15161《线性代数及其应用》期末试卷解析(2016年1月10日)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
得分	15	15	12	12	14	12	15	5	100

一、填空题(每小题3分，共5小题，共15分).

1、**考察知识点**　逆矩阵、矩阵乘法.

(A卷)设n元列向量$\boldsymbol{\alpha}=[\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$，矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则参数$k$的值为______.

解　应填$\underline{2}$．事实上，

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}，\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\tfrac{1}{2}，$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+(-1+k-\tfrac{k}{2})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow-1+\tfrac{k}{2}=0\Leftrightarrow k=2.$$

(B卷)设n元列向量$\boldsymbol{\alpha}=[\frac{1}{3},0,\cdots,0,\frac{1}{3}]^{\mathrm{T}}$，矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则参数$k$的值为______.

解　应填$\underline{\frac{9}{7}}$．事实上，

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}，\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\tfrac{2}{9}，$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+(-1+k-\tfrac{2k}{9})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow-1+\tfrac{7k}{9}=0\Leftrightarrow k=\tfrac{9}{7}.$$

2、**考察知识点**　生成子空间的基与维数.

线性空间$\mathbb{R}^{2\times2}$的子空间$W=\left\{\begin{bmatrix}a-b&0\\b&a+b\end{bmatrix}\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$的维数是______.

解　应填$\underline{2}$．事实上，线性无关生成元组$\{\boldsymbol{E}_2,-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{21}+\boldsymbol{E}_{22}\}$就是$W$的一个基.

3、**考察知识点**　用方阵的特征值计算迹与行列式.

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&b\\2&a&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$的全体特征值为$2,2,6$，则$a=$____，$b=$____.

解　应填$\underline{4}$，$\underline{1}$．事实上，

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=1+a+5=2+2+6\Rightarrow a=4，$$

$$|\boldsymbol{A}|=1\times14+(-1)\times(-4)+b\times6=2\times2\times6\Rightarrow b=1.$$

4、**考察知识点**　方阵的罗朗(Laurent)多项式的特征值.

(A卷)设2阶方阵$\boldsymbol{A}$的每一行元素之和为2，且$|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|=0$，则$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^{-1}$的全部特征值为____________________.

解　应填$\underline{\frac{9}{2},\frac{26}{3}}$．事实上，$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$2,-3$，可知$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^{-1}$的全部特征值为

$$2^2+2^{-1}=\tfrac{9}{2},(-3)^2+(-3)^{-1}=\tfrac{26}{3}.$$

(B卷)设2阶方阵$\boldsymbol{A}$的每一行元素之和为3，且$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，则$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^{-1}$的全部特征值为____________________.

解　应填$\underline{\frac{28}{3},\frac{7}{2}}$．事实上，$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$3,-2$，可知$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^{-1}$的全部特征值为

$$3^2+3^{-1}=\tfrac{28}{3},\ (-2)^2+(-2)^{-1}=\tfrac{7}{2}.$$

5、**考察知识点** 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交.

设$\boldsymbol{A}$为3阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(10,1,1)$，其中$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&1&k\\-2&0&1\end{bmatrix}$，则参数$k=$_____.

解 应填$\underline{0}$. 事实上，$\mathrm{col}_1\boldsymbol{S},\mathrm{col}_3\boldsymbol{S}$分别为实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值$10,1$的特征向量，所以

$$\mathrm{col}_1\boldsymbol{S}\perp\mathrm{col}_3\boldsymbol{S}\Rightarrow k=0.$$

二、选择题(每小题 3 分，共 5 小题，共 15 分).

1、**考察知识点** 初等变换与矩阵乘法、分离因子法求逆矩阵.

将 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$的第1行与第3行交换得到$\boldsymbol{B}$，再将$\boldsymbol{B}$的第2列加到第3列上得到单位矩阵$\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}^{-1}=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

解 应选(A). 事实上，

$$\boldsymbol{E}_3[1,3]\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_3[3+2]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_3[3+2]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_3[1,3]=\boldsymbol{E}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}_3[2+3]\boldsymbol{E}_3[1,3]=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

2、**考察知识点** 乘积矩阵的秩、用矩阵的秩判定矩阵的行(列)向量组的线性相关性.

设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times m$矩阵，且方阵$\boldsymbol{BA}$满秩，则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关

(C) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性无关

(D) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关

解 应选(C). 事实上，$\boldsymbol{BA}$的秩为n，

$$n\geqslant r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{AB})\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=n\Rightarrow\boldsymbol{A}\text{的列向量组线性无关},$$
$$n\geqslant r(\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{AB})\Rightarrow r(\boldsymbol{B})=n\Rightarrow\boldsymbol{B}\text{的行向量组线性无关}.$$

3、**考察知识点** 齐次线性方程组的基础解系、向量组的秩与极大无关组.

设$\boldsymbol{\eta}=[1,2,1,0]^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，其中$\boldsymbol{A}_{5\times4}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，则以下结论错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性表示　(B) $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性表示　(D) $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性相关

解 应选(A). 事实上，

$$\boldsymbol{A}\text{的秩为}3\Rightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}\text{的秩为}3,$$

$$1\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+1\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}\Rightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}\text{线性相关；}$$

假设$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性表示，则

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\},$$

秩不可能为3．从而假设错误，得证$\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$线性表示.

4、**考察知识点**　相似关系的性质.

设方阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，则以下结论正确的有(　　)个.

① $\boldsymbol{A}^n$与$\boldsymbol{B}^n$相似(n为正整数)　　② 存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

③ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的特征值、特征向量相同　　④ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$相似

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

解　应选(B)．事实上，①、②、④正确，③错误.

5、**考察知识点**　正定矩阵的判别.

与$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&7\end{bmatrix}$合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}5&2\\3&3\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}4&0\\0&5\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}2&3\\3&-5\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

解　应选(B)．事实上，$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，只与正定矩阵合同，(B)为正定矩阵.

三、(12分) **考察知识点**　方阵的相似对角化，方阵的幂.

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a&1&0\\1&3&2\end{bmatrix}$可对角化，求$a$与$\boldsymbol{A}^n$($n$为正整数).

解　下三角矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$.

$\boldsymbol{A}$可对角化$\Leftrightarrow 3-r(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E}_3)=2\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)=1\Leftrightarrow a=0$.

法1　$\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&3&1\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$是属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=1$的极大无关特征向量组.

$\boldsymbol{A\varepsilon}_3=\mathrm{col}_3\,\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{\varepsilon}_3\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}_3$是属于特征值$\lambda_3=2$的特征向量.

令$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]=\begin{bmatrix}-3&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{S}$可逆，且$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(1,1,2)$，可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=[\boldsymbol{S}\,\mathrm{diag}(1,1,2)\boldsymbol{S}^{-1}]^n=\boldsymbol{S}\,\mathrm{diag}(1^n,1^n,2^n)\boldsymbol{S}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}-3&-1&0\\1&0&0\\0&1&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-3&0\\1&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2^n-1&3(2^n-1)&2^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

法2　令$m(x)=(x-1)(x-2)$，则$m(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

设$x^n=q_n(x)m(x)+u_nx+v_n$，则

$$1^n=u_n+v_n,\ 2^n=2u_n+v_n \Rightarrow u_n=2^n-1,\ v_n=2-2^n;$$

$$\boldsymbol{A}^n=u_n\boldsymbol{A}+v_n\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2^n-1&3(2^n-1)&2^n\end{bmatrix}.$$

四、(12 分) **考察知识点**　含参数的线性方程组的向量形式.

设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\5\\5\\12\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-3\\-8\\a-8\\-19\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\a+1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}3\\7\\8\\b+17\end{bmatrix}$，试问$\boldsymbol{\beta}$可否由(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$线性表示？若能表示，给出全部表示式.

解　$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4;\boldsymbol{\beta}]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-3&0&3\\2&5&-8&1&7\\3&5&a-8&-1&8\\5&12&-19&a+1&b+17\end{array}\right]$

$$\xrightarrow[r_4-5r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}}\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&-3&0&3\\0&1&-2&1&1\\0&-1&a+1&-1&-1\\0&2&-4&a+1&b+2\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_3+r_2\\ r_4-2r_2}]{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-2&1\\0&1&-2&1&1\\0&0&a-1&0&0\\0&0&0&a-1&b\end{array}\right],$$

以下分三种情况讨论.

(1) 当$a=1$且$b\neq 0$时，$\boldsymbol{\beta}$不能由(Ⅰ)线性表示.

(2) 当$a=1$且$b=0$时，$\boldsymbol{\beta}$可由(Ⅰ)线性表示，且有无穷多种表示法：

$$\boldsymbol{\beta}=(1-k_1+2k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+2k_1-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_3+k_2\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \forall k_1,k_2\in\mathbb{F}.$$

(3) 当$a\neq 1$时，$\boldsymbol{\beta}$可由(Ⅰ)唯一线性表示：

$$\boldsymbol{\beta}=(1+\tfrac{2b}{a-1})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-\tfrac{b}{a-1})\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+\tfrac{b}{a-1}\boldsymbol{\alpha}_4.$$

五、(14 分) **考察知识点**　过渡矩阵.

设(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$是线性空间$V$的一个基.

(1) 求证(Ⅱ)$=\{\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3\}$也是$V$的一个基；

(2) 求由基(Ⅱ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵；

(3) 求由基(Ⅱ)到基(Ⅲ)$=\{\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3=\boldsymbol{\alpha}_1\}$的过渡矩阵.

解　法 1　(1) 因为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\tfrac12(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=\tfrac12(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=\tfrac12(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3),$$

所以(Ⅰ)$\cong$(Ⅱ)，(Ⅱ)也是V的线性无关生成元组，即(Ⅱ)也是V的一个基.

(2) 由基(Ⅱ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵为$\dfrac12\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}$.

(3) 因为

$$\gamma_1=\beta_1+\beta_2-\beta_3,\ \gamma_2=\tfrac{1}{2}(\beta_1+2\beta_2-\beta_3),\ \gamma_3=\tfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)\text{，}$$

所以由基(Ⅱ)到基(Ⅲ)的过渡矩阵为$\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1\\2&2&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$.

法 2 (1) 由基(Ⅰ)到向量组(Ⅱ)的表示系数矩阵为$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$，则

$$|\boldsymbol{S}|=-4\neq 0\Rightarrow \boldsymbol{S}\text{ 可逆}\Rightarrow\text{(Ⅱ)也是}V\text{ 的一个基.}$$

(2) 由基(Ⅱ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}$.

(3) 由基(Ⅰ)到基(Ⅲ)的过渡矩阵、由基(Ⅱ)到基(Ⅲ)的过渡矩阵分别为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1\\2&2&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}.$$

六、(12 分) **考察知识点** 线性变换及其方阵表示.

在线性空间$\mathbb{R}^{2\times2}$上定义变换$\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{PXP}$，$\forall \boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，其中$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$.

(1) 求证σ是$\mathbb{R}^{2\times2}$的线性变换;

(2) 求σ在自然基(Ⅰ)$=\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}\}$下的表示方阵$\boldsymbol{M}_1$;

(3) 求σ在基(Ⅱ)$=\left\{\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}2&3\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}0&0\\3&2\end{bmatrix}\right\}$下的表示方阵$\boldsymbol{M}_2$.

证 (1) 对任意$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{2\times2}$，$k\in\mathbb{R}$，有

$$\sigma(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{PXP}+\boldsymbol{PYP}=\sigma(\boldsymbol{X})+\sigma(\boldsymbol{Y}),$$
$$\sigma(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{P}=k(\boldsymbol{PXP})=k\sigma(\boldsymbol{X}),$$

从而得证σ是$\mathbb{R}^{2\times2}$的线性变换. □

解 (1) 基像组为

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{PE}_{11}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=1\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{PE}_{12}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+1\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+0\boldsymbol{E}_{22},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{PE}_{21}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{E}_{11}+4\boldsymbol{E}_{12}+1\boldsymbol{E}_{21}+2\boldsymbol{E}_{22},$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}=0\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{12}+0\boldsymbol{E}_{21}+1\boldsymbol{E}_{22},$$

可知σ在基(Ⅰ)下的表示方阵为

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\2&1&4&2\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}.$$

(2) 由自然基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&1&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}$，可知$\sigma$在基(Ⅱ)下的表示方阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2&=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{S}\\&=\begin{bmatrix}3&-2&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&-2&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\2&1&4&2\\0&0&1&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&3&0&0\\0&0&1&3\\0&0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-8&-6&-14\\2&5&4&10\\0&0&7&18\\0&0&-2&-5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{Q}_2\\\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{Q}_1&\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{Q}_2\end{bmatrix}.$

七、(15 分) **考察知识点** 用正交线性替换法化实二次型为标准形.

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+6x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3$.

(1) 求一个正交线性替换，将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出标准形；

(2) 求实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解 (1) $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{bmatrix}$.

法 1 $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|$

$$\begin{aligned}&=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&-3\\-3&\lambda-2&-3\\-3&-3&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1}{\underset{\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda-2&-\lambda-1&-\lambda-1\\-3&\lambda+1&0\\-3&0&\lambda+1\end{vmatrix}\overset{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{\underset{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}\lambda-8&0&0\\-3&\lambda+1&0\\-3&0&\lambda+1\end{vmatrix}\\&=(\lambda+1)^2(\lambda-8),\end{aligned}$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=8$.

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，

$$\boldsymbol{A}-(-1)\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可知$\{\boldsymbol{x}_1=[-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_2=[-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}\}$为属于特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$的线性无关特征向量组.

对特征值$\lambda_3=8$，

$$\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 3\\ 3 & 3 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知$\boldsymbol{x}_3=[1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$为属于特征值$\lambda_3=8$的特征向量.

对$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$做施密特正交单位化，得

$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{x}_1，\ \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{x}_2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}_1=\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{|\boldsymbol{\xi}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\xi}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}，\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\xi}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2|}=\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\xi}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[-1, -1, 2]^{\mathrm{T}}.$$

对$\boldsymbol{x}_3$直接做单位化，得$\boldsymbol{\eta}_3=\dfrac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$.

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3]$，则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，二次型$f(\boldsymbol{x})$经过正交线性替换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$化为标准形

$$g(\boldsymbol{y})=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=-y_1^2-y_2^2+8y_3^2.$$

法 2 显然$\boldsymbol{A}-(-1)\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$的秩为1，可知$\boldsymbol{A}$的全体特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}-\lambda_1-\lambda_2=8,$$

且对应有两两正交的特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

令$\boldsymbol{Q}=\left[\dfrac{\boldsymbol{\xi}_1}{\sqrt{2}}, \dfrac{\boldsymbol{\xi}_2}{\sqrt{6}}, \dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\sqrt{3}}\right]$，则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，二次型$f(\boldsymbol{x})$经过正交线性替换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$化为标准形

$$g(\boldsymbol{y})=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=-y_1^2-y_2^2+8y_3^2.$$

(2) $f(\boldsymbol{x})$的规范形为$h(\boldsymbol{z})=z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

八、(5 分) **考察知识点** 正交矩阵、用乘积法计算行列式.

设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶正交矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，求证0是$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征值.

证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}|$

$\Rightarrow(1-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，其中$1-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq 0$

$\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$

$\Rightarrow$ 0是$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$的特征值. □