习题：

- 123页练习4，
- 153页练习9，14(a)，
- 证明对任意n归并排序所用时间为 Θ(nlogn)
- 证明程序14.1所用的元素比较次数为

$$t(n)=\lceil 3n/2 \rceil - 2$$

第十四章分治法（不是课后的题）

Strassen 矩阵分割算法的时间复杂度。

解：$t(n)=\begin{cases} d & n \le k \\ 7t(n/2)+cn^2 & n>k \end{cases}$

令 $n+q=2^m$，其中 $0\leqslant q<2^{(m-1)}<n$ ，$p=\lfloor \log_2^k \rfloor$，这里有 m>p，否则 t(n)=d。

则 $t(n)=7t(n/2)+cn^2=7[7t(n/2^2)+c(n/2)^2]+cn^2$

$=7^2t(n/2^2)+c(7/4)n^2+cn^2$

$=7^2[7t(n/2^3)+c(n/2^2)^2]+ c(7/4)n^2+cn^2$

$=7^3t(n/2^3)+c(7/4)^2n^2+c(7/4)n^2+cn^2$

$=\cdots\cdots$

$=7^{(m-p)}t(n/2^{(m-p)})+c(7/4)^{m-p-1}+\cdots+c(7/4)n^2+cn^2$

$=7^{(m-p)}t(2^p)+cn^2[1-(7/4)^{m-p}]/[1-(7/4)]$

$=d7^{(m-p)}+cn^2(4/3)[(7/4)^{m-p}-1]$

$=(d/7^p)7^m+(4/3)c[2^{2m}(7/4)^{m-p}-n^2]$

$=(d/7^p)7^{\log_2^n}+(4c/3)(4/7)^p7^m-(4c/3)n^2$

$=[(d/7^p)+(4c/3)(4/7)^p]7^m-(4c/3)n^2$

$=[(d/7^p)+(4c/3)(4/7)^p](n+q)^{\log_2 7}-(4c/3)n^2$

所以 $t(n)=\Theta(n^{\log_2 7})$

练习 4：

解：$t(n)=\begin{cases} d & n \le 1 \\ 8t(n/2)+cn^2 & n>1 \end{cases}$

设 $n = 2^k$，

$$
\begin{aligned}
t(n) &= 8t(n/2)+cn^2=8[8t(n/2^2)+c(n/2)^2]+cn^2 \\
&= 8^2t(n/2^2)+c(8/4)n^2+cn^2 \\
&= 8^2[8t(n/2^3)+c(n/2^2)^2]+ c(8/4)n^2+cn^2 \\
&= 8^3t(n/2^3)+c(8/4)^2n^2+c(8/4)n^2+cn^2 \\
&= \cdots\cdots \\
&= 8^kt(1)+cn^2(1+2+\cdots+2^{k-1}) \\
&= 8^kt(1)+cn^2(2^k-1)=(2^k)^3+ cn^2(n-1)=n^3+ cn^2(n-1)= \Theta(n^3)
\end{aligned}
$$