2019～2020 学年第一学期期中考试试卷和答案

《高等数学 2A》

（共 3 页，另附 2 页草纸）

（考试时间：2019 年 11 月 8 日, 14:00-16:00）

题号	一	二	三	四	五	成绩	核分人签字
满分	15	15	8	40	22	100	
得分							

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 下列各式正确的是 (B).

(A) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{x}=1$ (B) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

(C) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x=\mathrm{e}$ (D) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\ln|x-1|$，则 $f(x)$ 的间断点情况是(A).

（A）有且仅 1 个可去间断点和 1 个无穷间断点 （B）有且仅有 1 个跳跃间断点

（C）有且仅 1 个跳跃间断点和 1 个无穷间断点 （D）有且仅有 1 个无穷间断点

3. 已知 $\int f(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\sin x^2+C$，则 $f(x)=$(D).

（A）$2x\cos x^2$ （B）$4x\cos x^2$ （C）$2x\cos 4x^2$ （D）$4x\cos 4x^2$

4. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则一定存在常数 $\delta>0$，使得(D).

(A) 曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内是凹的

(B) 曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内是凸的

(C) 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0]$ 上单调递增，在区间 $[x_0, x_0+\delta)$ 上单调递减

(D) 函数 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0]$ 上单调递减，在区间 $[x_0, x_0+\delta)$ 上单调递增

5. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $(1-x)f''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^x$，$f'(0)=0$，则(C).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 (D) 以上都不对

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1})=$ ___$\dfrac{1}{2}$___.

2. 已知 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t},\\ y=\mathrm{e}^t+t\end{cases}$ 确定的函数，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ___3___.

3. 设 $y=x\mathrm{e}^{2x}$，则 $y^{(10)}(0)=$ ___5×2^{10}(或5×1024 或5120)___.

4. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+2$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有___2___个零值点.

5. $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\sin x-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{6}}$ 是 x 的 n 阶无穷小，则 $n=$ ___5___.

三、计算题（共 8 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^3), & x\le0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解：当 $x<0$ 时，$f'(x)=\dfrac{-3x^2}{1-x^3}$；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{x^2})=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1-x^3)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^3}{x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}=0,\ (\lim_{x\to0}x=0,\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le1),$$

故 $f'(0)=0$.

所以，$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{x^3-1}, & x\le0,\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

四、计算题（共 40 分，每小题 8 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

解：因为 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\ln(1+2x)\sim 2x(x\to 0)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin 3x}{\frac{x^2}{2}(2x)}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos 3x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\frac{9}{2}.$$

2. 已知 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{e}^x}$，求 $f'(x)$.

解：$\ln|f(x)|=\dfrac{1}{3}\ln|2x-1|+\ln|\sin 2x|-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-x$，

两边对 x 求导，得

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{x^2+1}}\frac{\sin 2x}{\mathrm{e}^x}\left(\frac{2}{3(2x-1)}+2\cot 2x-\frac{x}{x^2+1}-1\right)$$

3. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3-y^3-6x-3y=0$ 确定的隐函数，求 $\mathrm{d}y\big|_{x=2}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=2}$.

解：在方程边对 x 求一阶导和二阶导，得

$$x^2-y^2y'-2-y'=0, \qquad ①$$

$$2x-2yy'y'-y^2y''-y''=0. \qquad ②$$

由等式①解得，$y'=\dfrac{x^2-2}{1+y^2}$.

当 $x=2$ 时，由方程解得 $y=-1$，所以 $\mathrm{d}y\big|_{x=2}=\left.\dfrac{x^2-2}{1+y^2}\right|_{x=2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$.

由等式②解得 $y''=\dfrac{2(x-yy'^2)}{1+y^2}=\dfrac{2}{(1+y^2)^3}[x(1+y^2)^2-y(x^2-2)^2]$.

所以，$y''\big|_{x=2}=3$.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}=1$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

解法一：由题意，$\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x+f(x))=0$，由连续性，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to 0}2\cos x=-2$.

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x+f'(x)}{2x}=1$，同上可得 $f'(0)=0$.

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+f'(x)}{2x}=-1+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=-1+\frac{1}{2}f''(0),$$

得 $f''(0)=4$.

解法二：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}=1$，从而 $\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}=1+\alpha$，$\alpha$ 为 $x\to 0$ 时的无穷小.

因此 $f(x)=-2\cos x+x^2+\alpha x^2$，又由泰勒公式，$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，所以

$$f(x)=-2+2x^2+o(x^2)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2),$$

所以，由泰勒公式可得，$f(0)=-2$，$f'(0)=0$，$f''(0)=4$.

解法三：直接对 $\cos x$ 和 $f(x)$ 使用带佩亚诺型余项的二阶泰勒公式.

5．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2})$.

解：对函数 $f(x)=2^x$ 在 $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}=2^{\xi}\cdot\ln 2\cdot\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，其中 ξ 满足 $\dfrac{1}{n+1}<\xi<\dfrac{1}{n}$,

从而当 $n\to\infty$ 时，$\xi\to 0$．于是有

$$\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{\xi}\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)n^2$$

$$=\ln 2\cdot\lim_{\xi\to 0}2^{\xi}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=\ln 2.$$

五、解答和证明题（共 22 分，第 1 小题 10 分，第 2、3 小题每题 6 分）

1. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的凹凸区间、拐点的坐标和所有渐近线的方程.

解：定义域 $\{x \mid x\neq 1\}$.

$$y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},\qquad y''=\frac{6x}{(x-1)^4}.$$

令 $y''=0$, 得 $x=0$.

列表如下：

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	凸	$(0,0)$ 是拐点	凹	凹

所以 $f(x)$ 的凹区间是 $(0,1)\cup(1,+\infty)$, 凸区间是 $(-\infty,0)$.

拐点：$(0,0)$

垂直渐近线：因为 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$, 所以 $x=1$ 是垂直渐近线.

斜渐近线：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=2$

所以，斜渐近线：$y=x+2$.

2. 证明：$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geq\sqrt{1+x^2}$，其中 $x\in(-\infty,+\infty)$.

证明：记 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

令 $f'(x)=0$，解得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=0$. 又

$$f''(0)=\left.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=1>0,$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值点，因而也是其最小值点，

从而 $f(0)=0$ 是 $f(x)$ 的最小值，故 $f(x)\geq 0$，结论得证.

3. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$，证明方程 $f(x)f'(x)=x$ 在 (a,b) 内至少存在一个实数根.

证明：令 $F(x)=[f(x)]^2-x^2$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

由 $f^2(b)-f^2(a)=b^2-a^2$，得 $F(a)=F(b)$.

由罗尔中值定理可得，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$，即 $2f(\xi)f'(\xi)-2\xi=0$,

所以有 $f(\xi)f'(\xi)=\xi$，即方程 $f(x)f'(x)=x$ 在 (a,b) 内至少存在一个实数根.