij}|$, A_{ij} 为 D 的 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式, 则

$$A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{b}\begin{vmatrix} b & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(j=2,\ldots,n)]{c_1-c_j} \frac{1}{b}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{a}{b}.$$

同理, $A_{1j}+A_{2j}+\cdots+A_{nj}=\frac{a}{b}(j=2,\ldots,n)$. □

例 2.0.7 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=27$, A_{ij} 为 D 的 (i,j) 元的代数余子式, 求 $A_{21}+A_{22}+A_{23}$ 和 $A_{24}+A_{25}$.

解 将行列式 D 按二行展开, 且第四行元素与第二行对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 则

$$\begin{cases} 2(A_{21}+A_{22}+A_{23})+\ \ (A_{24}+A_{25})=27, \\ \ \ (A_{21}+A_{22}+A_{23})+2(A_{24}+A_{25})=\ \ 0, \end{cases}$$

求得 $A_{21}+A_{22}+A_{23}=18, A_{24}+A_{25}=-9$. □

2.0.3 行列式的计算

1、三角化法

利用行列式的性质将所给行列式化成三角行列式.

有关三角行列式的结论:

(1) n 阶上 (下) 三角行列式等于其 n 个主对线元素乘积, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) n 阶次上 (下) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 2.0.8 计算下列 n 阶行列式

$$(1)\ D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}, \quad (2)\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & 3 & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 (1) $$D_1 \xlongequal[(j=2,\ldots,n)]{c_1-\frac{1}{j}c_j} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j})n!.$$

(2) $$D_2 \xlongequal[(j=2,\ldots,n)]{c_n-\frac{1}{j}c_{n-j+1}} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j})n!.$$ □

例 2.0.9 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

解

$$D \xlongequal[(i=n,\ldots,2)]{r_i-r_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(j=n,\ldots,2)]{c_j-c_{j-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(j=n,\ldots,2)]{c_j-c_{j-1}} \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{2}(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n+1)2^{n-2}.$$

□

2、**降阶法**

利用行列式的性质与展开定理将所给行列式化成较为低阶的行列式.

例 2.0.10 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$, M_{ij}, A_{ij} 分别是 D 的 $(i,j)(i,j=1,2,3,4)$ 元的余子式、代数余子式.

(1) 求 $M_{21}+3M_{22}+4M_{23}+M_{24}$;

(2) 求 $A_{22}-A_{32}-A_{42}$.

解 (1) $M_{21}+3M_{22}+4M_{23}+M_{24} = -A_{21}+3A_{22}-4A_{23}+A_{24} = -(A_{21}-3A_{22}+4A_{23}-A_{24}) = 0$.

(2)

$$A_{22}-A_{32}-A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+r_2]{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-2c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 15.$$

□

例 2.0.11 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 \\ b & x & a-b & 0 \\ 0 & a-b & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}$.

解 行列式 D 的每一行元素之和均为 $x+a$, 将把第 2,3,4 列都加到第 1 列可得

$$\begin{aligned} D &\xlongequal[(j=2,3,4)]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} x+a & a & 0 & 0 \\ x+a & x & a-b & 0 \\ x+a & a-b & x & b \\ x+a & 0 & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,3,4)]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} x+a & a & 0 & 0 \\ 0 & x-a & a-b & 0 \\ 0 & -b & x & b \\ 0 & -a & a & x \end{vmatrix} \\ &= (x+a)\begin{vmatrix} x-a & a-b & 0 \\ -b & x & b \\ -a & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{c_1+c_3} (x+a)\begin{vmatrix} x-a & a-b & 0 \\ 0 & x & b \\ 0 & b & x \end{vmatrix} \\ &= (x+a)(x-a)\begin{vmatrix} x & b \\ b & x \end{vmatrix} = (x+a)(x-a)(x+b)(x-b). \end{aligned}$$

□

3、**递推法**

利用行列式的性质与展开定理得到递推公式, 再根据递推公式递推计算出所给行列式的值.

例 2.0.12 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 将 D_n 按第一行展开, $(1,n)$ 元的余子式是主对线元素均为 -1 的上三角行列式, 因此可得

$$D_n = 2D_{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2.$$

利用 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6$ 以及上式可得

$$\begin{aligned} D_n &= 2D_{n-1} + 2 = 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2^2 + 2 = \cdots \\ &= 2^{n-2} D_2 + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 = 2^{n-2} \cdot 6 + (2^{n-1} - 2) = 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

□

4、**特殊行列式**

(1) n 阶 "三对角" 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{cases} (n+1)a^n, & a = b; \\ \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a \neq b. \end{cases}$$

(2) n 阶范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$V_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

(3) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_m&\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_n\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$;

(4) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{B}_n&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{A}_m\\\boldsymbol{B}_n&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

例 2.0.13 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&-1&&&\\-1&2&-1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&2&-1\\&&&-1&2\end{vmatrix}$.

解　将 D_n 的每一行提公因子 -1, 可得

$$D_n=(-1)^n\begin{vmatrix}-2&1&&&\\1&-2&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&-2&1\\&&&1&-2\end{vmatrix}=(-1)^n(n+1)(-1)^n=n+1.$$

□

例 2.0.14 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}$.

解　$D_n\xlongequal[(i=2,\ldots,n)]{r_{i-1}-r_i}\begin{vmatrix}3&-2&\cdots&0&0&0\\-1&3&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&3&-2&0\\0&0&\cdots&-1&3&0\\0&0&\cdots&0&-1&2\end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix}3&-2&&&\\-1&3&-2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&-1&3&-2\\&&&-1&3\end{vmatrix}_{n-1}=2(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}-3&2&&&\\1&-3&2&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&-3&2\\&&&1&-3\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} 2 \frac{(-1)^n - (-2)^n}{(-1) - (-2)} = 2^{n+1} - 2.$$

□

例 2.0.15 计算 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

解 将 n 阶行列式加边, 可得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \xlongequal[(i=2,\ldots,n+1)]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2x_1 x_2 \cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2 \prod_{i=1}^{n} x_i V(x_1, x_2, \ldots, x_n) - V(1, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= [2 \prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n} (x_i - 1)] \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

□

例 2.0.16 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal[r_5 - r_2]{r_4 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 16 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3 \cdot 3} V(1,2,3) V(2,3,4) = -4.$ □

例 2.0.17 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & b & a & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ a & b & a & b \\ d & c & 0 & 0 \\ c & d & c & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2.$ □

2.0.4 克拉默法则

1、$n \times n$ 线性方程组有唯一解的充分必要条件是其系数行列式 $D \neq 0$, 且唯一解为

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}} = \left[\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}\right]^{\mathrm{T}},$$

其中 $D_j (j=1,2,\ldots,n)$ 是用常数项 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 代替系数行列式 D 的第 j 列得到的行列式.

2、如果 $n \times n$ 线性方程组的系数行列式等于零, 则方程组无解或无穷多解.

3、$n \times n$ 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是其系数行列式等于零.

例 2.0.18 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 + 3x_4 = -4, \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{2^5 - 1^5}{2-1} = 31 \neq 0,$$

则由克拉默法则, 知方程组有唯一解. 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 6 - 7 - 4\frac{2^4 - 1^4}{2-1} = -62,$$

因此 $x_4 = \frac{D_4}{D} = -2$. 依次计算

$$x_3 = -4 - 3x_4 = 2,\ x_2 = 1 - 3x_2 - 2x_4 = -1,\ x_1 = 2 - 3x_2 - 2x_3 = 1.$$

□

例 2.0.19 设有线性方程组

$$\begin{cases}(a-2)x_1+ x_2- 2x_3=0,\\ -5x_1+(a-3)x_2- 3x_3=0,\\ x_1- x_2+(a+1)x_3=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

解 齐次线性方程组有非零解, 当且仅当其系数行列式等于零. 而系数行列式

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a-2&1&-2\\-5&a-3&-3\\1&-1&a+1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{\underset{c_1-c_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}a&1&-2\\-2&a-3&-3\\0&0&a-1\end{vmatrix}\\&=(a-1)\begin{vmatrix}a&1\\-2&a-3\end{vmatrix}=(a-1)^2(a-2).\end{aligned}$$

因此 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时, 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\-5&-2&-3\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_1]{\substack{r_2-5r_1\\r_3+r_1}}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&-7&7\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{-\frac{1}{7}r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=\ \ x_3,\end{cases}$ 则方程组的通解为 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=k_1[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$, 其中 k_1 为任意常数.

当 $a=2$ 时, 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换, 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&-2\\-5&-1&-3\\1&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{6}r_2]{\substack{r_2+5r_3\\r_1\leftrightarrow r_3}}\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

其同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-\ x_3,\\x_2=\ 2x_3,\end{cases}$ 则方程组的通解为 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=k_2[-1,2,1]^{\mathrm{T}}$, 其中 k_2 为任意常数. □

第三章　矩阵

3.0.5　方阵的幂

1、**利用二项式定理求方阵的幂.**

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以分解成两个矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的和, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 可交换, 则利用二项式定理求 $\boldsymbol{A}$ 的幂, 即

$$\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^m=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k\boldsymbol{B}^{m-k}\boldsymbol{C}^k,\ \text{其中 } m \text{ 为正整数.}$$

2、**秩为 1 的方阵的幂**

若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1, 则 $\boldsymbol{A}$ 可以分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均为非零列向量. 进而, 利用矩阵乘法的结合律得出 $\boldsymbol{A}^m=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}$, 其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$, m 为正整数.

3、先计算 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3$, 如有某种规律可用数学归纳法求 $\boldsymbol{A}$ 的幂.

4、**准对角矩阵的幂**

设 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $n_i(i=1,2,\dots,s)$ 阶方阵, m 为正整数, 则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^m & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^m & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_s^m \end{bmatrix}.$$

例 3.0.20 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^m$, 其中 m 为正整数.

解　记 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{B}^3 &= \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}, \\ \boldsymbol{B}^4 &= \boldsymbol{B}^5 = \cdots = \boldsymbol{O}. \end{aligned}$$

显然, $2\boldsymbol{E}_3$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换, 则由二项式定理可得

$$\boldsymbol{A}^m=(2\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{B})^m=(2\boldsymbol{E}_3)^m+\mathrm{C}_m^1(2\boldsymbol{E}_3)^{m-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_m^2(2\boldsymbol{E}_3)^{m-2}\boldsymbol{B}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2^m & 3m\cdot 2^{m-1} & 3m(m-1)\cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m & m\cdot 2^{m+1} \\ 0 & 0 & 2^m \end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.21 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^m$, 其中 m 为正整数.

解 记 $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{E}_3 + 2\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{E}_3$, 因此 $\boldsymbol{B}^{2k} = \boldsymbol{E}_3, \boldsymbol{B}^{2k+1} = \boldsymbol{B}$, 其中 k 为正整数. 显然, $3\boldsymbol{E}_3$ 与 $2\boldsymbol{B}$ 可交换, 则由二项式定理可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^m &= (3\boldsymbol{E}_3 + 2\boldsymbol{B})^m = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_m^k (3\boldsymbol{E}_3)^{m-k}(2\boldsymbol{B})^k \\ &= \sum_{k=2l} \mathrm{C}_m^k (3\boldsymbol{E}_3)^{m-k}(2\boldsymbol{B})^k + \sum_{k=2l-1} \mathrm{C}_m^k (3\boldsymbol{E}_3)^{m-k}(2\boldsymbol{B})^k \\ &= (\sum_{k=2l} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k)\boldsymbol{E}_3 + (\sum_{k=2l-1} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k)\boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} 5^m = (3+2)^m &= \sum_{k=2l} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k + \sum_{k=2l-1} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k, \\ 1 = (3-2)^m &= \sum_{k=2l} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k - \sum_{k=2l-1} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k, \end{aligned}$$

则 $\sum\limits_{k=2l} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k = \frac{5^m+1}{2}$, $\sum\limits_{k=2l-1} \mathrm{C}_m^k 3^{m-k}2^k = \frac{5^m-1}{2}$, 因此

$$\boldsymbol{A}^m = \begin{bmatrix} \frac{5^m+1}{2} & 0 & \frac{5^m-1}{2} \\ 0 & 5^m & 0 \\ \frac{5^m-1}{2} & 0 & \frac{5^m+1}{2} \end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.22 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha} = [1, 0, -1]^{\mathrm{T}}$, 计算 $|k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^m|$, 其中 m 为任意正整数, k 为任意数.

解 因为 $\boldsymbol{\alpha} = [1, 0, -1]^{\mathrm{T}}$, 所以 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 因而 $\boldsymbol{A}^m = (\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A} = 2^{m-1}\boldsymbol{A}$, 故

$$|k\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}^m| = \begin{vmatrix} k + 2^{m-1} & 0 & -2^{m-1} \\ 0 & k & 0 \\ -2^{m-1} & 0 & k + 2^{m-1} \end{vmatrix} = k^2(k + 2^m).$$

□

例 3.0.23 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{2m}$, 其中 m 为任意正整数.

解 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 计算

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}^{2m}=\begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^m \end{bmatrix}$. 计算

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

注意到 $r(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)=1=r(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)$, 所以

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)^m=(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2))^{m-1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)=2^{m-1}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)^m=(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1))^{m-1}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1)=2^{m-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{2m}=\begin{bmatrix} -2^{m-1} & -3\cdot 2^{m-1} & 0 & 0 \\ 2^{m-1} & 3\cdot 2^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{m-1} & 2^{m-1} \\ 0 & 0 & 2^{m-1} & 2^{m-1} \end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.24 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 求 $\boldsymbol{B}^{2016}-2\boldsymbol{A}^2$.

解 计算 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{E}_3$. 此时

$$\boldsymbol{B}^{2016}=\underbrace{(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\cdots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})}_{2016}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{2016}\boldsymbol{P},$$

因此

$$\boldsymbol{B}^{2016}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^4)^{504}\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}_3-2\boldsymbol{A}^2=\operatorname{diag}(3,3,-1).$$

□

3.0.6 关于方阵的行列式的几个公式

1、$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

2、$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$, 其中 n 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数, k 为任意常数;

3、$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵;

4、$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$;

5、$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 其中 n 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数;

6、$|\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵.

例 3.0.25 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, n 为奇数, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 证明 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$.

证明 法 1 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 所以

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|.$$

又

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|&=|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})|\\&=(-1)^n|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

则 $2|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=0$, 即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=0$, 因此 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$.

法 2 因为 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$, 所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E})|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,\\|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E})|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|\cdot(-1)^n|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|,\end{aligned}$$

故

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=-|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|,$$

即 $(1+|\boldsymbol{A}|^2)|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$, 从而 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$. □

例 3.0.26 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 元列向量, 记矩阵

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+7\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3],$$

若 $|\boldsymbol{B}|=10$, 计算 $|\boldsymbol{A}|$.

解 因为

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&8\\2&7&16\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&8\\2&7&16\end{bmatrix},$$

记 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&8\\2&7&16\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 等式两边取行列式, 可得 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|=10$. 而

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&8\\2&7&16\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&3&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5\\3&10\end{vmatrix}=-5,$$

因此 $|\boldsymbol{A}|=10/|\boldsymbol{C}|=-2$. □

例 3.0.27 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b&c&d\\b&-a&-d&c\\c&d&-a&-b\\d&-c&b&-a\end{bmatrix}$, 计算 $|\boldsymbol{A}|$.

解 计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}_4$. 等式两边取行列式, 可得

$$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}_4|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

因此 $|\boldsymbol{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

在 $\boldsymbol{A}$ 中取 $b=c=d=0$, 则 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a,-a,-a,-a)$, 因此 $|\boldsymbol{A}|=-a^4$, 故 $|\boldsymbol{A}|$ 应为 $-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. □

例 3.0.28 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{A}|=3,|\boldsymbol{B}|=2,|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$, $\boldsymbol{B}^*$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵, 计算 $|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^*|$.

解 因为

$$\begin{aligned}2=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})|\\&=|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|,\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=2|\boldsymbol{A}|=6$. 又 $\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^*|&=|2\boldsymbol{A}+|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}|=|2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1})|=2^n|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=2^n|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=2^n|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|^{-1}=2^n\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=3\cdot 2^n.\end{aligned}$$

□

例 3.0.29 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$. 证明:

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}|.$$

证明 因为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$, 所以

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$, 则有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} &= |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| \\ &= |\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

□

例 3.0.30 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(\geq 3)$ 阶非零实矩阵, 且 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 证明 $|\boldsymbol{A}|=1$.

证明 记 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$, 且 A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式. 由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 知 $A_{ji}=a_{ji}(i,j=1,2,\ldots,n)$. 此时 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 $i(i=1,2,\ldots,n)$ 行展开, 可得

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} = a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2 (i=1,2,\ldots,n).$$

而 $\boldsymbol{A}$ 为非零实矩阵, 因此 $|\boldsymbol{A}|>0$. 等式 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 两边取行列式, 可得

$$|\boldsymbol{A}|^{n-1} = |\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=1$. □

例 3.0.31 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, 证明 $|\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$.

证明 构造矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$. 因为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|,$$

因此 $|\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$. □

例 3.0.32 计算行列式 $\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$.

解 记 $\boldsymbol{A}=[a_1,a_2,\ldots,a_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}=[b_1,b_2,\ldots,b_n]$, 则

$$|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{BA}|=1+a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

□

3.0.7 逆矩阵的性质与方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件

1、逆矩阵的性质

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},k\neq 0$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

2、方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是

(1) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$;

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$;

(3) $r(\boldsymbol{A})=n$;

(4) $\boldsymbol{A}$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积.

例 3.0.33 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&-4&5\end{bmatrix}$, 且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$, 求 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1},\end{aligned}$$

所以

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=(2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&-2&3\end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.34 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵.

证明 因为 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$, 所以 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$, 因而

$$((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}=((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

$$
\begin{aligned}
&= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\\
&= (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}))^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\\
&= -(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = -(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1},
\end{aligned}
$$

故 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 为反对称矩阵. □

例 3.0.35 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 证明 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 可逆, 并求其逆.

证明 法 1 因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1},$$

且 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}.$$

法 2 因为

$$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}^{-1},$$

且 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 均可逆, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

□

注 因为可逆矩阵的逆矩阵是唯一的, 所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$. 而且仅已知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆, 也可以证明 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$ 成立. 事实上,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B} &= [(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}](\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\\
&= \boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}[(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}.
\end{aligned}
$$

例 3.0.36 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, 且 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 求 k 的值.

解 由 $r(\boldsymbol{A}) = 3 < 4$, 知 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 而

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal[(j\geq 2)]{c_1+c_j} \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1\\ k+3 & k & 1 & 1\\ k+3 & 1 & k & 1\\ k+3 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} \xlongequal[(i\geq 2)]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & k-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3.$$

求得 $k = 1$ 或 $k = -3$.

当 $k=1$ 时, 则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, 因此 $r(\boldsymbol{A})=1$, 与题设不符. 故舍去 $k=1$, 从而 $k=-3$. □

例 3.0.37 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$. 证明 (1) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆; (2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证明 (1) 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$, 知 $(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$.

(2) 由 (1), 知 $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}$, 因此 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. □

3.0.8 求逆矩阵的方法

1、利用 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 求逆矩阵.

2、利用 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 求逆矩阵.

3、利用初等变换法求逆矩阵, 即

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}_n]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{A}^{-1}],$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \cdots\\ \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \cdots\\ \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}.$$

4、分块矩阵求逆公式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶可逆矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵, 则有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

例 3.0.38 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$, 计算 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

解 计算 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&-4\\8&7\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\2&0\end{bmatrix}.$$

计算 $|\boldsymbol{B}|=2$, 则

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.39 设 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$, 证明 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆, 并求 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$.

解 法 1 因为 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{E}&=(\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})-2\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})-2(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+6\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}\\&=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+6(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}),\end{aligned}$$

因此 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=-6(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$. 又

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),$$

所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$. 在等式 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=-6(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 两边同时左乘 $-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ 可得

$$-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆, 且

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}&=-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\\&=-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\\&=-\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\\&=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

法 2 因为 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$, 所以如果 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 的逆矩阵应为 $a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E}$. 假设 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$, 利用 $\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{E}$, 并整理得

$$(-2a+2b+c)\boldsymbol{A}^2+(2a-2b+2c)\boldsymbol{A}+(4a+2b-2c)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E},$$

因此

$$\begin{cases}-2a+2b+\ \ c=0,\\ \ \ 2a-2b+2c=0,\\ \ \ 4a+2b-2c=1,\end{cases}$$

求得 $a=b=\frac{1}{6},c=0$. 表明满足等式 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$ 的 a,b,c 是存在的, 因此 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})$. □

例 3.0.40 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 法 1 记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$, 且 $\boldsymbol{B}^2=4\boldsymbol{B}$. 此时 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 则

$$\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{B}^2=4\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}),$$

因此 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{E}$, 即 $(\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{bmatrix}.$$

法 2 因为

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}_4]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{3}r_1]{\substack{r_1+r_i\\(i=2,3,4)}}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(i=2,3,4)]{r_i-r_1}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&-1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&-1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(i=2,3,4)]{\substack{r_1+r_i\\-r_i}}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{array}\right],$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.41 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\0&0&0&0&5\\0&0&2&1&0\\0&0&7&4&0\end{bmatrix}$, 证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并求其逆.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:ccc}1&2&0&0&0\\3&4&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&0&5\\0&0&2&1&0\\0&0&7&4&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&5\\2&1&0\\7&4&0\end{bmatrix}$. 再将 $\boldsymbol{B}$ 做如下分块

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc:c}0&0&5\\ \hdashline 2&1&0\\7&4&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\\\boldsymbol{A}_3&\boldsymbol{O}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_2=[5],\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}2&1\\7&4\end{bmatrix}$. 计算 $|\boldsymbol{B}|=(-1)^{1\times 2}|\boldsymbol{A}_2||\boldsymbol{A}_3|=5,|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{B}|=-10$, 所以 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}$ 都可逆, 且

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_3^{-1}\\\boldsymbol{A}_2^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}.$$

计算

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}_1|}\boldsymbol{A}_1^*=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2^{-1}=[\frac{1}{5}],\boldsymbol{A}_3^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}_3|}\boldsymbol{A}_3^*=\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_3^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&0&0&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&4&-1\\0&0&0&-7&2\\0&0&\frac{1}{5}&0&0\end{bmatrix}.\qquad\square$$

3.0.9 求解矩阵方程

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是已知的.

1、若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 有两种方法:

方法 1 因为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 先求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 再作乘法 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 求出 $\boldsymbol{X}$;

方法 2 由 $\boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}]$, 知对分块矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 作初等行变换, 当 $\boldsymbol{A}$ 化成单位矩阵时, $\boldsymbol{B}$ 化成所求矩阵 $\boldsymbol{X}$, 即

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{X}].$$

2、若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆或不是方阵.

记 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_s],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s]$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}&\Leftrightarrow\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s]\\&\Leftrightarrow[\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\ldots,\boldsymbol{AX}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s]\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{AX}_j=\boldsymbol{\beta}_j,\quad j=1,2,\ldots,s.\end{aligned}$$

通过求解线性方程组 $\boldsymbol{AX}_j=\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,\ldots,s)$ 来确定 $\boldsymbol{X}$ 的第 $j(j=1,2,\ldots,s)$ 列.

例 3.0.42 设矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 且 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}_4$, 试不计算 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 直接求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 在等式 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}_4$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$, 右乘 $\boldsymbol{A}^*$, 可得

$$2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^* + |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_4.$$

计算 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 则 $\boldsymbol{X}(2\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{E}_4$. 由于

$$[2\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{E}_4] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[(i=2,3,4)]{r_{i-1}-r_i} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[(i=2,3,4)]{r_{i-1}-r_i} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

所以

$$\boldsymbol{X} = (2\boldsymbol{E}_4 - \boldsymbol{A}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.43 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 满足 $\boldsymbol{AXA}+\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 由题设, 知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B}$. 计算 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 此时 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2 = 9\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{9}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

在等式 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B}$ 两边左乘和右乘 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$, 可得

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} = \frac{1}{81}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.44 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{bmatrix}$. 当 a 为取何值时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解, 有唯一解, 有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

解 记 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$, 则求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$, 当且仅当求解线性方程组 $\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\beta}_i, i=1,2$.

对矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 作初等行变换, 有

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 2 & a & 1 & 1 & a\\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0\end{array}\right].$$

当 $a=-2$ 时,

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6\\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right].$$

因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_2)$, 所以方程组 $\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 无解, 因此方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解.

当 $a\neq 1, a\neq -2$ 时,

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+r_3]{\substack{\frac{1}{a-1}r_3\\ r_2-3r_3}}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & a+2 & 0 & 0 & a-4\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{\frac{1}{a+2}r_2}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right].$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_i)=3(i=1,2)$, 所以方程组 $\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2)$ 均有唯一解, 即唯一解为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & \frac{3a}{a+2}\\ 0 & \frac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

当 $a=1$ 时,

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+r_2]{\frac{1}{3}r_3}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_i)=2<3(i=1,2)$, 所以方程组 $\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2)$ 均有无穷多解. 同解方程组分别为

$$\begin{cases}x_1= 1,\\ x_2=-1-x_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1= 1,\\ y_2=-1-y_3,\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1-k_1 & -1-k_2\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数. □

3.0.10 伴随矩阵

1、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$.

2、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

3、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

4、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则

$$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, & r(\boldsymbol{A})\le n-2. \end{cases}$$

例 3.0.45 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 元列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3]$, 且 $|\boldsymbol{A}|=2$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|$.

解 由题设, 知

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 计算

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=-40.$$

因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}$, 所以

$$|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|^3|\boldsymbol{C}|=-320.$$

□

例 3.0.46 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和, 各元素的余子式之和.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. 计算 $|\boldsymbol{A}_1|=1,|\boldsymbol{A}_2|=-1$, 则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|=-1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 此时

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

而

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}_1|}\boldsymbol{A}_1^*=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}_2|}\boldsymbol{A}_2^*=-\begin{bmatrix}7&-3\\-5&2\end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}-3&1&0&0\\5&-2&0&0\\0&0&7&-3\\0&0&-5&2\end{bmatrix}=[A_{ji}].$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和为 $(-3)+1+5+(-2)+7+(-3)+(-5)+2=2$. 又 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元的余子式和代数余子式相同, $(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)$ 元的余子式和代数余子式为相反数, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的余子式之和为 $(-3)+(-1)+(-5)+(-2)+7+3+5+2=6$. □

例 3.0.47 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$, 计算 $r(\boldsymbol{A}^*)$.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&k-9\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以当 $k=9$ 时, $r(\boldsymbol{A})=1$, 此时 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$; 当 $k\neq 9$ 时, $r(\boldsymbol{A})=2$, 此时 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$. □

3.0.11 初等矩阵

1、n 阶单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵称为 n 阶初等矩阵. n 阶初等矩阵具有 3 中基本形式: $\boldsymbol{E}_n[i(k)],\boldsymbol{E}_n[i+j(k)],\boldsymbol{E}_n[i,j]$.

2、初等矩阵左 (右) 乘 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次相应的初等行 (列) 变换.

(1) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{kr_i}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}_m[i(k)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;

(2) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}_m[i+j(k)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;

(3) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}_m[i,j]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;

(4) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{kc_i}\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n[i(k)]=\boldsymbol{C}$;

(5) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i+kc_j}\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n[j+i(k)]=\boldsymbol{C}$;

(6) $\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n[i,j]=\boldsymbol{C}$.

3、初等矩阵是可逆的, 且初等矩阵的逆矩阵仍是初等矩阵, 即

$$\boldsymbol{E}_n[i(k)]^{-1}=\boldsymbol{E}_n[i(\frac{1}{k})];\quad \boldsymbol{E}_n[i+j(k)]^{-1}=\boldsymbol{E}_n[i+j(-k)];\quad \boldsymbol{E}_n[i,j]^{-1}=\boldsymbol{E}_n[i,j].$$

4、初等矩阵的转置仍是初等矩阵, 即

$$\boldsymbol{E}_n[i(k)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n[i(k)];\quad \boldsymbol{E}_n[i+j(k)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n[j+i(k)];\quad \boldsymbol{E}_n[i,j]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n[i,j].$$

例 3.0.48 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\boldsymbol{B}$, 再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得 $\boldsymbol{C}$, 求满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 由题设, 知 $\boldsymbol{AE}_3[1,2]=\boldsymbol{B}, \boldsymbol{BE}_3[2+3(1)]=\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_3[1,2]\boldsymbol{E}_3[2+3(1)])=\boldsymbol{C}$, 因此

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}_3[1,2]\boldsymbol{E}_3[2+3(1)]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

□

例 3.0.49 计算 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2016}$.

解 因为 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2}=\boldsymbol{E}_3$, $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2}=\boldsymbol{E}_3$, 所以

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2015}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2016}\\=&\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\\7&8&9\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

例 3.0.50 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 行的 -2 倍加到第 3 行得 $\boldsymbol{B}^*$

(B) $\boldsymbol{A}^*$ 的第 3 行的 -2 倍加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}^*$

(C) $\boldsymbol{A}^*$ 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得 $\boldsymbol{B}^*$

(D) $\boldsymbol{A}^*$ 的第 3 列的 -2 倍加到第 1 列得 $\boldsymbol{B}^*$

解 由题设, 知 $\boldsymbol{E}[3+1(2)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}, |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$. 等式 $\boldsymbol{E}[3+1(2)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 两边取逆, 得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}[3+1(2)])^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}[3+1(-2)],$$

因此 $\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}[3+1(-2)]$, 即 $\boldsymbol{B}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{E}[3+1(-2)]$, 故 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 3 列的 -2 倍加到第 1 列得 $\boldsymbol{B}^*$, 即选择 (D). □

例 3.0.51 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于 (　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

解 应选 (D). 因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行和第二行，第一列与第三列后得的, 且 $\boldsymbol{P}_1$ 是单位矩阵交换第一行与第二行后所得的初等矩阵, $\boldsymbol{P}_2$ 是单位矩阵交换第一列与第三列后所得的初等矩阵, 所以 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$, 从而 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$. □

3.0.12 矩阵的秩及其性质

1、**矩阵的秩**

$m\times n$ 非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ 或 $r(\boldsymbol{A})$. 零矩阵的秩规定为零.

2、**矩阵秩的性质**

(1) $0\le r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\le \min\{m,n\}$.

(2) 子矩阵的秩不会超过原矩阵的秩.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式非零, 则 $r(\boldsymbol{A})\ge r$; 若 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式 (如果有) 都等于零, 则 $r(\boldsymbol{A})\le r$.

(4) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$.

(5) $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}), k\ne 0$.

(6) $r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(7) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵, 则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\le r(\boldsymbol{AB})\le \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}.$$

特别地, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 有 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$.

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, 则对任意 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 有

$$r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A}).$$

3、**矩阵的相抵 (或等价)**

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵 (或等价), 记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

(2) 若 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r(\ne 0)$, 则 $\boldsymbol{A}\cong\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$. 称 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形 (等价标准形). 零矩阵的相抵标准形为零矩阵.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(4) 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r(\ne 0)$, 则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \text{ 或 } \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

例 3.0.52 计算 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & a^3\\ 1 & b & b^2 & b^3\\ 1 & c & c^2 & c^3\end{bmatrix}$ 的秩, 其中 a,b,c 三个互不相同的数.

解 因为 $r(\boldsymbol{A}_{3\times 4})\leq 3$, 且 $\boldsymbol{A}$ 有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=V(a,b,c)=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0,$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$. □

例 3.0.53 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵, 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m$, 则 (　　).

(A) $r(\boldsymbol{A})=m, r(\boldsymbol{B})=m$　　(B) $r(\boldsymbol{A})=m, r(\boldsymbol{B})=n$

(C) $r(\boldsymbol{A})=n, r(\boldsymbol{B})=m$　　(D) $r(\boldsymbol{A})=n, r(\boldsymbol{B})=n$

解 应选 (A). 因为 $m=r(\boldsymbol{E}_m)=r(\boldsymbol{AB})\leq r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leq m$, 所以 $r(\boldsymbol{A})=m$. 同理 $r(\boldsymbol{B})=m$. □

例 3.0.54 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=$ (　　).

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq 3$. 又 $r(\boldsymbol{A})\geq 1$, 则 $r(\boldsymbol{B})\leq 2<3$. 而

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 5 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & t-4\end{bmatrix},$$

因此 $t=4$. □

例 3.0.55 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 (　　).

(A) $t=6$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{B})=1$　　(B) $t=6$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{B})=2$

(C) $t\neq 6$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{B})=1$　　(D) $t\neq 6$ 时, 必有 $r(\boldsymbol{B})=2$

解 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leq 3$. 又 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵, 则 $1\leq r(\boldsymbol{A})\leq 2, 1\leq r(\boldsymbol{B})\leq 2$. 若 $t=6$, 则 $r(\boldsymbol{A})=1$, 因此 $r(\boldsymbol{B})=1$ 或 2, 所以排除 (A) 和 (B). 若 $t\neq 6$, 则 $r(\boldsymbol{A})=2$, 因此 $r(\boldsymbol{B})=1$, 所以选择 (C). □

例 3.0.56 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{bmatrix}$, 计算 $r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})$.

解 因为 $|\boldsymbol{A}|=n!\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}))=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$. 而

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

因此 $r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n-1$. □

例 3.0.57 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 元列向量, 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$.

解 记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 因为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$, 所以

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}.$$

此时 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$, 则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leq 3$. 又

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{E})=3,$$

因此 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=3$. 由题设, 知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为非零列向量, 则 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1$, 因此 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1$, 故 $r(\boldsymbol{A})=2$. □

例 3.0.58 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $r(\boldsymbol{A})=r(\neq 0)$. 证明

(1) $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形为幂等矩阵, 即 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$;

(2) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$, 幂等矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$.

证明 (1) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

(2) 因为 $r(\boldsymbol{A})=r$, 所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}).$$

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$. 此时 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^2&=(\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q})\\&=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1})\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}\\&=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^2\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{C}$ 为幂等矩阵.

同理, 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为幂等矩阵. □

例 3.0.59 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $r(\boldsymbol{A}) = r(\neq 0)$. 证明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 的后 $n-r$ 行的元素全为零.

证明 因为 $r(\boldsymbol{A}) = r$, 所以存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

等式两边同时右乘 $\boldsymbol{Q}^{-1}$, 可得

$$\boldsymbol{PA} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{-1}.$$

此时

$$\boldsymbol{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} (\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{X}_1$ 为 $r \times n$ 矩阵, 所以 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 的后 $n-r$ 行的元素全为零. □

参考文献

[1] 工程数学: 线性代数 (第 5 版), 同济大学数学系编. 高等教育出版社, 2007.

[2] 线性代数, 李尚志编著. 高等教育出版社, 2006.