2011-2012(二)

一、填空题　1. 180　　2. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　3. $r+1$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$　　5. $-1 < k < 0$

二、选择题　DBCBD

三、 由题设可知 A 的属于特征值 -1 的特征向量 X_2, X_3 线性无关, 于是 3 阶方阵 A 有三个线性无关的特征向量 X_1, X_2, X_3, 因此 A 可对角化.

令 $S = [X_1, X_2, X_3]$, 则 S 为可逆矩阵, 且

$$S^{-1}AS = \Lambda = diag(0, -1, -1).$$

由此可得

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

从而

$$A^{2012} = S\Lambda^{2012}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

四、由于 $r(A) = 3$, 所以方程组 $A_{5\times 4}X = 0$ 的基础解系含有 $4 - r(A) = 1$ 个线性无关的解向量.

令 $\eta = (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) - (3\alpha_1 + \alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}$, 则有 $A\eta = 4\beta - 4\beta = 0$, 于是 η 可作为 $AX = 0$ 的一个基础解系.

令 $X_0 = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则有 $AX_0 = \beta$, 即 X_0 是 $AX = \beta$ 的一

个特解. 因此 $AX=\beta$ 的通解为

$$X=X_0+k\eta=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\-4\\-6\\-8\end{bmatrix},\ \forall k\in P.$$

(或者 特解 $X_0=\dfrac{1}{4}(3\alpha_1+\alpha_2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\2\end{bmatrix}$, 基础解系 $\eta=\begin{bmatrix}0\\4\\6\\8\end{bmatrix}$ 或 $\pm\begin{bmatrix}0\\2\\3\\4\end{bmatrix}$.)

五、因为 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 所以

$$r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3])=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3.$$

记 $S=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&m&1\\1&1&l\end{bmatrix}$. 得 $|S|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&m&1\\1&1&l\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&m-1&1\\0&0&l\end{vmatrix}=l(m-1)$.

当 $l\neq 0$ 且 $m\neq 1$ 时,$|S|\neq 0$, S 为可逆矩阵. 因此

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r([\beta_1,\beta_2,\beta_3])=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]S)=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3])=3.$

此时 β_1,β_2,β_3 线性无关.

当 $l=0$ 或 $m=1$ 时,$|S|=0$, $r(S)<3$. 因此

$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r([\beta_1,\beta_2,\beta_3])=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]S)\leq r(S)<3.$

于是 β_1,β_2,β_3 线性相关.

六、

(1)**证**

因为 $\forall A\in R^{2\times 2},\ \sigma(A)=A\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\in R^{2\times 2}$, 所以 σ 是 $R^{2\times 2}$ 上的一个变换.

又因为 $\forall A,B\in R^{2\times 2},k\in R$,

$\sigma(A+B)=(A+B)\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\sigma(A)+\sigma(B),$

$\sigma(kA)=kA\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=k\sigma(A),$

所以 σ 是 $R^{2\times 2}$ 上的一个线性变换.

(2)**解** 因为

$$B_1=1E_{11}+1E_{21}+1E_{12}+1E_{22},$$
$$B_2=1E_{11}+1E_{21}+1E_{12}+0E_{22},$$
$$B_3=1E_{11}+0E_{21}+1E_{12}+0E_{22},$$

$B_4 = 1E_{11} + 0E_{21} + 0E_{12} + 0E_{22}$,

所以基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 到基 B_1, B_2, B_3, B_4 的过渡矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3)**解**设线性变换 σ 在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 的矩阵为 A, 线性变换 σ 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 矩阵为 B, 则有 $B = S^{-1}AS$.

由

$$\sigma(E_{11}) = E_{11}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2E_{11}+0E_{21}+0E_{12}+0E_{22},$$

$$\sigma(E_{21}) = E_{21}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0E_{11}+2E_{21}+0E_{12}+0E_{22},$$

$$\sigma(E_{12}) = E_{12}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0E_{11}+0E_{21}+3E_{12}+0E_{22},$$

$$\sigma(E_{22}) = E_{22}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0E_{11}+0E_{21}+0E_{12}+3E_{22},$$

得 σ 在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\text{于是 } B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

法二：

$$\sigma(B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3B_1 - B_2 + B_3 - B_4,$$

$$\sigma(B_2)=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\2&0\end{bmatrix}=0B_1+2B_2+B_3-B_4,$$

$$\sigma(B_3)=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\0&0\end{bmatrix}=0B_1+0B_2+3B_3-B_4,$$

$$\sigma(B_4)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=0B_1+0B_2+0B_3+2B_4,$$

故 σ 在基 B_1,B_2,B_3,B_4 下的矩阵 $B=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&1&3&0\\-1&-1&-1&2\end{bmatrix}$.

七、记 $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{bmatrix}=[X_1,X_2,X_3]$,

$B=\begin{bmatrix}3&4&-1\\8&8&3\\3&-4&16\end{bmatrix}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$. 由题设得三个系数矩阵同为 A 的非齐次线性方程组: $AX_1=\beta_1,AX_2=\beta_2,AX_3=\beta_3$.

可以联合起来, 同时求解.

$$\tilde{A}=[A\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&2&3&4&-1\\2&6&5&8&8&3\\-1&-3&1&3&-4&16\end{array}\right]\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+r_1\times(-2)}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&2&3&4&-1\\0&0&1&2&0&5\\0&0&3&6&0&15\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&2&3&4&-1\\0&0&1&2&0&5\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&0&-1&4&-11\\0&0&1&2&0&5\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right], \text{得}$$

$$X_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-3k_1\\k_1\\2\end{bmatrix},\quad\forall k_1\in P;$$

$$X_2=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3k_2\\k_2\\0\end{bmatrix},\quad\forall k_2\in P;$$

$$X_3=\begin{bmatrix}-11\\0\\5\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11-3k_3\\k_3\\5\end{bmatrix},\quad\forall k_3\in P.$$

从而 $X=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix}-1-3k_1&4-3k_2&-11-3k_3\\k_1&k_2&k_3\\2&0&5\end{bmatrix},\forall k_1,k_2,k_3\in P$.

八、见 辅导 第七章 五、2.

九、由于 $AB + B^T A$ 是正定矩阵, 所以 $\forall X \neq 0$, 恒有

$$X^T(AB + B^T A)X = (AX)^T(BX) + (BX)^T(AX) = 2(AX, BX) > 0.$$

因此,$\forall X \neq 0$, 恒有 $AX \neq 0$, 即齐次方程组 $AX = 0$ 只有零解, 所以 A 可逆.