14151 线性代数期中考试试卷解析

一、满分 25 分.

1.(15 分)设线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4-\ \ 5x_5=3,\\ 2x_1-4x_2+3x_3+\ \ x_4-11x_5=6,\\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4-12x_5=6,\\ 3x_1-6x_2+3x_3+2x_4-13x_5=t \end{cases}$$

有解，求参数t及线性方程组的(向量形式)通解.

知识点 增广矩阵消元法、有解判定、通解.

解 对增广矩阵作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3\\ 2 & -4 & 3 & 1 & -11 & 6\\ 1 & -2 & 2 & 3 & -12 & 6\\ 3 & -6 & 3 & 2 & -13 & t \end{array}\right]\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-r_1}}\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & t-9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_3]{(r_3-r_2)/3}\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8 \end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_2-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t-8 \end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}}.$$

因为线性方程组有解，所以

$$0=t-8\Rightarrow t=8.$$

令自由未知量$x_2=k_1, x_5=k_2$，得全部解为

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2k_1\\ k_1\\ 1+3k_2\\ 1+2k_2\\ k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 3\\ 2\\ 1 \end{bmatrix}，\ \forall k_1, k_2\in\mathbb{F}.$$

2.(10 分)设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，而$M_{3j}, A_{3j}$分别是$a_{3j}\,(j=1, 2, 3, 4)$的余子式、代数余子式.

(1) 求$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$；

(2) 求$M_{31}+2M_{32}+3M_{33}+4M_{34}$.

知识点 $a_{i1}A_{i'1}+a_{i2}A_{i'2}+a_{i3}A_{i'3}+a_{i4}A_{i'4}=\delta_{ii'}|\boldsymbol{A}|$、余子式与代数余子式、行列式的性质、行列式的按多行展开公式或准上三角行列式.

解 (1) $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}=a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}+a_{14}A_{34}=0$.

(2) $M_{31}+2M_{32}+3M_{33}+4M_{34}=1A_{31}+(-2)A_{32}+3A_{33}+(-4)A_{34}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\1&-2&3&-4\\1&0&1&0\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\\2&0&6&0\\1&0&1&0\end{vmatrix}\overset{c_1\leftrightarrow c_4}{=\!=\!=\!=}-\begin{vmatrix}4&2&3&1\\1&3&2&4\\0&0&6&2\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}4&2\\1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}6&2\\1&1\end{vmatrix}=-10\times 4=-40.$$

二、满分 20 分.

1.（8 分）设 $f(x)=\begin{vmatrix}3x&x&1&2\\1&x&1&-1\\1&1&x&2\\x&1&2&x\end{vmatrix}$ 是用 4 阶行列式定义的多项式，求 $f(x)$ 的 4 次项系数 a_4 与 3 次项系数 a_3.

知识点　行列式的性质、行列式的按行完全展开公式.

解　$f(x)=\begin{vmatrix}3x&x&1&2\\1&x&1&-1\\1&1&x&2\\x&1&2&x\end{vmatrix}\overset{r_1-r_2}{\underset{c_1-c_4}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}3x-4&0&0&3\\2&x&1&-1\\-1&1&x&2\\0&1&2&x\end{vmatrix}=(3x-4)x^3+\cdots$,

其中省略部分中 x 的次数不超过 2. 可知

$$a_4=3,\qquad a_3=-4.$$

2.（12 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{2014}$ 与 $|\boldsymbol{A}^{2014}|$.

知识点　准对角矩阵的幂、行列式的性质、方阵乘积的行列式.

解　(1) 记 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}_1^{2014}=\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}[1,-1]\right)^{2014}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\left([1,-1]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)^{2013}[1,-1]=-2^{2013}\boldsymbol{A}_1,$$

$$\boldsymbol{A}_2^{2014}=\begin{bmatrix}1&-2014\\0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{2014}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{2014}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{2014}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}2^{2013}&-2^{2013}&0&0\\-2^{2013}&2^{2013}&0&0\\\hdashline 0&0&1&-2014\\0&0&0&1\end{array}\right].$$

(2) $\mathrm{row}_2\,\boldsymbol{A}=-\mathrm{row}_1\,\boldsymbol{A}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}^{2014}|=|\boldsymbol{A}|^{2014}=0$.

三、满分 32 分.

1. (11 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=3\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

知识点　用初等行变换法求解矩阵方程.

解　$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{B}$，

$$[\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},4\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc:cc}-3 & 2 & 1 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4\\ 3 & 6 & -1 & 4 & 8\end{array}\right]\xrightarrow[r_2/2]{(r_1+r_3)/8}\left[\begin{array}{ccc:cc}0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 3 & 6 & -1 & 4 & 8\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(r_3-6r_1-3r_2)/(-4)}\left[\begin{array}{ccc:cc}0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

2. (11 分) 设 $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$ 分别为 $n,s(\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵，求证 $\boldsymbol{M}^*=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

知识点　准上三角矩阵的行列式、逆矩阵、伴随矩阵.

证　分三步完成.

(1)　$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0\Rightarrow\boldsymbol{M}$ 可逆；

(2)　用分块求逆法或分块初等行变换法，可知 $\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$；

(3)　$\boldsymbol{M}^*=|\boldsymbol{M}|\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & -\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.　　□

3. (10 分) 设 $\mathbb{F}^n$ 中的向量组(Ⅰ) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，求证向量组(Ⅱ) $=\{\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关.

知识点　线性无关向量组的判定.

解　设 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，即

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

整理得

$$(x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2x_1+x_2+4x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-3x_1+x_2+9x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

因为(Ⅰ)线性无关，所以

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ 2x_1+x_2+4x_3=0,\\ -3x_1+x_2+9x_3=0.\end{cases}$$

解之得 $x_1=x_2=x_3=0$，故知(Ⅱ)也线性无关.　　□

四、满分 23 分.

1. (13 分) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\\3\end{bmatrix},$$

求向量组(I) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$ 的一个极大无关组(I′)，并用(I′)线性表示(I)中的其余向量.

知识点　用初等行变换法求列向量组的极大无关组、表示关系式.

解　$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5]$

$$=\begin{bmatrix}1&0&1&1&-3\\2&-1&4&3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-9\\0&1&-1&0&16\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

可知(I′) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 是向量组(I)的一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=3\boldsymbol{\alpha}_1-8\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_4.$$

注　(I)的极大无关组不唯一，除 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 外，在(I) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$ 中任选三个向量，都组成(I)的一个极大无关组.

2.(10 分)设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元非零列向量，求证

(1)　$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$；

(2)　当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵.

知识点　方阵的多项式与幂、可逆矩阵.

证　(1)　因为

$$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O},$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^2=\boldsymbol{E}_n^2-2\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow 2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1.$$

(2)　假设 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\Rightarrow\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O},$$

与 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 矛盾！从而假设错误，得证 $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵.　　□