2011 ～ 2012 学年第一学期期末考试试卷
《线性代数及其应用》

一、填空题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 通过正交替换 $X=SY$ 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+3y_3^2$, 则二次型 $g(X)=X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 通过正交替换 $X=SY$ 化为标准形是________.

2. 设 $\lambda=-1$ 是 n 阶实对称矩阵 A 的 k 重特征值, 则矩阵 $-E-A$ 的秩 =________.

3. 设二维线性空间 V 上的线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, 则 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1$ 下的矩阵为________.

4. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1}=$________.

5. 设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别为相应的特征向量, 则 $\boldsymbol{\alpha}_2, A(\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性相关的充分必要条件是________.

二、选择题 (共 15 分, 每小题 3 分)

1. 下列 (　　　) 构成 R^4 的子空间.

(A) $W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|x_1+x_2=x_3+x_4\}$

(B) $W_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|x_1+x_2=1\}$

(C) $W_3=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|x_1\in Z\}$

(D) $W_4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\big|x_1^2=x_2\}$

2. 设向量组 $(I)\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $(II)\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示, 下列说法中正确的是 (　　　).

(A) 若 (I) 线性无关, 则 (II) 线性相关

(B) 若 (I) 线性无关, 则 (II) 线性无关

(C) 若 (II) 线性无关, 则 (I) 线性相关

(D) 若 (II) 线性无关, 则 (I) 线性无关

3. 矩阵 $A,B\in P^{n\times n}$ 为实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 (　　　).

(A) A 与 B 有相同特征值　　　　(B) A 与 B 有相同的秩

(C) A 与 B 有相同特征向量　　　(D) A 与 B 有相同的行列式

4. 设 A 为可逆矩阵,A 的第 1 行的 2 倍加到第 3 行得矩阵 B, 则 (　　　).

(A) A^* 的第 1 行的 -2 倍加到第 3 行得 B^*

(B) A^* 的第 3 行的 -2 倍加到第 1 行得 B^*

(C) A^* 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得 B^*

(D) A^* 的第 3 列的 -2 倍加到第 1 列得 B^*

5. 下列二次型中正定二次型是 (　　　).

(A) $f_1=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$

(B) $f_2=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$

(C) $f_3=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

(D) $f_4=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

三、(8 分) 已知三阶方阵 A 的特征值为 $2,-2,1$, 又三阶方阵 B 与 A 相似, 求 (1)B 的伴随矩阵 B^* 的特征值; (2)B^2-2B 的行列式.

四、(8 分) 在 $R[x]_3$ 中取定基 $(I):1,x,x^2,x^3$ 和 $(II):1+x+x^2,1+x,1,1+x+x^2+x^3$.

(1) 求由基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵;

(2) 求 $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$ 在基 (II) 下的坐标;

(3) 如果 $g(x)\in R[x]_3$ 在基 (II) 下的坐标为 $[1,2,3,4]^T$, 求它在基 (I) 下的坐标.

五、(10 分) 已知 $\xi=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的特征向量,(1) 求参数 a,b 的值及 ξ 所对应的特征值; (2) 矩阵 A 能否对角化? 说明理由.

六、(12 分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是 R^3 的一个基,σ 是 R^3 上的一个线性变换, 且 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\1&-2&0\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是 R^3 的一个基;

(2) 求 σ 在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵;

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$, 求 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

七、(12 分) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有三个线性无关解.

(1) 求方程组系数矩阵 A 的秩;

(2) 求参数 a,b 的值及方程组的通解 (用导出组的基础解系表示).

八、(16 分) (1) 求一个正交替换, 将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形；

(2) 求二次型的正惯性指数和符号差.

九、(4 分) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2-4A+3E=O$, 证明 $(2E-A)^{\mathrm{T}}(2E-A)$ 为正定矩阵.