2020～2021 学年第一学期期中考试试卷

《高等数学 2A》(共 3 页)

(考试时间：2020 年 10 月 30 日, 14:00-16:00)

题号	一	二	三	四	五	六	成绩	核分人签字
得分								

一、填空题 (共 15 分,每小题 3 分)

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\left(\dfrac{n^2-n}{2n^2+1}\right)=$__________.

2. 设函数 $y=x^{\tan x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $y'=$ __________.

3. 当 $x\to 0$ 时，$\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot\tan x$ 是 x 的 k 阶无穷小，则 $k=$ __________.

4. 设函数 $y=x^3+5x+1,$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}=$ __________.

5. 设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^5+t,\\ y=\mathrm{e}^{2t}\sin t\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ __________.

二、选择题 (共 15 分,每小题 3 分)

1. 下列数列极限中，正确的是 (　　　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=0$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=1$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=1$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & x\le 0,\end{cases}$ 则下述结论正确的是 (　　　　).

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，$x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点

(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，$x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 和 $x=1$ 均为 $f(x)$ 的第一类间断点

(D) $x=0$ 和 $x=1$ 均为 $f(x)$ 的第二类间断点

3. 下列函数中，在点 $x=0$ 处不可导的是 (　　　　).

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　(B) $f(x)=\sin\dfrac{1}{2+x}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

4. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，则下述结论正确的是 (　　　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意正整数 n 成立　(B) $b_n<c_n$ 对任意正整数 n 成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则 (　　　　).

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

(B) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

(C) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}\left[f(x)-f(\xi)\right]=0$

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

三、计算题（本题 8 分）

已知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}, f(2)=9$. 求极限: (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}$.

2020～2021 学年第一学期《高等数学 2A》期中考试试卷参考答案

（考试时间：2020 年 10 月 30 日, 14:00-16:00）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. $\frac{\pi}{6}$　2. $x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x+\frac{\tan x}{x}\right)$　3. 3　4. $\frac{1}{5}$　5. $\frac{e^{2t}\left(2\sin t+\cos t\right)}{5t^4+1}$

二、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. B　2. A　3. D　4. D　5. C

三、计算题（本题 8 分）

已知 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f(2)=9$. 求极限:(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x^2-4}\cdot\frac{x^2-4}{x-2}=4f'(9)=\frac{4}{9}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-9}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}+3}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{6}f'(2)=\frac{1}{12}$.

解法二：(1) 当 $x\to 2$ 时, $x^2+5\to 9$, $f(x), f'(x)$ 连续, 这是 “$\frac{0}{0}$” 型, 使用洛必达法则,

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f'(x^2+5)\cdot 2x}{1}=4f'(9)=\frac{4}{9};$$

(2) 当 $x\to 2$ 时, $\sqrt{f(x)}\to 3$, 这是 “$\frac{0}{0}$” 型, 使用洛必达法则,

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{1}=\frac{1}{6}f'(2)=\frac{1}{12}.$$

四、计算题（共 35 分，每小题 7 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{2e^x-2-2x-x^2}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-2\cos 2x}{2e^x-2-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin x+4\sin 2x}{2e^x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cos x+8\cos 2x}{2e^x}=3$

解法二：由泰勒公式, $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$, $\sin 2x=2x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)$,

$$2\sin x-\sin 2x=-\frac{2}{3!}x^3+\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)=-x^3+o(x^3),$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),\quad 2\left(e^x-1-x\right)-x^2=\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{2e^x-2-2x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^3+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=3$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3+\cos x}{4}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x-1}{4}\right)^{\frac{4}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{4x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{4x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{8x}}=e^{-\frac{1}{8}}$.

3. 设函数 $f(x)=\sqrt{1+x}+\arcsin\frac{1-x}{1+x^2}$, 求微分 $\mathrm{d}f\big|_{x=1}$.

解：$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-\left(1+x^2\right)-(1-x)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{x^2-2x-1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x\right)^2}},$$

代入 $x=1$, 得 $f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}$, 所以 $\mathrm{d}f\big|_{x=1}=f'(1)\mathrm{d}x=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$.

解法二：$f'(1)=\left(\sqrt{1+x}\right)'\Big|_{x=1}+\left(\arcsin\frac{1-x}{1+x^2}\right)'\Big|_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big|_{x=1}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arcsin\frac{1-x}{1+x^2}-0}{x-1}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1-x}{1+x^2}}{x-1}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}$, 所以 $\mathrm{d}f\big|_{x=1}=f'(1)\mathrm{d}x=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$.

4. 设 $y=x^2\cos 2x$, 求 n 阶导函数 $y^{(n)}$ 及 $y^{(n)}(0)$.

解：$\left(\cos 2x\right)^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$, 由莱布尼茨公式,

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^{(k)}\left(\cos 2x\right)^{(n-k)}$$

$$=x^2\left(\cos 2x\right)^{(n)}+C_n^1\left(x^2\right)'\left(\cos 2x\right)^{(n-1)}+C_n^2\left(x^2\right)''\left(\cos 2x\right)^{(n-2)}$$

$$=x^2 2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+n(2x)2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{2}\times 2\times 2^{n-2}\cos\left(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

$$=2^n\left[x^2\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+nx\cos\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)+\frac{n(n-1)}{4}\cos\left(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\right],$$

$$y^{(n)}(0)=n(n-1)2^{n-2}\cos\frac{(n-2)\pi}{2}=-\frac{n(n-1)}{4}2^n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x}{2+x^2-e^{tx}}$. (1) 求函数 $f(x)$ 的表达式; (2) 求 $f'(x)$;

(3) 当 $x<0$ 时曲线 $y=f(x)$ 有一条水平切线，求该切线的方程.

解：(1) 当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x}{2+x^2-e^{tx}}=0$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x}{2+x^2-e^{tx}}=\dfrac{x}{2+x^2}$. 综上，$f(x)=\begin{cases}0, & x\ge 0,\\ \dfrac{x}{2+x^2}, & x<0.\end{cases}$

(2) 当 $x>0$ 时，$f'(x)=0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{x}{2+x^2}\right)'=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$；

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{0-0}{x-0}=0$, $f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\frac{x}{2+x^2}-0}{x-0}=\dfrac{1}{2}$, 由于 $f_+'(0)\ne f_-'(0)$,

故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导. 综上，$f'(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ \dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}, & x<0.\end{cases}$

(3) $x<0$, $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}=0\Rightarrow x=-\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2})=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,

所以当 $x<0$ 时曲线 $y=f(x)$ 的水平切线为: $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

五、解答题（共 16 分，每小题 8 分）

1. 设由方程 $x^3+y^3=6xy$ 确定了函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3,y=3}$.

解：方程两端对变量 x 求导，得 $3x^2+3y^2y'=6(y+xy')$,

整理得 $(y^2-2x)y'=2y-x^2$, ①

于是 $y'=\dfrac{2y-x^2}{y^2-2x}$, 且 $y'|_{x=3,y=3}=-1$;

$$y''=\frac{(2y'-2x)(y^2-2x)-(2y-x^2)(2yy'-2)}{(y^2-2x)^2},$$

代入 $x=3, y=3, y'=-1$, 得 $y''|_{x=3,y=3}=-\dfrac{16}{3}$.

方法二： 由①式再对变量 x 求导，得

$$(y^2-2x)y''+(2yy'-2)y'=2y'-2x,$$

代入 $x=3, y=3, y'=-1$, 得 $y''|_{x=3,y=3}=-\dfrac{16}{3}$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x\cos x, & x\le 0,\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 存在二阶导数，试确定 a,b,c 的值.

解：(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}(ax^2+bx+c)=c=f(0)=1$, 即 $c=1$;

(2) 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(ax^2+bx+1)-1}{x-0}=b$,

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x\cos x-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x(\cos x-\sin x)}{1}=1$, 所以 $b=1$;

(3) 当 $x>0$ 时, $f'(x)=2ax+1$, 当 $x<0$ 时, $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$,

于是 $f'(x)=\begin{cases}e^x(\cos x-\sin x), & x\le 0,\\ 2ax+1, & x>0.\end{cases}$

$$f_-''(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x(\cos x-\sin x)-1}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x(-2\sin x)}{1}=0,$$

$f_+''(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(2ax+1)-1}{x-0}=2a$, 又因为 $f''(0)$ 存在，所以 $a=0$.

六、证明题 (本题 11 分，第 1 小题 6 分，第 2 小题 5 分)

1. 设 $0<c<1, u_1=\dfrac{c}{2}, u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(c+u_n^2\right)(n=1,2,3,\cdots)$. 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

证明：$u_2=\dfrac{1}{2}\left(c+u_1^2\right)=\dfrac{1}{2}\left(c+\dfrac{c^2}{4}\right)>u_1$，假设 $u_k>u_{k-1}$，则

$$u_{k+1}-u_k=\frac{1}{2}\left(c+u_k^2\right)-\ \frac{1}{2}\left(c+u_{k-1}^2\right)=\frac{1}{2}\left(u_k+u_{k-1}\right)\left(u_k-u_{k-1}\right)>0,$$

可知数列 $\{u_n\}$ 单调增加.

$u_1=\dfrac{c}{2}<c$, 假设 $u_k<c$，$u_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(c+u_k^2\right)<\dfrac{1}{2}\left(c+c^2\right)<c$，则数列 $\{u_n\}$ 有上界.

根据单调有界准则，数列 $\{u_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=A$，由 $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(c+u_n^2\right)$, 得 $A=\dfrac{1}{2}\left(c+A^2\right)$,

即 $A^2-2A+c=0$，解得 $A=1-\sqrt{1-c}$ $\left(A=1+\sqrt{1-c}\text{ 舍去}\right)$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶导数，且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明:

(1) 方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有一个实根;

(2) 方程 $f(x)+f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明：(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性，存在 $\mathring{U}_+(0;\delta)\subseteq(0,1)$，对于 $x\in\mathring{U}_+(0)$，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，取 $a\in\mathring{U}_+(0;\delta)$, 有 $f(a)<0$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,1]\subseteq[0,1]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(1)<0$, 根据零点定理得，至少存在 $\xi\in(a,1)\subseteq(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

(2) 令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $F(\xi)=0$.

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在且函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，得 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$.

于是 $F(0)=F(\xi)=0$，$F(x)$ 在区间 $[0,\xi]$ 上满足罗尔定理的条件，所以至少存在 $\eta\in(0,\xi)\subseteq(0,1)$，使得 $F'(\eta)=e^\eta\left[f(\eta)+f'(\eta)\right]=0$，即 $f(\eta)+f'(\eta)=0$,

也就证明了方程 $f(x)+f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.