2016～2017 学年第一学期《线性代数及其应用》期末试题参考答案

（考试时间：2016 年 12 月 23 日）

（A 卷）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、 $\underline{\ 3\ }$； 2、 $\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k}$ 为任意常数（或 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\\-6\end{pmatrix}$）；

3、 $\underline{\dfrac{9}{8}}$； 4、 $\underline{-63}$； 5、 $\underline{5y_1^2+5y_2^2}$

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

ACCDB

三、1、（7 分）设(I) $f_1=1+x^2+x^3, f_2=-1+2x+7x^2+9x^3, f_3=-2+x-x^2, f_4=2x+6x^2+8x^3, f_5=x+x^3$ 在标准基 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标分别为

$$\text{(II)}\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\7\\9\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\2\\6\\8\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]$，则有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-2&0&0\\0&2&1&2&1\\1&7&-1&6&0\\1&9&0&8&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&-2&0&0\\0&2&1&2&1\\0&8&1&6&0\\0&10&2&8&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&-2&0&0\\0&2&1&2&1\\0&0&-3&-2&-4\\0&0&-3&-2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&-2&0&0\\0&2&1&2&1\\0&0&-3&-2&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此向量组(II)的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为(II)的一个极大无关组. 又 $\mathbf{R}[x]_3$ 与 $\mathbf{R}^4$ 同构，所以向量组(I)的秩也为 3，f_1,f_2,f_3 为(I)的一个极大无关组.（答案不唯一）

2、(11 分)解 (1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-k\\0&\lambda&1\\0&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

对于二重根 $\lambda_1=1$，考虑 $(\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 要使 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，要求特征值1的几何重数

等于代数重数2，即$3-r\left(\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right)=2$，则$r\left(\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right)=1$. 因为

$$\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&-k\\0&1&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&k-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以当$k=2$时，$r\left(\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right)=1$，故$\boldsymbol{A}$可对角化.

（2）取$k=2$. 对于$\lambda_1=1$，求解$\left(\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&-2\\0&1&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$x_2=-x_3$，求得一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=\left[1,0,0\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=\left[0,-1,1\right]^{\mathrm{T}}$. （基础解系取法不唯一）

对于$\lambda_3=2$，求解$\left(2\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$2\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&2&1\\0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$\begin{cases}x_1=\quad x_3,\\x_2=-\frac{1}{2}x_3,\end{cases}$，求得一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=\left[2,-1,2\right]^{\mathrm{T}}$.

令$\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]$，则$\boldsymbol{S}$为可逆矩阵，且$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,2)$. 左乘$\boldsymbol{S}$，右乘$\boldsymbol{S}^{-1}$，可得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$，因此

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{S\Lambda}^{10}\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&-2&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&2^{11}\\0&-1&-2^{10}\\0&1&2^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&-2&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2+2^{11}&-2+2^{11}\\0&2-2^{10}&1-2^{10}\\0&-2+2^{11}&-1+2^{11}\end{bmatrix}.$$

四、(12分)解 对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&3&-1\\-1&0&-2&-1&1\\2&-2&5&7&-3\\-2&5&7&s&t-9\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&3&-1\\0&-1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\\0&3&11&s+6&t-11\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&1&-1\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&11&s+12&t-11\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&1\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&s+1&t\end{array}\right].$$

当 $s \neq -1$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 4$，则方程组有唯一解．解得唯一解为

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = \left[1 + \frac{t}{s+1}, \frac{2t}{s+1}, -1 - \frac{t}{s+1}, \frac{t}{s+1}\right]^{\mathrm{T}}.$$

当 $s = -1, t \neq 0$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = 3 \neq 4 = r(\tilde{\boldsymbol{A}})$，则方程组无解.

当 $s = -1, t = 0$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\tilde{\boldsymbol{A}}) = 3 < 4$，则方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \quad 1 + \ x_4, \\ x_2 = \qquad\ \ 2x_4, \\ x_3 = -1 - \ x_4, \end{cases}$$

则方程组的通解为

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = [1, 0, -1, 0]^{\mathrm{T}} + k[1, 2, -1, 1]^{\mathrm{T}},$$ 其中 k 为任意常数.

五、(10 分)解(1) 由题设，知由基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

因此由基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}$. 因为 $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = 9\boldsymbol{E}_3$，所以

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{9}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

或者用初等变换法求解.

$$[\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E}] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right] \Rightarrow \boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 设 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y} = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$，则

由坐标变换公式，有$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Y}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}3\\-6\\9\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$.

或者由(1)，知

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{9}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{9}(-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{9}(2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3),$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3\\&=\frac{1}{9}(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)+\frac{2}{9}(-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)+\frac{3}{9}(2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=\frac{1}{9}(3\boldsymbol{\alpha}_1-6\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3),\end{aligned}$$

因此$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$\frac{1}{3}[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$.

六、(10 分)解(1) 对任意$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^3$，显然有$\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^3$；

对任意$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^3$，任意$k\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}&\sigma(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}=\sigma(\boldsymbol{X})+\sigma(\boldsymbol{Y}),\\&\sigma(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=k\sigma(\boldsymbol{X}),\end{aligned}$$

则σ是$\mathbf{R}^3$上的线性变换.

(2) 方法 1 计算$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=[3,2,1]^{\mathrm{T}},\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=[1,1,3]^{\mathrm{T}},\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$，则$\sigma$在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}$.

由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}$，计算$\boldsymbol{S}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&-3\\0&-6&4\end{bmatrix}$，

则σ在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&-3\\0&-6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&0\\2&1&2\\1&3&1\end{bmatrix}\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&0\\7&-4&7\\-8&6&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&4&3\\14&26&23\\-16&-24&-22\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

方法 2 设σ在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的矩阵为$\boldsymbol{B}$，则$\sigma(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{B}$. 计算

$$\sigma(\boldsymbol{\beta}_1)=[6,4,2]^{\mathrm{T}},\sigma(\boldsymbol{\beta}_2)=[4,16,18]^{\mathrm{T}},\sigma(\boldsymbol{\beta}_3)=[3,13,14]^{\mathrm{T}},$$

则有$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6&4&3\\4&16&13\\2&18&14\end{bmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&3\\0&6&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6&4&3\\4&16&13\\2&18&14\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&5&-3\\0&-6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&4&3\\4&16&13\\2&18&14\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&4&3\\14&26&23\\-16&-24&-22\end{bmatrix}.$$

七、(14 分)解　实二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-2\\-1&\lambda-2&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\\lambda-3&\lambda-2&2\\0&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\0&\lambda-1&4\\0&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)^2(\lambda+3),$$

则$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=-3$.

对于$\lambda_1=3$，求解$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\-2&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$x_1=x_2+2x_3$，求得一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对于$\lambda_3=-3$，求得$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,-2]^{\mathrm{T}}$.

将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}[1,-1,-2]^{\mathrm{T}}.$$

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]$，则$\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\varLambda}=\mathrm{diag}(3\,,3\,,-3).$$

实二次型$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$经正交线性替换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，化为标准形$3y_1^2+3y_2^2-3y_3^2$.

（对应于 $\lambda_1=3$ 的正交特征向量还可以取成 $\boldsymbol{\beta}_1=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=[1,5,-2]^{\mathrm{T}}$ ；　或 $\boldsymbol{\beta}_1=[0,-2,1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}_2=[5,1,2]^{\mathrm{T}}$ ）

(2) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

八、(6 分) 证 由题设，知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$ ，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$
$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

设 $x_1\boldsymbol{\beta}+x_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}+x_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ ，则

$$(x_1+\lambda_1x_2+\lambda_1^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+\lambda_2x_2+\lambda_2^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_1+\lambda_3x_2+\lambda_3^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于三个互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases} x_1+\lambda_1x_2+\lambda_1^2x_3=0, \\ x_1+\lambda_2x_2+\lambda_2^2x_3=0, \\ x_1+\lambda_3x_2+\lambda_3^2x_3=0. \end{cases}$$

而方程组的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\neq 0$ ，因而方程组只有零解，故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.