一、填空题与单项选择题（共 18 分，每小题 3 分）

1. 当 $a=$____ 时, 齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+(a-1)x_2+4x_3 &=0, \\ ax_1 \quad -5x_2 \quad +x_3 &=0, \\ -2x_1+3x_2+(a-2)x_3 &=0 \end{cases}$ 有非零实数解.

2. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 7 & -4 & -4 \end{bmatrix}^{-1} =$ ________________

3. 设向量组 $\alpha_1=[1,2,3,4,-3]^{\mathrm{T}}, \alpha_2=[1,-3,6,9,6]^{\mathrm{T}}, \alpha_3=[1,-2,9,4,-9]^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$____

4. 下列说法错误的是（　　）.

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^m$;

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 则 $(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$;

(C) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$;

(D) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 $n\times 1$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$, 则 $r(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})-r(\boldsymbol{B})=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 下列结论错误的有（　　）个.

(1) 若对于 n 元向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$, 有一组常数 $k_1,k_2,\dots,k_s$, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性相关.

(2) 若对于 n 元向量 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$, 有常数 $k_1=k_2=\dots=k_s=0$, 使得 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s=0$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 线性无关.

(3) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s(s>2)$ 线性相关的充分必要条件是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$ 中有包含着 $s-1$ 个向量的部分组线性相关.

(4) 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1,β_2 均可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 则向量组 β_1,β_2 线性相关.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

一、填空题与单项选择题（共 18 分，每小题 3 分）

1. 当 $a=$____ 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+(a-1)x_2+4x_3=0, \\ ax_1-5x_2+x_3=0, \\ -2x_1+3x_2+(a-2)x_3=0 \end{cases}$ 有非零实数解.

知识点 齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} \underline{2} & a-1 & 4 \\ a & -5 & 1 \\ \underline{-2} & 3 & a-2 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & a+2 & a+2 \\ a & -5 & 1 \\ -2 & 3 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & a+2 & 0 \\ a & -5 & 6 \\ -2 & 3 & a-5 \end{vmatrix} = -(a+2)(a^2-5a+12) = 0$$

$a=-2.$

3. 设向量组 $\alpha_1=[1,2,3,4,-3]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,-3,6,9,6]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[1,-2,9,4,-9]^{\mathrm{T}}$, 则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$__

知识点 矩阵三秩相等 $r(A)=r$(行向量组)$=r$(列向量组)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 9 & 4 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & -4 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$r=3.$

二、（15 分）当 p 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+ & x_2- & 2x_3+ & 6x_4=0, \\ 3x_1+ & 2x_2+ & x_3+ & x_4=p, \\ & x_2+ & 2x_3+ & 2x_4=2, \\ 5x_1+ & 2x_2- & 3x_3+ & 5x_4=11 \end{cases}$ 有解？并在有解时, 求出其向量形式通解.

解. 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换, 化为行阶梯形矩阵.

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2-r_1]{r_4-r_1-r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -5 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 11-p \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-2r_1 \\ r_4+r_3}]{r_1\leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -5 & p \\ 0 & -1 & -8 & 16 & -2p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13-p \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+r_2]{r_2\leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -5 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & 2-2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13-p \end{array}\right]$$

方程组有解, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 即 $p=13$. 此时

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 18 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2-2r_3 \\ r_1-3r_3}]{-\frac{1}{6}r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

方程组的向量形式解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall\, k\in\mathbb{P}.$ □

三、（共 31 分）

1.（16 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&2\\0&0&-1&-3\\3&-5&0&0\\2&-3&0&0\end{bmatrix}$. M_{ij},A_{ij} 分别是元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列元素的余子式之和； (2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和.

解. (1) $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}=-A_{12}+A_{22}-A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix}0&-1&1&2\\0&1&-1&-3\\3&-1&0&0\\2&1&0&0\end{vmatrix}$

$=-0+0-2-3$

$=(-1)^{2\times2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\2&1\end{vmatrix}=-5.$

(2) $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和即为 $\boldsymbol{A}^*$ 中各元素之和.

$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{2\times2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&-5\\2&-3\end{vmatrix}=-1\Rightarrow\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}.$

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}O&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&O\end{bmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3&-5\\2&-3\end{bmatrix}$.

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}O&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&\boldsymbol{C}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&O\end{bmatrix}$.

而 $\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*=\begin{bmatrix}3&2\\-1&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&5\\-2&3\end{bmatrix}$.

于是 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&3&-5\\0&0&2&-3\\-3&-2&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}$, 即 $\boldsymbol{A}$ 的各元素的代数余子式之和为 -6. □

2.（15 分）设 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\0&2&0&-2\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 且 $\boldsymbol{AXA}^*=\boldsymbol{XA}^{-1}+3\boldsymbol{A}^*$. 试不计算 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 而求解未知矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解. $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{AXA}^*)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{XA}^{-1})\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+3|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*$.

由于 $|\boldsymbol{A}^*|=8=|\boldsymbol{A}|^3\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=2$. 于是

$$4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}+6\boldsymbol{A}^*\Rightarrow(4\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=6\boldsymbol{A}^*.$$

作初等行变换

$$[4\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*\,\vdots\,6\boldsymbol{A}^*]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}2&0&2&0&12&0&-12&0\\0&2&0&2&0&12&0&-12\\0&0&2&0&0&0&12&0\\0&0&0&3&0&0&0&6\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{3}r_4]{\frac{1}{2}r_i,i=1,2,3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&1&0&6&0&-6&0\\0&1&0&1&0&6&0&-6\\0&0&1&0&0&0&6&0\\0&0&0&1&0&0&0&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-r_4}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&6&0&-12&0\\0&1&0&0&0&6&0&-8\\0&0&1&0&0&0&6&0\\0&0&0&1&0&0&0&2\end{array}\right].$$

说明 $4\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 且 $\boldsymbol{X}=6(4\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}6&0&-12&0\\0&6&0&-8\\0&0&6&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$. □

四、（16 分）设 $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ 5a & 5b & 5c \end{bmatrix}$，满足 $abc\neq 0$. 矩阵 $B=P^{2017}AQ^{2017}$，其中 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 求（1）$r(A)$;　（2）$B^{2017}$.

$$A\rightarrow\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解. (1) $r(A)=1$.

(2) $P^{2017}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2017 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$Q^{2017}=Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 于是

$$B=P^{2017}AQ^{2017}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2017 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ 5a & 5b & 5c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & a & c \\ 3b & 3a & 3c \\ 2022b & 2022a & 2022c \end{bmatrix}.$$

由于 $r(B)=1$，故

$$\begin{aligned} B^{2017} &= (\mathrm{tr}B)^{2016}B \\ &= (b+3a+2022c)^{2016}\begin{bmatrix} b & a & c \\ 3b & 3a & 3c \\ 2022b & 2022a & 2022c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

五、证明题（共 20 分）

1.（12 分）若 $\mathbb{P}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 证明当 $ab \neq 0$ 时, 向量组

$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + (1+a)\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + (1-a)\boldsymbol{\alpha}_4,$

$\boldsymbol{\beta}_3 = (1+b)\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + (1-b)\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$

线性无关.

证明. 令 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4], \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4]$, 则有

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal{\text{记作}} \boldsymbol{AC}.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{C}$,

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-c_1]{c_4-c_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+b & -b \\ 1 & 0 & 1 & -b \\ 1+a & -a & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+b & -b \\ 1 & 0 & 1 & -b \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 1 & 1+b & -b \\ 1 & 1 & -b \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2 \neq 0.$$

因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆. 则 $r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{AC}) = r(\boldsymbol{A})$.

但 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, $r(\boldsymbol{A}) = 4$. 于是 $r(\boldsymbol{B}) = 4$, 也即 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关. □

2.（8 分）设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_n, |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$.
证明：矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 不可逆.

证明. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}_n \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2 = 1$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 同理 $|\boldsymbol{B}|^2 = 1$ 且 $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

由于 $|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$, 故 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = -1$.

另外

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| \\
&= |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| \cdot |\boldsymbol{B}| \\
&= |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot |(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}| = -|\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}| \\
&= -|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}|.
\end{aligned}$$

可得 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 0$. 因此矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 不可逆.