高等数学习题解

上册

天津大学数学系　编

2010年9月

目　录

第一章　函数与极限

习　题　1-1

1. 设 $X=[0,1]$, 由下列各式 $f(x)=\sin x, g(x)=\sin \pi x, h(x)=\sin \frac{\pi x}{2}$ 所确定的 X 到 X 的映射 f,g 和 h 是否为单射、满射或双射?

解　f 是单射，不是满射；g 是满射，不是单射；h 是双射.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$.

解　因为 $x^2-4\neq 0$, 即 $x\neq \pm 2$, 所以定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin \dfrac{2x-1}{7}$.

解　由 $-1\leq \dfrac{2x-1}{7}\leq 1$ 得 $-7\leq 2x-1\leq 7$, 即 $-3\leq x\leq 4$, 所以定义域为 $[-3,4]$.

(3) $y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$.

解　由 $\begin{cases}\lg(x^2-3)\geq 0,\\ x^2-3\geq 0\end{cases}$ 得 $x^2-3\geq 1$, 即 $x<-2$ 或 $x>2$, 所以定义域为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

解　由 $\begin{cases}x+1\geq 0,\\ 1-x>0 \text{ 且 } 1-x\neq 1\end{cases}$ 得定义域 $[-1,0)\cup(0,1)$.

3. 设 $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1$, 求 $f(x)$ 及 $f(\cos\frac{x}{2})$.

解　因为

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=2\cos^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

所以

$$f(x)=2(1-x^2),$$
$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

4. 若 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leq 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(0), f(5)$ 及 $f(x-1)$.

解　$f(-2)=-1$, $f(0)=1$, $f(5)=2^5$. 当 $x-1\leq 0$ 即 $x\leq 1$ 时，$f(x-1)=1+(x-1)=x$; 当 $x-1>0$ 即 $x>1$ 时，$f(x-1)=2^{x-1}$. 总之

$$f(x-1)=\begin{cases}x, & -\infty<x\leq 1,\\ 2^{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

5. 设初等函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\lg u) - 2uf(\lg u) + u^2 \lg u = 0, \quad u \in (0, 10],$$

且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 令 $x = \lg u$, 则 $u = 10^x$, $x \le 1$. 代入所给关系式得

$$f^2(x) - 2 \times 10^x f(x) + 10^{2x} x = 0,$$

即

$$(f(x) - 10^x)^2 - 10^{2x}(1 - x) = 0.$$

由此得到

$$f(x) = 10^x(1 \pm \sqrt{1 - x}).$$

又因为 $f(0) = 0$, 所以

$$f(x) = 10^x(1 - \sqrt{1 - x}), \qquad x \le 1.$$

6. 设 $y = \frac{x}{2} f(t - x)$, 且当 $x = 1$ 时, $y = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$.

解 由已知条件得

$$\frac{1}{2} f(t - 1) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}.$$

由此得到 $f(t - 1) = (t - 1)^2$. 于是 $f(x) = x^2$.

7. 证明函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 (a, b) 内既有上界, 又有下界.

证 必要性. 因为 $f(x)$ 在 I 上有界, 所以存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in I$ 都有

$$|f(x)| \le M,$$

即有

$$-M \le f(x) \le M.$$

这表明 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界.

充分性. 因为 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界, 所以存在 M, m, 使得对任意 $x \in I$ 都有

$$m \le f(x) \le M.$$

取

$$M' = \max\{|m|, |M|, 1\},$$

则 $M > 0$, 且对任意 $x \in I$ 都有

$$-M' \le -|m| \le m \le f(x) \le M \le |M| \le M',$$

从而有

$$|f(x)| \le M'.$$

因此，$f(x)$ 在 I 上有界.

8. 求函数 $y=f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1-x^2, & x<0 \end{cases}$ 的反函数.

解　由于函数 $y=1+x^2$，$(x>0)$ 的值域为 $(1,+\infty)$，故它的反函数为 $y=\sqrt{1+x}$，$(x>1)$. 又函数 $y=-1-x^2$，$(x<0)$ 的值域为 $(-\infty A\#,-1)$，故它的反函数为 $y=-\sqrt{-1-x}$，$(x<-1)$. 因此所求函数的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1}, & x>1, \\ 0, & x=0, \\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1. \end{cases}$$

9. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增函数和单调减函数，试判断复合函数 $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ 和 $g(g(x))$ 的单调性.

解　对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$, 因为 $g(x)$ 单调减，所以 $g(x_1)\ge g(x_2)$. 又因为 $f(x)$ 单调增，所以 $f(g(x_1))\ge f(g(x_2))$. 因此函数 $f(g(x))$ 单调增. 按照类似的方法可推得 $g(f(x))$ 单调减，$f(f(x))$ 和 $g(g(x))$ 单调增.

习　题　1－2

1. 写出以下各数列的前 4 项：

(1) $\left\{\dfrac{1}{10^n}\right\}$.

解　$u_1=\dfrac{1}{10}$, $u_2=\dfrac{1}{10^2}$, $u_3=\dfrac{1}{10^3}$, $u_4=\dfrac{1}{10^4}$.

(2) $\left\{\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}\right\}$.

解　$u_1=-1$, $u_2=0$, $u_3=\dfrac{1}{6}$, $u_4=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

(3) $\left\{(1+\dfrac{1}{n})^n\right\}$.

解　$u_1=2$, $u_2=\dfrac{9}{4}$, $u_3=\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$, $u_4=\left(\dfrac{5}{4}\right)^4$.

(4) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$.

解　$u_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $u_3=-\dfrac{1}{\sqrt{3^2+1}}$, $u_4=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+1}}$.

2. 观察当 n 无限增大时以下各数列通项的变化趋势，判断数列极限是否存在. 若数列极限存在，写出其极限值：

(1) $\left\{\dfrac{n-1}{2n+1}\right\}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n}=0$.

(3) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

解 极限不存在.

(4) $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}0$.

(5) $\{(-1)^n n\}$.

解 极限不存在.

(6) $\left\{2+\dfrac{1}{n^2}\right\}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$.

3. 根据数列极限的定义证明下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$ (c为常数).

证 因为 $|c-c|=0$, 所以对 $\forall\varepsilon>0$, 对 $\forall N\in\mathbf{N}$, 当 $n>N$ 时, 有 $|c-c|<\varepsilon$. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)=1$.

证 因为 $\left|1-\dfrac{1}{3n}-1\right|=\left|\dfrac{1}{3n}\right|<\dfrac{1}{n}$, 所以对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $\left|1-\dfrac{1}{3n}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

证 因为 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{1}{2(2n+1)}\right|<\dfrac{1}{n}$, 所以对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{3n+1}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 成立. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

证 因为 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\dfrac{\sin n}{n}\right|\le\dfrac{1}{n}$, 所以对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|\le\varepsilon$. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

4. 证明下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$

证 因为

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\le\frac{1}{n},$$

所以对任给 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时便恒有

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right|<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}.$

证 因为

$$\left|\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n-1}{6n^2}\right|<\frac{1}{n}$$

所以对任给的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 则当 $n>N$ 时便恒有

$$\left|\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}.$$

5. 证明若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 举例说明若 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 未必成立.

证 对任给的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 所以存在 $N\in\mathbf{N}^+$ 时, 使得对一切 $n>N$ 都有

$$|u_n-a|<\varepsilon.$$

又由于

$$\big||u_n|-|a|\big|\le|u_n-a|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$.

考虑通项为 $u_n=(-1)^n$ 的数列. 因为 $|u_n|=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$. 但是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在.

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$, 且 $a>b$, 证明一定存在一个 $N\in\mathbf{N}^+$, 使当 $n>N$ 时, $u_n>b$ 恒成立.

证　因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > b$, 所以对 $\varepsilon = a - b > 0$, 必存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < a - b$. 由此得到 $b - a < x_n - a$. 于是当 $n > N$ 时, $x_n > b$ 恒成立.

7. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{4n^3 + 2n + 3}$

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{4n^3 + 2n + 3} = \frac{1}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20 + 9n}{n^2}$.

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{20 + 9n}{n^2} = 0.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n + 1}{(-\frac{2}{3})^n(-2) + 3} = \frac{1}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!}\right]$.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)!}\right] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$.

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})} = 2.
\end{aligned}$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]$$
$$=1.$$

8. 求下列函数的表达式:

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-x^n}{2^n+x^n}$.

解 当 $|x|>2$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-x^n}{2^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{x})^n-1}{(\frac{2}{x})^n+1}=-1,$$

当 $|x|<2$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-x^n}{2^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{2}{x})^n}{1+(\frac{2}{x})^n}=1,$$

当 $x=2$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-x^n}{2^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{2^n}=0,$$

故

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<2,\\ 0, & x=2,\\ -1, & |x|>2.\end{cases}$$

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+1}$.

解 当 $|x|<1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+1}=x,$$

当 $x=1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}=1,$$

当 $x=-1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}=\frac{-2}{2}=-1,$$

当 $|x|>1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x},$$

故

$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ -1, & x=-1,\\ 1, & x=1,\\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1.\end{cases}$$

9. 证明以下各数列发散：

(1) $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}\right\}$

解　因为当 $n\to\infty$ 时，数列的偶数项 $u_{2n}=\dfrac{2n}{4n+1}\to\dfrac{1}{2}$，而数列的偶数项 $u_{2n-1}=-\dfrac{2n-1}{4n-1}\to-\dfrac{1}{2}$，所以数列不收敛.

(2) $\{n^{(-1)^n}\}$.

解　因为当 $n\to\infty$ 时，数列的偶数项子数列 $u_{2n}=2n$ 极限不存在，所以数列不收敛.

(3) $\left\{\dfrac{n^2+30n+100}{99n-88}\right\}$

解　因为

$$\frac{n^2+30n+100}{99n-88}\geqslant\frac{n}{99},$$

所以数列无界，从而不收敛.

(4) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\}$.

解　因为当 $n\to\infty$ 时，数列的子数列 $u_{8k}=\cos 2k\pi=1\to 1\quad(k\in\mathrm{N}^+)$，而数列的子数列 $u_{8k+4}=\cos((2k+1)\pi)=-1\to-1\quad(k\in\mathrm{N}^+)$，所以数列不收敛.

10. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

解　由于 $\{x_n\}$ 有界，必存在 $M>0$，使得对一切 n 均有 $|x_n|<M$. 对任给的 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以存在 $N\in\mathrm{N}^+$，使得当 $n>N$ 时，恒有

$$|y_n|<\varepsilon,$$

从而恒有

$$|x_ny_n|=|x_n|\,|y_n|<M\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0.$$

习　题　1－3

1. 对于由图 1–14 中曲线所表示的函数 $y=f(x)$，确定下列各极限的值：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$____；(2) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$____；

(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=$____；(4) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=$____；

(5) $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=$____；(6) $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=$____.

解　(1) 1；(2) 1；(3) 2；(4) -1；(5) 1；(6) 2.

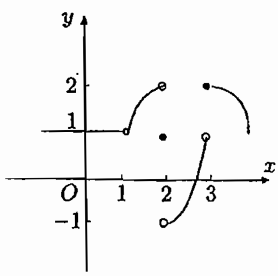


图 1–14

2. 用定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-4)=5$.

证 对任给 $\varepsilon>0$，要使 $|3x-4-5|=|3x-9|<\varepsilon$，只需 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因此取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|3x-9|<\varepsilon$. 由定义可知 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-4)=5$.

(2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

证 对任给 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|=|x-2|<\varepsilon$. 只需取 $\delta=\varepsilon$，便可保证当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|<\varepsilon$. 由定义可知 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$ （c为常数）.

证 因为 $|c-c|=0$，所以对任给 $\varepsilon>0$，可取任意实数 $\delta>0$，都可保证当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|c-c|<\varepsilon$. 于是据定义有 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

证 对任给 $\varepsilon>0$，只需取 $\delta=\varepsilon$，便可保证当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|x-x_0|<\varepsilon$. 于是据定义有 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

证 因为

$$|\cos x-\cos x_0|=\left|-2\sin\frac{x_0+x}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leq|x-x_0|,$$

所以对任给 $\varepsilon>0$，只需取 $\delta=\varepsilon$，便可保证当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon.$$

于是据定义有 $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$ （$x_0>0$）.

证 因为

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|<\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

所以对任给 $\varepsilon>0$，只需取 $\delta=\varepsilon\sqrt{x_0}$，便可保证当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon.$$

于是据定义有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

3. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

证 必要性. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

由此得到当 $0 < x_0 - x < \delta$ 和 $0 < x - x_0 < \delta$ 时都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

于是，根据左右极限的定义，有

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad 和 \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

充分性. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$, 所以存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < x_0 - x < \delta_1$ 时有

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$, 所以存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < x - x_0 < \delta_2$ 时有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $0 < x_0 - x < \delta_1$ 和 $0 < x - x_0 < \delta_2$, 从而有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

于是，根据极限的定义，有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

4. 根据函数图象，确定下列各极限的值：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x =$ ______ .

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x =$ ______

解 $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi.$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$ ______ .

解 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x =$ ______ .

解 $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0.$

5. 用定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+5}{x}=6$.

证　对任给的 $\varepsilon>0$, 因为

$$\left|\frac{6x+5}{x}-6\right|=\frac{5}{|x|},$$

所以为了使 $\left|\dfrac{6x+5}{x}-6\right|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{5}{|x|}<\varepsilon$, 从而只需 $|x|>\dfrac{5}{\varepsilon}$. 因此取 $M=\dfrac{5}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>M$ 时，有

$$\left|\frac{6x+5}{x}-6\right|<\varepsilon.$$

于是据定义可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+5}{x}=6.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证　对任给的 $\varepsilon>0$, 因为

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}},$$

所以为了使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|<\varepsilon$, 只需 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$, 从而只需 $x>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 因此取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $x>M$ 时，有

$$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|<\varepsilon.$$

于是据定义可知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

证　对任给的 $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$,

$$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

等价于

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\arctan x<\frac{\pi}{2}+\varepsilon.$$

由对任何 x 都有 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$ 知, 对任何 x 都有 $\arctan x<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$. 而当 $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，为了使 $\arctan x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, 只需 $x>\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$. 因此取 $M=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, 则当 $x>M$ 时恒有

$$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon.$$

依据定义有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{x}=\infty$.

证 对任给的 $H>0$, 因为

$$\left|\frac{1+x}{x}\right|\geq\left|\frac{1}{|x|}-1\right|,$$

所以为了使 $\left|\dfrac{1+x}{x}\right|>H$, 只需 $\dfrac{1}{|x|}-1>H$. 为此又只需 $|x|<\dfrac{1}{1+H}$. 因此取 $\delta=\dfrac{1}{1+H}$, 则当 $|x|<\delta$ 时恒有

$$\left|\frac{1+x}{x}\right|>H.$$

依据定义有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{x}=\infty.$$

6. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 是否存在?

解 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 必不存在. 事实上, 若记 $h(x)=f(x)+g(x)$, 而 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$ 存在, 则由 $g(x)=h(x)-f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 都存在可知 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 也存在. 这与已知条件矛盾. 对于 $f(x)-g(x)$ 也可作类似地讨论.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 可能存在, 也可能不存在. 例如, 当 $f(x)\equiv 0$ 时, 有 $f(x)g(x)\equiv 0$, 从而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0$. 而当 $f(x)\equiv 1$ 时, 有 $f(x)g(x)=g(x)$, 从而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$ 不存在.

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 均不存在, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 是否存在?

解 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 可能存在, 也可能不存在. 例如, 当 $f(x)=g(x)$ 时, 有 $f(x)-g(x)\equiv 0$, 极限存在. 而当 $f(x)=-g(x)$ 时, 有 $f(x)-g(x)=2f(x)$, 极限不存在. 对于 $f(x)+g(x)$ 也可作类似地讨论.

8. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{3-x}$.

解
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{3-x}=\frac{2^2+4}{3-2}=8.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x+4\cos^2 x)$.

解
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x+4\cos^2 x)=2\sin\frac{\pi}{6}+4\cos^2\frac{\pi}{6}=4.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x}{4x^2-2x+1}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x}{4x^2-2x+1}=\frac{3}{4}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1})$.

解
$$\lim_{x\to\infty}x^2(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{x^2-1}=-2.$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^2(3x+1)^3}{(2x+1)^5}$.

解 因为分子是 5 次多项式，其最高项系数是 $2^2\times3^3$，而分母也是 5 次多项式，其最高项系数是 2^5，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^2(3x+1)^3}{(2x+1)^5}=\frac{2^2\times3^3}{2^5}=\frac{27}{8}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)=1-0+0=1.$$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$.

解
$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0.$$

(8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

解
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{-x-2}{x^2+x+1}=-1.$$

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\arctan x$.

解
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\arctan x=0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

(10) $\lim\limits_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

解
$$\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x.$$

9. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\arctan x)$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}\sin(\arctan x)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\cos(\sin x)$.

解

$$\lim_{x\to 0}\cos(\sin x) = \cos 0 = 1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1-x^2}{x^2}\pi$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1-x^2}{x^2}\pi == \cos(-\pi) = -1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\sin^5 2x+\cos^4 3x)$.

解
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}}(\sin^5 2x+\cos^4 3x) = \sin^5\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^4\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4}.$$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$, 试确定常数 α 和 β.

解 因为
$$\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x-\beta = \frac{(1-\alpha)x^2-(\alpha+\beta)x+1-\beta}{x+1},$$
所以为了使得点 $x\to\infty$ 时其极限为零，当且仅当
$$\begin{cases} 1-\alpha=0, \\ \alpha+\beta=0. \end{cases}$$
由此得到 $\alpha=1, \beta=-1$.

11. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sgn}x$.

证 因为
$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sgn}x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn}x - 1,$$
所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

证 取 $x_n = 2n\pi, x_n' = (2n-1)\pi$, 则
$$\lim_{n\to\infty}x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty}x_n' = +\infty,$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n = \lim_{n\to\infty}\cos 2n\pi = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\cos x_n' = \lim_{n\to\infty}\cos(2n-1)\pi = -1.$$
因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

习 题 1-4

1. 求下列函数的连续区间及相应的极限:

(1) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$, $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$.

解 由 $\begin{cases} x-4\geq 0, \\ 6-x\geq 0 \end{cases}$ 得函数的定义域为 $[4,6]$, 这也就是函数的连续区间. 因为 $5\in[4,6]$, 所以

$$\lim_{x\to 5}f(x)=f(5)=2.$$

(2) $f(x)=\lg(2-x)$, $\lim\limits_{x\to -8}f(x)$.

解 由 $2-x>0$ 得函数的定义域为 $(-\infty,2)$, 这也就是函数的连续区间. 因为 $-8\in(-\infty,2)$, 所以

$$\lim_{x\to -8}f(x)=f(-8)=1.$$

(3) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

解 当 $x\neq 1$ 和 $x\neq -2$ 时函数有定义, 因此函数的连续区间为 $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$. 由此又得

$$\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=1.$$

(4) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}f(x)$.

解 由 $0\leq 1-x^2\leq 1$ 得函数的定义域为 $[-1,1]$, 这也就是函数的连续区间. 由此又得

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

2. 证明: 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处也一定连续. 反之, 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续, 能否得出 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处一定不连续? 试举例说明.

证 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 由此得到 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$, 从而 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处也一定连续. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续, 则不能断定 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处一定不连续. 例如, 函数 $f(x)=\begin{cases} -1, & x\leq 0, \\ 1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续, 但 $|f(x)|\equiv 1$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}-1, & x\neq 0, \\ 1, & x=0; \end{cases}$

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2^{\frac{1}{x}} - 1) = -1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续．函数在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内连续．

(2) $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x\le 1, \\ x, & x>1. \end{cases}$

解　因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2-x) = 1,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1,$$

所以

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1).$$

因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续．

4．下列各函数中 a 取什么值时，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续：

(1) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x<0, \\ a+x, & x\ge 0; \end{cases}$

解　令 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$, 则 $a=1$.

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\ne 2, \\ a, & x=2. \end{cases}$

解　令

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2),$$

得 $a=4$.

5．已知 $f(x) = \begin{cases} 2+\log_2(1+\sqrt{1-x}\,), & x<1, \\ 0 & x=1, \\ 3^{\sqrt{x-1}}-2x+3, & x>1, \end{cases}$ **求** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解　因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [2+\log_2(1+\sqrt{1-x}\,)] = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(3^{\sqrt{x-1}} - 2x + 3\right) = 2,$$

所以

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

6. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$.

解

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{1+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-1}}$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{x^2-1}}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x^2+x-3}+\sqrt{x^2-1})\\&=8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{3}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

解

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)^2}=\frac{1}{9}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1+\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

解

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1+\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=3.$$

(6) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-x})$.

解

$$\lim_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x-\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-1}{-1-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\log_2(3x+4)+\arctan\dfrac{1}{x}\right]$.

解
$$\lim_{x\to0^+}\left[\log_2(3x+4)+\arctan\frac{1}{x}\right]=\log_2 4+\frac{\pi}{2}=2+\frac{\pi}{2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0^-}\left[2^{\frac{1}{x}}-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

解
$$\lim_{x\to0^-}\left[2^{\frac{1}{x}}-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=0-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. 求下列函数的间断点，并判断其类型：

(1) $f(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.

解　$x=-1$ 是间断点. 因为
$$\lim_{x\to-1}f(x)=\infty,$$
所以 $x=-1$ 第二类间断点中的无穷间断点.

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-1}$.

解　$x=\pm1$ 是间断点. 因为
$$\lim_{x\to1}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-1}f(x)=\infty,$$
所以 $x=\pm1$ 第二类间断点中的无穷间断点.

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sin x}$.

解　$x=k\pi\ \ (k\in \mathbf{Z})$ 是间断点. 因为
$$\lim_{x\to k\pi}f(x)=\infty,$$
所以 $x=k\pi$ 第二类间断点中的无穷间断点.

(4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

解　由 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ 知，$x=-1,x=-2$ 是间断点. 因为
$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x+2}=-2,$$
$$\lim_{x\to-2}f(x)=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x+2}=\infty,$$
所以 $x=-1$ 是第一类间断点中的可去间断点，$x=-2$ 为第二类间断点中的无穷间断点.

8. 已知函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x$，求其间断点，并判断间断点的类型.

解　因为当 $|x|<1$ 时
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=-x,$$

当 $|x|>1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{x})^{2n}}{1+(\frac{1}{x})^{2n}}x=x,$$

当 $|x|=1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}x=0,$$

所以

$$f(x)=\begin{cases}-x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\end{cases}\quad x,|x|>1.$$

由因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}x=-1,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(-x)=1,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(-x)=-1,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}x=1,$$

所以 $x=\pm1$ 是间断点，且均为第一类间断点中跳跃间断点.

9. 试确定 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$

(1) 有无穷间断点 $x=0$; (2) 有可去间断点 $x=1$.

解 (1) 为了使 $x=0$ 是间断点，应有 $a=0$. 为了使 $x=0$ 是无穷间断点，应有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x-b}{x(x-1)}=\infty,$$

或

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-b}{x(x-1)}=\infty,$$

为此又应有 $b\neq0$.

(2) 为了使 $x=1$ 是可去间断点，极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-b}{(x-a)(x-1)}$ 应存在. 为此应有 $b=1,a\neq1$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，当 $x\to b^-$ 时 $f(x)$ 极限存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

证 因为当 $x\to b^-$ 时 $f(x)$ 极限是存在的，根据极限的局部有界性，则函数 $f(x)$ 在 $x=b$ 的某个左邻域（不妨设为 $(b-\delta,b)$, 其中 $\delta<b-a$）是有界的. 而在闭区间 $[a,b-\delta]$ 上 $f(x)$ 连续从而有界，故 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$x\to\infty$ 时 $f(x)$ 极限存在，证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证　因为当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 极限是存在的，根据极限的局部有界性，则存在某个正数 M，使得函数 $f(x)$ 当 $|x|>M$ 时是有界的. 而在闭区间 $[-M,M]$ 上 $f(x)$ 连续从而有界，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

12. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a, f(b)>b$，试证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi$.

证　设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(a)F(b)=(f(a)-a)(f(b)-b)<0$. 由零值点定理，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

13. 证明方程 $x=a\sin x+b\quad(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

证　设 $F(x)=x-a\sin x-b$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[0,a+b]$ 上连续，且

$$F(0)=-b<0,\quad F(a+b)=a(1-\sin a)\geq 0.$$

若 $F(a+b)=0$ 则命题已证，否则 $F(0)F(a+b)<0$. 由零值点定理，至少存在一点 $\xi\in(0,a+b)$，使得 $F(\xi)=0$. 由上可得方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

14. 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(0)=0$，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立，试证明 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

证　由函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $f(0)=0$ 知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$. 于是对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x)+f(\Delta x))=f(x),$$

这表明 $f(x)$ 在 x 处连续. 因此 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

习　题　1-5

1. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{5}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal{t=\arcsin x}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解
$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a.$$

(5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\tan(\pi x)}{x+2}$.

解
$$\lim_{x\to -2}\frac{\tan(\pi x)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{\pi\tan(\pi(x+2))}{\pi(x+2)}=\pi.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin x}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\sin x}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin 3x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin 3x}{x}}=0.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

解
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)}{\sin(\pi(1-x))}=\frac{2}{\pi}.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\sqrt{\cos x})x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sqrt{\cos x})x^2}=\frac{1}{4}.$$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x}{1+x})^x$.

解
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}=e^{-1}.$$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2+x}{x-3})^x$.

解
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2+x}{x-3})^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{5x}{x-3}}=e^5.$$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}}$.

解
$$\lim_{x\to 0}(1+\frac{x}{2})^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n$.

解 当 $x=0$ 时，极限等于 1. 当 $x\neq 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{x}{n})^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left((1-\frac{x}{n}\right)^{-\frac{n}{x}}\right]^{-x}=\mathrm{e}^{-x}.$$

(14) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解

$$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\left[(1-(1-x))^{\frac{-1}{1-x}}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+(\cos 2x-1))^{\frac{1}{\cos 2x-1}}\right]^{\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}},$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x}=-2,$$

故

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-1})^n$.

解 当 $x=-1$ 时，极限等于 1. 当 $x\neq -1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+x}{n-1})^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1+x}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{1+x}}\right]^{\frac{(1+x)n}{n-1}}=\mathrm{e}^{1+x}.$$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}\right]^{\frac{-6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{-6}.$$

(18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1+n}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{1+n}}\right]^{\frac{1+n}{n}}=\mathrm{e}.$$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-2a}\right)^x=8$，求 a.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-2a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4a}{x-2a}\right)^{\frac{x-2a}{4a}}\right]^{\frac{4ax}{x-2a}}=\mathrm{e}^{4a}.$$

令 $\mathrm{e}^{4a}=8$ 得 $a=\frac{3}{4}\ln 2$.

3. 设 $a>b>c>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$.

解 因为

$$a<(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<(3)^{\frac{1}{n}}a,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln 3}=1,$$

所以根据迫敛准则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=a$.

4. 设 $u_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\dfrac{1}{3^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$，利用极限存在的准则证明 $\{u_n\}$ 收敛.

证 显然数列 $\{u_n\}$ 是严格单调增的. 因

$$u_n<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-(\frac{1}{3})^n\right)}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2},$$

故数列 $\{u_n\}$ 有上界. 依据单调有界原理，数列 $\{u_n\}$ 收敛.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$，试求 $f(x)$ 的表达式.

解 当 $x=1$ 时，有

$$\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}=\lim_{t\to 1}0=0.$$

当 $x\neq 1$ 时，有

$$\lim_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}=\lim_{t\to x}\left[\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-t}}\right]^{\frac{1}{t-1}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}.$$

因此

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

习 题 1-6

1. 下列函数在什么情况下是无穷小量，什么情况下是无穷大量：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

解 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷大量.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

解 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，当 $x\to -1$ 时 $f(x)$ 是无穷大量.

(3) $f(x)=\tan x$.

解 当 $x\to k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，当 $x\to k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时 $f(x)$ 是无穷大量.

(4) $y=\ln x$.

解 当 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，当 $x\to 0^+$ 时 $f(x)$ 是负无穷大量.

2. 验证下列各组无穷小量之间的关系:

(1) 当 $x \to 1$ 时, $1-\sqrt{x}$ 与 $1-x$ 是同阶无穷小.

解 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2},$$

所以当 $x \to 1$ 时, $1-\sqrt{x}$ 与 $1-x$ 是同阶无穷小.

(2) 当 $x \to 0$ 时, $(1-\cos x)^2$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin^2\frac{x}{2})^2}{x^2}=0,$$

所以当 $x \to 0$ 时, $(1-\cos x)^2$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

(3) 当 $x \to 1$ 时, $\dfrac{1-x^3}{2+x}$ 与 $1-x$ 是等阶无穷小.

解 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{(2+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2}{2+x}=1,$$

所以当 $x \to 1$ 时, $\dfrac{1-x^3}{2+x}$ 与 $1-x$ 是等阶无穷小.

3. 试确定下列各个函数所对应的 α 值, 使当 $x \to 0$ 时函数与 x^α 为同阶无穷小量:

(1) $\sin 2x - 2\sin x$.

解 由

$$\sin 2x-2\sin x=2\sin x(\cos x-1)=-4\sin x\sin^2\frac{x}{2}$$

可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}=-1.$$

因此当 $x \to 0$ 时 $\sin 2x - 2\sin x$ 与 x^3 是同阶无穷小量.

(2) $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$.

解 由 $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1-x)}{x^2}=1.$$

因此当 $x \to 0$ 时 $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)$ 与 x^2 是同阶无穷小量.

(3) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$.

解 由

$$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}=\frac{\tan x+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}=\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}+1\right)}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x}}$$

可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=1.$$

因此当 $x\to 0$ 时 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ 与 x 是同阶无穷小量.

(4) $\sqrt[3]{3x^2-4x^3}$.

解 由

$$\sqrt[3]{3x^2-4x^3}=x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{3-4x}$$

可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4x^3}}{x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{3}.$$

因此当 $x\to 0$ 时 $\sqrt[3]{3x^2-4x^3}$ 与 $x^{\frac{2}{3}}$ 是同阶无穷小量.

4. 设当 $x\to x_0$ 时, $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x),\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$, 而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$ 存在且不为 -1, 证明当 $x\to x_0$ 时, $\alpha_1(x)+\beta_1(x)\sim\alpha_2(x)+\beta_2(x)$.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)+\beta_1(x)}{\alpha_2(x)+\beta_2(x)}&=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}+1}{\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_1(x)}+\dfrac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}+1}{\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}\dfrac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}+\dfrac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}}\\&=\frac{A+1}{A+1}\\&=1.\end{aligned}$$

这表明当 $x\to x_0$ 时, $\alpha_1(x)+\beta_1(x)\sim\alpha_2(x)+\beta_2(x)$.

5. 用等价无穷小代换定理求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x}=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x}$.

解

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x}=-1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{3x}{2}\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=3.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2x}{-\frac{1}{2}x^2}=0.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos ax-1))}{\ln(1+(\cos bx-1))}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-1}{\cos bx-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(ax)^2}{\frac{1}{2}(bx)^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\frac{1}{2}\pi^2.$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1.$$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x-\cos x}$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}=0.$$

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)$.

解
$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\frac{1}{x}=1.$$

6. 设函数 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ 都是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，证明无穷小量的等价关系具有下列性质：

(1) 自反性：$\alpha\sim\alpha$; (2) 对称性：若 $\alpha\sim\beta$, 则 $\beta\sim\alpha$;

(3) 传递性：若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$, 则 $\alpha\sim\gamma$.

证 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, 所以 $\alpha\sim\alpha$.

(2) 若 $\alpha\sim\beta$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, 所以 $\beta\sim\alpha$.

(3) 若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 从而

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1,$$

所以 $\alpha\sim\gamma$.

7. 设当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)=o((x-x_0)^n)$, $\beta(x)=o((x-x_0)^m)$, 其中 $n,m\in\mathbf{N}^+$, 且 $n\leq m$, 试证明当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)+\beta(x)=o((x-x_0)^n)$, 并举例说明 $\alpha(x)+\beta(x)$ 未必是比 $(x-x_0)^m$ 高阶的无穷小量.

证 因为 $\alpha(x)=o((x-x_0)^n)$, $\beta(x)=o((x-x_0)^m)$, 故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}=0,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{(x-x_0)^m}=0.$$

再根据 $n\leq m$ 可得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)+\beta(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}+\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)(x-x_0)^{m-n}}{(x-x_0)^m}=0.$$

因此当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)+\beta(x)=o((x-x_0)^n)$.

$\alpha(x)+\beta(x)$ 未必是比 $(x-x_0)^m$ 高阶的无穷小量. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=\sin^2 x=o(x)$, $\beta(x)=\sin^3 x=o(x^2)$. 但是由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^3 x}{x^2}=1$$

知 $\alpha(x)+\beta(x)$ 不是比 x^2 高阶的无穷小量.

复习题一

1. 填空题:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-\sin x}{2x^2+\sin x}=$______.

解
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-\sin x}{2x^2+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\sin x}{2+\frac{1}{x^2}\sin x}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=$______.

解 因为函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 有界，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin x}=0$, 所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$$

(3) 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, 为了使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，应当补充定义 $f(0)=$______.

解 因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,$$
所以为了使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，应当补充定义 $f(0)=1$.

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin bx}{x}, & x<0,\\ x^2-2x+2, & x\geq 0,\end{cases}$ 为了使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $b=$______.

解 因为
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin bx}{x}=b,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-2x+2)=2,$$
$$f(0)=2,$$
所以为了使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，应有常数 $b=2$.

(5) 函数 $y=\dfrac{1}{\ln|x|}$ 的间断点有______个.

解 函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, $x=-1,0,1$ 是它的三个间断点.

2. 选择题:

(1) 设 $0<a<b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}$ 等于 (　　).

(A) a. (B) b. (C) 1. (D) $a+b$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}b\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=b.$$

选 B.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}$ ( ).

(A) 等于 1. (B) 等于 -1. (C) 等于 0. (D) 不存在.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,$$

所以极限不存在. 选 D.

(3) 当 $x\to 0$ 时，下列各式中正确的是 ( ).

(A) $x^2+x^3=o(x^2)$. (B) $x^2+x^3=o(x^3)$.

(C) $x^2+x^3=o(x)$. (D) $x^2+x^3=o(x^4)$.

解 根据习题 1-5 的第 7 题知 $x^2+x^3=o(x)$. 选 C.

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=o(x^{n_1})$, $\beta(x)=o(x^{n_2})$, 且 $n_1<n_2$, 则必有

(A) $\alpha(x)+\beta(x)=o(x^{n_1})$. (B) $\alpha(x)+\beta(x)=o(x^{n_2})$.

(C) $\alpha(x)+\beta(x)=o(x^{n_2-n_1})$. (D) $\alpha(x)+\beta(x)=o(x^{n_1+n_2})$.

解 根据习题 1-5 的第 7 题知 $\alpha(x)+\beta(x)=o(x^{n_1})$. 选 A.

(5) 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)$ 是 x^2 的 ( ).

(A) 高阶无穷小. (B) 同阶无穷小，但不是等价无穷小.

(C) 低阶无穷小. (D) 等价无穷小.

解 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}&=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x}{x^2}\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)+\sin^2 x}{x^2}=1\end{aligned}$$

所以当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2}{3}(\cos x-\cos 2x)\sim x^2$. 选 D.

(6) 极限 $\lim\limits_{x\to 1}5^{\frac{1}{x-1}}$ 是 ( ).

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) 5. (D) 不存在且不是无穷大.

解 因为

$$\lim_{x\to1^-}5^{\frac{1}{x-1}}=0,\qquad \lim_{x\to1^+}5^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

所以极限 $\lim\limits_{x\to1}5^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在且不是无穷大. 选 D.

(7) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{x}=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) ∞.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $\frac{1}{6}$.

解 令 $t=\frac{2}{3}x$, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(3t)}{\frac{3}{2}t}=\frac{2}{3}\lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{t}{f(3t)}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

(8) 下列结论正确的是 (　　).

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{1-x}=\mathrm{e}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1-x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}.$$

选 C.

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n}-\sqrt{3^n}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2^n}+\sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n}-\sqrt{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^{\frac{n}{2}}+1}{(\frac{2}{3})^{\frac{n}{2}}-1}=-1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2n})$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{x^4}{2}}{x^4}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(\sec^2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(\sec^2 x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}\right]^{\frac{\tan^2 x}{x^2}} = \mathrm{e}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\cos x}{x} = 0.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}\sin x + \dfrac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right)$.

解 因为 $\sin x$ 有界，而当 $x\to\infty$ 时，$\tan\dfrac{1}{x}\to 0$, $\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-1}\to 2$, 所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\tan\frac{1}{x}\sin x + \frac{2x^2+x+1}{x^2-1}\right) = 0+2 = 2.$$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x^2 - x}{\cos^2 x - x}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2 - x}{\cos^2 x - x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\sin x^2 - 1}{\frac{1}{x}\cos^2 x - 1} = 1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}}$.

解

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}}{2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-2\mathrm{e}^{-2x}}{2+3\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{3}{2}.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1} + \frac{\sin x}{x}\right) = 0+1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{-x}\right) = 2-1 = 1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|}\right) = 1.$$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right)^{x^2}$.

解 当 $a=0$ 时，极限等于 1. 当 $a\neq 0$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a^2}{x^2-a^2}\right)^{\frac{x^2-a^2}{2a^2}}\right]^{\frac{2a^2x^2}{x^2-a^2}} = \mathrm{e}^{2a^2}.$$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

解

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}}=2.$$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{1}{n}a\right)+\left(x+\frac{2}{n}a\right)+\cdots+\left(x+\frac{n-1}{n}a\right)\right]$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{1}{n}a\right)+\left(x+\frac{2}{n}a\right)+\cdots+\left(x+\frac{n-1}{n}a\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(n-1)x+\frac{n(n-1)}{2n}a\right]=x+\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+a_3\sqrt{n+3})$，其中 $a_1+a_2+a_3=0$.

解　由 $a_1+a_2+a_3=0$ 得 $a_2=-a_1-a_3$，于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+a_3\sqrt{n+3})\\&=\lim_{n\to\infty}\left[a_1\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)+a_3\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-a_1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}+\frac{a_3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}\right)\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

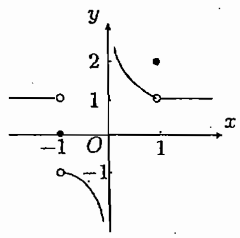
(16) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$，其中 $|x|<1$.

解
$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

4. 确定函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$ 的间断点及其类型，并作出 $y=f(x)$ 的图象.

解　当 $x=1$ 时，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=2.$$
当 $x=-1$ 时，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=0.$$
当 $0<|x|<1$ 时，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\frac{1}{x}.$$
当 $|x|>1$ 时，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}^{2n+1}}{1-x^n+x^{2n}}=1.$$

于是
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|<1,\\ 1, & |x|>1,\\ 2, & x=1,\\ 0, & x=-1.\end{cases}$$



由此易知，$x=0$ 为第二类间断点中无穷间断点；$x=-1$ 为第一类间断点中跳跃间断点；$x=1$ 为第一类间断点中的可去间断点. 函数图形如右图所示.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a+\arccos x, & -1<x<1,\\ b, & x=-1,\\ \sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1,\end{cases}$ 试确定常数 a 和 b，使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

解　为使 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，当且仅当 $f(-1+0)=f(-1-0)=f(-1)$，即有 $a+\pi=0=b$. 由此得到 $a=-\pi, b=0$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，又 $f(0)=f(2a)$，证明在 $(0,2a)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(a+\xi)$.

证　设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，$x\in[0,a]$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上是连续函数，$F(0)=f(0)-f(a)$, $F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$.

当 $f(a)=f(0)$ 时, $F(a)=0$, 取 $\xi=a$ 时, 即 $F(\xi)=f(\xi)-f(\xi+a)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

当 $f(a)\neq f(0)$ 时, $F(0)F(a)<0$, 故至少存在一点 $\xi\in(0,a)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)-f(\xi+a)=0$, 所以 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

7. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

证 令 $F(x)=\sin x+x+1$, 则 $F(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是连续函数, 且

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}<0,\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}>0.$$

因此必存在一点 $\xi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即 $\sin\xi+\xi+1=0$. 从而方程 $\sin x+x+1=0$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

8. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $f(x_0)\neq 0$, 证明存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0;\delta)$, 使当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时, $f(x)\neq 0$.

证 设 $f(x_0)=A>0$, 则因 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 于是对 $\varepsilon=\frac{A}{2}$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 即 $x\in U(x_0;\delta)$ 时, 有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}.$$

由此得到

$$f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

同理可证 $A<0$ 的情况.

9. 已知 $u_1=1,u_n=1+\frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}\quad(n=2,3,\cdots)$. 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限值.

证 由已知条件易见, 对一切 n 都有 $1\leq u_n\leq 2$. 因此数列 $\{u_n\}$ 有界. 又

$$u_2-u_1=\frac{1}{2}>0.$$

假设对正整数 k 有 $u_k-u_{k-1}>0$, 则

$$u_{k+1}-u_k=\frac{u_k}{1+u_k}-\frac{u_{k-1}}{1+u_{k-1}}=\frac{u_k-u_{k-1}}{(1+u_k)(1+u_{k-1})}>0.$$

根据数学归纳法原理知数列 $\{u_n\}$ 单调增. 于是根据单调有界准则数列 $\{u_n\}$ 收敛. 设其极限为 A, 则由 $u_n=1+\frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}$ 得

$$A=1+\frac{A}{1+A},$$

即

$$A^2-A-1=0,$$

由此解得 $A=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 而由 $1\leq u_n\leq 2$ 知 $A\geq 1$. 因此 $A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

第二章 导数与微分

习 题 2-1

1. 按导数的定义，求下列函数的导数：

(1) $y = ax + b$.

解
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a.$$

(2) $y = \cos x$.

解
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\dfrac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x.$$

(3) $y = \sqrt{x}$.

解
$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. 求解下列各题：

(1) 设 $f(x) = g(a+bx) - g(a-bx)$，其中 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义，且在 $x = a$ 处可导，求 $f'(0)$.

解 若 $b = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$, $f'(0) = 0$. 若 $b \neq 0$, 则
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(a+bx) - g(a-bx)}{x} \\ &= b\lim_{x \to 0} \frac{g(a+bx) - g(a)}{bx} + b\lim_{x \to 0} \frac{g(a-bx) - g(a)}{-bx} \\ &= 2bg'(a). \end{aligned}$$

(2) 设 $f(x) = x|x|$，求 $f'(0)$.

解
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

3. 已知直线运动的物体其运动规律为 $s = 3t^2$(米)，求物体在 $t = 2$(秒) 时的速度.

解
$$v(2) = s'(2) = 6t|_{t=2} = 12\text{m/s}.$$

4. 求曲线 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

解 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时 $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 切线斜率为
$$k = y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

5. 已知函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导. 根据导数的定义, 指出下列各题中的 A 表示什么?

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A.$

解

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x).$$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A.$

解

$$\begin{aligned}A&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\\&=2f'(x_0).\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$, 此处又已知 $f(0)=0$.

解

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0).$$

6. 设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为连续函数, 且 $\varphi(a)\neq 0$, 求 $f'_-(a)$ 和 $f'_+(a)$.

解

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{(a-x)\varphi(x)}{x-a}=-\varphi(a),$$

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a).$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 1,\\ ax+b, & x<1.\end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 试确定常数 a 与 b 的值.

解 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, $f(x)$ 在 $x=1$ 处必连续, 从而应有 $f(1-0)=f(1+0)$, 即有 $a+b=1$, 亦即有 $b=1-a$. 据此即已知条件得

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{ax-a}{x-1}=a,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$，即有 $a=2$. 由此又得 $b=-1$.

8. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 求 $f'_-(0)$ 和 $f'_+(0)$.

解

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0.$$

9. 已知抛物线 $y=ax^2$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切，求参数 a.

解 设切点为 (x_0,y_0)，则两条曲线都过此点，且在此点两条曲线的切线斜率相等. 因此有

$$\begin{cases} ax_0^2=\ln x_0, \\ 2ax_0=\dfrac{1}{x_0}. \end{cases}$$

由此解得 $a=\dfrac{1}{2e}$.

习 题 2-2

1. 求下列各函数的导数：

(1) $y=\dfrac{\pi}{x^5}-7e+\ln 2$.

解

$$y'=\left(\frac{\pi}{x^5}\right)'-(7e)'+(\ln 2)'=-\frac{5\pi}{x^6}.$$

(2) $y=3x^{\frac{2}{3}}-2^x+3e^x$.

解

$$y'=\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)'-\left(2^x\right)'+\left(3e^x\right)'=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-2^x\ln 2+3e^x.$$

(3) $y=x^2\ln x$.

解

$$y'=(x^2))'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x.$$

(4) $y=(1+x^2)\arctan x-\log_2 x$.

解

$$\begin{aligned} y'&=(1+x^2)'\arctan x+(1+x^2)(\arctan x)'-(\log_2 x)' \\ &=2x\arctan x+1-\frac{1}{x\ln 2}. \end{aligned}$$

(5) $y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$.

解

$$y' = \frac{2(\csc x)'(1+x^2)-(1+x^2)'(2\csc x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2\csc x\cot x}{1+x^2} - \frac{4x\csc x}{(1+x^2)^2}.$$

(6) $y = \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$.

解
$$y' = \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\sin x+\cos x}{(1+\cos x)^2}.$$

(7) $y = a^x x^a \quad (a>0, a\neq 1)$.

解
$$y' = a^x \ln a \cdot x^a + a^x a x^{a-1} = a^x x^a\left(\ln a + \frac{a}{x}\right).$$

(8) $y = (1-\tan x)e^x$.

解
$$y' = -\sec^2 x e^x + (1-\tan x)e^x = -(\tan x + \tan^2 x)e^x.$$

2. 求下列各函数在指定点处的导数：

(1) $f(x) = \dfrac{3}{5-x} + \dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

解 由
$$y' = \frac{3}{(5-x)^2} + \frac{2x}{5}$$
得 $f'(0) = \dfrac{3}{25}, f'(2) = \dfrac{17}{15}$.

(2) $x = \theta\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta$，求 $\left.\dfrac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

解
$$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \left.\left(\sin\theta + \theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

3. 求下列各函数的导数：

(1) $y = (2x+5)^4$.

解
$$y' = 4(2x+5)^3(2x+5)' = 8(2x+5)^3.$$

(2) $y = \dfrac{1}{(3x-1)^5}$

解
$$y' = \frac{-5(3x-1)'}{(3x-1)^6} = \frac{-15}{(3x-1)^6}.$$

(3) $y = 5\tan\left(\dfrac{x}{5}+1\right)$.

解
$$y' = 5\sec^2\left(\frac{x}{5}+1\right)\left(\frac{x}{5}+1\right)' = \sec^2\left(\frac{x}{5}+1\right).$$

(4) $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$.

解
$$y' = e^{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{1-x^2}}.$$

(5) $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$.

解

$$y'=2\arcsin\frac{x}{2}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)'=2\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\arcsin\frac{x}{2}.$$

(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

解

$$y'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2-x^2)'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

4. 求下列各函数的导数:

(1) $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$.

解

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'\\&=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(x+1)^2}\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}\\&=\frac{-1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

(2) $y=\tan^3(1-2x)$.

解

$$\begin{aligned}y'&=3\tan^2(1-2x)(\tan(1-2x))'\\&=3\tan^2(1-2x)\sec^2(1-2x)(-2)\\&=-6\tan^2(1-2x)\sec^2(1-2x).\end{aligned}$$

(3) $y=\ln\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

解

$$\begin{aligned}y'&=\frac{x-3}{(x-1)^3(x-2)}\left(\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}\right)'\\&=\frac{x-3}{(x-1)^3(x-2)}\cdot\frac{[3(x-1)^2(x-2)+(x-1)^3](x-3)-(x-1)^3(x-2)}{(x-3)^2}\\&=\frac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}.\end{aligned}$$

(4) $y=e^{\arctan\frac{1}{x}}$.

解

$$\begin{aligned}y'&=e^{\arctan\frac{1}{x}}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)'=e^{\arctan\frac{1}{x}}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'\\&=e^{\arctan\frac{1}{x}}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)=\frac{-1}{1+x^2}e^{\arctan\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

(5) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

解
$$y' = 2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = 2^{\frac{x}{\ln x}}\ln 2\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

(6) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$,　$a > 0$.

解
$$y' = \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2 - x^2}.$$

5. 设函数 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $y = f(x^2)$.

解
$$y' = f'(x^2)(x^2)' = 2xf'(x^2).$$

(2) $y = f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$.

解
$$y' = f'(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x)'\mathrm{e}^{f(x)} + f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}f'(x) = \mathrm{e}^{f(x)}[\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x) + f(\mathrm{e}^x)f'(x)].$$

(3) $y = f(\cos x)\cos(f(x))$.

解
$$\begin{aligned} y' &= f'(\cos x)(\cos x)'\cos(f(x)) + f(\cos x)(-\sin(f(x))f'(x) \\ &= -f'(\cos x)\sin x\cos(f(x)) - f(\cos x)\sin(f(x))f'(x). \end{aligned}$$

6. 设函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 可导，　$y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}\left(\varphi^2(x) + \psi^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi^2(x) + \psi^2(x)\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}(2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\psi(x)\psi'(x)) \\ &= \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}. \end{aligned}$$

7. 证明：可导的偶函数的导数是奇函数，而可导的奇函数的导函数是偶函数.

证　设 $f(x)$ 是可导的偶函数，则 $f(-x) = f(x)$. 两边求导得 $(f(-x))' = f'(x)$. 而按照复合函数求导法则，有

$$(f(-x))' = f'(-x)(-x)' = -f'(-x).$$

于是有 $f'(-x) = -f'(x)$. 这表明 $f'(x)$ 是偶函数.

设 $f(x)$ 是可导的奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$. 两边求导得 $(f(-x))' = -f'(x)$. 而按照复合函数求导法则，有

$$(f(-x))' = f'(-x)(-x)' = -f'(-x).$$

于是有 $f'(-x)=f'(x)$. 这表明 $f'(x)$ 是奇函数.

8. 若 $f(x)=\max\limits_{0<x<2}\{x,x^2\}$, 求 $f'(x)$.

解 由已知得

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1,\\ x^2, & 1<x<2.\end{cases}$$

因此, 当 $0<x<1$ 时, $f'(x)=1$; 当 $1<x<2$ 时, $f'(x)=2x$. 因为

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

9. 求下列各函数的二阶导数:

(1) $y=x\sqrt{1+x^2}$.

解

$$y'=\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$y''=\frac{4x\sqrt{1+x^2}-(1+2x^2)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\frac{2x^3+3x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) $y=\ln(1-x^2)$.

解

$$y'=\frac{-2x}{1-x^2},$$
$$y''=-2\frac{1-x^2+2x^2}{1-x^2}=-2\frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

(3) $y=(1+x^2)\arctan x$.

解

$$y'=2x\arctan x+(1+x^2)\frac{1}{1+x^2}=1+2x\arctan x,$$
$$y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$.

解

$$y'=2\mathrm{e}^{2x}\sin 3x+3\mathrm{e}^{2x}\cos 3x=\mathrm{e}^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x),$$
$$y''=2\mathrm{e}^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)+\mathrm{e}^{2x}(6\cos 3x-9\sin 3x)$$
$$=\mathrm{e}^{2x}(12\cos 3x-5\sin 3x).$$

10. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，求下列各函数的二阶导数：

(1) $y = f(x^2)$.

解

$$y' = 2xf'(x^2),$$
$$y'' = 2f'(x^2) + 2xf''(x^2)\cdot(x^2)' = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2).$$

(2) $y = f(\mathrm{e}^x)$.

解

$$y' = f'(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x),$$
$$y'' = (\mathrm{e}^x)'f'(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x f''(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{2x}f''(\mathrm{e}^x).$$

(3) $y = f(\ln x)$.

解

$$y' = f'(\ln x)(\ln x)' = \frac{1}{x}f'(\ln x),$$
$$y'' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x}f''(\ln x)(\ln x)' = -\frac{1}{x^2}f'(\ln x) + \frac{1}{x^2}f''(\ln x).$$

(4) $y = f(f(x))$.

解

$$y' = f'(f(x))f'(x),$$
$$y'' = f''(f(x))(f'(x))^2 + f'(f(x))f''(x).$$

11. 验证函数 $y = c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2\mathrm{e}^{-\lambda x}$ (λ, c_1, c_2 是常数) 满足关系式 $y'' - \lambda^2 y = 0$.

解　由于

$$y' = \lambda\left(c_1\mathrm{e}^{\lambda x} - c_2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right),$$
$$y'' = \lambda^2\left(c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right),$$

所以

$$y'' - \lambda^2 y = \lambda^2\left(c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) - \lambda^2\left(c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = 0.$$

12. 求下列各函数 n 阶导数的一般表达式：

(1) $y = (ax + b)^n$.

解

$$y' = na(ax+b)^{n-1},$$
$$y'' = n(n-1)a^2(ax+b)^{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = n!a^n.$$

(2) $y = x\ln x$.

解

$$y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x}, \quad y''' = \frac{-1}{x^2},$$

$$y^{(4)} = \frac{(-1)(-2)}{x^3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，当 $n \geq 2$ 时，有

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}.$$

(3) $y = xe^x$.

解

$$y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x,$$

$$y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x,$$

$$y''' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = (n+x)e^x.$$

(4) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

解

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

$$y' = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$y'' = \frac{(-1)(-2)}{x^3} + \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

(5) $y = \sin^2 x$.

解

$$y = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$y' = \sin 2x = -\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y''' = 2^2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right) = -2^2\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right),$$

或

$$y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(6) $y=\ln(3+7x-6x^2)$.

解

$$y' = \frac{7-12x}{3+7x-6x^2} = \frac{3}{1+3x} - \frac{2}{3-2x},$$

$$y'' = \frac{(-1)3^2}{(1+3x)^2} - \frac{1\cdot 2^2}{(3-2x)^2},$$

$$y''' = \frac{(-1)(-2)3^3}{(1+3x)^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 2^3}{(3-2x)^3} = \frac{(-1)^2 2!3^3}{(1+3x)^3} - \frac{2!2^3}{(3-2x)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!3^n}{(1+3x)^n} - \frac{(n-1)!2^n}{(3-2x)^n}.$$

13. 求下列各函数的指定阶的导数：

(1) $y=x^2\sin ax$, 求$y^{(10)}$.

解　利用莱布尼兹公式，有

$$\begin{aligned}
y^{(10)} &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \frac{\mathrm{d}^{10}}{\mathrm{d}x^{10}}(x^2)\frac{\mathrm{d}^{10-k}}{\mathrm{d}x^{10-k}}(\sin ax) \\
&= C_{10}^0 x^2 \frac{\mathrm{d}^{10}}{\mathrm{d}x^{10}}(\sin ax) + C_{10}^1 2x\frac{\mathrm{d}^9}{\mathrm{d}x^9}(\sin ax) + C_{10}^2 2\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8}(\sin ax) \\
&= x^2a^{10}\sin\left(ax+\frac{10\pi}{2}\right) + 20xa^9\sin\left(ax+\frac{9\pi}{2}\right) + 90a^8\sin\left(ax+\frac{8\pi}{2}\right) \\
&= -a^{10}x^2\sin ax + 20a^9x\cos ax + 90a^8\sin ax.
\end{aligned}$$

(2) $y=x^2\ln x$, 求$y^{(50)}$.

解
$$y'=2x\ln x+x,\quad y''=2\ln x+2+1,\quad y'''=\frac{2}{x},$$
$$y^{(4)}=\frac{(-1)2}{x^2},\quad y^{(5)}=\frac{(-1)(-2)2}{x^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，当 $n\geq 3$ 时，有
$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!2}{x^{n-2}}.$$

由此得到
$$y^{(50)}=-\frac{2\times 47!}{x^{48}}.$$

14. 试从$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'}$导出

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$.

解
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y'}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-1}{y'^2}y''\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

解
$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y''}{y'^3}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y'''y'-3y''^2}{y'^4}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5}.$$

习 题 2-3

1. 求下列各方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $x^2+2xy-y^2=2x$.

解 等式两边同时对 x 求导得
$$2x+2y+2xy'-2yy'=2.$$

由此解得
$$y'=\frac{1-x-y}{x-y}.$$

(2) $\arctan(x+y)=x$.

解 等式两边同时对 x 求导得
$$\frac{1+y'}{1+(x+y)^2}=1.$$

由此解得

$$y'=(x+y)^2.$$

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解　等式两边同时对 x 求导得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0.$$

由此解得

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

(4) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解　等式两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}.$$

由此解得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

2. 求下列各方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数：

(1) $y^2+2\ln y=x^4$.

解　等式两边同时对 x 求导得

$$2yy'+\frac{2}{y}y'=4x^3.$$

由此得到 $y'=\dfrac{2x^3y}{1+y^2}$. 两边再对 x 求导得

$$y'^2+yy''-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}=6x^2,$$

即

$$y^2y'^2+y^3y''-y'^2+yy''=6x^2y^2.$$

由此解得

$$\begin{aligned}y''&=\frac{6x^2y^2-(y^2-1)y'^2}{y(1+y^2)}\\&=\frac{6x^2y^2+(1-y^2)\left(\frac{2x^3y}{1+y^2}\right)^2}{y(1+y^2)}\\&=\frac{6x^2y(1+y^2)^2+4x^6y(1-y^2)}{(1+y^2)^3}\\&=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)].\end{aligned}$$

(2) $y=\sin(x+y)$.

解 等式两边同时对 x 求导得

$$y'=\cos(x+y)(1+y').$$

由此得到 $y'=\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$. 两边再对 x 求导得

$$y''=-(1+y')^2\sin(x+y)+y''\cos(x+y).$$

由此解得

$$y''=\frac{-(1+y')^2\sin(x+y)}{1-\cos(x+y)}=\frac{-\sin(x+y)}{[1-\cos(x+y)]^3}=\frac{-y}{[1-\cos(x+y)]^3}.$$

(3) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$.

解 等式两边同时对 x 求导得

$$y+xy'=\mathrm{e}^{x+y}(1+y').$$

由此得到 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}=\dfrac{y(x-1)}{x(1-y)}$. 两边再对 x 求导得

$$y'+y'+xy''=\mathrm{e}^{x+y}(1+y')^2+\mathrm{e}^{x+y}y''.$$

由此解得

$$\begin{aligned}y''&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}(1+y')^2-2y'}{x-\mathrm{e}^{x+y}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{x+y}(x-\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x+y}-y)^2-2(\mathrm{e}^{x+y}-y)(x-\mathrm{e}^{x+y})}{(x-\mathrm{e}^{x+y})^3}\\&=\frac{xy(x-y)^2-2xy(x-1)(1-y)}{x^3(1-y)^3}\\&=y\frac{(x-1)^2+(1-y)^2}{x^2(1-y)^3}.\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$.

解 等式两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(2x+2yy')=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}.$$

化简得

$$x+yy'=xy'-y.$$

由此得到 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$. 两边再对 x 求导得

$$1+y'^2+yy''=xy''.$$

由此解得

$$y''=\frac{1+y'^2}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

3. 设函数 $y(x)$ 由方程 $\sin(xy)-\dfrac{1}{y-x}=1$ 所确定，求曲线 $y=y(x)$ 上对应于 $x=0$ 点处的切线方程.

解　当 $x=0$ 时，$y=-1$. 对方程两边关于 x 求导得

$$(y+xy')\cos(xy)+\frac{y'-1}{(y-x)^2}=0.$$

将 $x=0, y=-1$ 代入得 $y'=2$. 所以切线方程为 $y=2x-1$.

4. 用对数微分法求下列各函数的导数：

(1) $y=x^{\cos\frac{x}{2}}$.

解　取对数得

$$\ln y=\cos\frac{x}{2}\ln x.$$

两边同时求导得

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\ln x+\frac{\cos\frac{x}{2}}{x}.$$

由此解得

$$y'=x^{\cos\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{x}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\ln x\right).$$

(2) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解　取对数得

$$\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

两边同时求导得

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}.$$

由此解得

$$y'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right].$$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$.

解 取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+2) + 4\ln(3-x) - 5\ln(x+1).$$

两边同时求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1}.$$

由此得到

$$y' = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1}\right].$$

(4) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

解 取对数得

$$\ln y = x\ln\frac{x}{x+1}.$$

两边同时求导得

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}.$$

由此得到

$$y' = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right).$$

5. 求下列各参数方程所确定的函数 $y = y(x)$ 的一阶导数和二阶导数:

(1) $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = t^3; \end{cases}$

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3}{2}t^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{3}{2}t.$$

(2) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2}t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

(3) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{at\sin t}{at\cos t} = \tan t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\sec^2 t}{at\cos t} = \frac{\sec^3 t}{at}.$$

(4) $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases} \quad f''(t) \neq 0.$

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{f''(t)}.$$

6. 写出下列各曲线在所给参数值相应点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处.

解 当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = 0$. 又

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{-2\sin 2t}{\cos t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -2\sqrt{2}.$$

于是所求的切线方程和法线方程分别为

$$y = -2\sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 和 } y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处.

解 当 $t = 2$ 时, $x = \frac{6}{5}a, y = \frac{12}{5}a$. 又

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=2} = \left.\frac{2t}{1-t^2}\right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

于是所求的切线方程和法线方程分别为

$$y-\frac{12}{5}a=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}a\right) \text{ 和 } y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}\left(x-\frac{6}{5}a\right).$$

7. 验证内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的切线介于坐标轴之间的部分的长度为常数.

证 按照隐函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

设 (x_0,y_0) 为曲线上一点，则过此点的切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0^{\frac{1}{3}}}{x_0^{\frac{1}{3}}}(x-x_0).$$

它与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}},0)$ 和 $(0,a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}})$. 两点之间的距离为

$$d=\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}}x_0^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{1}{3}}\right)^2}=a.$$

8. 设 $y=y(x)$ 是由方程组$\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定的函数，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解 按照隐函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{1-\mathrm{e}^y\sin t}.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(6t+2)}.$$

由所给方程知当 $t=0$ 时 $y=1$. 因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{e}^y\cos t}{(1-\mathrm{e}^y\sin t)(6t+2)}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

习 题 2-4

1. 求函数 $y=5x+x^2$ 当 $x=2,\Delta x=0.001$ 时的增量 Δy 和微分 $\mathrm{d}y$.

解

$$\Delta y=5(x+\Delta x)+(x+\Delta x)^2-(5x+x^2)=5\Delta x+(\Delta x)^2+2x\Delta x.$$

当 $x=2,\Delta x=0.001$ 时

$$\Delta y=5\times0.001+(0.001)^2+2\times2\times0.001=0.009001.$$

因为

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = (5+2x)\Delta x,$$

所以

$$\mathrm{d}y|_{x=2,\Delta x=0.001} = (5+2x)\Delta x|_{x=2,\Delta x=0.001} = (5+4)\times 0.001 = 0.009.$$

2. 求函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 当 $x=9$ 时的微分 $\mathrm{d}y$.

解　因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=9} = \left.\frac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=9} = -\frac{1}{27},$$

所以

$$\mathrm{d}y|_{x=9} = -\frac{1}{27}\mathrm{d}x.$$

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x-y+1=0$, 求 $x=1$ 时函数的微分 $\mathrm{d}y$.

解　由题设和导数的几何意义可知 $y'|_{x=1}=2$, 所以

$$\mathrm{d}y|_{x=1} = y'|_{x=1}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}x.$$

4. 求下列各函数的微分:

(1) $y=(x^2+2x)(x-4)$.

解

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = [(2x+2)(x-4)+(x^2+2x)]\,\mathrm{d}x = (3x^2-4x-8)\,\mathrm{d}x.$$

(2) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

解

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = \frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(3) $y=\dfrac{1}{(\tan x+1)^2}$.

解

$$\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = \frac{-2\sec^2 x}{(\tan x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

(4) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}, x>0$.

解

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

(5) $y=[\ln(1-x)^2]^2$.

解

$$\mathrm{d}y=2\ln(1-x)^2\cdot\frac{2}{(1-x)^2}\cdot(1-x)(-1)\,\mathrm{d}x=-\frac{4}{1-x}\ln(1-x)^2\,\mathrm{d}x.$$

(6) $y=\mathrm{e}^{ax}\cos bx$.

解

$$\mathrm{d}y=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}-\cos(xy)=0$ 所确定，求 $\mathrm{d}y|_{x=0}$.

解 由所给方程知当 $x=0$ 时 $y=0$. 方程两边同时求导得

$$(1+y')\mathrm{e}^{x+y}+(y+xy')\sin(xy)=0.$$

将 $x=0,y=0$ 代入得 $y'|_{x=0}=-1$. 因此 $\mathrm{d}y|_{x=0}=-\mathrm{d}x$.

6. 在下列各题的括号中填上适当的函数，使等式成立：

(1) $\mathrm{d}(\qquad)=3x\,\mathrm{d}x$.

解 由 $\left(\frac{3}{2}x^2\right)'=3x$ 知可选取函数 $\frac{3}{2}x^2$.

(2) $\mathrm{d}(\qquad)=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 由 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 知可选取函数 $\ln x$.

(3) $\mathrm{d}(\qquad)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 由 $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 知可选取函数 $\sqrt{x}$.

(4) $\mathrm{d}(\qquad)=\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

解 由 $\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)'=\mathrm{e}^{-2x}$ 知可选取函数 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

(5) $\mathrm{d}(\qquad)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 由 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 知可选取函数 $\arcsin x$.

(6) $\mathrm{d}(\qquad)=\sqrt{1+2x}\ \mathrm{d}(1+2x)$.

解 由 $\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right)'=\sqrt{u}$ 知可选取函数 $\frac{2}{3}\sqrt{(1+2x)^3}$.

7. 计算下列各式的近似值：

(1) $\arctan 1.05$.

解 设 $f(x)=\arctan x$, 则 $f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$. 令 $x_0=1$， $\Delta x=0.05$，则由

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$$

得

$$\begin{aligned}\arctan 1.05 &= f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\ &= \arctan 1+\frac{1}{1+1^2}\times 0.05\\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times 0.05 \approx 0.8104.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt[5]{1.01}$.

解 设 $f(x)=\sqrt[5]{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$. 令 $x_0=1$， $\Delta x=0.01$，则

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1.01} &= f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\ &= \sqrt[5]{1}+\frac{1}{5}\times(1)^{-\frac{4}{5}}\times 0.01 = 1.002.\end{aligned}$$

(3) $\ln 0.9$.

解 设 $f(x)=\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}$. 令 $x_0=1$， $\Delta x=-0.1$，则

$$\begin{aligned}\ln 0.9 &= f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\\ &= \ln 1+\frac{1}{1}\times(-0.1) = -0.1.\end{aligned}$$

复习题二

1. 填空题:

(1) 设 $f(\ln x)=(\ln x)^2+\ln x^2, (x>0)$, 则 $f'(x)=$________.

解 由于 $f(x)=x^2+2x$, 所以 $f'(x)=2x+2$.

(2) 设 $y=x^x\cos x, (x>0)$, 则 $y'=$________.

解

$$\begin{aligned}y' &= \left(e^{x\ln x}\right)'\cos x+x^x(-\sin x)\\ &= e^{x\ln x}(1+\ln x)\cos x-x^x\sin x\\ &= x^x[(1+\ln x)\cos x-\sin x].\end{aligned}$$

(3) 设 $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$, 则 $y^{(100)}=$________.

解

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}. \\
y' &= \frac{-1}{(x+2)^2} - \frac{-1}{(x+3)2}, \\
y'' &= \frac{(-1)(-2)}{(x+2)^3} + \frac{(-1)(-2)}{(x+3)^3}, \\
&\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}.$$

由此得到

$$y^{(100)} = \frac{100!}{(x+2)^{101}} - \frac{100!}{(x+3)^{101}}.$$

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}-2x-y-3=0$ 确定，则 $y'\big|_{x=-1}=$ ________ .

解 由所给方程知，当 $x=-1$ 时， $y=0$. 在方程两边同时求导得

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')-2-y'=0.$$

代入 $x=-1, y=0$ 得 $-2y'-2=0$. 由此得到 $y'\big|_{x=-1}=-1$.

(5) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5 \end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________ .

解 按照隐函数求导法则得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{y^2-\mathrm{e}^t}{2(1-ty)}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{y^2-\mathrm{e}^t}{2(1-ty)}}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$$

(6) 曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t, \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $M_0(0,1)$ 处的法线方程为 ________ .

解 M_0 点所对应的参数为 $t=0$. 而

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}{\mathrm{e}^t(\sin 2t+2\cos 2t)}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

因此所求的法线方程为

$$y=-2x+1.$$

(7) 设函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则$f^{(n)}(x)=$ ________ .

解

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2(f(x))^3,$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3(f(x))^2 f'(x) = 2\cdot 3(f(x))^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$f^{(n)}(x) = n!(f(x))^{n+1}.$$

2. 选择题：

(1) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数为(　　).

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解　因为

$$f(x) = (x+1)(x-2)|x|\,|x+1|\,|x-1|,$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上除点 $x = 0, \pm 1$ 外，$f(x)$ 处处可导. 由

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)(x-2)(-x)|x+1|\,|x-1|}{x} = 2,$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)(x-2)x|x+1|\,|x-1|}{x} = -2,$$

可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 类似地，可判断出 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. 而由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(1)}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)|x|\,|x+1|\,|x-1|}{x+1}\\ &= \lim_{x\to -1}(x-2)|x|\,|x+1|\,|x-1| = 0\end{aligned}$$

知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 点可导. 因此选 C.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处(　　).

(A) 必可导.　　(B) 连续，但不一定导数.

(C) 一定不可导.　　(D) 不连续.

解　由 $f(x)$ 在 x_0 处可导知 $f(x)$ 在 x_0 处连续，从而有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

由此可知

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = |f(x_0)|.$$

因此 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续. 但是 $|f(x)|$ 在 x_0 处可能可导，也可能不可导. 例如函数 $f(x) = x^2$ 在 $x=0$ 处可导，此时 $|f(x)| = x^2$ 在 $x=0$ 处显然也可导. 而函数 $f(x) = x$ 在 $x=0$ 处可导，但 $|f(x)| = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导. 综合以上讨论，选 B.

(3) 设 $y=(\arcsin\frac{x}{2})^2$, 则$y'\Big|_{x=1}=($ $)$.

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) 0. (C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$. (D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

解
$$y'|_{x=1}=2\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}\Big|_{x=1}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$
选 C.

(4) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin(xy)-\ln\frac{x+1}{y}=1$ 确定, 则 $y'\Big|_{x=0}=($ $)$.

(A) e. (B) e^2. (C) $e+e^2$. (D) $e-e^2$.

解 由方程知, 当 $x=0$ 时 $y=e$. 方程两边同时求导得
$$(y+xy')\cos(xy)-\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y-(x+1)y'}{y^2}=0.$$
代入 $x=0,y=e$ 得 $y'=e-e^2$. 选 D.

(5) 设 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=t\cos t-\sin t,\end{cases}$ 则$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=($ $)$.

(A) $-\frac{3\pi}{2}$. (B) $\frac{3\pi}{2}$. (C) 1. (D) -1.

解
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-t\sin t}{-\sin t}=t,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\Bigg|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{-\sin t}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=1.$$
选 C.

(6) 设在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 交点处两曲线切线的夹角为 φ, 则 $\tan\varphi=($ $)$.

(A) -1. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解 两曲线的交点为 $M_0(1,1)$. 设在 M_0 点曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 的切线斜角分别为 α_1 和 α_2, 则 $\varphi=\alpha_1-\alpha_2$, 且
$$\tan\alpha_1=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1}=-1,$$
$$\tan\alpha_2=\frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=1}=2.$$
因此
$$\tan\varphi=\tan(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=3.$$
选 D.

(7) 函数$y=\ln\sin\sqrt{x}$ 的微分为(　　).

(A) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.　　(B) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\tan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

(C) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.　　(D) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sin\sqrt{x})=\frac{\cos\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

选 C.

3. 计算题:

(1) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2009)$, 求 $f'(0)$.

解

$$\begin{aligned}f'(0)=&[(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+2009)\\&+x(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+2009)\\&+\cdots\cdots\cdots\\&+x(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+2008)]|_{x=0}\\=&2009!.\end{aligned}$$

(2) 设曲线 $y=x^n$ 在点 $M_0(1,1)$ 处的切线交 x 轴于点 $N(\xi,0)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}y(\xi)$.

解 $y'=nx^{n-1}$ 在 $(1,1)$ 点的斜率为 n, 切线为 $y-1=n(x-1)$. 所以 $\xi=1-\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}y(\xi)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=e^{-1}.$$

(3) 求函数 $y=a^x+\sqrt{1-a^{2x}}\arccos a^x$ $(a>0,a\neq1)$ 的导数 y'.

解

$$\begin{aligned}y'&=(a^x)'+\left(\sqrt{1-a^{2x}}\right)'\arccos a^x+\sqrt{1-a^{2x}}(\arccos a^x)'\\&=(a^x)\ln a-\frac{a^{2x}\ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}}\arccos a^x-\sqrt{1-a^{2x}}\frac{a^x\ln a}{\sqrt{1-a^{2x}}}\\&=-\frac{a^{2x}\ln a\arccos a^x}{\sqrt{1-a^{2x}}}.\end{aligned}$$

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $(\cos x)^y=(\sin y)^x$ 确定, 求 y'.

解 等式两边取对数得

$$y\ln\cos x=x\ln\sin y.$$

两边对 x 求导得

$$y'\ln\cos x+y\frac{1}{\cos x}(-\sin x)=\ln\sin y+x\frac{\cos y}{\sin y}y'.$$

由此解得

$$y' = \frac{\ln\sin y + y\tan x}{\ln\cos x - x\cot y}.$$

(5) 设 $\begin{cases} x = 2t^3 - 1, \\ y = \sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{6t^2} = \frac{1}{6t\sqrt{1+t^2}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=1} = -\left.\frac{1+2t^2}{36t^4(1+t^2)^{3/2}}\right|_{t=1} = -\frac{\sqrt{2}}{48}.$$

(6) 设 $y = \ln(2x+3)$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$y' = \frac{2}{2x+3}, \quad y'' = \frac{(-1)2^2}{(2x+3)^2}, \quad y''' = \frac{(-1)(-2)2^3}{(2x+3)^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

继续推演，不难看出，有

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(2x+3)^n}.$$

(7) 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处具有连续的一阶导数，且 $f'(1) = -2$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{d}f(\cos\sqrt{x})}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{d}f(\cos\sqrt{x})}{\mathrm{d}x} &= \lim_{x\to 0^+} f'(\cos\sqrt{x})\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= f'(\cos\sqrt{0})\frac{-1}{2} = 1.\end{aligned}$$

(8) 求曲线 $\begin{cases} x + t(1-t) = 0, \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$ 当 $t=0$ 时的切线方程和法线方程.

解 由所给方程知，当 $t=0$ 时，$x=0, y=-1$. 对方程 $te^y+y+1=0$ 两边求导得

$$e^y + te^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.$$

代入 $t=0, y=-1$ 得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{e}$. 由方程 $x+t(1-t)=0$ 得 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -1$. 于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \frac{1}{e}.$$

从而所求的切线方程为 $y=\frac{1}{e}x-1$；法线方程为 $y=-ex-1$.

(9) 设 $y=(\sqrt{x})^x e^{\sqrt{x}}$，求 dy.

解 取对数得

$$\ln y=\frac{x}{2}\ln x+\sqrt{x}.$$

两边同时求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

由此得到

$$y'=\frac{1}{2}(\sqrt{x})^x e^{\sqrt{x}}\Big(\ln x+1+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big),$$

从而

$$dy=\frac{1}{2}(\sqrt{x})^x e^{\sqrt{x}}\Big(\ln x+1+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx.$$

(10) 设曲线 $x^2+2xy+y^2-4x-5y+3=0$ 的切线平行于直线 $2x+3y=0$，求该切线方程.

解 设 (x_0,y_0) 是曲线上一点，过此点的切线平行于 $2x+3y=0$，则斜率为 $-\frac{2}{3}$. 按照隐函数求导法则

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{2x_0+2y_0-4}{5-2x_0-2y_0}.$$

令

$$\frac{2x_0+2y_0-4}{5-2x_0-2y_0}=-\frac{2}{3},$$

化简得 $x_0+y_0=1$. 与曲线方程联立得到 $x_0=1,y_0=0$. 于是所求切线为 $y=-\frac{2}{3}(x-1)$，即 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$.

(11) 设 $y=(x^2-1)e^x$，求 $y^{(24)}$.

解 利用莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned}y^{(24)}&=\sum_{k=0}^{24}C_{24}^k(x^2-1)^{(k)}(e^x)^{(24-k)}\\&=C_{24}^0(x^2-1)e^x+C_{24}^1(2x)e^x+C_{24}^2\cdot 2\cdot e^x\\&=(x^2+48x+551)e^x.\end{aligned}$$

(12) 设 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$，求 $y^{(n)}$.

解 因为

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

所以

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\times 4^n\cos\Big(4x+\frac{n\pi}{2}\Big)=4^{n-1}\cos\Big(4x+\frac{n\pi}{2}\Big).$$

第三章　微分中值定理与导数应用

习 题 3-1

1. 验证函数$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$在区间$[0,\pi]$上满足罗尔定理的条件，并求出满足$f'(x)=0$的$\xi$值.

解　显然$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x$在$[0,\pi]$上连续、在$(0,\pi)$内可导，且

$$f(0)=0=f(\pi).$$

从而得知$f(x)$在$[0,\pi]$上满足罗尔定理的条件. 又

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x).$$

由$f'(\xi)=0$与$\xi\in(0,\pi)$可知，$\xi=\frac{\pi}{4}$.

2. 设函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，证明方程$f'(x)=0$在$x\in[1,4]$上必有三个实根，

证　显然$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，且$f(x)$在$[1,4]$上连续，在$(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$内均可导. 由罗尔定理可知，$f'(x)$在$(1,2),(2,3),(3,4)$内至少各有一个实根. 又因$f'(x)=0$是三次方程，其最多有三个实根，从而得证$f'(x)=0$在$[1,4]$上共有三个实根.

3. 设函数$f(x)$在$[1,2]$上二阶可导，且$f(2)=0$，当$F(x)=(x-1)^2f(x)$时，证明必存在一点$\xi\in(1,2)$，使$F''(\xi)=0$.

证　$F(x)=(x-1)^2f(x)$在$[1,2]$上满足罗尔定理的条件，必有$\eta\in(1,2)$，使$F'(\eta)=0$. 又

$$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$$

在$[1,\eta]$上也满足罗尔定理的条件，必有$\xi\in(1,\eta)\subset(1,2)$，使$F''(\xi)=0$.

4. 验证函数$f(x)=\arctan x$在区间$[0,1]$上满足拉格朗日定理的条件，并求出满足定理结论的ξ值.

解　函数$f(x)=\arctan x$在$[0,1]$上连续、在$(0,1)$内可导，从而满足拉格朗日定理的条件. 又

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

由$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{\pi}{4}$与$\xi\in(0,1)$可知，$\xi=\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$.

5. 已知抛物线$y=x^2$在点$A(1,1)$和点$B(3,9)$的一段弧$\widehat{AB}$，试问在$\widehat{AB}$上哪一点处的切线平行于割线AB?

解　$f(x)=x^2$在$[1,3]$上满足拉格朗日定理的条件，且$f'(x)=2x$. 根据拉格朗日定理的几何意义，存在$\xi\in(1,3)$，使得函数曲线在$(\xi,f(\xi))$点的切线平行于A,B两点的连

线，从而有

$$2\xi=\frac{9-1}{3-1}=4.$$

由此得到 $\xi=2$，所求点为 $(2,4)$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明必存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

证　考虑函数 $F(x)=xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，且 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$. 于是根据拉格朗日定理存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi),$$

即有

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

7. 证明下列不等式：

(1) 当 $0<a\le b$ 时，$\dfrac{b-a}{b}\le\ln\dfrac{b}{a}\le\dfrac{b-a}{a}$；

证　当 $a=b$ 时，不等式显然成立. 当 $a<b$ 时，考虑函数 $f(x)=\ln x$，显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. 于是根据拉格朗日定理存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi}.$$

因 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$，$\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$，所以由上式得

$$\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a},$$

从而有

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

(2) 当 $a>b>0,n>1$ 时，$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

证　考虑函数 $f(x)=x^n$，显然 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日定理的条件，且 $f'(x)=nx^{n-1}$. 于是根据拉格朗日定理存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=n\xi^{n-1},$$

从而有

$$na^{n-1}<\frac{b^n-a^n}{b-a}=n\xi^{n-1}<nb^{n-1},$$

即有

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)\ (a\neq 0)$.

解 不妨设常数 $a>0$，考虑函数 $f(x)=\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{a}{n+1},\dfrac{a}{n}\right]$ 上满足拉格朗日定理的条件，且 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. 于是根据拉格朗日定理存在 $\xi_n\in\left(\dfrac{a}{n+1},\dfrac{a}{n}\right)$ 使得

$$\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{1}{1+\xi_n^2}\left(\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}\right)=\frac{a}{(1+\xi_n^2)n(n+1)}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n=0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2}{(1+\xi_n^2)n(n+1)}=a.$$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导， $a>0$，证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

证 令 $g(x)=\ln x$，则 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理的条件，且 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$. 于是根据柯西定理存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\xi f(\xi),$$

即

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

习 题 3-2

1. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

解

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin 4x}$.

解

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{4\cos 4x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$.

解

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = -\frac{1}{6}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x} = \lim_{x\to 0} [(1+x)^{\frac{1}{x}}]' = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} [\frac{1}{x}\ln(1+x)]'$$

$$= \mathrm{e}\lim_{x\to 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} = \mathrm{e}\lim_{x\to 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \mathrm{e}\lim_{x\to 0} \frac{1 - [1 + \ln(1+x)]}{2x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = -\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

2. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.

解

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-6\cos 3x \sin 3x}{-6\cos x \sin x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin 3x}{-\sin x} = 3.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$.

解

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = 3\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sin 3x} = 1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}$.

解
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin x}=0.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln x^3}$.

解
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\frac{3}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}.$$

3. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解 令 $1-x=t$，则
$$\lim_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

解 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则
$$\lim_{x\to0^+}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{k}{x}$.

解 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则
$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{k}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin kt}{t}=k.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$.

解
$$\lim_{x\to0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{xe^x-x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{1}{x})^{\tan x}$.

解
$$\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x})^{\tan x}=\lim_{x\to0^+}e^{-\tan x\ln x}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}$$
$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}}=e^0=1.$$

(6) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解

$$\lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\tan x}{\sin^2 x}} = e^{-1}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

解 令 $1-x=t$，则

$$\lim_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}t}} = e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{\frac{\pi}{2}t}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cot\dfrac{1}{n}-n\right)$.

解 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cot\frac{1}{n}-n\right) = \lim_{x\to+\infty}(\cot\frac{1}{x}-x) = \lim_{t\to0^+}(\frac{1}{\tan t}-\frac{1}{t})$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{t-\tan t}{t^2} = \lim_{t\to0^+}\frac{1-\sec^2 t}{2t}$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{-\tan^2 t}{2t} = 0.$$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 可用数列极限的定义直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 以下是新解法.

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(a^x+b^x)-\ln2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x}}$$

$$= e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}} = \sqrt{ab}.$$

4. 试说明极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在，但不能用洛必达法则求出.

解 当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^2}{\sin x}$ 为无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量，因而极限存在，且为 0. 记 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=f(x),\sin x=g(x)$，当 $x\neq 0$ 时，有

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

当 $x\to 0$ 时，$2x\sin\dfrac{1}{x}\to 0,\cos x\to 1$，而 $\cos\dfrac{1}{x}$ 极限不存在，所以 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在. 因此所给的极限不能用罗比达法则求出.

5. 设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导函数，试证明

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证 分子、分母对变量 h 求导，得

$$\text{右式}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}=f''(x).$$

6. 设函数 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=0,g'(0)=0,g''(0)=a$，又设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{2}\\&=\frac{g''(0)}{2}=\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

习 题 3-3

1. 写出函数 $f(x)=3x^3-2x^2-x+2$ 在 $x_0=-1$ 处的三阶泰勒多项式.

解 由

$$\begin{aligned}&f(-1)=-3-2+1+2=-2,\\&f'(-1)=9x^2-4x-1\Big|_{x=-1}=12,\\&f''(-1)=18x-4\Big|_{x=-1}=-22,\\&f'''(-1)=18,\\&f^{(4)}(x)=0,\end{aligned}$$

得

$$T_3(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2!}f''(-1)(x+1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(-1)(x+1)^3$$
$$= -2 + 12(x+1) - 11(x+1)^2 + 3(x+1)^3.$$

2. 写出函数$f(x) = e^x$在 $x_0 = 1$ 处的 n 阶泰勒公式.

解 对任意 $k \in \mathrm{N}$, 有 $f^{(k)}\Big|_{x=1} = e$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(1)(x-1)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-1)^{n+1} \\ &= e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 1 与 x 之间.

3. 写出函数 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 的二阶麦克劳林公式.

解 因

$$f(0) = 1,\quad f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2},$$
$$f''(0) = \frac{-1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=0} = \frac{1}{4},\quad f'''(x) = \frac{3}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}},$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16(1+\xi)^{\frac{5}{2}}}x^3, \end{aligned}$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

4. 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 因为

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4),$$

所以

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4),$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

解 因为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

所以

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

解 因为

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2),$$

所以

$$\sin x - x\cos x = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{x^2(\cos x - e^{x^2})}$.

解 因为

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2),$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2),$$

所以

$$\cos x - e^{x^2} = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

5. 计算 $\sin 18^\circ$ 的值，使其误差不超过 10^{-4}.

解 使用带拉格朗日余项的 $2n$ 阶麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(\xi + \frac{2n+1}{2}\pi)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 由 $18^\circ = \frac{\pi}{10} < 0.4$，可知欲

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1} < \frac{0.4^{2n+1}}{(2n+1)!} < 10^{-4}$$

成立，只需取 $n = 2$ 即可.

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.31415 - 0.00516 \approx 0.3090.$$

6. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 n 次可微函数且 $f(a) = f(b) = f'(b) = f''(b) = \cdots = f^{(n-1)}(b) = 0$，试证存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

证 在 $[a,b]$ 上，对函数 $f(x)$ 使用罗尔定理，可知有 $\xi_1 \in (a,b)$，使得 $f'(\xi_1) = 0$. 在 $[\xi_1, b]$ 上，对函数 $f'(x)$ 使用罗尔定理，可知有 $\xi_2 \in (\xi_1, b)$，使得 $f''(\xi_2) = 0$. 依次进行下去，最后在 $[\xi_{n-1}, b]$ 上，对函数 $f^{(n-1)}(x)$ 使用罗尔定理，可知有 $\xi \in (\xi_{n-1}, b) \subset (a,b)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n)}(x)$ 不恒为零，$f^{(n+1)}(x) \equiv 0$，证明 $f(x)$ 是 x 的 n 次多项式.

证 据所给条件知 $f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n.$$

这表明 $f(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式. 又因 $f^{(n)}(x)$ 不恒为零，所以 $f(x)$ 必是 x 的 n 次多项式.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f'(a) = f'(b) = 0$，试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

证 使用泰勒公式，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_1 \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$, $\xi_2 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$. 相减得

$$f(b)-f(a)=\frac{1}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)](b-a)^2.$$

于是有

$$\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} \le \frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2} \le \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}.$$

习 题 3-4

1. 求下列函数的增减区间:

(1) $y=1-4x-x^2$.

解 $y'=-2x-4$, 可知单调增区间为 $(-\infty,-2)$, 单调减区间为 $(-2,+\infty)$.

(2) $y=x^2(x-3)$.

解 $y'=3x(x-2)$, 可知单调增区间为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$, 单调减区间为 $(0,2)$.

(3) $y=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$.

解 $y'=-\dfrac{x^2+16}{(x+2)^2(x-8)^2}$, 可知单调减区间为 $(-\infty,-2),(-2,8),(8,+\infty)$, 没有单调增区间.

(4) $y=\sqrt{2x-x^2}$.

解 $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}$, 可知单调增区间为 $(0,1)$, 单调减区间为 $(1,2)$.

(5) $y=x+\sin x$.

解 $y'=1+\cos x$, 可知单调增区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2. 求下列函数的极值:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

解 由

$$y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3), \quad y''=12(x-1)$$

可知极大值为 $y(-1)=17$, 极小值为 $y(3)=-47$.

(2) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

解 由

$$y=3+\frac{x+1}{x^2+x+1}, \quad y'=\frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}, \quad y''=\frac{x^3+3x^2-1}{(x^2+x+1)^3}$$

可知极大值为 $y(0)=4$, 极小值为 $y(-2)=\dfrac{8}{3}$.

(3) $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

解 由

$$y'=\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}},\quad y''=\frac{2}{3}\frac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

可知极大值为 $y(0)=1$, 极小值为 $y(\pm1)=0$.

(4) $y=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

解 由

$$y'=\frac{4}{3}\frac{(2x-1)(x-5)}{\sqrt[3]{x+1}},\quad y''=\frac{8}{9}\frac{5x^2-5x-19}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$$

可知极大值为 $y(\frac{1}{2})=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$, 极小值为 $y(-1)=y(5)=0$.

(5) $y=x^2\mathrm{e}^{-x}$.

解 由

$$y'=x(2-x)\mathrm{e}^{-x},\quad y''=(x^2-4x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

可知极大值为 $y(2)=4\mathrm{e}^{-2}$, 极小值为 $y(0)=0$.

(6) $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解 由 $y'=\dfrac{1-x}{1+x^2}$ 可知极大值为 $y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln2$, 没有极小值.

(7) $y=|x|\mathrm{e}^{-x}$.

解 当 $x>0$ 时，$y'=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$；当 $x<0$ 时，$y'=(x-1)\mathrm{e}^{-x}<0$. 由此可知极大值为 $y(1)=\mathrm{e}^{-1}$, 极小值为 $y(0)=0$.

(8) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

解 由 $y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ 可知极大值为 $y(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$, 没有极小值.

(9) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.

解 由 $y'=\dfrac{12-5x}{\sqrt{(4+5x^2)^3}}$ 可知极大值为 $y(\frac{12}{5})=\sqrt{\frac{41}{20}}$, 没有极小值.

3. 证明下列不等式:

(1) $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}(x>0)$.

证 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}.$$

当 $x>0$ 时，有 $f'(x)>0$，从而 $f(x)>f(0)$，故欲证不等式成立.

(2) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x,(x>0)$.

证 令 $f(x)=x-\sin x, g(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$，则

$$f(0)=0,\quad f'(x)=1-\cos x>0\ \ (x>0)$$

由此可知当 $x>0$ 时 $f(x)>0$, 从而 $x>\sin x$. 又因

$$g(0)=0,\quad g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},$$
$$g'(0)=0,\quad g''(x)=x-\sin x>0\ \ (x>0),$$

所以 $g(x)>0\ \ (x>0)$, 从而 $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$.

(3) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,(x>0)$.

证 法1 令 $f(x)=x-\ln(1+x), g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$，则由

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{x}{1+x}>0\ \ (x>0)$$

可知当 $x>0$ 时 $f(x)>0$, 从而 $x>\ln(1+x)$. 又因

$$g(0)=0,\quad g'(x)=\frac{x^2}{1+x}>0\ \ (x>0),$$

所以当 $x>0$ 时 $g(x)>0$, 从而 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

法2 考察函数 $\ln(1+x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式

可知极

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, 0<\xi<x$. 显然

$$R_1(x)<0,\quad R_2(x)>0,$$

从而得证欲证不等式成立.

(4) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}(x>0)$.

证 令 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0(x>0),\text{ 可知 } f(x)>0(x>0).$$

由此可知证欲证不等式成立.

4. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值：

(1) $y=x^2-4x+6$ 在 $[-3,10]$ 上.

解 $y'=2(x-2)$，可知 $x=2$ 是唯一驻点.

$$y(-3)=27,\quad y(2)=2,\quad y(10)=66,$$

故知 $y=x^2-4x+6$ 在 $[-3,10]$ 上的最大值为 66，最小值为 2.

(2) $y=|x^2-3x+2|$ 在 $[-10,10]$ 上.

解 当 $x>2$ 或 $x<1$ 时,

$$y=x^2-3x+2,\quad y'=2x-3;$$

当 $1<x<2$ 时,

$$y=-x^2+3x-2,\quad y'=3-2x.$$

可知 $x=\dfrac{3}{2}$ 是唯一驻点，$x=1$ 与 $x=2$ 是不可导点.

$$y(1)=y(2)=0,\quad y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4},\quad y(-10)=132,\quad y(10)=72,$$

故知 $y=|x^2-3x+2|$ 在 $[-10,10]$ 上的最大值为 132，最小值为 0.

(3) $y=\sqrt{x(10-x)}$ 在 $[0,10]$ 上.

解 $y'=\dfrac{(5-x)}{\sqrt{x(10-x)}}$，可知 $x=5$ 是唯一驻点.

$$y(0)=y(10)=0,\quad y(5)=5,$$

故知 $y=\sqrt{x(10-x)}$ 在 $[0,10]$ 上的最大值为 5，最小值为 0.

(4) $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,10]$ 上.

解 $y'=1-\dfrac{1}{x^2}\geq 0$，可知 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,10]$ 上单调增. 其最大值为 $y(10)=10.1$，最小值为 $y(1)=2$.

(5) $y=\sqrt{5-4x}$ 在 $[-1,1]$ 上.

解 $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{5-4x}}\leq 0$，可知 $y=\sqrt{5-4x}$ 在 $[-1,1]$ 上单调减. 其最大值为 $y(-1)=3$，最小值为 $y(1)=1$.

(6) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上.

解 法 1 由

$$y=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

易见，在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值为 $1-0=1$，最小值为 $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

法 2 由

$$\begin{aligned}y'&=4\cos^3 x(-\sin x)+4\sin^3 x\cos x\\&=-4\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)\\&=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x\end{aligned}$$

可知在 $[-\pi,\pi]$ 上有驻点 $x=0,\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{4}$. 因

$$y(0)=y(\pm\frac{\pi}{2})=y(\pm\pi)=1,\ \ y(\pm\frac{\pi}{4})=y(\pm\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{2},$$

所以 $y=\cos^4 x+\sin^4 x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2}$.

(7) $y=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $[0,10]$ 上.

解 由

$$\begin{aligned}y'&=\frac{2x(1+x^4)-(1+x^2)4x^3}{(1+x^4)^2}\\&=\frac{-2x(x^4+2x^2-1)}{(1+x^4)^2}\\&=\frac{-2x[(x^2+1)^2-2]}{(1+x^4)^2}\end{aligned}$$

可知驻点有 $0,\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 又因

$$y(0)=1,\ \ y(\sqrt{\sqrt{2}-1})=\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2},\ \ y(10)=\frac{101}{10001},$$

所以 $y=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $[0,10]$ 上的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，最小值为 $\dfrac{101}{10001}$.

(8) $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ 在 $[0,3]$ 上.

解 由

$$y'=\frac{4}{3}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x}}$$

可知 $x=1$ 是唯一驻点. 因

$$y(0)=0,\ \ y(1)=1,\ \ y(3)=\sqrt[3]{9},$$

所以 $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ 在 $[0,3]$ 上的最大值为 $\sqrt[3]{9}$，最小值为 0.

5. 设 $a>0,b>0$，求函数 $f(x)=\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{1-x}$ 在区间 $(0,1)$ 内的最大值和最小值.

解 由 $f'(x)=-\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{(1-x)^2}$ 可知 $x=\dfrac{a}{a+b}$ 是唯一驻点. 又因

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right)=(a+b)^2,\ \ f(0+)=f(1-)=+\infty,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的最小值为 $(a+b)^2$，没有最大值.

6. 试求内接于半径为 R 的球体积最大的圆锥体的高 h.

解　该圆锥体的底面半径为 $r=\sqrt{h(2R-h)}$，体积为

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h).$$

应有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}=\frac{\pi}{3}(4Rh-3h^2)=0,\quad 0<h<2R,$$

故知 $h=\frac{4}{3}R$.

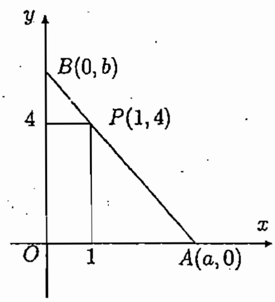
7. 将 8 分成两部分，使它们的立方和为最小.

解　令函数 $f(x)=x^3+(8-x)^3, 0<x<8$，则

$$f'(x)=3x^2-3(8-x)^2=48(x-4).$$

可知 $f(x)$ 有唯一驻点 $x=4$, 且 $f(x)$ 在该点处取得最小值．即 8 被分成两部分都为 4 时立方和最小.

8. 过平面上已知点 $P(1,4)$ 引一条直线，要使它在二坐标轴上的截距为正，且截距之和为最小，求此直线方程.



解　设该直线在 x,y 轴上的截距分别为 a,b，则由右图可知

$$\frac{a-1}{4}=\frac{a}{b}.$$

由此得到 $b=\frac{4a}{a-1}$. 于是截距之和为

$$s=a+\frac{4a}{a-1}=a+4+\frac{4}{a-1},\quad 1<a<+\infty.$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a}=1-\frac{4}{(a-1)^2}=\frac{a^2-2a-3}{(a-1)^2}=\frac{(a+1)(a-3)}{(a-1)^2}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a}=0$ 得唯一驻点 $a=3$. 又因

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}a^2}=\frac{8}{(a-1)^3}\bigg|_{a=3}>0,$$

所以 s 在 $a=3$ 处取最小值．当 $a=3$ 时 $b=6$. 于是所求直线为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$.

9. 从圆形薄片中剪去一扇形，卷起来作成一个漏斗，问剪去扇形的圆心角 θ 是多少时，漏斗的容积最大？

解　设圆形薄片的半径为 R，漏斗的开口半径为 r，则

$$(2\pi-\theta)R=2\pi r,\quad r=R\frac{2\pi-\theta}{2\pi}.$$

令 $\dfrac{2\pi-\theta}{2\pi}=x$，则漏斗的容积为

$$f(x)=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi R^3x^2\sqrt{1-x^2},\quad 0<x<1.$$

那么，$f(x)$ 取最大值时，应有

$$f'(x)=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

可知 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\theta=2\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

10. 证明方程 $x^3-6x^2+9x-10=0$ 只有一个实根.

证 令 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$，则

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3),$$

由此可知连续函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$ 上严格单调增，在区间 $(1,3)$ 上严格单调减. 又

$$f(1)=-6<0,\quad f(3)=-10<0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,3]$ 上没有根，在 $(3,+\infty)$ 上有唯一根. 从而方程只有一个实根.

11. 当 a 为何值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

解 由

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

可知连续函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$ 上严格单调增，在区间 $(1,2)$ 上严格单调减. 因为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$
$$f(1)=5-a,\quad f(2)=4-a,$$

所以为了使 $f(x)$ 恰有两个不同的零点，必需有 $5-a=0$ 或 $4-a=0$，即 $a=5$ 或 $a=4$.

12. 设 $f(x)=nx(1-x)^n$（n 是正整数），试证明 $\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

证 由

$$f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

可知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的驻点 $x=\dfrac{1}{n+1}$，且它是极大值点. 因此在 $[0,1]$ 上函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{n+1}$ 处取最大值. 故有

$$\max_{0\le x\le 1}f(x)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

利用二项式展开定理仿照推导数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 收敛的方法可以证明 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 是严格单调减数列，且容易证明它收敛于 e. 因此有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}>\mathrm{e}.$$

于是有

$$\max_{0\le x\le 1}f(x)<\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域存在直到 $n-1$ 阶导函数，在 x_0 处存在 n 阶导数，且 $f^{(k)}(x_0)=0\ \ (k=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，则

(1) 当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时取极大值，$f^{(n)}(x_0)>0$ 时取极小值；

(2) 当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 处不取极值.

证 (1) 当 n 为偶数，且

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-x_0}<0$$

时，由极限的保号性定理可知，在 x_0 的某去心邻域内，$f^{(n-1)}(x)$ 与 $x-x_0$ 异号，从而在该去心邻域内，有

$$\begin{aligned}f(x)-f(x_0)&=f'(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)}+\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}\\&=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}<0,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 因此 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

同理可证，当 n 为偶数，且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

(2) 当 n 为奇数，且

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x-x_0}<0$$

时，由极限的保号性定理可知，在 x_0 的某去心邻域内，$f^{(n-1)}(x)$ 与 $x-x_0$ 异号，从而在该去心邻域内，有

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}$$

与 $x-x_0$ 异号，其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间. 因此 $f(x)$ 在 x_0 处不取极值.

同理可证，当 n 为奇数，且 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处不取极值.

习 题 3-5

1. 求下列曲线的凹凸区间与拐点:

(1) $y=x^3-6x^2+12x+4$.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 求导得

$$y'=3x^2-12x+12,$$
$$y''=6x-12=6(x-2).$$

由此可知, 在 $(-\infty,2)$ 上, $y''<0$, 曲线为凸; 在 $(2,+\infty)$ 上, $y''>0$, 曲线为凹. 注意到 $y|_{x=2}=12$, 故 $(2,12)$ 为曲线的拐点.

(2) $y=x^2\ln x$.

解 函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 求导得

$$y'=2x\ln x+x,$$
$$y''=2\ln x+3.$$

由此可知, 在 $\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$ 上, $y''<0$, 曲线为凸; 在 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$ 上, $y''>0$, 曲线为凹. 注意到 $y\Big|_{x=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}}=-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3}$, 故 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-3}\right)$ 为曲线的拐点.

(3) $y=(1+x^2)\mathrm{e}^x$.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 求导得

$$y'=(1+2x+x^2)\mathrm{e}^x,$$
$$y''=(3+4x+x^2)\mathrm{e}^x=(x+3)(x+1)\mathrm{e}^x.$$

由此可知, 在 $(-\infty,-3)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上, $y''>0$, 曲线为凹; 在 $(-3,-1)$ 上, $y''<0$, 曲线为凸. 注意到 $y|_{x=-3}=10\mathrm{e}^{-3}$, $y|_{x=-1}=2\mathrm{e}^{-1}$, 故 $(-3,10\mathrm{e}^{-3})$ 和 $(-1,2\mathrm{e}^{-1})$ 为曲线的拐点.

(4) $y=2+(x-4)^{\frac{1}{3}}$.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 求导得

$$y'=\frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}},$$
$$y''=-\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}.$$

由此可知, 在 $(-\infty,4)$ 上, $y''>0$, 曲线为凹; 在 $(4,+\infty)$ 上, $y''<0$, 曲线为凸. 注意到 $y|_{x=4}=2$, 故 $(4,2)$ 为曲线的拐点.

由此可知曲线有三个拐点 $A(-1,-1)$, $B(x_2,y_2)$ 和 $C(x_3,y_3)$, 其中 x_2 和 x_3 是方程 $x^2-4x+1=0$ 的两个根, $y_2=\dfrac{x_2-1}{x_2^2+1}$, $y_3=\dfrac{x_3-1}{x_3^2+1}$. 根据一元二次方程根与系数的关系有

$$x_2+x_3=4,\quad x_2x_3=1.$$

因为过 A,B 两点直线的斜率为

$$\frac{y_2+1}{x_2+1}=\frac{\frac{x_2-1}{x_2^2+1}+1}{x_2+1}=\frac{x_2}{x_2^2+1}=\frac{x_2}{x_2^2+x_2x_3}=\frac{1}{x_2+x_3}=\frac{1}{4},$$

过 A,C 两点直线的斜率为

$$\frac{y_3+1}{x_3+1}=\frac{\frac{x_3-1}{x_3^2+1}+1}{x_3+1}=\frac{x_3}{x_3^2+1}=\frac{x_3}{x_3^2+x_2x_3}=\frac{1}{x_2+x_3}=\frac{1}{4},$$

所以 A,B,C 三点在同一条直线上.

7. 求下列曲线的渐近线:

(1) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$.

解 因为

$$\lim_{x\to\pm2}\frac{x^2}{x^2-4}=\infty,$$

所以曲线有垂直渐近线 $x=2$ 和 $x=-2$. 又因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1,$$

所以曲线有水平渐近线 $y=1$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0,$$

所以曲线无斜渐近线.

(2) $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

解 曲线无水平渐近线和垂直渐近线. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+9}=1,$$

而

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+9}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x}{x^2+9}=0,$$

所以曲线有斜渐近线 $y=x$.

(3) $y=x+\arctan x$.

解 曲线无水平渐近线和垂直渐近线. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\arctan x}{x}\right)=1,$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}(-\arctan x)=-\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}(-\arctan x)=\frac{\pi}{2},$$

所以曲线有斜渐近线 $y=x-\frac{\pi}{2}$ 和 $y=x+\frac{\pi}{2}$.

(4) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

解 曲线无垂直渐近线. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0,$$

所以曲线有水平渐近线 $y=0$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0,$$

所以曲线无斜渐近线.

(5) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解 因为

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty,$$

所以曲线有垂直渐近线 $x=0$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1,$$

所以曲线有水平渐近线 $y=1$. 因为

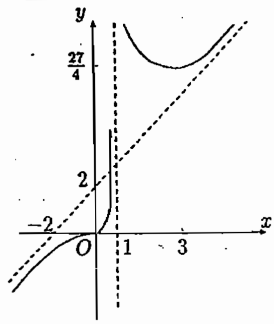
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}=0,$$

所以曲线无斜渐近线.

(6) $y=\sqrt{x^2-1}$.

解 曲线无水平渐近线和垂直渐近线. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=-1,$$



解 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 曲线有垂直渐近线 $x=1$. 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=2,$$

所以曲线有斜渐近线 $y=x+2$. 求导得

$$y'=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

$$y''=\frac{6x}{(x-1)^4}.$$

函数的单调性、极值、凹凸性和拐点分析见下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+		−	0	+
y''	−	0	+		+	+	+
y	↗	拐点	↗		↘	极小	↗

函数有极小值 $y|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$, 曲线有拐点 $(0,0)$. 综合以上讨论作出函数图像.

习 题 3-6

1. 设某商品的平均成本为 $\overline{C}=a_0+a_1x^3-a_2x^2$, 其中 $a_0>0,a_1>0,a_2>0$ 为常数, x 是产量,

(1) 求平均成本的极小值; (2) 求总成本曲线的拐点.

解 由

$$\overline{C}\,'=3a_1x^2-2a_2x=x(3a_1x-2a_2)$$

得在 $(0,+\infty)$ 上有驻点 $x=\dfrac{2a_2}{3a_1}$. 因

$$\overline{C}\,''\Big|_{x=\frac{2a_2}{3a_1}}=(6a_1x-2a_2)\Big|_{x=\frac{2a_2}{3a_1}}=2a_2>0,$$

所以 $\overline{C}$ 在点 $x=\dfrac{2a_2}{3a_1}$ 取极小值, 极小值为

$$\overline{C}\Big|_{x=\frac{2a_2}{3a_1}}=a_0-\frac{4a_2^3}{27a_1^2}.$$

2. 某商品的总成本函数为 $C=1000+3Q$, 需求函数为 $Q=1000-100p$, 其中 p 是商品的单价, 求使利润最大的 p 值.

解 利润函数为

$$L(p)=Qp-C=-100p^2+1300p-4000.$$

由

$$L'(p)=-200p+1300$$

知 $L(p)$ 有唯一的驻点 $p=6.5$. 因 $L''(p)=-200<0$, 所以 $p=6.5$ 是函数 $L(p)$ 的最大值点. 因此当 $p=6.5$ 时利润最大.

3. 某厂全年生产需用材料甲 5170 吨, 每次订购费用为 570 元, 每吨材料甲单价为 600 元, 库存保管费用率为 14.2%, 试求:

(1) 最优订购批量;　(2) 最优订购批次;　(3) 最优进货周期;　(4) 最小总费用.

解 设每批订购 x 吨, 则在最优情况下, 每批材料购回后放在库房内将陆续被取出使用, 至下一批材料到货恰好用完. 因此在库房内存放的材料量平均为 $\frac{x}{2}$ 吨, 且各个购货周期内都是如此. 由此可知, 全年的库存管理费为 $\frac{x}{2}\times 600\times 14.2\%$. 另一方面, 全年的定购次数为 $\frac{5170}{x}$, 从而全年的订购费用为 $\frac{5170\times 570}{x}$. 于是全年的总费用为

$$C(x)=\frac{x}{2}\times 600\times 14.2\%+\frac{5170\times 570}{x}.$$

求导得

$$C'(x)=300\times 0.142-\frac{5170\times 570}{x^2}.$$

令 $C'(x)=0$, 得 $x=263.01$. 不难看出这是 $C(x)$ 的最小值点. 因此, 最优订购批量是 263.01 吨. 由此得到最优订购批次为

$$\frac{5170}{263.01}\approx 19.66次,$$

最优进货周期为

$$\frac{365}{19.66}\approx 18.31天,$$

最小总费用为

$$C(263.01)=22408.74元.$$

4. 某商品的平均成本为 $\overline{C}=1+120x^3-6x^2$,

(1) 求平均成本的极小值;

(2) 求总成本曲线的拐点;

(3) 说明总成本曲线的拐点为边际成本曲线的最低点.

解 (1) 由

$$\overline{C}'(x)=360x^2-12x$$

得函数 $\overline{C}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一驻点 $x=\frac{1}{30}$. 因 $\overline{C}''(x)\Big|_{x=\frac{1}{30}}=720x\Big|_{x=\frac{1}{30}}=24>0$, 所以当 $x=\frac{1}{30}$ 时 $\overline{C}(x)$ 取极小值, 极小值为

$$\overline{C}\Big(\frac{1}{30}\Big)=\frac{449}{450}.$$

(2) 总成本函数为

$$C(x)=x\overline{C}(x)=x+120x^4-6x^3.$$

求导得

$$C'(x)=1+480x^3-18x^2,$$

$$C''(x)=1440x^2-36x=1440x\Big(x-\frac{1}{40}\Big).$$

由此可以看出, 在 $x=\frac{1}{40}$ 的左右两侧 $C''(x)$ 取不同的符号, 而

$$C\Big(\frac{1}{40}\Big)=\frac{1}{40}+\frac{120}{40^4}-\frac{6}{40^3}=\frac{1597}{40^3},$$

所以 $\Big(\frac{1}{40},\frac{1597}{40^3}\Big)$ 是总成本函数的拐点.

(3) 由 $C''(x)=1440x\Big(x-\frac{1}{40}\Big)$ 可以看出, 当 $0<x<\frac{1}{40}$ 时, $C''(x)<0$, 从而 $C'(x)$ 严格单调减. 当 $x>\frac{1}{40}$ 时, $C''(x)>0$, 从而 $C'(x)$ 严格单调增. 因此, $x=\frac{1}{40}$ 是 $C'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值点, 即为边际成本曲线的最低点.

5. 某厂出售一批新酿的名酒, 如果当年 ($t=0$) 就出售, 售后的总收入为 R_0(元), 如果窖藏起来, t 年后再出售, 总收入则为 $R(t)=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$(元), 假定银行的年利率为 r, 并以连续复利计息, 问这批酒窖藏多少年出售可使总收入值最大, 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

解 设窖藏 t 年后售出, 并把所得收益存入银行, 则到 n 年底 (其中 $n>t$) 总收入为

$$R_n(t)=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}e^{r(n-t)}=R_0e^{nr}e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}.$$

求导得

$$R_n'(t)=R_0e^{nr}\Big(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\Big)e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}.$$

令 $R_n'(t)=0$ 得唯一驻点 $t=\frac{1}{25r^2}$. 当 $t<\frac{1}{25r^2}$ 时 $R_n'(t)>0$, 当 $t>\frac{1}{25r^2}$ 时 $R_n'(t)<0$, 因此 $t=\frac{1}{25r^2}$ 是 $R_n(t)$ 的最大值点, 故这批酒窖藏 $t=\frac{1}{25r^2}$ 年出售可使总收入值最大. 当 $r=0.06$ 时的

$$t=\frac{1}{25\times0.06^2}=\frac{1}{0.09}\approx 11\text{年}.$$

注：若最初存入银行本金数为 A, 银行的年利率为 r, 并以连续复利计息，则按照经济学中的计算方法， s 年后本利之和为 Ae^{rs}.

复 习 题 三

1. 填空题：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=$ ________ .

解

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+x\sin x)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{2x(\cos x+x\sin x)}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 设函数 $y=x2^x$ 在 $x=x_0$ 点处取得极小值，则 $x_0=$ ________ .

解 因

$$y'=2^x(1+x\ln 2)=2^x\left(x+\frac{1}{\ln 2}\right)\ln 2,$$

所以当 $x=-\frac{1}{\ln 2}$ 时 $y'=0$, 而当 $x<-\frac{1}{\ln 2}$ 时 $y'<0$, 当 $x>-\frac{1}{\ln 2}$ 时 $y'>0$. 因此当 $x=-\frac{1}{\ln 2}$ 时函数取极小值，即 $x_0=-\frac{1}{\ln 2}$.

(3) 在曲线 $y=-2x^3+6x^2+18x+7$ 上，切线斜率最大点的坐标是 $=$ ________ .

解 曲线在 x 处的切线斜率为

$$y'=-6x^2+12x+18.$$

求导得

$$y''=-12x+12=-12(x-1).$$

因此 $x=1$ 是函数 $y'=-6x^2+12x+18$ 的唯一驻点. 又因 $y''=-12<0$, 所以函数 $y'=-6x^2+12x+18$ 在 $x=1$ 处取最大值. 当 $x=1$ 时， $y=29$. 因此曲线 $y=-2x^3+6x^2+18x+7$ 上切线斜率最大点的坐标是 $(1,29)$.

(4) 函数曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 在 $x>0$ 时的拐点为 ________ .

解 因

$$y'=\frac{2x}{1+x^2},$$

$$y''=2\frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2},$$

所以当 $x=1$ 时 $y''=0$, 且在 $x=1$ 点左右附近 y'' 符号相反. 又 $y|_{x=1}=\ln 2$. 因此曲线的拐点为 $(1,\ln 2)$.

(5) 曲线 $f(x)=xe^{\frac{2}{x}}+1$ 的斜渐近线为 = ________.

解 因

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{2}{x}}+1-x\right)\\&=1+\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)\\&=1+\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{2}{x}=3,\end{aligned}$$

所以曲线的斜渐近线为 $y=x+3$.

(6) $y=3^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 ________.

解 由 $y^{(n)}=3^x(\ln 3)^n$ 知 $y=3^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是

$$\frac{1}{n!}y^{(n)}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n!}(\ln 3)^n.$$

2. 选择题:

(1) 使函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x^2)}$ 适合罗尔定理条件的区间是(　　).

(A) $[0,1]$.　　(B) $[-1,1]$.　　(C) $[-2,2]$.　　(D) $[-\frac{3}{5},\frac{4}{5}]$.

解 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 而在 $x=0$ 处不可导, 因此 B, C, D 都不可选. 在 $(0,1)$ 上 $f(x)$ 可导, 且 $f(0)=f(1)=0$. 因此在 $[0,1]$ 上 $f(x)$ 满足罗尔定理条件. 选 A.

(2) 设函数 $f(x),g(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的可导函数, 且 $f(x)>0,g(x)>0$. 若 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$, 则在 $x\in(a,b)$ 时, 下列不等式中成立的是(　　).

(A) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.　　(B) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.

(C) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(a)}{g(a)}$.　　(D) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$.

解 令 $F(x)=f(x)g(x)$, 则

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0,$$

从而 $F(x)$ 严格单调减, 故当 $x\in(a,b)$ 时有 $F(x)>F(b)$, 即有 $f(x)g(x)>f(b)g(b)$. 选 B.

(3) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=A>0$, 则在点 x_0 处 $f(x)$(　　).

(A) 必有极大值.　　(B) 必有极小值.

(C) 无极值.　　(D) 不能判定是否取得极值.

解 由极限的同号性定理知, 在 x_0 点附近, 当 $x\neq x_0$ 时 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$, 从而 $f(x)>f(x_0)$. 因此在点 x_0 处 $f(x)$ 必有极小值. 选 B.

(4) 若 $3a^2-5b<0$, 则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$(　　).

(A) 无实根.　　(B) 有唯一实根.

(C) 有三个不同实根.　　(D) 有五个不同实根.

解　记 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$, 则问题等价于讨论 $f(x)$ 零点的个数. 求导得

$$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b.$$

这可看成 x^2 的二次函数, 其判别式

$$\Delta=36a^2-60b=12(3a^2-5b)<0.$$

因此 $f'(x)$ 恒大于零, $f(x)$ 严格单调增. 又因

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上只有一个零点. 选 B.

(5) 曲线$y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$(　　).

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有垂直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线, 又有垂直渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\infty,$$

所以曲线有水平渐近线 $y=1$ 和垂直渐近线 $x=0$. 选 D.

3. 解下列各题:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln2}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x\ln2+3^x\ln3}{2^x+3^x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln6}=\sqrt{6}.$$

(2) 在曲线 $y=1-x^2(x>0)$ 上求一点 P_0, 使曲线在点 P_0 处的切线与两坐标轴所围成的三角形面积最小.

解　设 P_0 点的横坐标为 t, 则纵坐标为 $1-t^2$. 因 $y'|_{x=t}=-2t$, 所以切线方程为

$$y-(1-t^2)=-2t(x-t).$$

它与两个坐标轴的交点为 $\left(\frac{1}{2t}+\frac{t}{2},0\right)$ 和 $(0,1+t^2)$. 它与两坐标轴所围成的三角形面积为

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t}+\frac{t}{2}\right)(1+t^2)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+2t+t^3\right).$$

求导得

$$S'(t)=\frac{1}{4}\left(3t^2+2-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1}{4t^2}(3t^2-1)(t^2+1).$$

令 $S'(t)=0$, 在 $(0,+\infty)$ 内得唯一驻点 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 因当 $t<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $S'(t)<0$, 当 $t>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $S'(t)>0$, 所以 $S(t)$ 在 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取最小值. 又当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $1-t^2=\frac{2}{3}$, 故 P_0 点为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$.

(3) 若曲线 $y=a(x^2-3)^2$ 在拐点处的法线正好通过坐标原点, 求系数 a 的值.

解 由

$$\begin{aligned}y'&=4a(x^3-3x),\\ y''&=12a(x^2-1)=12a(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

容易看出当 $x=\pm1$ 时曲线上有拐点 $(1,4a)$ 和 $(-1,4a)$. 因 $y'\big|_{x=\pm1}=\mp 8a$, 所以曲线在拐点处的法线方程为

$$y-4a=\pm\frac{1}{8a}(x\mp1).$$

将 $x=0,y=0$ 代入得

$$-4a=-\frac{1}{8a}.$$

由此得到 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$.

4. 求下列各题的解:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x &\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\left(\sin 2t+\cos t\right)^{\frac{1}{t}}\\ &=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}}\\ &=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}}=e^2.\end{aligned}$$

(2) 求 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的渐近线.

解 曲线无水平渐近线和垂直渐近线. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=\mathrm{e}^{\pi},$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-\mathrm{e}^{\pi}\right)-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\right]\\
&=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1}{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\pi}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\frac{-\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\pi}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\pi}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-\mathrm{e}^{\pi}\\
&=-2\mathrm{e}^{\pi},
\end{aligned}$$

所以曲线有斜渐近线 $y=\mathrm{e}^{\pi}(x-2)$. 又由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=1,$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1\right)-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\right]\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\arctan x}{\frac{1}{x}}-1\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1\\
&=-2,
\end{aligned}$$

所以曲线有斜渐近线 $y=x-2$.

5. 试解下列各题:

(1) 设在 $[1,+\infty)$ 上处处有 $f''(x)\le 0$, 且 $f(1)=2, f'(1)=-3$, 证明在 $[1,+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 仅有一根.

证 对任意 $x\ge 1$, 因为 $f''(x)\le 0$, 所以由泰勒公式有

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2<2-3(x-1)\to-\infty\quad(x\to+\infty),$$

其中 $\xi\in(1,x)$. 再由拉格朗日中值定理及 $f''(x)\le 0$ 得到, 当 $x\ge 1$ 时有

$$f'(x)=f'(1)+f''(\eta)(x-1)<-3,$$

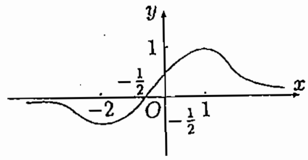
其中 $\eta\in(1,x)$. 从而 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调减. 再注意到 $f(1)=2>0$, 得到 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上只有一个零点, 因此方程 $f(x)=0$ 在 $[1,+\infty)$ 上仅有一个根.

(2) 对 t 的不同取值，讨论函数 $f(x)=\dfrac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t,+\infty)$ 上是否有最大值或最小值，若存在最大值或最小值，求出相应的最大值点与最大值或最小值点与最小值.

解 由

$$f'(x)=-2\frac{(x+2)(x-1)}{(2+x^2)^2}$$

知，在 $(-\infty,-2)$ 上，$f'(x)<0$, $f(x)$ 严格单调减；在 $(-2,1)$ 上，$f'(x)>0$, $f(x)$ 严格单调增；在 $(1,+\infty)$ 上，$f'(x)<0$, $f(x)$ 严格单调减. 在 $x=-2$ 函数取极小值 $f(-2)=-\dfrac{1}{2}$, 在 $x=1$ 函数取极大值 $f(1)=1$. 又



$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad f(-\frac{1}{2})=0,$$

据此可作出函数图像如右图所示. 根据函数图像不难看出，对任何 t, 函数 $f(x)$ 在 $[t,+\infty)$ 上都有最大值，且当 $t\leq 1$ 时 $f(x)$ 在 $[t,+\infty)$ 上的最大值是 1, 当 $t>1$ 时 $f(x)$ 在 $[t,+\infty)$ 上的最大值是 $f(t)=\dfrac{1+2t}{2+t^2}$. 当 $t>-\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $[t,+\infty)$ 上无最小值. 当 $t\leq-\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $[t,+\infty)$ 上有最小值. 此时若 $-2<t\leq-\dfrac{1}{2}$, 则最小值为 $f(t)=\dfrac{1+2t}{2+t^2}$; 若 $-\infty<t\leq-2$, 则最小值为 $f(-2)=-\dfrac{1}{2}$.

第四章 不定积分

习 题 4-1

1. 填空题:

(1) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x =$ ________.

解 $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$

(2) 设 $f(x) = 2 + \sin x^2$, 则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] =$ ________.

解 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\,\mathrm{d}x = (2 + \sin x^2)\,\mathrm{d}x.$

(3) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$, 则 $\int f'(x)\,\mathrm{d}x =$ ________.

解 由 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$ 得

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^2 + C) = x\mathrm{e}^x.$$

于是

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C = x\mathrm{e}^x + C.$$

2. 求下列不定积分:

(1) $\int x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x.$

解
$$\int x\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C.$$

(2) $\int (2^x + 5^x)\,\mathrm{d}x.$

解
$$\int (2^x + 5^x)\,\mathrm{d}x = \int 2^x\,\mathrm{d}x + \int 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

(3) $\int \frac{5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解
$$\int \frac{5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 5\tan x + C.$$

(4) $\int \frac{2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$

解
$$\int \frac{2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 2\arctan x + C.$$

(5) $\int \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\arcsin x + C.$$

(6) $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x &= \int \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)\mathrm{d}x\\ &= \sin\frac{\pi}{4}\int \cos x\,\mathrm{d}x + \cos\frac{\pi}{4}\int \sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \sin\frac{\pi}{4}(-\sin x) + \cos\frac{\pi}{4}\cos x + C\\ &= \cos\left(\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C.\end{aligned}$$

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

(2) $\int 3^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int 3^x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int (3\mathrm{e})^x\,\mathrm{d}x = \frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln(3\mathrm{e})} + C = \frac{3^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 3} + C.$$

(3) $\int \frac{5^x - 2^x}{3^x}\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{5^x-2^x}{3^x}\,\mathrm{d}x = \int \left[\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right]\mathrm{d}x = \frac{(\frac{5}{3})^x}{\ln\frac{5}{3}} - \frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln\frac{2}{3}} + C.$$

(4) $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = -\cot x - x + C.$$

(5) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x + C.$$

(6) $\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

解 $$\int 2\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int (1+\cos x)\,\mathrm{d}x = x + \sin x + C.$$

(7) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\cot x-\tan x+C.\end{aligned}$$

(8) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\,\mathrm{d}x\\&=\int(\cos x+\sin x)\,\mathrm{d}x\\&=\sin x-\cos x+C.\end{aligned}$$

(9) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(\tan x+x)+C.\end{aligned}$$

(10) $\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x\\&=\tan x-\cot x+C.\end{aligned}$$

4. 一曲线经过坐标原点，且在曲线上任意点 (x,y) 处的切线斜率等于 $3x^2$，求这条曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$，则 $f'(x)=3x^2$. 由此得到

$$f(x)=\int 3x^2\,\mathrm{d}x=x^3+C.$$

代入条件 $f(0)=0$ 得 $c=0$. 于是这条曲线方程为 $y=x^3$.

5. 一个运动物体的速度为 $v=\frac{1}{1+t^2}-t$，当 $t=0$ 时，物体位于坐标原点，求物体的路程与时间 t 的函数关系.

解 由已知得

$$s=\int\left(\frac{1}{1+t^2}-t\right)\mathrm{d}t=\arctan t-\frac{1}{2}t^2+C.$$

代入体积 $s\Big|_{t=0}=0$ 得 $C=0$. 于是 $s=\arctan t-\dfrac{1}{2}t^2$.

6. 设在某一区间 I 上, $F(x),G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数, 证明对任意的 $a,b\in I$, 均有 $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.

证 由已知得

$$F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

从而

$$F(x)-G(x)=\int(F'(x)-G'(x))\,\mathrm{d}x=C.$$

于是

$$F(b)-G(b)=F(a)-G(a)=C.$$

由此得到 $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.

7. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$, 求 $f(x)$.

解 由已知得

$$f'(\sin^2 x)=\cos^2 x=1-\sin^2 x.$$

因此 $f'(x)=1-x$. 由此得到

$$f(x)=\int(1-x)\,\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

8. 求满足下列条件的函数 $F(x)$:

(1) $F'(x)=2x$, 且 $F(0)=1$.

解

$$F(x)=\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C.$$

代入条件 $F(0)=1$ 得 $C=1$. 于是 $F(x)=x^2+1$.

(2) $F'(x)=(3x-5)(1-x)$, 且 $F(1)=3$.

解

$$\begin{aligned}F(x)&=\int(3x-5)(1-x)\,\mathrm{d}x\\&=\int(-3x^2+8x-5)\,\mathrm{d}x\\&=-x^3+4x^2-5x+C.\end{aligned}$$

代入条件 $F(1)=3$ 得 $C=5$. 于是 $F(x)=-x^3+4x^2-5x+5$.

(3) $F'(x)=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$, 且 $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

解 由已知得

$$F'(x)=1-\sin x,$$

从而

$$F(x)=\int(1-\sin x)\,\mathrm{d}x=x+\cos x+C.$$

代入条件 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 得 $C=-\frac{\pi}{2}$. 于是 $F(x)=x+\cos x-\frac{\pi}{2}$.

习 题 4-2

1. 求下列不定积分:

(1) $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}(-x^2)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C.$$

(2) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(3) $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(1+x^2)=\sqrt{1+x^2}+C.$$

(4) $\int\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int 2^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2}+C.$$

(5) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

(6) $\int\sin 2x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int\sin 2x\,\mathrm{d}x=2\int\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=2\int\sin x\,\mathrm{d}(\sin x)=\sin^2 x+C.$$

(7) $\int\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x)=\ln|\ln x|+C.$$

(8) $\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \tan x - \frac{1}{\cos x} + C.$$

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \sin^3 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int (\cos^2 x - 1)\cos^5 x\,\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

(2) $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right]$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

(3) $\int \sin 3x \cos 5x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \sin 3x \cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

(4) $\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x}\,\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= -\int \left(\frac{1}{\cos^5 x} - \frac{2}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x}\right)\mathrm{d}(\cos x)$$
$$= \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C.$$

(5) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int\left(\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}+1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + x - \tan x + C.$$

(6) $\int \frac{\csc x\cot x}{\sqrt{1-\csc x}}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{\csc x\cot x}{\sqrt{1-\csc x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1-\csc x)}{\sqrt{1-\csc x}} = 2\sqrt{1-\csc x}+C.$$

(7) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2}.$

解

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2} \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2-t+2}$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{1}{2}}{t^2-t+2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(t^2-t+2)}{t^2-t+2}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}\ln(t^2-t+2)+\frac{\sqrt{7}}{14}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{7}}+C$$
$$= \frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{\sqrt{7}}{14}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}+C.$$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1}.$

解 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{3x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C.$$

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt[3]{x+1}} \int\frac{3t^2}{1+t}\mathrm{d}t$$
$$= 3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 3\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln|1+t|\right)+C$$
$$= 3\left[\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x+1)^{\frac{1}{3}}+\ln\left|1+(x+1)^{\frac{1}{3}}\right|\right]+C.$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\mathrm{d}x.$

解 $$\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-(x+1)^2}}\,dx = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx.$

解法 1　作变换 $t=\sqrt{x^2-4}$, 则 $x^2=t^2+4$, $x\,dx=t\,dt$, 代入积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= \int \frac{t^2}{t^2+4}\,dt\\ &= \int \left(1-\frac{4}{t^2+4}\right)dt\\ &= t-2\arctan\frac{t}{2}+C\\ &= \sqrt{x^2-4}-2\arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+C.\end{aligned}$$

解法 2　当 $x>2$ 时，作变换 $x=\dfrac{2}{\cos t}$, 其中 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则 $t=\arccos\dfrac{2}{x}$, $dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$. 代入积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= 2\int \tan^2 t\,dt = 2\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt\\ &= 2(\tan t - t)+C = \sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{x}+C.\end{aligned}$$

当 $x<-2$ 时，作变换 $x=\dfrac{2}{\cos t}$, 其中 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 则 $t=\arccos\dfrac{2}{x}$, $dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$. 代入积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= -2\int \tan^2 t\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 t}\right)dt\\ &= 2(t-\tan t)+C.\end{aligned}$$

因为此时 $t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 所以 $\tan t<0$, 且

$$-2\tan t = 2\sqrt{\tan^2 t} = \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4} = \sqrt{x^2-4}.$$

再注意到 $\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha$, 得到 $t=\arccos\dfrac{2}{x}=\pi-\arccos\dfrac{2}{-x}$. 于是当 $x<-2$ 时

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-4}+2\pi-2\arccos\frac{2}{-x}+C.$$

综合以上结果得到

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-4}-2\arccos\frac{2}{|x|}+C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx.$

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \tan t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\tan t} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}\\ &= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C.\end{aligned}$$

4. 设 $f'(x) + xf'(-x) = x$, 求 $f(x)$.

解　由已知得 $f'(-x) - xf'(x) = -x$, 由此进一步得到 $xf'(-x) = x^2 f'(x) - x^2$. 代入已知等式得

$$f'(x) = \frac{x+x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \arctan x + C.$$

5. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.\end{aligned}$$

6. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x &= \int x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

(2) $\int (x^2+1)\ln x \,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int (x^2+1)\ln x \,\mathrm{d}x &= \int \ln x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{3}x^2+1\right)\mathrm{d}x\\ &= \left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\ln x - \frac{1}{9}x^3 - x + C.\end{aligned}$$

(3) $\int \arctan x \,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \arctan x \,\mathrm{d}x &= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

(4) $\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})\\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\,\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})\\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2) + C.\end{aligned}$$

(5) $\int x^2\cos x \,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}(\sin x)\\ &= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= x^2\sin x - 2\int x\,\mathrm{d}(-\cos x)\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,\mathrm{d}x\\ &= (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C.\end{aligned}$$

(6) $\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int x^2 2^x\,dx &= \int x^2\,d\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)\\ &= \frac{1}{\ln 2}x^2 2^x - \frac{2}{\ln 2}\int x2^x\,dx\\ &= \frac{1}{\ln 2}x^2 2^x - \frac{2}{\ln x}\int x\,d\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)\\ &= \frac{1}{\ln 2}x^2 2^x - \frac{2}{\ln^2 2}x2^x + \frac{2}{\ln^2 2}\int 2^x\,dx\\ &= \frac{1}{\ln 2}x^2 2^x - \frac{2}{\ln^2 2}x2^x + \frac{2}{\ln^3 2}2^x + C.\end{aligned}$$

(7) $\int x\sec^2 x\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int x\sec^2 x\,dx &= \int x\,d(\tan x)\\ &= x\tan x - \int \tan x\,dx\\ & x\tan x + \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

(8) $\int \ln(\sin x)\cot x\,dx$.

解 $$\int \ln(\sin x)\cot x\,dx = \int \ln(\sin x)\,d(\ln(\sin x)) = \frac{1}{2}\ln^2(\sin x) + C.$$

7. 选择适当方法，求下列不定积分：

(1) $\int \sin(\ln x)\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int \sin(\ln x)\,dx &= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx\\ &= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx.\end{aligned}$$

由此解得

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

(2) $\int e^{4x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$.

解 令 $u=\sqrt{1+e^{2x}}$, 则 $u^2=1+e^{2x}$, $e^{2x}\,dx = u\,du$. 于是

$$\begin{aligned}\int e^{4x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx &= \int (u^2-1)u^2\,du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C\\ &= \frac{1}{5}(1+e^{2x})^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

(3) $\int \sin 2x\sin x\,dx$.

解
$$\int \sin 2x \sin x \, dx = 2\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{2}{3}\sin^3 x + C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx.$

解　令 $t = \arctan x$, 则 $x = \tan t$, $dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\, dt$. 于是

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = \int e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)e^t + C$$
$$= \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\arctan x} + C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\, dx.$

解
$$\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\, dx = \int x \, d\left(-\frac{1}{2\sin^2 x}\right)$$
$$= -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}x\csc^2 x - \frac{1}{2}\cot x + C.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx.$

解
$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx = -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$
$$= -e^{-x}\arcsin e^x - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2 - 1}}$$
$$= -e^{-x}\arcsin e^x - \ln\left(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1}\right) + C$$
$$= x - e^{-x}\arcsin e^x - \ln\left(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}\right) + C.$$

(7) $\displaystyle\int x\ln(4+x^4)\, dx.$

解
$$\int x\ln(4+x^4)\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - \frac{1}{2}\int \frac{4x^5}{4+x^4}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4) - \int \left(1 - \frac{4}{4+x^4}\right) d(x^2)$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln(4+x^4) - x^2 + 2\arctan\frac{x^2}{2} + C.$$

(8) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \arcsin x\,\mathrm{d}\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \mathrm{d}x\\ &= x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C.\end{aligned}$$

8. 求解下列各题:

(1) 设 $f(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$, 求 $\displaystyle\int xf'(x)\,\mathrm{d}x$.

解　由已知得

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x}.$$

于是

$$\int xf'(x)\,\mathrm{d}x = xf(x) - \int f(x)\,\mathrm{d}x = \cos x - \frac{2}{x}\sin x + C.$$

(2) 已知 $f'(\mathrm{e}^x) = 1 + x$, 求 $f(x)$.

解　由已知得 $f'(x) = 1 + \ln x$. 于是

$$f(x) = \int (1+\ln x)\,\mathrm{d}x = x + x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x + C.$$

(3) 已知 $f(x)$ 具有一阶连续的导数, 求 $\displaystyle\int f'(2x)\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int f'(2x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=2x} \int \frac{1}{2}f'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}f(u) + C = \frac{1}{2}f(2x) + C.$$

9. 已知 $f'(\sin t) = \cos 2t + \tan^2 t$, 求 $f(x)$, 其中 $0 < x < 1$.

解　由

$$f'(\sin t) = \cos 2t + \tan^2 t = -2\sin^2 t + \frac{1}{1-\sin^2 t}$$

得到

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{1}{1-x^2}.$$

于是

$$f(x) = \int \left(-2x^2 + \frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{2}{3}x^3 + C.$$

10. 推导下列积分的递推公式:

(1) $I_n=\int x^n e^{-x}\,dx,\quad n\in\mathbf{N}.$

解

$$I_n=\int x^n\,d(-e^{-x})=-x^ne^{-x}+n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx=-x^ne^{-x}+nI_{n-1}.$$

(2) $I_n=\int(\ln x)^n\,dx,\quad n\in\mathbf{N}.$

解

$$I_n=x(\ln x)^n-n\int(\ln x)^{n-1}\,dx=x(\ln x)^n-nI_{n-1}.$$

习　题　4－3

1. 计算下列不定积分:

(1) $\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx.$

解

$$\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx=\int\left(\frac{11}{(x-2)^3}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx$$
$$=-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}+C=\frac{5-8x}{2(x-2)^2}+C.$$

(2) $\int\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx.$

解

$$\int\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$$
$$=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln|x-2|+C.$$

(3) $\int\frac{x+1}{(x^2-x+1)^2}\,dx.$

解

$$\int\frac{x+1}{(x^2-x+1)^2}\,dx$$
$$=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{(x^2-x+1)^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)^2}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}+\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{2}}+C$$
$$=\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{16}{x^2+4}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$= x+\frac{1}{3}\arctan x - \frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

2. 计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$. 于是

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \int \frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x$.

解 令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$. 于是

$$\int \frac{1}{\sin x+\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}t^2+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx$.

解
$$\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx = \ln|\sin x+\cos x| + C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\tan x}\,dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\tan x}\,dx &\xlongequal{t=\tan x} \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1-t}{1+t^2}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\ln(1+t^2) + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+\tan x) - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x) + \frac{1}{2}x + C\\ &= \frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x| + \frac{1}{2}x + C.\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx$.

解　令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 则 $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. 于是
$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t+1| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + C.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx &\xlongequal{t=\tan x} \int \frac{1}{t^2+4}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2} + C.\end{aligned}$$

3. 计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-4x}}{x}\,dx$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{3-4x}}{x}\,dx &\xlongequal{t=\sqrt{3-4x}} \int \frac{-2t^2}{3-t^2}\,dt\\ &= 2\int\left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)dt\\ &= 2\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right) + C\\ &= 2\sqrt{3-4x} + \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3-4x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-4x}+\sqrt{3}}\right| + C.\end{aligned}$$

(2) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \int \frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} \mathrm{d}t$$
$$= 2\int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

(3) $\int x\sqrt[3]{2+x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int x\sqrt[3]{2+x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt[3]{2+x}} \int (3t^6-6t^3)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{14}t^4(2t^3-7)+C$$
$$= \frac{3}{14}(2+x)^{\frac{4}{3}}(2x-3)+C.$$

(4) $\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{1+x}} \int 2t\frac{t-1}{t+1} \mathrm{d}t$$
$$= \int \left(2t-4+\frac{4}{t+1}\right) \mathrm{d}t$$
$$= t^2-4t+4\ln(t+1)+C$$
$$= x-4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}+1)+C.$$

(5) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=\sqrt[6]{x}} \int \frac{6t^6}{t-1} \mathrm{d}t$$
$$= 6\int \left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right) \mathrm{d}t$$
$$= t^6+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C$$
$$= x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C.$$

(6) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} \mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt[6]{x}} \int \frac{6}{t(t+1)}\mathrm{d}t$$
$$= 6\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 6\ln\frac{t}{t+1}+C$$
$$= 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}+C.$$

4. 选取适当的方法，计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x.$

解
$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^6+1}\mathrm{d}(x^3) = \frac{1}{3}\arctan x^3 + C.$$

(2) $\int \frac{1}{x(x^7+1)}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{1}{x(x^7+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int \frac{1}{x^7(x^7+1)}\mathrm{d}(x^7)$$
$$= \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{x^7}-\frac{1}{x^7+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right|+C.$$

(3) $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{x}-x-2\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x+C.$$

(4) $\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\tan x}+1\right)\mathrm{d}(\tan x)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|\tan x|+\tan x)+C.$$

(5) $\int \frac{1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

(6) $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\sin t} \int \frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}+1\right)} \\ &= \int \frac{-\mathrm{d}(\cot t)}{\cot^2 t + 2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\cot t}{\sqrt{2}} + C \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x} + C.\end{aligned}$$

(7) $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2}\int (2x-x)\sqrt{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + \int\sqrt{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}(x-1) \\ =& \frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x+2} \\ &+ \frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}) + C.\end{aligned}$$

(8) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{(1-x)^{100}} - \frac{2}{(1-x)^{99}} + \frac{1}{(1-x)^{98}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{99}(1-x)^{-99} - \frac{1}{49}(1-x)^{-98} + \frac{1}{97}(1-x)^{-97} + C.\end{aligned}$$

复 习 题 四

1. 填空题：

(1) 设 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，且 $f'(x)+xf'(-x)=x$，则 $f(x)=$ ________ .

解　由已知得 $f'(-x)-xf'(x)=-x$, 由此进一步得到 $xf'(-x)=x^2f'(x)-x^2$. 代入已知等式得

$$f'(x)=\frac{x+x^2}{1+x^2}=1+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}.$$

于是

$$f(x)=x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x+C.$$

(2) 已知 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ________ .

解　由已知条件得

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

于是

$$\int\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(3) 设 $f(x)$ 的原函数为 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, 则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________ .

解　由已知条件得

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

于是

$$\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$$

(4) 若 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 则不定积分 $\int \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x=$ ________ .

解　因为

$$\int \mathrm{e}^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f(x)-\int \mathrm{e}^x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int \mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x f(x).$$

2. 选择题:

(1) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为 (　　).

(A) $1+\sin x$.　　(B) $1-\sin x$.

(C) $1+\cos x$.　　(D) $1-\cos x$.

解 由 $f'(x)=\sin x$ 得

$$f(x)=\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C_1.$$

由此又得

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\int(-\cos x+C_1)\,\mathrm{d}x=-\sin x+C_1x+C_2.$$

取 $C_1=0, C_2=1$, 得到 $f(x)=1-\sin x$. 选 B.

(2) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$, 则 $\int \mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=($　　$)$.

(A) $F(\mathrm{e}^x)+C$. 　　(B) $-F(\mathrm{e}^{-x})+C$.

(C) $F(\mathrm{e}^{-x})+C$. 　　(D) $-F(\mathrm{e}^x)+C$.

解

$$\int \mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x=-\int f(\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-F(\mathrm{e}^{-x})+C.$$

选 B.

(3) 满足条件 $f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$, 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ 的函数 $f(x)$ 是 (　　).

(A) $x+\cos x-\frac{\pi}{2}$. 　　(B) $x+\cos x+\frac{\pi}{2}$.

(C) $x-\cos x+\frac{\pi}{2}$. 　　(D) $x-\cos x-\frac{\pi}{2}$.

解

$$f(x)=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int(1+\sin x)\,\mathrm{d}x=x-\cos x+C.$$

代入条件 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ 得 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是 $f(x)=x-\cos x+\frac{\pi}{2}$. 选 C.

(4) 若 $I_n=\int\sec^n x\mathrm{d}x$, 则 I_n 的递推公式为 $I_n=($　　$)$.

(A) $\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x-\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$. 　　(B) $\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

(C) $\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x-\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$. 　　(D) $\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

解 因为

$$\begin{aligned}I_n&=\int\sec^n x\,\mathrm{d}x=\int\sec^{n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)\\&=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int\sec^n x\sin^2 x\,\mathrm{d}x\\&=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)\int\sec^n x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x.\\&=\sec^{n-2}x\tan x-(n-2)I_n+(n-2)I_{n-2},\end{aligned}$$

所以

$$I_n=\frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

选 D.

(5) 设 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，当 $f'(x)$ 及 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 均连续时，$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x$=(　　).

(A) $xf(x)-F[f^{-1}(x)]+C$.　　(B) $xf(x)+F[f^{-1}(x)]+C$.

(C) $xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+C$.　　(D) $xf^{-1}(x)+F[f^{-1}(x)]+C$.

解

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{x=f(y)} \int yf'(y)\,\mathrm{d}y = yf(y)-\int f(y)\,\mathrm{d}y\\ &= yf(y)-F(y)+C = xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.\end{aligned}$$

选 C.

(6) $\int \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$=(　　).

(A) $-\mathrm{e}^{-|x|}+C$.　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}+C$.

(C) $\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}, & x\geq 0\\ \mathrm{e}^{x}, & x<0\end{cases}$.　　(D) $\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geq 0\\ \mathrm{e}^{x}-2+C, & x<0\end{cases}$.

解

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, & x\geq 0,\\ \mathrm{e}^{x}+C_2, & x<0.\end{cases}$$

因为原函数在 $x=0$ 点连续，所以有

$$-1+C_1=1+C_2.$$

由此得到 $C_2=-2+C_1$. 于是

$$\int \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geq 0,\\ \mathrm{e}^{x}-2+C, & x<0.\end{cases}$$

选 D.

3. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= -\frac{1}{x}\sqrt{2-x^2}-\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= 2\int \tan\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}(\sqrt{x-1})\\ &= -2\ln|\cos\sqrt{x-1}\,| + C.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int 10^{2\arccos x}\,\mathrm{d}(2\arccos x)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{10^{2\arccos x}}{\ln 10} + C.\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{t=\sqrt{x^2-9}} \int \frac{1}{(t^2+9)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{18}\Big[\frac{t}{t^2+9} + \int \frac{1}{t^2+9}\,\mathrm{d}t\Big]\\ &= \frac{1}{18}\Big[\frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big] + C\\ &= \frac{1}{18}\Big[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + \frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\Big] + C.\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int x^2\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int x^2\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int x^2(1-\cos x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}x^3 - x^2\sin x + 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x\Big)\\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\sin x - x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

(6) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int x\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)\\ &= -\frac{x}{\sin x} + \int 1\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{x}{\sin x} + \ln|\csc x - \cot x| + C\\ &= -\frac{x}{\sin x} + \ln\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| + C.\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{\sin x - 5} - \frac{1}{\sin x - 1}\Big)\,\mathrm{d}(\sin x)$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x} + C.$$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \Big(\frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{3-\sin x}\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2}{3t_2^2t+3}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{2})}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{2}{3}\int \mathrm{d}(t-\frac{1}{3})(t-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3t-1}{2\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\Big(2\tan\frac{x}{2}-1\Big)\right] - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(3\tan\frac{x}{2}-1\Big)\right] + C.$$

(9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x+1}} 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1}\Big)\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\ln|t-1| - \int \frac{\mathrm{d}(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})}{(t=\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$= 2\ln|t-1| - \ln(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= 2\ln|\sqrt{x+1}-1| - \ln\Big(x+2+\sqrt{x+1}\Big) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(10) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt{x}} 2\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t + C = 2(\sqrt{x}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + C.$$

4. 设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\ln t} \int \frac{f(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{t}\ln(1+t) + \int \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{t}\ln(1+t) + \ln t - \ln(1+t) + C$$
$$= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

5. 设 $F'(x)=f(x)$, 当 $x\geq 0$ 时, 有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$, 且 $F(0)=1, F(x)\geq 0$, 求 $f(x)\ \ (x\geq 0)$.

解 由已知条件得 $F'(x)F(x)=\sin^2 2x$. 积分得

$$\frac{1}{2}F^2(x) = \frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

代入条件 $F(0)=1$ 得 $C=\frac{1}{2}$. 从而

$$F(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + 1}\ .$$

于是

$$f(x) = \frac{\sin^2 2x}{F(x)} = \frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + 1}}.$$

6. 证明下列递推公式 $(n>1)$:

(1) $I_n = \int \tan^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1} x - I_{n-1}$.

证

$$I_n = \int \tan^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int \tan^{2n-2} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1} x - \int \tan^{2n-2} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n-1}\tan^{2n-1} x - I_{n-1}.$$

(2) $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$.

证

$$I_n = \int \frac{1}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^{n-1} x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{n-1}\int \cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right) + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} x}$$
$$= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^{n-2} x}$$
$$= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$$

7. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2}+C.$$

(2) $\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x &= \int (1-\ln x)\,\mathrm{d}(\frac{1}{x})\\ &= \frac{1-\ln x}{x}+\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{x}\ln x + C.\end{aligned}$$

(3) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)\mathrm{d}x &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

(4) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int \arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}\,)\\ &= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}\\ &= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}+C.\end{aligned}$$

(5) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x &= -\int \ln\sin x\,\mathrm{d}(\cot x)\\ &= -\cot x\ln\sin x + \int \cot^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= -\cot x\ln\sin x + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\mathrm{d}x\\ &= -x-\cot x(1+\ln\sin x)+C.\end{aligned}$$

(6) $\int \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx \xlongequal{t=e^x} \int \frac{dt}{t(1+t)^2}$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt$$
$$= \ln t - \ln(1+t) + \frac{1}{1+t} + C$$
$$= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C.$$

(7) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$

解
$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = 2\int x\,d\left(\sqrt{1+e^x}\right)$$
$$= 2x\sqrt{1+e^x} - 2\int \sqrt{1+e^x}\,dx$$
$$= 2x\sqrt{1+e^x} - 4\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt \qquad \left(t=\sqrt{1+e^x}\right)$$
$$= 2x\sqrt{1+e^x} - 4\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right) dt$$
$$= 2x\sqrt{1+e^x} - 4t - 2\ln\frac{t-1}{t+1} + C$$
$$= 2\sqrt{1+e^x}\,x - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C.$$

(8) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,dx.$

解
$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\arctan x\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx$$
$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

(9) $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\arctan x\,dx.$

解
$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\arctan x\,dx$$
$$= \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,dx$$
$$= \int \arctan x\,d\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) + \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= \frac{1}{3}(x^3-3x)\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3-3x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= \frac{1}{3}(x^3-3x)\arctan x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{4x}{1+x^2}\right) dx + \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$
$$= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}(x^2-3)x\arctan x + \frac{1}{2}\arctan^2 x + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C.$$

(10) $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx &= \int e^{2x}(\tan^2 x+2\tan x+1)\,dx\\ &= \int e^{2x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\tan x\right)dx\\ &= \int d\left(e^{2x}\tan x\right)=e^{2x}\tan x+C.\end{aligned}$$

8. 已知 $f(x)=|x-1|$, 求其满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$.

解

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-x+C_1, & x\geq 1,\\ -\frac{1}{2}x^2+x+C_2, & x<1.\end{cases}$$

因为 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $F(x)=1$, 所以

$$\frac{1}{2}-1+C_1=-\frac{1}{2}+1+C_2=1.$$

由此得到 $C_1=\frac{3}{2}, C_2=\frac{1}{2}$. 因此

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}, & x\geq 1,\\ x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & x<1.\end{cases}$$

9. 已知 $f'(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 0,\\ \sin x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

解 由已知得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C_1, & x\leq 0,\\ -\cos x+C_2, & x>0.\end{cases}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $C_1=-1+C_2$, 即 $C_2=C_1+1$. 于是

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\leq 0,\\ -\cos x+C+1, & x>0.\end{cases}$$

第五章 定积分及其应用

习 题 5－1

1. 用定积分计算 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数 x^2 是 $[0,1]$ 上的连续函数，故定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ 存在. 将 $[0,1]$ n 等分，记 $x_0=0, x_1=\frac{1}{n},\cdots,x_{n-1}=\frac{1}{n-1},x_n=1$, 则 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$. 利用定积分定义，有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. 把下列各题的极限表示成定积分:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\cdot\frac{1}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{n}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{2^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\frac{n^2}{n^2}}}\right)\cdot\frac{1}{n}\\ &=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dzx.\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^p}{n^p}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dzx.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\left(\frac{i}{n}\pi\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 应用导数的几何意义求下列定积分的值：

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 被积函数是一个非负的连续函数，由导数的几何意义，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示 xOy 平面上半圆型区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2, y\ge 0\}$ 的面积. 由圆的面积公式，有

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2=\frac{\pi}{2}a^2.$$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x$.

解 积分区间关于原点对称，而且被积函数是一个奇函数. 由定积分的几何意义可知

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,\mathrm{d}x=0.$$

4. 不计算积分的值，比较下列各组定积分的大小：

(1) $\displaystyle\int_3^4\ln x\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_3^4\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 因为当 $x\in[3,4]$ 时， $\ln x>1$, 故 $\ln x<\ln^2 x$, 因此

$$\int_3^4\ln x\,\mathrm{d}x<\int_3^4\ln^2 x\,\mathrm{d}x.$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin x\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^1 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 当 $x\in(0,1)$ 时， $x>\sin x$, 故 $x^2\sin x>x\cdot\sin x\cdot\sin x$, 因此

$$\int_0^1 x^2\sin x\,\mathrm{d}x>\int_0^1 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

(3) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_0^1(1+x)\,\mathrm{d}x$.

解 当 $x\in(0,1)$ 时

$$\mathrm{e}^{-1}\le\mathrm{e}^{-x}\le 1,\quad 1\le 1+x\le 2,$$

故

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x<\int_0^1(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) $\int_1^{\mathrm{e}}(x-1)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x$.

解 由 Taylor 公式，对于任意的 $x\in(1,\mathrm{e})$，总能找到存在 $\xi\in(1,\mathrm{e})$，使得

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(\xi-1)^2.$$

由此可知当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，有 $\ln x<x-1$，故

$$\int_1^{\mathrm{e}}(x-1)\,\mathrm{d}x>\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x.$$

(5) $\int_0^1\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

解 当 $x\in(0,1)$ 时，由 Taylor 公式，总能找到 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)=-\frac{1}{2}\xi^2,$$

故 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$，于是

$$\int_0^1\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x<\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

(6) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x$.

解 将函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像右移两个单位得函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$，利用定积分的几何意义，有

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}\mathrm{d}x=\int_0^1 3^{2-x}\,\mathrm{d}x.$$

而在 $(0,1)$ 上，$3^x<3<3^{2-x}$，故

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x\mathrm{d}x>\int_0^1 3^x\,\mathrm{d}x.$$

5. 利用估值定理，估计下列积分得值：

(1) $I=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解 由于当 $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$ 时，$x\arctan x$ 是增函数，故当 $x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$ 时 $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi\le x\arctan x\le\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，而积分区间的长度为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$，故

$$\frac{1}{9}\pi\le I\le\frac{2}{3}\pi.$$

(2) $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{10+3\cos x}$.

解　当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$7\le 10+3\cos x\le 13$, 而积分区间的长度为 2π, 故

$$\frac{2}{13}\pi\le I\le\frac{2}{7}\pi.$$

(3) $I=\int_1^4(x^2-3x+2)\,\mathrm{d}x$.

解　由于 $x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, 故当 $x\in[1,4]$ 时，x^2-3x+2 的最大值为 6, 最小值为 $-\frac{1}{4}$. 而积分区间长度为 3, 故

$$-\frac{3}{4}\le I\le 18.$$

(4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解　在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上，$\mathrm{e}^{\sin x}$ 是增函数，故 $1\le\mathrm{e}^{\sin x}\le\mathrm{e}$, 因此

$$\frac{\pi}{2}\le I\le\frac{\mathrm{e}\pi}{2}.$$

(5) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

解　由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\left(\sin x-x\cos x\right),$$

而 $\sin x-x\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上是增函数，故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x-x\cos x\ge 0$. 因此 $\frac{\sin x}{x}$ 是减函数，故当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时

$$\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}\le 2\frac{\sqrt{2}}{\pi},$$

从而

$$\frac{1}{2}\le I\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) $I=\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{5-x}{9-x^2}\right)=-\frac{1}{(x^2-9)^2}\left(x^2-10x+9\right),$$

故当 $x\in[0,2]$ 时

$$\frac{1}{2}\le\frac{5-x}{9-x^2}\le\frac{3}{5},$$

因此

$$1 \le I \le \frac{6}{5}.$$

6. 证明下列不等式：

(1) $\frac{\pi}{2} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$

证 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，

$$\frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x \le 1,$$

故

$$1 \le \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} \le \sqrt{2},$$

所以

$$\frac{\pi}{2} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(2) $\frac{48}{5} \le \int_0^3 \frac{16-x^2}{5-x}\,\mathrm{d}x \le 12.$

证 由于

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{16-x^2}{5-x}\right) = \frac{1}{(x-5)^2}\left(x^2-10x+16\right),$$

所以当 $x \in [0,2]$ 时，$\frac{16-x^2}{5-x}$ 是增函数，当 $x \in [2,3]$ 时，$\frac{16-x^2}{5-x}$ 是减函数，由此易知 $\frac{16-x^2}{5-x}$ 在区间 $[0,3]$ 的最大值为 4, 最小值为 $\frac{16}{5}$. 再注意到积分区间的长度为 3, 故

$$\frac{48}{5} \le \int_0^3 \frac{16-x^2}{5-x}\,\mathrm{d}x \le 12.$$

(3) $\frac{3}{\mathrm{e}^4} \le \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le 3.$

证 由复合函数的性质，当 $x \in [-1,0]$ 时，e^{-x^2} 是增函数，当 $x \in [0,2]$ 时，e^{-x^2} 是减函数. 而 e^{-x^2} 在 $x=-1,0,2$ 时的值分别为 $\mathrm{e}^{-1},1,\mathrm{e}^{-4}$, 故 e^{-x^2} 的最小值为 e^{-4}, 最大值为 1. 积分区间长度为 3. 由估值定理得

$$\frac{3}{\mathrm{e}^4} \le \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le 3.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$, 证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

证　由积分中值定理可知，存在一点 $\eta \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, 使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\eta) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} f(\eta).$$

由条件，得 $f(\eta) = f(0)$. 由 Rolle 中值定理可知命题成立.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明在 $(0,1)$ 内有一点 ξ, 使得 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

证　由积分中值定理可知，存在一点 $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 使得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\eta f(\eta),$$

故由条件，$f(1) = \eta f(\eta)$. 记 $F(x) = x f(x)$, 则有 $F(1) = F(\eta)$. 由 Rolle 定理可知存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，证明至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

这一结论也称为积分中值定理.

证　如果 $g(x) \equiv 0$, 命题显然成立. 以下设存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $g(x_0) > 0$, 则由介值定理易知 $I_1 = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. 记 $I_2 = \int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$, 由于 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，故存在最大值 M, 最小值 m, 而

$$m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x),$$

故

$$m I_1 \leq I_2 \leq M I_1,$$

由此可知

$$m \leq \frac{I_2}{I_1} \leq M,$$

再用一次介值定理，可知存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{I_2}{I_1}$, 即

$$\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

习 题 5－2

1. 利用牛顿－莱布尼兹公式计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$.

解 因为

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{\cos 2x+1}(x-2\sin 2x+x\cos 2x)+C,$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = -\frac{1}{\cos 2x+1}(x-2\sin 2x+x\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2-\frac{1}{4}\pi.$$

(2) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$.

解 因为

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}+C,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(3) $\int_1^{e} \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx$.

解 当 $x>0$ 时

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx = \ln|x|+2\sqrt{x}+C,$$

故

$$\int_1^{e} \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx = \ln x+2\sqrt{x}\Big|_1^{e} = 2e^{\frac{1}{2}}-1.$$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

解 由

$$\int \sqrt{1-\cos(2x)}\, dx = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}+C$$

可知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x.$

解 由

$$\int\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\arctan(x+2)-\frac{1}{2}\pi+C,$$

故

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x=\arctan(x+2)\Big|_{-1}^{0}=\arctan 2-\frac{1}{4}\pi.$$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x.$

解 由于当 $x>1$ 时

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x&=\int\sqrt{x}(x-1)\ \mathrm{d}x\\&=\frac{2}{15}x^{\frac{3}{2}}(3x-5)+C,\end{aligned}$$

当 $0\le x\le 1$ 时

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x&=-\int\sqrt{x}(x-1)\ \mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{15}x^{\frac{3}{2}}(3x-5)+C,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x&=\int_{0}^{1}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{15}x^{\frac{3}{2}}(3x-5)\Big|_{0}^{1}+\frac{2}{15}x^{\frac{3}{2}}(3x-5)\Big|_{1}^{2}\\&=\frac{4}{15}\sqrt{2}+\frac{8}{15}.\end{aligned}$$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2\pi}|\sin x-\cos x|\ \mathrm{d}x&=\int_{0}^{2\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\ \mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\left(-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ \mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{d}x\\&+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}\left(-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\ \mathrm{d}x\\&=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int_{-2}^{4}\mathrm{e}^{|x|}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int_{-2}^{4} e^{|x|} dx = \int_{-2}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{4} e^{x} dx$$
$$= -e^{-x}\Big|_{-2}^{0} + e^{x}\Big|_{0}^{4}$$
$$= e^2 - 1 + e^4 - 1$$
$$= e^2 + e^4 - 2.$$

(9) 设 $f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ x^2, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

解

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{2} x^2\,dx$$
$$= \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} + \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{7}{3}$$
$$= \frac{10}{3}.$$

2. 求下列函数的导数:

(1) $f(x) = \int_{0}^{2x} \cos t\,dt$.

解

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{0}^{2x} (\cos t)\,dt = \cos 2x \cdot \frac{d}{dx}(2x) = 2\cos 2x.$$

(2) $f(x) = \int_{e^{2x}}^{3} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

解

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{e^{2x}}^{3} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\sin e^{2x}}{e^{2x}} \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) = -2\sin\left(e^{2x}\right).$$

(3) $f(x) = x^2 \int_{0}^{2x} \cos t^2\,dt$.

解

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \int_{0}^{2x} \cos\left(t^2\right)\,dt\right)$$
$$= 2x \int_{0}^{2x} \cos\left(t^2\right)\,dt + x^2 \cos\left(4x^2\right) \cdot \frac{d}{dx}(2x)$$
$$= 4x^2 \cos\left(4x^2\right) + 2x \int_{0}^{2x} \cos\left(t^2\right)\,dt.$$

(4) $f(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^{2t}\,dt$.

解

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x^2}^{\sin x}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=\mathrm{e}^{2\sin x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)-\mathrm{e}^{2x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right)$$
$$=(\cos x)\,\mathrm{e}^{2\sin x}-2x\mathrm{e}^{2x^2}.$$

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^4}\cdot2x}{2x}=\lim_{x\to0}\sqrt{1+x^4}=1.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sqrt{1+\cos^2x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\sin x}^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x}$.

解

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\sin x}^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-x^4}\cdot2x-\mathrm{e}^{-\sin^2x}\cdot\cos x}{1}=-1.$$

4. 设 $\int_0^y\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t=0,x\in[0,\pi]$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$.

解 由于

$$d\left(\int_0^y\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t\right)=\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y+\cos x\cdot\mathrm{d}x=0,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\cos x}{\mathrm{e}^y},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\mathrm{e}^y}{\cos x}.$$

5. 设 $\begin{cases} x=\int_1^t u\ln u\,\mathrm{d}u, \\ y=\int_t^1 u^2\ln u\,\mathrm{d}u, \end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解

$$\mathrm{d}x=t\ln t\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y=-t^2\ln t\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-t.$$

由此得

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=-\,\mathrm{d}t,$$

而

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{t\ln t}.$$

6. $F(x)=\int_5^x\left[\int_8^{y^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$, 求 $F''(x)$.

解

$$F'(x)=\int_8^{x^2}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$
$$F''(x)=\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\left(x^2\right)'=\frac{2}{x}\sin x^2.$$

7. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ x, & x\geq 0, \end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $-1\leq x\leq 1$ 中表达式.

解 当 $x\in[-1,0)$ 时

$$\Phi(x)=\int_{-1}^x(t+1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x+1)^2,$$

当 $x\in[0,1]$ 时

$$\Phi(x)=\int_{-1}^0(t+1)\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2,$$

故

$$\Phi(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2, & x\in[-1,0), \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2, & x\in[0,1]. \end{cases}$$

8. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 依题意可知

$$f'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\bigg|_{x=0},$$

即

$$f'(0)=1,$$

对应的切线方程为

$$y-0=f'(0)(x-0),$$

即

$$y=x.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x)}{x}=2\lim_{x\to0^+}\frac{f(2x)-f(0)}{2x}=2f'(0)=2.$$

习 题 5-3

1. 用换元法求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int_0^{\ln2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\xlongequal{u=\mathrm{e}^x}\int_1^2\frac{1}{u}\sqrt{u-1}\,\mathrm{d}u\xlongequal{v=\sqrt{u-1}}2\int_0^1\frac{v^2}{v^2+1}\mathrm{d}v$$
$$=2v-2\arctan v\Big|_0^1=2-\frac{1}{2}\pi.$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x.$

解

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x\xlongequal{u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\int_1^0 4u^2\frac{u^2-1}{(u^2+1)^3}\mathrm{d}u$$
$$\xlongequal{u=\tan v}\int_{\frac{1}{4}\pi}^0 4\left(\tan^2 v\right)\frac{\tan^2 v-1}{(\tan^2 v+1)^2}\mathrm{d}v$$
$$=\int_{\frac{1}{4}\pi}^0 4\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)^2\frac{\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}-1}{\left(\frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}+1\right)^2}\mathrm{d}v$$
$$=\int_{\frac{1}{4}\pi}^0 4(\cos 2v)\left(\frac{1}{2}\cos 2v-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}v$$
$$=v-\sin 2v+\frac{1}{4}\sin 4v\Big|_{\frac{1}{4}\pi}^0$$
$$=1-\frac{1}{4}\pi.$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x \, dx$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^6 x \sin x \, dx$$
$$\underline{\underline{u=\cos x}} \int_1^0 \left(-2u^6\right) du$$
$$= -\frac{2}{7}u^7\Big|_1^0$$
$$= \frac{2}{7}.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x + 1}{2\tan^2 x + 1} dx \, \underline{\underline{u=\tan x}} \int_0^1 \frac{1}{2u^2+1} du$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}u\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}.$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5-3\cos x} dx$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5-3\cos x} dx \, \underline{\underline{u=\cos x}} \int_1^0 \frac{1}{3u-5} du$$
$$= \frac{1}{3}\ln\left(u-\frac{5}{3}\right)\Big|_1^0$$
$$= \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\ln 2.$$

(6) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x \, dx$.

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x \, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7(2x) \, dx \, \underline{\underline{u=2x}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^7 u \, du$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\cos^2 u\right)^3 \cos u \, du \, \underline{\underline{v=\sin u}} \int_0^1 \left(-\left(v^2-1\right)^3\right) dv$$
$$= \frac{16}{35}.$$

(7) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.

解

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx \xlongequal{x=\sin u} \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\arcsin\frac{3}{5}} \csc u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\cos u-1}{\cos u+1}\right)\Bigg|_{\frac{1}{6}\pi}^{\arcsin\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\cos\arcsin\frac{3}{5}-1}{\cos\arcsin\frac{3}{5}+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\cos\frac{1}{6}\pi-1}{\cos\frac{1}{6}\pi+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}+1}\right) - \frac{1}{2}\ln 9$$

$$= -\ln 3 - \frac{1}{2}\ln\left(7-4\sqrt{3}\right)$$

$$= -\ln 3 + \ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

(8) $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx.$

解

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\,|\cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$$

$$\xlongequal{u=\sqrt{\sin x}} \int_0^1 2u^2\,du - \int_1^0 2u^2\,du$$

$$= \frac{4}{3}.$$

(9) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

解

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \xlongequal{x=\sec u} -\int_0^{-\frac{1}{3}\pi} \tan^2 u\,du$$

$$= (-\tan u + u)\Big|_0^{-\frac{1}{3}\pi}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi.$$

(10) $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$

解 $$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \xlongequal{u=\arcsin\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2u\,du = \frac{1}{4}\pi^2.$$

2. 用分部积分法求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx.$

解

$$\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx = \int_0^1 x^2 d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) = x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,d\left(x^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 xd\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{2}e^2 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx\right) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}.$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\,dx.$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dzx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\cos x)$$
$$= \frac{1}{8}\pi^2 + \left(0 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{8}\pi^2 - 1.$$

(3) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx.$

解

$$\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx = -\int_0^{2\pi} x^2\,d(\sin x) = 0 + \int_0^{2\pi} 2x\sin x\,dx$$
$$= -\int_0^{2\pi} 2x\,d(\cos x) = 4\pi - \int_0^{2\pi} (2\cos x)\,dx = 4\pi.$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\right)$$
$$= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\pi^2 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}.$$

(5) $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx.$

解

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}\pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(6) $\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2\,dx$.

解

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$$
$$= \frac{\pi^2}{72} + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi - 1.$$

(7) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

解

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\ln 3 - \int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^2}{x^2-1}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\ln 3.$$

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin^2 x\,dx$.

解　因

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$
$$= \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi}(\cos x\sin x)\,e^{2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\pi} - \left(\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(\cos x\sin x)\ d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\pi} - \left(\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{2}e^{2x}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\ dx\right)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{2}e^{2x}\left(1-2\sin^2 x\right)\ dx$$
$$= \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\pi} - \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin^2 x\,dx,$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{2}\pi} - \frac{1}{8}.$$

(9) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$.

解

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx + \int_{1}^{e}\ln x\,dx$$
$$= -\left(\frac{1}{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx\right) + \left(e - \int_{1}^{e} dx\right)$$
$$= e^{-1}(e-1) - \frac{1}{e} + 1$$
$$= 2 - \frac{2}{e}.$$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\,d\left(\frac{1}{2\cos^2 x}\right) = \frac{1}{2}\pi - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\pi - \left.\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}\right|_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2}\pi - 1.$$

3. 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

解

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \xlongequal{u=\sqrt{x}} \int_0^1 2ue^u\,du = \int_0^1 2u\,d(e^u) = 2e - \int_0^1 2e^u\,du = 2.$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} (\sin\sqrt{x})^2\,dx.$

解

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} (\sin\sqrt{x})^2\,dx \xlongequal{u=\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-u(\cos 2u - 1))\;du$$
$$= -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u\cos 2u\;du + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} u\;du$$
$$= \frac{1}{8}\pi^2 - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} u\;d\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right)$$
$$= \frac{1}{8}\pi^2 + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos u\sin u\;du$$
$$= \frac{1}{8}\pi^2 + \frac{1}{2}.$$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1+x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

解

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(1+x)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=\arcsin x} \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} u\sin u\,\mathrm{d}u$$
$$= 1 - \frac{1}{6}\sqrt{3}\pi.$$

(4) $\displaystyle\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int_1^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=\sqrt{\sqrt{x}-1}} \int_0^{\sqrt{3}} 4u(\arctan u)\left(u^2+1\right)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} \arctan u\,\mathrm{d}\left(u^2\left(u^2+2\right)\right)$$
$$= 5\pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{u^4+2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$
$$= 5\pi - \left(u + \frac{1}{3}u^3 - \arctan u\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

(5) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\sin 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}\sin 1 - \left((\cos 1)\mathrm{e} - \int_1^{\mathrm{e}} (-\sin(\ln x))\,\mathrm{d}x - 1\right)$$
$$= \mathrm{e}\sin 1 - (\cos 1)\mathrm{e} + 1 - \int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}\sin 1 - \mathrm{e}\cos 1 + 1).$$

(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解　被积函数为奇函数，积分区间关于原点对称，故

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \arccos x\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \arccos x \, dx$$
$$= x \arcsin x \arccos x \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (\arccos x - \arcsin x) \, dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2 + \sqrt{1-x^2}(\arccos x - \arcsin x)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-2) \, dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{32}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi + \sqrt{2}.$$

(8) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx.$

解

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx \xlongequal{u=\arcsin x} \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{u}{\sin^2 u} \, du$$
$$= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} u \, d(\cot u) = \frac{1}{18}\sqrt{3}\pi - \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \cot u \, du$$
$$= \frac{1}{18}\sqrt{3}\pi + \ln(\sin u)\Big|_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}$$
$$= \frac{1}{18}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{2}\ln 3.$$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 1+x^2, & x < 0, \end{cases}$ 计算 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1) \, dx.$

解

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1) \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x-1) \, dx + \int_1^2 f(x-1) \, dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(1+(x-1)^2\right) dx + \int_1^2 e^{-(x-1)} \, dx$$
$$= \frac{1}{3}x\left(x^2-3x+6\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(-e^{1-x}\right)\Big|_1^2$$
$$= \frac{37}{24} - e^{-1}.$$

5. 试推导 $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \, dx$ 的递推公式，其中 n 为自然数，并计算 I_3.

解

$$I_0 = \int_1^e dx = e - 1.$$

当 $n \geq 1$ 时，

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx = e - \int_1^e n \ln^{n-1} x \, dx = e - nI_{n-1}.$$

由此

$$I_1 = \mathrm{e} - I_0 = 1,$$

$$I_2 = \mathrm{e} - 2I_1 = \mathrm{e} - 2;$$

$$I_3 = \mathrm{e} - 3I_2 = 6 - 2\mathrm{e}.$$

6. 试证明下列各个等式成立:

(1) $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

证

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=\frac{1}{t}} \int_{\frac{1}{x}}^1 \left(-\frac{1}{u^2+1}\right)\,\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x.$

证

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=1-x} \int_1^0 \left(-u^n(1-u)^m\right)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^1 u^n(1-u)^m\,\mathrm{d}u = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x.$$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)f(x)\,\mathrm{d}x$,其中函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

证

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x &= x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_0^1 - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 (1-x)f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$,其中 $f(x)$ 为连续函数.

证

$$\begin{aligned}\int_0^x \left[\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u &= u\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_0^x - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u\\ &= x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^x xf(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^x (x-u)f(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(5) $\int_0^a x^3 f(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,a^2]$ 上连续.

证

$$\int_0^a x^3 f\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=x^2} \frac{1}{2}\int_0^{a^2} uf(u)\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

(6) $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 为连续函数.

证

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{u=\pi-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

(7) $\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x = n^2\pi$, 其中 $n\in\mathrm{N}$.

证

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(u+(k-1)\pi)\left|\sin(u+(k-1)\pi)\right|\,\mathrm{d}u$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(u+(k-1)\pi)|\sin u|\,\mathrm{d}u$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(u+(k-1)\pi)\sin u\,\mathrm{d}u$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\pi(2k-1)$$
$$=\pi n^2.$$

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续二阶导数, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$, 求 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

解

$$\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}f'(2x)\right)$$
$$= \frac{1}{2}f'(2) - \int_0^1 \frac{1}{2}f'(2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}f'(2) - \frac{1}{4}f(2) + \frac{1}{4}f(0)$$
$$= 2.$$

8. 已知函数 $f(x)$ 具有连续二阶导数，且满足 $f(x) = x^2 + 2\int_0^x tf''(x-t)\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

解

$$\int_0^x tf''(x-t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=x-t} \int_x^0 (x-u)f''(u)\,\mathrm{d}(x-u)$$
$$= \int_0^x (x-u)f''(u)\,\mathrm{d}u = x\int_0^x f''(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x uf''(u)\,\mathrm{d}u,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x tf''(x-t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^x f''(u)\,\mathrm{d}u + xf''(x) - xf''(x)$$
$$= \int_0^x f''(u)\,\mathrm{d}u,$$

而

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\int_0^x tf''(x-t)\,\mathrm{d}t\right) = f''(x),$$

对 $f(x) = x^2 + 2\int_0^x tf''(x-t)\,\mathrm{d}t$ 两边同时求二阶导数，得

$$f''(x) = 2 + 2f''(x).$$

由此可知

$$f''(x) = -2.$$

从而

$$f(x) = x^2 + 2\int_0^x t\cdot(-2)\,\mathrm{d}t = -x^2.$$

习　题　5－4

1. 求平面曲线的弧长：

(1) 计算曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 上相应于 $0 \le x \le \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

解

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left(1-x^2\right)\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

(2) 星行线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t\,(0\leq t\leq 2\pi)$ 的全长.

解

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\cos^3 t\right)\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\sin^3 t\right)\right)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^2 t\,\sin^2 t\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\left|3a\cos t\sin t\right|\,\mathrm{d}t\\
&=12\left|a\right|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\\
&=6\left|a\right|.
\end{aligned}$$

(3) 证明曲线 $y=\sin x$ 上相应于 x 从 0 变到 2π 的一段弧长等于椭圆 $2x^2+y^2=2$ 的周长.

证 曲线 $y=\sin x$ 上相应于 x 从 0 变到 2π 的一段弧长

$$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\left(\frac{d}{\mathrm{d}x}(\sin x)\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x.$$

椭圆 $2x^2+y^2=2$ 的参数方程为

$$x=\cos t,\quad y=\sqrt{2}\sin t,\qquad 0\leq t\leq 2\pi,$$

故椭圆 $2x^2+y^2=2$ 的周长

$$\begin{aligned}
s_2&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2}\sin t\right)\right)^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2 t+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

可见 $s_1=s_2$. 故命题成立.

(4) 求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的弧长.

解　因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\cos x}$, 故

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\left.\frac{2\sin x}{\sqrt{\cos x+1}}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4.$$

2. 求圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 的极坐标方程, 其中 $a>0$.

解　将直角坐标与极坐标的关系

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

代入所给圆的方程得

$$(\rho\cos\theta-a)^2+(\rho\sin\theta)^2=a^2.$$

化简得

$$\rho=2a\cos\theta.$$

3. 求对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{b\theta}$ 在 $\theta=\alpha$ 到 $\theta=\beta\,(\alpha<\beta)$ 的一段弧的长度.

解

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{(a\mathrm{e}^{b\theta})^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(a\mathrm{e}^{b\theta})\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_\alpha^\beta a\sqrt{1+b^2}\mathrm{e}^{b\theta}d\theta=\frac{a\sqrt{1+b^2}}{b}\left(\mathrm{e}^{b\beta}-\mathrm{e}^{b\alpha}\right).$$

4. 求下列各题:

(1) 求抛物线 $y=4x-x^2$ 在顶点处的曲率.

解　因为

$$y=-(x-2)^2+4,$$

所以抛物线顶点为 $(2,4)$. 而

$$y'=4-2x,\quad y''=-2,$$

故由曲率公式得

$$K=\left.\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(2,4)}=\left.\frac{2}{\left(1+(4-2x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_{(2,4)}=2.$$

(2) 求 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率.

解 点 $(0,1)$ 所对应的参数为 $\frac{\pi}{2}$. 由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2\sin t,\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-2\cos t,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\sin t,$$

得

$$K=\left.\frac{\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|}{\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{2\sin^2t+2\cos^2t}{(4\sin^2t+\cos^2t)^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$$

(3) 求曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 在 $(1,1)$ 点处的曲率.

解 由 $x^2+xy+y^2=3$ 可知

$$2x+y+xy'+2yy'=0,$$

故

$$y'\Big|_{x=1}=-\frac{2x+y}{x+2y}\Big|_{x=1,y=1}=-1,$$
$$y''\Big|_{x=1}=-\frac{(2+y')(x+2y)-(1+2y')(2x+y)}{(x+2y)^2}\Big|_{x=1,y=1}=-\frac{2}{3}.$$

于是

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

(4) 在怎样的点 $y=\mathrm{e}^x$ 有最大的曲率?

解 易见

$$K=\frac{\mathrm{e}^2}{(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}.$$

由此得到

$$K'=\frac{\mathrm{e}^x(1-2\mathrm{e}^{2x})}{(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{5}{2}}}.$$

当 $x=-\frac{1}{2}\ln2$ 时, $K'=0$. 而当 $x<-\frac{1}{2}\ln2$ 时, $K'>0$; 当 $x>-\frac{1}{2}\ln2$ 时, $K'<0$. 因此 K 在 $x=-\frac{1}{2}\ln2$ 处取得极大值. 又因驻点唯一, 所以这也是最大值点. 而当 $x=-\frac{1}{2}\ln2$ 时, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故在点 $\left(-\frac{1}{2}\ln2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处曲率最大.

(5) 试推导由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 确定的曲线的曲率公式

$$K=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $\rho'=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$, $\rho''=\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\theta^2}$.

解　由极坐标与直角坐标的关系为得到曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta, \\ y = \rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta},$$

而

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= d\left(\frac{\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta}\right) \\ &= \frac{-\rho d\rho' + \rho' d\rho + \left[\rho^2 + \rho'^2\right]\,\mathrm{d}\theta}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2}, \end{aligned}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^3}.$$

于是

$$\begin{aligned} K &= \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\left|\frac{-\rho\rho''+2\rho'^2+\rho^2}{(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)^3}\right|}{\left(1+\left(\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

5. 求对数螺线 $\rho = a\mathrm{e}^{b\theta}$ 的曲率半径.

解　将

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(a\mathrm{e}^{b\theta}\right) = ab\mathrm{e}^{b\theta}, \\ \rho'' &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(a\mathrm{e}^{b\theta}\right) = ab^2\mathrm{e}^{b\theta}, \end{aligned}$$

代入第 4(5) 题的公式得

$$\begin{aligned} K &= \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2b^2\mathrm{e}^{2b\theta} + a^2\mathrm{e}^{2b\theta}}{(a^2b^2\mathrm{e}^{2b\theta} + a^2\mathrm{e}^{2b\theta})^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^2(b^2+1)\mathrm{e}^{2b\theta}}{a^3(b^2+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3b\theta}} = \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}\mathrm{e}^{b\theta}}, \end{aligned}$$

故曲率半径

$$R = \frac{1}{K} = a\sqrt{1+b^2}\mathrm{e}^{b\theta}.$$

6. 求曲线 $y=\tan x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

解 由于

$$y'\Big|_{\frac{\pi}{4}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}=\tan^2 x+1\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2,$$

$$y''\Big|_{\frac{\pi}{4}}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}=2(\tan x)\left(\tan^2 x+1\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}=4,$$

故在 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{25}\sqrt{5},$$

对应的曲率圆半径

$$R=\frac{1}{\frac{4}{25}\sqrt{5}}=\frac{5}{4}\sqrt{5},$$

曲率中心坐标为

$$\xi=x_0-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=\frac{\pi}{4}-\frac{5}{2},$$

$$\eta=y_0+\frac{1+y'^2}{y''}=\frac{9}{4}.$$

于是曲率圆方程为

$$\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}.$$

7. 设 $f(x)$ 为二次可导函数. 证明曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x,y)$ 处的曲率可以表示为 $K=\left|\frac{\mathrm{d}}{dx}(\sin\alpha)\right|$, 其中 α 是 M 点处切线倾角.

证 在 M 点处切线斜率为 $y'=f'(x)$, 于是

$$\tan\alpha=y'=f'(x).$$

令 $u=\sin\alpha$, 则

$$|y''|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\alpha\right|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right|\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|=|\cos^3\alpha|\left|\frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}x}\right|.$$

于是

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|\cos^3\alpha|\left|\frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}x}\right|}{(1+\tan^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\left|\frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}x}\right|.$$

8. 设 $R=R(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)\,(x\geq 1)$ 处的曲率半径, $s=s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2$ 的值.

解 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y''=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. 抛物线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}.$$

抛物线上 A 到 M 的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x.$$

把 ρ 看成 s 的函数，上面两式视为 $\rho(s)$ 的参数方程， x 是参数. 因此

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{1/2}\cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

于是

$$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

习　题　5－5

1. 求下列图形的面积：

(1) 曲线 $y=\sin x$ 在 $x\in[0,2\pi]$ 的一段与 x 轴所围成的平面图形.

解 由定积分的几何意义得

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=4.$$

(2) 曲线 $y=\ln x$ 和直线 $y=\ln a, y=\ln b, x=0\,(b>a>0)$ 所围成的平面图形.

解

$$S=\int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=b-a.$$

(3) 曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=2x+3$ 所围成的平面图形.

解 解方程组

$$\begin{cases} y=x^2,\\ y=2x+3\end{cases}$$

得两曲线的交点 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$. 于是

$$S=\int_{-1}^{3}\left(2x+3-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}.$$

(4) 曲线 $y=e^x, y=e^{-x}$ 和直线 $x=1$ 所围成的平面图形.

解 解方程组

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^x \\ y=\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

得曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 的交点为 $(0,1)$, 于是

$$S=\int_0^1\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2.$$

(5) 曲线 $y^2=3x$ 与 $y^2=4-x$ 所围成的平面图形

解 由

$$\begin{cases} y^2=3x, \\ y^2=4-x \end{cases}$$

解得曲线 $y^2=3x$ 与 $y^2=4-x$ 的交点为 $\left(1,-\sqrt{3}\right),\left(1,\sqrt{3}\right)$. 故

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\left(4-y^2\right)-\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}y=\frac{16}{3}\sqrt{3}.$$

(6) 曲线 $y=x^2, y=\frac{1}{2}x^2$ 与直线 $y=2x$ 围成的平面图形.

解 由

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

解得曲线 $y=x^2, y=\frac{1}{2}x^2$ 的交点为 $(0,0)$. 由

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2x \end{cases}$$

解得曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x$ 的交点为 $(2,4)$. 由

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2, \\ y=2x \end{cases}$$

解得曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与直线 $y=2x$ 的交点为 $(4,8)$. 于是

$$S=\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_2^4\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=4.$$

(7) 星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ (a>0)$ 围成的平面图形.

解 利用图形的对称性得

$$S=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x=4\int_0^a a\sin^3 t\,\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\cos^3 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 t-\sin^6 t\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(8) 心形线 $\rho = 2a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 围成的平面图形.

解 利用图形的对称性得

$$S = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot\rho^2\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}(2a(1+\cos\theta))^2\,\mathrm{d}\theta$$
$$= 4a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = 4a^2\cdot\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+2\sin\theta\right)\Big|_0^{\pi} = 6\pi a^2.$$

2. 求下列各立体的体积:

(1) 以抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=2$ 所围成的图形为底, 而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形的立体.

解

$$V = \int_0^2 2\sqrt{3}x\,\mathrm{d}x = 4\sqrt{3}.$$

(2) 以长半轴 $a=10$, 短半轴 $b=5$ 的椭圆为底, 而垂直于长轴的截面都是等边三角形的立体.

解

$$V = \int_{-10}^{10}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(100-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1000}{3}\sqrt{3}.$$

(3) 由半立方抛物线 $y^2=x^3$, x 轴和直线 $x=1$ 在第一象限所围图形, 绕 x 轴和 y 轴旋转而成的两个旋转体.

解 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积

$$V_1 = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x^3}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi.$$

绕 y 轴旋转而成的旋转体体积

$$V_2 = \int_0^1 \pi\left(1^2-\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2\right)\mathrm{d}y = \frac{4}{7}\pi.$$

(4) 由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=\frac{1}{2}$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转而成的旋转体.

解

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(\sqrt{2x}+1\right)^2\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(1-\sqrt{2x}\right)^2\mathrm{d}x$$
$$= \frac{17}{12}\pi - \frac{1}{12}\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

(5) 由星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体.

解 由对称性得

$$V=2\int_0^a \pi y^2\,\mathrm{d}x=2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi\left(a\sin^3 t\right)^2\left(3a\cos^2 t\right)(-\sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^7 t\,\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

(6) 由曲线 $y=x^2+7$ 和 $y=3x^2+5$ 所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体.

解 解方程组

$$\begin{cases} y=x^2+7,\\ y=3x^2+5\end{cases}$$

得交点为 $(1,8)$ 和 $(-1,8)$. 于是

$$V=\int_{-1}^1 \pi\left(x^2+7\right)^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^1\pi\left(3x^2+5\right)^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1616}{15}\pi-\frac{368}{5}\pi=\frac{512}{15}\pi.$$

(7) 由圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体.

解

$$V=\int_{-1}^1\pi\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^1\pi\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{3}\pi(3\pi+14)+\frac{2}{3}\pi(3\pi-14)=4\pi^2.$$

(8) 由心形线 $\rho=4(1+\cos\theta)$ 上介于 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 范围的一段和射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围图形绕极轴旋转而成的旋转体.

解

$$V=\int_0^8\pi y^2\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\pi(\rho\sin\theta)^2\,\mathrm{d}(\rho\cos\theta)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}64\pi\left(\sin^2\theta\right)(\cos\theta+1)^2(\sin2\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$\xlongequal{u=\cos\theta}\int_1^0\left(-64\pi\left(1-u^2\right)(2u+1)(u+1)^2\right)\mathrm{d}u=160\pi.$$

(9) 由曲线 $y=\sin x\ (x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围图形绕 y 轴和直线 $y=1$ 旋转而成的两个旋转体.

解 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积

$$V_1=\int_0^1\pi(\pi-\arcsin y)^2\,\mathrm{d}y-\int_0^1\pi(\arcsin y)^2\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{4}\pi\left(8\pi+\pi^2-8\right)-\frac{1}{4}\pi\left(\pi^2-8\right)=2\pi^2.$$

绕 $y=1$ 轴旋转而成的旋转体体积

$$V_2=\int_0^{\pi}\pi 1^2\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\pi(1-\sin x)^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\pi^2-\frac{1}{2}\pi(3\pi-8)=4\pi-\frac{1}{2}\pi^2.$$

3. 求下列各曲面的面积:

(1) 曲线 $y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$ 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面.

解

$$S=\int_0^{\pi}y\cdot 2\pi\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\sin x)\cdot 2\pi\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{u=\cos x}\int_1^{-1}\left(-2\pi\sqrt{u^2+1}\right)\,\mathrm{d}u=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)+\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+1}\Big|_{-1}^{1}$$
$$=2\sqrt{2}\pi-\pi\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+\pi\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

(2) 圆 $x^2+(y-b)^2=a^2\,(0<a<b)$ 绕 x 轴旋转所得的圆环面.

解 圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b+a\sin\theta.\end{cases}$$

于是

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}y(\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_0^{2\pi}(b+a\sin\theta)\cdot a\,\mathrm{d}\theta=4\pi^2 ab.$$

(3) 双扭线 $\rho^2=a^2\cos 2t$ 绕极轴所在的直线旋转所得的旋转曲面.

解 利用对称性得

$$S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho(\theta)(\sin\theta)\cdot\sqrt{\rho(\theta)^2+(\rho'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\theta}\cdot(\sin\theta)\cdot\sqrt{a^2\cos 2\theta+\left(-\frac{a\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right).$$

(4) 摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le\pi)$ 绕直线 $x=\pi a$ 旋转所得的旋转曲面.

解

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^a (\pi a - x) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} \,\mathrm{d}y \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - a(t-\sin t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} \,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} 2a^2 \left(\sin\frac{1}{2}t\right)(\pi - t + \sin t) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{8}{3}\pi a^2 (3\pi - 4).
\end{aligned}
$$

4. 求下列函数在指定区间上的平均值:

(1) $y = x,\ x \in [0,1]$.

解

$$\overline{y} = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

(2) $y = x^2,\ x \in [0,1]$.

解

$$\overline{y} = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

(3) $y = x\cos x,\ x \in [0,2\pi]$.

解

$$\overline{y} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos x \,\mathrm{d}x = 0.$$

(4) $y = \sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\ x \in [0,2\pi]$.

解

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x \sin x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

5. 设直线 $y = ax$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形的面积为 S_1, 它们与直线 $x = 1$ 所围成的图形面积为 S_2, 并且 $0 < a < 1$.

(1) 试确定 a 的值, 使 $S_1 + S_2$ 达到最小, 并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 由

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^a \left(ax - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^3, \\
S_2 &= \int_a^1 \left(x^2 - ax\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}(a-1)^2(a+2),
\end{aligned}
$$

得到

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{6}(2a^3 - 3a + 2).$$

记 $S(a)=S_1+S_2$, 则

$$S'(a)=a^2-\frac{1}{2}.$$

注意到当 $a\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$S'(a)<0$; 而当 $a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 时，$S'(a)>0$. 因此当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$S(a)$ 取到最小值 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

(2) 旋转体的体积

$$\begin{aligned}V&=\pi\left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left(\left(x^2\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2\right)\mathrm{d}x\right]\\&=\pi\left[\frac{1}{60}\sqrt{2}+\left(\frac{1}{60}\sqrt{2}+\frac{1}{30}\right)\right]\\&=\frac{\pi}{30}\left(\sqrt{2}+1\right).\end{aligned}$$

6. 已知一抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0),B(3,0)$, 且对称轴平行于 y 轴.

(1) 求证两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积;

(2) 计算上述两个平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体的体积之比.

解　(1) 由于对称轴平行于 y 轴，可设抛物线的方程为

$$y=a(x-b)^2+c.$$

曲线过 A,B 点，故

$$\begin{cases}a(1-b)^2+c=0,\\a(3-b)^2+c=0.\end{cases}$$

由此解得 $b=2,a+c=0$. 因此抛物线的方程为

$$y=a(x-2)^2-a.$$

显然，抛物线过点 $(0,3a)$. 抛物线与 x 轴围成的图形的面积

$$S_1=\int_1^3|y|\,\mathrm{d}x=|a|\int_1^3\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}|a|,$$

抛物线与两坐标轴围成的图形的面积

$$S_2=\int_0^1|y|\,\mathrm{d}x=|a|\int_1^3\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}|a|.$$

可见

$$S_1=S_2.$$

(2) 抛物线与两坐标轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体的体积

$$V_1 = \pi \int_0^1 |y|^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 a^2 \left((x-2)^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{38}{15}\pi a^2,$$

抛物线与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体的体积

$$V_2 = \pi \int_1^3 |y|^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_1^3 a^2 \left((x-2)^2 - 1\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{16}{15}\pi a^2,$$

故

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{38}{15}\pi a^2}{\frac{16}{15}\pi a^2} = \frac{19}{8}.$$

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且非负，试用微元法推导由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$ 和 $x=b$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积的计算公式

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \,\mathrm{d}x.$$

解 在区间 $[a,b]$ 上以点 x 为起点取一小段长度为 $\mathrm{d}x$ 的线段，则以这一小段为底，$y=f(x)$ 为顶的曲边梯形可以视为一个底为 $\mathrm{d}x$，高为 $f(x)$ 的长方形，这一长方形绕 y 轴旋转一周得到的旋转体的体积为

$$\mathrm{d}V = 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

故

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

习 题 5-6

1. 一细轴长为 10(米)，它的线密度 $\mu = 6 + 0.3x$(千克 / 米)，其中 x 为距轴的一个端点的距离，单位为米，试求细轴的质量.

解 以细轴的一个端点为原点，细轴所在的直线作为 x 轴建立坐标系，则由定积分的物理意义

$$m = \int_0^{10} \mu \,\mathrm{d}x = \int_0^{10} (6 + 0.3x)\,\mathrm{d}x = 75\,(\mathrm{kg}).$$

2. 一质点运动的速度 $v = 0.1t^3$(米 / 秒)，试求运动开始 $t=10$ 秒的时间内，质点所经过的路程，并求在此时间内质点运动的平均速度.

解 由定积分的物理意义得

$$s = \int_0^{10} v\,\mathrm{d}t = \int_0^{10} 0.1t^3\,\mathrm{d}t = 250\,(\mathrm{m}).$$

而平均速度

$$\bar{v}=\frac{s}{t}=\frac{250}{10}=25(\mathrm{m/s}).$$

3. 有一横截面面积为 20 米 ^{2}，深为 5 米的水池装满水，用水泵把水池中的水全部抽到距水池 10 米高的水塔上去，问需要做多少功？

解 在水池的底部取一点作为原点，竖直向上的方向作为 x 轴的正向建立数轴. 在 $[0,5]$ 之间任取一点 x，数轴上以 x 为端点取一段长为 $\mathrm{d}x$ 的小线段. 将距离底部 x 与 $x+\mathrm{d}x$ 之间的水到距水池 10 米高的塔上去所做的功

$$\mathrm{d}W=\rho g(15-x)\,\mathrm{d}V=\rho g(15-x)\cdot 20\,\mathrm{d}x,$$

故

$$W=\int_0^5\rho g(15-x)\cdot 20\,\mathrm{d}x=1250g\rho=125\times 10^5\,(\mathrm{J}).$$

4. 长为 10 米，质量为 80 千克的均匀铁索下垂于矿井中，求将此铁索由矿井全部提上地面所作的功.

解 以矿井顶部作为原点，竖直向下的方向为正方向建立坐标轴. 在 $[0,10]$ 之间任取一点 x，以 x 为端点取一段长为 $\mathrm{d}x$ 的小线段，这一段铁索的质量

$$\mathrm{d}m=\frac{80}{10}\cdot\mathrm{d}x=8\,\mathrm{d}x.$$

将其提上地面需作功

$$\mathrm{d}W=8\Delta\,\mathrm{d}x\cdot g\cdot x=8gx\,\mathrm{d}x,$$

其中 g 为重力加速度. 于是

$$W=\int_0^{10}8gx\,\mathrm{d}x=400g\,(\mathrm{J}).$$

如果取 $g=10$，则

$$W=4000\,(\mathrm{J}).$$

5. 某水库的闸门形状为等腰梯形，其上底长 10 米，下底长 6 米，高 20 米，较长的底边与水面相齐，计算闸门的一侧所受水的压力.

解 以梯形底部中点为原点，垂直于下底的直线为数轴建立坐标轴，竖直向上的方向为正. 在 $[0,20]$ 之间任取一点 x，以 x 为端点取一段长为 $\mathrm{d}x$ 的小线段，过 x 以及 $x+\mathrm{d}x$ 作垂直于数轴的直线得到一个上底为 $\frac{1}{5}(x+30+\mathrm{d}x)$，下底为 $\frac{1}{5}(x+30)$，高为 $\mathrm{d}x$ 的等腰梯形. 此梯形受到的侧压力

$$\mathrm{d}p=\rho\cdot g\cdot(20-x)\cdot\frac{1}{5}(x+30)\,\mathrm{d}x,$$

故

$$p=\int_0^{20}\rho g\,(20-x)\cdot\frac{1}{5}\,(x+30)\,\mathrm{d}x=\frac{4400}{3}g\rho=\frac{44}{3}\times 10^6\,(\mathrm{N}),$$

其中 $\rho=10^3$, $g=10$.

6. 有两条长为 l(米), 质量为 m(千克) 的均匀细杆位于同一直线上, 两杆近端距离为 l(米), 求两杆之间的引力.

解 取其中一细杠的一个端点为原点, 所在直线为坐标轴. 不妨设两细杠都位于原点的右方. 在 $[0,l]$ 之间任取一段线段 $[x,x+\mathrm{d}x]$, $[2l,3l]$ 之间任取一线段 $[y,y+\mathrm{d}y]$, 则这两线段之间的引力为

$$k\cdot\frac{\frac{m}{l}\mathrm{d}x\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}y}{(y-x)^2},$$

故右边的细杠对 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 这一段的引力为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F&=\int_{2l}^{3l}k\cdot\frac{\frac{m}{l}\mathrm{d}x\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}y}{(y-x)^2}=\frac{k}{l^2}m^2\int_{2l}^{3l}\frac{1}{(x-y)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&=\frac{k}{l^2}m^2\left.\frac{1}{x-y}\right|_{2l}^{3l}\mathrm{d}x=\frac{k}{l^2}m^2\left(\frac{1}{x-3l}-\frac{1}{x-2l}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}F&=\int_0^l\frac{k}{l^2}m^2\left(\frac{1}{x-3l}-\frac{1}{x-2l}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{k}{l^2}m^2\left(\ln\frac{x-2l}{x-3l}\right)\Big|_0^l\\&=-\frac{k}{l^2}m^2\left(\ln\frac{l-2l}{l-3l}\right)-\left(-\frac{k}{l^2}m^2\left(\ln\frac{0-2l}{0-3l}\right)\right)\\&=\frac{k}{l^2}m^2\ln\frac{4}{3}\,(N).\end{aligned}$$

7. 已知某产品总产量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=40+12t-\frac{3}{2}t^2(\text{件}\ /\ \text{天}),$$

求从第 3 天到第 10 天这 8 天内生产产品的总量.

解 设从第 3 天到第 10 天这 8 天内生产产品的总量为 x, 则

$$x=\int_2^{10}\left(40+12t-\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=400\left(\text{件}\right).$$

8. 设某商品每天生产 x 单位时固定成本为 20 元, 边界成本函数为

$$C'(x)=0.4x+2(\text{元}\ /\ \text{单位}),$$

求总成本函数 $C(x)$. 若此种商品销售单价为 18 元, 且产品可全部售出, 求总利润函数 $L(x)$, 并问每天生产多少单位时能获得最大利润?

解　由已知可得 $C(0)=20$，故

$$C(x)=\int_0^x C'(t)\,\mathrm{d}t+C(0)$$
$$=\int_0^x (0.4t+2)\,\mathrm{d}t+20=0.2x^2+2x+20.$$

而

$$L(x)=18x-C(x)=-0.2x^2+16x-20.$$

由于

$$L'(x)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(-0.2x^2+16x-20\right)=16.0-0.4x,$$

易知当 $x=40$ 时利润最大.

9. 已知某产品生产 x 单位时的边界收益为

$$R'(x)=200-\frac{x}{100},$$

(1) 求生产 **50** 个单位时的总收益;

(2) 若已经生产了 **100** 个单位，求再生产 **100** 个单位时的总收益.

解　(1)
$$R(x)=\int_0^x R'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(200-\frac{t}{100}\right)\mathrm{d}t=200x-\frac{1}{200}x^2.$$

故

$$R(50)=200\times 50-\frac{1}{200}\times 50^2=\frac{19\,975}{2}.$$

(2)
$$R(200)-R(100)=\int_{100}^{200}\left(200-\frac{t}{100}\right)\mathrm{d}t=19\,850.$$

10. 假设当鱼塘中有 x 公斤鱼时，每公斤的捕捞成本是 $\dfrac{2000}{10+x}$ 元. 已知鱼塘中现有鱼 **10000** 公斤，问从鱼塘中捕捞 **6000** 公斤鱼需花费多少成本？

解

$$R=\int_0^{6000}\frac{2000}{10+(10000-x)}\mathrm{d}x$$
$$=2000\ln 10\,010-2000\ln 4010$$
$$=2000\ln\frac{10010}{4010}.$$

习　题　5－7

1. 计算下列广义积分:

(1) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}.$

解 由于

$$\int_{e}^{A}\frac{dx}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{A}=-\frac{1}{\ln A}+1,$$

故

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln A}\right)=1.$$

(2) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

解 由于

$$\int_{2}^{A}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\ln^2 A-\frac{1}{2}\ln^2 2,$$

又

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln^2 A-\frac{1}{2}\ln^2 2\right)=+\infty,$$

故积分发散.

(3) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 由于

$$\int_{2}^{A}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{6}\pi-\arctan\frac{1}{\sqrt{A^2-1}},$$

故

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\pi-\arctan\frac{1}{\sqrt{A^2-1}}\right)=\frac{1}{6}\pi.$$

(4) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

解

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=\frac{1}{4}\pi-\int_{1}^{\infty}\left(-\frac{1}{x(x^2+1)}\right)dx=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\ln 2.$$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.$$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

解

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\arctan x-\frac{1}{6}\arctan\frac{1}{2}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{6}\pi.$$

(7) $\int_{0}^{1}\ln x\,dx$.

解

$$\int_0^1 \ln x\,dx = x(\ln x - 1)\Big|_0^1 = -1.$$

(8) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

解

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = -\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3}\pi.$$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

解

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = -\arcsin(1-2x)\Big|_0^1 = \pi.$$

(10) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}.$

解

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}} &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}} + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}\\ &= \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}} + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-1}}\\ &= \int_{-1}^0 \frac{1}{t}\cdot t^2\,dt + \int_0^2 \frac{1}{t}\cdot t^2\,dt\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(11) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

解

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x+1}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x+1}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}},\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x+1}$$

不存在，故积分

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

发散.

(12) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x^2-1|}}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \\ &= \arcsin x\Big|_0^1 + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi + \ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

2. 用 Γ 函数表示积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx$ 的值，其中 $\alpha > 0$.

解

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dt = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

3. 利用 Γ 函数的性质计算:

(1) $\Gamma(\frac{5}{2})$.

解

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

(2) $\Gamma(\frac{9}{2})$.

解

$$\Gamma(\frac{9}{2}) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}.$$

4. 证明 $\int_0^{+\infty} x^p e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$, 其中 $p > -1$.

证

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x^2}\,dx &= \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t}\right)^p e^{-t} d\sqrt{t} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p}{2}} e^{-t}\cdot\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{p-1}{2}} e^{-t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).\end{aligned}$$

5. 用 Γ 函数表示积分 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-a^2x^2}\,dx$, 其中 $a > 0, n \geq 0$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n e^{-a^2x^2}\,dx &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{a}\right)^n e^{-a^2\left(\frac{t}{a}\right)^2} d\left(\frac{t}{a}\right)\\ &= \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^n\,dt\\ &= \frac{1}{2a^{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).\end{aligned}$$

6. 计算下列积分:

(1) $\int_2^{+\infty} xe^{-(x-2)^2}\,dx$.

解

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} xe^{-(x-2)^2}\,dx &= \int_0^{+\infty}(t+2)e^{-t^2}\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt + 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)+\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)\\ &= \sqrt{\pi}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) $\int_0^{+\infty} x^{2m+1}e^{-x^2}\,dx$, 其中 $n\in\mathrm{N}$.

解

$$\int_0^{+\infty} x^{2m+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2m+1+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(m+1) = \frac{1}{2}m!.$$

(3) $\int_0^{+\infty} x^{2m}e^{-x^2}\,dx$, 其中 $n\in\mathrm{N}$.

解

$$\int_0^{+\infty} x^{2m}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}.$$

复 习 题 五

1. 填空题:

(1) 若连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^{x^2(x+1)} f(t)\,dt = x$, 则 $f(2) =$ ________ .

解 由

$$\left(\int_0^{x^2(x+1)} f(t)\,dt\right)' = (x)'$$

有

$$\left(3x^2+2x\right)f\left(x^2(x+1)\right)=1.$$

将 $x=1$ 代入得

$$\left(3\cdot 1^2+2\cdot 1\right)f(2)=1.$$

由此得到

$$f(2)=\frac{1}{5}.$$

(2) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(\frac{1-x}{1+x})\arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________ .

解 被积函数为奇函数，积分区间关于原点对称，故

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln(\frac{1-x}{1+x})\arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

(3) $f(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 ________ .

解 因

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{-1}^{x}(x-t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}(t-x)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\&=x\int_{-1}^{x}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-\int_{-1}^{x}t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_{x}^{1}t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-x\int_{x}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故

$$f'(x)=2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1},\quad f''(x)=2\mathrm{e}^x>0.$$

因此 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的凹函数, 从而最大值只能在端点取到. 而 $f(1)=\mathrm{e}-3\mathrm{e}^{-1}$, $f(-1)=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}$, 故 $f(x)$ 的最大值为 $f(-1)=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}$.

(4) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上具有连续导数的函数，且 $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$, 则 $\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=$ ________ .

解

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_a^b x\,\mathrm{d}f^2(x)\\&=\frac{1}{2}\left[xf^2(x)\Big|_a^b-\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(5) 设 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$, $f(\pi)=2$, 则 $f(0)=$ ________ .

解　因

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}f'(x)\\ &= -\int_0^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}\sin x\\ &= -\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -f(x)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= f(\pi)+f(0)-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故

$$f(0)=\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x - f(\pi) = 5-2=3.$$

(6) 由曲线 $y=x+\dfrac{1}{x}, x=2, y=2$ 所围图形的面积 $S=$ ________.

解

$$S=\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

(7) 设 $f(x)$ 连续，则 $\left(\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t\right)'=$ ________.

解　因

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=x^2-t^2} \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

故

$$\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t\right)'=xf(x^2).$$

(8) 函数 $F(x)=\displaystyle\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\ \ (x>0)$ 的单调减区间为 $=$ ________.

解　由

$$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

易知当 $x<\frac{1}{4}$ 时 $F'(x)<0$, 故 $F(x)$ 的单调减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$ ________.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\Big|_0^{+\infty}\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

2. 选择题:

(1) 设在闭区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=f(b)(b-a), S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则 (　　).

(A) $S_1<S_2<S_3$. (B) $S_2<S_1<S_3$. (C) $S_3<S_1<S_2$. (D) $S_2<S_3<S_1$.

解 由定积分的几何意义, S_1 表示以 $x=a, x=b, y=f(x)$ 以及 $y=0$ 所围图形的面积, S_2 表示以 $x=a, x=b, y=0, y=f(b)$ 所围图形的面积, 而 S_3 表示由 $x=a, x=b, y=0$ 以及连接 $(a,f(a)), (b,f(b))$ 的直线所围图形的面积, 由函数图形易知 $S_2<S_1<S_3$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=$(　　).

(A) 0.　　(B) $2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^a [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^a [f(x)-f(-x)]\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}(-t)\\ &= \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3) 若 $f(x)$ 为连续函数, $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t+\ln 2$, 则 $f(x)$ 等于 (　　).

(A) $\mathrm{e}^{x}\ln 2$.　(B) $\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.　(C) $\mathrm{e}^{x}+\ln 2$.　(D) $\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$.

解 由已知得

$$f'(x)=2f(x),$$

再由 $f(0)=\ln 2$ 易知 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.

(4) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t, g(x)=x^3+x^4$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 (　　).

(A) 等价无穷小.　　(B) 同阶但非等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　(D) 低阶无穷小.

解 由于 $f(0)=0$, 而

$$f'(x)=\sin\left(\sin^2 x\right)\sim\sin^2 x\sim x^2,$$

故

$$f(x) \sim \frac{1}{3}x^3,$$

于是 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价无穷小

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$，记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, 0 \le x \le 2$, 则有 (　　).

(A) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1, \\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1, \\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \le x \le 1, \\ 2x-\frac{x^2}{2}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

解　当 $x \in [0,1]$ 时

$$F(x)=\int_0^x x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3,$$

而当 $x \in (1,2]$ 时

$$F(x)=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^x (2-x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{7}{6}.$$

(6) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^2 x\,\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x+\cos^4 x\right)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\,\mathrm{d}x$, 则 (　　).

(A) $N < P < M$.　　(B) $M < P < N$.

(C) $N < M < P$.　　(D) $P < M < N$.

解　由被积函数的奇偶性易知

$$M=0,$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x > 0,$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^4 x)\,\mathrm{d}x < 0,$$

故 $P < M < N$.

(7) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f(x) < g(x)$, 则必有 (　　).

(A) $f(-x) > g(-x)$.　　(B) $f'(x) < g'(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.　　(D) $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t < \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

解　因为可导的函数一定连续，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

而 $f(x_0) < g(x_0)$, 故 C 正确.

(8) 双扭线 $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ 所围平面图形的面积可用定积分表示为 (　　).

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\theta}\,\mathrm{d}\theta$.　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$.

解　双扭线的极坐标方程为 $\rho^2 = \cos 2\theta$, 其中 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. 利用对称性得

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

(9) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x) < f(x) < m$(m 为常数), 则曲线 $y=g(x), y=f(x), x=a, x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体的体积为 (　　).

(A) $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(B) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(C) $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

(D) $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$.

解　旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_a^b (m-g(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_a^b (m-f(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_a^b [2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(10) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则 (　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

解　由已知，存在常数 C 使得

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C.$$

当 $f(x)$ 是奇函数时，有

$$\begin{aligned}F(-x)&=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t+C\\&\xlongequal{u=-t}\int_0^x -f(-u)\,\mathrm{d}u+C\\&=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u+C=F(x).\end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 是偶函数.

3. 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)\sin^6 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t\quad(x=\pi-t)\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x\\&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^6 x-2\sin^8 x+\sin^{10} x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{512}\pi^2.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{d}\frac{1}{1+\tan x}\\ &= -\frac{x}{1+\tan x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}\\ &= -\frac{\pi}{8} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(1+u^2)}\\ &= -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\Big(\ln(1+u) + \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)\Big)\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$

解

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{u=-x} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 u}{1+\mathrm{e}^{u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-u}\sin^2 u}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u.$$

由此得到

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

(4) $\displaystyle\int_a^b |2x-a-b|\,\mathrm{d}x.$

解

$$\begin{aligned}\int_a^b |2x-a-b|\,\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}(a-b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2\\ &= \frac{1}{2}(a-b)^2.\end{aligned}$$

4. 设 $F(x) = \displaystyle\int_5^x \Big(\int_2^{y^2} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}y$, 求 $F''(x)$.

解

$$F'(x) = \int_2^{x^2} \frac{t}{\sin t}\,\mathrm{d}t,$$

$$F''(x) = \frac{x^2}{\sin x^2}\cdot 2x = \frac{2x^3}{\sin x^2}.$$

5. 求 $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\Big]$.

解

$$\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = x\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x (-t)f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\int_0^x (x-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\Big] = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = f(x) - f(0).$$

6. 已知连续函数 $g(x)$ 满足 $g(1)=5$, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 2$, 而 $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t$, 试证 $f'(x) = x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t$, 并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x g(t)\left(x^2-2xt+t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - 2x\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x t^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(2x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + x^2 g(x) - 2\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t - 2x^2 g(x) + x^2 g(x)\right) \\ &= x\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + xg(x) - xg(x) \\ &= \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t, \\ f'''(x) &= g(x), \end{aligned}$$

故

$$f''(1) = 2,\ f'''(1) = 5.$$

7. 求函数 $f(x) = \int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值和最大值.

解　因

$$f'(x) = \frac{3x+1}{x^2-x+1},$$

故在 $[0,1]$ 上, $3x+1>0$, $x^2-x+1 \geq \frac{3}{4} > 0$, $f(x)$ 单增. 而

$$f(0)=0,\quad f(1) = \int_0^1 \frac{3t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{9}\sqrt{3}\pi,$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $\frac{5}{9}\sqrt{3}\pi$, 最小值为 0.

8. 求函数 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)^2\,\mathrm{d}t$ 的极值和它图形上的拐点.

解 因

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-1)(x-2)^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=3x^2-10x+8,$$

故 y 的驻点为 $x=1,x=2$, 当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}<0$, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$, 故 $x=1$ 是极小值点, 而 $x=2$ 不是极值点. 又函数 $3x^2-10x+8$ 的零点为 $2,\frac{4}{3}$, 易知这两个点处 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 变号, 而

$$\int_0^1(t-1)(t-2)^2\,\mathrm{d}t=-\frac{17}{12},$$
$$\int_0^2(t-1)(t-2)^2\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{3},$$
$$\int_0^{\frac{4}{3}}(t-1)(t-2)^2\,\mathrm{d}t=-\frac{112}{81},$$

故函数 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)^2\,\mathrm{d}t$ 的极小值为 $-\frac{17}{12}$, 而拐点为 $\left(2,-\frac{4}{3}\right),\left(\frac{4}{3},-\frac{112}{81}\right)$.

9. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{\sec x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\int_x^1\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}\,\mathrm{d}t,\quad(0\le x\le1)$.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)}{\sec x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x\\&=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=tf(t)\Big|_0^1-\int_0^1 t\,\mathrm{d}f(t)\\&=\int_0^1 x\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

10. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^m x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x$ (其中 m 为正整数).

解

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^m x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{m+1}}\int_0^{\pi}\sin^m u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2^{m+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 $\cos^m x$ 是一个偶函数的结论.

11. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$, 其中整数 $n>1$, 证明

(1) $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n-1}$;　　(2) $\dfrac{1}{2(n+1)} < I_n < \dfrac{1}{2(n-1)}$.

证　(1)

$$\begin{aligned} I_n + I_{n-2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n x + \tan^{n-2} x\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2 x + 1\right) \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \tan^{n-2} x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \, \mathrm{d} \tan x \\ &= \int_0^1 u^{n-2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

(2) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时 $\tan x \in (0,1)$, 故

$$\tan^{n+2} x < \tan^n x < \tan^{n-2} x,$$

从而

$$I_{n+2} < I_n < I_{n-2}.$$

于是

$$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} < 2I_n, \quad \frac{1}{n-1} = I_n + I_{n-2} > 2I_n,$$

因此

$$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}.$$

12. 设函数 $g(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(tx^2) \, \mathrm{d}t$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0) = 2$,

(1) 求 $g'(x)$;　　(2) 讨论 $g'(x)$ 的连续性.

解　(1)

$$g(x) = \int_0^{\sin x} f\left(tx^2\right) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) \, \mathrm{d}u,$$

故当 $x \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) \, \mathrm{d}u + \frac{1}{x^2} f\left(x^2 \sin x\right) \cdot \left(2x \sin x + x^2 \cos x\right) \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) \, \mathrm{d}u + \frac{1}{x} f\left(x^2 \sin x\right) \cdot (2 \sin x + x \cos x). \end{aligned}$$

注意到 $g(0) = 0$, 故

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin x} f\left(tx^2\right) \, \mathrm{d}t}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) \, \mathrm{d}u = \lim_{x \to 0} \frac{f\left(x^2 \sin x\right) \cdot \left(2x \sin x + x^2 \cos x\right)}{3x^2} \\ &= f(0) = 2. \end{aligned}$$

(2) 注意到

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\left[-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{x}f\left(x^2\sin x\right)\cdot(2\sin x+x\cos x)\right]$$
$$=\lim_{x\to0}\left[-\frac{2f\left(x^2\sin x\right)\cdot\left(2x\sin x+x^2\cos x\right)}{3x^2}+3f(0)\right]$$
$$=f(0)=2,$$

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是连续的.

13. 设正方形 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le1,\ 0\le y\le1\}$, $S(t)$ 表示 D 位于直线 $x+y=t$ 左下方部分的面积, 其中 $t\in[0,+\infty)$, 求函数 $f(x)=\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$ 的表达式, 这里 $x\in[0,+\infty)$.

解 当 $t\in[0,1]$ 时

$$S(t)=\int_0^t(t-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t^2,$$

当 $t\in(1,2]$ 时

$$S(t)=1-\int_{t-1}^1(1-(t-x))\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}(t-2)^2,$$

当 $t>2$ 时

$$S(t)=1.$$

于是当 $x\in[0,1]$ 时

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}x^3,$$

当 $x\in(1,2]$ 时

$$f(x)=f(1)+\int_1^x\left(1-\frac{1}{2}(t-2)^2\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}x^3+x^2-x+\frac{1}{3},$$

当 $x>2$ 时

$$f(x)=f(2)+\int_2^x\mathrm{d}x=x-1.$$

14. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明柯西不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 由于

$$0\le\left(\int_a^b(f(x)+tg(x))\,\mathrm{d}x\right)^2$$
$$=t^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以根据一元二次方程根的判别法知

$$\left(2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\le 0,$$

即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续的导数，$f(1)=0$, 且 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$,

(1) 求 $\int_0^1 xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$;　　(2) 证明 $\int_0^1 x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x\ge\frac{1}{4}$.

解　(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f^2(x)\\&=\frac{1}{2}xf^2(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 由 Cauchy 不等式

$$\int_0^1 x^2f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x\ge\left(\int_0^1 xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x\right)^2=\frac{1}{4}.$$

16. 设函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上可微，且满足 $\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=4f(\frac{1}{2})$, 试证至少存在一点 $\xi\in(\frac{1}{2},2)$, 使 $\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

证　令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, 则 $F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上可微，且 $F\left(\frac{1}{2}\right)=4f\left(\frac{1}{2}\right)$. 由积分中值定理，存在 $\eta\in(1,2)$, 使得

$$\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{f(\eta)}{\eta^2}.$$

从而有 $F(\eta)=F\left(\frac{1}{2}\right)$. 于是根据罗尔定理存在一点 $\xi\in\left(\frac{1}{2},\eta\right)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 因

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3},$$

故有

$$\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0.$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$, 且满足等式 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$.

(1) 求导数 $f'(x)$;　　　　(2) 证明当 $x \geq 0$ 时，成立不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

解 (1) 由条件可知 $f'(0)+f(0)=0$, 故 $f'(0)=-1$. 在所给等式两边同乘 $x+1$ 得

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

两边同时求导得

$$[(x+1)f'(x)]'+(x+1)f(x)=0.$$

记 $F(x)=(x+1)f'(x)$, 则由上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{e}^x F(x)]=0.$$

由此得到

$$\mathrm{e}^x F(x)=C.$$

将 $F(0)=f'(0)=-1$ 代入上式得 $C=-1$. 因此

$$F(x)=-\mathrm{e}^{-x}.$$

于是

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}.$$

(2) 当 $x \geq 0$ 时，$f'(x) \leq 0, f(x)$ 为减函数，故有

$$f(x) \leq f(0)=1.$$

另一方面，由于

$$(f(x)-\mathrm{e}^{-x})'=f'(x)+\mathrm{e}^{-x}=\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x+1} \geq 0,$$

所以 $f(x)-\mathrm{e}^{-x}$ 为增函数，因此

$$f(x)-\mathrm{e}^{-x} \geq f(0)-1=0,$$

即

$$f(x) \geq \mathrm{e}^{-x}.$$

综上，有 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

18. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η, 使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 依题意易知

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$
$$=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间.

(2) 设 $m=\min\limits_{-a\le x\le a}\{f''(x)\}$, $M=\max\limits_{-a\le x\le a}\{f''(x)\}$, 则利用 (1) 的结果有

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{3}a^3M,$$
$$\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2\,\mathrm{d}x\ge\frac{1}{3}a^3m.$$

由此得到

$$m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x\le M.$$

于是根据闭区间上连续函数的介值定理，存在 $\eta\in[-a,a]$, 使得

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此得到所要证明的结果.

19. 设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负连续函数,

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$, 使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$, 证明 (1) 中的 x_0 是唯一的.

证 (1) 令 $F(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi(x)=\int_0^x F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, 则 $\varphi'(x)=F(x)$, 而

$$\varphi(x)=\int_0^x\tau f(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\int_0^x\int_\tau^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^x\tau f(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\left[\tau\int_\tau^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big|_0^x+\int_0^x\tau f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]$$
$$=-x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由此得到 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 于是，由 Rolle 定理至少存在一点 $x_0\in(0,1)$, 使得 $\varphi'(x_0)=F(x_0)=0$.

(2) 由 $f'(x)>-\dfrac{2}{x}f(x)$ 得

$$F'(x)=f(x)+xf'(x)+f(x)=2f(x)+xf'(x)>0.$$

因此 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单增，零值点唯一.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0, \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$, 试证明在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

解 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=F(\pi)=0$. 而

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x&=\int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}F(x)\\&=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由中值定理，至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使得 $F(\xi)\sin\xi=0$, 从而 $F(\xi)=0$. 在 $(0,\xi)$ 以及 (ξ,π) 上分别利用中值定理命题得证.

21. 某立体上、下底面平行且与 x 轴垂直，若平行于底的截面面积 $s(x)$ 为 x 的二次多项式，证明该立体的体积为 $V=\frac{h}{6}(B_1+4M+B_2)$, 其中 h 为立体的高， B_1 和 B_2 分别是上底和下底的面积， M 为中截面的面积.

解 设 $S(x)=ax^2+bx+c$, 则

$$V=\int_{x_0}^{x_0+h} S(x)\,\mathrm{d}x,$$

不妨设 $x_0=0$, 则

$$S(0)=B_1,\quad S(h)=B_2,\quad S\left(\frac{h}{2}\right)=M.$$

由此解得

$$a=\frac{1}{h^2}(2B_2-4M+2B_1),\quad b=\frac{1}{h}(4M-B_2-3B_1),\quad c=B_1.$$

带入整理即得所需结论.

22. 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2, y=0$ 所围成的平面区域; D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0, x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 及 D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时， V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

解 (1)

$$V_1=\pi\int_a^2 4x^42\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\pi(32-a^5),$$

$$V_2=\pi\cdot 2a^4-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y=\pi a^4.$$

(2) 设

$$V = V_1 + V_2 = \frac{128\pi}{5} - \frac{4\pi}{5}a^5 + \pi a^4, \quad a \in (0,2),$$

则

$$V' = -4\pi a^4 + 4\pi a^3 = 4\pi a^3(1-a).$$

令 $V'=0$, 得 $a=1$. 而

$$V''\Big|_{a=1} = (-16\pi a^3 + 12\pi a^2)\Big|_{a=1} = -4\pi.$$

因此当 $a=1$ 时 V 取极大值. 又因为 $a=1$ 是 V 在 $(0,2)$ 中唯一的驻点, 所以它也是最大值点. 最大值为

$$V\Big|_{a=1} = \frac{129}{5}\pi.$$

23. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(x)$ 单调增, 证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

证　令 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x-a}{2}[f(a)+f(x)]$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 可导, 且 $F(a)=0$. 因为 $f'(x)$ 单调增, 所以利用拉格朗日中值定理有

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) - \frac{1}{2}[f(a)+f(x)] - \frac{x-a}{2}f'(x) \\ &= \frac{1}{2}[f(x)-f(a)] - \frac{x-a}{2}f'(x) \\ &= \frac{x-a}{2}f'(\xi) - \frac{x-a}{2}f'(x) \le 0, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in (a,x)$. 于是对一切 $x \in [a,b]$ 都有 $F(x) \le 0$. 特别地, $F(b) \le 0$, 此即所要证明的.

24. 设函数 $f'(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 证明

$$|f(0)| \le \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证　因

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

故

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - af(0) = \int_0^a \left[\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x,$$

从而

$$\begin{aligned} |af(0)| &\le \int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a \left[\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &\le \int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a \left[\int_0^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + a\int_0^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

即

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

25. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续一阶导数， $f(0)=f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 证明：

(1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点；

(2) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证 (1) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至多只有一个零点，则由已知得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上至多除去一点为零外各点均大于零. 由此得到 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0$. 矛盾.

(2) 记 $F(x)=\mathrm{e}^x f(x)$, 则由 (1) 知 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点，利用中值定理，至少存在一个 $\xi\in(0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 而

$$F'(x)=\mathrm{e}^x\left(f(x)+f'(x)\right),$$

故至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

第六章 微分方程

习 题 6－1

1. 判断下列微分方程的阶数:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\mathrm{e}^x=0.$

解 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数称为方程的阶，故微分方程的阶数为 2.

(2) $xy\,\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y=0.$

解 微分方程的阶数为 1.

(3) $(y'')^4-5y'-4y=\mathrm{e}^x\sin x.$

解 微分方程的阶数为 2.

(4) $x^2y'''+y'y''=1+x.$

解 微分方程的阶数为 3.

2. 验证下列各函数是否为相应微分方程的解，若是解，指出它是否为通解:

(1) $xy'-2y=0,\ \ y=5x^2.$

解 将 $y=5x^2$ 代入方程 $xy'-2y=0$ 得 $10x^2-10x^2\equiv 0$, 因此 $y=5x^2$ 是方程 $xy'-2y=0$ 的解. 一阶微分方程的通解含有一个任意常数，因此 $y=5x^2$ 不是方程通解，而是一个特解.

(2) $y''-y^2=x^2,\ \ y=\dfrac{1}{x}.$

解 将 $y=\dfrac{1}{x}$ 代入方程 $y''-y^2=x^2$ 得 $\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}\neq x^2$, 因此 $y=\dfrac{1}{x}$ 不是方程 $y''-y^2=x^2$ 的解.

(3) $(x-2y)y'=2x-y,\ \ x^2-xy+y^2=C.$

解 根据隐函数求导法则，由 $x^2-xy+y^2=C$ 有 $2x-y-xy'+2yy'=0$. 由此得到 $(x-2y)y'=2x-y$. 因此 $x^2-xy+y^2=C$ 是方程的隐式解. 又因解中含有一个任意常数，故它是方程的通解.

3. 验证函数 $y=\dfrac{C}{x}$ 是微分方程 $xy'+y=0$ 的通解，并求满足 $y(1)=1$ 的特解.

解 将 $y=\dfrac{C}{x}$ 代入方程得 $\dfrac{-C}{x}+\dfrac{C}{x}\equiv 0$ 因此 $y=\dfrac{C}{x}$ 是方程的解. 又因解中含有一

个任意常数，故它是方程的通解. 将初始条件代入得到 $C=1$, 故所求的特解为 $y=\dfrac{1}{x}$.

4. 设曲线过点 $A(\mathrm{e},2)$, 且曲线上任意点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 设曲线为 $y=f(x)$, 则根据题意得 $y'=\dfrac{1}{x}$, 解得 $y=\ln x+C$. 又因为曲线过点 $A(\mathrm{e},2)$，故 $2=\ln\mathrm{e}+C$, 即 $C=1$. 从而该曲线的方程为 $y=\ln x+1$.

5. 确定函数关系式中所含的参数，使函数满足所给的初始条件：

(1) $x^2-y^2=C,\ \ y|_{x=0}=5$.

解 将初始条件 $y|_{x=0}=5$ 代入方程 $x^2-y^2=C$ 得到 $C=-25$.

(2) $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x},\ \ y|_{x=0}=0,\ \ y'|_{x=0}=1$.

解 将初始条件 $y|_{x=0}=0$ 代入方程 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$ 得到 $C_1=0$. 从而

$$y'=(2C_1+2C_2x+C_2)\mathrm{e}^{2x}=(2C_2x+C_2)\mathrm{e}^{2x},$$

再将初始条件 $y'|_{x=0}=1$ 代入得 $C_2=1$.

习 题 6-2

1. 求下列可分离变量微分方程的通解：

(1) $y'=\mathrm{e}^{x-y}$.

解 分离变量得 $\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, 两端积分得 $\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^x+C$. 由此解得

$$y=\ln(\mathrm{e}^x+C).$$

(2) $xy\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}y=0$.

解 分离变量得 $\dfrac{-x\,\mathrm{d}x}{x+1}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$, 两端积分得 $\ln|y|=\ln|x+1|-x+C_1$. 由此解得

$$y=C(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

(3) $y-xy'=a(y^2+y'),\ (a\neq 0,$ 常数$)$.

解 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x+a}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y-ay^2}$, 两端积分得

$$\ln|y|=\ln|x+a|+\ln|1-ay|+C_1.$$

由此解得

$$y=C(a+x)(1-ay).$$

(4) $3\mathrm{e}^x\tan y\,\mathrm{d}x+(1-\mathrm{e}^x)\sec^2 y\,\mathrm{d}y=0.$

解 分离变量得

$$\frac{3e^x\,\mathrm{d}x}{e^x-1}=\frac{\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{\tan y},$$

两端积分得

$$\ln|\tan y|=3\ln|\mathrm{e}^x-1|+C_1.$$

由此解得

$$\tan y=C(\mathrm{e}^x-1)^3.$$

(5) $x(1+y)+y'(y-xy)=0.$

解 分离变量得

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{x-1}=\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y},$$

两端积分得

$$y-\ln|y+1|=x+\ln|x-1|+C_1.$$

由此解得

$$\mathrm{e}^{y-x}=C(1+y)(x-1).$$

(6) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}y=0.$

解 分离变量得

$$\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^x+1}=\frac{e^y\,\mathrm{d}y}{1-e^y},$$

两端积分得

$$-\ln|1-e^y|=\ln|e^x+1|+C_1.$$

由此解得

$$(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^y-1)=C.$$

2. 求下列方程满足初始条件的特解：

(1) $yy'=3xy^2-x,\ y|_{x=0}=1.$

解 分离变量得

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{3y^2-1}=x\,\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\frac{1}{6}\ln|3y^2-1|=\frac{1}{2}x^2+C_1.$$

由此得到通解

$$3y^2-1=C\mathrm{e}^{3x^2}.$$

代入初始条件 $y|_{x=0}=1$ 得 $C=2$. 于是得到所求的初值问题的解

$$3y^2-1=2\mathrm{e}^{3x^2}.$$

(2) $\mathrm{d}y=(1-x+y^2-xy^2)\,\mathrm{d}x,\ y(0)=1$.

解 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=(1-x)\,\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\arctan y=x-\frac{1}{2}x^2+C.$$

代入初始条件 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{\pi}{4}$. 于是得到所求的初值问题的解

$$y=\tan\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{4}\right).$$

(3) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y|_{x=0}=1$.

解 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{-2x\,\mathrm{d}x}{x^2-1},$$

两端积分得

$$-\frac{1}{y}=-\ln|x^2-1|+C_1.$$

由此得到通解

$$\frac{1}{y}=\ln|x^2-1|+C.$$

代入初始条件 $y|_{x=0}=1$ 得 $C=1$. 于是得到所求的初值问题的解

$$\frac{1}{y}=\ln|x^2-1|+1.$$

(4) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y-\sin x\,\mathrm{d}x=0,\ y(0)=0$.

解 分离变量得

$$\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$y=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C.$$

代入初始条件 $y(0)=0$ 得 $C=1$. 于是得到所求的初值问题的解

$$y=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+1.$$

3. 求通过点 $M(3,4)$ 且其上任意一点处切线斜率为该点横坐标两倍的曲线方程.

解 设曲线为 $y=f(x)$, 则根据题意得 $y'=2x$, 解得 $y=x^2+C$. 又因为曲线过点 $M(3,4)$, 故 $4=9+C$, 即 $C=-5$. 从而该曲线的方程为 $y=x^2-5$.

4. 求下列齐次方程的通解:

(1) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$.

解 令 $\dfrac{y}{x}=u$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\frac{1}{u},$$

分离变量得

$$u\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C.$$

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，于是得到方程的通解

$$\frac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C.$$

(2) $(2x\tan\dfrac{y}{x}+y)\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$.

解 原方程经整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}.$$

令 $\dfrac{y}{x}=u$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+2\tan u.$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{2\,\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得

$$\ln\sin u=2\ln|x|+C_1,$$

即有

$$\sin u=Cx^2.$$

以 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代，于是得到方程的通解

$$\sin\frac{y}{x}=Cx^2.$$

(3) $xy'+y=2\sqrt{xy}$.

解 原方程经整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}.$$

令 $\frac{y}{x}=u$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}-u.$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}-2u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得

$$-\ln|1-\sqrt{u}|=\ln|x|+C_1,$$

即有

$$x(1-\sqrt{u})=C.$$

以 $u=\frac{y}{x}$ 回代，于是得到方程的通解

$$x-\sqrt{xy}=C.$$

(4) $x\,\mathrm{d}y=y(1+\ln y-\ln x)\,\mathrm{d}x$.

解 原方程经整理得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}(1+\ln\frac{y}{x}).$$

令 $\frac{y}{x}=u$, 则 $y=ux$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u(1+\ln u).$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分得

$$\ln|\ln u|=\ln|x|+C_1,$$

即有

$$u=\mathrm{e}^{Cx}.$$

以 $u=\frac{y}{x}$ 回代，于是得到方程的通解

$$\frac{y}{x}=\mathrm{e}^{Cx}.$$

5. 化下列方程为齐次方程，并求出通解：

(1) $y' = \dfrac{x+2y+1}{2x-3}$.

解 解方程组 $\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x-3=0 \end{cases}$ 得 $x_0=\dfrac{3}{2}, y_0=-\dfrac{5}{4}$. 作变换 $x=t+\dfrac{3}{2}, y=u-\dfrac{5}{4}$. 代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}+\frac{u}{t}.$$

令 $v=\dfrac{u}{t}$, 则 $u=vt$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v+t\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 代入上面方程，整理并分离变量可得

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}t}{2t}.$$

积分得

$$v=\frac{1}{2}\ln|t|+C_1.$$

代回 $v=\dfrac{u}{t}$ 得

$$\frac{u}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C_1.$$

再代回 $u=y+\dfrac{5}{4}, t=x-\dfrac{3}{2}$ 得到原方程通解

$$4y+5=(2x-3)[\ln|2x-3|+C].$$

(2) $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

解 解方程组 $\begin{cases} 2y-x-5=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$ 得 $x_0=-1, y_0=2$. 作变换 $x=t-1, y=u+2$. 代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{2u-t}{2t-u}.$$

令 $v=\dfrac{u}{t}$, 则 $u=vt$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v+t\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 代入上面方程，整理并分离变量可得

$$\frac{(2-v)\,\mathrm{d}v}{v^2-1}=\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

积分得

$$\frac{1}{2}\ln|v-1|-\frac{3}{2}\ln|v+1|=\ln|t|+C_1.$$

化简得

$$\frac{v-1}{(v+1)^3}=C_2t^2.$$

代回 $v=\dfrac{u}{t}$ 得

$$u-t=C_2(u+t)^3.$$

再代回 $u=y-2, t=x+1$ 得到原方程通解

$$y-x-3=C(y+x-1)^3.$$

(3) $(x+4y)\,\mathrm{d}y=(2x+3y+5)\,\mathrm{d}x$.

解 解方程组 $\begin{cases} x+4y=0 \\ 2x+3y+5=0 \end{cases}$ 得 $x_0=-4, y_0=1$. 作变换 $x=t-4, y=u+1$. 代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{2t+3u}{t+4u}.$$

令 $v=\frac{u}{t}$, 则 $u=vt$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v+t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 代入上面方程，整理并分离变量可得

$$\frac{(1+4v)\,\mathrm{d}v}{1+v-2v^2}=\frac{2\,\mathrm{d}t}{t}.$$

积分得

$$-5\ln|v-1|-\ln|2v+1|=6\ln|t|+C_1.$$

化简得

$$t^6(v-1)^5(2v+1)=C.$$

代回 $v=\frac{u}{t}$ 得

$$(u-t)^5(2u+v)=C.$$

再代回 $u=y-1, t=x+4$ 得到原方程通解

$$(y-x-5)^5(x+2y+2)=C.$$

(4) $(x-y-1)\,\mathrm{d}x+(4y+x-1)\,\mathrm{d}y=0$.

解 解方程组 $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 4y+x-1=0 \end{cases}$ 得 $x_0=1, y_0=0$. 作变换 $x=t+1, y=u$. 代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{u-t}{4u+t}.$$

令 $v=\frac{u}{t}$, 则 $u=vt$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v+t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 代入上面方程，整理并分离变量可得

$$\frac{(1+4v)\,\mathrm{d}v}{1+4v^2}=\frac{-\mathrm{d}t}{t}.$$

积分得

$$\arctan 2v+\ln(4v^2+1)+\ln t^2=C.$$

代回 $v=\frac{u}{t}$ 得

$$\arctan\left(\frac{2u}{t}\right)+\ln(4u^2+t^2)=C.$$

再代回 $u=y, t=x-1$ 得到原方程通解

$$\arctan\frac{2y}{x-1}+\ln[4y^2+(x-1)^2]=C.$$

6. 求下列一阶线性方程的通解:

(1) $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int 2x\,dx}\Big(\int xe^{-x^2}e^{\int 2x\,dx}\,dx+C\Big)\\&=e^{-x^2}\Big(\int xe^{-x^2}e^{x^2}\,dx+C\Big)\\&=e^{-x^2}\Big(\frac{x^2}{2}+C\Big).\end{aligned}$$

(2) $xy'-3y=x^2$.

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{\int\frac{3}{x}dx}\Big(\int xe^{-\int\frac{3}{x}dx}\,dx+C\Big)\\&=e^{3\ln|x|}\Big(\int xe^{-3\ln|x|}\,dx+C\Big)\\&=x^3\Big(-x^{-1}+C\Big)\\&=Cx^3-x^2.\end{aligned}$$

(3) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\Big(\int(1+x^2)e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\,dx+C\Big)\\&=e^{\ln(1+x^2)}\Big(\int(1+x^2)e^{-\ln(1+x^2)}\,dx+C\Big)\\&=(1+x^2)(x+C).\end{aligned}$$

(4) $\tan t\dfrac{dx}{dt}-x=5$.

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}x&=e^{\int\cot t\,dt}\Big(\int 5\cot t e^{-\int\cot t\,dt}\,dt+C\Big)\\&=e^{\ln\sin t}\Big(\int 5\cot t e^{-\ln\sin t}\,dx+C\Big)\\&=\sin t\Big(-5\frac{1}{\sin t}+C\Big)\\&=C\sin t-5.\end{aligned}$$

(5) $y'+\dfrac{y}{x\ln x}=1.$

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\mathrm{e}^{-\ln\ln x}\left(\int\mathrm{e}^{\ln\ln x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\frac{1}{\ln x}\left(x\ln x-x+C\right)\\ &=x+(C-x)\frac{1}{\ln x}. \end{aligned}$$

(6) $y'+y\cos x=\mathrm{e}^{-\sin x}.$

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\mathrm{e}^{-\sin x}\left(\int\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=(x+C)\mathrm{e}^{-\sin x}. \end{aligned}$$

7. 求下列方程满足初始条件的特解:

(1) $y'-y\tan x=\sec x,\ y(0)=0.$

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\frac{1}{\cos x}\left(x+C\right). \end{aligned}$$

代入初始条件 $y(0)=0$ 得 $C=0$, 所以

$$y=\frac{x}{\cos x}.$$

(2) $xy'+y=\sin x,\ y(\pi)=1.$

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\frac{1}{x}\left(-\cos x+C\right). \end{aligned}$$

代入初始条件 $y(\pi)=1$ 得 $C=\pi-1$, 所以

$$y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x).$$

(3) $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1,\ y(1)=0.$

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int\frac{1-2x}{x^2}\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int\frac{1-2x}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=e^{\frac{1}{x}+2\ln x}\left(\int e^{-\frac{1}{x}-2\ln x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=x^2e^{\frac{1}{x}}\left(e^{-\frac{1}{x}}+C\right)\\&=x^2\left(1+Ce^{\frac{1}{x}}\right).\end{aligned}$$

代入初始条件 $y(1)=0$ 得 $C=-e^{-1}$, 所以

$$y=x^2(1-e^{\frac{1}{x}-1}).$$

(4) $y'-2y=e^x-x,\ y(0)=\dfrac{5}{4}.$

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{\int 2\mathrm{d}x}\left(\int(e^x-x)e^{-\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=e^{2x}\left(\int(e^x-x)e^{-2x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=e^{2x}\left(-e^{-x}+\frac{1}{4}(2xe^{-2x}+e^{-2x})+C\right)\\&=Ce^{2x}+\frac{1}{2}x-e^x+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

代入初始条件 $y(0)=\dfrac{5}{4}$ 得 $C=2$, 所以

$$y=2e^{2x}+\frac{1}{2}x-e^x+\frac{1}{4}.$$

8. 求下列伯努利方程的通解:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy^2.$

解 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y^{-1}=-1.$$

利用公式得通解为

$$
\begin{aligned}
y^{-1} &= \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int -\mathrm{e}^{\int \frac{-1}{x}dx}\,\mathrm{d}x + C\right] \\
&= x(C - \ln|x|).
\end{aligned}
$$

也可写成

$$xy(C - \ln|x|) = 1.$$

(2) $y' + y - x\sqrt{y} = 0.$

解 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}(\sqrt{y})}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{x}{2}.$$

利用公式得通解为

$$
\begin{aligned}
\sqrt{y} &= \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{2}\mathrm{d}x}\left[\int \frac{x}{2}\mathrm{e}^{\int \frac{1}{2}dx}\,\mathrm{d}x + C\right] \\
&= C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + x - 2.
\end{aligned}
$$

(3) $y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}.$

解 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}(y^{-\frac{1}{3}})}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{3x}y^{-\frac{1}{3}} = -x^2.$$

利用公式得通解为

$$
\begin{aligned}
y^{-\frac{1}{3}} &= \mathrm{e}^{\int \frac{2}{3x}\mathrm{d}x}\left[\int -x^2\mathrm{e}^{-\int \frac{2}{3x}dx}\,\mathrm{d}x + C\right] \\
&= Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}x^3.
\end{aligned}
$$

也可写成

$$y^{\frac{1}{3}}\left(Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}x^3\right) = 1.$$

9. 设曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线与连接点原点 O 和 M 的直线垂直，求这条曲线的方程.

解 设曲线为 $y = f(x)$, 则根据题意得 $y' = -\frac{x}{y}$, 解得 $x^2 + y^2 = C$.

10. 一曲线过点 $(2,3)$, 其在两坐标轴间任意切线段均被切点平分，求该曲线的方程.

解 设曲线为 $y = f(x)$, 则根据题意得 $y' = -\frac{y}{x}$, 解得 $xy = C$. 代入初始条件 $y(2) = 3$ 得 $C = 6$, 所以该曲线的方程为 $xy = 6$.

习题 6-3

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.

解 连续积分 2 次得

$$y'=\arctan x+C_1,$$
$$y=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

(2) $y'''=xe^x$.

解 连续积分 3 次得

$$y''=xe^x-e^x+C_1,$$
$$y'=xe^x-2e^x+C_1x+C_2,$$
$$y=xe^x-3e^x+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3.$$

(3) $xy''=y'$.

解 令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$. 代入方程并整理得

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}.$$

其通解为 $p=C_3x$. 因此有

$$y'=C_3x.$$

再积分得

$$y=C_1x^2+C_2.$$

(4) $y''=1+y'^2$.

解 令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}$. 代入方程并整理得

$$\frac{dp}{dx}=1+p^2.$$

其通解为 $p=\tan(x+C_1)$. 因此有

$$y'=\tan(x+C_1).$$

再积分得

$$y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2.$$

(5) $y''+y'^2=2\mathrm{e}^{-y}$.

解 令 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=2\mathrm{e}^{-y}.$$

其通解为 $p=e^{-y}\sqrt{4e^y+C_1}$. 因此有

$$y'=e^{-y}\sqrt{4e^y+C_1}.$$

再积分得

$$\mathrm{e}^y=x^2+C_1x+C_2.$$

(6) $1+yy''+y'^2=0$.

解 原方程可改写为得

$$(yy')'=-1.$$

因此有

$$yy'=-x+C_2.$$

再积分得

$$y^2=C_1-(x+C_2)^2.$$

(7) $y^3y''-1=0$.

解 令 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得

$$y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-1=0.$$

其通解为 $p^2=-\dfrac{1}{y^2}+C_1$. 因此有

$$y'=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{y}.$$

再积分得

$$C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2.$$

(8) $y''=y'^3+y'$.

解 令 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^3+p.$$

其通解为 $p=\tan(y+C_3)$, 或 $p=0$. 因此有 $y'=\tan(y+C_3)$ 或 $y'=0$. 再积分得

$$y=\arcsin(C_2\mathrm{e}^x)+C_1 \text{ 或} y=C.$$

注：按照通解的定义，只需求出 $y=\arcsin(C_2\mathrm{e}^x)+C_1$ 即可.

(9)　$xy'''+y''=1+x$.

解　令 $y''=p$, 则 $y'''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{p}{x}=1+\frac{1}{x}.$$

其通解为 $p=\frac{1}{2}x+1+C_1\frac{1}{x}$. 因此有

$$y''=\frac{1}{2}x+1+C_1\frac{1}{x}.$$

再积分 2 次得

$$y'=\frac{1}{4}x^2+x+C_1\ln|x|+C_2,$$
$$y=\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3.$$

(10)　$xy''-y'\ln y'+y'=0$.

解　令 $\ln y'=p$, 则 $y''=e^p$. 代入方程得

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-p+1=0.$$

其通解为 $p=C_1x+1$. 因此有

$$y'=e^{C_1x+1}.$$

再积分得

$$y=\frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{1+C_1x}+C_2.$$

2. 求下列初值问题的解:

(1)　$\begin{cases} y''=x+\sin x, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1. \end{cases}$

解　积分 2 次得

$$y'=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1,$$
$$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2.$$

由初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ 得 $C_1=0$, $C_2=1$. 于是所求特解为

$$y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+1.$$

(2) $\begin{cases}(1+x^2)y''=2xy',\\ y(0)=1,\ y'(0)=3.\end{cases}$

解　令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{2xp}{1+x^2}.$$

其通解为 $p=C_1(1+x^2)$. 再积分得 $y=C_1(x+\frac{1}{3}x^3)+C_2$. 由初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=3$ 得 $C_1=3$, $C_2=1$. 于是所求特解为

$$y=3x+x^3+1.$$

(3) $\begin{cases}2y'^2-(y-1)y''=0,\\ y(1)=2,\ y'(1)=-1;\end{cases}$

解　令 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得 $2p^2-(y-1)p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=0$. 由此得到

$$(y-1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2p \text{ 或 } p=0.$$

由初始条件 $y'(1)=-1$ 知 $p=y'\neq 0$. 解前一个方程得 $p=C_1(y-1)^2$. 两边积分得到原方程的通解

$$y=\frac{-1}{C_1x+C_2}+1.$$

由初始条件 $y(1)=2$, $y'(1)=-1$ 得 $C_1=-1$, $C_2=0$. 于是所求特解为 $y=\dfrac{1}{x}+1$.

(4) $\begin{cases}y'''=\sqrt{y''},\\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0.\end{cases}$

解　令 $y''=p$, 则 $y'''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\sqrt{p}.$$

其通解为 $p=(\frac{1}{2}x+C_1)^2$. 因此有

$$y''=(\frac{1}{2}x+C_1)^2.$$

再积分 2 次得

$$y'=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}x+C_1)^3+C_2,$$
$$y=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x+C_1)^4+C_2x+C_3.$$

由初始条件 $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$ 得 $C_1=0,\ C_2=0,\ C_2=0$. 于是所求特解为 $y=\dfrac{x^4}{48}$.

3. 对任意的 $x>0$, 曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 的表达式.

解 根据题意得

$$-xy'+y=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

整理得

$$-y'-xy''=0,$$

令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{-p}{x}.$$

其通解为

$$p=\frac{C_1}{x}.$$

因为 $x>0$, 再积分得

$$y=C_1\ln x+C_2.$$

4. 设 $y=y(x)$ 是通过点 $M_0(0,1)$ 的连续凸曲线, 其上任意点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且曲线在点 M_0 处的切线方程为 $y=x+1$. 求该曲线的方程.

解 根据题意得

$$\frac{-y''}{1+y'^2}=1.$$

令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 代入方程并整理得

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=1+p^2.$$

其通解为 $p=\tan(C_1-x)$. 再积分得 $y=\ln|\cos(C_1-x)|+C_2$. 由初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{\pi}{4},\ C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$. 再注意到曲线的连续性, 得到所求曲线方程

$$y=\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1+\frac{1}{2}\ln 2,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right).$$

习　题　6 - 4

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性相关的, 哪些是线性无关的:

(1) e^x, e^{-x}.

解 由于两个不恒为零的函数只要不是只差一个常数因子 (即一个函数不等于某常数乘以另一个函数), 它们一定是线性无关的. 因而 e^x, e^{-x} 线性无关.

(2) $\cos 2x$, $\sin 2x$.

解 $\cos 2x$, $\sin 2x$ 线性无关.

(3) $\sin^2 x$, $1-\cos 2x$.

解 $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$, 因此 $\sin^2 x$, $1-\cos 2x$ 线性相关.

(4) $\ln x$, $x\ln x$.

解 $\ln x$, $x\ln x$ 线性无关.

2. 验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解, 并写出该方程的通解.

解 由于

$$(e^{x^2})''-4x(e^{x^2})'+(4x^2-2)e^{x^2}=(4x^2+2)e^{x^2}-8x^2e^{x^2}+(4x^2-2)e^{x^2}=0,$$

故 $y_1 = e^{x^2}$ 是方程的解. 另一方面,

$$(xe^{x^2})''-4x(xe^{x^2})'+(4x^2-2)xe^{x^2}=(4x^3+6x)e^{x^2}-(8x^3+4x)e^{x^2}+(4x^2-2)xe^{x^2}=0,$$

故 $y_2 = xe^{x^2}$ 也是方程的解. 再根据线性齐次方程通解的结构定理知该方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{x^2}$.

3. 验证 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $y''-3y'+2y=e^{5x}$ 的通解.

解 由于

$$(e^x)''-3(e^x)'+2e^x=0,$$

故 e^x 是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的解. 另一方面,

$$(e^{2x})''-3(e^{2x})'+2e^{2x}=0,$$

故 e^{2x} 是齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的解. 再根据线性齐次方程通解的结构定理知齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

而

$$\left(\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}\right)''-3\left(\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}\right)'+2\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}=\mathrm{e}^{5x},$$

故 $\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$ 是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的特解，从而

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$$

是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的通解.

4. 验证 $y=C_1x^5+C_2\frac{1}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$ (C_1,C_2 是任意常数) 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的通解.

解 由于

$$x^2(x^5)''-3x(x^5)'-5x^5=0,$$

故 x^5 是齐次方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的解. 另一方面,

$$x^2\left(\frac{1}{x}\right)''-3x\left(\frac{1}{x}\right)'-5\frac{1}{x}=0,$$

故 $\frac{1}{x}$ 是齐次方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的解. 再根据线性齐次方程通解的结构定理知齐次方程 $x^2y''-3xy'-5y=0$ 的通解为

$$\overline{y}=C_1x^5+C_2\frac{1}{x}.$$

而

$$x^2\left(-\frac{x^2}{9}\ln x\right)''-3x\left(-\frac{x^2}{9}\ln x\right)'-5\left(-\frac{x^2}{9}\ln x\right)=x^2\ln x,$$

故 $-\frac{x^2}{9}\ln x$ 是方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$ 的特解，从而

$$y=C_1x^5+C_2\frac{1}{x}-\frac{x^2}{9}\ln x$$

是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的通解.

5. 若 $y_1=3$, $y_2=3+x^2$, $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，其中 $f(x)\neq 0$, 且 $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ 都是连续函数，求此微分方程的通解.

解 因为 $y_1=3$, $y_2=3+x^2$, $y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，所以 $y_2-y_1=x^2$, $y_3-y_2=\mathrm{e}^x$ 都是齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解. 又 x^2,e^x 线性无关，微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为

$$y=C_1x^2+C_2\mathrm{e}^x+3.$$

习 题 6-5

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y''-4y'=0$.

解 特征方程为 $r^2-4r=0$, 两个特征根为 $r_1=0$ 和 $r_2=4$, 于是通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}.$$

(2) $y''-2y'+y=0$.

解 特征方程为 $r^2-2r+1=0$, 两个特征根为 $r_1=r_2=1$, 于是通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{x}.$$

(3) $y''+y=0$.

解 特征方程为 $r^2+1=0$, 两个特征根为 $r_1=i$ 和 $r_2=-i$, 于是通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

(4) $y''+7y'+10y=0$.

解 特征方程为 $r^2+7r+10=0$, 两个特征根为 $r_1=-2$ 和 $r_2=-5$, 于是通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-5x}.$$

(5) $y''-4y'+13y=0$.

解 特征方程为 $r^2-4r+13=0$, 两个特征根为 $r_1=2+3i$ 和 $r_2=2-3i$, 于是通解为

$$y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

(6) $9y''+6y'+y=0$.

解 特征方程为 $9r^2+6r+1=0$, 两个特征根为 $r_1=r_2=-\frac{1}{3}$, 于是通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}.$$

(7) $y''-6y'+25y=0$.

解 特征方程为 $r^2-6r+25=0$, 两个特征根为 $r_1=3+4i$ 和 $r_2=3-4i$, 于是通解为

$$y=\mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x).$$

(8) $y''' + y'' - y' - y = 0$.

解　特征方程为 $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$, 两个特征根为 $r_1 = 1$ 和 $r_2 = r_3 = -1$, 于是通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x.$$

2. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0, \\ y(0) = 5,\ y'(0) = 8. \end{cases}$

解　特征方程为 $r^2 - 5r + 4 = 0$, 两个特征根为 $r_1 = 1$ 和 $r_2 = 4$, 于是通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

由条件 $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$ 得 $C_1 = 4$, $C_2 = 1$. 从而所求特解为

$$y = 4e^x + e^{4x}.$$

(2) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases}$

解　特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$, 两个特征根为 $r_1 = r_2 = 2$, 于是通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

由条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ 得 $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. 从而所求特解为

$$y = (1 - x)e^{2x}.$$

(3) $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2. \end{cases}$

解　特征方程为 $r^2 + 2r + 10 = 0$, 两个特征根为 $r_1 = -1 + 3i$ 和 $r_2 = -1 - 3i$, 于是通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

由条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 得 $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. 从而所求特解为

$$y = e^{-x}(\cos 3x + \sin 3x).$$

(4) $\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \pi. \end{cases}$

解　特征方程为 $r^2 + \pi^2 = 0$, 两个特征根为 $r_1 = \pi i$ 和 $r_2 = -\pi i$, 于是通解为

$$y = C_1 \cos \pi x + C_2 \sin \pi x.$$

由条件 $y(0)=0,\ y'(0)=\pi$ 得 $C_1=0,\ C_2=1$. 从而所求特解为

$$y=\sin\pi x.$$

3. 一单位质量质点在数轴上运动, 开始时质点在原点处, 且速度为 v_0, 在运动过程中, 它受到一外力作用, 该力的大小与质点到原点的距离成正比 (比例系数为 $k_1>0$), 而方向与初速度一致, 又介质阻力与速度成正比 (比例系数为 $k_2>0$), 求该质点运动的路程函数.

解 设质点运动的路程函数为 $x=x(t)$, 则

$$k_1x-k_2x'=x''.$$

特征方程为 $r^2+k_2r-k_1=0$, 两个特征根为 $r_1=\frac{1}{2}(-k_2+\sqrt{{k_2}^2+4k_1})$ 和 $r_2=\frac{1}{2}(-k_2-\sqrt{{k_2}^2+4k_1})$, 于是通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1})t}+C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1})t}.$$

由条件 $x(0)=0,\ y'(0)=v_0$ 得 $C_1=\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}},\ C_2=-\dfrac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}$.

$$x=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1})t}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1})t}\right]$$

4. 写出下列方程的一个特解的形式:

(1) $y''-3y=3x^2+1$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=3x^2+1, \lambda=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3=0$. 显然 $\lambda=0$ 不是特征根. 方程有形如 $y^*=Ax^2+Bx+C$ 的特解.

(2) $y''-3y'+2y=3\mathrm{e}^{2x}$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=3, \lambda=2$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$. 显然 $\lambda=2$ 是单特征根. 方程有形如 $y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$ 的特解.

(3) $y''-3y'+2y=x^2\mathrm{e}^x$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=x^2, \lambda=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r+2=0$. 显然 $\lambda=1$ 是单特征根. 方程有形如 $y^*=x(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^x$ 的特解.

(4) $y''-6y'+9y=xe^{3x}$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=x, \lambda=3$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-6r+9=0$. 显然 $\lambda=3$ 是重根. 方程有形如 $y^*=x^2(Ax+B)\mathrm{e}^{3x}$ 的特解.

(5) $y''-2y'+10y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$.

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型，其中 $\lambda=2$, $\omega=3$, $P_l^{(1)}(x)=0$, $P_m^{(2)}(x)=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+10=0$, 特征根为 $1\pm 3\mathrm{i}$. 因 $\lambda+\mathrm{i}\omega=2+3\mathrm{i}$ 不是特征根， $n=\max\{l,m\}=\max\{0,0\}=0$, 故方程有形如 $y^*=\mathrm{e}^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$ 的特解.

(6) $y''-2y'+10y=x\mathrm{e}^{x}\cos x$.

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型，其中 $\lambda=1$, $\omega=1$, $P_l^{(1)}(x)=x$, $P_m^{(2)}(x)=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+10=0$, 特征根为 $1\pm 3\mathrm{i}$. 因 $\lambda+\mathrm{i}\omega=1+\mathrm{i}$ 不是特征根， $n=\max\{l,m\}=\max\{1,0\}=1$, 故方程有形如 $y^*=\mathrm{e}^{x}[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$ 的特解.

5. 求下列方程的通解:

(1) $y''-6y'+8y=3x+1$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=3x+1, \lambda=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-6r+8=0$, 特征根为 2 和 4. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{4x}.$$

显然 $\lambda=0$ 不是特征根，方程有形如 $y^*=ax+b$ 的特解. 将其代入原方程得

$$-6a+8ax+8b=3x+1.$$

比较等号两边 x 同次幂的系数得 $a=\dfrac{3}{8}, b=\dfrac{13}{32}$, 故 $y^*=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{13}{32}$ 为方程的一个特解. 从而方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{4x}+\frac{3}{8}x+\frac{13}{32}.$$

(2) $y''-8y'+7y=14$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=14, \lambda=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-8r+7=0$, 特征根为 1 和 7. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{7x}.$$

显然 $\lambda=0$ 不是特征根，方程有形如 $y^*=a$ 的特解. 将其代入原方程得

$$7a=14.$$

得 $a=2$, 故 $y^*=2$ 为方程的一个特解. 从而方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{7x}+2.$$

(3) $2y''+y'-y=2\mathrm{e}^x$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=2,\lambda=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $2r^2+r-1=0$, 特征根为 -1 和 $\frac{1}{2}$. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

显然 $\lambda=1$ 不是特征根, 方程有形如 $y^*=a\mathrm{e}^x$ 的特解. 将其代入原方程得

$$2a=2.$$

得 $a=1$, 故 $y^*=\mathrm{e}^x$ 为方程的一个特解. 从而方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^x.$$

(4) $y''-2y'+y=x\mathrm{e}^x$.

解 方程的自由项为 $P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=x,\lambda=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$, 特征根 1 为重根. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x.$$

显然 $\lambda=1$ 是重根, 方程有形如 $y^*=x^2(ax+b)\mathrm{e}^x$ 的特解. 将其代入原方程比较等号两边 x 同次幂的系数得 $a=\frac{1}{6},b=0$, 故 $y^*=\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^x$ 为方程的一个特解. 从而方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^x.$$

(5) $y''+y=3\cos 2x$.

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型, 其中 $\lambda=0$, $\omega=2$, $P_l^{(1)}(x)=3$, $P_m^{(2)}(x)=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 特征根为 $\pm\mathrm{i}$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因 $\lambda+\mathrm{i}\omega=2\mathrm{i}$ 不是特征根, $n=\max\{l,m\}=\max\{0,0\}=0$, 故方程有形如

$$y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$$

的特解. 代入方程比较两边 $\cos 2x$ 和 $\sin 2x$ 的系数得 $a=-1, b=0$. 于是 $y^*=-\cos 2x$. 方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos 2x.$$

(6) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin 2x$.

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型, 其中 $\lambda=1$, $\omega=2$, $P_l^{(1)}(x)=0$, $P_m^{(2)}(x)=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+5=0$, 特征根为 $1\pm 2\mathrm{i}$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

因 $\lambda+\mathrm{i}\,\omega=1+2\mathrm{i}$ 是特征根, $n=\max\{l,m\}=\max\{0,0\}=0$, 故方程有形如

$$y^*=x\mathrm{e}^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

的特解. 代入方程比较两边 $\cos 2x$ 和 $\sin 2x$ 的系数得 $a=-\frac{1}{4}, b=0$. 于是 $y^*=-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x$. 方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x\cos 2x.$$

(7) $y''-y=2x\sin x$.

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型, 其中 $\lambda=0$, $\omega=1$, $P_l^{(1)}(x)=0$, $P_m^{(2)}(x)=2x$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-1=0$, 特征根为 ± 1. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

因 $\lambda+\mathrm{i}\,\omega=\mathrm{i}$ 不是特征根, $n=\max\{l,m\}=\max\{1,0\}=1$, 故方程有形如

$$y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$$

的特解. 代入方程比较两边 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的系数得 $a=0, b=-1, c=-1, d=0$. 于是 $y^*=-x\sin x-\cos x$. 方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-x\sin x-\cos x.$$

(8) $y''-2y'+2y=x\mathrm{e}^x\cos x$.

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型, 其中 $\lambda=1$, $\omega=1$, $P_l^{(1)}(x)=x$, $P_m^{(2)}(x)=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+2=0$, 特征根为 $1\pm\mathrm{i}$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

因 $\lambda+\mathrm{i}\omega=1+\mathrm{i}$ 是特征根， $n=\max\{l,m\}=\max\{1,0\}=1$, 故方程有形如

$$y^*=x\mathrm{e}^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$$

的特解. 代入方程比较两边 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的系数得 $a=0,b=\frac{1}{4},c=\frac{1}{4},d=0$. 于是 $y^*=\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x(\cos x+x\sin x)$. 方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x(\cos x+x\sin x).$$

(9) $y''+2y'+y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

解 考虑方程

$$y''+2y'+y=\mathrm{e}^x$$

与

$$y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-x}.$$

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+2r+1=0$, 特征根为 -1(二重). 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

第一个方程具有形式为 $y_1^*=ae^x$ 的特解，第二个方程具有形式为 $y_2^*=bx^2e^{-x}$ 的特解. 由叠加原理，所给方程具有形式为

$$y^*=ae^x+bx^2e^{-x}$$

的特解. 代入方程比较得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2}$. 于是 $y^*=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^x$. 方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^x.$$

(10) $y''-3y'=x+\cos x$.

解 考虑方程

$$y''-3y'=x$$

与

$$y''-3y'=\cos x.$$

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-3r=0$, 特征根为 0 和 3. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_2+C_1e^{3x}.$$

第一个方程具有形式为 $y_1^*=x(ax+b)$ 的特解, 第二个方程具有形式为 $y_2^*=c\cos x+d\sin x$ 的特解. 由叠加原理，所给方程具有形式为

$$y^*=x(ax+b)+c\cos x+d\sin x$$

的特解. 代入方程得 $a=-\frac{1}{6}, b=-\frac{1}{9}, c=-\frac{1}{10}, b=-\frac{3}{10}$. 于是 $y^*=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x)$. 方程的通解为

$$y=C_2+C_1e^{3x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x).$$

6. 求下列初值问题的解:

(1) $\begin{cases} y''-10y'+9y=e^{2x}, \\ y(0)=\frac{6}{7},\ y'(0)=\frac{33}{7}. \end{cases}$

解 方程的自由项为 $P_n(x)e^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=1, \lambda=2$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-10r+9=0$, 特征根为 1 和 9. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{9x}.$$

显然 $\lambda=2$ 不是特征根, 方程有形如 $y^*=ae^{2x}$ 的特解. 将其代入原方程比较等号两边 x 同次幂的系数得 $a=-\frac{1}{7}$, 故 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$ 为方程的一个特解. 从而方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}$. 代入初始条件 $y(0)=\frac{6}{7}$, $y'(0)=\frac{33}{7}$ 解得 $C_1=\frac{1}{7}$, $C_2=\frac{1}{7}$. 从而方程的解为

$$y=\frac{1}{2}(e^{9x}+e^x)-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

(2) $\begin{cases} y''-4y'=5, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{cases}$

解 方程的自由项为 $P_n(x)e^{\lambda x}$ 型, 其中 $P_n(x)=5, \lambda=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r=0$, 特征根为 0 和 4. 齐次方程通解为

$$\overline{y}=C_1+C_2e^{4x}.$$

显然 $\lambda=0$ 是单根, 方程有形如 $y^*=ax$ 的特解. 将其代入原方程比较等号两边 x 同次幂的系数得 $a=-\frac{5}{4}$, 从而程的通解为 $y=C_1+C_2e^{4x}-\frac{5}{4}x$. 代入初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 解得 $C_1=\frac{11}{16}$, $C_2=\frac{5}{16}$. 从而方程的解为

$$y=\frac{11}{16}+\frac{5}{16}e^{4x}-\frac{5}{4}x.$$

(3) $\begin{cases} y''+4y=\sin x\cos x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=0. \end{cases}$

解 方程的自由项为 $e^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x+P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型, 其中 $\lambda=0$, $\omega=2$, $P_l^{(1)}(x)=0$, $P_m^{(2)}(x)=\frac{1}{2}$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+4=0$, 特征根为 $\pm 2\mathrm{i}$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因 $\lambda+\mathrm{i}\omega=2\mathrm{i}$ 是特征根，$n=\max\{l,m\}=\max\{0,0\}=0$，故方程有形如

$$y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

的特解. 代入方程比较两边 $\cos 2x$ 和 $\sin 2x$ 的系数得 $a=-\dfrac{1}{8}, b=0$. 于是方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{8}x\cos 2x.$$

代入初始条件 $y(0)=0,\ y'(0)=0$ 解得 $C_1=0,\ C_2=\dfrac{1}{16}$. 从而方程的解为

$$y=\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{8}x\cos 2x.$$

(4) $\begin{cases} y'''+2y''+y'+2\mathrm{e}^{-2x}=0, \\ y(0)=2,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1. \end{cases}$

解 特征方程为

$$r^3+2r^2+r=0.$$

特征根为 0, −1（二重根）. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1+(C_2+C_3x)\mathrm{e}^{-x}.$$

设 $y^*=a\mathrm{e}^{-2x}$ 为所给方程的一个特解. 代入方程，比较系数得 $a=1$. 于是所求的通解为

$$y=C_1+(C_2+C_3x)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}.$$

代入初始条件 $y(0)=2,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$ 解得 $C_1=4,\ C_2=-3,\ C_3=0$. 从而方程的解为

$$y=4-3\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}.$$

7. 长为 6 米的链条自桌上无摩擦地向下滑动，假设在运动开始时，链条自桌上垂下的部分已经有 1 米，问需多长时间链条全部滑出桌面.

解 设链条随时间滑动路程的函数为 $s=s(t)$，则根据题意得

$$s''=\frac{s+1}{6}g,$$

初始条件为

$$s(0)=0,\ s'(0)=0.$$

方程的自由项为 $P_n(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ 型，其中 $P_n(t)=\dfrac{1}{6}g, \lambda=0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-\dfrac{g}{6}=0$，特征根为 $\pm\sqrt{\dfrac{g}{6}}$. 齐次方程通解为

$$\overline{s}=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}.$$

显然 $\lambda=0$ 是不是特征根，方程有形如 $s^*=a$ 的特解. 将其代入原方程比较等号两边 t 同次幂的系数得 $a=-1$, 从而程的通解为

$$s=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t}-1.$$

代入初始条件 $s(0)=0,\ s'(0)=0$ 解得 $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$. 从而方程的解为

$$s=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{6}}t}+\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{6}}t})-1.$$

令 $s=5$, 解得 $t=\ln(6+\sqrt{35})\sqrt{\dfrac{6}{g}}$ (秒).

8. 已知函数 $y=f(x)$ 所确定的曲线与 x 轴相切于原点，且满足 $f(x)=2+\sin x-f''(x)$, 试求 $f(x)$.

解 考虑方程

$$y''+y=2$$

与

$$y''+y=\sin x.$$

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 特征根为 $\pm i$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

第一个方程具有形式为 $y_1^*=a$ 的特解，第二个方程具有形式为 $y_2^*=x(b\cos x+c\sin x)$ 的特解. 由叠加原理，所给方程具有形式为

$$y^*=a+x(b\cos x+c\sin x)$$

的特解. 代入方程得 $a=2,b=-\dfrac{1}{2},c=0$. 方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+2-\frac{1}{2}x\cos x.$$

根据题意知初始条件为

$$y(0)=0,\ y'(0)=0.$$

从而得 $C_1=-2,\ C_2=\dfrac{1}{2}$. 故方程的解为

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)+2(1-\cos x).$$

9. 设函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\displaystyle\int_0^x(t-x)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $\varphi(x)$.

解　易得

$$\varphi''+\varphi=e^{x}.$$

方程的自由项为 $P_n(x)e^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=1,\lambda=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 特征根为 $\pm i$. 齐次方程通解为

$$\overline{\varphi}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

显然 $\lambda=1$ 不是特征根，方程有形如 $\varphi^*=ae^x$ 的特解. 将其代入原方程得 $a=\dfrac{1}{2}$, 故 $\varphi^*=\dfrac{1}{2}e^x$ 为方程的一个特解. 从而方程的通解为 $\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}e^x$. 根据题意知初始条件为

$$\varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=1.$$

从而得 $C_1=\dfrac{1}{2}$, $C_2=\dfrac{1}{2}$. 故方程的解为

$$\varphi=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x).$$

10. 求下列欧拉方程的通解：

(1) $x^2y''+xy'-y=0\ \ (x>0)$.

解　令 $x=e^t$, 即 $t=\ln x$, 方程化为 $[D(D-1)+D-1]y=0$, 即

$$(D^2-1)y=0.$$

现解此齐次方程. 方程的特征方程为 $r^2-1=0$, 特征根为 ±1. 齐次方程的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t}.$$

代回原变量得所给方程的通解为

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}.$$

(2) $x^3y'''+3x^2y''-2xy'+2y=0\ \ (x>0)$.

解　令 $x=e^t$, 即 $t=\ln x$, 方程化为 $[D(D-1)(D-2)+3D(D-1)-2D+2]y=0$, 即

$$(D^3-3D+2)y=0.$$

现解此齐次方程. 方程的特征方程为 $r^3-3r+2=0$, 特征根为 1（重根）和 -2. 齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-2t}.$$

代回原变量得所给方程的通解为

$$y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x^{-2}.$$

(3) $x^2y''+xy'-4y=x^3$ $(x<0)$.

解 令 $x=-e^t$, 即 $t=\ln(-x)$, 方程化为 $[D(D-1)+D-4]y=-e^{3t}$, 即

$$(D^2-4)y=-e^{3t}.$$

现解此方程. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4=0$, 特征根为 ±2. 齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}.$$

设方程的特解为 $y^*=ae^{3t}$, 代入方程求得 $a=-\frac{1}{5}$. 于是方程的通解为

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{3t}.$$

代回原变量得所给方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^{-2}+\frac{1}{5}x^3.$$

(4) $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$.

解 令 $x=e^t$, 即 $t=\ln x$, 方程化为

$$[D(D-1)-3D+4]y=e^t+te^{2t},$$

即

$$(D^2-4D+4)y=e^t+te^{2t}.$$

现解此方程. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+4=0$, 特征根为 2 (重根). 齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)e^{2t}.$$

设方程的特解为 $y^*=ae^t+t^2(bt+c)e^{2t}$, 代入方程求得 $a=1,b=\frac{1}{6},c=0$. 于是方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{2t}+e^t+\frac{1}{6}t^3e^{2t}.$$

代回原变量得所给方程的通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3x.$$

习 题 6-6

1. 求下列函数的差分:

(1) $y=x^2$.

解 $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$.

(2) $y = 3^x$.

解 $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = 3^{x+1} - 3^x = 2 \cdot 3^x$.

(3) $y = \sin(ax)$.

解 $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = \sin(ax+a) - \sin(ax) = 2\cos a(x+\frac{1}{2})\sin\frac{1}{2}a$.

2. 确定下列差分方程的阶:

(1) $y_{x+2} - x^x y_{x+1} + 3y_x = 2$.

解 差分方程中所含差分的最高阶数称为差分方程的阶, 故此差分方程的阶数为 2 阶.

(2) $y_{x-2} - y_{x-4} = y_{x+2}$.

解 此差分方程的阶数为 6 阶.

3. 求下列差分方程通解:

(1) $y_{x+1} - 5y_x = -8$.

解 对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}_x = C5^x.$$

因 $p = -5 \neq -1$, 故所给差分方程有形如 $y_x^* = b_0$ 的特解. 代入方程比较等号两边 x 同次幂项系数得 $b_0 = 2$. 因此原方程的通解为

$$y_x = C \cdot 5^x + 2.$$

(2) $y_{x+1} - 3y_x = 2$.

解 对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}_x = C3^x.$$

因 $p = -3 \neq -1$, 故所给差分方程有形如 $y_x^* = b_0$ 的特解. 代入方程比较等号两边 x 同次幂项系数得 $b_0 = -1$. 因此原方程的通解为

$$y_x = C \cdot 3^x - 1.$$

(3) $y_{x+1} + 2y_x = 5x^2$.

解 对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}_x = C(-2)^x.$$

因 $p=2\neq-1$, 故所给差分方程有形如 $y_x^*=b_0x^2+b_1x+b_2$ 的特解. 代入方程比较等号两边 x 同次幂项系数得 $b_0=\frac{5}{3}, b_1=\frac{-10}{9}, b_2=\frac{-5}{27}$. 因此原方程的通解为

$$y_x=C(-2)^x+\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{5}{27}.$$

(4) $2y_{x+1}-6y_x=3^x$.

解 对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}_x=C3^x.$$

因 $d=3=-p=3$, 故所给差分方程有形如 $y_x^*=bx3^x$ 的特解. 代入方程解得 $b=\frac{1}{6}$. 从而, 原方程的通解为

$$y_x=C3^x+\frac{1}{6}x3^x.$$

4. *求解下列差分方程的特解:*

(1) $y_{x+1}-3y_x=0,\ y_0=5$.

解 所求的特解为

$$y_x=5\cdot3^x.$$

(2) $2y_{x+1}+5y_x=0,\ y_0=3$.

解 所求的特解为

$$y_x=3\Big(-\frac{5}{2}\Big)^x.$$

(3) $y_{x+1}+4y_x=2x^2+x-1,\ y_0=1$.

解 对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}_x=C(-4)^x.$$

因 $p=4\neq-1$, 故所给差分方程有形如 $y_x^*=b_0x^2+b_1x+b_2$ 的特解. 代入方程比较等号两边 x 同次幂项系数得 $b_0=\frac{2}{5}, b_1=\frac{1}{25}, b_2=-\frac{36}{125}$. 因此原方程的通解为

$$y_x=-\frac{36}{125}+\frac{1}{25}x+\frac{2}{5}x^2+\frac{161}{125}(-4)^x.$$

由于 $y_0=$, 得 $C=\frac{161}{125}$, 从而

$$y_x=-\frac{36}{125}+\frac{1}{25}x+\frac{2}{5}x^2+\frac{161}{125}(-4)^x.$$

5. *设某种商品 t 时刻供给量为 S_t, 需求量为 D_t, 价格为 P_t, 它们之间关系为*

$$S_t=3+2P_t,\quad D_t=4-3P_{t-1}.$$

假定在每个时期中 $S_t = D_t$，且当 $t = 0$ 时，$P_t = P_0$，求价格随时间 t 的变化规律.

解 根据题意得

$$P_t + \frac{3}{2}P_{t-1} = \frac{1}{2}.$$

对应的齐次方程的通解为

$$\overline{P}_t = C(-\frac{3}{2})^t.$$

因 $p = \frac{3}{2} \neq -1$，故所给差分方程有形如 $P_t^* = b_0$ 的特解. 代入方程比较等号两边 t 同次幂项系数得 $b_0 = \frac{1}{5}$. 因此原方程的通解为 $P_t = C(-\frac{3}{2})^t + \frac{1}{5}$. 代入初始条件得 $C = p_0 - \frac{1}{5}$. 所求特解为

$$P_t = \frac{1}{5} + \left(P_0 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^t.$$

6. 设某产品在时期 t 的价格、总供给与总需求分别为 P_t，S_t 与 D_t，并设对于 $t = 0, 1, 2, \cdots$，有

$$S_t = 2P_t + 1, \quad D_t = -4P_t + 5, \quad S_t = D_t.$$

(1) 求证 P_t 满足差分方程 $P_{t+1} + 2P_t = 2$;

(2) 已知 P_0 时，求差分方程 $P_{t+1} + 2P_t = 2$ 的解.

解 (1) 根据题意得 $2P_t + 1 = -4P_t + 5$，得 $P_t = \frac{2}{3}$. 故 $P_{t+1} + 2P_t = \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{3} = 2$，即 P_t 满足差分方程 $P_{t+1} + 2P_t = 2$.

(2) 对应的齐次方程的通解为

$$\overline{P}_t = C(-2)^t.$$

因 $P_t = \frac{2}{3}$ 是差分方程的特解. 因此原方程的通解为 $P_t = C(-2)^t + \frac{2}{3}$. 代入初始条件得 $C = P_0 - \frac{2}{3}$. 所求特解为

$$P_t = \frac{2}{3} + \left(P_0 - \frac{2}{3}\right)(-2)^t.$$

复 习 题 六

1. 填空题:

(1) 设一质量为 m 的物体，在空中由静止开始下落，如果空气阻力为 $R = k\sqrt{v}$ (k 为常数，v 为物体运动的速度)，该物体下落的距离 s 所满足的微分方程为 ________，初始条件为 ________.

解 根据题意得

$$s'' = \frac{mg - k\sqrt{v}}{k},$$

故 s 所满足的微分方程为 $s''+\dfrac{k}{m}\sqrt{s'}-g=0$. 初始条件为 $s(0)=0,\ s'(0)=0$.

(2) 微分方程 $y''-2y'+y=6xe^x$ 有形式为 ________ 的特解.

解 方程的自由项为 $P_n(x)e^{\lambda x}$ 型，其中 $P_n(x)=6x, \lambda=1$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r+1=0$. 显然 $\lambda=1$ 是双根. 方程有形如 $y^*=x^2(Ax+B)e^x$ 的特解.

(3) 若 $y_1=x^2, y_2=x^2+e^{2x}, y_3=x^2+e^{2x}+e^{5x}$ 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解 (其中 $f(x)\neq 0, p(x), q(x), f(x)$ 是连续函数), 则此微分方程的通解为 $y=$ ________.

解 因为 $y_1=x^2, y_2=x^2+e^{2x}, y_3=x^2+e^{2x}+e^{5x}$ 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, 所以 $y_2-y_1=e^{2x}$, $y_3-y_2=e^{5x}$ 都是齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解. 又 e^{2x}, e^{5x} 线性无关, 微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+x^2$.

2. 选择题:

(1) 函数 $y=C_1e^{2x+C_2}$(C_1, C_2 为任意常数) 是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的 ( ).

(A) 通解.　(B) 特解.　(C) 不是解. (D) 是解, 但不是通解, 也不是特解.

解 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-r-2=0$, 显然 $\lambda=2$ 是特征根. 又 $y=C_1e^{2x+C_2}=C_1e^{C_2}e^{2x}$, 故其是解, 但不是通解, 也不是特解.

(2) 微分方程 $y''-2y'=2\sin^2 2x$, 用待定系数法确定的特解形式是 $y^*=$ ( ).

(A) $A+B\cos 4x+C\sin 4x$.　　(B) $A+Bx\cos 4x+Cx\sin 4x$.

(C) $Ax+B\cos 4x+C\sin 4x$.　　(D) $Ax+Bx\cos 4x+Cx\sin 4x$.

解 方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-2r=0$, 特征根为 0 和 2. 又因为 $2\sin^2 2x=1-\cos 4x$, 由叠加原理所给方程具有形式为

$$y^*=Ax+B\cos 4x+C\sin 4x$$

的特解.

(3) 微分方程 $(2x-y)\,dy=(5x+4y)\,dx$ 是 ( ).

(A) 一阶线性齐次方程.　　(B) 一阶线性非齐次方程.

(C) 齐次方程.　　(D) 可分离变量方程.

解 原方程可化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5+4\dfrac{y}{x}}{2-\dfrac{y}{x}}$, 故为齐次方程.

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$.

解 原方程经整理得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\dfrac{y}{x}$, 令 $\dfrac{y}{x}=u$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}-u$, 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}-2u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$. 两端积分得 $-\ln|1-\sqrt{u}|=\ln|x|+C_1$, 即有 $x(1-\sqrt{u})=C$. 以 $u=\dfrac{y}{x}$ 回代, 于是得到方程的通解 $x-\sqrt{xy}=C$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{2(\ln y-x)}$.

解 令 $\ln y=u$, 则 $y=\mathrm{e}^u$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2(u-x)}$, 或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+2x=2u.$$

利用通解公式得

$$\begin{aligned}x&=\mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}u}\left(\int 2u\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-2u}\left(\int 2u\mathrm{e}^{2u}\,\mathrm{d}u+C\right)\\&=u-\frac{1}{2}+C\mathrm{e}^{-2u}.\end{aligned}$$

于是得到方程的通解

$$x=Cy^{-2}+\ln y-\frac{1}{2}.$$

(3) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$.

解 利用通解公式得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left(\int a(1+\frac{1}{\ln x})\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{\ln x}\left(\int a(1+\frac{1}{\ln x})\ln x\,\mathrm{d}x+C\right)\\&=ax+\frac{C}{\ln x}.\end{aligned}$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy-x^3y^3=0$.

解 令 $y^{-2}=u$, 则 $y=u^{-\frac{1}{2}}$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 代入原方程得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2xu=-2x^3$, 利用通解公式得

$$\begin{aligned}u&=\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\left(\int -2x^3\mathrm{e}^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{x^2}\left(\int -2x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x+C\right)\\&=x^2+1+C\mathrm{e}^{x^2}.\end{aligned}$$

于是得到方程的通解

$$y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1.$$

(5) $yy''-y'^2-1=0$.

解 令 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2+1.$$

其通解为 $p^2=C_1y^2-1$, 因此有 $y'=\sqrt{C_1y^2-1}$. 再积分得

$$y=\frac{1}{2C_2}\left(C_2^2e^{\frac{x}{c_1}}+C_1^2e^{-\frac{x}{c_1}}\right).$$

(6) $y'''+y''-2y'=x(e^x+4)$.

解 考虑方程

$$y'''+y''-2y'=xe^x$$

与

$$y'''+y''-2y'=4x.$$

对应的齐次方程的特征方程为 $r^3+r^2-2r=0$, 特征根为 $0,-2,1$. 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}.$$

第一个方程具有形式为 $y_1^*=x(a+bx)e^x$ 的特解, 第二个方程具有形式为 $y_2^*=(c+dx)x$ 的特解. 由叠加原理, 所给方程具有形式为

$$y^*=x(a+bx)e^x+(c+dx)x$$

的特解. 代入方程比较得 $a=-\dfrac{4}{9},b=\dfrac{1}{6},c=-1,d=-1$. 于是 $y^*=\left(\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{4}{9}x\right)e^x-x^2-x$. 方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{9}x\right)e^x-x^2-x.$$

(7) $x^2y''-4xy'+6y=x$.

解 这是欧拉方程. 令 $x=e^t$, 即 $t=\ln x$, 方程化为 $[(D(D-1)-4D+6]y=e^t$, 即

$$(D^2-5D+6)y=e^t.$$

现解此方程. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$, 特征根为 $2,3$. 齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}.$$

设特解为 $y^* = ae^t$, 代入方程求得 $a = \frac{1}{2}$. 于是方程的通解为

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^t.$$

代回原变量得所给方程的通解为

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2}x.$$

(8) $y' + x = \sqrt{x^2 + y}$.

解 令 $\sqrt{x^2+y} = u$, 则 $y = u^2 - x^2$ 且 $y' = 2uu' - 2x$, 方程化为 $2uu' - u = x$, 即

$$2u' = 1 + \frac{1}{\frac{u}{x}}.$$

解此齐次方程. 令 $\frac{u}{x} = v$, 则 $u = vx$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 代入得 $2v + 2x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{1}{v}$, 解得

$$(1+2v)(1-v)^2 = 3x^{-3x}.$$

以 $v = \frac{\sqrt{x^2+y}}{x}$ 回代，于是得到方程的通解

$$\sqrt{(x^2+y)^3} = x^3 + \frac{3}{2}xy + C.$$

4. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $\begin{cases} y^3\,\mathrm{d}x + 2(x^2 - xy^2)\,\mathrm{d}y = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^3}$$

令 $\frac{x}{y} = u(y)$, 则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, 从而原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{u}{y} - 2\left(\frac{u}{y}\right)^2.$$

解此齐次方程得

$$\frac{y}{u} = 2\ln y + C,$$

再将 $\frac{x}{y} = u$ 代入上式得 $x(C + 2\ln y) - y^2 = 0$ 由初始条件 $y(1) = 1$ 得 $C = 1$. 于是所求特解为

$$x(1 + 2\ln y) - y^2 = 0.$$

(2) $\begin{cases} y'' - ay'^2 = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1. \end{cases}$

解 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程并整理得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = ap.$$

其通解为 $p = C_1\mathrm{e}^{ay}$. 再积分得 $y = -\dfrac{1}{a}\ln(-aC_1x - aC_2)$. 由初始条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ 得 $C_1 = -1,\ C_2 = -\dfrac{1}{a}$. 于是所求特解为

$$y = -\frac{1}{a}\ln(ax+1).$$

(3) $\begin{cases} 2y'' - \sin 2y = 0, \\ y(0) = \frac{\pi}{2},\ y'(0) = -1. \end{cases}$

解 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程并整理得

$$2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \sin 2y.$$

其通解为 $p^2 = C_1 - \dfrac{1}{2}\cos 2y$. 由初始条件 $y(0) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(0) = -1$ 得 $C_1 = \dfrac{1}{2}$, 且 $y' = -\sin y$. 再积分得 $y = 2\arctan(C_2\mathrm{e}^{-x})$. 由初始条件 $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ 得 $C_2 = 1$. 于是所求特解为

$$y = 2\arctan \mathrm{e}^{-x}.$$

(4) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \cos x, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{3}{2}. \end{cases}$

解 方程的自由项为 $\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l^{(1)}(x)\cos\omega x + P_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$ 型, 其中 $\lambda = 0,\ \omega = 1$, $P_l^{(1)}(x) = 1,\ P_m^{(2)}(x) = 0$. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 特征根为 -1 (重根). 因此对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y} = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

因 $\lambda + \mathrm{i}\omega = \mathrm{i}$ 不是特征根, $n = \max\{l, m\} = \max\{0, 0\} = 0$, 故方程有形如

$$y^* = (a\cos x + b\sin x)$$

的特解. 代入方程比较两边 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的系数得 $a = 0, b = \dfrac{1}{2}$. 于是方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

代入初始条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{3}{2}$ 解得 $C_1 = 0,\ C_2 = 1$. 从而方程的解为

$$y = x\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\sin x.$$

5. 设连续函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x)\cos x+2\int_0^x\varphi(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$, 求 $\varphi(x)$.

解 原式可化简为

$$\varphi'+\tan x\varphi=\frac{1}{\cos x}.$$

利用通解公式得

$$\begin{aligned}\varphi&=\mathrm{e}^{-\int\tan x\,\mathrm{d}x}\Big(\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{\int\tan x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\Big)\\&=\cos x\Big(\int\frac{1}{\cos^2x}\,\mathrm{d}x+C\Big)\\&=C\cos x+\sin x.\end{aligned}$$

代入初始条件 $\varphi(0)=1$, 解得 $C=1$. 从而方程的解为

$$\varphi=\cos x+\sin x.$$

6. 设过点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 的连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$ 与 x 轴上由原点到点 x 的线段及过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线围成一个曲边三角形, 其面积与 $f(x)$ 的 $n+1(n\in\mathrm{N}^+)$ 次幂成正比, 求该曲线的方程.

解 根据题意得

$$\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=ky^{n+1}.$$

两边求导得 $k(n+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=y^{1-n}$. 解得

$$x=\frac{k(n+1)}{n}y^n+C.$$

代入初始条件 $y(0)=0,\ y(1)=1$ 解得 $C=0,\ k=\dfrac{n}{n+1}$. 从而方程的解为 $y^n=x$.

7. 在某池塘内养鱼, 该池塘内最多能养 1000 尾, 设在 t 时刻该池塘内鱼数 y 是时间 t 的函数 $y=y(t)$, 其变化率与鱼数 y 及 $1000-y$ 的乘积成正比, 比例常数为 $k>0$. 已知在池塘内放养鱼 100 尾, 3 个月后池塘内有鱼 250 尾, 求放养 t 个月后池塘内的鱼数 $y(t)$, 放养 6 个月后池塘内有多少鱼?

解 根据题意得

$$y'=ky(1000-y).$$

利用变量分离法解得

$$y^{-1}=\frac{1}{1000}+C\mathrm{e}^{-1000kx}$$

代入初始条件 $y(0)=100,\ y(3)=250$ 解得 $C=\dfrac{9}{1000},\ k=\dfrac{\ln 3}{3000}$. 从而方程的解为

$$y(t)=\frac{(1000\cdot 3^{\frac{t}{3}})}{9+3^{\frac{t}{3}}}.$$

将 $t=6$ 代入得 $y(6)=500$.