2019～2020 学年第一学期第一次月考试卷参考答案

《高等数学 2A》

考试时间：2019 年 10 月 11 日 (1 小时)

一、求下列极限（每小题 10 分，共 40 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2\sin x)^{\frac{1}{-2\sin x}}]^{\frac{-2\sin x}{\tan x}}$,

$\lim\limits_{x\to 0}[(1-2\sin x)^{\frac{1}{-2\sin x}}]=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x}=-2$,

$\therefore$ 原式$=\mathrm{e}^{-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-\cos x}{\sqrt{4x^2+1}+x+\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{\cos x}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{\sin x}{x}}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$ (有界量与无穷小的乘积是无穷小),

$\therefore$ 原式$=\dfrac{1-0}{2+1+0}=\dfrac{1}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x^2}-1)}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}\tan x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x^2}=\dfrac{1}{6}$.

4. $\dfrac{n^2}{n^2+n}\le\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$, $\therefore$ 原式$=1$.

二、解答题（每小题 12 分，共 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arcsin x-\mathrm{e}^{x^2}}{\tan x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arcsin x-\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1-1=0$,

$\therefore$ 当 $x\to 0$ 时，$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小.

2. (1) $x\ne 0$ 时，$f(x)$ 显然连续;

$x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{1}{x}=0=f(0)$, $\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

综上，$f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$,

由于 $f'_-(0)\ne f'_+(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

3. (1) 当 $x>1$ 时，$\left|3^{-(x-1)}\right|<1$，故 $f(x)=\dfrac{0+2}{x+0}=\dfrac{2}{x}$；

当 $x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{3}{2}$；　当 $x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+\dfrac{2}{3^{-n(x-1)}}}{\dfrac{x}{3^{-n(x-1)}}+1}=x^2$，

$$\therefore f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1, \\ 3/2, & x=1, \\ \dfrac{2}{x}, & x>1. \end{cases}$$

(2) $x\neq 1$ 时，$f(x)$ 显然连续；

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，　$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x}=2$，　$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，

$\therefore x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

三、解答题（12 分）

(1) $f(x)$ 为初等函数，故间断点为 $x=a$ 和 $x=1$，$\therefore a=0$.

$\because x=0$ 为无穷间断点，$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-b}{x(x-1)}=\infty$，

$\because \lim\limits_{x\to0}x(x-1)=0$，

当 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x^2}-b)\neq0$ 时，即 $b\neq1$ 时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$；

当 $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x^2}-b)=0$ 时，即 $b=1$ 时，

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2(x-1)}=0\neq\infty,$$

综上，$a=0$，$b\neq1$.

(2) $\because x=1$ 为可去间断点，$\therefore \lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在.

$\because \lim\limits_{x\to1}(x-a)(x-1)=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to1}(\sqrt{1+x^2}-b)=0$，即 $b=\sqrt{2}$.

$\because \lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{(x-a)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}}{x-a}$ 存在，

. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq0$，

$\therefore \lim\limits_{x\to1}(x-a)\neq0$，即 $a\neq1$.

综上，$a\neq1, b=\sqrt{2}$.

四、证明题（12 分）

设 $u_1=10$，$u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求 $\{u_n\}$ 的极限.

证　先证数列 $\{u_n\}$ 单调递减.　易知 $u_2=\sqrt{6+10}=4<u_1$，

假设 $u_{k+1}<u_k$，　则 $u_{k+2}=\sqrt{6+u_{k+1}}<\sqrt{6+u_k}=u_{k+1}$，

由归纳法，　数列 $\{u_n\}$ 单调递减.

再证数列 $\{u_n\}$ 有下界. 由 $u_1=10$，$u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 知　$u_n>0$.

由单调有界准则，数列 $\{u_n\}$ 收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，　$u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}$ 两边取极限得：$a=\sqrt{6+a}$，

平方得：$a^2-a-6=0$，　解得　$a=3$，或 $a=-2$(舍)，

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=3$.