2019～2020 学年第一学期第二次月考试卷参考答案

《高等数学 2A》（共 3 页）

（考试时间：2019 年 12 月 6 日 13:30-15:00）

一、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 计算不定积分 $\int \frac{3x+2}{x^2-2x+6}\mathrm{d}x$.

解：$$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+6}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-2)\mathrm{d}x}{x^2-2x+6} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+5}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+6\right)+\sqrt{5}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

2. 计算不定积分 $\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

解：$$\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \ln(1+x)\mathrm{d}\frac{1}{x}$$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{x}+\int \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln(1+x)}{x}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C.$$

3. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}\arcsin x, & -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2},\\ x, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

解：令 $t=x-1$，则

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\arcsin t\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{1} t\,\mathrm{d}t \quad \left(\sqrt{1-t^2}\arcsin t \text{ 在}[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\text{上为奇函数}\right)$$

$$=0+\frac{1}{2}t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{8}.$$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(\mathrm{e}^x-1)}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

解：$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 2(\mathrm{e}^x-1)}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{2(\mathrm{e}^x-1)}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2}{\sqrt{1+x^3}}=2\ne f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

当 $x>0$ 或 $x<0$ 时，$f(x)$ 为初等函数,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上连续.

二、计算与解答题（每小题 10 分，共 40 分）

1. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

解：$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}=\infty$, 所以 $x=1$ 为瑕点（奇点）.

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

令 $t=\sqrt{x-1}$,

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t+\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{2}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}2\arctan t\Big|_{\varepsilon}^{1}+\lim_{b\to+\infty}2\arctan t\Big|_1^{b}=\pi.$$

2. 设 $F(x)$ 是 $f(x)=\mathrm{e}^x\left(\sqrt{\sin x}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right)$ 的原函数，且 $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$，求 $F(x)$.

解：$F(x)=\int\mathrm{e}^x\left(\sqrt{\sin x}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\sqrt{\sin x}$$

$$=\int\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}-\int\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}+C.$$

由 $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$，得 $C=\frac{\sqrt2}{2}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}\right)$.

所以 $F(x)=\mathrm{e}^x\sqrt{\sin x}+\frac{\sqrt2}{2}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}\right)$.

3. 计算心形线 $\rho=a(1+\cos\theta),\ a>0$ 的全长.

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$

$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta,$$

由对称性，弧长

$$s=2s_{上}=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上连续，且 $f(x)=\ln x-x\cdot\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

解：设 $a=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$，于是 $f(x)=\ln x-ax$,

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}-a$, 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上积分，得

$$a=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}}a\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac12\ln^2x\Big|_1^{\mathrm{e}}-a(\mathrm{e}-1)=\frac12-a(\mathrm{e}-1),$$

解得 $a=\frac{1}{2\mathrm{e}}$,

所以 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2\mathrm{e}}x$.

三、解答与证明题（共 20 分，第 1 题 15 分，第 2 题 5 分）

1. 设 D 是由上半圆 $y=\sqrt{8-x^2}$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 所围成的平面图形.

（1）求 D 的面积 S；

（2）求 D 绕 y 轴旋转一周而得到的旋转体的体积 V_y.

解：(1) 由 $\begin{cases} y=\sqrt{8-x^2}, \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ 得到交点 $(-2,2)$, $(2,2)$.

$$S=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^2 x^2\mathrm{d}x$$

令 $x=\sqrt{8}\sin t$,

$$\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}8\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\pi+2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi+2,$$

所以 D 的面积 $S=2(\pi+2)-\frac{8}{3}=2\pi+\frac{4}{3}$.

（2）D 绕 y 轴旋转而得的旋转体体积

$$V_y=\pi\int_0^2 2y\,\mathrm{d}y+\pi\int_2^{\sqrt{8}}\left(8-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=4\pi+8\pi\left(\sqrt{8}-2\right)-\frac{1}{3}\pi\left(8\sqrt{8}-8\right)$$

$$=4\pi+\frac{32\sqrt{2}-40}{3}\pi$$

$$=\frac{32\sqrt{2}-28}{3}\pi.$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续的导数，且 $f(0)=f(1)=0$.

证明：$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$.

证明：由题意, $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上连续, 设 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 M .

由拉格朗日中值公式，$\forall x\in(0,1)$，有

$$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x,\quad 0<\xi<x,$$

$$f(x)=f(x)-f(1)=f'(\eta)(1-x),\quad x<\eta<1,$$

于是 $|f(x)|=|f'(\xi)x|\le Mx$，且 $|f(x)|=|f'(\eta)(1-x)|\le M(1-x)$,

因此

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\le M\int_0^{\frac{1}{2}}x\,\mathrm{d}x+M\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=M\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{M}{4}.$$