2018～2019 学年第一学期期末考试参考答案

《高等数学 2A》（ A 卷，共 3 页）

（考试时间：2019 年 1 月 22 日）

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t,\ g(x)=x^3$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ B ）.

(A) 等价无穷小; (B) 同阶但非等价无穷小;
(C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小.

2. 微分方程 $y''-2y'=2x\cos 4x$,用待定系数法确定的特解形式 $y^*=$（ C ）.

(A) $(Ax+B)\cos 4x$; (B) $(Ax+B)\sin 4x$;
(C) $(Ax+B)\cos 4x+(Cx+D)\sin 4x$; (D) $Bx\cos 4x+Cx\sin 4x$.

3. 下列反常积分收敛的是（ D ）.

(A) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$; (B) $\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$; (C) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$; (D) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

4. 直线 $L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x+2z-4=0\\ y+3z-5=0\end{cases}$ 之间的关系是（ A ）.

(A) 平行; (B)垂直; (C) 相交但不垂直; (D) 异面.

5. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则（ B ）.

(A) $I_1>I_2>1$; (B) $1>I_1>I_2$; (C) $I_2>I_1>1$; (D) $1>I_2>I_1$.

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin 3x+\cos x-1}=$ ____ $\frac{1}{3}$ ____.

2. 已知 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ____ $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$ ____.

3. 曲线 $y=\ln(x^2+1)$ 在 $x>0$ 的拐点为 ____ $(1,\ln 2)$ ____.

4. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围图形面积是 ____1____.

5. 曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率是 ____ $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ____.

三、计算题（共 8 分）

求函数 $y=x^{\frac{1}{x}}+\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ 的极值.

解: $x>0,\ y'=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$,

令 $y'=0$， 得驻点 $x=\mathrm{e}$.

当 $x\in\mathring{U}_-(\mathrm{e})$，$y'>0$; 当 $x\in\mathring{U}_+(\mathrm{e})$，$y'<0$，

$\therefore\ x=\mathrm{e}$ 是极大值点.

$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ 令 $\sqrt{x}=t$

$$=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}2t\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=2\left(t-\arctan t\,|_0^1\right)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

$\therefore$ 函数的极大值 $y|_{x=\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}+2-\frac{\pi}{2}$.

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(x+2)\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解： $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=0,$

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\,\mathrm{d}\sec x=2\left(x\sec x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec x\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$=\frac{4\pi}{3}-2\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=\frac{\cos x}{x}$，求 $\int x f'(x)\mathrm{d}x$.

解： $f(x)=F'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$,

$$\int x f'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)$$

$$=x f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$=x f(x)-\frac{\cos x}{x}+C$$

$$=-x\cdot\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}+C$$

$$=-\frac{x\sin x+2\cos x}{x}+C=-\sin x-\frac{2\cos x}{x}+C.$$

3. 求过点 $(-1,2,1)$ 且与两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z+1=0$ 都垂直的平面方程.

解: $\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(2,1,1)$,

$$\therefore \vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-2,1,3)$$

故所求平面方程：$2(x+1)-(y-2)-3(z-1)=0$,

即：$2x-y-3z+7=0$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & x\ge 0,\\ \sqrt{1-x^2}, & -1\le x<0\end{cases}$，计算 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解： 令 $u=x-2$,

$$I=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1 \quad =\frac{\pi}{4}+\frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

5. 已知 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(x)=\int_0^x (x-t)^2 g(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=1$. 求 $f''(x)$，并计算 $f''(1)$.

解： $f(x)=\int_0^x (x-t)^2 g(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(x^2-2xt+t^2\right)g(t)\,\mathrm{d}t$

$$=x^2\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-2x\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t+\int_0^x t^2 g(t)\mathrm{d}t.$$

$$f'(x)=2x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+x^2 g(x)-2\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t-2x^2 g(x)+x^2 g(x)$$

$$=2x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t,$$

$$f''(x)=2\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+2xg(x)-2xg(x)=2\int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

故 $f''(1)=2\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=2$.

五、解答题（共 22 分，其中第 1,3 小每题 8 分，第 2 题 6 分）

1. 设曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=1-x^2$ 在第一象限内的交点为 A, 过原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=x^2$ 围成平面图形 D. 求:

(1) D 的面积 S; (2) D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

解：A点坐标$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, 直线$oA$: $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

$$(1)\ S=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot x^2\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{24}.$$

$$(2)\ V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}y\mathrm{d}y-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{24}.$$

2. 求伯努利方程 $y'+y-x\sqrt{y}=0$ 的通解.

解： 令 $z=\sqrt{y}$， 则原方程化为: $\frac{dz}{dx}+\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}x$,

$$\therefore z=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\int\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\int\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C\right)=C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+x-2.$$

故原方程通解为 $\sqrt{y}=C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+x-2.$

3. 求二阶微分方程 $\begin{cases}y''-5y'+6y=(2x+1)\mathrm{e}^x,\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$ 的特解.

解： 特征方程为：$r^2-5r+6=0$, $r_1=2, r_2=3$.

所以对应齐次方程通解 $\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$.

设非齐次方程特解 $y^*=(Ax+B)\mathrm{e}^x$，$(y^*)'=(Ax+A+B)\mathrm{e}^x$,

$(y^*)''=(Ax+2A+B)\mathrm{e}^x$，代入原方程,得 $2Ax+(2B-3A)=2x+1$,

解得 $A=1, B=2$. 于是 $y^*=(x+2)\mathrm{e}^x$,

故原方程的通解为：$y=\bar{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}+(x+2)\mathrm{e}^x$.

由 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=0$，得 $\begin{cases}C_1+C_2+2=0,\\ 2C_1+3C_2+3=0\end{cases}$, $\therefore\begin{cases}C_1=-3,\\ C_2=1\end{cases}$.

于是所求特解为 $y=-3\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}+(x+2)\mathrm{e}^x$.

六、证明题（本题 5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$.

证明: 对于任意正整数 n，均有 $\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x\le f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

证明：由一阶泰勒公式, 对 $\forall x\in[0,1]$，存在 ξ 介于 x 与 $\frac{1}{n+1}$ 之间, 使得

$$f(x)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f'\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(x-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{n+1}\right)^2,$$

$$\because f''(x)<0,\ \therefore f(x)\le f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f'\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(x-\frac{1}{n+1}\right).$$

于是 $f(x^n)\le f(\frac{1}{n+1})+f'(\frac{1}{n+1})(x^n-\frac{1}{n+1})$， $x\in[0,1]$.

从而 $\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x\le\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f'\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(x^n-\frac{1}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{n+1}\right)$,

即 $\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x\le f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.