2013 ～2014 学年第 二 学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》（A 共 4 页）

（考试时间：2014 年 6 月 6 日）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$________________.

2、设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶方阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 中每行元素之和都是零，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解是________________________.

3、设向量 $\boldsymbol{\alpha}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[1,0,k]^{\mathrm{T}}$. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于对角矩阵 $\mathrm{diag}(3,0,0)$，则参数 $k=$_____________________.

4、设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 元列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为_______________________.

5、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2$ 的秩为________.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）请将选项填入括号内.

1、下列说法中错误的是（　　　）.

(A) 初等矩阵是可逆矩阵, 且其逆矩阵仍是初等矩阵

(B) 初等矩阵必与单位矩阵相抵

(C) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵

(D) 初等矩阵的乘积仍是初等矩阵

2、已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}]^{\mathrm{T}}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个标准正交基，则向量 $\boldsymbol{\beta}=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标的第一个分量为（　　　）.

(A) -1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 1

3、设由基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}_1$，由基(I)到基(III)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}_2$，

则由基(II)到基(III)的过渡矩阵为（　　　）.

(A) $\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}$　　(B) $\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1^{-1}$　　(C) $\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{S}_2$　　(D) $\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{S}_1$

4、设行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，则线性方程组$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=d_1, \\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=d_2 \end{cases}$（　　　）.

(A) 无解　(B) 有唯一解　(C) 有无穷多解　(D) 无法判定解的个数

5、设$\boldsymbol{A}$为满秩的实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}$与（　　　）的正惯性指数及秩均相等.

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$　　(B) $\boldsymbol{A}^*$　　(C) $\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D) $\boldsymbol{A}^2$

三、(共 14 分，每小题 7 分)

1、求$\mathbb{R}^3$的子空间$W=\left\{\begin{bmatrix} a-b \\ 2a+b+2c \\ 3a+3b+4c \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$的一个基及其维数.

2、设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & -1 & b \\ 4 & -3 & 2 \\ 1-b & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式$|\boldsymbol{A}|=1$，又$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$有一个特征值$\lambda_0$，属于$\lambda_0$的一个特征向量为$\boldsymbol{X}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$，求参数$a,\ b$的值以及$\lambda_0$.

四、(12 分) 讨论当a,b取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + (a+2)x_3 - x_4 = b, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + (a+1)x_4 = 5 \end{cases}$$

有唯一解？无解？无穷多解？在有无穷多解时，求其向量形式的通解.

五、(14 分) 设向量组(I) $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$和(II) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$分别为线性空间$\mathbb{R}^3$的两个基. 给定矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，定义$\mathbb{R}^3$上的线性变换　$\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,　$\forall \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^3$.

(1) 求由基(I)到基(II)的过渡矩阵 $\boldsymbol{S}$；
(2) 求线性变换 σ 在基(I)下的矩阵 $\boldsymbol{M}$；
(3) 求线性变换 σ 在基(II)下的矩阵 $\boldsymbol{N}$；

(4) 设 $\boldsymbol{\beta}=[3,1,-1]^{\mathrm{T}}$, 求 $\sigma(\boldsymbol{\beta})$ 在基(II)下的坐标.

六、(10 分) 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$，多项式 $\varphi(x)=x^{10}-5x^{9}$，求 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

七、(16 分)设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^{\ 2}+3x_2^2+3x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 求一个正交线性替换，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出标准形；

(2) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

八、(4 分)设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且对任意 m 元列向量 $\boldsymbol{\beta}$，线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解. 求证 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关.