# 2018～2019 学年第一学期期末考试试卷

## 《 线性代数及其应用 》（B 卷　共 4 页）

（考试时间：2019 年 1 月 4 日）

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 成绩 | 核分人签字 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 15 | 15 | 20 | 11 | 11 | 0 | 16 | 4 | 96 | [illegible] |

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设矩阵 $A \neq O$，$X_1, X_2, X_3$ 是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的三个解向量，且 $X_1 - X_2 = [-1,0,3]^T, X_1 - X_3 = [0,2,1]^T$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为 $k_1[-1,0,3]^T + k_2[0,2,1]^T$, $k_1, k_2$ 不全为0

2、设 $A$ 为 3 阶方阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 元列向量，且 $A\alpha_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3$，$A\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$，$A\alpha_3 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 16\alpha_3$，则 $|A| =$ $-20$.

3、已知矩阵 $A$ 与 $B = \mathrm{diag}(3,-1,-1)$ 相似，则 $(A-E)^{80} =$ $2^{80}E_3$.

4、设3阶实对称矩阵 $A$ 的特征值为0,1,2，$\alpha_1 = [1,0,1]^T, \alpha_2 = [1,4,k]^T$ 分别为对应于特征值0,1的特征向量，则 $A$ 的对应于特征值 2 的全部特征向量为 $m\left[1, -\frac{1}{2}, -1\right]^T, m \neq 0$

5、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1x_2 - x_3^2 + 4x_4x_5$ 的秩为 5，正惯性指数为 2.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 $r\ (r<s)$，则下列说法中错误的是（ B ）.

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量组成的部分组线性相关

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r$ 个向量组成的部分组线性无关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中必存在 $r$ 个向量组成的部分组线性无关

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $r$ 个线性无关的向量组成的部分组与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 等价

2、设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 $n$ 阶实矩阵 $A$ 的 3 个属于不同特征值的实特征向量，则（ C ）.

(A) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关

(B) $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ 也是 $A$ 的特征向量

(C) $\beta_1+\beta_2, \beta_2+\beta_3, \beta_1-\beta_3$ 线性相关

(D) $k\beta_1$ 一定是 $A$ 的特征向量

3、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 下的标准形为 $y_1^2+2y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$．若 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下的标准形为（ A ）.

(A) $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-2y_3^2$　　(D) $y_1^2+y_2^2+2y_3^2$

4、与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 相似的矩阵是（ C ）.

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&5\end{bmatrix}$

5、若实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5&2&0\\2&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 合同，则以下结论错误的是（ B ）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 一定是正定矩阵　　(B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 一定是正定矩阵

(C) $\boldsymbol{A}^2$ 一定是正定矩阵　　(D) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 一定是正定矩阵

20 三、解答题　（共 20 分，每小题 10 分）

10 1、求 $\mathbb{R}[x]_3$ 的子空间 $W=L(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))$ 的一个基和维数，其中

$f_1(x)=1-x-3x^2-2x^3$, $f_2(x)=6-2x-6x^2$, $f_3(x)=-1+x-x^3$, $f_4(x)=3+2x-4x^2-x^3$.

$f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$ 在标准基 $1,x,x^2,x^3$ 下坐标为

$$\begin{bmatrix}1&6&-1&3\\-1&-2&1&2\\-3&-6&0&-4\\-2&0&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&6&-1&3\\0&4&0&5\\0&0&3&10\\0&0&0&0\end{bmatrix}=[\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4']$$

$\therefore r(f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x))=r(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4')=3$.

$\therefore \dim W=3$，一个基为 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$

2、设向量$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\1\\a\end{bmatrix}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\a^2-1\end{bmatrix}$线性表示，且表示方式不唯一，试求参数$a$的值.

不妨设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$

$$\therefore [\tilde{A}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{array}\right]$$

$\because \beta$表示方式不唯一

$\therefore r(\tilde{A})<3$

$\therefore \begin{cases}a^2-1=0\\a-1=0\end{cases}\Rightarrow a=1$

四、(11 分) 设向量组(I) $A_1=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}, A_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 11 & 7\end{bmatrix}$ 是线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一个基.

(1) 求由基(I)到标准基 $E_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, E_{22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵;

(2) 求矩阵 $B=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ 在基(I)下的坐标.

(1) 由标准基到基(I)过渡矩阵 $S=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 11\\ 0 & 0 & 2 & 7\end{bmatrix}$

∴由基(I)到标准基过渡矩阵为 $S^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 11\\ 0 & 0 & 2 & -3\end{bmatrix}$

(2) 不妨设 $B=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4$

$$\therefore \begin{cases}-k_1+2k_2=7\\ -2k_1+3k_2=2\\ 3k_3+11k_4=3\\ 2k_3+7k_4=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k_1=17\\ k_2=12\\ k_3=-10\\ k_4=3\end{cases}$$

∴坐标为 $[17, 12, -10, 3]^T$

五、（11 分）设$\sigma$是线性空间$\mathbb{R}^3$上的线性变换，规定

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[2x,y+z,z-x]^{\mathrm{T}},\quad \forall\boldsymbol{\alpha}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3.$$

(1) 求$\sigma$在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$下的矩阵$\boldsymbol{A}$；

(2) 求$\sigma$在基$\boldsymbol{\alpha}_1=[3,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[3,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,3,1]^{\mathrm{T}}$下的矩阵$\boldsymbol{B}$.

(1) $\sigma(\alpha)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}\alpha$

$\because (\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot A=A=A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$\therefore A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$

(2) $\because (\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3))=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\quad B$

$\because \sigma(\alpha_1)=A\alpha_1=[6,0,-3]^{\mathrm{T}}$

$\sigma(\alpha_2)=A\alpha_2=[6,1,-3]^{\mathrm{T}}$

$\sigma(\alpha_3)=A\alpha_3=[6,4,-2]^{\mathrm{T}}$

$\therefore \begin{bmatrix}6&6&6\\0&1&4\\-3&-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot B$

$\therefore \left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&3&6&6&6\\0&1&3&0&1&4\\0&0&1&-3&-3&-2\end{array}\right]\xrightarrow{行}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-4&-5&-6\\0&1&0&9&10&10\\0&0&1&-3&-3&-2\end{array}\right]$

$\therefore B=\begin{bmatrix}-4&-5&-6\\9&10&10\\-3&-3&-2\end{bmatrix}$

六、(9分) 设 $A$ 为3阶实对称矩阵，$\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是 $A$ 分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的标准正交的特征向量.

(1) 证明 $A=\lambda_1\eta_1\eta_1^T+\lambda_2\eta_2\eta_2^T+\lambda_3\eta_3\eta_3^T$；

(2) 若 $A$ 的每一行元素之和均为2，且 $r(A)=1$，求矩阵 $A$.

6

(1) $\because \eta_1,\eta_2,\eta_3$ 为A分别属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的标准正交特征向量

$\therefore \eta_1,\eta_2,\eta_3$ 两两正交，且线性无关

$\therefore$ 令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则Q为正交矩阵，$\because$ A为3阶实对称矩阵

$\therefore Q^T\cdot A\cdot Q=\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

$\therefore A=Q\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}Q^T=\lambda_1\eta_1\eta_1^T+\lambda_2\eta_2\eta_2^T+\lambda_3\eta_3\eta_3^T$

(2) $\therefore |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-\sum_{j=1}^{3}a_{1j}&-a_{12}&-a_{13}\\\lambda-\sum_{j=1}^{3}a_{2j}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\\lambda-\sum_{j=1}^{3}a_{3j}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-a_{12}&-a_{13}\\1&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\1&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}$

$\therefore$ 2为A的特征值

$\because r(A)=1$ $\therefore$ A只有1个非0特征向量

$\therefore$ A的特征值为2，0，0

$\therefore (\lambda-2)\lambda=0$，

$\therefore (A-2E)A=0$

$\therefore A^2=2A$

七、（14 分）设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$.

求一个正交线性替换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出其标准形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^T\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}X$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&1\\1&\lambda-3&-1\\1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-5)$$

1) 当 $\lambda=2$ 时，$2E-A=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴同解方程组为 $-x_1+x_2+x_3=0$

∴一个基础解系为 $\alpha_1=[1,1,0]^T,\ \alpha_2=[1,0,1]^T$

令 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^T$

再单位化：令 $\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=[\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0]^T$，$\eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=[\frac{1}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}]^T$

2) 当 $\lambda=5$ 时，$5E-A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

∴同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}$

∴一个基础解系 $\alpha_3=[-1,1,1]^T$

单位化：$\eta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=[-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}]^T$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$，则Q为正交矩阵

∴作正交线性替换 $X=QY$

且 $Q^T\cdot A\cdot Q=diag(2,2,5)$

得标准形 $2y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

八、（5 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是方阵 $\boldsymbol{AB}$ 的属于非零特征值 $k$ 的特征向量. 证明：$k$ 也是矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 的特征值，且 $\boldsymbol{B\alpha}$ 是对应的特征向量.

由题,得 $AB\alpha=k\alpha$.

4

两边同时左乘 $B$ $\therefore$ $\underline{BAB\alpha}=Bk\alpha=k\underline{B\alpha}$.

$\therefore X=B\alpha$, 且 $BAX=kX$

$\therefore$ $k$ 也是矩阵 $BA$ 的特征值

且 $B\alpha$ 是对应特征向量.