第七章　向量代数与空间解析几何

第一节　向量代数

一、内容提要

1. 向量概念

既有大小又有方向的量称为**向量**或**矢量**. 通常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \cdots$ 或用 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}, \cdots$ 表示向量, 有时也用形如 $\overrightarrow{AB}$ 的符号表示以 A 为起点、B 为终点的向量. 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为 $\boldsymbol{a}$ 的**模**, 记为$|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 模为 0 的向量称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且模相等, 则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**, 记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 方向相同或相反的向量称为**平行**或**共线**向量, 平行于同一平面的向量称为**共面**向量.

在空间直角坐标系中, 用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量, 并称其为**基本单位向量**.

若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$, 则点 P 的坐标 (x,y,z) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标**, 并记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$. 此时 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

非零向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α, β, γ $(0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi)$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**, 方向角的余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的方向余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\\
&\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
&\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
&\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},
\end{aligned}
$$

且 $\boldsymbol{a}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量.

2. 向量的加减法

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2).$$

3. 数乘向量运算

设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$, λ 为实常数, 则

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z).$$

4. 向量的数量积

(1) 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是两个非零向量, θ是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的夹角, 则称$|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**数量积**或**内积**、**点积**, 记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

对于任何向量$\boldsymbol{a}$, 规定$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$, $\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(2) 设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

(3) 数量积的性质:

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(ii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(iii) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, 其中$\lambda$为实数;

(iv) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(4) 非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

5. 向量的向量积

(1) 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是两个非零向量, θ是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的夹角, 作一个向量$\boldsymbol{c}$, 使得$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$, $\boldsymbol{c}$垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$, 且向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的顺序符合右手规则, 则称$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的**向量积**或**外积**、**叉积**, 记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 对于任意向量$\boldsymbol{a}$, 规定$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

(3) 向量积的性质:

(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(ii) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$, 其中$\lambda$为实数;

(iii) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(4) 当$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$都是非零向量时, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$等于以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

(5) 非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

6. 向量的混合积

(1) 给定三个向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 则称向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的数量积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$为向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$的**混合积**.

(2) 设$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

(3) 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都是非零向量时，$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

7. 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，而 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则称 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影**，记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 上的投影也分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上投影. 若 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，则 x，y 和 z 分别是 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴和 z 轴上的投影.

二、例题解析

例 1 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(3,4,0)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,2,2)$ 夹角平分线的单位向量.

解 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量是 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right)$，与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量是 $\boldsymbol{b}^{\circ}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. 于是向量

$$\boldsymbol{c}=\pm(\boldsymbol{a}^{\circ}+\boldsymbol{b}^{\circ})=\pm\frac{2}{15}(7,11,5)$$

是平行于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线的向量. 所求的单位向量为

$$\boldsymbol{c}^{\circ}=\frac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=\pm\frac{1}{\sqrt{195}}(7,11,5).$$

例 2 应用向量运算证明对任意实数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3，许瓦兹(Schwarz)不等式

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

成立，并指出其中等号成立的条件.

证 令 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}&|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ |\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})|\\&\le|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.\end{aligned}$$

由以上推演过程可知，当且仅当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，即向量 (a_1,a_2,a_3) 与 (b_1,b_2,b_3) 的对应坐标成比例时等号成立.

例 3 设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之间的夹角 α；

(2) 以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积 S.

解 (1) 因为

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{6}+|\boldsymbol{b}|^2\\
&= 3+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=7,\\
|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{6}+|\boldsymbol{b}|^2\\
&= 3-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1=1,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\cos\alpha=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\;|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}.
$$

由此得到$\alpha=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

(2)

$$
S=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=|-5\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}|\;|\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.
$$

例 4 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为非零向量, 且$|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{4}$, 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2|\boldsymbol{b}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x}{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}|}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

评注 对于向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$, 有三角不等式

$$
\Big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\Big|\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.
$$

据此得到

$$
\lim_{x\to0}|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|.
$$

例 5 设$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$为向量, 证明$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

证 令$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 则

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{i}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}\times\boldsymbol{i}\\
&=[(a_2b_3-a_3b_2)\,\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\,\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\,\boldsymbol{k}]\times\boldsymbol{i}\\
&=(a_1b_2-a_2b_1)\,\boldsymbol{j}+(a_1b_3-a_3b_1)\,\boldsymbol{k},\\
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{a}&=a_1(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})-b_1(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\
&=(a_1b_2-a_2b_1)\,\boldsymbol{j}+(a_1b_3-a_3b_1)\,\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

从而

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{i}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{a}.
$$

同理可得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{j}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{a},$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{a}.$$

在以上三式两边分别乘以 c_1, c_2 和 c_3 后相加得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

第二节　平面与空间直线

一、内容提要

1. 平面方程

(1) 点法式方程

过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

(2) 一般式方程

法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 的平面方程

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

(3) **截距式方程**

在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别是 a，b，c 的平面方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

2. 点到平面的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. 两平面的夹角

法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 的两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 之间的夹角 θ 由

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

确定.

两平面相互垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$, 即 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

两平面相互平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$, 即 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 成比例.

4. 空间直线方程

(1) 一般式方程

将直线表示成两平面的交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

(2) 参数方程

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为方向向量的直线的参数式方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} ,$$

其中 t 称为参数.

(3) 点向式(对称式)方程

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为方向向量的直线的点向式方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

5. 两直线的夹角

两直线之间的夹角 θ 即两个方向向量 $\boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ 之间的夹角由

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\,|\boldsymbol{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

确定.

两直线垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2$, 即 $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

两直线平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2$, 即 m_1, n_1, p_1 与 m_2, n_2, p_2 成比例.

6. 空间直线与平面的夹角

方向向量为 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 的直线 L 与法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 的平面 Π 之间的夹角 φ 由

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})| = \frac{|\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{n}|} = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

确定

直线 L 与平面 Π 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n}$, 即 m, n, p 与 A, B, C 成比例.

直线 L 与平面 Π 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$, 即 $mA + nB + pC = 0$.

7. 点到直线的距离

点 $M(x,y,z)$ 到直线 L : $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{M_0M}|}{|\boldsymbol{s}|},$$

其中 M_0 是 L 上的点 (x_0,y_0,z_0) , 而 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 是直线 L 的方向向量.

二、例题解析

例 1 求过点 $P_1(3,0,0)$ 及点 $P_2(0,0,1)$ 且与 xOy 坐标平面夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的平面方程.

解 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 将点 $P_1(3,0,0)$ 代入得 $D=-3A$. 因向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在平面上, 故 $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,0,1)$ 垂直于平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, 从而有

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=-3A+C=0.$$

由此得到 $C=3A$. 由平面与 xOy 坐标平面夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 得向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$, 从而有 $|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{n}|\cos\dfrac{\pi}{4}$, 即有

$$|C|=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

将 $C=3A$ 代入上式解得 $B=\pm\sqrt{8}A$. 于是所求平面方程为

$$Ax\pm\sqrt{8}Ay+3Az-3A=0.$$

化简得

$$x\pm2\sqrt{2}y+3z-3=0.$$

例 2 设平面 Π 过原点及点 $P(1,-1,0)$ 到直线 $L:\begin{cases}y-2x+3=0,\\x-z-3=0\end{cases}$ 的垂线, 求平面 Π 的方程.

解 因直线 L 的的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\-2&1&0\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

故过点 P 且与 L 垂直的平面的方程为

$$x-1+2(y+1)+z=0,$$

即

$$x+2y+z+1=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} x+2y+z+1=0, \\ y-2x+3=0, \\ x-z-3=0, \end{cases}$$

得点 P 到直线 L 的垂线的垂足 $Q\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$. 因为原点 O, 点 P 和 Q 在所求平面 Π 上, 所以向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{5}{3} \end{vmatrix}=\frac{5}{3}\boldsymbol{i}+\frac{5}{3}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

是平面 Π 的法向量. 于是平面 Π 的方程为

$$5x+5y+3z=0.$$

例 3　求两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x, \\ z=x+1 \end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases} y=x+3, \\ z=x \end{cases}$ 之间的最短距离.

分析　二直线之间的最短距离等于连接二直线上任意两点 M_1 和 M_2 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在二直线公垂线所在轴上投影的绝对值, 亦等于 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在公垂线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 上投影的绝对值 $\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{M_1M_2}\right|$, 而

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1M_2}\cos\theta=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{s}|},$$

其中 θ 是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 间的夹角.

解　L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

L_1 与 L_2 的公垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}.$$

点 $M_1(0,0,1)$ 和点 $M_2(0,3,0)$ 分别在 L_1 和 L_2 上, $\overrightarrow{M_1M_2}=(0,3,-1)$. 二直线之间的最短距离为

$$d=\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{s}\right|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4 求过直线 $L:\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$ 且与平面 $\Pi_1: 2x-y-z=0$ 垂直的平面 Π 的方程.

解 所求平面 Π 属于过 L 的平面束

$$\lambda(x+y+1)+\mu(x+2y+2z)=0.$$

此平面束的法向量 $\boldsymbol{n}=(\lambda+\mu,\lambda+2\mu,2\mu)$. 平面 Π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(2,-1,-1)$. 令 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$, 得

$$2(\lambda+\mu)-(\lambda+2\mu)-2\mu=0.$$

由此得到 $\lambda=2\mu$. 取 $\mu=1$, 则 $\lambda=2$. 于是所求平面 Π 的方程为

$$3x+4y+2z+2=0.$$

例 5 求经过直线 $L:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ 且与点 $A(4,1,2)$ 的距离等于 3 的平面方程.

解 所求平面 Π 属于过 L 的平面束

$$\lambda(x+1)+\mu(3y+2z+2)=0,$$

即

$$\lambda x+3\mu y+2\mu z+\lambda+2\mu=0.$$

因点 A 到平面 Π 的距离等于3, 故令

$$\frac{|4\lambda+3\mu+4\mu+\lambda+2\mu|}{\sqrt{\lambda^2+9\mu^2+4\mu^2}}=3,$$

得

$$8\lambda^2+45\lambda\mu-18\mu^2=0.$$

由此解得 $\lambda=-6\mu$ 或 $\lambda=\dfrac{3}{8}\mu$. 前者取 $\mu=-1$ 得 $\lambda=6$, 后者取 $\mu=8$ 得 $\lambda=3$. 于是所求平面 Π 的方程为

$$6x-3y-2z+4=0 \quad \text{或} \quad 3x+24y+16z+19=0.$$

例 6 求过点 $A(-1,0,4)$ 且与直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 及 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{4}$ 都相交的直线 L 的方程.

解 设 Π_1 是过点 A 及直线 L_1 的平面, Π_2 是过点 A 及直线 L_2 的平面, 则所求直线 L 是 Π_1 与 Π_2 的交线. 因原点 O 在 L_1 上, L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,3)$, 故 Π_1 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-8\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

因点 $B(1,2,3)$ 在 L_2 上, L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(2,1,4)$, 故 Π_2 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=9\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

Π_1 与 Π_2 交线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -8 & 7 & -2\\ 9 & -10 & -2\end{vmatrix}=-34\boldsymbol{i}-34\boldsymbol{j}+17\boldsymbol{k}=-17(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}).$$

于是所求直线 L 的方程为

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-4}{-1}.$$

例 7 证明 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 与 $L_2:x-1=y+1=z-2$ 是异面直线, 并求 L_1 与 L_2 的公垂线 L 方程及公垂线之长.

解 因为 L_1 与 L_2 不平行, 且方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3},\\ x-1=y+1=z-2,\end{cases}$$

无解, 从而 L_1 与 L_2 不相交, 所以 L_1 与 L_2 是异面直线.

因 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,3)$, L_2 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(1,1,1)$, 故公垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(-1,2,-1).$$

过 L_1 和公垂线 L 的平面 Π_1 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s_1}\times\boldsymbol{s}=-2(4,1,-2).$$

再注意到原点 O 在 L_1 上, 从而在 Π_1 上, 于是得到平面 Π_1 的方程为

$$4x+y-2z=0.$$

过 L_2 和公垂线 L 的平面 Π_2 的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s_2}\times\boldsymbol{s}=-3(1,0,-1).$$

再注意到 L_2 上的点 $A(1,-1,2)$ 在 Π_2 上, 得到平面 Π_2 的方程为

$$x-z+1=0.$$

因为公垂线 L 既在平面 Π_1 上, 又在平面 Π_2 上, 所以公垂线方程为

$$\begin{cases}4x+y-2z=0,\\ x-z+1=0.\end{cases}$$

公垂线之长 d 也就是两直线间的最短距离, 因此

$$d=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{OA}|=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{s}\right|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

例 8 求点 $M(1,0,2)$ 关于直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的对称点 M'.

解 过点 M 且垂直于直线 L 的平面 Π 的方程为

$$2x+4y-z=0.$$

容易求得直线 L 与 Π 的交点 $M_0\left(\dfrac{17}{7},-\dfrac{8}{7},\dfrac{2}{7}\right)$. 设点 M' 的坐标为 (x,y,z), 则由 $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MM_0}$ 得到

$$(x-1,y,z-2)=2\left(\frac{10}{7},-\frac{8}{7},-\frac{12}{7}\right).$$

由此解得 $x=\dfrac{27}{7}$, $y=-\dfrac{16}{7}$, $z=-\dfrac{10}{7}$. 于是所求的点为 $M'\left(\dfrac{27}{7},-\dfrac{16}{7},-\dfrac{10}{7}\right)$.

例 9 求直线 $L:\begin{cases}x+2y-z+1=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 在平面 $\Pi: x+y+z-3=0$ 上的投影直线方程.

解法 1 在直线 L 上任意取定两点 $A(0,0,1)$ 和 $B(0,1,3)$. 过点 A 和 B 以平面 Π 的法向量 $(1,1,1)$ 为方向向量作平面 Π 的两条垂线

$$L_1:\begin{cases}x=t,\\y=t,\\z=1+t,\end{cases}\qquad L_2:\begin{cases}x=t,\\y=1+t,\\z=3+t.\end{cases}$$

将 L_1 的方程代入平面 Π 的方程得 $t=\dfrac{2}{3}$, 从而得到点 A 在平面 Π 上的投影 $A'\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$. 将 L_2 的方程代入平面 Π 的方程得 $t=-\dfrac{1}{3}$, 从而得到点 B 在平面 Π 上的投影 $B'\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{3}\right)$. 过点 A' 和 B' 的直线

$$\frac{x-\frac{2}{3}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{0}=\frac{z-\frac{5}{3}}{-1}$$

便是直线 L 在平面 Π 上的投影.

解法 2 过直线 L 的平面束为

$$\lambda(x+2y-z+1)+\mu(3x-2y+z-1)=0,$$

即

$$(\lambda+3\mu)x+(2\lambda-2\mu)y+(-\lambda+\mu)z+\lambda-\mu=0.$$

其法向量是 $\boldsymbol{n}=(\lambda+3\mu,2\lambda-2\mu,-\lambda+\mu)$. 平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}_0=(1,1,1)$. 令 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_0$, 得

$$\lambda+3\mu+2\lambda-2\mu-\lambda+\mu=0.$$

化简得 $\lambda+\mu=0$. 取 $\mu=-1$, 得 $\lambda=1$. 代入平面束方程得到平面束中垂直于平面 Π 的平面

$$x-2y+z-1=0.$$

于是直线 L 在平面 Π 上投影直线的方程为

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ x+y+z-3=0. \end{cases}$$

例 10 设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{1}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+1}{2}$ 的公垂线为 L, 求过直线 L 且与向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$ 平行的平面 Π 的方程.

解 因为直线 L 垂直于直线 L_1 和 L_2, 所以 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 垂直于 L_1 和 L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(1,2,1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(1,3,2)$, 从而有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=(1,2,1)\times(1,3,2)=(1,-1,1).$$

于是所求平面 Π 的法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{a}=(1,-1,1)\times(1,0,-1)=(1,2,1).$$

为了写出平面 Π 的方程, 还需求出 Π 上的一个点. 为此求公垂线 L 与直线 L_2 的交点 P_0. P_0 是直线 L_2 上到直线 L_1 距离最近的点. 现借助于点到直线的距离公式求 P_0. $M_1(1,-2,5)$ 是直线 L_1 上的已知点. 直线 L_2 的参数方程为

$$x=t,\quad y=3t-3,\quad z=2t-1.$$

$P(t,3t-3,2t-1)$ 是 L_2 上任意一点. P 到直线 L_1 的距离为

$$\begin{aligned} d(t)&=\frac{\left|\boldsymbol{s}_1\times\overrightarrow{M_1P}\right|}{|\boldsymbol{s}_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|(t-11,-t+5,t+1)\right| \\ &=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(t-11)^2+(-t+5)^2+(t+1)^2}. \end{aligned}$$

考虑函数 $f(t)=(t-11)^2+(-t+5)^2+(t+1)^2$. 因为

$$f'(t)=2(t-11)-2(-t+5)+2(t+1)=6(t-5),$$

所以 $t=5$ 是函数 $f(t)$ 的唯一极小值点, 因此是 $f(t)$ 的最小值点, 从而也是函数 $d(t)$ 的最小值点. 由此得到 L_2 上到 L_1 距离最短的点 $P_0(5,12,9)$. 于是所求平面 Π 的方程为

$$x-5+2(y-12)+z-9=0,$$

即为

$$x+2y+z-38=0.$$

评注 按照本题方法, 也可求出公垂线与直线 L_1 的交点. 有了公垂线上两个点就可写出公垂线方程. 这也是求公垂线方程的一种方法.

例 11 求与直线 $L_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$ 都相交且与向量 $\boldsymbol{a}=(8,7,1)$ 平行的空间直线 L 的方程.

解 点 $M_1(-3,5,0)$ 和点 $M_2(10,-7,0)$ 分别在直线 L_1 和 L_2 上. 直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(2,3,1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(5,4,1)$. 所求直线 L 在过点 M_1 且以

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{a}=-2\,(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})$$

为法向量的平面

$$\Pi_1:2(x+3)-3(y-5)+5z=0 \quad \text{即} \quad 2x-3y+5z+21=0$$

上. 直线 L 也在过点 M_2 且以

$$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{a}=-3\,(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

为法向量的平面

$$\Pi_2:(x-10)-(y+7)-z=0 \quad \text{即} \quad x-y-z-17=0$$

上. 于是 Π_1 与 Π_2 的交线

$$\begin{cases} 2x-3y+5z+21=0, \\ x-y-z-17=0 \end{cases}$$

即为所求.

第三节　曲面与空间曲线

一、内容提要

1. 常用曲面

(1) 柱面

动直线 L 沿已知曲线 C 平行移动所形成的轨迹称为**柱面**, 直线 L 称为柱面的**母线**, 曲线 C 称为柱面的**准线**. 例如, 母线平行于 z 轴, 准线为 xOy 平面上的曲线 $f(x,y)=0$ 的柱面的方程是

$$f(x,y)=0.$$

(2) 旋转曲面

一条平面曲线 C 绕其所在平面上的一条直线 L 旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**, 曲线 C 称为它的**母线**, 直线 L 称为它的**轴**. 例如, yOz 平面上的曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0,$$

曲线 C 绕 y 轴旋转所得旋转曲面的方程为

$$f\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0.$$

(3) 二次曲面

(i) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

(ii) 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$

(iii) 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

(iv) 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1.$

(v) 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=cz \quad (c\neq 0).$

(vi) 双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=cz \quad (c\neq 0).$

2. 空间曲线方程

(1) 一般式

空间曲线 C 可视为两个曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的交线, 方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

(2) 参数式

空间曲线 C 可视为动点的轨迹, 动点坐标 x,y,z 用参数 t 的函数表示为

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad t\in[\alpha,\beta].$$

3. 空间曲线在坐标平面上的投影

(1) 设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

在方程组中消去变量 z, 得到 $f(x,y)=0$, 此即曲线 C 关于 xOy 平面的投影柱面方程. 而 C 在 xOy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

类似地, 若 $g(y,z)=0$ 与 $h(x,z)=0$ 分别是在方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中消去 x 与 y 得到的方程, 则曲线 C 在 yOz 平面与 zOx 平面的投影曲线分别为

$$\begin{cases} g(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} h(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

(2) 设空间曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$

则 C 在 xOy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=0. \end{cases}$$

二、例题解析

例 1 求通过曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与曲面 $x^2=y^2+z^2$ 的交线 L, 且母线平行于 z 轴的柱面方程.

解 所求柱面是曲线 L 关于 xOy 坐标平面的投影柱面. 因此由所给的两个曲面方程消去 z 便得到柱面方程

$$5x^2-3y^2=1.$$

例 2 确定曲面 $\Sigma: z=a(x^2+y^2)$ 中的参数 a, 使点 $P(1,3,-1)$ 关于平面 $\Pi: x-2y+3z=0$ 的对称点 Q 在曲面 Σ 上, 并求曲面 Σ 与平面 Π 的交线在 xOy 平面上投影曲线的方程.

解 过点 P 且垂直于平面 Π 的直线 L 为

$$x=t+1, \quad y=-2t+3, \quad z=3t-1.$$

点 P 与 Q 都在 L 上, 且它们到平面 Π 的距离相等. 点 P 到平面 Π 的距离为

$$\frac{|1-6-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{14}}.$$

令

$$\frac{|t+1-2(-2t+3)+3(3t-1)|}{\sqrt{14}}=\frac{8}{\sqrt{14}},$$

得 $|14t-8| = 8$. 由此解得 $t=\dfrac{8}{7}$ 或 $t=0$. $t=0$ 对应点 P, $t=\dfrac{8}{7}$ 对应点 Q. 因此点 Q 的坐标为 $\left(\dfrac{15}{7},\dfrac{5}{7},\dfrac{17}{7}\right)$. 将 Q 点的坐标代入曲面 Σ 方程得到

$$a=\frac{17}{7}\bigg/\left(\frac{15^2}{7^2}+\frac{5^2}{7^2}\right)=\frac{119}{250}.$$

在方程组 $\begin{cases} z=\dfrac{119}{250}(x^2+y^2), \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ 中消去 z 得曲面 Σ 与平面 Π 的交线在 xOy 平面上投影曲线的方程

$$\begin{cases} \dfrac{357}{250}(x^2+y^2)+x-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

例 3 已知 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,1,1)$ 两点, 求线段 $\overline{AB}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面 Σ 的方程及 Σ 与平面 $z=0$, $z=1$ 所围立体 Ω 的体积 V.

解 线段 $\overline{AB}$ 的参数方程为

$$x=1-t,\quad y=t,\quad z=t,$$

其中 $0\le t\le 1$. 设 $M(x,y,z)$ 是 Σ 上任意一点, 它是线段 $\overline{AB}$ 上对应于参数为 t 的点 $M_0(1-t,t,t)$ 绕 z 轴旋转轨迹上的一个点. 因此 $z=t$, 且 M 与 M_0 到 z 轴的距离相等, 从而有

$$x^2+y^2=(1-t)^2+t^2=(1-z)^2+z^2.$$

整理得

$$x^2+y^2-2z^2+2z-1=0.$$

其中 $0\le z\le 1$. 此即 Σ 的方程.

对任意 $z\in[0,1]$, 过点 $(0,0,z)$ 且垂直于 z 轴的平面在立体 Ω 上的截痕是半径为 $\sqrt{2z^2-2z+1}$ 的圆盘. 因此立体 Ω 的体积为

$$V=\pi\int_0^1\left(2z^2-2z+1\right)\,\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi.$$

例 4 求直线 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$ 绕直线 $L_0:\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 旋转一周所得旋转曲面 Σ 的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是 Σ 上任意一点, 它是直线 L 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 绕直线 L_0 旋转轨迹上的一点. 因为 L_0 平行于 z 轴, 所以 $z=z_0$. 又因为 M 与 M_0 到直线 L_0 的距离相等, 所以有

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(x_0-2)^2+(y_0-3)^2.$$

因点 M_0 在 L 上, 故有

$$x_0 = 2z_0 + 5 = 2z + 5, \quad y_0 = 3z_0 + 4 = 3z + 4.$$

于是有

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2z+3)^2 + (3z+1)^2.$$

化简得

$$x^2 + y^2 - 13z^2 - 4x - 6y - 18z + 3 = 0.$$

此即为曲面 Σ 的方程.

例 5 求以曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x=y \end{cases}$ 为准线，垂直于平面 $\Pi: x=y$ 的直线为母线的柱面方程.

解 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 C 上任意一点, 则

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1, \\ x_0=y_0. \end{cases}$$

过点 M_0 且垂直于平面 Π 的直线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{1} = \dfrac{y-y_0}{-1}, \\ z=z_0. \end{cases}$$

由此及 $x_0=y_0$ 得

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}(x+y), \quad z_0 = z.$$

代入 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ 得

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 = 1.$$

此即所求的柱面方程.

例 6 设直线 $L: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线为 L_0, 求 L_0 绕 y 轴旋转一周而成的旋转曲面 Σ 方程.

解 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,1,-1)$, 平面 Π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$. 因此向量

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{n} = (1,-3,-2)$$

是过直线 L 且垂直于平面 Π 的平面 Π_1 的法向量. 再注意到平面 Π_1 过 L 上的点 $(1,0,1)$, 得到平面 Π_1 的方程

$$x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

于是直线 L 在平面 Π 上的投影直线 L_0 的方程为

$$\begin{cases} x-3y-2z+1=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$$

此方程又可变形为

$$\begin{cases} x=2y, \\ z=\dfrac{1}{2}(1-y). \end{cases}$$

设 $M(x,y,z)$ 是旋转曲面 Σ 上任意一点, 它是 L_0 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 绕 y 轴旋转轨迹上的点, 则

$$\begin{cases} x_0^2+z_0^2=x^2+z^2, \\ y_0=y, \\ x_0=2y_0, \\ z_0=\dfrac{1}{2}(1-y_0). \end{cases}$$

从以上方程组中消去 x_0,y_0,z_0 得到

$$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(1-y)^2.$$

此即所求的旋转曲面 Σ 的方程.

例 7　分别求出曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y=c\ (|c|<a) \end{cases}$ 关于 xOy 坐标平面, zOx 坐标平面及平面 $\Pi: x+y+z=0$ 的投影柱面和在它们上投影曲线的方程.

解　按照已有的公式, 曲线 L 关于 xOy 坐标平面的投影柱面为 $y=c\ \left(|x|\le\sqrt{a^2-c^2}\right)$, 在 xOy 坐标平面投影曲线是直线段

$$\begin{cases} y=c, \\ z=0 \end{cases}\quad \left(|x|\le\sqrt{a^2-c^2}\right).$$

曲线 L 关于 zOx 坐标平面的投影柱面是圆柱面 $x^2+z^2=a^2-c^2$, 在 zOx 坐标平面投影曲线是圆

$$\begin{cases} x^2+z^2=a^2-c^2 \\ y=0. \end{cases}$$

设 $M(x,y,z)$ 是 L 关于平面 $\Pi: x+y+z=0$ 的投影柱面上任意一点, 它在 L 上的点 $M_0(x_0,c,z_0)$ 向平面 Π 所作的垂线 $x-x_0=y-c=z-z_0$ 上. 由此得到

$$x_0=x-y+c,\quad z_0=z-y+c.$$

因点 $M_0(x_0,c,z_0)$ 在 L 上, 故有

$$(x-y+c)^2+c^2+(z-y+c)^2=a^2.$$

此即曲线 L 关于平面 $\Pi: x+y+z=0$ 的投影柱面方程. 曲线 L 在平面 $\Pi: x+y+z=0$ 上投影曲线的方程为

$$\begin{cases} (x-y+c)^2+c^2+(z-y+c)^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

例 8 设 D 由 yOz 平面内的直线 $y=0$, $z=1$, $z=2$ 及曲线 $y=\sqrt{1+z^2}$ 围成, 写出 D 绕 z 轴旋转一周而成的旋转体的侧面方程, 并求旋转体的体积及侧面积.

解 旋转体的侧面方程为

$$x^2+y^2=1+z^2, 1\le z\le 2.$$

体积为

$$V=\pi\int_1^2(1+z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi.$$

因

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{1+2z^2}}{\sqrt{1+z^2}}\,\mathrm{d}z,$$

故侧面积

$$\begin{aligned} S&=2\pi\int_1^2\sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}s=2\pi\int_1^2\sqrt{1+2z^2}\,\mathrm{d}z \\ &=2\sqrt{2}\pi\int_1^2\sqrt{\frac{1}{2}+z^2}\,\mathrm{d}z \\ &=\pi\left(6-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

习 题 七

1. 填空题

(1) 设非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ________ .

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,0)$, $\boldsymbol{b}=(3,1,0)$, 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, 则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最小值是 ________ .

(3) 点 $M(1,3,-4)$ 关于平面 $\Pi: 3x+y-2z=0$ 的对称点是 ________ .

(4) 平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成一个四面体，则内切于该四面体的球面的球心坐标是 ________, 半径是 ________.

2. 选择题

(1) 直线 $\dfrac{x-a}{3}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z+1}{a}$ 在平面 $3x+4y-az=3a-1$ 上, 则 (　　).

(A) $a=1$, $b=2$　　(B) $a=-1$, $b=2$

(C) $a=1$, $b=-2$　　(D) $a=-1$, $b=-2$

(2) 圆 $\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36,\\ 3x+y-z-9=0\end{cases}$ 的中心坐标是(　).

(A) $(6,1,0)$　　(B) $(0,6,1)$　　(C) $(1,6,0)$　　(D) $(4,7,-1)$

(3) 设当 $x=x_0$ 时向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$ 与 $\boldsymbol{b}=(1,1,x)$ 的夹角取得最小值 θ_0, 则(　).

(A) $x_0=-1$, $\theta_0=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(B) $x_0=-2$, $\theta_0=\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{6}}$

(C) $x_0=-3$, $\theta_0=\arccos\dfrac{7}{3\sqrt{11}}$　　(D) $x_0=-4$, $\theta_0=\dfrac{\pi}{4}$

(4) 设直线 $L_1: x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{\lambda}$ 与 $L_2: x+1=y-1=\dfrac{z}{\mu}$ 相交于一点，则$\lambda:\mu=($　$)$.

(A) $3:2$　　(B) $1:2$　　(C) $2:3$　　(D) $2:1$

3. 设$\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$, $\boldsymbol{c}=(2,1,2)$, 向量$\boldsymbol{r}$满足$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$, $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=21$, 求向量$\boldsymbol{r}$.

4. 设向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$共面, $\boldsymbol{a}=(0,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1,3)$, $\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}$上的投影为$\sqrt{5}$, $\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{b}$上的投影为$-\sqrt{14}$, 求$\boldsymbol{c}$.

5. 设L_1和L_2是两条异面直线, M_1和M_2分别是L_1和L_2上的已知点, $\boldsymbol{s}_1$和$\boldsymbol{s}_2$分别是L_1和L_2的方向向量, 证明L_1和L_2之间的距离为

$$d=\frac{\left|(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|},$$

并用此公式求异面直线$L_1:\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$与$L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{2}$之间的距离.

6. 求过直线$L:\begin{cases}3x-2y+2=0,\\ x-2y-z+6=0\end{cases}$的平面$\Pi$的方程，使点$M(1,2,1)$到$\Pi$的距离等于$1$.

7. 求通过z轴, 且与平面$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$夹角为$\dfrac{\pi}{3}$的平面方程.

8. 求过点$M(2,1,3)$且与直线$L:\begin{cases}2x+y+2z-5=0,\\ x+y-3=0\end{cases}$垂直相交的直线方程.

9. 求与直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$和$L_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{-1}$都相交且过点$M(2,-1,2)$的直线方程.

10. 求直线$L_1:\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$和$L_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$的公垂线的方程.

11. 设 $A(1,1,1)$，$B(2,2,-1)$，求线段 $\overline{AB}$ 绕 x 轴旋转一周而成的旋转曲面的方程.

12. 求直线 $L: x-1=y=z-1$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周而成的曲面方程.

13. 求以原点为顶点，且经过三个坐标轴的正圆锥面的方程.

习 题 答 案 与 提 示

习题五

1. (1) $\frac{\pi}{3}$;　(2) 1;　(3) $(-5,1,0)$;　(4) $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$，$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

2. (1) D;　(2) C;　(3) D;　(4) A.

3. $\boldsymbol{r}=(21,15,3)$.

4. $\boldsymbol{c}=(10,3,1)$.

5. 提示: 证明方法参考本章第二节例 7，$d=\frac{8}{\sqrt{26}}=\frac{4\sqrt{26}}{13}$.

6. $x+2y+2z-10=0$ 及 $4y+3z-16=0$.

7. $x-\frac{1}{3}y=0$ 与 $x+3y=0$.

8. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}+\frac{z-3}{4}$.

9. $\begin{cases} x-z=0, \\ 3x-5y-2z-7=0 \end{cases}$ 或写成 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{5}$.

10. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{-6}$.

11. $y^2+z^2=5x^2-12x+9,\ 1\le x\le 2$.

12. $L_0: \begin{cases} x=2t, \\ y=4t-1, \\ z=t \end{cases}$ 或写成 $\begin{cases} x=\frac{y+1}{2}, \\ z=\frac{y+1}{4}, \end{cases}$　$x^2+z^2=\frac{5}{16}(y+1)^2$.

13. $xy+yz+xz=0$.

第八章　多元函数微分学及其应用

第一节　多元函数的基本概念

一、内容提要

1. $\boldsymbol{n}$维空间

n元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体称为**$\boldsymbol{n}$维向量空间**, 简称为**$\boldsymbol{n}$维空间**, 记为$\mathbf{R}^n$, 即

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

每个n元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$\mathbf{R}^n$中的一个**点**, x_i称为该点的第i个**坐标**.

二维空间与三维空间

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \text{ 与 } \mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

分别是平面直角坐标系xOy与空间直角坐标系$Oxyz$中点的全体.

设$M(x_1, x_2, \cdots, x_n), N(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, 称

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

为M和N两点间的**距离**.

2. 邻域、内点、外点、界点和聚点

(1) 设$P_0 \in \mathbf{R}^n$, 点集

$$\{P \mid \rho(P, P_0) < \delta, P \in \mathbf{R}^n\}$$

称为**$\boldsymbol{P}_0$点的$\boldsymbol{\delta}$邻域**, 记为$U(P_0; \delta)$或$U(P_0)$. 点集

$$\{P \mid 0 < \rho(P, P_0) < \delta, P \in \mathbf{R}^n\}$$

称为**$\boldsymbol{P}_0$点的去心$\boldsymbol{\delta}$邻域**, 记为$\mathring{U}(P_0; \delta)$或$\mathring{U}(P_0)$.

在二维空间$\mathbf{R}^2$中, $P_0\,(x_0, y_0)$的δ邻域$U(P_0; \delta)$是以(x_0, y_0)为心, δ为半径的圆之内的点的全体, 即

$$U(P_0; \delta) = \left\{(x, y) \;\middle|\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\right\}.$$

在三维空间$\mathbf{R}^3$中, $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$的δ邻域$U(P_0; \delta)$是以(x_0, y_0, z_0)为心, δ为半径的球之内的点的全体, 即

$$U(P_0; \delta) = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2\right\}.$$

(2) 设$A \subset \mathbf{R}^n$, $P \in \mathbf{R}^n$, 即A是$\mathbf{R}^n$的子集, P是$\mathbf{R}^n$中的一点.

① 若存在$\delta > 0$, 使得$U(P; \delta) \subset A$. 此时称P是A的**内点**. A的内点的全体称为A的**内部**.

② 若对任意 $\delta > 0$, $U(P;\delta)$ 内总有 A 中的点, 也总有不属于 A 的点. 此时称 P 为 A 的**界点**. A 的界点的全体称为 A 的**边界**, 记为 ∂A.

③ 若存在$\delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \cap A = \emptyset$. 此时称 P 是 A 的**外点**.

A 的内点必属于 A. A 的界点可能属于 A, 也可能不属于 A. A 的外点必不属于 A.

(3) 设 $A \subset \mathbf{R}^n$, $P \in \mathbf{R}^n$. 如果对任意 $\delta > 0$, 在 $\overset{\circ}{U}(P;\delta)$ 内都有 A 中的点, 则称 P 是 A 的**聚点**.

P 是 A 的聚点的充分必要条件是 P 的任何邻域内都有 A 的无限多个点.

3. 开集、闭集、开区域和闭区域

(1) 如果集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 中任何一点都是 A 的内点, 则称 A 是**开集**. 如果集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 的所有聚点都属于 A, 则称 A 是**闭集**.

(2) 如果集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ 中任意两点都可用一条完全含于 A 的有限折线(由有限条直线段连接而成的折线)连接起来, 则称 A 为**连通集**. 连通的开集称为**开区域**. 开区域连同其边界所成的点集称为**闭区域**. 开区域、闭区域、开区域连同其部分边界点所组成的点集统称为**区域**.

4. 有界点集与无界点集

设 $A \subset \mathbf{R}^n$. 如果存在 $M > 0$, 使得 $A \subset U(O;M)$, 则称 A 是**有界点集**, 否则称 A 是**无界点集**, 其中 $O(0,0,\cdots,0) \in \mathbf{R}^n$.

5. 多元函数概念

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中非空集合(也称为**平面点集**). 如果按照某一确定的对应法则 f, 对任意 $P(x,y) \in D$ 都有唯一的实数 z 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的**二元函数**或称 f 是 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个**映射**, 记为

$$f : D \to \mathbf{R},\ 或\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D,$$

x 和 y 称为函数 f 的**自变量**, z 称为函数 f 的**因变量**. D 称为 f 的**定义域**. 对任意 $P(x,y) \in D$, 按照法则 f 所对应的实数 z 称为 f 在 P 点的**函数值**, 记为 $z = f(P)$ 或 $z = f(x,y)$. 函数值的全体

$$\{z \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**, 记为 $f(D)$.

类似地, 可定义三元函数和更多元函数. 二元和二元以上的函数统称为**多元函数**.

6. 多元函数的极限

(1) 多元函数极限的定义

设二元函数$f(x,y)$的定义域为D, $P_0(x_0,y_0)$是D的聚点. 如果存在实数A, 使对任给的$\varepsilon > 0$, 总存在$\delta > 0$, 使得当点$P(x,y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0;\delta)$时, 恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称**在D上当$P\to P_0$时函数$f(x,y)$的极限存在**，称**A为当$P\to P_0$时函数$f(x,y)$的极限**，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

如果满足上述条件的实数A不存在, 则称**当$P\to P_0$时函数$f(x,y)$的极限不存在**.

类似地, 可以给出一般的n元函数极限的定义. 当$n\ge 2$时, n元函数的极限也称为**n重极限**.

(2) 二重极限与二次极限的关系

一般地, 二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$不同于二次极限(也称为累次极限)

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \text{ 或 } \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

二重极限存在不能保证二次极限存在, 二次极限存在也不能保证二重极限存在. 可以证明, 如果函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)的某去心邻域内有定义, 且在点(x_0,y_0)的二重极限和两个二次极限都存在, 则它们三者必相等. 由此又知, 如果两个二次极限都存在但不相等, 则二重极限必不存在.

(3) 二重极限的计算

除某些特殊情况外, 二重极限的计算都是很困难的, 甚至是不可能的. 对于那些特殊情况下的极限, 通常是根据多元初等函数的连续性或借助于一元函数的极限加以计算.

7. 多元函数的连续性

(1) 多元函数连续性的定义

设函数$z=f(x,y)$在点集D上有定义, $P_0(x_0,y_0)$是D的聚点且$P_0\in D$, 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点**连续**. 如果$f(x,y)$在D内的每一点都连续, 则称$f(x,y)$**在D内连续**.

类似地, 可以给出一般的n元函数连续的定义.

(2) 多元函数与一元函数连续性概念的区别

一元函数$f(x)$在点x_0处连续与二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续分别是用极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \text{ 与 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

定义的. 从形式上看它们只是一个变量与两个变量的区别. 然而事实并非如此. 前一个极限要求$f(x)$在x_0的某邻域内有定义, 即要求x_0是函数$f(x)$定义域的内点. 后一个极限

则只要求 (x_0, y_0) 是函数 $f(x,y)$ 定义域的聚点，而不要求 (x_0, y_0) 是 $f(x,y)$ 定义域的内点，即不要求函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内各点处处有定义. 这种差异是由于研究实际问题的需要而产生的. 在第十章将会看到，为了研究连续的平面物质曲线 L 与连续的空间物质曲面 Σ 的质量，将涉及到它们的质量密度函数 $\mu(x,y)$ 与 $\mu(x,y,z)$ 的连续性. $\mu(x,y)$ 只在曲线 L 上有定义，其连续性只能在 L 上给出，而 L 上的点又都只是 L 的聚点，不是 L 的内点. 同样，$\mu(x,y,z)$ 只在 Σ 上有定义，它的连续性只能在 Σ 上给出，Σ 上的点也都只是 Σ 的聚点，不是 Σ 的内点.

(3) 多元连续函数的性质

① 连续的多元函数的和、差、积、商(分母不为0时)仍是连续函数.

② 多元连续函数的复合函数仍是连续函数.

③ 多元初等函数在其定义域内的任何区域上是连续的，其中多元初等函数是指由多个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n \geq 2)$ 的基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算而成的，可用一个数学式子表达的多元函数.

④ (**有界性**) 有界闭区域上连续的多元函数在该闭区域上有界.

⑤ (**最大最小值定理**) 有界闭区域上连续的多元函数在该闭区域上必能取得最大值和最小值.

⑥ (**介值定理**) 有界闭区域上连续的多元函数在该闭区域上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

二、例题解析

例 1　求函数 $z = \arcsin(2x) + \ln\left[\left(x^2+y^2-4\right)\left(1-x^2-y^2\right)\right]$ 的定义域.

解　函数 $\arcsin(2x)$ 的定义域为

$$|2x| \leq 1,$$

即

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

函数 $\ln\left[\left(x^2+y^2-4\right)\left(1-x^2-y^2\right)\right]$ 的定义域为

$$\left(x^2+y^2-4\right)\left(1-x^2-y^2\right) > 0,$$

即

$$1 < x^2+y^2 < 4.$$

因此所给函数的定义域为

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 1 < x^2+y^2 < 4. \end{cases}$$

例 2　设 $f(x-y, \ln x) = \left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y \ln x^x}$，求 $f(x,y)$.

解　令$u=x-y, v=\ln x$, 则$x=e^v, y=e^v-u$. 于是

$$f(u,v)=\left(1-\frac{e^v-u}{e^v}\right)\frac{e^{e^v}}{e^{e^v-u}(e^v)\ln(e^v)}=\frac{ue^u}{ve^{2v}}.$$

因此$f(x,y)=\dfrac{xe^x}{ye^{2y}}$.

例 3　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解法 1　分母有理化得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left[\sqrt{xy+1}+1\right]=2.$$

解法 2　分母作等价无穷小代换得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\frac{1}{2}xy}=2.$$

例 4　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

解　由于$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)=0$, 而$\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$有界, 所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

例 5　求极限$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

解　因为

$$0\le\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\le\frac{x^2+y^2}{2x^2y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right),$$

而

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=0,$$

所以由追敛准则得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0.$$

例 6　讨论极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$的存在性.

解　当点(x,y)沿曲线$y=kx^2$趋于$(0,0)$时, 有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{kx^4}{(1+k^2)x^4}=\frac{k}{1+k^2}.$$

因为对于不同的 k, $\dfrac{k}{1+k^2}$ 的值不同, 所以原极限不存在.

评注 当点 (x,y) 沿着过原点的任意直线 $\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ $(0\le\alpha<2\pi)$ 趋于原点时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0.$$

这表明, 当点 (x,y) 沿着过原点的任意直线趋于原点时, 函数 $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 都趋于 0. 但是这也不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=0$. 读者对于多元函数极限的复杂性要有充分的认识.

例 7 讨论函数 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解 由

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}0=0,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}1=1$$

知, 在点 $(0,0)$ 处两个二次极限都存在但不相等, 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 不存在, 从而函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

例 8 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解 令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $(x,y)\to(0,0)$ 的充分必要条件是 $\rho\to 0$. 于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\ln\rho^2=0=f(0,0).$$

因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

第二节 多元函数的偏导数与全微分

一、内容提要

1. 偏导数概念

(1) 定义

设函数$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$点有定义, 且一元函数$f(x,y_0)$在 x_0 的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称**函数$z=f(x,y)$在点P_0处存在对x的偏导数**, 并称此极限值为**函数$z=f(x,y)$在点P_0处对x的偏导数**, 记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad f'_x(x_0,y_0)\ \text{或}\ z'_x|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地, 用极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

定义函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处对变量 y 的偏导数, 并记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\quad f'_y(x_0,y_0)\ \text{或}\ z'_y|_{(x_0,y_0)}.$$

若函数$z=f(x,y)$在集合D内每一点(x,y)对 x 的偏导数都存在, 则偏导数又是定义在D上的函数, 称其为**函数$z=f(x,y)$对变量 x 的偏导函数**, 简称为**对变量 x 的偏导数**, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad f'_x(x,y)\ \text{或}\ z'_x.$$

类似地, 可定义函数$z=f(x,y)$对变量 y 的偏导函数, 并简称为**对变量 y 的偏导数**, 记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y),\quad f'_y(x,y)\ \text{或}\ z'_y.$$

与二元函数类似, 用极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

定义三元函数$u=f(x,y,z)$在点(x,y,z)处对变量 x 的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(2) 几何意义

如图 8 – 1 所示, $f'_y(x_0,y_0)$是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y),\\ x=x_0 \end{cases}$$

在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线 M_0T_0 对 y 轴的斜率. 类似地, $f'_x(x_0,y_0)$是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y),\\ y=y_0 \end{cases}$$

在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线对 x 轴的斜率.

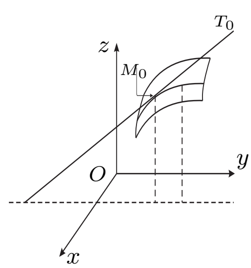

图 8 – 1

(3) 高阶偏导数

函数$z = f(x,y)$的偏导函数$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$的偏导数称为$z = f(x,y)$的**二阶偏导数**. $f'_x(x,y)$对 x 的偏导数$\dfrac{\partial}{\partial x}f'_x(x,y)$记为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f''_{xx}(x,y)\ \text{或}\ z''_{xx}.$$

$f'_y(x,y)$对 y 的偏导数$\dfrac{\partial}{\partial y}f'_y(x,y)$记为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\quad f''_{yy}(x,y)\ \text{或}\ z''_{yy}.$$

$f'_x(x,y)$对 y 的偏导数$\dfrac{\partial}{\partial y}f'_x(x,y)$记为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad f''_{xy}(x,y)\ \text{或}\ z''_{xy}.$$

$f'_y(x,y)$对 x 的偏导数$\dfrac{\partial}{\partial x}f'_y(x,y)$记为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad f''_{yx}(x,y)\ \text{或}\ z''_{yx}.$$

$f''_{xy}(x,y)$与$f''_{yx}(x,y)$称为函数$z = f(x,y)$的**二阶混合偏导数**.

类似地, 可以给出三阶及更高阶偏导数的定义与符号. 二阶及二阶以上的偏导数称为**高阶偏导数**.

若函数$z = f(x,y)$的二阶混合偏导数$f''_{xy}(x,y)$和$f''_{yx}(x,y)$在点$P \in \mathbf{R}^2$的某邻域$U(P)$内存在且连续, 则在$U(P)$内

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

这一结论对一般的多元函数混合偏导函数也成立. 例如对于三元函数 $u = f(x,y,z)$, 如果六个三阶混合偏导数

$$f'''xyz(x,y,z),\quad f'''yzx(x,y,z),\quad f'''zxy(x,y,z),$$
$$f'''xzy(x,y,z),\quad f'''zyx(x,y,z),\quad f'''yxz(x,y,z)$$

在点 $P(x,y,z)$ 的某邻域内连续, 则在此邻域内它们都是相等的, 与求导顺序无关.

2. 全微分

以下所给的定义与结论对三元及更多元函数也适用.

(1) 定义

设二元函数$z = f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$内有定义. 如果存在常数A和B, 使得对任意$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in U(P_0)$都有

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称函数$z=f(x,y)$ 在点P_0处**可微**, 并称$A\Delta x+B\Delta y$为函数$z=f(x,y)$在点P_0处的**全微分**, 记为$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$或$\mathrm{d}f(x_0,y_0)$, 即

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y.$$

(2) 可微的必要条件

① 若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 则其在点(x_0,y_0)处连续.

② 若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微, 则$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在对变量 x 和 y 的偏导数, 且

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

(3) 可微的充分条件

若函数$z=f(x,y)$的两个偏导数在点(x_0,y_0)的某邻域存在, 且$f'_x(x,y)$与$f'_y(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续, 则函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

(4) 多元函数连续、偏导存在、可微之间关系

$$\text{偏导数连续}\Longrightarrow\text{可微}\begin{cases}\Longrightarrow\text{偏导数存在}\\\Longrightarrow\text{连续}\end{cases}$$

在这个示意图中, 逆向的结论都是不成立的. 此外为了简单清晰, 图中并没有把条件全部写出. 严格的陈述还应以前面所给的完整叙述为准.

3. 复合函数微分法

若函数$u=\varphi(x,y)$和$v=\psi(x,y)$在点(x,y)处存在对变量 x 和 y 的偏导数, 函数$z=f(u,v)$在对应点$(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$处可微, 则复合函数$z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点(x,y)处存在对变量 x 和 y 的偏导数, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

4. 隐函数微分法

(1) 若函数 $F(x,y)$ 可微, $y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$确定的可导隐函数, 则

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

(2) 若函数 $F(x,y,z)$ 可微, $z=z(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=0$确定的可导隐函数, 则

$$z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad z'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

(3) 若函数 $F(x,y,u,v)$ 与 $G(x,y,u,v)$ 可微, $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

所确定的可导隐函数, 则分别在两个方程两边对 x 和 y 求导, 并注意到 u 和 v 是 x 和 y 的函数, 遇到 u 和 v 求导时按复合函数求导法则处理, 可得到关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 的两个方程组

$$\begin{cases} F'_x + F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G'_x + G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_y + F'_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + F'_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ G'_y + G'_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + G'_v \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

解此二方程组可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

5. 方向导数

(1) 定义

设函数 $z = f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的某邻域内有定义, $\boldsymbol{l}$ 为 xOy 坐标平面上的一个向量, $P(x,y)$ 是由 P_0 点出发, 方向为 $\boldsymbol{l}$ 的射线上的点, 记 $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. 如果极限

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho}$$

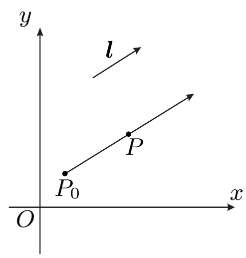

图 8 – 2

存在, 则称函数 $f(x,y)$ 在 P_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数存在**, 并称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在 P_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**, 记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} \quad 或 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0},$$

即

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{\rho}.$$

函数 $z = f(x,y)$ 在任意点 (x,y) 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数记为 $\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$.

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$ 是函数 $z = f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率.

类似地, 可定义函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数.

(2) 计算方法

若函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微, 则 $f(x,y)$ 在点 P_0 处沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在, 且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 是 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦. 类似地, 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微时, 有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0} \cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

6. 梯度

若函数$u=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的三个偏导数都存在, 则称向量

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\boldsymbol{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\boldsymbol{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\boldsymbol{k}$$

为其在点P_0处的**梯度**, 记为$\mathbf{grad}u|_{P_0}$.

函数$u=f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处沿梯度方向 $\mathbf{grad}u|_{P_0}$ 增大最快, 增大速度为 $\left|\mathbf{grad}u|_{P_0}\right|$. 沿负梯度方向 $-\mathbf{grad}u|_{P_0}$ 减小最快, 减小速度也为 $\left|\mathbf{grad}u|_{P_0}\right|$.

二、例题解析

例 1　求曲线$\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x=1 \end{cases}$ 在点$(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向的夹角.

解　设所求的夹角为α, 由偏导数的几何意义可知,

$$\tan\alpha=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

由此得到$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

例 2　讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

解　因为

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)=o(\rho),$$

即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)$ 是比 ρ 高阶的无穷小量, 其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 但是现在

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

当 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $\Delta y=k\Delta x$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(k\Delta x)^2}\to\frac{k}{1+k^2}.$$

随着 k 的不同, $\dfrac{k}{1+k^2}$ 的值也不同. 因此极限 $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在, $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)$ 不是比 ρ 高阶的无穷小量, 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

例 3　确定常数 a 和 b, 使得二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处可微, 并求 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$.

解　因 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 从而有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0.$$

而当点 (x,y) 沿抛物线 $x=y^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$f(x,y)=\left(a\sqrt{y^2}+y^4+y^2+b\right)\frac{\sin y^4}{2y^4}\to\frac{b}{2},$$

由此可知 $b=0$.

因为

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x}=0,$$
$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y}=0,$$

$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 所以应有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a\sqrt{|x|}+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}=0.$$

而当点 (x,y) 沿抛物线 $x=y^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\frac{[a\sqrt{|x|}+x^2+y^2]}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}=\frac{a|y|+y^4+y^2}{|y|\sqrt{y^2+1}}\cdot\frac{\sin(y^4)}{2y^4}\to\frac{a}{2},$$

于是得到 $a=0$.

将 $a=b=0$ 代入得到

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\sin(xy^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

容易求得

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x(y^4-y^2)}{(x^2+y^4)^2}\sin(xy^2)+\dfrac{(x^2+y^2)y^2}{x^2+y^4}\cos(xy^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y(x^2-2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\sin(xy^2)+\dfrac{2(x^2+y^2)xy}{x^2+y^4}\cos(xy^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

因为

$$\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}$$

不存在, 所以在点 $(0,0)$ 处 $f''_{xy}(0,0)$ 不存在. 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

所以 $f''_{yx}(0,0)=0$.

评注 在证明过程中, 我们两次用到一个共同的事实: 如果 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$, 则当点 P 在函数定义域内沿任何特殊路径趋于 P_0 时都有 $f(P)$ 趋于 A.

例 4 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中函数 f 有连续的二阶偏导数, 函数 g 有二阶导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g',\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'\right)\\
&=f'_1+y\left(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\\
&=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2-\frac{1}{x^2}g'+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{y}{x^3}g''.
\end{aligned}$$

例 5 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1)=1$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi\left(x^3\right)\right|_{x=1}$.

解 令 $u=x^3$, 则当 $x=1$ 时 $u=1$. 于是

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi\left(x^3\right)\right|_{x=1}&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi(u)\right|_{u=1}\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f(u,f(u,u))\right|_{u=1}\left.3x^2\right|_{x=1}\\
&=3\left[f'_1(u,f(u,u))-f'_2(u,f(u,u))\left(f'_1(u,u)+f'_2(u,u)\right)\right]\Big|_{u=1}\\
&=3\left[f'_1(1,1)+f'_2(1,1)\left(f'_1(1,1)+f'_2(1,1)\right)\right]\\
&=3[2+3(2+3)]=51.
\end{aligned}$$

例 6 设 $f(x,y)$ 是可微函数，且$f(x,2x)=x$, $f'_x(x,2x)=x^2$, 求$f'_y(x,2x)$.

解 在方程$f(x,2x)=x$两边同时对x求导，得

$$f'_x(x,2x)+2f'_y(x,2x)=1.$$

代入 $f'_x(x,2x)=x^2$, 得

$$x^2+2f'_y(x,2x)=1.$$

由此解得

$$f_y'(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2).$$

例 7 如果存在常数 k, 使得对任意 (x,y,z) 和 $t>0$ 都有 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 成立, 则称 $f(x,y,z)$ 是 k **次齐次函数**. 证明可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充分必要条件是对任意 (x,y,z) 恒有

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=kf(x,y,z). \tag{$*$}$$

证 充分性. 对任意 (x_0,y_0,z_0), 令

$$\varphi(t)=\frac{1}{t^k}f(tx_0,ty_0,tz_0),$$

则

$$\begin{aligned}\varphi'(t)=\frac{1}{t^{k+1}}\Big[&tx_0f_x'(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f_y'(tx_0,ty_0,tz_0)\\&+tz_0f_z'(tx_0,ty_0,tz_0)-kf(tx_0,ty_0,tz_0)\Big].\end{aligned}$$

根据条件 $(*)$, 有

$$tx_0f_x'(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f_y'(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0f_z'(tx_0,ty_0,tz_0)-kf(tx_0,ty_0,tz_0)=0.$$

从而有 $\varphi'(t)=0$, $\varphi(t)$ 是常数函数. 因 $\varphi(1)=f(x_0,y_0,z_0)$, 故有 $\varphi(t)=f(x_0,y_0,z_0)$. 于是有

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^kf(x_0,y_0,z_0).$$

再据 (x_0,y_0,z_0) 的任意性知, 上式表明 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数.

必要性. 因为 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数, 所以对任意 (x_0,y_0,z_0) 都有

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^kf(x_0,y_0,z_0).$$

两边同时对 t 求导得

$$x_0f_x'(tx_0,ty_0,tz_0)+y_0f_y'(tx_0,ty_0,tz_0)+z_0f_z'(tx_0,ty_0,tz_0)=kt^{k-1}f(x_0,y_0,z_0).$$

令 $t=1$, 得

$$x_0f_x'(x_0,y_0,z_0)+y_0f_y'(x_0,y_0,z_0)+z_0f_z'(x_0,y_0,z_0)=kf(x_0,y_0,z_0).$$

再由 (x_0,y_0,z_0) 的任意性知, 对任意 (x,y,z) 恒有

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

评注 若函数 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 满足 $f\left(\dfrac{ty}{tx}\right)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 则按照齐次函数定义, $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 是零次齐次函数. 因此在常微分方程中将形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的方程称为齐次方程.

例 8 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又函数 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 因为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v},\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},\\
&\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v},
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=x^2+y^2.$$

例 9 设 $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, 证明

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}.$$

证 因为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}+ye^{-x^2y^2}(-2x^2y)=\left(1-2x^2y^2\right)e^{-x^2y^2},
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}.$$

例 10 设 $u=f(x,y,z)$ 是可微函数, 其中 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^x=1+\displaystyle\int_0^{y-x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 和 $z=\mathrm{e}^{xy}-x+y$ 确定的函数, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 利用所给方程可知, 当 $x=0$ 时 $y=0,z=1$. 在方程 $\mathrm{e}^x=1+\displaystyle\int_0^{y-x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 两边同时对 x 求导, 得

$$\mathrm{e}^x=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1\right)\mathrm{e}^{(y-x)^2}.$$

代入 $x=0,y=0$ 得到 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2$. 在方程 $z=\mathrm{e}^{xy}-x+y$ 两边同时对 x 求导, 并注意到 y 是 x 的函数, 得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

代入 $x=0,y=0,\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=2$ 得到 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$. 于是

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}&=f'_x(0,0,1)+f'_y(0,0,1)\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}+f'_z(0,0,1)\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\\&=f'_x(0,0,1)+2f'_y(0,0,1)+f'_z(0,0,1).\end{aligned}$$

例 11 设 $u=f(x,y,z)$ 是可微函数, 其中变量 x,y,z 又满足 $\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 和 $y=\sin x$, 函数 φ 有连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 在 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 的两边对 x 求导, 注意其中 y,z 都是 x 的函数, 且 $y=\sin x$, 得

$$2x\varphi'_1+\mathrm{e}^y\varphi'_2\cos x+\varphi'_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.$$

由此解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\varphi'_3}\left(2x\varphi'_1+\mathrm{e}^y\varphi'_2\cos x\right).$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'_x+f'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'_x+f'_y\cos x-\frac{1}{\varphi'_3}\left(2x\varphi'_1+e^y\varphi'_2\cos x\right)f'_z.$$

例 12 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $z-x+x\mathrm{e}^{z-x-y}=0$ 确定, 求 $\mathrm{d}z$.

分析 因为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$, 所以为了求 $\mathrm{d}z$, 关键是求出 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 对于由隐函数给出的函数 $z=z(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 的方法有两种. 一种是将方程化为 $F(x,y,z)=0$ 的形式, 然后利用隐函数求导公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$ 求得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 另一种是按照推导隐函数求导公式的方法求导, 即在方程两边同时对 x 求导, 并注意 z 是 x,y 的函数, 见到 z 按照复合函数求导法则求导, 最终得到一个含有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 的方程, 解此方程得到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. 再用相似的方法求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解法 1 令 $F(x,y,z)=z-x+x\mathrm{e}^{z-x-y}$, 则

$$F'_x=-1+(1-x)\mathrm{e}^{z-x-y},\quad F'_y=-x\mathrm{e}^{z-x-y},\quad F'_z=1+x\mathrm{e}^{z-x-y}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{1-(1-x)\mathrm{e}^{z-x-y}}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}},\\\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{x\mathrm{e}^{z-x-y}}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}z=\frac{\left[1-(1-x)\mathrm{e}^{z-x-y}\right]\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{z-x-y}\,\mathrm{d}y}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}.$$

解法 2 在等式 $z-x+x\mathrm{e}^{z-x-y}=0$ 两边同时对 x 求偏导数, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}-1+\mathrm{e}^{z-x-y}+x\mathrm{e}^{z-x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)=0,$$

由此解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+(x-1)\mathrm{e}^{z-x-y}}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}.$$

在等式 $z-x+x\mathrm{e}^{z-x-y}=0$ 两边同时对 y 求偏导数, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y}+x\mathrm{e}^{z-x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)=0.$$

由此解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\mathrm{e}^{z-x-y}}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}.$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{1+x\mathrm{e}^{z-x-y}}\left[(1+(x-1)\mathrm{e}^{z-x-y})\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{z-x-y}\mathrm{d}y\right].$$

例 13 求由方程组 $\begin{cases} y=x^2+t^2, \\ 2x^2+3y^2+t^2=0 \end{cases}$ 所确定的隐函数 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 的导数.

分析 2 个方程中有 3 个变量, 通常应有 1 个自由变量, 其余变量都是这个变量的函数. 按照题目要求, x, y 都是 t 的函数. 对于由方程组确定的隐函数, 求导方法与由一个方程确定的隐函数的求导方法相似.

解 在每个方程的两边同时对 t 求导, 并注意到 x 和 y 都是 t 的函数, 见到 x 和 y 按照复合函数求导法则求导, 得到关于 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2t, \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+t=0. \end{cases}$$

由此解得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{t(6y+1)}{2x(3y+1)},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{3y+1}.$$

例 14 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程组

$$\begin{cases} x=\mathrm{e}^{u+v}, \\ y=\mathrm{e}^{u-v}, \\ z=uv \end{cases}$$

确定, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

分析 3 个方程中有 5 个变量, 通常应有两个自由变量, 其余变量都是这两个变量的函数. 按照题目要求, u, v 和 z 都是 x 和 y 的函数.

解 在 3 个方程两边同时对 x 求导得

$$\begin{cases} 1 = \mathrm{e}^{u+v}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\ 0 = \mathrm{e}^{u-v}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = v\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

由上面第 1 和第 2 个等式解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(u+v)}.$$

代入第 3 个等式得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(u+v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$$

再利用所给方程得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2x}\ln x.$$

按照类似的方法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2y}\ln y.$$

评注 此题也可先由所给方程组解得

$$z = \frac{1}{4}\left(\ln^2 x - \ln^2 y\right),$$

然后再求两个偏导数.

例 15 设函数 $u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u = f(x,y), \\ g(x,y,z) = 0, \\ h(x,z) = 0 \end{cases}$$

确定, 其中 f, g, h 都是可微函数, 且 $\dfrac{\partial g}{\partial y} \neq 0, \dfrac{\partial h}{\partial z} \neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

分析 3 个方程中有 4 个变量, 通常只有 1 个自由变量, 其余变量都是这个变量的函数. 按照题目要求, y, z 和 u 都是 x 的函数.

解 在 3 个方程两边同时对 x 求导得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'_x + f'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\ g'_x + g'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + g'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ h'_x + h'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

将 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 看成未知量, 解上述方程组, 得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'_x + \frac{f'_y\left(g'_z h'_x - g'_x h'_z\right)}{g'_y h'_z}.$$

例 16　证明在变换 $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$ 下, 方程 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$可化为$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, 其中函数 $u = f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数.

分析 1　原来u是x,y的函数$u = f(x,y)$, 满足方程$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 作变换$\xi = \dfrac{y}{x}, \eta = y$可看成作变换$x = \dfrac{\eta}{\xi}, y = \eta$, 使$x,y$的函数$u = f(x,y)$变为$\xi,\eta$的函数$u = f\left(\dfrac{\eta}{\xi}, \eta\right) \xlongequal{\text{记为}} g(\xi,\eta)$. 现证明函数$u = g(\xi,\eta)$满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. 按照这种分析, 将$x,y$看成中间变量, 直接对$u = f\left(\dfrac{\eta}{\xi},\eta\right)$求导, 并利用$u$对$x,y$的偏导数所满足的已知方程, 验证$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

证法 1　因为

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\
&= \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{\xi}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{y^2}\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

分析 2　将u看成是ξ,η的函数$u = g(\xi,\eta)$. 作变换$\xi = \dfrac{y}{x}, \eta = y$, 使其变为$x,y$的函数$u = g\left(\dfrac{y}{x}, y\right)$. 将$\xi,\eta$看成中间变量, 对$u = g\left(\dfrac{y}{x},y\right)$求偏导数, 并代入所给方程便得到函数$u = g(\xi,\eta)$的偏导数所满足的方程.

证法 2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

将以上结果代入 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 并整理可得

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,\quad \text{即}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

例 17 设变换 $u=x-2y, v=x+ay$ 可以把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 其中函数 $z=z(x,y)$ 具有连续二阶偏导数, 求常数 a.

解 将 z 看成是 u,v 的函数 $z=f(u,v)$. 作变换 $u=x-2y, v=x+ay$ 得 $z=f(x-2y,x+ay)$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=f'_u+f'_v,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2f'_u+af'_v,\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=f''_{uu}+2f''_{uv}+f''_{vv},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-2f''_{uu}+(a-2)f''_{uv}+af''_{vv},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=4f''_{uu}-4af''_{uv}+a^2f''_{vv}.\end{aligned}$$

把以上结果代入所给方程得

$$5(a+2)f''_{uv}-(a-3)(a+2)f''_{vv}=0.$$

由此得到, 当 $a=3$ 时 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

例 18 设函数 $f(u)$ $(u>0)$ 有连续二阶导数, 且 $z=f(\mathrm{e}^{x^2-y^2})$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=16(x^2+y^2)z,$$

求 $f(u)$.

分析 由所给方程导出 $f(u)$ 满足的微分方程, 然后解出 $f(u)$.

解 由 $u=\mathrm{e}^{x^2-y^2}$, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=2xuf'(u),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=-2yuf'(u).$$

进一步得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4x^2u^2f''(u)+(2u+4x^2u)f'(u),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4y^2u^2f''(u)-(2u-4y^2u)f'(u).$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)u^2f''(u)+4(x^2+y^2)uf'(u).$$

代入所给方程, 得

$$u^2f''(u)+uf'(u)-4f(u)=0.$$

这是欧拉方程, 令$u=e^t$, 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}-4z=0,$$

其中$z=f\left(\mathrm{e}^t\right)$. 解此二阶线性常系数齐次方程, 得

$$z=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}.$$

于是

$$f(u)=C_1u^2+C_2u^{-2},$$

其中C_1,C_2为任意常数.

例 19 求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿椭球面外法线方向的方向导数.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, 则在椭球面上的点 M_0 处的外法线方向为

$$\boldsymbol{n}=\left.(F'_x,F'_y,F'_z)\right|_{M_0}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right).$$

向量$\boldsymbol{n}$的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{a^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}},$$
$$\cos\beta=\frac{y_0}{b^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z_0}{c^2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

于是

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

例 20　证明函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处沿任何方向的方向导数都存在, 但其在点$(0,0)$处不可微.

证　对任意$\alpha\in[0,2\pi)$, 令$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 因为极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{z(x,y)-z(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}1=1,$$

所以函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处沿方向$\boldsymbol{l}$的方向导数存在且等于1. 于是由α的任意性知, 函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处沿任意方向的方向导数都存在. 因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=-1,$$

所以函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处对x的偏导数不存在, 从而函数在点$(0,0)$处不可微.

评注　此例的证明过程及结论表明, 即使函数在某点沿任何方向的方向导数都存在也不能保证函数在该点的偏导数存在, 从而不能保证函数在该点可微.

第三节　多元函数微分学的应用

一、内容提要

1. 曲面的切平面与法线

设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面$\Sigma: F(x,y,z)=0$上一点, 则

$$\boldsymbol{n}=\Big(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\Big)$$

是Σ在点M_0处的法向量. Σ在点M_0处的切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Σ在点M_0处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

特殊地, 若曲面方程为$z=f(x,y)$, 则

$$\boldsymbol{n}=\Big(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1\Big)$$

是曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的法向量.

2. 面交式曲线的切线与法平面

若已知曲线的方程为

$$L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

则 L 在点 (x_0,y_0,z_0) 处切线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}$, 其中向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别是曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量, 即

$$\boldsymbol{n_1}=\Big(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\Big),$$
$$\boldsymbol{n_2}=\Big(G'_x(x_0,y_0,z_0),G'_y(x_0,y_0,z_0),G'_z(x_0,y_0,z_0)\Big).$$

有了切点和切线的方向向量, 便可写出切线方程和法平面方程.

3. 二元函数的极值

(1) 定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(M_0)$ 内有定义. 若对 $U(M_0)$ 内异于 M_0 的任何点 $M(x,y)$, 都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)\quad(f(x,y)>f(x_0,y_0)),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 处取**极大值**(**极小值**) $f(x_0,y_0)$, 点 M_0 称为函数 $f(x,y)$ 的**极大值点**(**极小值点**). 极大值与极小值统称为**极值**. 使函数取得极值的点称为**极值点**.

此定义可推广到更多元的函数.

(2) 必要条件

设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可导, 且取极值, 则(x_0,y_0)必是 $f(x,y)$ 的驻点, 即满足

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

此必要条件可推广到更多元的函数.

(3) 充分条件

设函数$z=f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(M_0)$内具有二阶连续偏导数, M_0是$f(x,y)$的驻点, 记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0),$$

(i) 若$B^2-AC<0$, 则M_0是$f(x,y)$的极值点. 且当$A<0$时, M_0为极大值点; 当$A>0$时, M_0为极小值点.

(ii) 若$B^2-AC>0$, 则M_0不是$f(x,y)$的极值点.

(iii) 若$B^2-AC=0$, 则M_0可能是也可能不是极值点.

4. 求多元函数条件极值的拉格朗日乘数法

求函数$u=f(x_1,\cdots,x_n)$满足条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots, \\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases} \qquad (m<n)$$

极值的拉格朗日乘数法, 其步骤为

(i) 作拉格朗日函数

$$F(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x_1,\cdots,x_n);$$

(ii) 求出满足方程组

$$\begin{cases} F'_{x_1}=0, \\ F'_{x_2}=0, \\ \cdots, \\ F'_{x_n}=0, \\ \varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots, \\ \varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

的点$\left(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)$ $(k=1,2,\cdots,s)$;

(iii) 判断上述各点是否为极值点(通常是根据问题本身加以判断);

(iv) 计算出极值.

5. 多元函数的最大值与最小值

(1) 在有界闭区域 D 上连续的函数 $u=f(P)$, 必在 D 上取得最大值和最小值.

$f(P)$ 的最大值= max{$f(P)$ 在 D 内部的极大值, $f(P)$ 在 D 边界上的条件极大值},

$f(P)$ 的最小值=min{$f(P)$ 在 D 内部的极小值, $f(P)$ 在 D 边界上的条件极小值}.

(2) 若由问题本身可判断可微函数$f(P)$在区域D内部有最大值(或最小值), 而$f(P)$在D内部只有一个驻点M, 则M点必是最大值点(或最小值点).

二、例题解析

例 1 求曲面 $x=\dfrac{y^2}{2}+2z^2$ 上平行于平面 $2x+2y-4z+1=0$ 的切平面方程.

解 令 $F(x,y,z)=x-\dfrac{y^2}{2}-2z^2$, 则曲面在点 (x,y,z) 处切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)=(1,-y,-4z).$$

因为曲面的切平面平行于所给平面$2x+2y-4z+1=0$, 因此切平面的法向量$\boldsymbol{n}$平行于所给平面的法向量$\boldsymbol{n}_0=(1,1,-2)$. 于是有

$$\frac{1}{1}=\frac{-y}{1}=\frac{-4z}{-2}.$$

由此解得 $y=-1, z=\dfrac{1}{2}$. 代入曲面方程得 $x=1$. 因此曲面上点 $\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切平面平行于平面 $2x+2y-4z+1=0$. 该切平面为

$$(x-1)+(y+1)-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0,$$

即

$$x+y-2z+1=0.$$

例 2　求曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=15,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面在点 $M_0(1,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向内侧的单位法向量.

解　旋转曲面方程为 $3x^2+2y^2+3z^2=15$. 令 $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2-15$, 则

$$F'_x=6x,\quad F'_y=4y,\quad F'_z=6z.$$

由此得到, 曲面在点 M_0 处的法向量为 $\{6,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$, 单位化后为 $\dfrac{1}{\sqrt{13}}(\sqrt{3},2,\sqrt{6})$. 因点 M_0 在第一卦限, 所以曲面在点 M_0 处指向内侧的法向量在各坐标轴上的投影都小于零, 故指向内侧的单位法向量为 $-\dfrac{1}{\sqrt{13}}\left(\sqrt{3},2,\sqrt{6}\right)$.

例 3　求椭球面 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=21$ 经过直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$ 的切平面.

解　设所求切平面切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则 Σ 在点 M_0 处法向量 $\boldsymbol{n}=(x_0,2y_0,3z_0)$, 切平面方程为

$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0)=0.$$

化简得

$$x_0x+2y_0y+3z_0z=21.$$

在 L 上任取两点, 例如 $P_1\left(0,0,\dfrac{7}{2}\right)$ 和 $P_2\left(7,\dfrac{7}{2},0\right)$. 因为 L 在切平面上, 所以 P_1 和 P_2 满足切平面方程, 故有

$$\begin{cases}z_0=2,\\ x_0+y_0=3.\end{cases}$$

将此与 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$ 联立, 解得

$$\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=2,\\ z_0=2\end{cases}\quad \text{及}\quad \begin{cases}x_0=3,\\ y_0=0,\\ z_0=2.\end{cases}$$

因此切点是 $M_1(1,2,2)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 曲面在此两点的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(1,4,6)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,2)$. 所求的切平面方程为

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0\quad \text{和}\quad (x-3)+2(z-2)=0,$$

即

$$x+4y+6z=21 \quad 和 \quad x+2z=7.$$

例 4　设椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $P(x,y,z)$ 处的外法向量与 x 轴正向的夹角等于与 z 轴正向的夹角, 求点 P 的轨迹方程.

解　曲面在点 P 处的外法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right).$$

它与 x 轴、z 轴正向的夹角 α 和 γ 的余弦分别为

$$\cos\alpha=\frac{\frac{x}{a^2}}{|\boldsymbol{n}|}, \quad 和 \quad \cos\gamma=\frac{\frac{z}{c^2}}{|\boldsymbol{n}|}.$$

由 $\alpha=\gamma$ 得 $\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{z}{c^2}$. 因此所求轨迹方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ \dfrac{x}{a^2}=\dfrac{z}{c^2}.\end{cases}$$

例 5　设函数 $\varphi(u)$ 有一阶连续导数, 证明曲面 $\Sigma: ax+by+cz=\varphi\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 在点 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的法向量与向量 $\overrightarrow{OM_0}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $\boldsymbol{l}_0=(a,b,c)$ 共面.

证　令 $F(x,y,z)=ax+by+cz-\varphi\left(x^2+y^2+z^2\right)$, 则

$$F_x'=a-2x\varphi', \quad F_y'=b-2y\varphi', \quad F_z'=c-2z\varphi'.$$

记 $u_0=\varphi'\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)$, 则曲面在点 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_0=\left(a-2x_0u_0\right)\boldsymbol{i}+\left(b-2y_0u_0\right)\boldsymbol{j}+\left(c-2z_0u_0\right)\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{n}_0\times\overrightarrow{OM_0}\right)\cdot\boldsymbol{l}_0&=\begin{vmatrix}a-2x_0u_0 & b-2y_0u_0 & c-2z_0u_0\\ x_0 & y_0 & z_0\\ a & b & c\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}a & b & c\\ x_0 & y_0 & z_0\\ a & b & c\end{vmatrix}-2u_0\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_0 & y_0 & z_0\\ a & b & c\end{vmatrix}\\&=0.\end{aligned}$$

由此可知向量 $\boldsymbol{n}_0$ 与 $\overrightarrow{OM_0}$, $\boldsymbol{l}_0$ 共面.

例 6　设 $F(u,v)$ 是可微函数, 且 F'_u 与 F'_v 不同时为零. 又设 a,b,c 都是常数, 且 $a \neq 0$. 证明曲面 $\Sigma: F(ax-bz, ay-cz)=0$ 上任意一点处的切平面都平行于某一固定直线, 并求出此直线的方向向量.

分析　为了证明 Σ 上任意一点处的切平面都平行于某一固定直线, 只需证明 Σ 上任意点处的法向量都垂直于同一向量. 为此又只需证明 Σ 上任意两点处法向量的向量积都平行于同一个向量.

证　先讨论一种特殊情况. 设 F'_v 恒为零, 则 $F(u,v)$ 只是 u 的函数, 不妨就简记为 $F(u)$. 此时曲面 Σ 是柱面 $F(ax-bz)=0$, 其上是各点处的切平面都平行于 y 轴. 结论显然成立. 同理, 若 F'_u 恒为零时结论也成立.

现在考虑 F'_u 与 F'_v 都不恒为零的情况. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为曲面 Σ 上任意两点. 为简单起见, 用 P_1 和 P_2 分别表示点 (ax_1-bz_1, ay_1-cz_1) 和 (ax_2-bz_2, ay_2-cz_2). 于是, 曲面在点 M_1 和 M_2 处的法向量分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1 &= \Big(aF'_u(P_1),\ aF'_v(P_1),\ -bF'_u(P_1)-cF'_v(P_1)\Big),\\ \boldsymbol{n}_2 &= \Big(aF'_u(P_2),\ aF'_v(P_2),\ -bF'_u(P_2)-cF'_v(P_2)\Big).\end{aligned}$$

它们的向量积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ aF'_u(P_1) & aF'_v(P_1) & -bF'_u(P_1)-cF'_v(P_1)\\ aF'_u(P_2) & aF'_v(P_2) & -bF'_u(P_2)-cF'_v(P_2)\end{vmatrix}\\ &= ab\left(F'_u(P_1)F'_v(P_2)-F'_u(P_2)F'_v(P_1)\right)\boldsymbol{i}\\ &\quad + ac\left(F'_u(P_1)F'_v(P_2)-F'_u(P_2)F'_v(P_1)\right)\boldsymbol{j}\\ &\quad + a^2\left(F'_u(P_1)F'_v(P_2)-F'_u(P_2)F'_v(P_1)\right)\boldsymbol{k}\\ &= a\left(F'_u(P_1)F'_v(P_2)-F'_u(P_2)F'_v(P_1)\right)(b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

因为 F'_u 与 F'_v 都不恒为零, 且 F'_u 与 F'_v 不同时为零, 又 $a\neq 0$, 所以由上式可知 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 平行于非零向量 $\boldsymbol{l}_0=(b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})$.

例 7　求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在 $x=1$ 所对应的点处的切线及法平面方程.

解　将 $x=1$ 代入曲线方程, 解得 $y=-2, z=1$ 和 $y=1, z=-2$. 因此 L 上对应于 $x=1$ 的点有 $P_1(1,-2,1)$ 和 $P_2(1,1,-2)$ 两个. 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$, 则

$$F'_x=2x,\quad F'_y=2y,\quad F'_z=2z.$$

因此在点 P_1 和 P_2 处曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1=(1,-2,1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,-2)$. 平面 $x+y+z=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$. 于是, 曲线 L 在点 P_1 和 P_2 处

的切向量分别为

$$\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$$

和

$$\boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j};$$

切线方程分别为

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1} \quad \text{和} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{0},$$

或写成

$$\begin{cases} x+z=2, \\ y=-2 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x+y=2, \\ z=-2; \end{cases}$$

法平面方程分别为

$$-(x-1)+(z-1)=0 \quad \text{和} \quad (x-1)-(y-1)=0,$$

即

$$x-z=0 \quad \text{和} \quad x-y=0.$$

例 8　设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 = 3$ 确定的隐函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值.

解　记 $F(x,y,z) = (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2-3$, 则

$$\begin{aligned} F'_x &= 2(x+y)+2(x+z) = 2(2x+y+z), \\ F'_y &= 2(x+y)+2(y+z) = 2(x+2y+z), \\ F'_z &= 2(y+z)+2(z+x) = 2(x+y+2z). \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x+y+z}{x+y+2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x+2y+z}{x+y+2z}.$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得

$$\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+2y+z=0. \end{cases}$$

由此得到 $y=x, z=-3x$. 将此与所给方程联立, 得到 $x=y=\dfrac{1}{2}, z=-\dfrac{3}{2}$ 与 $x=y=-\dfrac{1}{2}, z=\dfrac{3}{2}$. 由此可知, 函数 $z=z(x,y)$ 有两个驻点 $M_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $M_2\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, 且在点 M_1 处 $z=-\dfrac{3}{2}$, 在点 M_2 处 $z=\dfrac{3}{2}$.

在点 M_1 处, 有

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\left(2+\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x+y+2z)-(2x+y+z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+y+2z)^2}\bigg|_{x=y=\frac{1}{2}}=1,$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+y+2z)-(2x+y+z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(x+y+2z)^2}\bigg|_{x=y=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2},$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\left(2+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+y+2z)-(2x+y+z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(x+y+2z)^2}\bigg|_{x=y=\frac{1}{2}}=1.$$

因 $B^2-AC<0, A>0$, 故函数 $z=z(x,y)$ 在点 M_1 处取得极小值 $-\dfrac{3}{2}$.

在点 M_2 处, 有

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\left(2+\frac{\partial z}{\partial x}\right)(x+y+2z)-(2x+y+z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+y+2z)^2}\bigg|_{x=y=-\frac{1}{2}}=-1,$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+y+2z)-(2x+y+z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(x+y+2z)^2}\bigg|_{x=y=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2},$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\left(2+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x+y+2z)-(2x+y+z)\left(1+2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(x+y+2z)^2}\bigg|_{x=y=-\frac{1}{2}}=-1.$$

因 $B^2-AC<0, A<0$, 故函数 $z=z(x,y)$ 在点 M_2 处取得极大值 $\dfrac{3}{2}$.

例 9 求函数 $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$ 的极值.

解 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上处处存在偏导数, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y).$$

由方程组

$$\begin{cases} xy^3(12-3x-2y)=0,\\ x^2y^2(18-3x-4y)=0 \end{cases}$$

知, 点 $M_0(2,3)$ 及 x 轴、y 轴上的点都是函数 $f(x,y)$ 的驻点.

在 y 轴上, $f(x,y)$ 处处都等于零, 所以按照极值点的定义, y 轴上的点都不是极值点. 同样, x 轴上的点也都不是极值点.

在点 M_0 处, 有

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{(2,3)}=\left[y^3(12-3x-2y)-3xy^3\right]\bigg|_{(2,3)}=-162,$$

$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bigg|_{(2,3)}=\left[3xy^2(12-3x-2y)-2xy^3\right]\bigg|_{(2,3)}=-108,$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{(2,3)}=\left[2x^2y(18-3x-4y)-4x^2y^2\right]\bigg|_{(2,3)}=-144,$$

进而有 $B^2 - AC < 0$, 所以函数在点 M_0 处取得极大值 $f(2,3) = 108$.

评注 关于函数(包括一元函数和多元函数)极值的定义有两种不同的方法. 一种是要求在 M_0 点的某邻域 $U(M_0)$ 内任何异于 M_0 的点 M 处都有

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0))$$

时才称 M_0 是函数 f 的极大值点(极小值点). 另一种则只要对 M_0 的某邻域 $U(M_0)$ 内的点 M 都有

$$f(M) \le f(M_0) \quad (f(M) \ge f(M_0)),$$

便称 M_0 是函数 f 的极大值点(极小值点). 本书是采用前一种方法定义的极值点. 按照这种定义, 在上述例题中, 对于 y 轴上的点 $P_0(0,y_0)$, 不论 $\delta > 0$ 多么小, 在 $\mathring{U}(P_0;\delta)$ 内总有 y 轴上的点 $(0,y)$. 在这样的点, $f(0,y) = 0$, 从而有

$$f(0,y) = f(0,y_0).$$

这说明点 $(0,y_0)$ 不满足是极大值点或极小值点的定义, 因此不是极值点.

例 10 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y = 6$ 的距离最近.

解 设 $P(x,y)$ 为椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上任一点, 则 P 到直线 $2x + 3y = 6$ 的距离

$$d(x,y) = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}}.$$

问题成为求函数 $d(x,y)$ 满足条件 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的极值. 因为 $d(x,y) > 0$, 所以为了简单可先考虑函数 $13d^2(x,y)$ 满足条件 $x^2 + 4y^2 = 4$ 的极值. 作拉格朗日函数

$$F(x,y) = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4),$$

则

$$F'_x = 4(2x + 3y - 6) + 2\lambda x, \quad F'_y = 6(2x + 3y - 6) + 8\lambda y.$$

解方程组

$$\begin{cases} 4(2x + 3y - 6) + 2\lambda x = 0, \\ 6(2x + 3y - 6) + 8\lambda y = 0, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases}$$

得 $x_1 = \dfrac{8}{5}, y_1 = \dfrac{3}{5}$ 和 $x_2 = -\dfrac{8}{5}, y_2 = -\dfrac{3}{5}$. 代入距离函数得

$$d\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{13}}, \quad d\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由此可知椭圆上点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 到所给直线的距离最近, 最近的距离为 $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

评注 根据多元连续函数的性质, 闭区域上连续的多元函数在该闭区域上有界, 且能取得最大值和最小值. 实际上, 将这里的闭区域改成闭集结论也成立, 即闭集上连续的多元函数在该闭集上有界, 且能取得最大值和最小值. 对于本题, 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的闭集, $d(x,y)=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$ 是该闭集上的连续函数, 因此 $d(x,y)$ 必在椭圆上能取得最大值和最小值.

例 11 圆柱面 $\Sigma: x^2+y^2=R^2$ 与平面 $\Pi: x+y+2z=1$ 的交线是一个椭圆, 求此椭圆的长半轴和短半轴之长.

解 因为任何平行于 Π 的平面与 Σ 的交线都是形状相同的椭圆, 所以为简单起见, 考虑平面 $\Pi_0: x+y+2z=0$ 与 Σ 的交线. 此时交线是以原点为中心的椭圆. 椭圆的长半轴和短半轴分别是椭圆上的点到原点的最长和最短距离. 因此问题便是求函数 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足约束条件 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x+y+2z=0$ 的条件极值. 这又可简化为求函数 $f(x)=x^2+y^2+z^2$ 满足条件 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x+y+2z=0$ 的条件极值. 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(x^2+y^2-R^2\right)+\mu(x+y+2z).$$

由 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$ 及约束条件得方程组

$$\begin{cases} 2(1+\lambda)x+\mu=0, & (1)\\ 2(1+\lambda)y+\mu=0, & (2)\\ 2z+2\mu=0, & (3)\\ x^2+y^2=R^2, & (4)\\ x+y+2z=0. & (5)\end{cases}$$

由方程(3)得 $\mu=-x$. 代入方程(1)和(2)得

$$2(1+\lambda)x=z,\quad 2(1+\lambda)y=z.$$

这两个等式两边相加得

$$(1+\lambda)(x+y)=z.$$

将 $x+y=-2z$ 代入上式得到

$$z(3+2\lambda)=0.$$

由此得到 $z=0$ 或 $\lambda=-\dfrac{3}{2}$.

当 $z=0$ 时, 由方程(5)得 $x=-y$. 代入方程(4)得到 $x^2=y^2=\dfrac{R^2}{2}$. 此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$.

当 $\lambda=-\dfrac{3}{2}$ 时, 由方程(1), (2), (3)得 $x=y=-z$. 代入方程(4)得 $x^2=y^2=z^2=\dfrac{R^2}{2}$. 此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}R$.

因为问题的解存在, 所以上面得到的两个解中 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}R$ 是长半轴, R 是短半轴.

评注 因为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭集. $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是此闭集上的连续函数, 所以 $d(x,y,z)$ 在该椭圆上必能取得最大值和最小值.

例 12 求曲面 $\Sigma: \dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 与平面 $\Pi: 2x+2y+z+5=0$ 之间的最短距离.

解 设 $(x,y,z)\in\Sigma$, 则其到平面 Π 的距离

$$d(x,y,z)=\frac{|2x+2y+z+5|}{3}.$$

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=(2x+2y+z+5)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}-1\right),$$

则

$$\begin{aligned} F'_x&=4(2x+2y+z+5)+\lambda x,\\ F'_y&=4(2x+2y+z+5)+2\lambda y,\\ F'_z&=2(2x+2y+z+5)+\frac{1}{2}\lambda z. \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases} 4(2x+2y+z+5)+\lambda x=0,\\ 4(2x+2y+z+5)+2\lambda y=0,\\ 2(2x+2y+z+5)+\dfrac{1}{2}\lambda z=0,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1, \end{cases}$$

得两组解 $x_1=1, y_1=\dfrac{1}{2}, z_1=1$ 和 $x_2=-1, y_2=-\dfrac{1}{2}, z_2=-1$. 它们到 Π 的距离分别是

$$d(x_1,y_1,z_1)=3 \quad 和 \quad d_2(x_2,y_2,z_2)=\frac{1}{3}.$$

因此曲面 Σ 与平面 Π 之间的最短距离是 $\dfrac{1}{3}$.

例 13 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的第一卦限上求一点, 使椭球面在此点的切平面在三个坐标轴上的截距乘积最大.

解 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是椭球面在第一卦限上的一点. 令

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

则
$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2}.$$
因此椭球面在点 M_0 处的切平面方程为
$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$
即
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$
写成截距式为
$$\frac{x}{a^2/x_0}+\frac{y}{b^2/y_0}+\frac{z}{c^2/z_0}=1.$$
因此过 M_0 的切平面在三个坐标轴上截距之乘积为 $P=\dfrac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$. 为了使得 P 达到最大, 只需使 $x_0y_0z_0$ 达到最小. 构造拉格朗日函数
$$G(x,y,z)=xyz-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$
解方程组
$$\begin{cases}G'_x=yz-2\lambda\dfrac{x}{a^2}=0,\\ G'_y=xz-2\lambda\dfrac{y}{b^2}=0,\\ G'_z=xy-2\lambda\dfrac{z}{c^2}=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$
得唯一解 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$. 由于此实际问题的解必存在, 所以此唯一解必为所求, 即椭球面在点 $M_0\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 处的切平面在三个坐标轴上的截距乘积最大, 且最大值为 $3\sqrt{3}abc$.

例 14　求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

解　解方程组
$$\begin{cases}f'_x=2x-2xy^2=0,\\ f'_y=4y-2x^2y=0,\end{cases}$$
得 $f(x,y)$ 在 D 内部的驻点 $\left(\pm\sqrt{2},1\right)$, 且 $f\left(\pm\sqrt{2},1\right)=2$. D 的边界由线段 $L_1: y=0\ (-2\le x\le 2)$ 和曲线 $L_2: x^2+y^2=4\ (y>0)$ 构成. 在线段 L_1 上, $f(x,y)=x^2$ 有最大值 $f(\pm 2,0)=4$ 和最小值 $f(0,0)=0$. 在曲线 L_2 上, 将 $y^2=4-x^2$ 代入 $f(x,y)$, 化为一元函数
$$\varphi(x)=x^4-5x^2+8.$$

的无条件极值问题. 由

$$\varphi'(x) = 4x^3 - 10x = 0,$$

得驻点 $x=0$ 和 $x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. 而 $\varphi(0)=8$, $\varphi\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)=\dfrac{7}{4}$. 比较以上所得的那些函数值的大小, 可知函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值是 $f(0,2)=8$, 最小值是 $f(0,0)=0$.

例 15　已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y$, 并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解　因为

$$\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(x^2-y^2\right),$$

所以 $z=x^2-y^2+C$. 代入 $f(1,1)=2$, 得 $C=2$, 从而 $z=x^2-y^2+2$. 令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0,$$

得函数 $f(x,y)$ 在 D 内部的驻点 $(0,0)$, 且 $f(0,0)=2$. D 的边界曲线可表示为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$. 因此在 D 边界上

$$f(x,y)=f(\cos\theta,2\sin\theta)=\cos^2\theta-4\sin^2\theta+2=3-5\sin^2\theta,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

容易看出, 当 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时, $f(\cos\theta,2\sin\theta)$ 取最大值 3; 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ 时, $f(\cos\theta,2\sin\theta)$ 取最小值 -2. 比较以上所得的那些函数值的大小, 可知函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值是 3, 最小值是 -2.

例 16　设函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$, 在位于第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ 上找一点, 使函数在此点具有最大值, 其中 $R>0$. 并利用所得结果证明对任意正数 a,b,c 恒有不等式

$$abc^3\leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

解　构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-5R^2\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ F'_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0, \\ F'_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=5R^2, \end{cases}$$

得唯一解 $x=y=R, z=\sqrt{3}R$. 由问题的实际意义可知解必存在, 故点 $\left(R,R,\sqrt{3}R\right)$ 必为所求. 因为 $\left(R,R,\sqrt{3}R\right)$ 是第一卦限的球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ 上使函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 取最大值的点, 所以当正数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=5R^2$ 时有

$$\ln x+\ln y+3\ln z \le (\ln x+\ln y+3\ln z)\Big|_{x=y=R,z=\sqrt{3}R}=5\ln R+3\ln\sqrt{3}.$$

由此得到

$$xyz^3\le\sqrt{27}R^5.$$

将 $R^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}$ 代入得到

$$xyz^3\le\sqrt{27}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

由此又得

$$x^2y^2z^6\le 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5.$$

根据 $R>0$ 的任意性可知, 上式对任意 $x>0, y>0, z>0$ 都成立. 令 $a=x^2, b=y^2, c=z^2$, 则上式变为

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

例 17　证明对任意 $x\ge 0, y\ge 0$ 都有 $\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)\le \mathrm{e}^{x+y-2}$.

分析　欲证的不等式即为 $(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}\le 4\mathrm{e}^{-2}$. 因此可从计算函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0\}$ 上的最大值入手.

解　考虑定义在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,\ y\ge 0\}$ 上的函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$. 解方程组

$$\begin{cases} f'_x=\left(2x-x^2-y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0, \\ f'_y=\left(2y-x^2-y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0, \end{cases}$$

得 $f(x,y)$ 在 D 的内部唯一驻点 $(1,1)$, 且 $f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$. 再注意到, 当 $x>0, y>0$ 时, $x+y>\sqrt{x^2+y^2}$, 从而

$$(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}<\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

因为

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}=0,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0.$$

因此 $f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$ 必是函数 $f(x,y)$ 在 D 内部的最大值.

在 D 的边界 $L_1: x=0\ (y\geq 0)$ 上, $f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{-y}$. 记 $\varphi(y)=y^2\mathrm{e}^{-y}\ (0\leq y<+\infty)$, 则

$$\varphi'(y)=y(2-y)\mathrm{e}^{-y}.$$

由此可知, $\varphi(y)$ 在 $[0,2]$ 上严格单调增加, 在 $[2,+\infty)$ 上严格单调减少, 因此 $\varphi(y)$ 在点 $y=2$ 取最大值 $\varphi(2)=4\mathrm{e}^{-2}$, 从而 $f(0,2)=4\mathrm{e}^{-2}$ 是函数 $f(x,y)$ 在边界 L_1 上的最大值. 类似地, 可知 $f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}$ 是函数 $f(x,y)$ 在边界 $L_2: y=0\ (x\geq 0)$ 上的最大值.

比较 $f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$, $f(0,2)=4\mathrm{e}^{-2}$, $f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}$ 的大小, 得到函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值 $4\mathrm{e}^{-2}$. 因此, 在 D 上恒有 $(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\leq 4\mathrm{e}^{-2}$.

习 题 八

1. 填空题:

(1) 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, 则 $z=f(4x^2-y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z|_{(1,2)}=$ ________;

(2) 设 $f(x,y)=\displaystyle\int_{\frac{y}{x}}^{x^2+y^2}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 则 $\mathrm{d}f(x,y)=$ ________;

(3) 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, 其中函数 f 和 φ 具有二阶导数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________;

(4) 设 $u=yz^2\mathrm{e}^x$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$ ________;

(5) 函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 $A(1,0,1)$ 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 ________.

2. 选择题:

(1) 设函数 $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, 则( ).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 存在, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 存在, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 存在, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 存在, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$ 存在, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 存在

(2) 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在对 x 和 y 的偏导数, 则( ).

(A) $f(x,y)$ 在 P_0 点连续 (B) $f(x,y)$ 在 P_0 点可微

(C) $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在 x_0 和 y_0 点连续 (D) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在

(3) 利用变量替换 $u=x, v=\dfrac{y}{x}$, 可将方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为( ).

(A) $u\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$ (B) $v\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$ (C) $u\dfrac{\partial z}{\partial v}=z$ (D) $v\dfrac{\partial z}{\partial u}=z$

(4) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有一阶连续偏导数, 且 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$, 则( ).

(A) $\boldsymbol{n}=(3,1,1)$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量

(B) $\boldsymbol{l}=(1,0,3)$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量

(C) $\boldsymbol{l}=(0,1,0)$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量

(D) $\boldsymbol{l}=(1,0,0)$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量

(5) 设函数 $z(x,y)$ 是方程 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$ 满足条件 $z\left(x,x^2\right)=1$ 的解, 则 $\displaystyle\int_0^1 z(1,y)\,\mathrm{d}y=$ ( ).

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $-\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{6}$ (D) $-\dfrac{1}{6}$

3. 证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处极限不存在.

4. 设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 设 $u=f(x,y,z)$ 是可微函数, 其中 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^z-xz=0$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

6. 设函数 $z=\displaystyle\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} tf\left(x^2+y^2-t^2\right)\mathrm{d}t$, 其中函数$f$ 有连续的导函数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7. 设 $\varphi(u,v)$ 是可微函数, 证明函数 $w=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$ 满足方程

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=w+\frac{xy}{z}.$$

8. 设函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 证明函数 $u=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 满足方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

9. 已知函数 $u=u(x,y)$ 满足拉普拉斯(Laplace)方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 证明函数 $v=$

$u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$也满足该方程.

10. 已知$z=z(u)$是可微函数, 而$u=\varphi(u)+\displaystyle\int_y^x p(t)\mathrm{d}t$, 其中函数$\varphi(u)$有连续导函数, 且$\varphi'(u)\neq 1$, 函数$p(t)$连续, 试求$p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

11. 设$z=z(x,y)$是由方程$z=f(x,xy,xyz)$确定的隐函数, 其中f是可微函数, 求$\mathrm{d}z$.

12. 设函数$y=y(x),z=z(x)$由方程组

$$\begin{cases} x+y+z+z^2=0,\\ x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$$

确定, 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

13. 设函数$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$由方程组

$$\begin{cases} xu-yv=0,\\ xv+yu=0\end{cases}$$

确定, 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

14. 证明在极坐标变换$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$之下, 方程$x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$化为$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=0$.

15. 在曲面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求点P, 使函数$u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在点P处沿方向$\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$的方向导数值最大.

16. 求曲面$\Sigma: 3x^2+6y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz-24=0$上切平面与$xOy$坐标面垂直的切点轨迹的方程.

17. 求球面$x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}$与椭球面$3x^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{17}{4}$交线上对应于$x=1$的点处的切线方程和法平面方程.

18. 求曲线$L:\begin{cases} z=x^2+y^2,\\ y=\dfrac{1}{x}\end{cases}$上到坐标面$xOy$距离为最短的点.

19. 设$u=x^2+y^2+z^2$, 求$|\mathbf{grad}u|$在椭球面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$的最大值和最小值.

20. 求函数$z=x^2y(4-x-y)$在由直线$x+y=6$, $x=0$和$y=0$所围的闭区域D上的最大值和最小值.

21. 设x,y,z为实数, 且满足关系式$\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$. 试证$\mathrm{e}^xy^2|z|\leq 1$.

习 题 答 案 与 提 示

习题八

1. (1) $4\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y$; (2) $\left(2x\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x^2}}\right)\mathrm{d}x+\left(2y\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x^2}}\right)\mathrm{d}y$;

   (3) $yf''+\varphi'+y\varphi''$; (4) 1; (5) $\dfrac{1}{2}$;

2. (1) D; (2) C; (3) A; (4) B; (5) D.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2'$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''$,

   $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x'+\dfrac{y^2}{1-xy}f_y'+\dfrac{z}{x(z-1)}f_z'$.

6. $2xyf'(x^2+y^2)$.

10. 0.

11. $\mathrm{d}z=\dfrac{(f_1'+yf_2'+yzf_3')\,\mathrm{d}x+(xf_2'+xzf_3')\,\mathrm{d}y}{1-xyf_3'}$.

12. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2z-3z^2}{1-2y-4yz+3z^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y-1}{1-2y-4yz+3z^2}$.

13. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

15. $P\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$.

16. $\begin{cases}3x^2+6y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz-24=0,\\ x+2y+3z=0.\end{cases}$

17. 切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-2}$ 与 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2y-1}{4}=\dfrac{z+1}{2}$,

    法平面方程为 $x+2y-2z=0$ 与 $x+2y+2z=0$.

18. $(1,1,2)$ 与 $(-1,-1,2)$.

19. 最大值 4, 最小值 $2\sqrt{2}$.

20. 最大值为 $f(2,1)=4$, 最小值为 $f(4,2)=-64$.

21. 提示: 考虑函数 $f(x,y)=e^xy^2(3-e^x-y^2)$ 在其定义域 $D=\{(x,y)\,|\,\mathrm{e}^x+y^2\le 3\}$ 上的最大值. 也可令 $a=\mathrm{e}^x$, $b=y^2$, $c=|z|$, 将问题变为若 $a>0,b\ge 0,c\ge 0$, 且满足 $a+b+c=3$, 证明 $abc\le 1$.