2011 ~ 2012 学年第二学期期末考试试卷
《线性代数及其应用》

一、填空题 (共15分, 每小题 3 分)

1. $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 都是 4 元列向量, 且 $|A| = |\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3| = 4, |B| = |\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3| = 21$, 则 $|A+B| =$________.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $X =$________.

3. 已知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}) = r, r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}) = r+1$, 则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) =$________.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 R^3 的一个基, 则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为________.

5. k 满足________时, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的.

二、选择题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 设 A 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $AX=0$ 的两个不同的解向量, 则 $AX=0$ 的通解必定是________.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ (B) $k\boldsymbol{\alpha}_1$ (C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ (D) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

2. 设 A 为 3 阶矩阵,P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3], Q = [\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 则 $Q^{-1}AQ =$________.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,-1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [0,2,5]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [0,1,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = [7,8,9]^{\mathrm{T}}$, 则________.

(A) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 但表示法不唯一

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 且表示法唯一

(D) 向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B________.

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　　(D) 既不合同也不相似

5. 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 则________.

(A) AB 为对称矩阵　　　　(B) BA 为对称矩阵

(C) $AB - BA$ 为对称矩阵　　(D) $AB^{\mathrm{T}} + BA^{\mathrm{T}}$ 为对称矩阵

三、(8 分) 已知 3 阶方阵 A 的三个特征值分别为 $0, -1, -1$, 其对应的特征向量依次为 $X_1 = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}, X_1 = [0, 1, 3]^{\mathrm{T}}, X_3 = [0, 1, 2]^{\mathrm{T}}$, 求 A^{2012}.

四、(8 分) 设 A 是秩为 3 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的三个不同的解. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 = [2, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}, 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 = [2, 4, 6, 8]^{\mathrm{T}}$, 求 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

五、(10 分) 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & l \end{bmatrix}$. 判断当 m, l 为何值时向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关; 当 m, l 为何值时向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关, 并说明理由.

六、(12 分) 设

$$(I): E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$(II): B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是 $R^{2\times 2}$ 的两个基, 定义 $\boldsymbol{\sigma}(A) = A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A \in R^{2\times 2}$.

(1) 试证 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $R^{2\times 2}$ 上的线性变换;

(2) 求由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵;

(3) 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 B_1, B_2, B_3, B_4 下的矩阵.

七、(12 分) 设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ 满足方程 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 16 \end{bmatrix}$, 求 X.

八、(16 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交替换 $X = QY$, 将二次型 f 化为标准形.

九、(4 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵,$AB + B^{\mathrm{T}}A$ 是正定矩阵, 证明 A 可逆.