2013–2014 学年第二学期期末考试试卷（A）卷 参考答案

一、填空题

1、$-\frac{1}{8}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})$; 2、$k[1,1,1]^{\mathrm{T}}, \forall k \in \boldsymbol{P}$; 3、2; 4、3, −1; 5、3

二、单项选择题 **DACCC**

三、

1、**解**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W} &= \left\{ a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{R} \right\} \\ &= L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=[0,2,4]^{\mathrm{T}}$.

由 $[\boldsymbol{\alpha}_1.\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3] = \begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&2\\3&3&4\end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&6&4\end{bmatrix} \xrightarrow{r} \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$,

可得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2, 故 $\dim\boldsymbol{W}=2$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{W}$ 的一个基.

(另:$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 $\boldsymbol{W}$ 的一个基.)

2、**解** 设 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 μ 的特征向量, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 对应的特征值 $\lambda_0=\mu+1$, 且 $\boldsymbol{AX}=\mu\boldsymbol{X}$, 即

$$\begin{bmatrix}a&-1&b\\4&-3&2\\1-b&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

得方程组 $\begin{cases}a-1-b=\mu,\\ \mu=-1,\\ 1-b+a=-\mu.\end{cases}$ 解得 $\mu=-1, a=b$.

故 $\lambda_0=\mu+1=0$.

又 $1=|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}a&-1&a\\4&-3&2\\1-a&0&-a\end{vmatrix} = a-2$, 得 $a=b=3$.

四、**解** 将方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 用初等行变换化成行阶梯形：

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\1&1&-1&3&3\\3&-2&a+2&-1&b\\1&3&-7&a+1&5\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&2&-6&4&2\\0&1&a-13&2&b-3\\0&4&-12&a+2&4\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&1&-3&2&1\\0&0&a-10&0&b-4\\0&0&0&a-6&0\end{array}\right]$$

(1) 当 $a \neq 10$ 且 $a \neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 4$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $a = 10$ 且 $b \neq 4$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = 3, r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 4, r(\boldsymbol{A}) \neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 方程组无解;

(3) 当 $a = 10$ 且 $b = 4$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解.

此时, 将 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 进一步化成行简化阶梯形:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

特解为 $\boldsymbol{X}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 基础解系为 $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + k\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数.}$$

(或 同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 2, \\ x_2 = 3x_3 + 1, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

通解为 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k$ 为任意常数.)

(4) 当 $a = 6$ 时,$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解.

此时, 将 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 进一步化成行简化阶梯形:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4-\frac{3b}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\frac{b}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

方程组的通解为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_0 + k\boldsymbol{\eta} = [\frac{b}{2}, 4 - \frac{3b}{4}, 1 - \frac{b}{4}, 0]^{\mathrm{T}} + k[-1, -2, 0, 1]^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数.}$$

[**解法二**] $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & a+2 & -1 \\ 1 & 3 & -7 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & a-13 & 2 \\ 1 & 4 & -12 & a+2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 1 & a-13 & 2 \\ 4 & -12 & a+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & a-10 & 0 \\ 4 & 0 & a-6 \end{vmatrix}=2(a-10)(a-6).$$

(1) 当 $a \neq 10$ 且 $a \neq 6$ 时,$|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 方程组有唯一解;

(2) 当 $a=10$ 时,

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & -1 & b \\ 1 & 3 & -7 & 11 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & b-3 \\ 0 & 4 & -12 & 12 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right].$$

① 当 $b \neq 4$ 时,$r(\boldsymbol{A})=3, r(\tilde{\boldsymbol{A}})=4, r(\boldsymbol{A}) \neq r(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 方程组无解;

② 当 $b=4$ 时,$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$, 方程组有无穷多解.

此时, 将 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 进一步化成行简化阶梯形:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

特解为 $\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

方程组的通解为

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, k 为任意常数.

(或 同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2x_3+2, \\ x_2=3x_3+1, \\ x_4=0. \end{cases}$

通解为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, k 为任意常数.)

(4) 当 $a=6$ 时,

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\1&1&-1&3&3\\3&-2&8&-1&b\\1&3&-7&7&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&1&-3&2&1\\0&0&-4&0&b-4\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&\frac{b}{2}\\0&1&0&2&4-\frac{3b}{4}\\0&0&1&0&1-\frac{b}{4}\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$, 方程组有无穷多解.

方程组的通解为

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k\boldsymbol{\eta}=[\frac{b}{2},4-\frac{3b}{4},1-\frac{b}{4},0]^{\mathrm{T}}+k[-1,-2,0,1]^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数.

五、**解** (1) 由题设有 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1]\boldsymbol{S}$.

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1]^{-1}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\boldsymbol{E}(1,3)\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

(2) 由题意得 $\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1,\\\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1,\\\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}=0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1,\end{cases}$

于是线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 (I) 下的矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(3)**法一** $\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=[2,2,2]^{\mathrm{T}},\\\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2,0]^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=[2,0,0]^{\mathrm{T}}.\end{cases}$

由矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 (II) 下的矩阵得

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{N}.$$

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)].$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2),\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&2&0&2\\1&-1&1&2&2&0\\1&1&-1&2&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&0\\0&1&0&0&-1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right].$$

求得 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 (II) 下的矩阵为 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(3)**法二** $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$

(4) $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}.$

设 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 在基 (II) 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$, 则

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$, 即

$\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$

$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&4\\1&-1&1&2\\1&1&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{array}\right]$

解得 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$

六、**解** $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9.$

$|\lambda\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&4\\1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5),$

$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$, 故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

$\lambda_1=1$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=[2,1]^{\mathrm{T}}$,

$\lambda_2=5$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{X}_2=[-2,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 线性无关.

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix}2&-2\\1&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{S}$ 为可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\Lambda=\mathrm{diag}(1,5)$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\Lambda\boldsymbol{S}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{S}\Lambda^{10}\boldsymbol{S}^{-1},\quad \boldsymbol{A}^9=\boldsymbol{S}\Lambda^9\boldsymbol{S}^{-1}.$

$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^9=\boldsymbol{S}(\Lambda^{10}-5\Lambda^9)\boldsymbol{S}^{-1}$

$=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}2&-2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&\\&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-4\\-1&-2\end{bmatrix}.$

七、**解** 所给二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&-2\\2&-2&3\end{bmatrix}.$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&2\\-2&2&\lambda-3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-5 & \lambda-5 & 0\\ -2 & \lambda-3 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 2\\ -2 & 4 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda-5)=(\lambda-5)^2(\lambda+1),$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5$(二重),$\lambda_2=-1$.

对 $\lambda_1=5$(二重), 解 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$.

$$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得正交的两个特征向量 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

对 $\lambda_2=-1$, 解 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$.

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -2\\ -2 & -4 & 2\\ -2 & 2 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{X}_1}{|\boldsymbol{X}_1|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{X}_2}{|\boldsymbol{X}_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{X}_3}{|\boldsymbol{X}_3|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

令矩阵 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(5,5,-1)$.

故二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$, 化为标准形 $g(\boldsymbol{Y})=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

另解 对 $\lambda_1=5$(二重), 解 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$.

$$5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得两个线性无关特征向量 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

将 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 正交化,

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{X}_2-\frac{(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

对 $\lambda_2=-1$, 解 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4&-2&-2\\-2&-4&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$.

单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{X}_3}{|\boldsymbol{X}_3|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

令矩阵 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(5,5,-1)$.

从而二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形 $g(y_1,y_2,y_3)=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

八、**证明**　只须证 $r(\boldsymbol{A})=m$.

法一　由线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 对任意 m 元列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 总有解可知, 对于 $\boldsymbol{\varepsilon}_i\in\mathbb{R}^m(i=1,2,\ldots,m)$, 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 有解, 记为 $\boldsymbol{X}_i(i=1,2,\ldots,m)$. 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i(i=1,2,\ldots,m)$. 由此可得

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_m)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m)=E_m$.

因此 $m=r(\boldsymbol{E}_m)=r(\boldsymbol{A}(X_1,X_2,\cdots,X_m))\le m$, 故 $r(\boldsymbol{A})=m$.

法二　对 $\boldsymbol{A}$ 列分块,$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n]$. 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

由对任意 m 元列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解可知 $\forall\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^m$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

特别地, 取 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}_i(i=1,2,\ldots,m)$, 可知向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 可由向量组

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

又显然向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 也可由向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ 线性表示, 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ 等价.

因此 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = m$.