学院________专业________年级________学号________

2016～2017 学年第 2 学期期末考试试卷

《概率论与数理统计》（A 卷　共 4 页）

（考试时间：2017 年 5 月 19 日）

题号	一	二	三 1	三 2	三 3	三 4	三 5	三 6	成绩	核分人签字
得分										

一、填空题（共 16 分，每题 2 分）

1. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=Ae^{-|x|}, -\infty<x<+\infty$，则 $A=$ ___1/2___。

2. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，$\rho_{XY}=$ ___-1___。

3. 设某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布，现随机取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，则这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率是 ___$1-\Phi(0.8)$___。（答案用标准正态分布的分布函数表示）

4. 设 A、B 为随机事件，且 P(A)=0.4，P(B)=0.3，P(A∪B)=0.5，则 $P(A\bar{B})=$ ___0.2___。

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & 0.3 & 0.7 \end{array}$，$\begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline P & 0.6 & 0.4 \end{array}$，则 P{X=Y}= ___0.46___。

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，且 X 与 Y 相互独立，则

$$E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2\right]= \underline{(n_1+n_2-2)\sigma^2}.$$

7. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 未知，则 σ^2 的置信水平为 0.99 的置信上限为 ___$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(0.99)}$___。

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2\ (i=1,2,\cdots)$，那么 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 ___$\sigma^2+\mu^2$___。

二、选择题（共 10 分，每题 2 分）

1. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 Z_α 满足 $P\{X>Z_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（~~A~~ D）

A. $Z_{\frac{\alpha}{2}}$　　B. $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　C. $Z_{1-\alpha}$　　D. $Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

2. 设 X,Y 的方差存在，且不等于 0，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X,Y（ B ）。

A. 不相关的充分条件，但不是必要条件　　B. 独立的必要条件，但不是充分条件

C. 不相关的必要条件，但不是充分条件　　D. 独立的充分必要条件

3. 设函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 $F(x)$（ C ）。

A. 是离散型随机变量的分布函数　　B. 不是随机变量的分布函数

C. 是随机变量的分布函数　　D. 是连续型随机变量的分布函数

4. 如果 $Y=aX+b(a\neq 0)$ 是随机变量 X 的任一线性函数，则下面命题不一定成立的是（ B

A. 如果 X 是连续型随机变量，则 Y 也是连续型随机变量

B. 如果 X 是泊松分布，则 Y 也是泊松分布

C. 如果 X 是均匀分布，则 Y 也是均匀分布

D. 如果 X 是正态分布，则 Y 也是正态分布

5. 下列说法错误的是（ A ）

A. 概率为 0 的事件是不可能事件　　B. 不可能事件的概率为 0

C. 若 $P(A)=0$，则 A 与事件 B 相互独立　　D. 若 $P(A)=1$，则 A 与事件 B 相互独

学院________ 专业________ ____班 年级____ 学号________

三、解答题

1、（本题 12 分）设随机变量(X,Y)的联合分布律为：

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.3
1	0.1	0.2	0.1

求：$D(X-2Y)$.

$D(X-2Y)=D(X)-4\,Cov(X,Y)+4D(Y)$

$E(X)=1\times0.3+2\times0.3+3\times0.4=2.1$

$E(X^2)=1\times0.3+4\times0.3+9\times0.4=5.1$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.69$

$E(Y)=-1\times0.6+1\times0.4=-0.2$

$E(Y^2)=1\times0.6+1\times0.4=1$

$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1-0.04=0.96$

$E(XY)=-0.2-0.2-0.9+0.1+0.4+0.3=-0.5$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-0.5-2.1\times(-0.2)=-0.08$

$D(X-2Y)=0.69-4\times(-0.08)+4\times0.96=4.85$

法2

$Z=X-2Y$	-1	0	1	3	4	5
P_Z	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.3

$E(Z)=2.5$

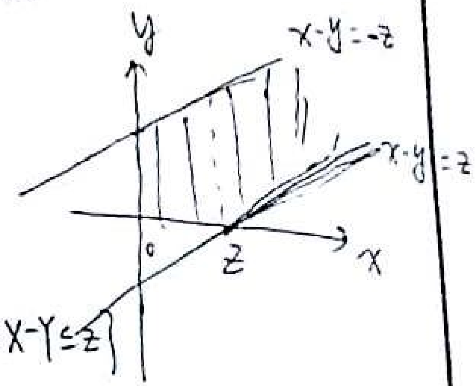
$E(Z^2)=11.1$

$D(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)$
$=4.85$

2、（本题 12 分）假设二维随机变量（X, Y）的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求 $Z=|X-Y|$ 的概率密度函数。



解：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}$
$=P\{|X-Y|\le z\}=P\{-z\le X-Y\le z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $z\ge0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{x+z}e^{-(x+y)}dy+\int_z^{+\infty}dx\int_{x-z}^{x+z}e^{-(x+y)}dy$

$=1-e^{-z}$

$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z\ge0\\ 0 & z<0\end{cases}$

3、（本题10分）

将两信息分别编码为A和B传递出去，接收站收到时，A被误收做B的概率为0.02，而B被误收做A的概率为0.01，信息A与信息B传送的频繁程度为2:1，若接受站收到的信息是A，问原发信息是A的概率是多少？

解：设 $A_1=\{$发送编码为A$\}$

$B_1=\{$接收信息是A$\}$

$P(A_1)=\frac{2}{3}$，$P(\bar{A}_1)=\frac{1}{3}$，$P(\bar{B}_1|A_1)=0.02$，$P(B_1|\bar{A}_1)=0.01$

$$P\{A_1|B_1\}=\frac{P(A_1B_1)}{P(B_1)}$$

$$=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(A_1)P(B_1|A_1)+P(\bar{A}_1)P(B_1|\bar{A}_1)}$$

$$=\frac{2/3\times 0.98}{2/3\times 0.98+1/3\times 0.01}=\frac{196}{197}.$$

(2) 当 $0<y<1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}2xy^{-2}, & 0<x<y\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

当 $y\notin(0,1)$ 时，$f_{X|Y}(x|y)$ 无意义

当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}2y(1-x^2)^{-1}, & x<y<1\\ 0, & \text{否}\end{cases}$

当 $x\notin(0,1)$ 时，$f_{Y|X}(y|x)$ 无意义.

(3). ∵ $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}16x(1-x^2)y^3, & 0<x<1,0<y<1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\neq f(x,y)$

∴ X与Y不独立.

4、（本题16分）

设(X,Y)的联合概率密度函数为

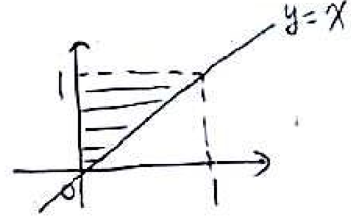
$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求(1) $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(2) $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$;

(3)判断X与Y是否独立;

(4)判断X与Y是否相关。



解：(1) $f_X(x)=\int_R f(x,y)dy$

$=\begin{cases}\int_x^1 8xy\,dy & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0<x<1\\ 0. & \text{否}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_R f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 8xy\,dx & 0<y<1\\ 0, & \text{否}\end{cases}=\begin{cases}4y^3, & 0<y<1\\ 0, & \text{否}\end{cases}$

(4) $E(X)=\int_0^1 x f_X(x)dx$

$=\int_0^1 x\cdot 4x(1-x^2)dx=\frac{8}{15}$

$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 4y^3dy=\frac{4}{5}$

$E(XY)=\int_0^1 dy\int_0^y xy\cdot 8xy\,dx=\int_0^1 \ \ 4/9$

∵ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}\neq 0$

∴ X与Y不相关.

______班　　年级______　学号______

5.（本题 12 分）

从某锌矿的东、西两支矿脉中，各抽取样本容量都为 18 的样本进行测试，得样本含锌平均数及样本方差分别如下：

东支：$\bar{x}=0.23$　$s_1^2=0.23$　　西支：$\bar{y}=0.27$　$s_2^2=0.27$

若东西两支矿脉的含锌量都服从正态分布，在显著性水平 $\alpha=0.01$ 的条件下，

(1) 是否可以认为两支矿脉含锌量的总体方差相等？

(2) 两支矿脉含锌量的平均值是否可以看作一样？

(附：$Z_{0.01}=2.33; Z_{0.005}=2.58;$
$F_{18,18}(0.005)=3.68; F_{18,18}(0.01)=3.23; F_{17,17}(0.005)=3.79; F_{17,17}(0.01)=3.31;$
$t_{36}(0.01)=2.4345; t_{36}(0.005)=2.7195; t_{34}(0.01)=2.4411; t_{34}(0.005)=2.7284;$)

解：1) $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$　　$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ 也 } F_{17,17}.$$

$$W=\{(\ \ ): \quad F \geq F_{17,17}(0.005) \text{ or } F \leq F_{17,17}(0.995)\}$$

$$F_{17,17}(0.005)=3.79, \quad F_{17,17}(0.995)=\frac{1}{F_{17,17}(0.005)}=\frac{1}{3.79}=0.26$$

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{0.23}{0.27}=\frac{23}{27}=0.85$$

$\because F_{17,17}(0.995) < F < F_{17,17}(0.005)$　$\therefore$ 不拒 H_0.

2). $H_0: \mu_1=\mu_2$,　$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{18}}} \sim t_{34}.$$

$W=\{(\ ): \quad |T| \geq t_{34}(0.005)\}$

$\because t_{34}(0.005)=2.7284$

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{18}+\frac{1}{18}}}=\frac{6}{25}=0.24$$

而 $|T| \leq t_{34}(0.005)$

$\therefore$ 不拒 H_0.

6.（本题 12 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，X 的概率密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}$

求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解：$\because E(X)=\int_R x f(x;\theta)dx=\int_\theta^{+\infty} x \cdot e^{-(x-\theta)}dx=\theta+1$

令 $E(X)=\bar{X}$　即 $\theta+1=\bar{X}$　$\therefore \hat{\theta}_{矩}=\bar{X}-1$.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)$$

$$=\begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)}, & x_i \geq \theta,\ i=\overline{1,n} \\ 0 & 否 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{-\sum x_i+n\theta} & \cancel{x_i \geq \theta,\ i=\overline{1,n}}\ \theta \leq x_{(1)} \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

关于 θ 单调递增，而 $\theta \leq x_{(1)}$.

$\therefore \theta$ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=X_{(1)}$.