高等数学常用公式总结

第一章　函数、极限与连续

1. 常见的偶函数有：$y=\cos x$，$y=|x|$，$y=x^{2n}$；

常见的奇函数有：$y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\arcsin x$，$y=\arctan x$，$y=\log_a(\sqrt{1+x^2}\pm x)$，$y=\dfrac{1}{1\pm a^x}-\dfrac{1}{2}$　$(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

2. 左极限、右极限与极限关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

3. 运算法则

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

(3) 当 $B\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=f(B)$.

4. 夹逼准则

如果对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x，都有

① $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

② $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

5. 单调有界的数列必有极限.

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\left(\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1\right)$；

注：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\neq 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

$\left(\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}\right)$.

7. 常见的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，

$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x$；

$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$；$(1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x$；$a^x - 1 \sim x\ln a$；$\log_a(1+x) \sim \dfrac{1}{\ln a}x$.

8. 在同一极限过程中，若 $\alpha(x) \sim \alpha^*(x)$，$\beta(x) \sim \beta^*(x)$，则

$$\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim \frac{\beta^*(x)}{\alpha^*(x)},$$

$$\lim \alpha(x)\beta(x) = \lim \alpha^*(x)\beta^*(x).$$

9. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

10. 间断点 $\begin{cases} \text{第一类间断点} \begin{cases} \text{可去间断点} \begin{cases} f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处有定义}, \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0), \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, f(x) \text{ 在点 } x_0 \text{ 处无定义}, \end{cases} \\ \text{跳跃间断点} \to \text{点 } x_0 \text{ 处的左右极限存在但不相等}, \end{cases} \\ \text{第二类间断点} \to \text{点 } x_0 \text{ 处的左、右极限中至少有一个不存在}. \end{cases}$

11. 介值定理

设函数在闭区间$[a,b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a) = A$ 及 $f(b) = B$，则对于 A 和 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = C(a < \xi < b)$.

12. 零点定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = 0$.

第二章　一元函数微分学

1. 关于导数的定义，关键是理解并牢记导数值的三种等价表达式的结构：

(1) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$；

(3) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. 左导数与右导数

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

3. 导数的几何意义

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程与法线方程分别为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\qquad(f'(x_0)\neq 0).$$

4.可导必连续,连续不一定可导.

5.常用的求导公式

(1)$C'=0$ (C 为常数);

(2)$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$;

(3)$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $(a>0,a\neq 1)$;

(4)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(5)$(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0,a\neq 1)$;

(6)$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

(7)$(\sin x)'=\cos x$;

(8)$(\cos x)'=-\sin x$;

(9)$(\tan x)'=\sec^2 x$;

(10)$(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(11)$(\sec x)'=\tan x\sec x$;

(12)$(\csc x)'=-\cot x\csc x$;

(13)$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(14)$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15)$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

(16)$(\mathrm{arccot}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

6.导数的四则运算法则

设函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 在点 x 处可导,则函数 $u\pm v,uv,\dfrac{u}{v}(v\neq 0)$ 在点 x 处也可导,并且有

(1)$(u\pm v)'=u'\pm v'$;

(2)$(uv)'=u'v+uv'$;

(3)$[Cu(x)]'=Cu'(x)$(C 为常数);

(4)$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$;

(5)$\left[\dfrac{C}{v(x)}\right]'=-\dfrac{Cv'(x)}{v^2(x)}$.

7.反函数的求导法则

$y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 的导数为 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$,也可记为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

8.常用高阶导数公式:

(1)$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$;

(2)$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3)$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(4)$(x^n)^{(n)}=n!$;

(5)$(x^m)^{(n)}=0$ (正整数 $m<n$);

(6)$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\dfrac{1}{x^n}$;

(7)$\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

9.复合函数求导法则

如果函数 $u=u(x)$ 在点 x 处可导,函数 $y=f(u)$ 在对应点 u 处可导,则复合函数 $y=f(u(x))$ 在点 x 处可导,且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'[u(x)]\cdot u'(x).$$

10. 隐函数的导数

(1) 公式法. 即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

(2) 利用一阶微分形式的不变性.

(3) 利用复合函数求导法则.

11. 参数方程确定的函数的导数

由$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$确定的函数 $y=f(x)$ 的一阶导数为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}(\varphi'(t)\neq 0)$,

二阶导数为$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$.

12. 微分的四则运算

设 $u=u(x),v=v(x)$ 可微,则

(1)$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;

(2)$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$;

(3)$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$;

(4)$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0)$.

13. 复合函数微分法(一阶微分形式不变性)

$y=f[u(x)]$ 的微分为 $\mathrm{d}y=f'(u)\cdot u'(x)\mathrm{d}x=f'(u)\mathrm{d}u$.

14. 常用的微分公式

(1)$\mathrm{d}C=0$;

(2)$\mathrm{d}x^n=nx^{n-1}\mathrm{d}x$;

(3)$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$;

(4)$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(5)$\mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$;

(6)$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(7)$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$;

(8)$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$;

(9)$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2x\mathrm{d}x$;

(10)$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2x\mathrm{d}x$;

(11)$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(12)$\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(13)$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(14)$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\,x)=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

15. 微分在近似计算中的应用

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

可得
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

令 $x_0+\Delta x=x$,则又有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

16. 罗尔定理

设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导;

(3) $f(a)=f(b)$,

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)=0(a<\xi<b).$$

17.拉格朗日中值定理

设函数$y=f(x)$满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad(a<\xi<b).$$

18.洛必达法则

若函数$f(x)$和$g(x)$满足：

(1) 当$x\to x_0$时,函数$f(x)$及$g(x)$同时趋于零或∞.

(2) 在点x_0的某去心邻域内,$f'(x)$及$g'(x)$都存在且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$可为实数,也可为$\pm\infty$或$\infty$),

则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

若将洛必达法则中$x\to x_0$换成$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\pm\infty$,$x\to\infty$,只要相应地修正(2)中的邻域,也可得到同样的结论.

对于$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0型的未定式,都可以转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型的未定式,然后再用洛必达法则求极限.

19.单调性的判定

设函数$f(x)$在(a,b)内可导,则

(1) 如果在(a,b)内$f'(x)>0$,则函数$f(x)$在(a,b)内单调增加；

(2) 如果在(a,b)内$f'(x)<0$,则函数$f(x)$在(a,b)内单调减少.

20.极值的判定

(1) 极值的第一判定定理

设函数$y=f(x)$在点x_0处连续,且在点x_0的某一邻域内可导(点x_0可除外),如果在该邻域内

① 当$x<x_0$时,$f'(x)>0$;而当$x>x_0$时,$f'(x)<0$,则$f(x_0)$为$f(x)$的极大值；

② 当$x<x_0$时,$f'(x)<0$;而当$x>x_0$时,$f'(x)>0$,则$f(x_0)$为$f(x)$的极小值.

如果$f'(x)$在点x_0的两侧不变号,则$f(x_0)$不是$f(x)$的极值.

(2) 极值的第二判定定理

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个邻域内一阶可导,在$x=x_0$处二阶可导,且$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,那么

① 若$f''(x_0)>0$,则$f(x_0)$为$f(x)$的极小值；

② 若$f''(x_0)<0$,则$f(x_0)$为$f(x)$的极大值.

21.曲线凹凸性的判定

设函数 $y=f(x)$ 在(a,b)内存在二阶导数.

(1) 如果在(a,b)内 $f''(x)>0$,则曲线$y=f(x)$在(a,b)上是凹的;

(2) 如果在(a,b)内 $f''(x)<0$,则曲线$y=f(x)$在(a,b)上是凸的.

22. 曲线的拐点

连续曲线凹与凸的分界点称为拐点,一般通过二阶导数是否为零以及在该点两侧二阶导数是否异号来判断某点是否为拐点,注意在拐点处二阶导数可能不存在.

23. 曲线的渐近线

(1) 水平渐近线

如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$(或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$),则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 垂直渐近线

如果点 x_0 是曲线 $y=f(x)$ 的间断点,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$),则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

第三章　一元函数积分学

1. 已知$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则 $F'(x)=f(x)$,$\int kf(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{k}{a}F(ax+b)+C.$

积分运算与微分运算之间有如下的互逆关系:

(1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$,或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,或$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C.$

2. 基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$;

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\quad(\mu\neq-1)$;

(3) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C\quad(x\neq0)$;

(4) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\quad(a>0,a\neq1)$;

(5) $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$;

(6) $\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$;

(7) $\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$;

(8) $\int\sec^2x\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\tan x+C$;

(9) $\int\csc^2x\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}=-\cot x+C$;

(10) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

(11) $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

(12) $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

(13) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$；

(14) $\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$；

(15) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$；

(16) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$；

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$；

(18) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C_1 = -\mathrm{arccot}\, x + C_2$；

(19) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$；

(20) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2} + C$；

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$；

(22) $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

(23) $\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

3. 常用的凑微分的等式（a,b 为常数，$a \neq 0$）：

$\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$； $x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$；

$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\mathrm{d}(\sqrt{x})$； $\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|)$；

$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$； $\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cos x)$；

$\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$； $\sec^2 x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$；

$\csc^2 x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\cot x)$； $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}(\arcsin x)$；

$\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}(\arctan x)$.

4. 分部积分法 —— 常见积分形式及 u 和 $\mathrm{d}v$ 的选取方法：

(1) $\int x^m \ln x \mathrm{d}x, \int x^m \arcsin x \mathrm{d}x, \int x^m \arctan x \mathrm{d}x$（$m \neq -1$，$m$ 为整数）应使用分部积分法计算. 一般地，设 $\mathrm{d}v = x^m\mathrm{d}x$，而被积表达式的其余部分设为 u；

(2) $\int x^n \sin ax\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \cos ax\,\mathrm{d}x$, $\int x^n \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$（$n > 0$，$n$ 为正整数）应利用分部积分法计算. 一般地，设 $u = x^n$，被积表达式的其余部分设为 $\mathrm{d}v$；

(3) $\int \mathrm{e}^{ax} \sin bx\,\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx\,\mathrm{d}x$ 应利用分部积分法计算. 其中 u，v 可任意选择.

5. 定积分的性质

(1) 当 $a = b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 两个可积函数代数和的定积分等于定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) 被积函数中的常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k \text{ 为常数}).$$

(5) 如果在 $[a,b]$ 上，$f(x) = k$，则

$$\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k(b-a).$$

(6) 不论 a，b，c 的相对位置如何，总有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(7) 如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a < b).$$

(8) 如果在区间 $[a,b]$ 上，$f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a < b).$$

(9) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad (a < b)$.

(10) 设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

(11) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

6. $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数（$a > 0$），则有

$$\begin{cases} ① \text{ 当函数 } f(x) \text{ 为奇函数时，} & \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0; \\ ② \text{ 当函数 } f(x) \text{ 为偶函数时，} & \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x. \end{cases}$$

7. 牛顿 - 莱布尼兹公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

8. 变限积分的导数

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导,且

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x), x \in [a,b].$$

对变下限的积分 $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,有

$$\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)' = -f(x).$$

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$\varphi(x)$ 为可导函数,则有

$$[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 均为可导函数,则有

$$[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\mathrm{d}t]' = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x).$$

9. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

直角坐标情形

① 由曲线 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0)$ 及直线 $x = a, x = b(a < b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

② 由上、下两条连续曲线 $y = f_1(x), y = f_2(x)(f_2(x) \geqslant f_1(x))$ 及两条直线 $x = a$, $x = b(a < b)$ 所围成的平面图形,其面积微元为 $\mathrm{d}A = [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$,面积计算公式为

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

③ 由左、右两条连续曲线 $x = g_1(y), x = g_2(y)(g_2(y) \geqslant g_1(y))$ 及两条直线 $y = c$, $y = d(c < d)$ 所围成的平面图形,其面积微元 $\mathrm{d}A = [g_2(y) - g_1(y)]\mathrm{d}y$,面积计算公式为

$$A = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\mathrm{d}y.$$

极坐标情形

设曲线的方程由极坐标给出:$r = r(\theta)(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$,求曲线 $r = r(\theta)$,半直线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(2) 旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$,直线 $x = a, x = b(a < b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所形成的立体(叫作旋转体)的体积

$$V=\int_a^b \pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

曲线 $x=\psi(y)$，直线 $y=c,y=d(c<d)$ 与 y 轴所围曲边梯形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为

$$V=\int_c^d \pi x^2\mathrm{d}y=\pi\int_c^d \psi^2(y)\mathrm{d}y.$$

一物体被垂直于 x 的平面所截获，在 x 处的截面积 $A(x)$ 是 x 的已知连续函数，则该物体介于 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 之间的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

第四章　多元函数微积分学初步

1. 一阶偏导数的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2. 多元复合函数的求导法

(1) 若 $z=f[u(t),v(t)]$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$；

(2) 若 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3. 全微分公式

(1) 若 $z=f(x,y)$，则 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$；

(2) 若 $u=f(x,y,z)$，则 $\mathrm{d}u=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$.

4. 隐函数求导公式

(1) 若隐函数 $F(x,y)=0$ 且 $F_y\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y};$$

(2) 若隐函数 $F(x,y,z)=0$ 且 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

5 二重积分的计算

(1) X-型区域

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) Y-型区域

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 极坐标情形

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

6. 二重积分的性质

(1) 设 a、$b \in \mathbf{R}$，则 $\iint_D [af(x,y) \pm bg(x,y)]\mathrm{d}\sigma = a\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm b\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(2) 设 $D = D_1 \cup D_2$，且 $D_1 \cap D_2 = \varnothing$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

(3) 设 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M,(x,y) \in D$，则

$$mS_D \leqslant \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MS_D,$$

其中 S_D 为积分区域 D 的面积.

(4) 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，S_D 是积分区域 D 的面积，则至少存在一点 $(\xi,\eta) \in D$，使得 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D$.

特别地，当 $f(x,y) \equiv 1$ 时，$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = S_D$.

7. 求面积：$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

8. 求体积：$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

第五章　常微分方程初步

1. 变量可分离的方程：$y' = f(x)g(y)$ 或 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}y + M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}x = 0$.

两边同除以 $g(y)(g(y) \neq 0)$，把变量分离，并求积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}\mathrm{d}y = -\int \frac{M_2(x)}{M_1(x)}\mathrm{d}x$.

2. 一阶齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$ 的通解：

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

3. 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ 的通解为：

$$y = [\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

4. 二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的特征根为 r_1, r_2，则其通解情况如下：

两个不等实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

第六章　常数项级数

1. 级数收敛的必要条件

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 正项级数审敛法

(1) 比较审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $u_n \leqslant v_n (n = 1, 2, \cdots)$，

① 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

② 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

(2) 比值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是一个正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，

则 $\begin{cases} \text{当 } \rho < 1 \text{ 时，} & \text{级数收敛；} \\ \text{当 } \rho > 1 (\text{或 } \rho = \infty) \text{ 时，} & \text{级数发散；} \\ \text{当 } \rho = 1 \text{ 时，} & \text{级数可能收敛，也可能发散.} \end{cases}$

3. 常见级数的敛散性

(1) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

(2) p - 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{发散，} p \leqslant 1, \\ \text{收敛，} p > 1. \end{cases}$

(3) 等比级数(也称几何级数)：

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

当 $|q| < 1$ 时收敛于 $\frac{a}{1-q}$，否则发散.