2014-2015(2) 期中试题参考答案

一、

1.(13 分)**解**　对方程组的增广矩阵作初等行变换,

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc:c}2&1&3&5&-5&-1\\1&1&1&4&-3&0\\1&-1&3&-2&-1&-2\\3&1&5&6&-7&-2\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&4&-3&0\\2&1&3&5&-5&-1\\1&-1&3&-2&-1&-2\\3&1&5&6&-7&-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1\\ r_3-r_1}}\left[\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&4&-3&0\\0&-1&1&-3&1&-1\\0&-2&2&-6&2&-2\\0&-2&2&-6&2&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&0&2&1&-2&-1\\0&1&-1&3&-1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

因为 $r(\tilde{A})=r(A)=2<5$, 所以方程组有无穷多组解.

同解方程组为 $\left\{\begin{array}{l}x_1=-1-2x_3-x_4+2x_5,\\x_2=1+x_3-3x_4+x_5.\end{array}\right.$

方程组的通解为

$$X=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数.}$$

2.(14 分)**解**　**法一**　当系数行列式 $|A|=0$ 时, 齐次线性方程组有非零解. 而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&\lambda\\4&1&\lambda^2\end{vmatrix}=V(2,-1,\lambda)=(-1-2)(\lambda-2)(\lambda+1),$$

故当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$ 时, 所给齐次线性方程组有非零解.

当 $\lambda=2$ 时,　$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&2\\4&1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$

$r(A)=2<3$, 方程组有无穷多组解.

同解方程组为 $\left\{\begin{array}{l}x_1=-x_3\\x_2=0.\end{array}\right.$

方程组的通解为　$X=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

当 $\lambda=-1$ 时, $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\4&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

$r(A)=2<3$, 方程组有无穷多组解.

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=-x_3.\end{cases}$

方程组的通解为 $X=k\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

法二 对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&\lambda\\4&1&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&\lambda-2\\0&-3&\lambda^2-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-3&\lambda-2\\0&0&(\lambda-2)(\lambda+1)\end{bmatrix}.$$

当 $\lambda=2$ 或 $\lambda=-1$ 时,$r(A)=2<3$, 所给齐次线性方程组有非零解.

(以下同法一)

二、

1.(10 分)**解** $$D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix}(n-1)a+b&a&\cdots&a&a&b\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&b&a\\(n-1)a+b&a&\cdots&b&a&a\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\(n-1)a+b&b&\cdots&a&a&a\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&a&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\ldots,n-1]{r_i-r_n}\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&0&b-a\\0&0&\cdots&0&b-a&0\\0&0&\cdots&b-a&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&b-a&\cdots&0&0&0\\(n-1)a+b&a&\cdots&a&a&a\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}.$$

另解:$$D_n \xlongequal{c_n+c_1+c_2\cdots+c_{n-1}} \begin{vmatrix}a&a&\cdots&a&a&(n-1)a+b\\a&a&\cdots&a&b&(n-1)a+b\\a&a&\cdots&b&a&(n-1)a+b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a&b&\cdots&a&a&(n-1)a+b\\b&a&\cdots&a&a&(n-1)a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\ldots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & (n-1)a+b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b](b-a)^{n-1}.$$

2.(13 分)**解**

(1) $M_{21}+3M_{22}+4M_{23}+M_{24}=-A_{21}+3M_{22}-4A_{23}+A_{24}$

$=-(A_{21}-3M_{22}+4A_{23}-A_{24})=0.$ (异乘为零)

(2) $$A_{12}-A_{32}-A_{42}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}=-22.$$

三、

1.(14 分)**解** $|A|=4.$

对 $AXA^*=8XA^{-1}+12E_4$ 两边同右乘 A得

$$AX|A|=8X+12A.$$

代入 $|A|=4$ 整理得 $(A-2E)X=3A.$

$$[A-2E\vdots 3A]=\left[\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & -9 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

求得

$$X=(A-2E)^{-1}(3A)=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

另解: $X=3(A-2E)^{-1}A.$

$$[A-2E \vdots E] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

得 $(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

从而

$$X = 3(A-2E)^{-1}A = 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.(10 分)**解** $|2A^{\mathrm{T}}(B-A)B^*| = 2^3|A||B-A||B^*| = -8|B-A||B|^2$.

由 $B_{3\times3} = [2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

得 $|B| = |A|\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

$B_{3\times3} - A_{3\times3} = [\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

得 $|B-A| = |A|\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$

从而,$|2A^{\mathrm{T}}(B-A)B^*| = -8\times(-2)\times 9 = 144.$

四、

1.(12 分)**解**

(1) 因为 $r(A)=1$, 所以 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 16 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 8 & 40 \end{vmatrix} = 0.$

解得 $a=2, b=0, c=5.$

(2) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 16 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & 0 & 9 & 45 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}[2,0,1,5]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. (注: 分解不唯一)

$$A^m=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{m-1}A=36^{m-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 16 & 0 & 8 & 40 \\ 18 & 0 & 9 & 45 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}.$$

2.(8 分)**证** 反证法.

假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关, 所以向量 $k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表达方式唯一, 设为

$$k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

从而 $\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3-k\boldsymbol{\beta}_1$.

又因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 记为 $\boldsymbol{\beta}_1=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}_2=(k_1-kl_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-kl_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-kl_3)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

与题设 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示矛盾. 故假设不成立. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

3.(6 分)**证** $PQ=\begin{bmatrix} E & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*A+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*\boldsymbol{\alpha}+|A|b \end{bmatrix}$.

因为 $A^*A=|A|E$, 故 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*A+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=-|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$.

又因 A 为可逆矩阵, 故 $A^*=|A|A^{-1}$,

于是 $-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^*\boldsymbol{\alpha}+|A|b=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

从而 $PQ=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{0} & |A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}$.

$|PQ|=|P||Q|=|A|^2(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

代入 $|P|=|A|\neq 0$, 得 $|Q|=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$.

因此矩阵 Q 可逆 $\Leftrightarrow\ |Q|\neq 0\ \Leftrightarrow b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0\ \Leftrightarrow\ b\neq\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.