第一章

三、 **1. 解** 法一：克拉默法则

$$D=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_1]{r_2+r_1\times(-2)}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&a-2&-3\end{vmatrix}$$

$$=3-a(a-2)\ =-a^2+2a+3\ =-(a-3)(a+1)\neq 0.$$

因此, $a\neq 3$ 且 $a\neq -1$.

法二：初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1\times(-2)}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&a-2&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times(a-2)}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&0&-3+a^2-2a\end{bmatrix},$$

由齐次方程组只有零解得 $r(A)=3$. 于是 $a^2-2a-3\ =(a-3)(a+1)\neq 0$. 所以,$a\neq 3$ 且 $a\neq -1$.

2. 解 (初等行变换)

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times(a-2)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right],$$

当 $r(A)\neq r(\tilde{A})$ 时, 非齐次方程组无解.

当 $a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\neq 0$ 时,$r(A)=r(\tilde{A})=3$, 方程组有唯一解;

当 $a=3$ 时,$r(A)=r(\tilde{A})=2<3$, 方程组有无穷多解;

当 $a=-1$ 时,$\tilde{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{array}\right]$,

$r(A)=2\neq r(\tilde{A})=3$, 方程组无解.

所以, 答案为 $a=-1$.

3. 解 (初等行变换)

非齐次方程组有两个不同的解向量, 蕴含着此方程组有无穷多解.

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-a&3\\2&0&-3&1\\-2&a&10&4\end{array}\right]\xrightarrow[r_2+r_1\times(-2)]{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&-a&3\\0&2&-3+2a&-5\\0&a&7&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times(-\frac{a}{2})}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -a & 3\\ 0 & 2 & -3+2a & -5\\ 0 & 0 & -a^2+\frac{3}{2}a+7 & \frac{5}{2}a+5\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -a & 3\\ 0 & 2 & -3+2a & -5\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(2a-7)(a+2) & \frac{5}{2}(a+2)\end{array}\right],$$

当 $a=-2$ 时, $r(A)=r(\tilde{A})=2<3$, 方程组有无穷多解.

四、**1. 解** 对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$$A=\begin{bmatrix}3 & -5 & 5 & -3\\ 1 & -2 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -5 & -1\\ 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由 $r(A)=2<4$, 方程组有非零解.

同解方程组为 $\begin{cases}x_1 = 5x_3+x_4\\ x_2 = 4x_3\end{cases}$.

方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

2. 解 对方程组的增广矩阵作初等行变换,

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}3 & -5 & 5 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2 & -2 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

由于 $r(\tilde{A})=r(A)=2<4$, 所以方程组有无穷多解.

由 $\tilde{A}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -5 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

得同解方程组为 $\begin{cases}x_1 = -1+5x_3+x_4\\ x_2 = -1+4x_3\end{cases}$.

方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}5\\ 4\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

3. 解 用联立法求公共解问题. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & -3(a-1) \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right]$$

要使此方程组有解, 必须有 $(a-1)(a-2)=0$, 得 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时,$\tilde{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, 得公共解为

$X=k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall k \in P.$

当 $a=2$ 时,$\tilde{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

得公共解为 $X=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

第二章

三、**1. 解** $|B| = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{vmatrix} \xlongequal{c_3-c_1} 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_3 \leftrightarrow c_2} -2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2m.$

2. 解 $D \xlongequal{r_1+r_4} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_2]{r_4 \leftrightarrow r_3} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

$= 10V(1,2,3,4)$

$= 10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)$

$= 120$

3. 解 $|A| \xlongequal{c_n+c_1+\cdots+c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$= b(A_{1n} + A_{2n} + \cdots + A_{nn}) = a$

得 $A_{1n} + A_{2n} + \cdots + A_{nn} = \dfrac{a}{b}.$

4. 解 $A_{11} + 2A_{21} + A_{31} + 2A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\substack{c_3-c_1 \\ c_4-c_1}]{c_2-c_1} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1\times(-3)]{r_2-r_1} -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -8 \end{vmatrix} = -12$

5. 解 $f(x)$ 常数项为 $f(0) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-3) \times (-2)(2+1) = 18.$

6. 解 [法一] 当$x=a_1$时，左边 $=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix}=0$,方程有根 $x_1=a_1$.

同理, 方程有根 $x_2=a_2$, $x_3=a_3$.

又行列式从第二列开始每一列都加到第一列，再提取第一列的公因子

$x+a_1+a_2+a_3$,得$x_4=-(a_1+a_2+a_3)$.

所以，方程有根$x_1=a_1, x_2=a_2, x_3=a_3, x_4=-(a_1+a_2+a_3)$.

[法二] 从第二列开始每一列都加到第一列，

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} x+a_1+a_2+a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x+a_1+a_2+a_3 & x & a_2 & a_3 \\ x+a_1+a_2+a_3 & a_2 & x & a_3 \\ x+a_1+a_2+a_3 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\r_2-r_1}]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} x+a_1+a_2+a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & x-a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2-x & x-a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & x-a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(x+a_1+a_2+a_3)\ (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=0.$$

所以，方程有根$x_1=a_1, x_2=a_2, x_3=a_3, x_4=-(a_1+a_2+a_3)$.

五、**1. 解** $D=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0,$$

得 $\lambda=1, \lambda=-1$ (二重).

2. 解$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\times(-1)\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$=-2\times 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1(-2)}-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=-10\times(-2)(-42-12)=-1080.$$

3. 解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3+r_1(-2)}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2\times 2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=9-18=-9.$$

4. 解 $D=\left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 & 4 & 5 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 16 \end{array}\right| \xlongequal[r_5-r_2]{r_4-r_1} \left|\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 & 4 & 5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 16 \end{array}\right|$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}=V(1,2,3)V(2,3,4)$$

$$=(2-1)(3-1)(3-2)\cdot(3-2)(4-2)(4-3)=4.$$

5. 解齐次线性方程组有非零解, 当且仅当系数矩阵的行列式 $|A|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda+1 & -2 \\ 5 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda+1 & -2 \\ 5 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_1} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & -2 \\ 5 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-2)[(\lambda+2)(\lambda-4)+8]=\lambda(\lambda-2)^2=0,$

于是, 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时, 方程组有非零解.

6. 解 由 $D=|A^{\mathrm{T}}|=|A|$ 是范德蒙行列式, 且由$a_i\neq a_j$ 得$D=|A|\neq 0$. 根据 Cramer 法则, 方程组 $A^{\mathrm{T}}X=\beta$ 有唯一解 .

由系数矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$

得 $D_1=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=|A^{\mathrm{T}}|=|A|=D,$

$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & 1 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & 1 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=0$, 类似可得 $D_3=D_4=\cdots=D_n=0$.

所以, 方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=0, \cdots, x_n=\dfrac{D_n}{D}=0$.

[补充]计算 $n+1$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} x_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & x_1 & & & \\ z_2 & & x_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ z_n & & & & x_n \end{vmatrix}$, 其中 $x_i \neq 0, i=1,2,\ldots,n$.

分析 箭形

从第 2 列开始每一列提取 x_i, 得

$$D=x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} x_0 & \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & \frac{y_n}{x_n} \\ z_1 & 1 & & & \\ z_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ z_n & & & & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2\times(-z_1)} \prod_{i=1}^{n} x_i \begin{vmatrix} x_0-\frac{y_1}{x_1}z_1 & \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & \frac{y_n}{x_n} \\ 0 & 1 & & & \\ z_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ z_n & & & & 1 \end{vmatrix}$$

解 从第 2 列开始每一列提取 x_i, 得 $D=x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} x_0 & \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & \frac{y_n}{x_n} \\ z_1 & 1 & & & \\ z_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ z_n & & & & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1+\sum\limits_{i=2}^{n+1} c_i\times(-z_{i-1})} \prod_{i=1}^{n} x_i \begin{vmatrix} x_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}z_i & \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & \frac{y_n}{x_n} \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(x_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{y_iz_i}{x_i}\right)\prod_{i=1}^{n} x_i.$$

第三章

三填空题

1. 分析 若 $A=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}\neq 0,\boldsymbol{\beta}\neq 0$, 则矩阵 $A_{n\times n}$ 为秩 1 矩阵.

$A^k=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{k-1}A=(trA)^{k-1}A.$

$trA=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

解 $A=\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}[1\quad 0\quad -1]=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$A^n=(trA)^{n-1}A=2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{bmatrix}.$

因此 $|kE-A^n|=\begin{vmatrix}k-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&k&0\\2^{n-1}&0&k-2^{n-1}\end{vmatrix}$

$=k[(k-2^{n-1})^2-2^{2(n-1)}]=k^2(k-2^n).$

2. 解 $|AB|=|A||B|=6\times(-1)^{\frac{3\times(3-1)}{2}}4\times 5\times 6=-720.$

3. 解 $\boldsymbol{B}_{3\times 3}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3]$

$=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}.$

$|B|=|A|V(1,2,3)=5\times(2-1)\times(3-1)\times(3-2)=10.$

4. 解 $B=A^2-3A+2E=(A-2E)(A-E)$

$B^{-1}=(A-E)^{-1}(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1\\2&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&-1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1\\-2&0\end{bmatrix}\frac{1}{-1+2}\begin{bmatrix}1&1\\-2&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{bmatrix}.$

5. 解 由 $A^2+A-6E=O$ 得 $(A-3E)(A+4E)+12E-6E=O.$

整理得 $(A-3E)(A+4E)=-6E,$

从而 $(A-3E)[-\frac{1}{6}(A+4E)]=E.$

因此, $A-3E$ 可逆, 且 $(A-3E)^{-1}=-\frac{1}{6}(A+4E).$

6. 解 $A^*=|A|A^{-1}$

$|(\frac{1}{4}A)^{-1}-15A^*|=|4A^{-1}-15\times\frac{1}{3}A^{-1}|=|-A^{-1}|$
$=(-1)^n|A^{-1}|=(-1)^n3.$

7.**解** $|A^{-1}+B|=|A^{-1}(E+AB)|=|A^{-1}(B^{-1}+A)B|$
$=|A^{-1}|\cdot|(B^{-1}+A)|\cdot|B|=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot|\frac{1}{|B|}B^*+A|$
$=\frac{1}{3}\cdot 2|\frac{1}{2}B^*+A|=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2^n}|B^*+2A|=2,$
解得 $|2A+B^*|=3\cdot 2^n.$

8.**解** $|A|=1\neq 0$, A 可逆. 下面求 A^{-1}.

$$[A\vdots E]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&0&1&0&0&0&1&0\\4&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&-3&0&1&0\\0&0&0&1&-4&0&0&1\end{array}\right], \text{得 } A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$\text{所以 } A^*=|A|A^{-1}=A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{bmatrix}.$$

因此,A 的各元素的代数余子式之和 为 $1+1+1+1-2-3-4=-5$;

A 的各元素的余子式之和为 $1+1+1+1+(-1)\times(-2)-3+(-1)\times(-4)=7$.

9.**解** $r(A_{5\times 5})=4=5-1=n-1$.

$$\text{依据 } r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$$

易得 $r(A^*)=1$,$r[(A^*)^*]=0$.

10.**解**A 是按行 (列) 成比例的非零矩阵, $r(A)=1<3-1$, 所以 $r(A^*)=0$, $A^*=O$.

秩 1 矩阵 $A^k=(tr(A))^{k-1}A$. 所以,$A^{20}=(-6)^{19}A=-6^{19}A$.

$tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+(-4)+(-3)=-6$.

$$\text{另:} A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T.$$

$tr(A)=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=1\times 1+2\times(-2)+(-1)\times 3=-6$.

11.**解** 由 $|A|=1\neq 0$, 知 A 可逆.

因此 $r(A^2-A)=r(A(A-E))=r(A-E)$.

又 $A-E=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $r(A-E)=1$,

从而,$r(A^2-A)=1$.

12.**解** 由 $AB=O$, 得 $r(A)+r(B)\leq 3$.

又 $A\neq O$, 可知 $r(A)\geq 1$.

从而, $r(B)\leq 3-1=2<3$, 因此,$|B|=0$.

计算 $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+r_1\times(-3)]{r_2+r_1\times(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & t-10 \\ 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$

$=24-(-4t+40)=4t-16=0$,

得 $t=4$.

五综合题

1.**证明** 记 $(\boldsymbol{X}_{n\times 1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1}=c$. $\quad(*)$

由 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵,$\boldsymbol{X}\in R^n$ 可知 c 为实数.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.

对 $(*)$ 式两边同作转置,

$c=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=-c$,

得 $c=0$. 所以,$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$.

2.**解**

取 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \varepsilon_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \varepsilon_n=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\in P^{n\times 1}$,

则由对任意的 $X\in P^{n\times 1}$ 都有 $AX=0$ 得

$$A\varepsilon_1=\left[\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{m1}=0,$$

$$A\varepsilon_2=\left[\begin{array}{c:c:c:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right]\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad a_{12}=a_{22}=\cdots=a_{m2}=0,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$A\varepsilon_n=\left[\begin{array}{c:c:c:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right]\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{mn}=0.$$

所以, $A=O$.

3.**证明** 由 $\boldsymbol{A}^*=A^{\mathrm{T}}$ 得 $[A_{ij}]^{\mathrm{T}}=[a_{ij}]^{\mathrm{T}}$, 从而 $A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\ldots n)$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geq 3)$ 非零实方阵, 所以 $\boldsymbol{A}$ 中必有非零行. 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行为非零行. 于是有

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2>0.$$

所以,$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

由 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$; 又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$. 从而 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 整理得 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1$.

当 n 为奇数时, 解 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1$ 得 $|\boldsymbol{A}|=1$; 当 n 为偶数时, 解 $|\boldsymbol{A}|^{n-2}=1$ 得 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$. 又因为 $|\boldsymbol{A}|>0$, 舍去 $|\boldsymbol{A}|=-1$, 得 $|\boldsymbol{A}|=1$. 综上,$|\boldsymbol{A}|=1$.

因此,$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

4.(1)解 $\begin{bmatrix}2&3\\4&7\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\times 7-3\times 4}\begin{bmatrix}7&-3\\-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\\-2&1\end{bmatrix}.$

(2) **解** $[A|E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\2&5&4&0&1&0\\3&6&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_1\times(-3)]{r_2+r_1\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right]$

$$\xrightarrow{r_1+r_3\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&7&0&-2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&11&-2&-2\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right].$$

由此可得 $\begin{bmatrix}1&2&2\\2&5&4\\3&6&7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}11&-2&-2\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}.$

(3) **解** $\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \hdashline 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

(4) **解**

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 31 & -19 & 3 & 4 \\ -23 & 14 & -2 & -3 \end{array}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rr:rr} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right].$$

5. **解** $|A^*| = 1.$

由 $|A|^{4-1} = |A^*| = 1$ 得 $|A| = 1.$

对 $2A^{-1}XA = A^{-1}X + E_4$ 两边同左乘 A得

$$2XA = X + A.$$

两边再同右乘 A^*得

$$2|A|X = XA^* + |A|E_4.$$

整理得 $X(2E_4 - A^*) = E_4.$

由 $[2E_4 - A^*|E_4] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc:rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

可知 $2E_4 - A$ 可逆, 且 $(2E_4 - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

因此,$X=(2E_4-A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

6.**解**　由 $AXA+AX+XA+X=B$

$\Rightarrow\quad AX(A+E)+X(A+E)=B$

$\Rightarrow\quad (A+E)X(A+E)=B.$

又 $A+E=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$,

可知 $(A+E)^T(A+E)=(A+E)(A+E)=9E$, 于是

$$(A+E)^{-1}=\frac{1}{9}(A+E)=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}.$$

从而,

$$\begin{aligned}X&=(A+E)^{-1}B(A+E)^{-1}\\&=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}81&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

7.**证明**

$$r(\boldsymbol{A}_{m\times n})+r(\boldsymbol{B}_{n\times s})=r(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix})\le r(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{B}\end{bmatrix})$$

而 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-\boldsymbol{A}r_2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1\boldsymbol{B}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,

又 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,

因此,$r(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{B}\end{bmatrix})=r(\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&-\boldsymbol{AB}\\\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{O}\end{bmatrix})=r(\boldsymbol{E}_n)+r(-\boldsymbol{AB})=n.$

综上可得,$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n.$

第 四 章

第三大题

1. **解**　法一:

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&t\\2&-4&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1\times(-2)]{r_3+r_1\times(-5)}\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&-12&t+5\\0&-10&5\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&0&t-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 所以 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)<3$

必须 $t-1=0$,从而 $t=1$.

法二:

$$\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&t\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1\times(-5)}\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&-12&t+5\end{vmatrix}=-2t+2=0.$$

得 $t=1$.

2. **解**　考察线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

$$\tilde{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&1&1\\1&2&-1&2\\1&7&-4&t\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&5&-3&t-2\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&0&0&t-5\end{array}\right].$$

当 $t=5$时,$r(A)=r(\tilde{A})=2<3$ 方程组有无穷多解,

此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 且表示方式不唯一.

3.**解**　因为 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\lambda_2^3\\1&\lambda_3&\lambda_3^2&\lambda_3^3\\1&\lambda_4&\lambda_4^2&\lambda_4^3\end{vmatrix}=V(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$

$=\prod\limits_{1\le i<j\le 4}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$,

所以, 当 $n=4$ 时, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

当 $n=5$ 时, 因为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)\le 4<5$, 所以, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性相关,

从而, 当 $n>5$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

答案　$n \geq 5$

注：范德蒙 (Vandermonde)行列式 $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$= \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$ 当且仅当　$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 两两不等.

4.**解**　由 $A\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关, 可设　$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$,

即 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

计算 $\begin{bmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$,　得 $\begin{cases} a = \lambda a \\ 2a+3 = \lambda \\ 3a+4 = \lambda \end{cases}$.

解得 $\begin{cases} a = -1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$.

答案 $a = -1$.

5.**分析**　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关, 当且仅当 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) < 3$; 当且仅当 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 0$.

5.**解**　由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关可知必有 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = 0$.

计算 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & k \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \overset{r_3 + r_1 \times (-2)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1) \cdot (-1) \cdot (6 - k) = 0$.

求得$k = 6$.

易知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的的一个极大无关组.(答案不唯一)

6.**解**　由已知 3 元线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵 A 的秩为 2, 可知导出组 $AX = \mathbf{0}$ 的基础解系含有 $n - r(A) = 3 - 2 = 1$ 个无关的解向量. 因此, $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $X = X_0 + k\boldsymbol{\eta}$,　k 为任意常数, 其中 $X_0 = \dfrac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$.

答案　$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k为任意常数.　(或 $\forall k \in P$.)

7.**解**　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + r_1 \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得 $r(A) = 2$, 从而 $r(A^*) = 1$.

于是 $A^*X = \mathbf{0}$ 的基础解系含有 $n - r(A^*) = 3 - 1 = 2$ 个无关的解向量.

$A^*X=\mathbf{0}$ 的通解为 $X=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$, k_1,k_2 为任意常数.

又由 $r(A)=2$ 可知 $|A|=0$, 于是有 $A^*A=|A|E_3=\boldsymbol{O}$. 蕴含着方阵 A 的每个列向量都是齐次方程组 $A^*X=\mathbf{0}$ 的解向量.

可取 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

所以,$A^*X=\mathbf{0}$ 的通解是$X=k_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, k_1,k_2 为任意常数.(答案不唯一)

8.**解**

线性方程组的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\1&3&-2\\2&5&1\end{bmatrix}$, 显然 $r(A)\geq 2$.

由 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\-5\\-1\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ 是导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的一个无关的解向量, 可知 $n-r(A)=3-r(A)\geq 1$, 得 $r(A)\leq 2$.

综上$r(A)=2$.

因此, 导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系仅含有一个无关的解向量, 可取为 $\boldsymbol{\eta}$.

所以, 方程组的通解为 $X=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}13\\-5\\-1\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

(答案不唯一)

9.**分析** 齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解空间就是与 A 的每个行向量都正交的全体向量所构成的空间.

9.**解** $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1\times(-3)]{r_2+r_1\times(-2)}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 得 $r(A)=2$.

所以, 与 A 的每个行向量都正交的全体向量所构成的 R^4 的

子空间的维数 $=\dim N(A)=n-r(A)=4-2=2$.

答案 2.

第五大题

1.**解** $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

可知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$;

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为向量组的一个极大无关组;

且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$.

2.**解** 考察线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

$$\tilde{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\-1&t&1&t^2\\1&1&t&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&t-1&3&t^2-4\\0&2&t-2&8\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&t-1&3&t^2-4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2\times(-\frac{1}{2})(t-1)}\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&0&-\frac{1}{2}(t+1)(t-4)&t(t-4)\end{array}\right].$$

要使 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 且表示方式不唯一, 方程组必须有无穷多解, 必须 $r(A)=r(\tilde{A})<3$, 从而只能$t=4$.

此时,$\tilde{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$.

由 $\tilde{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$,

得特解 $X_0=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}$, 导出组的基础解系 $\eta=\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}$.

因此通解为 $X=X_0+k\eta=\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3k\\4-k\\k\end{bmatrix}$, $\forall k\in P$.

从而 $\beta=-3k\alpha_1+(4-k)\alpha_2+k\alpha_3$, $\forall k\in P$.

3.**解** 令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. $(*)$

两边同左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 得 $k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$.

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 是所给齐次方程组的非零解, 所以,$\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}]^{\mathrm{T}},(i=1,2,\ldots,r;r<n)$ 都正交, 即 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\ldots,r;r<n)$.

代入整理得 $k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$.

又因为 $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, 所以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \neq 0$, 只能 $k=0$.

代入 $(*)$ 式得 $\quad k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 所以, 只能 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$.

综上, 只有当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_r = k = 0$ 时 $(*)$ 式才成立, 所以, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

4.**解** $\quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 3 & 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda+3 & 2\lambda-1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & \lambda & 2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \end{array}\right]$.

当 $\lambda=0$ 时,$\tilde{A} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$.

$r(A) \neq r(\tilde{A})$,方程组无解.

当 $\lambda=1$ 时,$\tilde{A} \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

$r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$,方程组有无穷多解.

通解为 $X = X_0 + k\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall k \in P$.

当 $\lambda=-1$ 时,$\tilde{A} \to \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$, $r(A) \neq r(\tilde{A})$,方程组无解.

当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -1$ 时,方程组有唯一解. 唯一解为 $X = \begin{bmatrix} \frac{5-\lambda}{\lambda(\lambda+1)} \\ -\frac{2}{\lambda+1} \\ \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{bmatrix}$.

5.**解**

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

可知 $r(\boldsymbol{A}) = 3$, 基础解系含有 $n - r(\boldsymbol{A}) = 4 - 3 = 1$ 个无关的解向量.

令自由变量 $x_4 = 1$ 得一个基础解系 $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) 对 $\boldsymbol{A}_{3\times4}\boldsymbol{B}_{4\times3} = \boldsymbol{E}_{3\times3}$ 分块表示为 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = [\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3]$.

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\varepsilon}_j,\quad (j=1,2,3)$. 即所求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的各列分别是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\varepsilon}_j\ \ (j=1,2,3)$ 通解.

由于这些方程组的系数矩阵都是 $\boldsymbol{A}$, 所以可以采取联合法同时求解.

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{array}\right].$$

得 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-k_1\\-1+2k_1\\-1+3k_1\\k_1\end{bmatrix}$, k_1 为任意常数;

$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-k_2\\-3+2k_2\\-4+3k_2\\k_2\end{bmatrix}$, k_2 为任意常数;

$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-k_3\\1+2k_3\\1+3k_3\\k_3\end{bmatrix}$, k_3 为任意常数.

故 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$, k_1,k_2,k_3 为任意常数.

6.**解** 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 又 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 可得 $r(A)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$. 因此 $AX=\beta$ 的导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系含有 $n-r(A)=4-3=1$ 个无关的解向量.

整理 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$, 即 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1-2\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$, 表明向量 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$ 是导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的一个非零解, 构成 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

类似地, 由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 得非齐次方程组 $AX=\beta$ 的一个特解 $X_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

综上, 得线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为 $X=X_0+k\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}$, k 为任意常数.

7.**解** 因为 M_j 不全为 0, 所以存在某个 $M_j\neq 0$.

于是 $A_{(n-1)\times n}$ 有 $n-1$ 阶子式不为零, 可知 $r(A_{(n-1)\times n})=n-1$.

因此, 齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系含有 1个线性无关的解向量.

作 $n-1$ 个 n 阶行列式 $D_i=\begin{vmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&a_{n-1,n}\end{vmatrix}$

$(i=1,2,\cdots,n-1)$. 易知 $D_i=0$.

于是, 将 D_i 按第一行展开得

$D_i=a_{i1}M_1-a_{i2}M_2+\cdots+a_{in}(-1)^{n-1}M_n=0\ \ (i=1,2,\cdots,n-1)$.

表明 $[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]^T$ 是方程组的非零解,

因此可作为所给方程组的一个基础解系.

8.**证** 由 A 是正交矩阵得 $A^{\mathrm{T}}A=E$.

因为 $(Y,Y)=Y^{\mathrm{T}}Y=(AX)^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X=X^{\mathrm{T}}X=(X,X)$,

所以 $|Y|=\sqrt{(Y,Y)}=\sqrt{(X,X)}=|X|$, 即 X 与 Y 的长度相等.

9.**证** 因为 $AB=BA$, 所以 $(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$. 于是

$$\begin{aligned}&[(A+B)(A-B)^{-1}]^{\mathrm{T}}[(A+B)(A-B)^{-1}]\\=&\ [(A-B)^{-1}]^{\mathrm{T}}(A+B)^{\mathrm{T}}(A+B)(A-B)^{-1}\\=&\ [(A-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})(A+B)(A-B)^{-1}\\=&\ (A^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}})^{-1}(A-B)(A+B)(A-B)^{-1}\\=&\ (A+B)^{-1}(A+B)(A-B)(A-B)^{-1}\\=&\ E_n,\end{aligned}$$

所以,$(A+B)(A-B)^{-1}$ 是正交矩阵.

10.**证** 因为 A 和 B 都是正交矩阵, 所以 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E_n$, $BB^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}B=E_n$, 且有 $|A|^2=|B|^2=1$.

由于 $|A+B|=|AB^{\mathrm{T}}B+AA^{\mathrm{T}}B|=|A||B^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}||B|=-|B|^2|A+B|=-|A+B|$,

所以,$|A+B|=0$.

第五章　三、填空题

1.**分析** 被表无关组所含向量个数较少.

1.**解** 由向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示, 可知向量组 (I) 的极大无关组也可由向量组 (II) 的极大无关组线性表示. 因为被表无关组所含向量个数较少, 所以 $r \le s$.

2.**解** 由 $r(I) = r(II) = 3$, 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 设为 $\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$.

由 $r(III) = 4$, 知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关.

下面考察向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5$ 的线性相关性.

可以断言,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关. 因为若不然,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 设为 $\boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5 = l_1\boldsymbol{\alpha}_1 + l_2\boldsymbol{\alpha}_2 + l_3\boldsymbol{\alpha}_3$. 代入 $\boldsymbol{\alpha}_4 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_5 = (l_1 - k_1)\boldsymbol{\alpha}_1 + (l_2 - k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (l_3 - k_3)\boldsymbol{\alpha}_3$. 与已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关矛盾! 所以,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关, 求得 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_5) = 4$.

3.**解** 设由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为 S, 则有 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]S$. 从而 $S = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$. 由 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \vdots \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$,得 $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

由题设知 β 在基 (II) 下的坐标为$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

则 β 在基 (I) 下的坐标$X = SY$.

$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4.**解** 设由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为 S.

由 $(I): \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\xi}_1 + 2\boldsymbol{\xi}_2 + 2\boldsymbol{\xi}_3$ 得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3]S_1$$

其中 $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

于是, $$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]S_1^{-1}.$$

由 $(II):\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 得

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]S_2$$

其中 $S_2=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

于是
$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]&=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]S_2\\&=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]S_1^{-1}S_2\end{aligned}$$

得
$$S=S_1^{-1}S_2.$$

$$[S_1\vdots S_2]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&1\\1&1&2&0&1&1\\0&0&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&\frac12\\0&1&0&-1&0&-\frac12\\0&0&1&0&0&\frac12\end{array}\right],$$

求得 $S=\begin{bmatrix}1&1&\frac12\\-1&0&-\frac12\\0&0&\frac12\end{bmatrix}$.

五、综合题

1.**证** 观察可知 $B_1=3A_2-A_1,B_2=A_1-A_2$;
$A_1=\dfrac{B_1+3B_2}{2},A_2=\dfrac{B_1+B_2}{2}$,
可知向量组 $\{A_1,A_2\}$ 与 $\{B_1,B_2\}$ 等价, 因而生成的子空间相同.

2.**分析** $A^k\alpha=0,A^{k-1}\alpha\neq0$.

证 令 $l_0\alpha+l_1A\alpha+l_2A^2\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\alpha=0.\qquad(*)$

两边同左乘 A^{k-1} 得

$$l_0A^{k-1}\alpha+l_1A^k\alpha+l_2A^{k+1}\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{2k-1}\alpha=0.\qquad(1)$$

由 $A^k\alpha=0$, 得 $l_0A^{k-1}\alpha=0$; 又 $A^{k-1}\alpha\neq0$, 得 $l_0=0$.

将 $l_0=0$ 代入 $(*)$ 式得 $l_1A\alpha+l_2A^2\alpha+\cdots+l_{k-1}A^k\alpha=0.\qquad(2)$

对 (2) 式两边同左乘 A^{k-2} 得

$$l_1A^{k-1}\alpha+l_2A^k\alpha+l_3A^{k+1}\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{2k-2}\alpha=0.\qquad(3)$$

由 $A^k\alpha=0$, 得 $l_1A^{k-1}\alpha=0$;

又 $A^{k-1}\alpha\neq0$, 得 $l_1=0$.

以此类推, 可得 $l_2=l_3=\cdots=l_{k-1}=0$.

于是 $(*)$ 式只有 $l_0=l_1=l_2=\cdots=l_{k-1}=0$ 才成立,

所以,$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

3.**解** 因为 $\boldsymbol{O}_{2\times2}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in V$, 所以,$V$ 非空.

对于 $\forall A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \in V,$

$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \in V;$

对于 $\forall k \in R, \forall A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in V,$

$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ 0 & ka_{22} \end{bmatrix} \in V.$

所以,V 是实数域 R 上的一个线性空间.

考察 V 中的向量 $E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

显然 E_{11}, E_{12}, E_{22} 线性无关;

对于 $\forall A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in V,\ \ A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{22}E_{22},$

即 V 中的任何向量 A 都可由 E_{11}, E_{12}, E_{22} 线性表示.

所以,E_{11}, E_{12}, E_{22} 是线性空间 V 的一个基,(不唯一)$\dim V=3$.

4.**证** 记 $V=\{B \in R^{n\times n} | AB=BA, A\text{是}R^{n\times n}\text{中的一固定矩阵}\}$.

因为 $AO_{n\times n}=O_{n\times n}A$, 所以,$O_{n\times n} \in V$,$V$ 是$R^{n\times n}$ 的一个非空子集.

对于 $\forall B_1, B_2 \in V,$

$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$, 表明 $B_1+B_2 \in V$;

对于 $\forall k \in R, \forall B \in V,$

$A(kB)=k(AB)=kBA=(kB)A$, 表明 $kB \in V$.

所以,V 是 $R^{n\times n}$ 的一个子空间.

5.**解** 取 $R[x]_2$ 的标准基 $1, x, x^2$.

则 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 在标准基下的坐标分别为

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}.$

因为 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

所以, $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=2$,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

由同构得,

$r(f_1(x), f_2(x), f_3(x))=2$,$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 线性相关,$f_1(x), f_2(x)$ 为 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的一个极大无关组.

6.**解** 取 $R^{2\times 2}$ 的标准基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

则 A_1, A_2, A_3, A_4, A 在标准基下的坐标分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

因为 $[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2 & -3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 & d \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2+r_4\times 3, r_1-r_4]{\substack{(-1)r_4 \\ r_3+r_4\times(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & a+d \\ 0 & -1 & -2 & 0 & b-3d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+3d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & a-c-2d \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b+2c+3d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+3d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{(-1)r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b-2c-3d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+3d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix},$$

所以,$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 4$,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.由同构得A_1, A_2, A_3, A_4 线性无关, 又因为 $\dim R^{2\times 2} = 4$, 所以,A_1, A_2, A_3, A_4 为线性空间 $R^{2\times 2}$ 的一个基.

此外, 由上面的行简化阶梯形可知

$\boldsymbol{\alpha} = (a+b+c+d)\boldsymbol{\alpha}_1 + (-b-2c-3d)\boldsymbol{\alpha}_2 + (c+3d)\boldsymbol{\alpha}_3 + (-d)\boldsymbol{\alpha}_4$.

由同构得 $A = (a+b+c+d)A_1 + (-b-2c-3d)A_2 + (c+3d)A_3 + (-d)A_4$.

求得 A 在基 A_1, A_2, A_3, A_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix} a+b+c+d \\ -b-2c-3d \\ c+3d \\ -d \end{bmatrix}$.

7.**证** 由已知得 $[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

记 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

因为 $|S|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}=4\neq 0$, 所以 S 为可逆矩阵. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维线性空间 V 的一个基, 所以,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是 3 维线性空间 V 的一个基. 由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵就是 S.

8.**解**

(1) 因为 $[1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3]=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,

所以, 由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵 $S=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

(2) 已知 $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ 在基 (I) 下的坐标为 $X=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$,

设 $f(x)$ 在基 (II) 下的坐标为 Y, 则有 $\quad Y=S^{-1}X$.

$[S\vdots X]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&1&1&2\\0&0&1&1&3\\0&0&0&1&4\end{array}\right]\xrightarrow{r}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&4\end{array}\right]$, 求得 $Y=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$.

(3) 已知多项式 $g(x)$ 在基 (II) 下的坐标为 $Y=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$.

设 $g(x)$ 在基 (I) 下的坐标为 X, 则有

$$X=SY=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\9\\7\\4\end{bmatrix}.$$

第六章　填空题

1. **解**　$E-A$ 不可逆 $\Rightarrow |E-A|=0 \Rightarrow A$ 有特征值 $\lambda_1=1$.

设 3 阶矩阵 A 的另外两个特征值分别为 λ_2,λ_3.

由 $|A|=-6, trA=0$ 得

$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\cdot\lambda_2\lambda_3=-6,$

$trA=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+\lambda_2+\lambda_3=0.$

即 $\begin{cases}\lambda_2\lambda_3=-6,\\ \lambda_2+\lambda_3=-1.\end{cases}$　解得 $\lambda_2=-3,\lambda_3=2$.

答案　$1,-3,2$

2.**解**　3×3 齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow$ A 有特征值 $\lambda_1=0$.

于是 A 的全体特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

由特征值的性质知 $A^2-2A+3E$ 的特征值为 $\mu=\lambda^2-2\lambda+3$.

分别代入 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2$ 得

$\mu_1=\lambda_1^2-2\lambda_1+3=3;$

$\mu_2=\lambda_2^2-2\lambda_2+3=1^2-2\times1+3=2;$

$\mu_3=\lambda_3^2-2\lambda_3+3=2^2-2\times2+3=3.$

所以,$|A^2-2A+3E|=\mu_1\mu_2\mu_3=3\times2\times3=18.$

答案　18

3. **分析**　每一行的元素之和为 a,a 是 A 的一个特征值.

3.**解**　由 n 阶可逆矩阵 A 的每一行的元素之和为 $a(a\neq 0)$可知 A 有一个特征值为 a, 且知 A^{-1} 的每一行元素之和为 $\dfrac{1}{a}$, A^{-1} 有一个特征值为 $\dfrac{1}{a}$.

于是,$2A^{-1}+3E$ 必有特征值为 $2\dfrac{1}{a}+3=\dfrac{2}{a}+3$.

答案　$\dfrac{1}{a}$,　$\dfrac{2}{a}+3$

4.**解**　由 A 的任意两个特征向量都线性相关可知, A 的 3 个实特征值为同一个数, 观察可得都为 2.

于是, 由 $trA=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ 得 $a+3+2=2+2+2$, 解得 $a=1$.

答案　$a=1$,　　$2,2,2$

5.**解**　由 A 与 B 相似可知 $trA=trB$, 得 $3+a+3=3+4-1$, 求得 $a=0$.

再由 A 与 B 相似可知 $|A|=|B|$, 得 $3(-2b)=-12$, 求得 $b=2$.

答案 $a=0,\qquad b=2$

6.**解** 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量可知 $S=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$ 为 2 阶可逆矩阵.

因为 $AS=A[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2]=[\mathbf{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]$

$=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$, 所以, A 与 $\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$ 相似. 于是, 它们的特征值相同, 都为 $0,1$.

可知 A 的非零特征值为 1.

答案 1

7.**解** 由 3 阶方阵 A 有三个线性无关的特征向量可知方阵 A 可相似对角化, 它的每个特征值的几何重数 都等于 代数重数.

由 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$,

得 A 的特征值 $\lambda_1=1$(二重), $\lambda_2=-1$.

只需考察特征值 $\lambda_1=1$(二重).

对 $\lambda_1=1$(二重), 解 $(E-A)X=\mathbf{0}$.

$E-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\0&0&0\end{bmatrix}$.

由$r_1=3-r(E-A)=2$ 得 $r(E-A)=1$.

所以, 必须有 $\dfrac{1}{-x}=\dfrac{-1}{-y}$, 整理得 $x+y=0$.

答案 $x+y=0$

8.**解** 设 λ 为实对称矩阵 A 的特征值. 由 $A^2+2A=O$ 得 $\lambda^2+2\lambda=0$, 得 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$.

因为 3 阶实对称矩阵 A 的 3 个特征值都是实数, 且实对称矩阵 A 是一定能对角化, 即一定有 $A\sim\Lambda$. 再由 A 的秩为 2, 必有 $r(\Lambda)=r(A)=2$, 可知 A 有两个非零特征值. 所以 A 的三个特征值为 $-2,-2,0$.

答案 $-2,-2,0$

9.**解** 实对称矩阵 A 的特征值的几何重数 r 都等于代数重数 k, 即$r=n-r(aE-A)=k$. 求得 $r(aE-A)=n-k$.

答案 $n-k$

10.**解**　因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是实对称矩阵的属于不同的特征值的特征向量, 所以, 它们是两两正交的.

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = a - 1 = 0$ 得 $a = 1$;

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3) = c - 2 = 0$ 得 $c = 2$;

由 $(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = 2 + b + 2 = 0$ 得 $b = -4$.

答案　1,　-4,　2

11.**解**　实对称矩阵是一定可对角化, 即一定存在可逆矩阵 S, 使得

$S^{-1}AS = \Lambda = diag(1, -1, -1)$.

于是,$A = S\Lambda S^{-1}$.

从而 $A^{100} = S\Lambda^{100}S^{-1} = S\begin{bmatrix} 1^{100} & & \\ & (-1)^{100} & \\ & & (-1)^{100} \end{bmatrix}S^{-1}$

$= SE_3S^{-1} = E_3$.

答案　E_3

12.**解**　**法一**　已知线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

设线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 下的矩阵为 B.

则有 $B = S^{-1}AS$, 其中 S 为由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 到基 $\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 的过渡矩阵.

由 $(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ 得 $S = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. 易得 $S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

所以 $B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

12.　**法二**　由已知线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

即 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

得 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) = 6\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

于是,$\boldsymbol{\sigma}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2) = \frac{1}{2}(6\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2) = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = 2(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2) + 1 \cdot (3\boldsymbol{\alpha}_1)$;

$\boldsymbol{\sigma}(3\boldsymbol{\alpha}_1) = 3(3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = 9\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 = 6(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2) + 3 \cdot (3\boldsymbol{\alpha}_1)$.

整理得 $\boldsymbol{\sigma}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\sigma}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2), \boldsymbol{\sigma}(3\boldsymbol{\alpha}_1)) = (\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1)\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

因此, 线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

答案　$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

第六章　　五、综合题

1.**证**

(1) 令 $X=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, 则 $AX=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}\\a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\c\\\vdots\\c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=cX,$$

所以c 是 A 的一个特征值, X 是 A 的属于特征值 c 的一个特征向量.

(2) 因为 A 可逆, 所以 $c\neq 0$, 且 X 是 A^{-1} 的属于特征值 c^{-1} 的一个特征向量, 从而 $A^{-1}X=c^{-1}X$.

设 $A^{-1}=[b_{ij}]_{n\times n}$, 则

$$\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{12}+\cdots+b_{1n}\\b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{2n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{n1}+b_{n2}+\cdots+b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c^{-1}\\c^{-1}\\\vdots\\c^{-1}\end{bmatrix},$$

从而,A^{-1} 的每行之和都为 c^{-1}.

(3)$X=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, 也是 $f(A)$ 的属于特征值 $f(c)$ 的一个特征向量. 类似 (2) 中的方法可证得 $f(A)$ 的每行元素之和为 $f(c)$.

2.**解** 因为 $|A|=-1\neq 0$, 所以 A 可逆, 且 $A^*=|A|A^{-1}=-A^{-1}$.

设 α 是 A 的属于特征值 μ 的特征向量, 则 $\lambda_0=\dfrac{|A|}{\mu}=-\dfrac{1}{\mu}$, 且 $A\alpha=\mu\alpha$, 即

$$\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

得方程组 $\begin{cases}-a+1+c=-\mu,\\-5-b+3=-\mu,\\c-1-a=\mu.\end{cases}$ 解得 $\mu=-1, b=-3, a=c$.

再由 $|A|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1$, 得 $a=2$, 从而 $c=2$.

最后,$\lambda_0 = -\dfrac{1}{\mu} = 1.$

3.**证** 用反证法.

假设 A 可对角化, 即 $A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值. 于是 $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m$ 为 A^m 的特征值. 由 $A^m = O$ 得 $\lambda_1^m = \lambda_2^m = \cdots = \lambda_n^m = 0$, 从而 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, 所以 $A \sim O$, 于是 $r(A) = r(O) = 0$, 从而 $A = O$. 与题设的 A 为非零n 阶方阵矛盾. 所以 A 不可对角化.

4.**解** A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 - r_3} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3 + c_1} \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ k & \lambda+1 & 0 \\ -4 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1).$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1$(二重),$\lambda_2 = 1$.

对 $\lambda_1 = -1$(二重), 解 $(-E-A)X = 0$.

$$-E - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & k \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而当 $k = 0$ 时, 特征值 $\lambda_1 = -1$(二重) 的几何重数为 $3 - r(-E-A) = 2$, A 可对角化. 此时, 得两个线性无关的特征向量 $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

对 $\lambda_2 = 1$, 解 $(E-A)X = 0$.

$$E - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{得特征向量 } X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

作可逆矩阵 $S = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则有 $S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

5.**解**

(1) 设 $\beta = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$, 此为一个非齐次线性方程组. 由

$$\tilde{A} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3 | \beta] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

得 $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$.

(2) 因为 A 的特征值彼此不同, 所以 A 必可对角化.

作可逆矩阵 $S=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$, 则有 $S^{-1}AS=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$.

于是 $A=S\Lambda S^{-1}$, $A^n=S\Lambda^n S^{-1}$,

$$A^n\beta=S\Lambda^nS^{-1}\beta=S\Lambda^nX=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.$$

法二:

由 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$ 得 $A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i$, 从而

$$\begin{aligned}A^n\beta&=A^n(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3)=2A^n\xi_1-2A^n\xi_2+A^n\xi_3=2\lambda_1^n\xi_1-2\lambda_2^n\xi_2+\lambda_3^n\xi_3\\&=2\cdot1^n\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-2\cdot2^n\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+3^n\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

6.**解** 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是实对称矩阵 A 的属于特征值 $2,5$ 的特征向量, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交, 则 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=0$, 即 $-1\times1+k\times(-1)+1\times2k=0$, 得 $k=1$.

法一 设 $X=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值 7 的特征向量, 则 X 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交, 因此,$(X,\boldsymbol{\alpha}_i)=0, i=1,2$. 即

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

由系数矩阵 $\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, 得 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3],\Lambda=diag(2,5,7)$, 则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 且 $\boldsymbol{Q}^TA\boldsymbol{Q}=\Lambda$, 因此

$$A=\boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&5&\\&&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&1\\2&5&-1\\1&-1&4\end{bmatrix}.$$

法二 运用实对称矩阵的谱分解.

由 A 为实对称矩阵易知 $A-7E$ 为实对称矩阵. 再由 A 的特征值为 2,5,7, 易得 $A-7E$ 的特征值为 $-5,-2,0$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 分别是 $A-7E$ 的属于特征值为 $-5,-2$ 的标准正交的特征向量. 于是

$$A-7E=-5\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}+0\boldsymbol{\beta}_3\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}$$

$$= -5\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}[-1,1,1] - 2\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-1,2]$$

$$= -\frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -5 & 5 & 5 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -6 & 6 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

于是 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} + 7E = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

7.**解**由题设，知 α_1 与 α_2 正交, 则 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, 求得 $a = 0$ 或 $a = 1$.

当 $a = 0$ 时,$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

因为 β 是 A^* 的特征向量, 所以也是 A^{-1} 的特征向量, 从而也是 A 的特征向量. 与 A 的特征向量 α_1, α_2 的关系应该是要么正交, 要么成比例. 显然, 此时的 β 不满足上述关系, 所以, 不符题意, 舍去.

当 $a = 1$ 时,$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

由 $(\beta, \alpha_1) = 0, (\beta, \alpha_2) = 0$ 得 β 与 α_1, α_2 都正交,β 是 A 的属于特征值 λ_3 的特征向量. 所以取 $a = 1$.

而 A^* 的相应的特征值 $\lambda_0 = \dfrac{|A|}{\lambda_3} = \dfrac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_3} = 2$.

综上，$a = 1, \lambda_0 = 2$.

8.**解**

(1) 因为 $\forall X \in R^{n\times n},\ \sigma(X) = BXC \in R^{n\times n}$, 所以 σ 是 $R^{n\times n}$ 上的一个变换. 又因为 $\forall X, Y \in R^{n\times n}, k \in R$,

$\sigma(X+Y) = B(X+Y)C = BXC + BYC = \sigma(X) + \sigma(Y)$,

$\sigma(kX) = B(kX)C = kBXC = k\sigma(X)$,

所以 σ 是 $R^{n\times n}$ 上的一个线性变换.

(2) 因为 $\forall \alpha \in V,\ \sigma(\alpha) = \alpha + \alpha_0 \in V$, 所以 σ 是 V 上的一个变换.

又因为 $\forall \alpha, \beta \in V, k \in P$,

$\sigma(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+\alpha_0=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)-\alpha_0$

$\sigma(k\alpha)=k\alpha+\alpha_0=k(\alpha+\alpha_0)-(k-1)\alpha_0=k\sigma(\alpha)-(k-1)\alpha_0$,

所以当 $\alpha_0 \neq 0$ 时,σ 不是 V 上的线性变换;

当 $\alpha_0 = 0$ 时,σ 是 V 上的一个线性变换.

(3) 取 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 则 $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \sigma(\beta)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$.

因为 $\sigma(\alpha+\beta)=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \neq \sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$,

所以,σ 不是线性变换.

(4) 对 $R^{2\times3}$ 中任意矩阵 A, $\sigma(A)=A^T \notin R^{2\times3}$, 所以 σ 不是线性变换.

(5) 对 $R^{2\times3}$ 中任意矩阵 A, B, $\sigma(A+B) \neq \sigma(A)+\sigma(B)$, 所以 σ 不是线性变换.

(6) 因为 $\forall A \in R^{2\times3}$, $\sigma(A)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}A \in R^{2\times3}$, 所以 σ 是 $R^{2\times3}$ 上的一个变换.

又因为 $\forall A, B \in R^{2\times3}, k \in R$,

$\sigma(A+B)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}(A+B)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}A+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}B=\sigma(A)+\sigma(B)$,

$\sigma(kA)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}(kA)=k\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}A=k\sigma(A)$,

所以 σ 是 $R^{2\times3}$ 上的一个线性变换.

9.**解**

(1) 设 σ 在基 $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 A.

由

$\sigma(\varepsilon_2)=\sigma(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}2\\-4\\0\end{bmatrix}=-4\varepsilon_2+2\varepsilon_1+0\varepsilon_3$,

$\sigma(\varepsilon_1)=\sigma(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}=1\varepsilon_2+0\varepsilon_1+3\varepsilon_3$,

$\sigma(\varepsilon_3)=\sigma(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=0\varepsilon_2+1\varepsilon_1+0\varepsilon_3$,

得

$$\sigma(\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3)=(\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3)\begin{bmatrix}-4&1&0\\2&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}.$$

于是,σ 在基 $\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3$ 下的矩阵 A 为 $\begin{bmatrix}-4&1&0\\2&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}$.

(2) 法一利用相似关系

设 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 B, 则有

$$B=S^{-1}AS,$$

其中,S 为由基 $\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵, 即

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3)S,$$

得 $S=(\varepsilon_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$.

$$AS=\begin{bmatrix}-4&1&0\\2&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-3&1\\3&2&0\\3&3&3\end{bmatrix}.$$

下面计算 $S^{-1}AS$.

$$[S|AS]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&-3&-3&1\\1&1&1&3&2&0\\1&0&0&3&3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&3&3\\0&1&0&-6&-6&-2\\0&0&1&6&5&-1\end{array}\right].$$

所以,$B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{bmatrix}$.

另：可先求出 S^{-1}, 再计算 B.

$$[S|E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right].$$

得 $S^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}$.

于是,$B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-4&1&0\\2&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) 法二　直接利用线性变换在基下的矩阵的定义

设 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则有

$$\boldsymbol{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\boldsymbol{B}.$$

下面先求基向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的像 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \begin{bmatrix} 2\times 1+1 \\ 1-4\times 1 \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \begin{bmatrix} 2\times 1+0 \\ 1-4\times 1 \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{bmatrix} 2\times 0+0 \\ 1-4\times 0 \\ 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

再将 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 代入

$$\boldsymbol{\sigma}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\boldsymbol{B}.$$

得 $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{B}.$$

计算　$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_2), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_3)]$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

得 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

(3) (**提示：** 直接利用坐标的定义)

由题设知 $\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 在线性变换 σ 下的像 $\sigma(\gamma) = \begin{bmatrix} 2\times 2+1 \\ 3-4\times 2 \\ 3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

设 $\sigma(\gamma)$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下坐标为 $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. 则有

$\sigma(\gamma) = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3$.

由 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \vdots \sigma(\gamma)] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$,

得 $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 9 \\ -14 \\ 10 \end{bmatrix}$.

10.(1)**证**

因为 $\forall A \in R^{2\times 2}$, $\sigma(A) = A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}$, 所以 σ 是 $R^{2\times 2}$ 上的一个变换.

又因为 $\forall A, B \in R^{2\times 2}, \forall k \in R$,

$\sigma(A+B) = (A+B)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \sigma(A) + \sigma(B)$,

$\sigma(kA) = kA\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = k\sigma(A)$,

所以 σ 是 $R^{2\times 2}$ 上的一个线性变换.

(2)**解** 因为

$$B_1 = 1E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 1E_{22},$$
$$B_2 = 1E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22},$$
$$B_3 = 1E_{11} + 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$
$$B_4 = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$

所以基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 到基 B_1, B_2, B_3, B_4 的过渡矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3)**解**设线性变换 σ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 的矩阵为 A, 线性变换 σ 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 矩阵为 B, 则有 $B = S^{-1}AS$.

由

$$\sigma(E_{11}) = E_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$

$$\sigma(E_{12})=E_{12}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}=0E_{11}+2E_{12}+0E_{21}+0E_{22},$$

$$\sigma(E_{21})=E_{21}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=0E_{11}+0E_{12}+1E_{21}+0E_{22},$$

$$\sigma(E_{22})=E_{22}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}=0E_{11}+0E_{12}+0E_{21}+2E_{22},$$

得 σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

$$于是\ B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&1&2&0\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

11.**解**

(1) $D(e^x)=e^x=1\cdot e^x+0\cdot e^{2x}+0\cdot xe^{2x}$,

$D(e^{2x})=e^{2x}2=0\cdot e^x+2\cdot e^{2x}+0\cdot xe^{2x}$,

$D(xe^{2x})=e^{2x}+xe^{2x}2=0\cdot e^x+1\cdot e^{2x}+2\cdot xe^{2x}$.

从而,D 在基 (1) 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(2) 此问题其实就是要考察矩阵 A 是否能对角化.

A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$, 得 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$(二重).

由 $r(2E-A)=2$, 可知 $(2E-A)X=0$ 的基础解系只含有一个解向量, 从而 A 不可对角化.

又因为 D 在 V 的另一个基下的矩阵与 A 相似, 故不存在 V 的某个基, 使得 D 在该基下的矩阵为对角矩阵.

12.(1) **证** 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 R^3 的一个基, 所以,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$

由题设 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

记 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

因为 $|\boldsymbol{S}|=1\neq 0$, 所以 $\boldsymbol{S}$ 可逆; 因此 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r([\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{S})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. 又 $dim\boldsymbol{R}^3=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基.

法二：

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&-1&2\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

所以,$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$, 从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. 又 $dim\boldsymbol{R}^3=3$, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 R^3 的一个基.

(2) 设 σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$, 则有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&1&-3\\1&-1&-2\end{bmatrix}.$$

(3) 由 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 知 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$,

于是, $\sigma(\alpha)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为

$$Y=AX=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-1\\-5\end{bmatrix}.$$

第七章　　三、填空题

1. **解**　所给二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

由 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可得二次型的秩为3.

2. **解**　二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$.

因 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, 故有

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

整理得 $\begin{cases} a+1=\lambda \\ -1=-\lambda \\ 1-b=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=0 \\ \lambda=1 \\ b=1 \end{cases}$.

答案　$a=0, b=1$

3. **解**　二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix}$.

由所给二次型通过正交线性替换 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 可知二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=5$.

再由 $|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

得 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 5,$

解得 $a=2$.　(因 $a>0$ 舍去 $a=-2$)

答案　$a=2$

4. 略

5. **分析**

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$ 不易计算.

5. **解** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

因为 $|\boldsymbol{A}| \neq |\boldsymbol{B}|$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$不相似.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型为 $f(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,

用配方法化标准形 $f(\boldsymbol{X}) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2$,

可知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3, 正惯性指数为 3.

易知,$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 3,$\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $1, 2, 3$, 于是 $\boldsymbol{B}$ 正惯性指数也为 3.

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$合同.

答案 不相似但合同

6. **分析**

二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零当且仅当二次型是正定的当且仅当二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有的顺序主子式都大于零

6. **解** 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{bmatrix}$.

$|A_1| = 1 > 0$,

$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{vmatrix} = 2 - k^2 > 0$,

$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2-k^2 & -k \\ 0 & -k & -k \end{vmatrix} = k(k+1)(k-2) > 0.$

解得 $-1 < k < 0$.

答案 $-1 < k < 0$

五、综合题

1. **证** 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

从而 $(\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 是对称矩阵.

设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则矩阵 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有的特征值 λ 都大于零, 从而总有矩阵 $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ 的特征值为 $f(\lambda) = (\lambda - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} > 0$. 因此,$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$

是正定矩阵.

2. **解**　(1) 由实二次型 $f(X)=X^T(A^TA)X$ 的秩为 2, 可知 $r(A^TA)=2$. 于是,$r(A)=r(A^TA)=2$.

由 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&a+1&0\end{bmatrix}$, 得 $a=-1$.

(2) 将 $a=-1$ 代入, 计算得 $A^TA=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$.

$$|\lambda E-A^TA|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

得 A^TA 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

对 $\lambda_1=0$, 解 $(0E-A^TA)X=0$.

$A^TA=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得 $X_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$.

对 $\lambda_2=2$, 解 $(2E-A^TA)X=0$.

$2E-A^TA=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&0&-2\\-2&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得 $X_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$.

对 $\lambda_3=6$, 解 $(6E-A^TA)X=0$.

$6E-A^TA=\begin{bmatrix}4&0&-2\\0&4&-2\\-2&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得 $X_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

单位化:

$$\eta_1=\frac{X_1}{|X_1|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix},\ \eta_2=\frac{X_2}{|X_2|}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix},\ \eta_3=\frac{X_3}{|X_3|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}.$$

作正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^TA^TA\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$.

作正交替换 $X=\boldsymbol{Q}Y$, 化二次型 f 为标准形 $g(Y)=2y_2^2+6y_3^2$.

(3) 由 (2) 可知，二次型 f 秩为 2，正惯性指数为 2，负惯性指数为 0，符号

差为 2.

3. **解**　(1) 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda-a & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1} (\lambda-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)[(\lambda-a)^2+(\lambda-a)-2]=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$$

得 A 的全体特征值 $\lambda_1=a,\lambda_1=a-2,\lambda_1=a+1$.

(2) 因为二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$, 所以,A 的特征值有两个为正,一个为零.

由 $a-2<a<a+1$ 可知$a-2=0$, 所以,a=2.

4. **解**　(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 即 $a_{ij}=a_{ji}$, 所以,$A_{ij}=A_{ji}$. 于是 $\boldsymbol{A}^*=[A_{ij}]^{\mathrm{T}}$ 也是实对称矩阵, 且有 $\boldsymbol{A}^*=[A_{ij}]$.

又因为 $r(\boldsymbol{A})=n$, 所以,$\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|A|}=\dfrac{1}{|A|}[A_{ij}]$.

因此, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$.

$=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\dfrac{1}{|A|}[A_{ij}])\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$, 即二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

由于 λ 与 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的正负符号一致, 所以, 二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $f(\boldsymbol{X})$ 的正惯性指数相等, 负惯性指数相等, 因此它们的规范型相同.

5. **解**　(1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\lambda^2+2\lambda-3=0$.

解得$\lambda\in\{-3,1\}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 必能正交相似 (从而合同) 于对角矩阵 Λ. 又 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 2, 所以 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,1,\underbrace{-3,\ldots,-3}_{n-2})$, 故 $\boldsymbol{A}$ 全部特征值为 $1,1,-3(n-2)$ 重.

(2) 因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵.

因为 -1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n$ 为可逆矩阵. 因此 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)$ 是正定矩阵.

法二

因为 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, 所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n$, 于是 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n$.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$.

代入 $\lambda\in\{-3,1\}$, 得 $f(\lambda)\in\{4\}$.

可知 $\boldsymbol{B}$ 的特征值都大于零, 所以 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

(3) 易知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{kE}$ 为实对称矩阵.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{kE}$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda+k$.

代入 $\lambda\in\{-3,1\}$, 得 $f(\lambda)\in\{k-3,k+1\}$.

可知, 当 $k>3$ 时 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{kE}$ 的特征值都大于零, 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{kE}$ 为正定矩阵.