2015～2016 学年第二学期期末考试试卷参考答案

《 线性代数及其应用 》（A卷）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）　　　　2017级理学院严班　Johnson整理

1. $\begin{bmatrix} b_{13} & b_{12} & b_{11} \\ b_{23} & b_{22} & b_{21} \\ b_{33} & b_{32} & b_{31} \end{bmatrix}$　2. $k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\6\\10\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$为任意常数　3. 0　4. 4　5. $\frac{1}{3},0,0$

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

BDCDD

三、

1、显然$\boldsymbol{O}_{2\times2}\in W, W\neq\phi$；$\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in W, k\in\mathrm{R}$，有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm T}=\boldsymbol{A}^{\mathrm T}+\boldsymbol{B}^{\mathrm T}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in W$；$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm T}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm T}=k\boldsymbol{A}$，所以$k\boldsymbol{A}\in W$，故$W$是$\mathrm{R}^{2\times2}$的子空间.

对任意 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b\end{bmatrix}\in W, \boldsymbol{A}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \forall a,b,c\in\mathrm{R}$，又$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$线性无关，是$W$的一个基，且$\dim W=3$.

2、由 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，即 $\begin{bmatrix}3&2&-1\\-2&a&2\\3&6&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\-2\\3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}k\\-2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3k-7=\lambda k,\\-2k-2a+6=-2\lambda,\\3k-15=3\lambda,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}\lambda=-4,\\a=-2,\\k=1,\end{cases}$或$\begin{cases}\lambda=2,\\a=-2,\\k=7,\end{cases}$所以$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$.

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&\lambda-2\\2&\lambda+2&0\\-3&-6&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&\lambda-2\\2&\lambda+2&0\\-\lambda&-4&0\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$$

$\boldsymbol{A}$的全部特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-4$，$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，所以特征值 2 的几何重数为 2=代数重数，故$\boldsymbol{A}$可对角化.

四、设 $\boldsymbol{\alpha}_5=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&4&5\\4&-7&10&13&16\\2&-5&a+7&11&14\\-3&5&-7&a-8&-11\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&4&5\\0&1&-2&-3&-4\\0&0&a-1&0&0\\0&0&0&a+1&0\end{array}\right]$$，当 $a\neq\pm1, r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，

方程组有唯一解，$[x_1,x_2,x_3,x\ ]^{\mathrm T}=[-3,-4,0,0]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_5$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示，且表示方式唯一，$\boldsymbol{\alpha}_5=-3\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{\alpha}_2$.

当$a=-1, r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<4$，方程组有无穷多解，$\boldsymbol{\alpha}_5$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}$ 线性表示，且表示方

式不唯一， $\boldsymbol{\alpha}_5 = (2k_1 - 3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (3k_1 - 4)\boldsymbol{\alpha}_2 + k_1\boldsymbol{\alpha}_4, \forall k_1 \in \mathrm{P}$.

当 $a = 1, r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3 < 4$ ，方程组有无穷多解， $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表示方式不唯一， $\boldsymbol{\alpha}_5 = (k_2 - 3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (2k_2 - 4)\boldsymbol{\alpha}_2 + k_2\boldsymbol{\alpha}_3, \forall k_2 \in \mathrm{P}$.

五、⑴基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}$ ，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}，即$$

$\boldsymbol{\beta}_1 = [1,2,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = [1,3,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = [1,3,2]^{\mathrm{T}}$.

⑵设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基(II)下的坐标为 $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ ，则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{S}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -11 \\ 7 \end{bmatrix}$.

六、⑴ $\sigma(1) = 1 + x^2, \sigma(x) = 1 + x, \sigma(x^2) = x + x^2$ ， 所以 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

⑵由基 $1, x, x^2$ 到基 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ，则 σ 在 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -9 & -25 \\ -1 & 4 & 11 \end{bmatrix}.$$

七、解⑴ 实二次型f的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

因为 $|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2(\lambda-6)$ ∴A的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ， $\lambda_3 = 6$.

对于 $\lambda_1 = -3$. 解方程组 $(-3E_3 - A)X = 0$. 同解方程组为 $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

求得一个基础解系为 $\alpha_1 = [1, -2, 0]^T$, $\alpha_2 = [0, -2, 1]^T$

将 α_1, α_2 正交化，得 $\beta_1 = \alpha_1 = [1, -2, 0]^T$. $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 = \frac{1}{5}[-4, -2, 5]^T$

再将 β_1, β_2 单位化，得 $\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|} = [\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0]^T$ ， $\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = [-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}]^T$.

对于 $\lambda_3 = 6$. 解 $(6E_3 - A)X = 0$ ，它的一个基础解系为 $\alpha_3 = [2, 1, 2]^T$.

将 α_3 单位化，得 $\eta_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^T$

将α_3单位化,得$\eta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=[\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}]^T$

令$S=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{4}{3\sqrt5} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{3\sqrt5} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt5}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$,则S为正交阵.且$S^TAS=diag(-3,-3,6)$

故该二次型$f(x_1,x_2,x_3)$经过正交线性替换$X=SY$,化为标准形$-3y_1^2-3y_2^2+6y_3^2$.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)$的规范形为$z_1^2-z_2^2-z_3^2$.

八、因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为n阶正定矩阵，则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$为实对称矩阵，且对任意

$X\neq 0\in \mathrm{R}^n$, $X^{\mathrm{T}}(A+B)X=X^{\mathrm{T}}AX+X^{\mathrm{T}}BX>0$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

设λ是$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$的任一特征值，因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$正定，且$\boldsymbol{A}$的特征值全部大于$a$，$\boldsymbol{B}$的特征值全部小于$b$，

所以$\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E}$的特征值均大于零，从而为正定矩阵.

由$(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{B}-b\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-(a-b)\boldsymbol{E}$正定，因而其特征值$\lambda-(a-b)>0\Rightarrow\lambda>a-b$.