2016 ～ 2017 学年第一学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》 （A 卷　共 4 页）

（考试时间：2016 年 12 月 23 日）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、子空间$W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$的维数为________________.

2、设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是它的三个解向量，且$\boldsymbol{\eta}_1=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，则该方程组的通解为________________.

3、向量$\boldsymbol{\alpha}_1=[7,5,k]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,-1,-8]^{\mathrm{T}}$分别为实对阵矩阵$\boldsymbol{A}$属于互异特征值$\lambda_1,\lambda_2\ (\lambda_1\neq\lambda_2)$的特征向量，则参数$k$的值为________________.

4、设 2 阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$|\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_2|=0$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{A}^{-1}|=$________________.

5、设 3 阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为 2，且满足$\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}$，则 3 元实二次型$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$通过正交线性替换可化为标准形________________.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶方阵，且$\boldsymbol{A}$可逆，则下列叙述错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征值必为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的特征值之和；

(B) $\boldsymbol{AB}$相似于$\boldsymbol{BA}$；

(C) $\boldsymbol{AB}$与$\boldsymbol{BA}$的特征多项式相同；

(D) 若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则$\boldsymbol{B}$可逆.

2、设矩阵$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & a & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & b \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$相似，则(　　).

(A) $a=2,b=0$　　(B) $a=2,b=1$　　(C) $a=3,b=0$　　(D) $a=3,b=1$

3、设非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解，$\tilde{\boldsymbol{A}}$为增广矩阵，则下列叙述错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关　　(B) $\boldsymbol{A}$的列秩与$\tilde{\boldsymbol{A}}$的列秩相等

(C) $\tilde{\boldsymbol{A}}$的列向量组线性无关　　(D) $\boldsymbol{A}$的列向量组与$\tilde{\boldsymbol{A}}$的列向量组等价

4、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同的充分必要条件是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似　　(B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$具有相同的特征值

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等　　　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的正、负惯性指数

5、下列结论中，一定正确的是(　　).

① 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 有 n 个正特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵；

② 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶正定矩阵，则对任意正实数 a，b，矩阵 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 正定；

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则它的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵；

④ 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵.

(A) ①和②　　(B) ②和③　　(C) ②和④　　(D) ③和④

三、(共 18 分，其中第 1 题 7 分，第 2 题 11 分)

1、求线性空间 $\mathbb{R}[x]_3$ 中的向量组(I)：$f_1(x)=1+x^2+x^3$，$f_2(x)=-1+2x+7x^2+9x^3$，$f_3(x)=-2+x-x^2$, $f_4(x)=2x+6x^2+8x^3$, $f_5(x)=x+x^3$ 的秩和极大无关组.

2、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&k\\0&0&-1\\0&2&3\end{bmatrix}$. (1) 问参数 k 取何值时，$\boldsymbol{A}$ 可对角化？(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时，计算 $\boldsymbol{A}^{10}$.

四、(12 分) 讨论参数 s,t 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+3x_4=-1,\\ -x_1-2x_3-x_4=1,\\ 2x_1-2x_2+5x_3+7x_4=-3,\\ -2x_1+5x_2+7x_3+s\,x_4=t-9 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解? 在有解时求其通解.

五、(共 10 分) 设向量组(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和(II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别是 3 维线性空间 V 的两个基，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-2\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$.

(1) 求由基(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基(II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

(2) 求 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

六、(共 10 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义对应法则 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX},\forall\boldsymbol{X}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}.$$

(1) 证明 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换；

(2) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1=[2,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[0,4,6]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[0,3,5]^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵.

七、(共 14 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 求一个正交线性替换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出标准形；

（2）求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

八、（6 分）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别为 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.