2016 ～ 2017 学年第二学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》 （A 卷　共 4 页）

（考试时间：2017 年 6 月 2 日）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$，则 $\begin{vmatrix} -3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{B})^{-1} \end{vmatrix} =$ ____________.

2、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，满足 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$，则矩阵 $\boldsymbol{X}=$ ____________.

3、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $1,2,3$ 的特征向量，$\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_5=3\alpha_2+4\alpha_3$，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=$ ____________.

4、设子空间 $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & 2a \end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$，写出 W 的一个基 ____________.

5、设 3 元实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 经正交线性替换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ____________.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 相似，则下列矩阵中为可逆矩阵的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$　　(B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$

2、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3×2 非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则（　　）.

(A) 当 $a=6$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组必线性相关

(B) 当 $a=6$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组必线性无关

(C) 当 $a\neq6$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组必线性相关

(D) 当 $a\neq6$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组必线性无关

3、在 $\mathbb{R}^3$ 中，下列变换为线性变换的是（　　）.

(A) $\sigma_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2,x_2x_3,x_1x_3)$

(B) $\sigma_2(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_1)$

(C) $\sigma_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$

(D) $\sigma_4(x_1,x_2,x_3)=(x_1+1,x_2+1,x_3+1)$

4、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&3\\0&3&8\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&9\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$（　　　）.

(A) 相似且合同　　(B) 相似但不合同

(C) 不相似但合同　　(D) 不相似且不合同

5、实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+2kx_2x_3$为正定二次型，则参数$k$的取值范围是(　　　).

(A) $-5<k<-1$　　(B) $-5<k<1$　　(C) $1<k<5$　　(D) $k>1$

三、(共 17 分，其中第 1 题 7 分，第 2 题 10 分)

1、求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\1\\-3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}4\\-2\\-4\\1\end{bmatrix}$的秩和极大无关组，并用极大无关组线性表示其余向量.

2、设向量$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\2&b&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$的特征向量.

(1)确定参数a,b的值以及特征向量$\boldsymbol{\alpha}$所对应的特征值；

(2)试问$\boldsymbol{A}$是否可对角化？说明理由.

四、(12 分) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\7\\a-5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4-a\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-1\\0\\3+3a\end{bmatrix}$，试问当$a$取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$可唯一地由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？

(2) $\boldsymbol{\beta}$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？

(3) $\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，但表示式不唯一？并写出全部表示式.

五、(共 10 分) 设向量组(I) $2+3x-x^2,-1-x+x^2,-1-2x+x^2$是线性空间$\mathbb{R}[x]_2$的一个基.

(1) 求由基(I)到标准基(II) $1,x,x^2$的过渡矩阵；

(2) 求$p(x)=8+5x-x^2$在基(I)下的坐标.

六、(共 10 分) 在$\mathbb{R}^{2\times2}$中定义线性变换$\sigma(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{A},\quad\forall\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times2}$.

(1)求σ在标准基$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$下的矩阵$\boldsymbol{M}_1$；

(2) 求 σ 在基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}3&5\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}2&3\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}0&0\\4&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}0&0\\2&2\end{bmatrix}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{M}_2$.

七、（共 14 分）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

(1) 求一个正交线性替换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出标准形；

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否为正定二次型.

八、（7 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.