2013～2014 学年第二学期阶段考试试卷

《线性代数及其应用》（A 卷　　共 3 页）

（考试时间：2014 年 4 月 11 日）

题号	一	二	三	成绩	核分人签字
得分					

一、（共 35 分）

1. （15 分）求线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$向量形式的通解.

2. （10 分）设线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + (\lambda - 2)x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + (\lambda - 2)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，求参数 λ 的值.

3. （10 分）设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$，求 $3A_{21} - 5A_{23} - 12A_{24}$（其中 A_{ij} 为 (i, j) 元的代数余子式）.

二、(共 36 分，每小题 12 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 元列向量，$\boldsymbol{A}_{3\times3} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$，

$\boldsymbol{B}_{3\times3} = [\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3, 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_3]$，且 $|\boldsymbol{B}| = 6$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

2．设实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^{-1} = 2\boldsymbol{XA}^{-1} - 2\boldsymbol{E}_4$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^m$ 及 $|\boldsymbol{A}^m|$（其中 m 为正整数）.

三、(共 29 分)

1.（12 分） 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\-8\end{bmatrix}$$

的秩以及它的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

2.（8 分）设 $\mathbb{P}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关. 试判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性相关性，并说明理由.

3.（9 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n $(n\geq 3)$ 阶非零实方阵，且 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵且 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{-1}$.