2014-2015 学年第一学期期中考试试卷

《线性代数及其应用》

整理：2017 级理科试验班 4 班 冬，阳

题号	一	二	三	四	成绩	核分人签字
得分						

得分	

一、（共 25 分）

1. (15 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-5x_5=3, \\ 2x_1-4x_2+3x_3+x_4-11x_5=6, \\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4-12x_5=6, \\ 3x_1-6x_2+3x_3+2x_4-13x_5=t \end{cases}$$

有解，求参数 t 及线性方程组的(向量形式)通解.

2. (10 分) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，而 M_{3j}, A_{3j} 分别是 $a_{3j}\,(j=1,2,3,4)$ 的余子式、代数余子式.

(1) 求 $A_{31}+2A_{32}+3A_{33}+4A_{34}$；

(2) 求 $M_{31}+2M_{32}+3M_{33}+4M_{34}$.

得分	

二、（共 20 分）

1. (8 分) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 是用 4 阶行列式定义的多项式，求 $f(x)$ 的 4 次项系数 a_4 与 3 次项系数 a_3.

2. (12 分) 设 $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，求 A^{2014} 与 $|A^{2014}|$.

得分	

三、(共 32 分)

1. (11 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&1\\2&3&2\\3&6&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=3\boldsymbol{X}+4\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

2. (11 分) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 分别为 n, $s(\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{M}^*$ 为 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵，求证 $\boldsymbol{M}^*=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

3. (10 分) 设 $\mathbb{F}^n$ 中的向量组 (I) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，求证向量组 (II) $=\{\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关.

得分	

四、(共 23 分)

1. (13 分) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\1\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\\3\end{bmatrix},$$

求向量组 (I) $=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\}$ 的一个极大无关组 (I′)，并用 (I′) 线性表示 (I) 中的其余向量.

2. (10 分) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 元非零列向量，求证

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$；

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵.