18191 线性代数期中试题解析(2018.11.16)

一、填空题与单项选择题(共 30 分，6 个小题，每小题 5 分).

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&-3\\0&0&1&5\\-2&2&0&0\\3&-4&0&0\end{bmatrix}$的第3行元素的代数余子式之和为 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=$ __56__ .

解 原式 $=\begin{vmatrix}0&0&1&-3\\0&0&1&5\\1&1&1&1\\3&-4&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix}1&-3\\1&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\3&-4\end{vmatrix}=8\times(-7)=-56$.

考察知识点 行列式的按一行展开公式(的逆向使用)

次准下三角行列式

2. 设 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=$ __$-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}{6}$__ .

解 因为 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=-6\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}}{6}$.

考察知识点 用分离因子法判定可逆、求逆矩阵

3. 设4阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 $\frac{1}{3}$，则 $|(3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}+5(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}|=$ __48__ .

解 原式 $=|[(3\boldsymbol{A})^{-1}+5\boldsymbol{A}^*]^{\mathrm{T}}|=|\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^{-1}+\frac{5}{3}\boldsymbol{A}^{-1}|=2^4|\boldsymbol{A}|^{-1}=16\times 3=48$.

考察知识点 方阵的转置矩阵、倍矩阵、逆矩阵的行列式

4. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相抵，则(C).

(A) $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$ (B) $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$ (D) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$

考察知识点 初等变换不改变方阵的退化性

5. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则(B).

(A) 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 满秩 (B) 当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 降秩

(C) 当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 满秩 (D) 当 $m<n$ 时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 降秩

考察知识点 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant n$ 或 $r(\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant r(\boldsymbol{B}_{n\times s})\leqslant n$

6. 设向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性无关，$\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关，则(D).

(A) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性相关 (B) $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性表示 (D) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性表示

解 因为 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性无关，$\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性表示，也可由 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}\}$ 线性表示.

考察知识点 向量组的线性相关性

二、(16 分)求线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-x_4=-2\end{cases}$ 的向量形式的通解.

解 对增广矩阵作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-3r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&p+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4-2r_2\\r_2\times(-1)}]{\substack{r_1+r_2\\r_3-r_2}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

当 $p+8=0$，即 $p=-8$ 时，令自由未知量 $x_3=k_1, x_4=k_2$，可知通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+4k_1-\ \ k_2\\1-2k_1-2k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \forall k_1, k_2\in\mathbb{F}.$$

当 $p+8\neq 0$，即 $p\neq -8$ 时，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

令自由未知量 $x_4=k$，可知通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-\ \ k\\1-2k\\0\\k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \forall k\in\mathbb{F}.$$

考察知识点 用增广矩阵消元法求解含参数线性方程组

三、计算题(共 32 分，2 个小题，每小题 16 分).

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&0&0\\-2&4&0\\3&1&1\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 因为 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$，且

$$[\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-7&0&0\\-2&1&0&4&-7&0\\3&1&-2&-6&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-7&0&0\\0&1&0&-10&-7&0\\0&1&-2&15&-2&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(r_3-r_2)/(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-7&&\\0&1&0&-10&-7&\\0&0&1&-\frac{25}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-7&0&0\\-10&-7&0\\-\frac{25}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

考察知识点 用初等行变换法求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 型矩阵方程：

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times s}=\boldsymbol{B}_{m\times s}\Leftrightarrow \boldsymbol{PA}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times s}=\boldsymbol{PB}_{m\times s}，\ \forall \boldsymbol{P}_{m\times m}\text{ 可逆}.$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^m$，其中 m 为任意正整数.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\end{bmatrix}，\text{其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}，$$

$$r(\boldsymbol{B})=1\Rightarrow \boldsymbol{B}^m=(\operatorname{tr}\boldsymbol{B})^{m-1}\boldsymbol{B}=2^{m-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2^{m-1}&-2^{m-1}\\-2^{m-1}&2^{m-1}\end{bmatrix}，$$

$$\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{J}^3=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J})^m=\boldsymbol{E}^m+\mathrm{C}_m^1\boldsymbol{E}^{m-1}(-\boldsymbol{J})^1+\mathrm{C}_m^1\boldsymbol{E}^{m-1}(-\boldsymbol{J})^2$$

$$=\boldsymbol{E}-m\boldsymbol{J}+\tfrac{m(m-1)}{2}\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix}1&-m&\frac{m(m-1)}{2}\\0&1&-m\\0&0&1\end{bmatrix}，$$

所以

$$\boldsymbol{A}^m=\left[\begin{array}{cc:ccc}2^{m-1}&-2^{m-1}&&&\\-2^{m-1}&2^{m-1}&&&\\\hdashline&&1&-m&\frac{m(m-1)}{2}\\&&&1&-m\\&&&&1\end{array}\right].$$

考察知识点 准对角矩阵的幂

用秩1法求方阵的幂、用拆和法求方阵的幂

四、证明题(共 22 分，2 个小题，第 1 小题 14 分，第 2 小题 8 分).

1. 设向量组(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性无关，

$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$，

判断向量组(Ⅱ) $=\{\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ 的线性相关性，并说明理由.

解 因为

$x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_4 = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow (x_1+2x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-2x_1-3x_2-3x_3)\boldsymbol{\alpha}_2 + (x_1+4x_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + (x_1+3x_2-2x_3)\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ -2x_1-3x_2-3x_3=0, \\ x_1+4x_2-x_3=0, \\ x_1+3x_2-2x_3=0 \end{cases} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{\substack{r_3-2r_2 \\ r_4-r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$，

所以(Ⅱ)线性无关.

考察知识点 用定义法判别向量组的线性相关性

只有零解的齐次线性方程组的判别

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| = 0$，求证 $n\times n$ 齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 必有非零解.

证 只需证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = 0$，事实上，

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E} \Rightarrow |\boldsymbol{A}^2| = |\boldsymbol{E}| \Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2 = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \pm 1,$$

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}| \Rightarrow |\boldsymbol{B}| = \mp 1,$$

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = \frac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{|\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^2|}{-1} = -|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \Rightarrow |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = 0. \qquad \square$$

考察知识点 用行列式法判别有非零解的 $n\times n$ 齐次线性方程组

用乘积法计算行列式