

2011-2012(二)

一、填空题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 都是 4 元列向量, 且 $|A| = |\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 4, |B| = |\beta, 2\gamma_1, 3\gamma_2, \gamma_3| = 21$, 则 $|A+B| =$ _____.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $X =$ _____.

3. 已知 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta) = r, r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \gamma) = r+1$, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta, \gamma) =$ _____.

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 R^3 的一个基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为_____.

5. k 满足_____时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定的.

二、选择题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 设 A 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵, α_1, α_2 是方程组 $AX = 0$ 的两个不同的解向量, 则 $AX = 0$ 的通解必定是_____.

(A) $\alpha_1 + \alpha_2$ (B) $k\alpha_1$ (C) $k(\alpha_1 + \alpha_2)$ (D) $k(\alpha_1 - \alpha_2)$

2. 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若

$P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^{-1}AQ =$ _____.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设向量组 $\alpha_1 = [1, 2, -1]^T, \alpha_2 = [0, 2, 5]^T, \alpha_3 = [0, 1, 3]^T, \beta = [7, 8, 9]^T$, 则_____.

(A) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(B) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示法不唯一

(C) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示法唯一

(D) 向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B _____.

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似 (D) 既不合同也不相似

5. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则_____.

(A) AB 为对称矩阵

(B) BA 为对称矩阵

(C) $AB - BA$ 为对称矩阵

(D) $AB^T + BA^T$ 为对称矩阵

三、(8 分) 已知 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 $0, -1, -1$, 其对应的特征向量依次为 $X_1 = [1, 0, 0]^T, X_2 = [0, 1, 3]^T, X_3 = [0, 1, 2]^T$, 求 A^{2012} .

四、(8 分) 设 A 是秩为 3 的 5×4 矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $AX = \beta$ 的三个不同的解. 若 $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = [2, 0, 0, 0]^T, 3\alpha_1 + \alpha_2 = [2, 4, 6, 8]^T$, 求 $AX = \beta$ 的通解.

五、(10 分) 设 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & l \end{bmatrix}$.

判断当 m, l 为何值时向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关; 当 m, l 为何值时向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 并说明理由.

六、(12 分) 设

$$(I): E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(II): B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 是}$$

$R^{2 \times 2}$ 的两个基, 定义 $\sigma(A) = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A \in R^{2 \times 2}$.

(1) 试证 σ 是 $R^{2 \times 2}$ 上的线性变换;

(2) 求由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵;

(3) 求 σ 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 下的矩阵.

$$\text{七、(12 分) 设 } X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \text{ 满足方程 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 16 \end{bmatrix},$$

求 X .

$$\text{八、(16 分) 已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \text{ 实二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = X^T(A^T A)X$$

的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交替换 $X = QY$, 将二次型 f 化为标准形.

九、(4 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $AB + B^T A$ 是正定矩阵, 证明 A 可逆.