第六章　特征值和特征向量·线性变换

1、设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-2,1,4$，则下列矩阵中可逆的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　　(B) $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　　(C) $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$　　(D) $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$

2、设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^*$ 的所有特征值为 $-2,-1,1,4$，则下列矩阵中可逆的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$　　(C) $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$　　(D) $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$

3、设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，且 $|\boldsymbol{A}|=-6,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为______，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为________.

4、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1 和 2，且齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，$|\boldsymbol{B}|$ 及 $\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$.

5、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 有 3 个实特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个特征向量都线性相关，则 $a=$____，$\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为__________.

6、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $1,2,3$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,2,k]^{\mathrm{T}}$，则 k 的取值范围是_____________.

7、设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

8、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{S}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，那么在下列矩阵中

①$\boldsymbol{A}^{-1}$　②$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　③$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$　④$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$　⑤$\boldsymbol{A}^*$

$\boldsymbol{\alpha}$ 肯定是其特征向量的矩阵有（　　）. 个.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式 $|\boldsymbol{A}|=-1$，又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，试求常数 a,b,c 的值以及 λ_0.

10、设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且 $|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|4\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|5\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|$ $=$__________.

11、设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 元列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为________.

12、设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ 的特征向量，而 $\boldsymbol{S}=[3\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,-2\boldsymbol{X}_1]$，则 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=$（　　）.

(A) $\mathrm{diag}(1,2,3)$　　(B) $\mathrm{diag}(6,3,-2)$　　(C) $\mathrm{diag}(2,3,1)$　　(D) $\mathrm{diag}(3,1,-2)$

13、设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(2,1,1)$，则可取矩阵 $\boldsymbol{S}$ 为（　　）.

(A) $[3\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,-2\boldsymbol{X}_1]$　　(B) $[-2\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_1,5\boldsymbol{X}_2]$

(C) $[\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2,3\boldsymbol{X}_1-2\boldsymbol{X}_2,4\boldsymbol{X}_3]$　　(D) $[5\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_3,-2\boldsymbol{X}_1]$

14、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

15、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 有 3 个不同特征值，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明 $r(\boldsymbol{A})=2$；

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

16、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $0,1,-1$，其对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{X}_1=[0,1,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=[1,1,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_3=[1,2,0]^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{100}$.

17、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&x\\1&0&0\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 x 满足的条件为________.

18、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&1\\b&4&c\\d&e&5\end{bmatrix}$ 的特征值是 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=2$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，求参数 a,b 的值.

19、设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}k\\-2\\3\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-1\\-2&-3&2\\3&6&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 k 的值及特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值；

(2) 判断 $\boldsymbol{A}$ 可否对角化？

20、设 n 元向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$，记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 证明(1) $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$；(2) $\boldsymbol{A}$ 可对角化；(3) $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $2,0(n-1$ 重根$)$.

21、下列矩阵中不与对角矩阵相似的是（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$

22、设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵，且 n 元列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则矩阵 $(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ_0 的特征向量是（　　）.

(A) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$　(B) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$　(C) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$　(D) $(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

23、设$\boldsymbol{\alpha}_1=[a,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,b,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[c,1,2]^{\mathrm{T}}$是实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的三个不同特征值所对应的特征向量，则$a=$______，$b=$______，$c=$______.

24、设a是n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的k重特征值，则$r(a\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{A})=$________.

25、设$\boldsymbol{A}$为4阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若$\boldsymbol{A}$的秩为3，则$\boldsymbol{A}$相似于(　　).

(A) $\mathrm{diag}(1,1,1,0)$　　(B) $\mathrm{diag}(1,1,-1,0)$

(C) $\mathrm{diag}(1,-1,-1,0)$　　(D) $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$

26、设矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，已知$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$_______.

27、设$\boldsymbol{\alpha}$为n元单位实列向量，$\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵，则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆

28、已知2阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征向量为$\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$，且$|\boldsymbol{A}|<0$，则(　　)也必为$\boldsymbol{A}$的特征向量.

(A) $k\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$　　(B) $k\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},k\neq 0$

(C) $k_1\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},k_1\neq 0$且$k_2\neq 0$　　(D) $k_1\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},k_1,k_2$不同时为零

29、设$\boldsymbol{A}$是秩为r的$m\times n$实矩阵，则矩阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$的非零特征值的个数为(　　).

(A) r　　(B) $n-r$　　(C) $m-r$　　(D) 无法确定

30、与实对称矩阵$\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$正交相似的矩阵是(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}0&1\\1&4\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1\\4&3\end{bmatrix}$

31、设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的的每一行元素之和均为5，且$r(\boldsymbol{A})=1$，求$\boldsymbol{A}$的全部特征值和特征向量.

32、设二维线性空间V上的线性变换σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$下的矩阵为$\begin{bmatrix}3&6\\1&2\end{bmatrix}$，则$\sigma$在基$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_1$下的矩阵为_____.

33、判断下列哪些法则σ是线性变换.

(1) 在$\mathbf{R}^{n\times n}$中，取定两个元素$\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，对于任意$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，规定$\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$；

(2) 在线性空间V中，取一固定元素$\boldsymbol{\alpha}_0$，对于任意$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，规定$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0$；

(3) 对 $\mathbf{R}^2$ 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=[x,y]^{\mathrm{T}}$，规定 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[x^2-y^2,2xy]^{\mathrm{T}}$.

(4) 对 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 中任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，规定 $\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(5) 对 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 中任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，规定 $\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$.

(6) 对 $\mathbf{R}^{2\times 3}$ 中任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，规定 $\sigma(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\boldsymbol{A}$.

34、已知 σ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个线性变换，规定

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[2y+z,x-4y,3x]^{\mathrm{T}},\forall\boldsymbol{\alpha}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3.$$

(1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$；

(3) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=[1,-2,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[2,-1,-2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[2,2,1]^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{C}$.

35、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性空间 V 的一个基，σ 是 V 上的一个线性变换，且 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&2&1\\1&-4&0\\3&0&0\end{bmatrix}$.

(1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$；

(3) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{C}$.

36、设 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$；

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的两个基，定义 $\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{2\times 2}$.

(1) 试证 σ 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换；

(2) 求由基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 到基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{S}$；

(3) 求 σ 在基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 下的矩阵 $\boldsymbol{M}$.

37、设 σ 是线性空间 $\mathbf{R}[x]_2$ 上的一个线性变换，且对 $\forall a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathbf{R}[x]_2$，有

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)+(a_1+a_2)x+(a_2+a_0)x^2.$$

(1) 求 σ 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 σ 在基 $2+3x-x^2,-1-x+x^2,-1-2x+x^2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$；

(3) 求 σ 在基 $1+3x,1+2x,x^2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{C}$.

参考答案

1、应选(B).(提示：λ_0是$\boldsymbol{A}$的特征值$\Leftrightarrow|\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}|=0$)

2、应选(A).(提示：因为$|\boldsymbol{A}^*|=8=|\boldsymbol{A}|^3$，所以$|\boldsymbol{A}|=2$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$-1,-2,2,\frac{1}{2}$)

3、$1,2,-3$；$-6,1,6$.

4、$2,3,3$；18；8.

5、$a=1$，$2,2,2$.

6、$k\neq 1$.(提示：方阵$\boldsymbol{A}$的属于互异的特征值的特征向量线性无关)

7、-1.

8、应选(C)(①③⑤正确，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$具有相同的特征值，但特征向量未必相同).

9、解 因为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(|\boldsymbol{A}|\lambda_0^{-1})\boldsymbol{\alpha}$，则

$$\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=(|\boldsymbol{A}|\lambda_0^{-1})\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\lambda_0^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} 1-a+c=\lambda_0^{-1}, & (1) \\ -2-b=\lambda_0^{-1}, & (2) \\ -1+c-a=-\lambda_0^{-1}. & (3) \end{cases}$$

式(1)和式(3)相加,可得$a=c$．将$a=c$代入到式(1),得$\lambda_0=1$．再将$\lambda_0=1$代入到式(2),得$b=-3$．此时

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+ac_1}\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 2 & -3 & 3+2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a-3=-1,$$

则$a=2$，因此$c=2$，故$a=c=2,\ b=-3,\ \lambda_0=-1$.

10、24.

11、解 因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2$，所以

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

记$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2],\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. 因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，所以$r(\boldsymbol{S})=2$，因此$\boldsymbol{S}$可逆，故$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}$，即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，从而$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$具有相同的特征值. 计算

$$|\lambda\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3),$$

则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

12、应选(C).

13、应选(B).

14、解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以，因此

$$3+a=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=2+b\Rightarrow a+1=b,$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}=|\boldsymbol{B}|\Rightarrow 2a-3=b,$$

求得 $a=4,b=5$.

(2) 因为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}\overset{r_3+r_2}{\underset{c_2-c_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda&-5&3\\1&\lambda-6&3\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

对于 $\lambda_1=1$，求解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为 $x_1=2x_2-3x_3$，求得一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-3,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_3=5$，求解 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=-x_3,\end{cases}$ 求得一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,5)$.

15、(1)证 因为 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，因此 $r(\boldsymbol{A})$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数. 又 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2]\xrightarrow{\text{列}}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{0}]=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{0}]=\boldsymbol{C},$$

因此 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{B})\le 2<3$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有零特征值. 此时 $\boldsymbol{A}$ 的其他两个特征值是互异的、且非零的，则 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(2) 解 因为 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，所以 $[1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解.由

(1)，知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有 $3-r(\boldsymbol{A})=1$ 个解. 又 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因此 $[1,2,-1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解，故 $[1,2,-1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[1,2,-1]^{\mathrm{T}},\forall k\in\mathbf{P}.$$

16、解 记 $\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_1\right]$，则 $\boldsymbol{S}$ 可逆，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(1,-1,0)$. 因为

$$\left[\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\-1&0&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_2]{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&-2&1\\0&1&0&-3&2&-1\\0&0&1&2&-1&1\end{array}\right],$$

所以 $\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}4&-2&1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{bmatrix}$. 等式 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(1,-1,0)$ 两边同时左乘 $\boldsymbol{S}$，右乘 $\boldsymbol{S}^{-1}$，可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\mathrm{diag}(1,-1,0)\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-2&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-4&2\\10&-6&3\\-4&2&-1\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(1,-1,0)$，知 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{S}=(\mathrm{diag}(1,-1,0))^{100}=\mathrm{diag}(1,1,0)$，则

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{S}\mathrm{diag}(1,1,0)\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2&1\\-3&2&-1\\2&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&-1\\-4&2&-1\end{bmatrix}.$$

17、$x=-2$.

18、解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=2$，所以 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a+9=10$，则 $a=1$.

又 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则二重根 2 的几何重数等于代数重数 2，因此 $3-r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2$，即 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1$. 此时 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\b&2&c\\d&e&3\end{bmatrix}$ 的二阶子式 $\begin{vmatrix}-1&1\\b&2\end{vmatrix}=-2+b=0$，则 $b=2$.

19、解 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，因此

$$\begin{bmatrix}2&2&-1\\-2&-3&2\\3&6&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\-2\\3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}k\\-2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2k-7=\lambda k, & (1)\\-2k+12=-2\lambda, & (2)\\3k-18=3\lambda. & (3)\end{cases}$$

由式(2)，知 $\lambda=k-6$，将其代入式(1)，得 $k^2-8k+7=0$，则 $k=1$ 或 $k=7$.

当$k=1$时，$\lambda=-5$；当$k=7$时，$\lambda=1$.

(2) 因为$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=-3=-5+1+\lambda_3$，所以$\lambda_3=1$，因此特征值1是矩阵$\boldsymbol{A}$的二重根. 对于二重根1，因为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以1的几何重数$=3-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2=1$的代数重数，因此$\boldsymbol{A}$可对角化.

20、解 (1) 因为$2=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，所以

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=2(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=2\boldsymbol{A}.$$

(2) 由(1)，知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\le n$. 又

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ge r(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{E})=n,$$

则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n$.

因为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=2$，所以$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$均为非零列向量，则$r(\boldsymbol{A})\ge1$. 又

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\le r(\boldsymbol{\beta})=1,$$

则$r(\boldsymbol{A})=1$，因此$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n-1$，故0和2都是$\boldsymbol{A}$的特征值. 此时

$$0\text{的几何重数}=n-r(\boldsymbol{A})=n-1,\quad 2\text{的几何重数}=n-r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1,$$

则$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量，因此$\boldsymbol{A}$可对角化.

(3) 由$\boldsymbol{A}$可对角化，知

$$0\text{的代数重数}=0\text{的几何重数}=n-1,\quad 2\text{的代数重数}=2\text{的几何重数}=1,$$

则$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$2,0(n-1\text{重根})$.

21、应选(B).

22、应选(B). 记$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}$因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$. 两边同时右乘$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，可得

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}).$$

又$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$为非零向量，则$\boldsymbol{B}$属于特征值$\lambda_0$的特征向量为$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

23、$a=1,b=-4,c=2$.

24、$n-k$.

25、解 因为$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以$\boldsymbol{A}$的特征值只能是0或$-1$. 又$\boldsymbol{A}$的秩为3，则$\boldsymbol{A}$的所有特征值为$-1,-1,-1,0$，因此实对称矩阵$\boldsymbol{A}$相似于$\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$，故选择(D).

26、解 因为$\boldsymbol{B}$为实对称矩阵，所以$\boldsymbol{B}$可对角化. 又$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则$\boldsymbol{A}$也可对角化，进而$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$均可对角化. 计算$\boldsymbol{B}$的特征值为$1,1,-1$，则$\boldsymbol{A}$的特征值也为$1,1,-1$，因此$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$的特征值为$-1,-1,-3$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的特征值为$0,0,-2$，故

$$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\text{的非零特征值的个数}=3,$$

$$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\text{的非零特征值的个数}=1,$$

从而$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=4$.

27、解 记$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，因此$r(\boldsymbol{A})$等于$\boldsymbol{A}$的非零特征值的个数. 由

$$A\alpha=(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha=\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)\alpha=\alpha,$$

知1为A的一个特征值，且对应的特征向量为α，则A的所有特征值为$1,0(n-1$重根$)$，因此矩阵$E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$的特征值为$0,1(n-1$重根$)$，故$E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$不可逆，从而选择(A). 而$E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$的特征值为$2,1(n-1$重根$)$，则$E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$可逆. (C)(D)选项类似的方法判断是可逆的.

28、应选(B). (提示：因为$|A|<0$，所以A的特征值互异. 实对称矩阵A的属于互异的特征值的特征向量正交，与$\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$正交的特征向量为$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，因此$\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$为$A$的对应于另一个特征值的线性无关的特征向量)

29、应选(A). (提示：n阶方阵$A^{\mathrm{T}}A$为实对称矩阵，且$r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$)

30、解 与实对称矩阵$\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$正交相似的矩阵应为实对称矩阵，所以排除(D). 又$\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$的行列式为$-1$，迹为$4$，而$\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$的行列式为$2$，$\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}$的迹为$6$，因此$\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}$不相似，故也不正交相似，排除(A)和(C). 故选择(B).

31、$5,0,0$，对应于特征值5的所有特征向量为$k_1[1,1,1]^{\mathrm{T}}$, 其中$\forall k_1\in\mathbf{P}, k_1\neq 0$；对应于特征值$0$的所有特征向量为$k_2[1,-1,0]^{\mathrm{T}}+k_3[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$, 其中$\forall k_2,k_3\in\mathbf{P}, k_2,k_3$不全为零.

32、$\begin{bmatrix}2&6\\1&3\end{bmatrix}$.

33、(1) 任取$X,Y\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$k\in\mathbf{R}$，有

$$\sigma(X+Y)=B(X+Y)C=BXC+BYC=\sigma(X)+\sigma(Y);$$
$$\sigma(kX)=B(kX)C=k(BXC)=k\sigma(X),$$

则σ为$\mathbf{R}^{n\times n}$上的线性变换.

(2) 当$\alpha_0\neq\mathbf{0}$时，σ不是V上的线性变换；当$\alpha_0=\mathbf{0}$时，σ是V上的线性变换.

(3) 取$\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, k=2$，则

$$\sigma(2\alpha)=\sigma\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix},\ 2\sigma(\alpha)=2\sigma\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},$$

因此$\sigma(2\alpha)\neq 2\sigma(\alpha)$，故$\sigma$不是线性变换.

(4) σ是线性映射，不是线性变换.

(5) 任取$A\in\mathbf{R}^{2\times 3}$，则

$$\sigma(2\boldsymbol{A}) = 2\boldsymbol{A} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$2\sigma(\boldsymbol{A}) = 2\left(\boldsymbol{A} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\right) = 2\boldsymbol{A} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix},$$

因此$\sigma(2\boldsymbol{A}) \neq 2\sigma(\boldsymbol{A})$，故$\sigma$不是线性变换.

（6） σ是线性变换.

34、(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$； (3) $\boldsymbol{C} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -14 & -4 & 29 \\ -19 & -26 & 4 \\ 17 & 10 & 4 \end{bmatrix}$.

35、与33题的答案相同.

36、(1) 略； (2) $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$； (3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

37、(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 9 & -4 & -5 \end{bmatrix}$； (3) $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 9 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.