2018～2019 学年第二学期期中考试试卷

《高等数学 2B》（共 3 页）

（考试时间：2019 年 4 月 26 日 15:40—17:40）

题号	一	二	三	四	五	成绩	核分人签字
满分	15	15	40	24	6	100	
得分							

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 函数 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且在任意的点 (x,y) 处都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0,$ 则下列结论正确的是(　　　　　　).

(A) $f(0,0)>f(1,1)$;　　(B) $f(0,0)<f(1,1)$;

(C) $f(0,1)>f(1,0)$;　　(D) $f(0,1)<f(1,0)$.

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，$f_x'(0,0)=3,\ f_y'(0,0)=1$，则（　　　　　　）.

(A) $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；(B)曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P(0,0,f(0,0))$ 处法向量为 $(3,1,-1)$；

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $P(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(1,0,3)$；

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $P(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $(3,0,1)$.

3. 记 $I_1=\displaystyle\iint_{|x|+|y|\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_2=\iint_{x^2+y^2\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_3=\iint_{|x|\le 1,|y|\le 1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则下列关系式成立的是（　　　　　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$;　(B) $I_2<I_1<I_3$;　(C) $I_2<I_3<I_1$;　(D) $I_3<I_1<I_2$.

4. 若对上半平面 $y>0$ 内的任意有向光滑封闭曲线 L 都有 $\displaystyle\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=0,$ 则 $P(x,y)$ 可取为（　　　　　）.

(A) $y-\dfrac{x^2}{y^3}$;　(B) $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$;　(C) $y-\dfrac{1}{y}$;　(D) $x-\dfrac{1}{y}$.

5. 曲面 Σ 为半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则 $\displaystyle\iint_\Sigma(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}S=$（　　　　　　）.

(A) $3\displaystyle\iint_\Sigma \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}S$;　(B) $\displaystyle\iint_\Sigma(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}S$;　(C) $3\displaystyle\iint_\Sigma \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}S$;　(D) $\displaystyle\iint_\Sigma(\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}S$.

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $\boldsymbol{l}=(1,2,2)$ 的方向导数为________________.

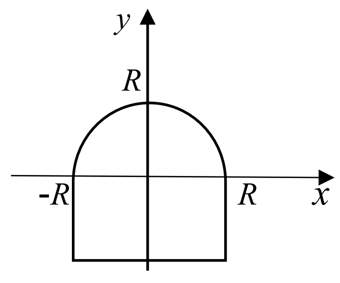

图 1

2. 质量均匀分布的薄板在 xOy 面上占据的区域 D 是由半径为 R 的半圆域和一边长度为 $2R$ 的矩形组成(如图 1)，欲使 D 的质心在圆心处，矩形的另一边长应为________________.

3. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}(1-xy)\,\mathrm{d}y=$________________________.

4. 设 L 是从点 $O(0,0,0)$ 到 $A(1,2,3)$ 的直线段，则 $\displaystyle\int_L x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}s=$________________.

5. 设向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的外侧单位法向量，则第一类曲面积分 $\displaystyle\iint_\Sigma \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=$________________.

学院________________专业(大类)__________________ ______班 年级___________学号__________________姓名________________ 共 3 页 第 2 页

三、计算题（共 40 分，每小题 8 分）

1. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

2. 计算 $\iint\limits_D |y-2x|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$.

3. 计算 $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\le x\le\sqrt{2y-y^2}, 0\le z\le a\right\}\ (a>0)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，L 是从点 $A(3,\dfrac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段，求曲线积分 $\int_L \dfrac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$.

5. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma \sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半椭球面 $x^2+y^2+4z^2=4\ (z\ge 0)$ 的上侧.

四、计算题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z^2)\,\mathrm{d}V$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$.

2. 计算 $I=\int_L (x^2-2y)\mathrm{d}x+(3x+y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是由直线 $x+2y=2$ 上从 $A(2,0)$ 到 $B(0,1)$ 的一段及圆弧 $x=-\sqrt{1-y^2}$ 上从 $B(0,1)$ 到 $C(-1,0)$ 的一段连接而成的有向线段.

3. 已知曲面薄板 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 z=1， z=2 之间的部分，其密度函数为 $\mu(x,y,z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$，求该曲面薄板的质量.

五、证明题（6 分） 证明不等式

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)<\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^2<\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\quad(x>0).$$

2018～2019 学年第二学期期中考试参考答案

《高等数学 2B》（考试时间：2019 年 4 月 26 日）

一、选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1\. D　2. C　3. A　4. D　5. B

二、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1\. 2　2. $\frac{\sqrt{6}}{3}R$　3. $\frac{7}{3}$　4. $\frac{\sqrt{14}}{4}(e^2-1)$　5. 4π

三、计算题（共 40 分，每小题 8 分）

1\. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

解：
$$\frac{dy}{dx}=e^x f_1'-\sin x f_2',$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x f_1'+e^x(e^x f_{11}''-\sin x f_{12}'')-\cos x f_2'-\sin x(e^x f_{21}''-\sin x f_{22}''),$$

所以 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)-f_2'(1,1)$.

2\. 计算 $\iint\limits_D |y-2x|\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

解：$|y-2x|=\begin{cases} y-2x, & y\ge 2x,\\ 2x-y, & y<2x\end{cases}$,

原式= $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{2x}^1(y-2x)\,dy+\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^1(2x-y)\,dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y^2}{2}-2xy\right)\Big|_{2x}^1 dx+\int_0^1(x^2-yx)\Big|_{\frac{y}{2}}^1 dy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_0^1\left(1-y-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{7}{12}=\frac{2}{3}.$$

3\. 计算 $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,dV$，其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\le x\le\sqrt{2y-y^2}, 0\le z\le a\right\}$ $(a>0)$.

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}d\rho\int_0^a z\rho^2 dz$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2 d\rho=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\sin^3\theta}{3}d\theta=\frac{8a^2}{9}.$$

4\. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段，求曲线积分 $\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$.

解：记 $P(x,y)=\frac{1+y^2f(xy)}{y}=\frac{1}{y}+yf(xy)$，$Q(x,y)=xf(xy)-\frac{x}{y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

积分与路径无关，可选取积分路径 $L': y=\frac{2}{x}$，x 从 3 到 1，则

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{L'}\left[\frac{1}{y}+yf(2)\right]dx+\left[xf(2)-\frac{x}{y^2}\right]dy$$

$$=\int_3^1\left[\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}f(2)\right)+\left(xf(2)-\frac{x^3}{4}\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)\right]dx=\int_3^1 x\,dx=-4.$$

5\. 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma\sqrt{4-x^2-4z^2}\,dxdy$，其中 Σ 为上半椭球面 $x^2+y^2+4z^2=4\ (z\ge 0)$ 的上侧.

解：原式=$\iint\limits_\Sigma\sqrt{y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}|y|\,dxdy\quad\left(D_{xy}: x^2+y^2\le 4\right)$

$$=2\int_0^\pi d\theta\int_0^2\rho^2\sin\theta\,d\rho=\frac{32}{3}.$$

四、计算题（共 24 分，每小题 8 分）

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$.

解：原式 $=\iiint\limits_{\Omega}3z^2\,\mathrm{d}V=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

$$=\frac{3\cdot 64\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{24\pi}{5}\cos^8\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{24\pi}{5}.$$

2. 计算 $I=\int_L(x^2-2y)\mathrm{d}x+(3x+y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是由直线 $x+2y=2$ 上从 $A(2,0)$ 到 $B(0,1)$ 的一段及圆弧 $x=-\sqrt{1-y^2}$ 上从 $B(0,1)$ 到 $C(-1,0)$ 的一段连接而成的有向线段.

解：补有向线段 $\overrightarrow{CA}: y=0$, $\overrightarrow{CA}$ 与 L 所围的区域记为 D.

$$\oint_{L+\overrightarrow{CA}}(x^2-2y)\mathrm{d}x+(3x+y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(3+2)\mathrm{d}\sigma=5(\frac{\pi}{4}+1).$$

$$\int_{\overrightarrow{CA}}(x^2-2y)\mathrm{d}x+(3x+y\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^2x^2\mathrm{d}x=3,$$

所以 $I=5(\frac{\pi}{4}+1)-3=\frac{5\pi}{4}+2.$

3. 已知曲面薄板 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=1$, $z=2$ 之间的部分, 其密度函数为 $\mu(x,y,z)=\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 求该曲面薄板的质量.

解：$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}=\sqrt{2}$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\mathrm{e}^{\rho}\mathrm{d}\rho=2\sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}).$$

五、证明题（6 分）证明不等式

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)<\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^2<\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\quad(x>0).$$

证明：$\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^2=\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$

其中 $D=\{(t,u)|0\le t\le x,0\le u\le x\}$..

取 $D_1=\{(t,u)|t^2+u^2\le x^2,t\ge 0,u\ge 0\}$, $D_2=\{(t,u)|t^2+u^2\le 2x^2,t\ge 0,u\ge 0\}$,

因为在区域 D,D_1,D_2 上有 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)}>0$，则有

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u>\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}),$$

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u<\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t^2+u^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-x^2}),$$

从而有 $\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)<\left(\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t\right)^2<\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\quad(x>0).$