阶段考试答案

一、

1.**解**　对方程组的增广矩阵作初等行变换,

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\3&-1&1&1&0\\1&0&1&2&1\\1&-3&-2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+(-3)r_1\\r_3-r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&2&1&-2&-3\\0&1&1&1&0\\0&-2&-2&-2&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&1&1&1&0\\0&2&1&-2&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+(-2)r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&1&1&1&0\\0&0&-1&-4&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&0&1&1\\0&1&0&-3&-3\\0&0&1&4&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-2&-2\\0&1&0&-3&-3\\0&0&1&4&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

因为 $r(\tilde{A})=r(A)=3<4$, 所以方程组有无穷多组解.

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-2+2x_4,\\x_2=-3+3x_4,\\x_3=3-4x_4.\end{cases}$$

求得方程组的通解为

$$X=\begin{bmatrix}-2\\-3\\3\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\3\\-4\\1\end{bmatrix},\ \ k \text{ 为任意常数}.$$

2.**解**　由于该齐次线性方程组有非零解, 则其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda&2&2\\-2&\lambda-2&2\\2&2&\lambda-2\end{vmatrix}=0.$$

另一方面, 有

$$D\ \underline{\underline{c_2-c_3}}\ \begin{vmatrix}\lambda&0&2\\-2&\lambda-4&2\\2&4-\lambda&\lambda-2\end{vmatrix}\ \underline{\underline{r_3+r_2}}\ \begin{vmatrix}\lambda&0&2\\-2&\lambda-4&2\\0&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2(\lambda-4).$$

因此, $\lambda=0$ 或 $\lambda=4$.

3.**解** $$3A_{21}-5A_{23}-12A_{24}=\begin{vmatrix}1&4&9&16\\3&0&-5&-12\\1&2&3&4\\1&8&27&64\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&4&9&16\\4&4&4&4\\1&2&3&4\\1&8&27&64\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{vmatrix}4&4&4&4\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix}=4V(1,2,3,4)$$
$$=4(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=4\times 12=48.$$

二、

1.**解** 由 $\boldsymbol{B}_{3\times3}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&3\\1&2&0\\1&-3&-2\end{bmatrix}$

得 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&3\\1&2&0\\1&-3&-2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&-3&-5\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\times(-19)=6.$

从而,$|\boldsymbol{A}|=-\frac{6}{19}$.

2.**解** $|A^*|=-8.$

由 $|A|^{4-1}=|A^*|=-8$ 得 $|A|=-2.$

对 $AXA^{-1}+2E=2XA^{-1}$ 两边同右乘 A得

$$AX+2A=2X.$$

两边再同 左乘 A^*得

$$|A|X+2|A|E=2A^*X.$$

代入 $|A|=-2$ 得

$$-2X-4E=2A^*X,$$

$$X+2E=-A^*X$$

整理得 $(E+A^*)X=-2E.$

由 $[E+A^*\vdots-2E]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}-1&0&0&1&-2&0&0&0\\0&-1&0&-2&0&-2&0&0\\0&0&-1&0&0&0&-2&0\\0&0&0&2&0&0&0&-2\end{array}\right]$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

可知 $E + A^*$ 可逆, 求得

$$X = (E + A^*)^{-1}(-2E) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.**解**

对 $\boldsymbol{A}$ 进行分块 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

于是,$\boldsymbol{A}^m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^m & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^m \end{bmatrix}$.

下面求 $\boldsymbol{B}^m$ 与 $\boldsymbol{C}^m$.

记 $\boldsymbol{B} = 2E_2 + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2E_2 + \boldsymbol{G}$. 由于 $\boldsymbol{G}^2 = \boldsymbol{O}$, 因此 $\boldsymbol{G}^m = \boldsymbol{O}, m \geq 3$. 又 E_2 与 $\boldsymbol{G}$ 可交换, 应用二项式定理得

$$\boldsymbol{B}^m = (2E_2 + \boldsymbol{G})^m = (2E_2)^m + m(2E_2)^{m-1}\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 2^m & 3m \cdot 2^{m-1} \\ 0 & 2^m \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 2]$ 得

$$\boldsymbol{C}^m = (tr\boldsymbol{C})^{m-1}\boldsymbol{C} = 4^{m-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{2m-1} & 2^{2m} \\ 2^{2m-2} & 2^{2m-1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{于是 } \boldsymbol{A}^m = \begin{bmatrix} 2^m & 3m \cdot 2^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2m-1} & 2^{2m} \\ 0 & 0 & 2^{2m-2} & 2^{2m-1} \end{bmatrix}.$$

由 $|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ 得

$|\boldsymbol{A}^m| = |\boldsymbol{B}^m||\boldsymbol{C}^m| = |\boldsymbol{B}|^m|\boldsymbol{C}|^m = 0.$

三、

1.**解** $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4+r_1\times(-3)]{\substack{r_2+r_1\times(-2)\\ r_3+r_1\times(-5)}}\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&3&-6&-3&-3\\0&7&-14&-7&-7\\0&4&-8&-4&-11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&1&-2&-1&-1\\0&4&-8&-4&-11\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times(-4)}\begin{bmatrix}1&-1&3&2&1\\0&1&-2&-1&-1\\0&0&0&0&-7\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{\substack{r_3\times(-\frac{1}{7})\\ r_2+r_3}}\begin{bmatrix}1&-1&3&2&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=3$;

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为向量组的一个极大无关组;

$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

2. **答**: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

理由一:由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

又由已知得 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C}$.

因为 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{C}$ 可逆.

从而 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r([\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$, 所以, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

理由二: 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

又由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1$ 得

$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1]\xrightarrow{\text{列}}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$.

因此,$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r([\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3])=r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3])=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

从而,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

理由三: 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$.

由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1$ 可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出. 又从上述关系式中可得

$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$. 说明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 于是, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价.$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 3$. 因此, 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的线性无关.

3.**证明** 由 $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $[A_{ij}]^{\mathrm{T}} = [-a_{ij}]^{\mathrm{T}}$, 从而 $A_{ij} = -a_{ij}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n \geq 3)$ 非零实方阵, 所以,$\boldsymbol{A}$ 中必有非零行. 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行为非零行. 于是有

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = -a_{i1}^2 - a_{i2}^2 - \cdots - a_{in}^2 < 0.$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

由 $\boldsymbol{A}^* = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*| = |-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = (-1)^n|\boldsymbol{A}|$; 又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 从而 $(-1)^n|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 因为 $|\boldsymbol{A}| < 0$ 且 $n \geq 3$, 所以,$|\boldsymbol{A}| = -1$.

因此,$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} = -\boldsymbol{A}^{-1}$.