2015 ～ 2016 学年第二学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》 （A 卷　共 4 页）

（考试时间：2016 年 6 月 12 日）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）　　　　2017级理学院严班　Johnson整理

1. 设$A=[a_{ij}]$是3阶方阵，$A^{-1}=[b_{ij}]$，则$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}^{-1}=$________.

2. 设3阶非零方阵A满足$AB=0$，其中$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$，则齐次线性方程组$AX=0$的通解为

________.

3. 在线性空间$R[x]_2$中，若向量组$g_1(x)=2, g_2(x)=1+x, g_3(x)=3+kx^2$线性相关，则参数k的值为________.

4. 设矩阵A与$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$相似，则$r(A^{-1}-E)=$________.

5、设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足$|3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有两个线性无关解，则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为________.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 均为n阶方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且$\boldsymbol{B}$ 可逆，则(　　).

(A) 矩阵$\boldsymbol{A}$ 的行向量组与矩阵$\boldsymbol{C}$ 的行向量组等价
(B) 矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量组与矩阵$\boldsymbol{C}$ 的列向量组等价
(C) 矩阵$\boldsymbol{B}$ 的行向量组与矩阵$\boldsymbol{C}$ 的行向量组等价
(D) 矩阵$\boldsymbol{B}$ 的列向量组与矩阵$\boldsymbol{C}$ 的列向量组等价

2、设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则线性方程组$(AB)X=0$（　　）

(A) 当$m<n$时，方程组只有零解　　(B) 当$m<n$时，方程组必有非零解
(C) 当$m>n$时，方程组只有零解　　(D) 当$m>n$时，方程组必有非零解

3、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$，若存在两组不全为零的实数$k_1,\dots,k_m$和$l_1,\dots,l_m$使得$(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+(k_m+l_m)\boldsymbol{\alpha}_m+(k_1-l_1)\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+(k_m-l_m)\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{0}$，则(　　).

(A) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$都线性相关

(B) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$和$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$都线性无关

(C) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$线性相关

(D) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\beta}_m,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m-\boldsymbol{\beta}_m$线性无关

4、设$\boldsymbol{\alpha}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量，$\boldsymbol{S}$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{B}$，则(　　)为方阵 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ (B) $\boldsymbol{S\alpha}$ (C) $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ (D) $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

5、设A为4阶实对称矩阵，且$A^4+A=0$，若A的秩为3，则A合同于（ ）

(A) diag(1,1,1,0) (B) diag(1,1,-1,0) (C) diag(1,-1,-1,0) (D) diag(-1,-2,-3,0)

三、（共 17 分，其中第 1 题 7 分，第 2 题 10 分）

1、设集合$W=\left\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{2\times2}\,|\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\right\}$. 证明$W$是$\mathrm{R}^{2\times2}$的子空间，并求$W$的一个基及其维数.

2、设$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}k\\-2\\3\end{bmatrix}$为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&-1\\-2&a&2\\3&6&-1\end{bmatrix}$的一个特征向量.

(1) 求$\boldsymbol{X}$所对应的特征值及方阵$\boldsymbol{A}$的迹；

(2) 判断矩阵$\boldsymbol{A}$是否可对角化，并说明理由.

四、（12分）已知R^4中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\4\\2\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2\\-7\\-5\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\10\\a+7\\-7\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}4\\13\\11\\a-8\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}5\\16\\14\\-11\end{bmatrix},$$

试问$\boldsymbol{\alpha}_5$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示？若能表示，试求全部表达方式.

五、（11分）设向量空间R^3中由基(II)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基(I)$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}3&2&2\\-4&-2&-3\\2&1&2\end{bmatrix}$.

(1) 求基(II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$；

(2) 向量$\boldsymbol{\gamma}$在基(I)下的坐标为$[1,-1,3]^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{\gamma}$在基(II)下的坐标.

六、（11分）设σ是定义在线性空间$\mathrm{R}[x]_2$上的线性变换，且

$\sigma(f(x))=(a_0+a_1)+(a_1+a_2)x+(a_2+a_0)x^2,\forall f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in\mathrm{R}[x]_2$.

(1) 求σ在标准基$1,x,x^2$下的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2) 求σ在标准基$f_1(x)=1,f_2(x)=x+2x^2,f_3(x)=3x+5x^2$下的矩阵.

七、（14分）(1) 用正交线性替换化实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$$

为标准形，并写出所用的正交线性替换；(2) 求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

八、(5分) 设 $\boldsymbol{A}$ ， $\boldsymbol{B}$ 为n阶正定矩阵.

(1)证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵;

(2)若$\boldsymbol{A}$的特征值全部大于a, $\boldsymbol{B}$的特征值全部小于b, 求证$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的特征值均大于 $a-b$.