2017-2018（2）期中试题参考答案

一、填空题及单项选择题（共 30 分， 每小题 5 分）

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　2. 5 或 -4　3. 32　4. A　5. C　6. D.

二、(16 分)解

对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行初等行变换，

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}]{\substack{2' \\ r_2-r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{2'} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix},$$ 6分

当 $a=-2$ 时，$r(\bar{A})=r(A)=3<4$，方程组有无穷多解. 此时 ---------- 9分

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ------ 11分

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2-3x_3, \\ x_2=5+2x_3, \\ x_4=-10 \end{cases}$ 其中 x_3 为自由变量 ---- 12分

则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall k\in P$$ ----------- 16分

三、(共 28 分)

1. (14 分)解

(1) 方法 1 ------ 6分

$$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{\substack{2' \\ r_4-2r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{2' \\ 分块}} \left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{array}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}=4\times 20=80.$$ ----- 9分

方法 2

------ 5'

$$A_{12}+2A_{22}+3A_{32}+4A_{42}=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-2&2&4&1\\3&3&1&2\\-4&4&0&6\end{vmatrix}\overset{2'}{\underline{\underline{c_1+c_2}}}\begin{vmatrix}2&1&2&-1\\0&2&4&1\\6&3&1&2\\0&4&0&6\end{vmatrix}\underline{\underline{r_3+(-3)r_1}}\begin{vmatrix}2&1&2&-1\\0&2&4&1\\0&0&-5&5\\0&4&0&6\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}2&4&1\\0&-5&5\\4&0&6\end{vmatrix}\underline{\underline{c_3+c_2}}\,2\begin{vmatrix}2&4&5\\0&-5&0\\4&0&6\end{vmatrix}=2(-5)\begin{vmatrix}2&5\\4&6\end{vmatrix}=-10(12-20)=80.$$ ------ 9分

(2) $M_{13}+2M_{23}+3M_{33}+4M_{43}=A_{13}-2A_{23}+3A_{33}-4A_{43}$ ------- 2分

$=a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}+a_{41}A_{43}=0$. (异乘为零)- — 5分

2. (14 分) **解**　由 $AX=B+X$ 整理得 $(A-E)X=B$. ------ 3分

由 $|A-E|\neq 0$ 知 $A-E$ 可逆.

$$[A-E\ \ B]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&1&1&2&0\\4&-2&1&1&-1&1\\-3&2&-1&1&0&-1\end{array}\right]$$ ----- 5分

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&1&1&2&0\\0&0&-1&-1&-5&1\\-1&1&0&2&2&-1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&-2&-2&1\\2&-1&1&1&2&0\\0&0&1&1&5&-1\end{array}\right]$$ -----8分

$$\xrightarrow{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&-2&-2&1\\0&1&1&5&6&-2\\0&0&1&1&5&-1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1+r_2]{r_2-r_3}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&-1&0\\0&1&0&4&1&-1\\0&0&1&1&5&-1\end{array}\right].$$ --- 12分

故 $X=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&1&-1\\1&5&-1\end{bmatrix}$. ------- 14分

法二：由 $AX=B+X$ 整理得 $(A-E)X=B$. -------- 3分

因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-3&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\2&-1&0\\-1&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$, 所以 $A-E$ 可逆. 可得

$X=(A-E)^{-1}B$. 7分

$$[A-E\ \ E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&1&1&0&0\\4&-2&1&0&1&0\\-3&2&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行变换}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&1&1&2\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right],$$

求得 $(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\2&-1&0\end{bmatrix}$. ----------11分

$X=(A-E)^{-1}B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\4&1&-1\\1&5&-1\end{bmatrix}$ ---------14分

四、(共26分)

1. (16分)**解** $f(A)=(A+E)^{2k}$. ----------1分

记 $B=A+E=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&4&3\\0&0&3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}$, 其中 $B_1=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}$.

则 $f(A)=\begin{bmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}^{2k}=\begin{bmatrix}B_1^{2k}&O\\O&B_2^{2k}\end{bmatrix}$. ---------4分

$B_1=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}=-2E+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=-2E+C$

因为 $C^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=O$, 所以 $C^m=O(m\ge 2)$. ----------7分

又 C 与 $-2E$ 可交换, 则由二项式定理得

$B_1^{2k}=(-2E+C)^{2k}=(-2E)^{2k}+2k(-2E)^{2k-1}C=\begin{bmatrix}2^{2k}&-2^{2k}\cdot k\\0&2^{2k}\end{bmatrix}$. ------10分

$B_2^{2}=\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^2&0\\0&5^2\end{bmatrix}$ 从而 $B_2^{2k}=\begin{bmatrix}5^{2k}&0\\0&5^{2k}\end{bmatrix}$. -------14分

因此, $f(A)=\begin{bmatrix}2^{2k}&-2^{2k}\cdot k&0&0\\0&2^{2k}&0&0\\0&0&5^{2k}&0\\0&0&0&5^{2k}\end{bmatrix}$. --------16分

2. (10分)**解**

(1) 当 $k=0$ 时, 所给向量组为 $l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$. 2′

因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 所以部分组 α_2,α_3 线性无关. 又向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关, 可知向量 α_4 可由 α_2,α_3 线性表示, 且表达方式唯一, 不妨设为

$$\alpha_4 = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 . \quad 2' \qquad (*)$$

此时, 显然$l\alpha_4$也可由α_2,α_3线性表示, 故向量组$l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性相关. -------5分

(2) 当$k \neq 0$时，向量组$k\alpha_1 + l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

运用反证法.

假设向量组$k\alpha_1 + l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 则由$\alpha_2,\alpha_3$线性无关可知，$k\alpha_1 + l\alpha_4$可由$\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 且表达方式唯一, 不妨设为$k\alpha_1 + l\alpha_4 = l_1\alpha_2 + l_2\alpha_3$. 2′

将(*)式代入整理可得 $\alpha_1 = \frac{1}{k}[(l_1 - lk_1)\alpha_2 + (l_2 - lk_2)\alpha_3]$,

即向量α_1可由α_2,α_3线性表示, 与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关矛盾. 2′

故向量组$k\alpha_1 + l\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$线性无关. ---------10分