2018～2019 学年第二学期期末考试试卷

《高等数学 2B》(A 卷)

（共 4 页，另附 2 页草纸）

（考试时间：2019 年 6 月 19 日, 14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 曲线$\begin{cases} x-y+z=2, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在点$(1,1,2)$处的一个切线方向向量为__________________.

2. 由方程$xy+xz-yz=\mathrm{e}^z$ 所确定的隐函数$z=z(x,y)$ 在点$(1,1)$处的全微分为

______________________________.

3. 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x-1)^n$在$x=3$处条件收敛，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径

为_______________.

4. 将函数$f(x)=\begin{cases} 1+x^2, -3\le x<0, \\ 4, \quad 0\le x\le 3 \end{cases}$ 展开成周期为 6 的傅里叶级数，其和函数记为

$s(x)$，则$s(12)=$ _______________.

5. 设曲线 L 由$L_1: y=\sin x$从点$A(\pi,0)$到点$O(0,0)$的一段曲线和直线段$\overline{OA}$组成，

且 L 取逆时针方向，则$\oint_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+(2x^2-1)\,\mathrm{d}y$的值为________________.

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 下列级数收敛的是 (　　　　　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{4}$　(B) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n^2})$　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\dfrac{1}{n}$

2. 二次积分$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=$ (　　　　　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) 1　(C) $\dfrac{1}{4}$　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

3. 函数$f(x,y)$在$(0,0)$处连续，则下列命题正确的是 (　　　　　　).

(A) 若极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微

(B) 若极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微

(C) 若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在

(D) 若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在

4. 全微分方程$\left(2x+\dfrac{y}{1+x^2y^2}\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{x}{1+x^2y^2}+2y\right)\mathrm{d}y=0$的通解是 (　　　　　　).

(A) $2xy+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2y^2\right)=C$　(B) $x^2+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2y^2\right)+y^2=C$

(C) $2xy+\arctan(xy)=C$　(D) $x^2+\arctan(xy)+y^2=C$

5. 设曲线 L 是由点$O(0,0)$出发、经过点$A(1,0)$到$B(0,1)$的折线，则曲线积分

$\int_L(x+y)\mathbf{d}s=$ (　　　　　　).

(A) $\sqrt{2}+1$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

2018～2019 学年第二学期期末考试参考答案

《高等数学 2B》（考试时间：2019 年 6 月 19 日 14:00—16:00）

一、 填空题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷： 1. $(-1,3,4)$ 2. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ 3. **2** 4. $\dfrac{5}{2}$ 5. 4π

B 卷： 1. **2** 2. $(-1,3,4)$ 3. $\dfrac{5}{2}$ 4. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ 5. 4π

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

A 卷： 1. C 2. A 3. B 4. D 5. C

B 卷： 1. A 2. C 3. C 4. D 5. B

三、计算题（共 **28** 分，每小题 **7** 分）

1. 设函数 $z=f(2x-3y)+g(x,xy)$，其中 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续二阶偏导数，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-3f'+xg_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''.$$

2. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z^3\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解：Σ 在 xOy 面上的投影 D 为：$x^2+y^2\le 1$.

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=\iint_D(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}.$$

3. 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

解：$\begin{cases} f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0, \\ f_y'(x,y)=2x^2y+1+\ln y=0 \end{cases}$，解得驻点 $M(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$，

又因为 $A=f_{xx}''\big|_M=4+2y^2\Big|_M=4+\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}, B=f_{xy}''\big|_M=4xy\big|_M=0$,

$C=f_{yy}''\big|_M=2x^2+\dfrac{1}{y}=\mathrm{e}$, $B^2-AC=-(4\mathrm{e}+\dfrac{2}{\mathrm{e}})<0$.

所以 $M(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 是函数的极小值点，函数的极小值是 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

4. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 之外、且位于球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 内部的空间区域.

解：$\begin{cases} r^2=1, \\ r^2=2r\cos\varphi, \end{cases}$ $\therefore \cos\varphi=\dfrac{1}{2},\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\varphi\int_1^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi(32\cos^5\varphi-1)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{5}\left[\left(-\frac{16}{3}\right)\cos^6\varphi+\cos\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{19}{10}\pi.$$

四、计算题（共 21 分，每小题 7 分）

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} 2x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(xz^2-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面

$z=1-x^2-y^2\ (z\ge 0)$ 部分，方向取上侧.

解：取 Σ_1 为 xOy 面上圆 $x^2+y^2\le 1$ 的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间区域，

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(xz^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_{\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(xz^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega} 6(x^2+y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}z\ -3\pi$$

$$=12\pi\int_0^1[\rho^3(1-\rho^2)]\mathrm{d}\rho-3\pi=\pi-3\pi=-2\pi.$$

2. 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展成麦克劳林级数.

解：$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ x\in(-1,1),$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1)$$

由于 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$,

故 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1).$

3. 计算曲线积分 $\oint_L zy\,\mathrm{d}x+3xz\,\mathrm{d}y-xy\,\mathrm{d}z$, ,其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=4y,\\3y-z=1\end{cases}$，且从 z 轴正向看去 L 为逆时针方向.

解法一：设平面 $3y-z=1$ 被柱面所截得的部分为 Σ，其方向为上侧，边界曲线为 L，Σ 在 xOy 面的投影记为 D，在 Σ 上，$z=3y-1$，$z'_x=0, z'_y=3$

$$I=\iint_{\Sigma}(-4x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[(-4x)\cdot(-z_x{}')+2y\cdot(-z_y{}')+2z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(-6y+2z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}-2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi.$$

解法二：在 Σ 上法向量的方向余弦为 $\cos\alpha=0,\cos\beta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$,

$$I=\iint_{\Sigma}(-4x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{10}}\iint_{\Sigma}\left(-3\cdot 2y+2z\right)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{10}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{-2}{\sqrt{10}}\iint_{D}\sqrt{1+9}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi.$$

解法三：L 的参数方程：$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2+2\sin\theta,\quad\theta:0\to 2\pi\\z=5+6\sin\theta,\end{cases}$

$$\oint_L zy\,\mathrm{d}x+3xz\,\mathrm{d}y-xy\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}(2+2\sin\theta)(5+6\sin\theta)(-2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}3(2\cos\theta)(5+6\sin\theta)(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}-(2\cos\theta)(2+2\sin\theta)(6\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$=-8\pi.$

五、解答题（共 16 分，每小题 8 分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛域及和函数.

解：$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，显然收敛域为 $(-1,1)$.

令 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n, s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

$$s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

由 $s_2{}'(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，得

$$s_2(x)=s_2(0)+\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),$$

于是和函数 $s(x)=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x), x\in(-1,1).$

2. 设函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, 0<x\le\pi$. (1)将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为最小正周期的奇函数，记成 $F(x)$，给出 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式；(2)将 $f(x)$ 展开成正弦级数.

解：(1) 将函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上作奇延拓后再做周期延拓得 $F(x)$，且

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x=0,\\ \frac{\pi+x}{-2}, & -\pi<x<0\end{cases}.$$

(2) $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x=0, n=0,1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi-x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内连续，并且

$$s(\pi)=\frac{1}{2}[F(-\pi+0)+F(\pi-0)]=0=f(\pi),$$

所以 $f(x)$ 展开成正弦级数为:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx, x\in(0,\pi].$$

六、证明题(本题 5 分)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

证明：设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛于 s，其部分和数列

$$s_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0\to s\,(n\to\infty),$$

所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=s+a_0$，从而 $\{a_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使得 $|a_n|\le M$.

再由 $|a_nb_n|\le M|b_n|$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.