一、行列式

1、余子式，代数余子式

在 n 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|$ 中，划去 D 的 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶方阵的行列式称为 D 的 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 D 的 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

2、几个定理(定理 2.3.3，推论 2.3.4)

按行展开 $\left|\boldsymbol{A}\right|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$, $i=1,2,\ldots,n$

按列展开 $\left|\boldsymbol{A}\right|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$, $j=1,2,\ldots,n$

推论 2.3.4 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\ i\neq j$;

$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, i\neq j$.

3、行列式的性质

(1) $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 若行列式的某一列(行)可以拆成两列(行)之和，则行列式可以拆成两个行列式之和，即

$$\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_j+\boldsymbol{\beta}_j,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\right|=\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_j,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\right|+\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_j,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n\right|.$$

(3) 等于零的性质

① 若行列式中某一行(列)的元素全为零，则行列式等于零;

② 若行列式中有两行(列)相同，则行列式的值为零;

③ 若行列式有两列(行)成比例，则行列式等于零.

(4) 初等变换性质

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\xrightarrow[\text{或}c_i\times k]{r_i\times k}\boldsymbol{B}\Rightarrow\left|\boldsymbol{A}\right|=\dfrac{1}{k}\left|\boldsymbol{B}\right|;\\ \boldsymbol{A}\xrightarrow[\text{或}c_j+kc_i]{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}\Rightarrow\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{B}\right|;\\ \boldsymbol{A}\xrightarrow[\text{或}c_i\leftrightarrow c_j]{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}\Rightarrow\left|\boldsymbol{A}\right|=-\left|\boldsymbol{B}\right|.\end{cases}$$

4、行列式计算：三角化法(性质)；

降阶法(性质+展开定理)；

范德蒙、三对角行列式的结论.

5、分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_m & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_m\\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|$$

二、矩阵

1、矩阵及其运算(加法、数乘、乘法、幂、转置、方阵的行列式、分块运算)

(1) 乘法的结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

(2) 方阵的幂的求解 $\begin{cases}\text{二项式定理--例3.1.12}\\ \text{矩阵}=\text{列向量}\times\text{行向量--例3. 1. 13、73页26题}\\ \text{可对角化--例6. 2. 12}\end{cases}$

(3) 转置的性质：$\begin{cases}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A};\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}};\\ (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}};\\ (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.\end{cases}$

(4) 方阵的行列式：$\begin{cases}|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|;\\ |k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|;\\ |\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.\end{cases}$

(5) 分块运算(转置、乘法--例 3. 4. 3，例 3. 4. 6)

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}\Rightarrow\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

$\Rightarrow\boldsymbol{C}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示

2、初等变换及初等矩阵

(1) 单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

(2) 左行右列(矩阵的初等变换可用矩阵乘法来表示)

初等行变换 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}_m[i(k)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B};\\ \boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}_m[i+j(k)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B};\\ \boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{E}_m[i,j]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B};\end{cases}$

初等列变换 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\times k}\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{AE}_n[i(k)]=\boldsymbol{C};\\ \boldsymbol{A}\xrightarrow{c_j+kc_i}\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{AE}_n[i+j(k)]=\boldsymbol{C};\\ \boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{AE}_n[i,j]=\boldsymbol{C}.\end{cases}$

(3) 初等矩阵都是可逆的，且初等矩阵的逆仍是初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}\left[i(k)\right]^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i(\tfrac{1}{k})\right];\quad \boldsymbol{E}\left[i+j(l)\right]^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i+j(-l)\right];$$
$$\boldsymbol{E}\left[i,j\right]^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i,j\right].$$

(4) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

3、可逆矩阵

(1) 定义

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵(或非奇异矩阵)，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是唯一的，记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

（2）性质$\begin{cases}|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1};\\(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A};\\(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}};\\(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1};\\(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.\end{cases}$

（2）伴随矩阵

① $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

② $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

③ $r(\boldsymbol{A})$与$r(\boldsymbol{A}^*)$的关系$\begin{cases}r(\boldsymbol{A})=n\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^*)=n;\\r(\boldsymbol{A})=n-1\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^*)=1;\\r(\boldsymbol{A})\le n-2\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}^*)=0.\end{cases}$

（3）判定：n阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆$\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0$

$\Leftrightarrow$ 存在n阶方阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n(\text{或}\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n)$

（4）逆矩阵的求法$\begin{cases}\text{伴随矩阵法}:\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\\\text{推论3.3.6及运算律}:\quad\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}\\\text{初等变换法}:[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}]\end{cases}$

（5）分块矩阵的逆

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

（6）矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$

求解$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$中$\boldsymbol{X}$，当且仅当求解多个线性方程组.（书上例 3.4.5）

若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\begin{cases}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C};\\[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{X}]\Rightarrow\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}.\end{cases}$

4、矩阵的秩与矩阵的相抵

（1）矩阵的秩的性质

① $0\le r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\le m,\ 0\le r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\le n$；

② 子矩阵的秩不会超过原矩阵的秩；

③ $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}),\ k\neq 0;$

④ $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$；

⑤ $r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{m\times n}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_{s\times t}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

⑥ $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$；

⑦ $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n \le r(\boldsymbol{AB}) \le r(\boldsymbol{A})($ 或 $r(\boldsymbol{B}))$；

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \le n$，其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{P}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbf{P}^{n\times s}$.

⑧ 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$，则 $r(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

（2）求矩阵的秩（理论依据：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩）

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等(行)变换}} \boldsymbol{R}\ \text{（行阶梯形矩阵）},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$ 的非零行的个数.

（3）矩阵的相抵(等价)

① 同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}) \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$；

② $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{A})$，其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆；

③ 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\ne 0)$，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \text{或} \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}.$$

三、线性空间

1、向量组的线性相关性的判断

（1）判断线性相关性

$$\begin{cases} \text{定义--转化为齐次线性方程组的求解} \\ \text{秩--向量组的秩, 矩阵的秩(命题4.2.8,定理4.1.5,定理 4.2.10)} \\ \text{坐标化方法--定理5.2.7(2)} \end{cases}$$

（2）基本结论

判断向量组线性相关

充要：

① 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$.

② $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\ge 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

充分：

① 一个向量组中有部分组线性相关，则整个向量组线性相关；

② 若向量组所含向量个数大于向量分量个数，则向量组必线性相关. 特别地，在 $\mathbf{P}^n$ 中，任意 $n+1$ 个向量必线性相关；

③ 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，如果 $s>t$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

判断向量组线性无关

① 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1 \ne \mathbf{0}$.

② 一个向量组线性无关，则其任何一个部分组线性无关.

③ 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\ge 2)$ 线性无关的充分必要条件是其中任意一个向量都不能由其余向量线性表示；

④ 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

2、等价向量组

(1) 两个等价的线性无关的向量组必含有相同个数的向量；

(2) 若向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，则r(Ⅰ) $\le r$(Ⅱ)；

(3) 若向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，则r(Ⅰ)$=$ r(Ⅱ)；

(4) 向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示$\Leftrightarrow r(\mathrm{II}) = r(\mathrm{I},\mathrm{II})$；

向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)等价 $\Leftrightarrow r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{I},\mathrm{II}) = r(\mathrm{II})$.

4、若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且表示方法唯一.

5、子空间的验证

(1) 非空、加法和数量乘法的封闭；

(2) 写成生成子空间--例 4.3.6，例 4.3.8，例 5.1.11

6、向量组的秩及极大无关组、(线性)子空间的基与维数

(1) 对于$\mathbf{P}^n$中的向量，写成列向量作初等行变换，确定向量组的秩与极大无关组(例 4.2.12)；

对于一般的线性空间中的向量，利用坐标化方法(定理 5.2.7).

(2) 对于$W = L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，则$\dim W = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s)$， 且生成子空间$W$的一个基就是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大无关组.

(3) 基是最少生成元，也是包含了最多的线性无关的向量组. 线性空间V的基不唯一，任意$\dim V$个线性无关的V中向量都是V的一个基.

7、坐标的概念、基变换公式

(1) 坐标 $\boldsymbol{\gamma} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标$\left[x_1,x_2,\ldots,x_n\right]^{\mathrm{T}}$.

(2) 基变换公式

① 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$是线性空间$V$的两个基，向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$可由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，即有

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = s_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + s_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + s_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = s_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + s_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + s_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n, \\ \cdots \quad \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = s_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + s_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + s_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n. \end{cases}$$

令$\boldsymbol{S} = [s_{ij}]$，称$n$阶方阵$\boldsymbol{S}$为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵.

形式记号 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}$

② 过渡矩阵$\boldsymbol{S}$是唯一的，且是可逆的.

③ 若由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}$，则由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}^{-1}$.

(3) 坐标变换公式

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$是线性空间$V$的两个基，由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}$，向量$\boldsymbol{\gamma}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$\boldsymbol{X}$，在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$\boldsymbol{Y}$，则$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{SY}$.

8、欧氏空间

（1）内积的概念

对于任意 $\boldsymbol{\alpha}=\left[a_1,a_2,\ldots,a_n\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=\left[b_1,b_2\ldots,b_n\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，规定 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积**为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}.$$

如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的行向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}.$$

（2）内积的性质

① $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

② $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

③ $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

④ $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，且 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

（3）向量的长度 $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$.

（4）若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，记作 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

（正交向量组必线性无关）

（5）标准正交基　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基

$$\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=1, i=1,2,\ldots,n;$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0, i\neq j, i,j=1,2,\ldots,n.$$

（6）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基，则对任意 $\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{R}^n$，有

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{\alpha}_n.$$

（7）施密特正交化

设（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\leq n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的线性无关向量组. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}_k=\boldsymbol{\alpha}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}_i)}{(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)}\boldsymbol{\beta}_i,\ k=2,3,\ldots,s,$$

则（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是正交向量组. 令

$$\boldsymbol{\eta}_i=\frac{\boldsymbol{\beta}_i}{|\boldsymbol{\beta}_i|},\ i=1,2,\cdots,s,$$

则（Ⅲ）$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\ldots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是标准正交组.

（8）正交矩阵的概念

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$），则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

（9）正交矩阵的性质

① 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$；

② 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1；

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵；

④ 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

⑤ n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基.

四、线性方程组(含参量、不含参量)

1、解的情况

(1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\Rightarrow\begin{cases} r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}}),\ \text{无解} \\ r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})\begin{cases}=n,\ \text{唯一解}\\ <n,\ \text{无穷多解}\end{cases}\end{cases}$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\Rightarrow\begin{cases} |\boldsymbol{A}|\neq 0,\ \text{唯一解} \\ |\boldsymbol{A}|=0\begin{cases}r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}}),\ \text{无穷多解}\\ r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}}),\ \text{无解}\end{cases}\end{cases}$

(2) n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解(只有零解) $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n(r(\boldsymbol{A})=n)$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$.

2、解的结构

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$

(1) 解空间 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{P}^n \mid \boldsymbol{AX}=0\}$；

(2) 基础解系所含向量的个数 $=\dim N(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})$

(等于 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的自由变量的个数)；

(3) 基础解系不唯一，任意 $n-r(\boldsymbol{A})$ 的线性无关的 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解均可作为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系；

(4) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解= $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系的任意线性组合.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$

(1) 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2) 设 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，而 $\boldsymbol{\eta}$ 是它的导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任一解，则 $\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解；

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的有无穷多解，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解= $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解 + 导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

五、特征值和特征向量

1、特征值和特征向量的概念

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{P}^{n\times n}$，对于 $\lambda_0\in\mathbf{P}$，存在非零列向量 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{P}^n$，使得 $\boldsymbol{AX}_0=\lambda_0\boldsymbol{X}_0$，则称 λ_0 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

λ_0 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E}|=0$

2、性质

(1) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\quad |\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\,;$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 具有相同的特征值，但特征向量未必相同；

(3) $\boldsymbol{A}$ 与 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值和特征向量的关系

	已知	$\Rightarrow$		
方阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^m$	$f(\boldsymbol{A})$
特征值	λ_0	$k\lambda_0$	λ_0^m	$f(\lambda_0)$
特征向量	$\boldsymbol{X}_0$	$\boldsymbol{X}_0$	$\boldsymbol{X}_0$	$\boldsymbol{X}_0$

$W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A})\subseteq W_{f(\lambda_0)}(f(\boldsymbol{A}))$.

(4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值和特征向量的关系

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	
方阵	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$
特征值	λ_0	λ_0^{-1}	$\|\boldsymbol{A}\|\lambda_0^{-1}$
特征向量	$\boldsymbol{X}_0$	$\boldsymbol{X}_0$	$\boldsymbol{X}_0$

$W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A})=W_{\lambda_0^{-1}}(\boldsymbol{A}^{-1})$.

(5) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_s$ 是矩阵 A 的互异特征值，$\boldsymbol{X}_{i1},\boldsymbol{X}_{i2},\ldots,\boldsymbol{X}_{it_i}$ 是属于 λ_i 的线性无关的特征向量 $(i=1,2,\cdots,s)$，则特征向量组

$$\boldsymbol{X}_{11},\boldsymbol{X}_{12},\cdots,\boldsymbol{X}_{1t_1};\boldsymbol{X}_{21},\boldsymbol{X}_{22},\cdots,\boldsymbol{X}_{2t_2};\cdots;\boldsymbol{X}_{s1},\boldsymbol{X}_{s2},\cdots,\boldsymbol{X}_{st_s}$$

也线性无关.

2、相似矩阵的概念

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

3、相似矩阵的性质

两个相似的矩阵具有相同的秩、行列式、迹、特征值，但特征向量未必相同.

相似的判定：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可对角化(实对称矩阵)，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

4、矩阵的相似对角化

$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 数域 $\mathbf{P}$ 内有 n 个特征值，每一个特征值的几何重数等于代数重数

(充分条件) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可对角化

若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数.

4、实对称矩阵的相似对角化

(1) 特征值：n 阶实对称矩阵有 n 个实特征值.

(2) 特征向量：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交.

(3) 实对称矩阵必正交相似于实对角矩阵(几何重数等于代数重数).

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似(相似) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值.(正交相似 $\Rightarrow$ 既相似，又合同)

六、线性变换

1、线性变换的定义

设V是数域$\mathbf{P}$上的线性空间，σ是V上的一个变换，即V到V的一个映射，且满足

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\quad \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$；

(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\quad \forall \boldsymbol{\alpha}\in V,\ k\in \mathbf{P}$.

则称σ是V上的一个线性变换.

2、线性变换在一个基下的矩阵

设V是数域$\mathbf{P}$上的线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$的一个基，$\sigma$是$V$上的一个线性变换，$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\ldots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)$可由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，即

$$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\cdots\cdots\\ \sigma(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

记$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，则称$\boldsymbol{A}$为线性变换σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的矩阵.

形式记号 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$

3、线性变换在不同基下的矩阵之间的关系(相似)

设V是数域$\mathbf{P}$上的线性空间，由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}$. σ是V上的一个线性变换，σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$和基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_n$下的矩阵分别为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$.

七、二次型

1、二次型的矩阵及秩($f\xleftrightarrow{1-1}\boldsymbol{A}$(对称))

2、矩阵的合同：合同必相抵；

正交相似$\Rightarrow$既相似，又合同

实对称矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$合同$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的正惯性指数与秩相同

3、化二次型为标准形(不唯一)--正交替换法、配方法(满秩线性替换)

4、惯性定理：实二次型的规范形唯一(正、负惯性指数，符号差)

5、正定二次型（实对称矩阵$\boldsymbol{A}$是实二次型f的矩阵)

(1) 判定f正定二次型($\boldsymbol{A}$是正定矩阵)：

① 对任意$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{X}\neq\mathbf{0}$，总有$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$；

② $\boldsymbol{A}$的特征值都大于零($\boldsymbol{A}$的正惯性指数等于n)；

③ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}$合同(与正定矩阵$\boldsymbol{A}$合同的实对称矩阵$\boldsymbol{B}$正定)；

④ 存在可逆矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}$；

⑤ $\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式都大于零

(2) 必要条件：(i) $a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$；(ii) $|A|>0$