

2016~2017 学年第一学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》(A 卷 共 4 页)

(考试时间: 2016 年 11 月 4 日)

一、填空题与单项选择题(共15分, 每小题3分)

1. 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 当  $p = \underline{\hspace{2cm}}$  时, 向量  $\alpha = [-5, 1, p, 7]^T$  可由  $\beta_1 = [3, 1, 5, -1]^T, \beta_2 = [1, -1, -1, -3]^T, \beta_3 = [3, 5, 13, 7]^T$  线性表示.

3. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 则  $|A^T A^*| = (\hspace{2cm})$ .  
(A)  $|A|^n$ ;      (B)  $|A|^{2n-1}$ ;      (C)  $|A|^{2n}$ ;      (D)  $|A|^{2n+1}$

4. 下列说法错误的有  $(\hspace{2cm})$  个.

- (1) 初等矩阵都是奇异的;
  - (2) 初等矩阵均为对称矩阵;
  - (3) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵;
  - (4) 初等矩阵的逆阵仍是初等矩阵;
  - (5) 初等矩阵的乘积仍是初等矩阵.
- (A) 1;      (B) 2;      (C) 3;      (D) 4

5. 设  $A, B$  均为  $m \times n$  阶矩阵, 且  $A^T B = E_n$ . 则  $(\hspace{2cm})$ .

- (A)  $A$  为降秩矩阵;      (B)  $n > m$ ;      (C)  $r(A) = m$ ;      (D)  $r(A) = n$

二、(共14分) 当  $a$  为何值时齐次线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - ax_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解? 并求出

其相应的向量形式的通解.

三、(共24分)

1. (10分) 计算 $n$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 & a_1 - b \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 - b & a_2 \\ a_3 & a_3 & \cdots & a_3 - b & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} - b & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n - b & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$ .

2. (14分) 设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & a_{13} & 0 \\ 1 & 8 & a_{23} & 5 \\ 0 & 9 & a_{33} & -6 \\ 2 & 5 & a_{43} & -3 \end{bmatrix}$ .  $M_{ij}$ ,  $A_{ij}$ 分别是 $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $2A_{13} - A_{23} - 2A_{43}$ ;

(2) 求 $M_{13} + M_{23} + M_{33}$ .

四、(共28分) 1. (14分) 设 $A^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 且 $A^{-1}BA = A^*B - E$ . 试不计算 $A$ 与 $A^{-1}$ , 而直接求矩阵 $B$ .

2. (14分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为3元列向量,  $A_{3 \times 3} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ ,  $B_{3 \times 3} = [2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, -4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3, 6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3]$ , 且 $A^2 = E_3$ . 求 (1)  $(AB)^{2016}$ ; (2)  $|(A+B)^{2016}|$ .

五、(共19分)

1. (10分) 若 $P^n$ 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 证明向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4$ ,  $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\beta_3 = \alpha_3 - \alpha_1$ ,  $\beta_4 = \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

2. (9分)

(1) 证明奇数阶反对称矩阵必不可逆;

(2) 设反对称矩阵 $A_{n \times n}$ 可逆,  $B = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$ , 其中 $\alpha_{n \times 1} \neq 0$ . 求 $r(B)$ .