学院______________专业__________________ ______班 年级________学号__________________姓名_____________ 共 4 页 第 1 页

2016～2017 学年第一学期期末考试试卷

《线性代数》（A 卷 共 4 页）

（考试时间：2017 年 1 月 7 日）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩	核分人签字
得分										

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ 的特征向量，而矩阵 $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{X}_2, -5\boldsymbol{X}_3, 4\boldsymbol{X}_1]$，则 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$。

2、行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ a & b & c & d \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ 中，A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $-A_{21} + A_{22} - 2A_{24} = \underline{-55}$。

3、矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$。

4、已知矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times3} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，$\boldsymbol{B}_{3\times3} = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3]$，且 $|\boldsymbol{A}| = 8$，则 $|\boldsymbol{B}| = \underline{16}$。

5、二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 正定，则 k 满足：$\underline{k>2}$。

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实矩阵，且特征值为 1，-1，0，则线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 解的情况是（ A ）

(A) 有非零解； (B) 仅有零解； (C) 无解； (D) 无法确定。

2、设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（ D ）

(A) 不相似不合同； (B) 相似但不合同；

(C) 相似且合同； (D) 合同但不相似。

3、下列向量组中，线性无关的是（ C ）

(A) $[1,2,3]$，$[4,5,6]$，$[0,0,0]$；

(B) $[a_1,a_2,a_3]$，$[b_1,b_2,b_3]$，$[c_1,c_2,c_3]$，$[d_1,d_2,d_3]$；

(C) $[a,1,0,0]$，$[b,0,2,3]$，$[e,4,5,6]$；

(D) $[x,1,8,6]$，$[y,1,8,6]$，$[z,6,3,9]$，$[w,0,0,0]$。

4、下列说法**错误**的是（ B ）

(A) 可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 具有相同的特征向量；

(B) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值相同；

(C) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量一定是矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征向量；

(D) 若 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值。

5、设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1 = [2,3,4,5]^{\mathrm{T}}, \eta_2 + \eta_3 = [1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，则该方程组的通解可表示为（ D ）。

（A）$k[2,3,4,5]^{\mathrm{T}} + [3,4,5,6]^{\mathrm{T}}, \forall k$； （B） $[2,3,4,5]^{\mathrm{T}} + k[3,4,5,6]^{\mathrm{T}}, \forall k \neq 0$；

（C）；$k_1[2,3,4,5]^{\mathrm{T}} + k_2[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}, \forall k_1, k_2$ （D） $[2,3,4,5]^{\mathrm{T}} + k[3,4,5,6]^{\mathrm{T}}, \forall k$。

三、（12 分）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{B}$，求矩阵$\boldsymbol{B}$。

解：$|A|=4$.

$A^*B=3A^{-1}+2B \Rightarrow AA^*B=3AA^{-1}+2AB \Rightarrow |A|\cdot B-2AB=3E_3$.

$\Rightarrow (2E_3-A)B=\frac{3}{2}E_3$.

$$[2E_3-A \,\vdots\, E_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{array}\right].$$

$\Rightarrow 2E_3-A$ 可逆，且 $(2E_3-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

求得 $B=\frac{2}{3}(2E_3-A)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

四、（12 分）设有列向量组

$$\alpha_1=[1,0,0,2]^T,\ \alpha_2=[0,1,0,3]^T,\ \alpha_3=[0,0,1,4]^T,\ \alpha_4=[2,-3,4,11]^T,$$

求该向量组的秩以及它的一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示。

解：$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 11\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大无关组.

$\alpha_4=2\alpha_1-3\alpha_2+4\alpha_3$.

五、（12 分）对于线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=-2, \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2, \end{cases}$ 讨论 λ 取何值时，方程组（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷多解。在方程组有无穷多解时，求方程组的通解。

解：将方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 进行初等行变换：

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1) \end{array}\right]$$

① $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$. $r(A)=r(\tilde{A})=3$，方程组有唯一解.

② $\lambda=-2$. $\tilde{A}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right]$，$r(A)=2<3=r(\tilde{A})$. 无解.

③ $\lambda=1$. $\tilde{A}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，$r(A)=1=r(\tilde{A})$，方程组有无穷多组解.

方程组的通解为：$X=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+l\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. $\forall k,l\in\mathbb{R}$.

六、（12 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 计算 $\boldsymbol{A}$ 的 $2m$ 次幂 $\boldsymbol{A}^{2m}$.

解：令 $A=\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} A_1A_2 & 0 \\ 0 & A_2A_1 \end{bmatrix}$.

$$A^{2m}=\begin{bmatrix} (A_1A_2)^m & 0 \\ 0 & (A_2A_1)^m \end{bmatrix}.$$

$A_1A_2=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 21 & -12 \end{bmatrix}$，$r(A_1A_2)=1 \Rightarrow$

$(A_1A_2)^m=(tr\,A_1A_2)^{m-1}\cdot A_1A_2=(-5)^{m-1}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 21 & -12 \end{bmatrix}$.

$A_2A_1=\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. $r(A_2A_1)=1.\Rightarrow$

$(A_2A_1)^m=(-5)^{m-1}\cdot\begin{bmatrix} -7 & 14 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

于是 $A^{2m}=\begin{bmatrix} (A_1A_2)^m & 0 \\ 0 & (A_2A_1)^m \end{bmatrix}=(-5)^{m-1}\begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 \\ 21 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

七、（15 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，

（1） 用正交替换把二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交替换；

（2） 求二次型的正惯性指数及符号差。

解：(1). 二次型的对称矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$.

A的特征多项式为 $|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+3)$.

A的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=3$，解方程组 $(3E_3-A)X=0$.

$3E_3-A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

得 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的线性无关特征向量为 $X_1=[1,-1,0]^T$, $X_2=[1,0,1]^T$.

对于 $\lambda_3=-3$，解方程组 $(-3E_3-A)X=0$.

$-3E_3-A=\begin{bmatrix}-4&2&-2\\2&-4&-2\\-2&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

得 $\lambda_3=-3$ 的特征向量为 $X_3=[1,1,-1]^T$.

令 $\beta_1=X_1=[1,-1,0]^T$, $\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}[1,1,2]^T$.

$\beta_3=X_3=[1,1,-1]^T$. 则 β_1,β_2,β_3 是A的关于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$ 的正交特征向量.

令 $\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0]^T$.

$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,1,2]^T$.

$\eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,-1]^T$. 则 η_1,η_2,η_3 是A的关于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$ 的标准正交特征向量.

作正交矩阵 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，在正交替换 $X=QY$ 下，二次型 $f(x)$ 的标准形为：$3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$.

(2). 二次型 $f(x)$ 的正惯性指数为2，符号差为1.

八、证明题（7 分）设 A 是 $n\,(\geq 3)$ 阶非零实矩阵，若 A 的每个元素都等于自己的代数余子式，证明 A 是正交矩阵.

证明：A的每个元素等于自己的代数余子式，则有：$A^*=A^T$.

$AA^T=AA^*=|A|\cdot E_n$.

$A\neq 0$，不妨令A的第i行非零. 考察 $AA^T=|A|E_n$ 的(i,i)元素：$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2>0$.

而 $A^T=A^*\Rightarrow |A|=|A^T|=|A^*|=|A|^{n-1}$. 于是 $|A|=1$.

因此 $A^{-1}=A^*=A^T$. 于是：$AA^T=E_n$. A是正交矩阵.