2013～2014 学年第二学期期末考试试卷参考答案

《 线性代数及其应用 》（A 卷）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、$\underline{-\frac{1}{8}(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})}$；2、$\underline{k[1,1,1]^{\mathrm{T}},\forall k\in\mathbf{P}}$ ；3、$\underline{2}$；4、$\underline{3,-1}$；5、$\underline{3}$

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

DACCC

三、（共 14 分，每题 7 分）

1、解 $W=\left\{\begin{bmatrix}a-b\\2a+b+2c\\3a+3b+4c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}\ \middle|\ a,b,c\in\mathbf{R}\right\}=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$

其中$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,2,4]^{\mathrm{T}}$.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&2\\3&3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&6&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$的秩为 2，故$\dim W=2$；$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$是$W$的一个基.

（另外$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$或$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\}$也是基）

2、解 设$\boldsymbol{X}$是方阵$\boldsymbol{A}$属于特征值μ的一个特征向量，则

$\boldsymbol{AX}=\mu\boldsymbol{X}$，即 $\begin{bmatrix}a&-1&b\\4&-3&2\\1-b&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

或$\begin{cases}a-1-b=\mu,\\\mu=-1,\\1-b+a=-\mu\end{cases}$ 解得 $\mu=-1,a=b$.

故 $\lambda_0=\mu+1=0.$

又$1=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\4&-3&2\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-2,$ 故 $a=b=3.$

四、（12 分）解　对其增广矩阵施行初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\1&1&-1&3&3\\3&-2&a+2&-1&b\\1&3&-7&a+1&5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&2&-6&4&2\\0&1&a-13&2&b-3\\0&4&-12&a+2&4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&1&-3&2&1\\0&0&a-10&0&b-4\\0&0&0&a-6&0\end{array}\right]$$

(1) 当 $a\neq10$ 且 $a\neq6$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=4$，方程组有唯一解;

(2) 当 $a=10,\ b\neq4$ 时，$r(\boldsymbol{A})=3, r(\tilde{\boldsymbol{A}})=4$ 方程组无解;

(3) 当 $a=10, b=4$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$，方程组有无穷多解.

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&1&-3&2&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&0&2\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-2x_3+2,\\ x_2=3x_3+1,\\ x_4=0.\end{cases}$

通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\0\end{bmatrix},\quad \forall k\in \mathrm{P}$

(4) 当 $a=6$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$，线性方程组有无穷多解;

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&5&-1&1\\0&1&-3&2&1\\0&0&-4&0&b-4\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&\frac{b}{2}\\0&1&0&2&4-\frac{3b}{4}\\0&0&1&0&1-\frac{b}{4}\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

通解为 $[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=[\frac{b}{2},4-\frac{3b}{4},1-\frac{b}{4},0]^{\mathrm{T}}+k[-1,-2,0,1]^{\mathrm{T}}$

【解法 2】　系数行列式为

$$
|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 3\\ 3 & -2 & a+2 & -1\\ 1 & 3 & -7 & a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -6 & 4\\ 3 & 1 & a-13 & 2\\ 1 & 4 & -12 & a+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -6 & 4\\ 1 & a-13 & 2\\ 4 & -12 & a+2\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & a-10 & 0\\ 4 & 0 & a-6\end{vmatrix}=2(a-10)(a-6)
$$

(1) 当$a\neq 10$且$a\neq 6$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组有唯一解;

(2) 当$a=10,\ b\neq 4$时，$r(\boldsymbol{A})=3, r(\tilde{\boldsymbol{A}})=4$方程组无解;

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -2 & 12 & -1 & b\\ 1 & 3 & -7 & 11 & 5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -6 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 2 & b-3\\ 0 & 4 & -12 & 12 & 4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4\end{array}\right]
$$

(3) 当$a=10, b=4$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$，方程组有无穷多解.

对增广矩阵初等行变换，得

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]
$$

同解方程组为
$$
\begin{cases}x_1=-2x_3+2,\\ x_2=3x_3+1,\\ x_4=0.\end{cases}
$$

通解为
$$
\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \forall k\in \mathrm{P}
$$

(4) 当$a=6$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3<4$，线性方程组有无穷多解;

$$
\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3 & 3\\ 3 & -2 & 8 & -1 & b\\ 1 & 3 & -7 & 7 & 5\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 0 & b-4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4-\frac{3b}{4}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\frac{b}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]
$$

通解为 $[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}=\left[\frac{b}{2}, 4-\frac{3b}{4}, 1-\frac{b}{4}, 0\right]^{\mathrm{T}}+k[-1, -2, 0, 1]^{\mathrm{T}}, \forall k.$

五、解（1）由基(I)到(II)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$；

（2）$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1,\\\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1,\\\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}=0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1,\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(3) 解法 1 $\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=[2,2,2]^{\mathrm{T}},\\\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2,0]^{\mathrm{T}}\\\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=[2,0,0]^{\mathrm{T}},\end{cases}$

因为 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{N}$，即 $\begin{bmatrix}2&0&2\\2&2&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{N}$，

解该矩阵方程得 $N=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{MS}=\begin{bmatrix}2&0&0\\2&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$.

【解法 2】 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{MS}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

（4）【解法 1】 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=[4,2,0]^{\mathrm{T}}$.

设 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 在基(II)下的坐标为 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，则

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{\alpha}_3$， 即 $\begin{bmatrix}4\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, 解得 $\boldsymbol{X}=[1,1,2]^{\mathrm{T}}$.

【解法 2】 设 $\boldsymbol{\beta}$ 在基(II)下的坐标为 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，设 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})$ 在基(II)下的坐标为 $\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$.

由坐标变换公式 $\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, 解得 $\boldsymbol{X}=[0,1,2]^{\mathrm{T}}$.

从而 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{NX}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

六、（10 分） 解 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}$.

$$\left|\lambda \boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 4\\ 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5),$$

$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5$，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

$\lambda_1=1$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{X}_1=[2,1]^{\mathrm{T}}$

$\lambda_2=5$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{X}_2=[-2,1]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 线性无关.

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2]=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{S}$ 为可逆阵，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(1,5)$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1}$， $\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}^{10}\boldsymbol{S}^{-1}$， $\boldsymbol{A}^{9}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}^{9}\boldsymbol{S}^{-1}$

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{A}^{10}-5\boldsymbol{A}^{9}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{D}^{10}-5\boldsymbol{D}^{9})\boldsymbol{S}^{-1}\\ &=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & \\ & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -1 & -2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

七、（16 分）解　二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&-2\\2&-2&3\end{bmatrix}$.

因为 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&2\\-2&2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+1)$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-1$.

对特征值 5，解方程组 $(5\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，可求得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令　$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，　$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化得　$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\left[\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]^{\mathrm{T}}$.

对特征值 -1，解方程组 $(-\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得　$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

令　$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交阵，且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(5,5,-1)$.

故二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 经正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形 $g(\boldsymbol{Y})=5y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

【备注】：求特征值 5 的特征向量时，同解方程组为 $x_1-x_2-x_3=0,$

可观察得正交的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$，

单位化后仍为 $\boldsymbol{\eta}_1=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\left[\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\alpha}_1=[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$，

单位化后为 $\boldsymbol{\eta}_1=\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\right]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{\eta}_1=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$.

（2）规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

八、（4 分）**证法 1** 只需证明$r(\boldsymbol{A})=m$.

因为对任意的$\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$总有解，则对$\boldsymbol{\varepsilon}_i\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$有解，记作$\boldsymbol{X}_i$，即$\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i$，$i=(1,2,\cdots,m)$.

此时 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m)=(\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_m)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m)=\boldsymbol{E}_m$，

因此 $m=r(\boldsymbol{E}_m)=r(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m))\le r(\boldsymbol{A})\le m$，

故$r(\boldsymbol{A})=m$.

证法 2 只需证明$r(\boldsymbol{A})=m$.

对 $\boldsymbol{A}$ 进行列分块，令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_j\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{j}=1,2,\ldots,\boldsymbol{n}$ 则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$

因为对任意的$\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$总有解，因而$\forall\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^m$都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示。

特别取$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\varepsilon}_i\in\mathbf{R}^m$ $i=(1,2,\cdots,m)$，则$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示；

又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$线性表示，

故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$等价，

因此 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m)=m$.