
题目： θ 调制

姓名：王亚飞

学号：3017234417

学院：自动化学院

信箱号：38

摘 要

本篇文章调研了 θ 调制 (theta modulation) 实验的实验现象及其涉及到的理论。

在理论方面 θ 调制是对基于阿贝成像理论的空间滤波手法的灵活运用。利用不同的角度的经过多重处理过的光栅对图像进行调制，使通过物的衍射光在透镜后焦面(即频谱面)上形成特殊的空间频谱，随后代表不同空间频率的各光束在像平面上相干叠加而形成调制后的物体的像。

空间滤波作为一种采用滤波处理的影像增强方法在图像去噪、提高光纤中的信息承载能力起着重要的作用。同为影像增强方法的有灰度变化法和直方图变换法等。

关键词： θ 调制 阿贝成像理论 夫琅和费衍射 空间滤波

第一节 引言

将预先调制的 θ 片放入4f光学系统中，使用白光进行照射，有选择性的在频谱面上的白纸上不同方位角处开一些小孔，于是在毛玻璃上便得到我们所需要的彩色图像。

阿贝于1872年在德国蔡司光学器械公司研究如何提高显微镜的分辨本领时发现了由第一步“分频”；第二步“合成”两步组成的相干成像原理，并由此开创了现代傅里叶光学的开端。

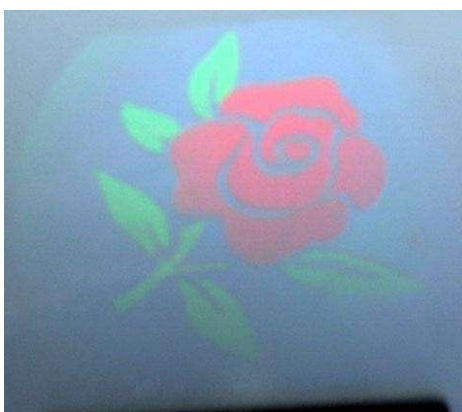
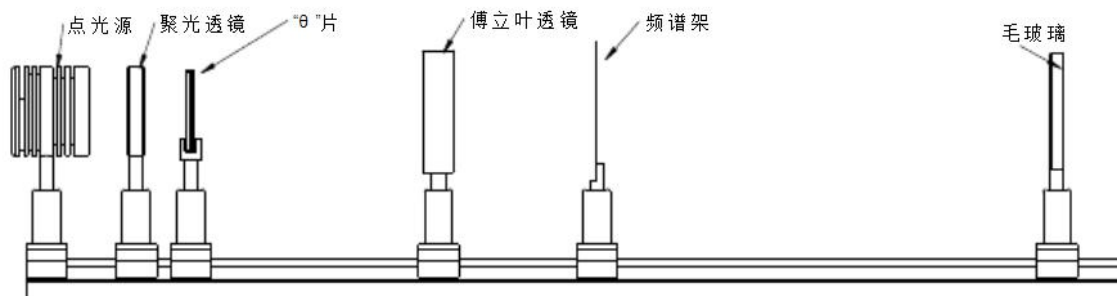


图 1：毛玻璃上的彩色图像

将此实验中的物体即玫瑰花用三组取向各成120度的光栅进行编码，其中三组分别记录花朵叶子和背景并将三组光栅制作成 θ 片。将 θ 片放在聚光透镜和傅里叶透镜之间。白光点光源发出的光经过聚光透镜再通过 θ 片获取物体信息，后再经傅里叶透镜进行傅里叶变换，在频谱面上得到色散方向不同的彩色带状谱，其中每一条带状谱代表被某一个方向光栅调制的图像的信息，并且彩色带状谱的顺序是按衍射规律分布的。

这时若在频谱面上加上适当的滤波器（扎了小孔的白纸），让不同方位不同颜色的光有选择的通过，就可以在系统的输出面上得到想要的彩色图像。

图 2: θ 调制的实验装置图

阿贝成像原理的发现很大程度上促使了空间滤波的诞生，空间滤波在光学中的运用就是在光学系统的频谱面上放置各空间滤波器，去掉(或选择通过)某些空间频率或者改变它们的振幅和相位，使二维物体像按照要求得到改善，所以初步在图像去噪方面得到应用[0]。因为信息传输方面涉及到大量光学，故空间滤波在通信领域也起到了重要作用[1,2]。在光学之外声学方面也基于声学上的空间滤波进行了相应的理论拓展和应用[3]。空间滤波在提高分辨率方面的重要作用也被使用到了医学之中，并在肌电图记录位置方面进行了相应的改进[4]。文献[5]的作者基于金属缝隙阵列的空间滤波特性的特性，提出了一种用于分束光束的新方法并使用滤波特性，并在数值上显示了来自空间宽带光源的轴上光束和双向光束的产生。在文献[6]中作者们研究了空间滤波器中具有幅度波动的发散光束的传播。

本文在以下几个方面对该问题所涉及的物理理论和实验进行了调研

(1)理论方面本文调研了 θ 调制的理论背景以及有关方面空间二维函数的傅里叶变换等公式和方程的建立。同时也调研了在matlab中进行的空间滤波相关方面的仿真实验。

(2)实验方面调研了原理与该实验类似的阿贝成像理论和空间滤波实验以及激光平面干涉仪的演示实验和基于刀口仪的空气成像演示实验。

第二节，有关 θ 调制实验的理论论述

2.0 θ 调制实验的理论背景

从数学角度来看，此实验现象本质上是物波在空间上分布的信息值经过两次光学傅里叶变换，先在空间上分解后分布在透镜后焦面上，后在像面上重新合成的结果。我调研了《A SUGGESTION LOOKING TOWARDS ULTRA-MICROSCOPY》和《How I Discovered Phase Contrast》等相关文献。总结了描述该实验发生过程的数学公式和方程。

2.1 方程和公式的建立

首先介绍一下空间二维函数的傅里叶变换。

$$G(f_x, f_y) = F[g(x, y)] = \iint g(x, y) \exp[-i2\pi(f_x x, f_y y)] dx dy \quad (1)$$

其中 f_x 与 f_y 为 x, y 方向上的空间频率，对此式求傅里叶逆变换得下式

$$g(x, y) = F^{-1}[G(f_x, f_y)] = \iint G(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x, f_y y)] df_x df_y \quad (2)$$

此式表示任一个二维空间函数 $g(x, y)$ 都可以表示为无穷个分函数 $\exp[i2\pi(f_x x, f_y y)]$ 的线性相加， $G(f_x, f_y)$ 为各个分函数所对应的权值， $G(f_x, f_y)$ 称为 $g(x, y)$ 的空间频率。

将此理论运用在光学上就是光学傅里叶变换，理论说明，如果在焦距为 f 的会聚透镜焦面上放一振幅透过率为 $g(x, y)$ 的图像作为物，并以波长为 f 的单色平面波垂直照明物体图像，则在透镜后焦面 (x, y) 上的振幅分布就是 $g(x, y)$ 的傅里叶变换 $G(f_x, f_y)$

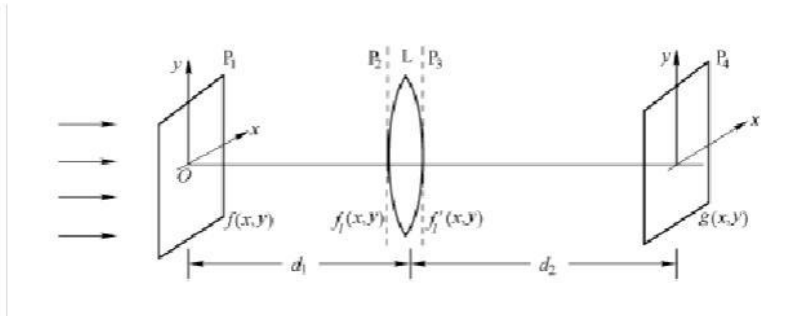


图 3: 光学傅里叶变换模拟图

p_4 面上的 f_x, f_y 与坐标 x', y' 的关系为

$$f_x = \frac{x'}{wF}, f_y = \frac{y'}{wF} \quad (3)$$

其中 $x' - y'$ 称为频谱面，二维的傅里叶变换由透镜来实现（实验中为傅里叶透镜）。频谱面的光强分布则为 $|G(f_x, f_y)|^2$ 称为频谱，此过程也就是物的夫琅禾费衍射。物的夫琅禾费衍射在透镜的后焦平面上形成衍射斑，衍射斑作为新光源发出的各个球面次波在像平面上相干叠加。
物的光波为

$$\tilde{U}_0(x, y) = A_1(t_0 + t_1 \cos 2\pi f x) \quad (4)$$

其发出的三列衍射波在透镜的像方焦平面上形成三个衍射斑 S_{+1}, S_0, S_{-1} 作为三个光源发出的球面波在像平面进行相干叠加，振幅分别为 $A_{\pm 1} \propto \frac{A_1 t_1}{2}$, $A_0 \propto A_1 t_0$ 。相位关系为 $\varphi(\theta) = kL_0(\theta)$, $L_0(\theta)$ 为光栅中心到衍射场点的光程，分别为 $BS_{\pm 1}$ 和 BS_0 ，则三个次波光源的复振幅可写为

$$\tilde{U}_{+1} \propto \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp [ik(BS_{+1})] \quad (5)$$

$$\tilde{U}_0 \propto A_1 t_0 \exp [ik(BS_0)] \quad (6)$$

$$\tilde{U}_{-1} \propto \frac{1}{2} A_1 t_1 \exp [ik(BS_{-1})] \quad (7)$$

次光波源在像平面的复振幅为

$$\tilde{U}_0(x', y') \propto \tilde{U}_0 \exp [ik(B'S_0)] \exp [ik \frac{x'^2 + y'^2}{2\zeta}] \propto A_1 t_0 \exp [ik(BS_0 B')] \exp [ik \frac{x'^2 + y'^2}{2\zeta}] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\pm 1}(x', y') &\propto \tilde{U}_{\pm 1} \exp [ik(B'S_{\pm 1})] \exp [ik \frac{x'^2 + y'^2}{2\zeta}] \exp [-ik(\sin \theta'_{\pm 1})x'] \propto \\ &A_1 t_1 \exp [ik(BS_{\pm 1} B')] \exp [ik \frac{x'^2 + y'^2}{2\zeta}] \exp [-ik(\sin \theta'_{\pm 1})x'] \end{aligned} \quad (9)$$

物象之间具有等光程性，所以 $BS_{\pm 1} B' = BS_0 B'$
三列波在像平面上叠加所得到的干涉场为

在此处键入公式。

$$\tilde{U}_0(x', y') = A_1 \exp [ik\varphi(x', y')] \left\{ t_0 + \frac{t_1}{2} [\exp(-ik \sin \theta'_{-1} x'') + \exp(ik \sin \theta'_{+1} x'')] \right\} \quad (10)$$

因为

$$\frac{\sin \theta'_{\pm 1}}{\sin \theta_{\pm 1}} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{V} \quad (11)$$

V 为像的横向放大率，所以有

$$k \sin \theta'_{\pm 1} x' = k \sin \frac{\theta_{\pm 1} x'}{V} \quad (12)$$

而

$$k \sin \theta_{\pm 1} = \frac{2\pi}{\lambda} (\pm f\lambda) = \pm 2\pi f \quad (13)$$

代入式(10)得到

$$\tilde{U}_1(x', y') \propto A_1 e^{i\varphi(x', y')} [t_0 + t_1 \cos(2\pi f x' / V)] \quad (14)$$

再放出之前的物光波与之对比

$$\tilde{U}_0(x, y) = A_1(t_0 + t_1 \cos 2\pi f x) \quad (15)$$

整体过程为“衍射分频”和“干涉合成”，若在（5）式之前使用光栏（实验中为戳了小孔的白纸）在频谱面对衍射光斑进行取舍，则达到了改造图像的目的，也就出现了玫瑰花的不同区域单独出现的情况。

2.2 数值计算与计算机模拟

为简化设计和更好的探求原理，首先以二维光栅作为物探求其频谱面图，以下为实验中的所得图

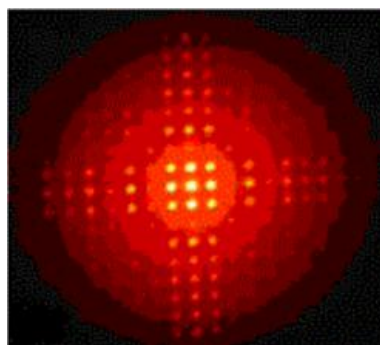


图 4：二维光栅的频谱面图

在matlab中使用矩阵模拟设计出二维光栅，在数学数值上模拟进行光学傅里叶变换变换象限并获取其模从而从矩阵中提取合适比例图像，得到如下的模拟实验图

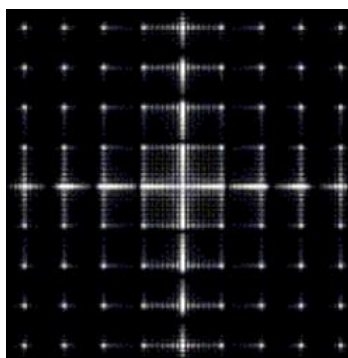


图 5：模拟实验中二维光栅的
频谱面图

可以看出模拟实验的结果与实验的结果是一致的而且模拟图更加的清晰，结果也更加准确。

θ 调制的本质就是空间滤波手法在光学上的使用，所以接下来选择进行对网格字滤波的模拟。首先使用预处理的图像代替物体如下图

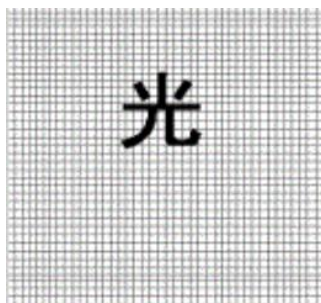


图 6：预处理的图像

接下来对这幅图进行类似上面的傅里叶变换，从而模拟实验中光在傅里叶透镜上的变换，得到相应的频谱分布，如下

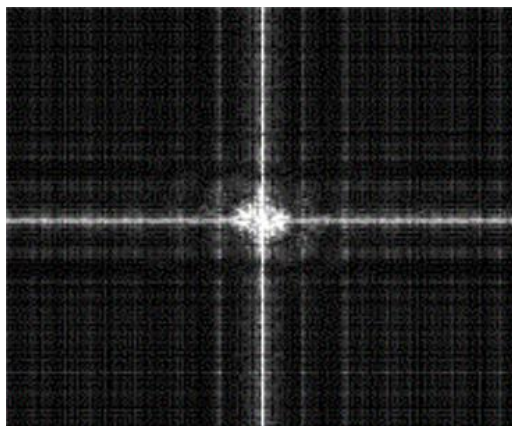


图 7：平面上频谱分布

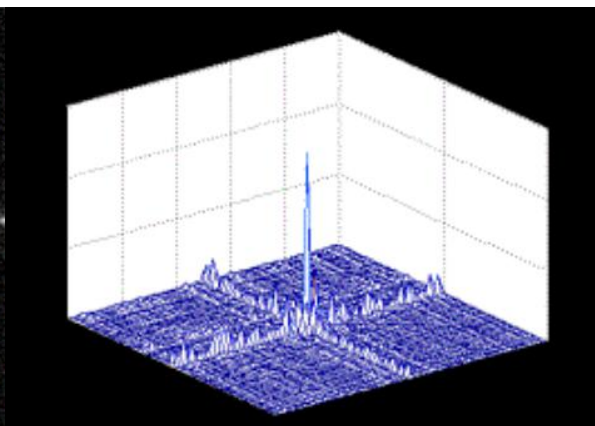


图 8：三维空间中的频谱分布

接下来设计一个低通滤波器，作用类似实验中的简易光栏

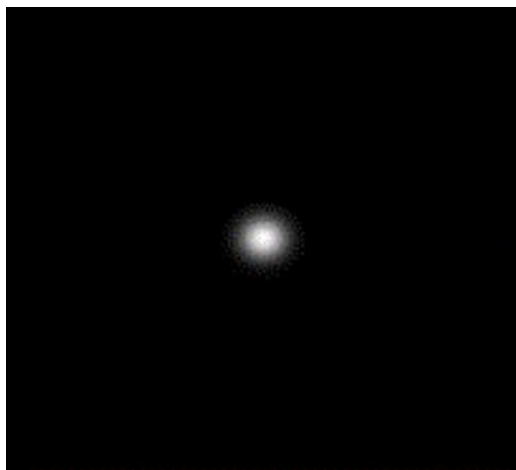


图 9：低通滤波器平面图

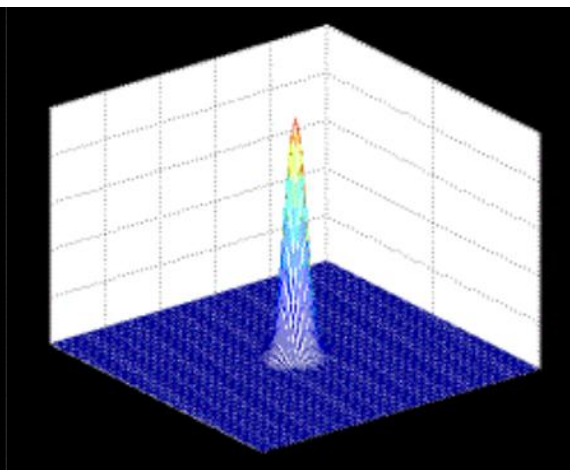


图 10：低通滤波器三维图

将上一步所得的频谱面与低通滤波器相乘, 此步模拟实验中对光在频谱面上的取舍。最后再将处理后的频谱结构进行傅里叶逆变换，模拟实验中的相干叠加，从而得到输出面上的像。

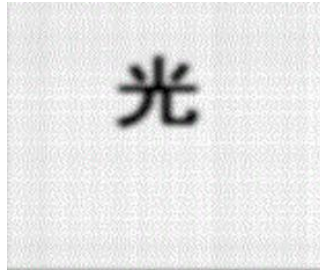


图 11：输出面上得到的像

经过低通滤波，去掉了物象发出光波的高频信息，“光”字笔画较多其中低频信息也较多，因此“光”字大致被保留了下来，而周围的网格则被滤去。处理过的图像能量有所损失所以图像变得模糊。

第三节 阿贝成像原理和空间滤波

在此部分我调研了阿贝成像原理和空间滤波实验。该实验首先探究了全息正交光栅的频谱以及经过多种滤波器处理后的图像，而后通过空间滤波的方法将带网格噪声的“光”字中的网格噪声去除。演示了阿贝成像原理以及空间滤波在光学中的运用。

3.1 实验的原理

阿贝成像原理图

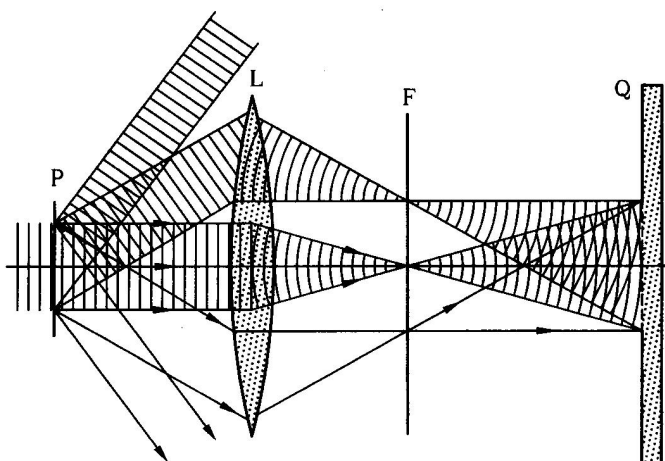


图 12: 阿贝成像原理的光路图

上两节内容中已经提到过了阿贝成像原理，这里作较详细说明。

阿贝成像原理中认为,透镜的成像过程可以分成两步:第一步是通过物的衍射光在透镜后焦面(即频谱面)上形成空间频谱,这是衍射所引起的“分频”作用;第二步是代表不同空间频率的各光束在像平面上相干叠加而形成物体的像,这是干涉所引起的“合成”作用。

成像过程的这两步本质上就是两次傅里叶变换。如果这两次傅里叶变换是完全理想的,即信息没有任何损失,则像和物应完全相似。

如果在频谱面上设置各种空间滤波器,挡去频谱某一些空间频率成份,则将使像发生变化。空间滤波就是在光的系统的频谱而上放置各空间滤波器,去掉(或选择通过)某些空间频率或者改变它们的幅和相,维物体像按照要求得到改善。

3.2 实验的实施过程

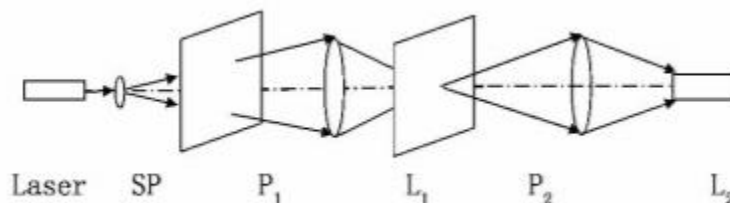


图 13: 阿贝成像原理与空间滤波实验的光路图及其实验设备。

从左到右依次为：波长 632.8nm 的 He-Ne 激光器，SP 为空间滤波器，P₁ 是物平面，L₁ 是焦距为 120mm 的傅里叶变换透镜，P₂ 是 L₁ 的频谱面，L₂ 是焦距为 200mm 的透镜，L₂ 将光学系统的成像缩小投射在 CCD 的光敏面上，在显示器上显示出来。

(1) 解释阿贝成像原理实验

在 P₁ 处放置正交光栅，在 P₂ 频谱面上得到二维点阵。放置狭缝屏分别进行 0°，45°，90° 方向的滤波。

实验结果如下：

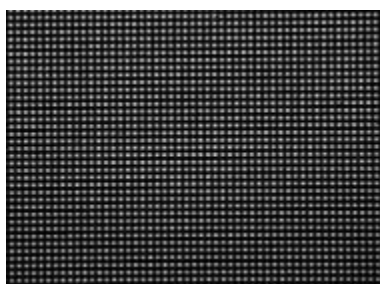


图 14: 完整的网格像

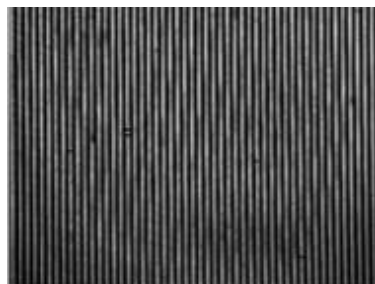


图 15: 狭缝与水平方向呈 0° 的滤波效果

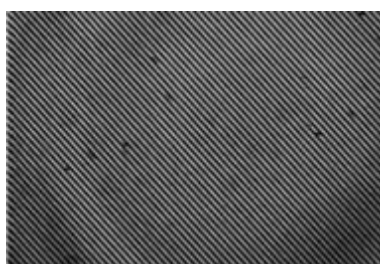


图 16: 狭缝与水平方向呈 45° 的滤波效果



图 17: 狭缝与水平方向呈 90° 的滤波效果

(2) 计算空间频率

将 30 线/mm 的正交光栅置于成像镜的前焦面上。在频谱面上用前面介绍的方法测量 0 级、1 级、2 级、3 级衍射点的位置 d 、 d_1 、 d_2 、 d_3 ，并计算相应的位置坐标 x_1 、 x_2 、 x_3 代入计算空间频率。

(3) 低通滤波

不透明的菲林上 5mm×5mm 大小的透明“光”字，与 12 线/mm 的正交光栅相叠，置入物面。先让观察完整的网格字，然后使用低通滤波器仅使中央零级频谱点通过，观察像面去掉网格的字。

结果如下：

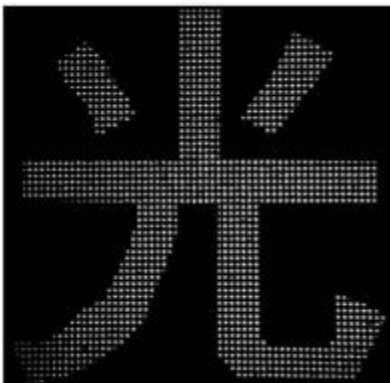


图 18：带网格的字



图 19：去掉网格的字

3.3 实验数据和结论

衍射级次	测次	位置 /mm	坐标 /mm	平均值 /mm	空间频率 /(1/mm)
零级衍射	1	14.33	0	0	0
	2	14.28	0		
	3	14.30	0		
一级衍射	1	16.56	2.23	2.22	29.19
	2	16.56	2.28		
	3	16.44	2.14		
二级衍射	1	18.85	4.52	4.47	58.91
	2	18.79	4.51		
	3	18.69	4.39		
三级衍射	1	21.14	6.81	6.72	88.50
	2	20.93	6.65		
	3	20.99	6.69		

表 1：空间频率的计算结果 出自文献[9]

试验成功演示了三种方向滤波对二维光栏的影响以及低通滤波对物像的空间滤波作用。

实验从理论上证明:物平面置于傅里叶变换透镜的前焦面时,频谱面为光源的共轭像面,并且 频谱面上的空间频率与位置坐标的关系为 $\xi = \frac{x_i}{\lambda f}$, $\eta = \frac{y_i}{\lambda f}$.

3.3 其他相关实验

(1) 激光平面干涉仪的演示实验

原理:

由氦氖激光器 1 发出的激光束,经过聚焦透镜 2 把它聚焦于O点,调整透镜 2 ,使 O 点处于平行光管物镜 4 的焦面上,激光通过物镜 4 后成为准直光,在传播途中,分别由标准平晶 5 和受检平面 7 的两表面反射回四列光波,它们通过物镜 4 后,在其焦平面附近形成四个焦点。

如果为了检验平面镜 7 的前表面 B 的面形,可在它的后表面上涂油,破坏该面的反射,这样,物镜 4 的焦平面附近就剩三个焦点了。

激光通过析光镜 3 时内部反射,在析光镜的两面上分别内反射一次后透过析光镜的光束,也会在物镜 4 的焦平面附近形成三个焦点。这样,在物镜 4 的焦平面附近可以看到六个焦点。它们中的每一个都作为一个光源,在屏 8 上可以看到它们的干涉图。

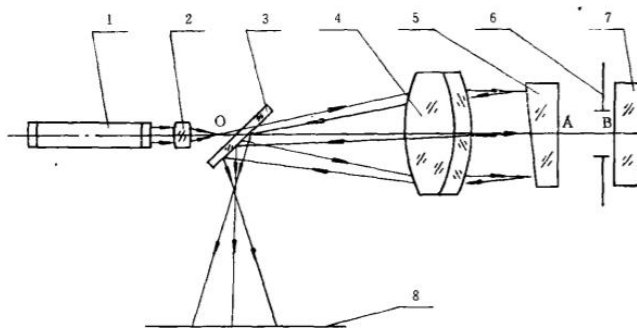


图 20: 实验装置原理图

1.激光器, 2.聚焦透镜, 3. 析光镜 ,4.平行光管的物镜, 5.标准平晶, 6. 光阑 , 7.被检验平面镜 , 8. 屏 。

结论:

我们可以获得两束光干涉的干涉场。当受检面B的面形很好时,由它反射的光和由标准平晶的标准面A反射的光,同在物镜4焦面上形成焦点,这时,平行于焦面设置的

屏8上可以观察到等距的直干涉条纹。

当受检面B是球面时，它反射的光的焦点与标准平晶A面反射光的焦点间将有个轴向距离。调整受检平面，使两个焦点“重合”。这样，在垂直于两焦点连线的屏上观察到同心圆环状的干涉条纹。使屏倾斜，观察到弯曲的干涉条纹，条纹弯向两个焦点的连线的方向。

(2) 基于刀口仪的空气成像演示实验

原理：

光源发出的球面波被球面反射镜反射成像，通过仪，通过热气流使光线发生偏折，在刀口仪后方接调整光路使点光源的像点落在刀口边缘，人眼在收到的图像产生明暗的变化，且明暗变化与热空气流动相对应，即实现了空气的成像。

若球面有瑕疵，则反射光线相对理想情况发生偏转，像点明显变大，部分光线被刀口挡住或避开刀口进入人眼，使得观察到的视场亮度不均匀，根据视场明暗的情况，即可分析镜片的面形质量。

在频谱面放置的刀口相当于空间滤波器，滤除由热气流引发的高频分量。

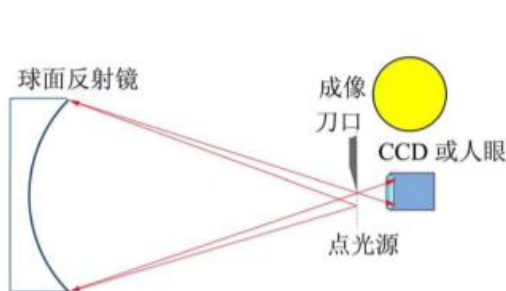


图 21: 理想反射球面成像

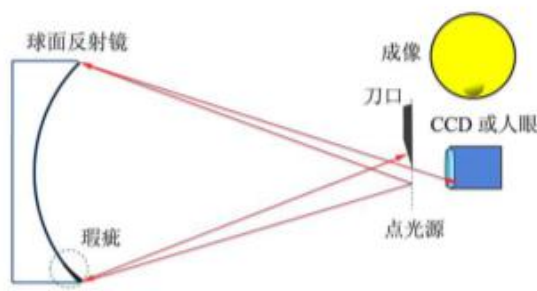


图 22: 瑕疵反射球面成像

结论：

通过打火机加热空气成功观察到了明暗变化的与热空气流动相对应的阴影的基于刀口仪的空气成像现象，使用吹风机加热空气亦得到相似现象。

实验通过空气成像实验拓展了刀口仪的使用。

3.4 小结

阿贝成像理论作为光学成像的较基础理论在实验中受到广泛运用，以其为基础的 optics 方面的空间滤波更是具有很大的实际应用价值。

此处调研的三个相似实验对空间滤波给出了更高一步的诠释，更加清楚明了的介绍了空间滤波在处理图像和检查瑕疵方面的应用。

第四节 总结与展望

经过仔细的调研,我发现 θ 调制的原理阿贝成像理论是相对于基础的光学理论,而建立在其之上的光学空间滤波更加偏向于实际应用方面,并且在空间滤波中关键在于对于滤波器的设计。

在理论方面,阿贝成像理论是基于夫琅和费衍射的二次成像理论,分为“分频”和“叠加”两部分,两个过程中进行的数学变化为傅里叶变换和傅里叶逆变换,当假设出物波函数后可通过计算可得到像波函数,通过二者对比可得到过程中各相位和强度的变化。在二者的过程中可在频谱面上得到各频率光的分布,而对于光的处理也是在这个过程中进行的,也即空间滤波。阿贝成像理论可以总结为 输入(物面)——处理(频谱面)——输出(像面),而在处理的过程中变换和逆变换与脉冲调制有其相似之处,脉冲调制之中先对脉冲信号进行解码,之后再行编码,这与阿贝成像理论中的傅里叶变换和傅里叶逆变换有对应的意味,所以阿贝成像理论大致也为 输入——解码——滤波处理——编码——输出,这可能算是调制在光学和脉冲信号方面的共性吧,物理学的世界是和谐的。

在实验方面, θ 调制实验与其他实验有些许的不同点,通过比较可以知道,我所调研的其他实验都把重点放在滤波方面,会在空间滤波上下一些功夫才能成功的进行实验又或者滤波的器件比较复杂,但是 θ 调制实验的复杂之处都在物的处理之上,在上课讲解时老师首先介绍的也是物(光栅)的复杂处理而非阿贝成像理论本身,对于滤波器的设计更是一笔带过,只是制作了一个简单的光栏,导致就连上课时同学们也都将重点放在光栅的制作上,自我认为这是有些许的失败的。物理实验本身就是通过实验传授物理理论,而在此处 θ 调制声明“调制”但是对于实验原理来说空间滤波的理论相对于光栅的不同散射方向等的制作原理更加重要,所谓“调制”实际上也就是对于物波进行简易的空间滤波,而在这里错误的引导学习者认为光栅的制作即为“调制”本身,所以我认为 θ 调制的实验设计对于重点设置上有些许的失误,而我认为称 θ 调制为科普实验更为恰当。

我认为, θ 调制实验在实验设备等方面还可以进行优化。具体的说有以下几点:

1. 对于滤波器的设计方面,本实验采用的是白纸上戳孔的简易设施,但是光在频谱面上的分布不是绝对分离的,也就是说小孔过大会使得其他不需要的波长的光进入导致 θ 调制的光的色彩不纯,小孔小时又会导致光的强度小图像的亮度不够。针对这个问题可以在在增加光源亮度后在光源后加上可变光阑调节光的强度,在这时就可以对小孔大小进行适当的调节了。
2. 对于滤波器设计的另一方面,可以直接改掉实验中的白纸简易光栏而转而设计一个固定大小的光栏,这样的话对于人为扎小孔对于成像的影响就能减小,而光栏的复杂化也能让实验的重心适当往空间滤波的方向倾斜。
3. 对于实验的理论提升方面,可以在 θ 调制试验后再在光路中换上适当的低通滤波器,再观察低通滤波器对于像的改变,通过对比低通滤波器和简易光阑对光路作用的区别可以使学习者更清晰的了解阿贝成像理论和空间滤波的本质。

参考文献

- [0] Sukadev Meher. Color Image Denoising with Multi-channel Spatial Color Filtering [C]. 2010 12th International Conference on Computer Modelling and Simulation.
- [1] M. Venkata Sudhakar ; Y. Mallikarjuna Reddy ; B. Prabhakara Rao. Analysis of spatial filtering to enhance transmission capability of single mode optical fibers.[C]. 2013 International Conference on Information Communication and Embedded Systems (ICICES).
- [2] M. Venkata Sudhakar ; Y. Mallikarjuna Reddy ; B. Prabhakara Rao. Investigation on spatial filtering to increase information carrying capacity in single mode optical fiber communications.[C]. 2013 IEEE International Conference on Electronics, Computing and Communication Technologies.
- [3] Oliver Thiergart ; Emanuël A. P. Habets. Extracting Reverberant Sound Using a Linearly Constrained Minimum Variance Spatial Filter.[N]. IEEE Signal Processing Letters (Volume: 21 , Issue: 5 , May 2014).
- [4] C. Disselhorst-Klug ; J. Silny ; G. Rau. Improvement of spatial resolution in surface-EMG: a theoretical and experimental comparison of different spatial filters. [N].IEEE Transactions on Biomedical Engineering (Volume: 44 , Issue: 7 , July 1997).
- [5] Yongjun Lim ; Seyoon Kim ; Byoungho Lee. Splitting of the beaming light formed in the sub-wavelength metal slit array structure based on the concept of spatial filtering.[C].2008 7th International Conference on Optical Internet.
- [6] Yanli Zhang ; Xiaoyan Li ; Yan Zhang ; Pengqian Yang ; Jie Miao ; Pingping Sun ; Jia Xu ; Jianqiang. Propagation of divergent beam with amplitude ripples in a spatial filter.[C]. 2009 Conference on Lasers & Electro Optics & The Pacific Rim Conference on Lasers and Electro-Optics.
- [7] F. Zernike. How I Discovered Phase Contrast. [J].Science,Vol 121, Issue 314111 March 1955.
- [8] CLEVELAND ABBE.A SUGGESTION LOOKING TOWARDS ULTRA-MICROSCOPY.[J].Science,Vol 20, Issue 52016 December 1904.
- [9]袁霞.《阿贝成像原理与空间滤波实验教学》.[J].大学物理实验 2013 年 05 期.
- [10]张陈成.《基于刀口仪的空气成像演示实验》.[J].大学物理实验 2018 年 2 月 02 期.
- [11]齐文浦.《激光平面干涉仪的演示实验》.[J].实验技术与管理 1991 年 04 期.