2014～2015 学年第二学期期末考试试卷参考答案

《 线性代数及其应用 》（A卷）

2017级理学院严班　Johnson整理

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. $\begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$　2. $X_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2$，其中k_1, k_2为任意常数，特解X_0取X_1, X_2, X_3中任一个，η_1, η_2取

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$中任两个，其中$\alpha_1=\pm[3,1,-4,1]^T$，$\alpha_2=\pm[5,-1,0,0]^T$，$\alpha_3=\pm[2,-2,4,-1]^T$

3. $a=2$.　　4. 4, 4, 0　　5. $0<t<2$ 或 $t\in(0,2)$

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

BDCCA

三、

1、$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$,

若 $a=-1, r(A)=3$，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组(不唯一).

若 $a\neq-1$，$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a+2}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　则 $r(A)=4$

故 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=4$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组.

2、$|A+E|=|E-A|=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ 是矩阵 A 的特征值,

$\mathrm{tr}A=-1+1+\lambda_3=1\Rightarrow\lambda_3=1$.

由 $f(x)=x^2-2x+5$，$f(A)$ 的全部特征值为 $\mu_1=\mu_2=f(1)=4,\mu_3=f(-1)=8$.

$|A|=1\cdot1\cdot(-1)=-1, A^*=|A|A^{-1}=-A^{-1}$，　$3E_3-A^*=3E_3+A^{-1}$ 的所有特征值为 4, 4, 2,

因此 $|3E_3-A^*|=32$.

四、设　$X=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$，$[A \mid B]=\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & a \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，当 $a=$

2 时，$AX=B$ 有解. $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3, \\ x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3, \end{cases}$ $\begin{cases} y_1=2-\frac{1}{2}y_3, \\ y_2=1+\frac{1}{2}y_3, \end{cases}$ 因此 $X=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}k_1 & 2-\frac{1}{2}k_2 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}k_1 & 1+\frac{1}{2}k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意

常数.

五、(I)到(II)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&3&0&0\\2&7&0&0\\0&0&3&4\\0&0&1&3\end{bmatrix}$ ，

(II)到基(I)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&0&0\\-2&1&0&0\\0&0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\0&0&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$.

设 $f(x)=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ 在两个基下有相同的坐标，则 $f(x)$ 在基(I)下的坐标为 $\boldsymbol{X}=[a_1,a_2,a_3,a_4]^{\mathrm{T}}$，在基(II)下的坐标为 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}$，或 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}$，

整理得齐次线性方程组 $(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$． $\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&3&0&0\\2&6&0&0\\0&0&2&4\\0&0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\\0&0&1&2\\0&0&&0\end{bmatrix}$

同解方程组为 $\begin{cases}a_1=0,\\a_2=0,\\a_3=-2a_4,\end{cases}$ 通解为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-2k\\k\end{bmatrix}$,

k为任意常数，故 $f(x)=-2kx+k,k$ 为任意常数.

六、(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$；(2)由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\-5&-4&-2\\4&4&2\end{bmatrix}.$$

七(1) f的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}3&-1&3\\-1&3&-3\\3&-3&1\end{bmatrix}$

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-3\\1&\lambda-3&3\\-3&3&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\1&\lambda-3&3\\-3&3&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\1&\lambda-4&3\\-3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-7)$$

$\lambda_1=2,\lambda_2=-2,\lambda_3=7$，特征值 2 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，特征值-2 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,1,2]^{\mathrm{T}}$，特征值 7 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$．单位化

$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=[-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=[\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]^{\mathrm{T}}$，令

$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$，正交线性替换为$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{SY}$，标准形为$g(\boldsymbol{Y})=2y_1^2-2y_2^2+7y_3^2$.

(2)规范形为$h(\boldsymbol{Z})=z_1^2-z_2^2+z_3^2$.

八、首先证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关．设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$, (*) 两边同左乘$\boldsymbol{A}$得

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_1\boldsymbol{A\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A\alpha}_3=(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1-(2k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，与

(*)式相减得，$-k_3\boldsymbol{\alpha}_1+(3k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，得$k_2=k_3=0$，代入到(*)式得 $k_1=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关．然后证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关．设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$, 两边同左

乘$\boldsymbol{A}$得$(k_1+k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_1-(2k_2+k_3+2k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3-2k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$，加上(*)的3倍得

$(3k_1+k_3+k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_3-2k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+3k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关得

$\begin{cases}3k_1+k_3+k_4=0,\\ -k_3-2k_4=0,\\ 3k_3=0.\end{cases}\Rightarrow k_1=k_3=k_4=0$，进一步$k_2=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.