1、**解** （1）$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2/(-2)}[\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{B}]，其中\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

（2）$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}_4]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\3&7&2&3&0&0&1&0\\2&5&1&2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_4\times2-r_3]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\3&7&2&3&0&0&1&0\\1&3&0&1&0&0&-1&2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(r_3-3r_4)/2]{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&-1&1&0&0&0&2&-3\\1&3&0&1&0&0&-1&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_4-r_1-3r_2]{r_3+r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&2&-3\\0&0&0&1&1&-2&-1&2\end{array}\right]$$

$=[\boldsymbol{E}_4,\boldsymbol{B}].$

2、**解** （1）对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}3&1&-5&0\\1&3&-13&-6\\2&-1&3&3\\4&-1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-8&-3\\1&3&-13&-6\\2&-1&3&3\\4&-1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-4r_1}]{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-8&-3\\0&1&-5&-3\\0&-5&19&9\\0&-9&33&15\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+9r_2]{r_3+5r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-8&-3\\0&1&-5&-3\\0&0&-6&-6\\0&0&-12&-12\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-8&-3\\0&1&-5&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}},$$

则方程组有唯一解：$x_1=1, x_2=2, x_3=1$.

（2）对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-5&2&-3&11\\5&3&6&-1&-1\\3&-1&4&-2&5\\-1&-9&0&-4&17\end{array}\right]\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{9}{7}&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{7}&\frac{1}{2}&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}}.$$

由于 $r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})=2<4$，所以方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 1-\frac{9}{7}x_3+\frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = -2+\frac{1}{7}x_3-\frac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

则方程组的通解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}} = [1,-2,0,0]^{\mathrm{T}} + k_1[-\tfrac{9}{7},\tfrac{1}{7},1,0]^{\mathrm{T}} + k_2[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0,1]^{\mathrm{T}}，\forall k_1,k_2 \in \mathbf{P}.$$

(3) 对方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{R}) = r(\tilde{\boldsymbol{R}}) = 2 < 3$，所以方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1-2x_3, \\ x_2 = \ \ 2+\ \ x_3, \end{cases}$$

则方程组的通解为

$$[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}} = k[-2,1,1]^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数}.$$

(4) 对方程组的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A}) = 2 < 4$，所以方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 + x_4, \\ x_2 = \qquad 4x_3, \end{cases},$$

则方程组的通解为

$$\left[x_1,x_2,x_3,x_4\right]^{\mathrm{T}} = k_1\left[5,4,1,0\right]^{\mathrm{T}} + k_2\left[1,0,0,1\right]^{\mathrm{T}}, \forall k_1,k_2 \in \mathrm{P}.$$

3、**解**　由题设知，方程组(II)的一般解为

$$\begin{cases} x_1 = -1-2x_3, \\ x_2 = \ \ 2+\ \ x_3, \end{cases}$$

其中 x_3 任意取值.

取 $x_3 = 0$，则 $x_1 = -1, x_2 = 2$. 代入方程组(I)，得 $a = 3, b = -6, c = 5$.

4、**解** 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & p \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & p-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & q-5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q-2 \end{array}\right]$$

当 $p = 0, q = 2$ 时方程组有解，同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2+\ \ x_3+\ \ x_4+5x_5, \\ x_2 = \ \ 3-2x_3-2x_4-6x_5, \end{cases}$ 其中 x_3,x_4,x_5 为自由变量，则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{P}.$$

5、**解** 将$[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$代入方程组，得$\lambda=\mu$. 对方程组的增广矩阵$\tilde{\boldsymbol{A}}$作初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{\substack{r_3-r_1-r_2 \\ r_1-\frac{1}{2}r_2}} \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

当$\lambda \neq \dfrac{1}{2}$时，有$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \tilde{\boldsymbol{R}}$，$r(\boldsymbol{R}) = r(\tilde{\boldsymbol{R}}) = 3 < 4$，则方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \quad - x_4, \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4, \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

故方程组的全部解为

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = [0, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0]^{\mathrm{T}} + k[-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1]^{\mathrm{T}}, \forall k \in \mathbf{P}.$$

当$\lambda = \frac{1}{2}$时，有$\tilde{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \tilde{\boldsymbol{R}}$，$r(\boldsymbol{R}) = r(\tilde{\boldsymbol{R}}) = 2 < 4$，则方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} + x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 1 - 3x_3 - x_4, \end{cases}$$

故方程组的全部解为

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = [-\tfrac{1}{2}, 1, 0, 0]^{\mathrm{T}} + k_1[1, -3, 1, 0]^{\mathrm{T}} + k_2[-\tfrac{1}{2}, -1, 0, 1]^{\mathrm{T}},\ \forall k_1, k_2 \in \mathbf{P}.$$

（2）当$\lambda \neq \frac{1}{2}$时，由于$x_2 = x_3$，即$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4$，解得$x_4 = 1$，故方程组的解为$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$.

当$\lambda = \frac{1}{2}$时，由于$x_2 = x_3$，即$1 - 3x_3 - x_4 = x_3$，解得$x_4 = 1 - 4x_3$，则同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 3x_3, \\ x_2 = \quad x_3, \\ x_4 = 1 - 4x_3, \end{cases}$$

故方程组的全部解为

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}} = [-1, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}} + k_3[3, 1, 1, -4]^{\mathrm{T}},\ \forall k_3 \in \mathbf{P}.$$

6、**证明**：对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 作初等行变换，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{array}\right]\xrightarrow{\text{所有的行加到第五行}}\left[\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum\limits_{i=1}^{5}a_i\end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}},$$

因为 $r(\boldsymbol{R})=4$，当且仅当 $r(\tilde{\boldsymbol{R}})=4$，即 $\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=0$ 方程组有解.

继续对其增广矩阵作初等行变换，

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{下一行加到上一行}}\left[\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&0&-1&a_1+a_2+a_3+a_4\\0&1&0&0&-1&a_2+a_3+a_4\\0&0&1&0&-1&a_3+a_4\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]=\tilde{\boldsymbol{R}},$$

$r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})=4<5$，则方程组有无穷多解. 其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=a_1+a_2+a_3+a_4+x_5,\\x_2=a_2+a_3+a_4+x_5,\\x_3=a_3+a_4+x_5,\\x_4=a_4+x_5,\end{cases}$$

故方程组的通解为

$$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]^{\mathrm{T}}=[a_1+a_2+a_3+a_4,a_2+a_3+a_4,a_3+a_4,a_4,0]^{\mathrm{T}}+k[1,1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\ \forall k\in\mathbf{P}.$$

7、**证明**：方程组(I)只有零解的充分必要条件是其系数矩阵的行阶梯形矩阵 $r(\boldsymbol{R})=n$，当且仅当方程组(II)的增广矩阵的行阶梯形矩阵 $r(\boldsymbol{R})=r(\tilde{\boldsymbol{R}})=n$，因此方程组(II)有唯一解.

1、**解**（1）$\tau(13524)=3$，是奇排列；

（2）$\tau(54321)=10$，是偶排列；

（3）$\tau[13\cdots(2n-1)246\cdots(2n)]=\frac{n(n-1)}{2}$，当$n=4k$或$n=4k+1$时为偶排列；当$n=4k+2$或$n=4k+3$为奇排列；

（4）$\tau[(n-1)(n-2)\cdots21n]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$，当$n=4k+1$或$n=4k+2$时为偶排列；当$n=4k$或$n=4k+3$时为奇排列.

2、 **解** （1）正号；　　　（2）负号.

3、 **解** （1）行列式的展开式中非零项为$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，这一项列指标排列的逆序数为$\tau(3412)=4$，故$D=(-1)^4a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=2\times4\times3\times5=120$；

（2）$D=(-1)^{\tau(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=(-1)^3a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=-1\times2\times3\times4=-24$；

（3）$D=(-1)^{\tau(23\cdots n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!$；

（4）$D=(-1)^{\tau(n-1n-2\cdots1n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

4、 **解** 含x^3项为$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，其系数为$-1$；含$x^4$项为$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，其系数为$2$.

5、 **解** （1）用化三角形法.

$$\text{原式}\xlongequal[\boldsymbol{r}_4-2\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2-2\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_3-3\boldsymbol{r}_1}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&2\\0&-1&2&4\\0&-11&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{r}_4-11\boldsymbol{r}_2]{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&2\\0&0&1&2\\0&0&-10&-23\end{vmatrix}\xlongequal{\boldsymbol{r}_4+10\boldsymbol{r}_3}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&1&2\\0&0&1&2\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=3.$$

（2）$\text{原式}\xlongequal[\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4]{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}\begin{vmatrix}a&a&0&0\\1&1-a&1&1\\0&0&b&b\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{c}_4-\boldsymbol{c}_3]{\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1}\begin{vmatrix}a&0&0&0\\1&-a&1&0\\0&0&b&0\\1&0&1&-b\end{vmatrix}=a^2b^2.$

（3）$\text{原式}=adf\begin{vmatrix}-b&c&e\\b&-c&e\\b&c&-e\end{vmatrix}=adfbce\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1}abcdef\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&0&2\\0&2&0\end{vmatrix}=4abcdef.$

（4）$\text{原式}\xlongequal{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3}\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_1]{\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_1}\begin{vmatrix}a+b+c&0&0\\2b&-(a+b+c)&0\\2c&0&-(a+b+c)\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)^3$.

（5）$\text{原式}\xlongequal[\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_3]{\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2+\boldsymbol{c}_3}\begin{vmatrix}1000&100&327\\2000&100&443\\1000&100&621\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2-2\boldsymbol{r}_1}\begin{vmatrix}1000&100&327\\0&-100&-211\\0&0&294\end{vmatrix}=-29400000.$

（6） 原式 $\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\r_3-r_2}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & c+b+a \\ 0 & a & b+2a & c+2b+3a \\ 0 & a & b+3a & c+3b+6a \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & c+b+a \\ 0 & 0 & a & b+2a \\ 0 & 0 & a & b+3a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b+a & c+b+a \\ 0 & 0 & a & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

注 1 也可以用初等列变换化简计算该行列式.

6、

解 （1）原式 $\xlongequal[\text{第一行}]{\text{每一行都加到}}[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,\dots n]{r_i-ar_1}[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & b-a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & b-a & \cdots & 0 & 0 \\ b-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b-a \\ 0 & \cdots & b-a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b-a & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}[(n-1)a+b]\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & b-a \\ 0 & \cdots & b-a & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b-a & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

（2）把第二行的-1 倍加到其余行，再把第一行的 2 倍加到第二行，得

$$\text{原 式}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}=-2(n-2)!.$$

（3）把第二列，第三列, ⋯, 第 n 列都加到第一列，

原式

$$=(\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k)\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & \lambda+a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2 & \lambda+a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda+a_n\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k).$$

(4) 这是一个$n+1$阶行列式.

$$原式\xlongequal{\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2+\cdots+\boldsymbol{c}_{n+1}}\begin{vmatrix}(n+1)a+(1+2+\cdots+n)h & a+h & a+2h & \cdots & a+nh\\ 0 & a & & & \\ 0 & -a & a & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -a & a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{按\boldsymbol{c}_1展开}\left[(n+1)a+\tfrac{n(n+1)}{2}h\right]\begin{vmatrix}a & & & \\ -a & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -a & a\end{vmatrix}_{(n阶)}=\tfrac{(n+1)}{2}(2a+nh)a^n.$$

(5) 原式$\xlongequal[1\le i\le n]{\boldsymbol{r}_i/i}n!V(1,2,\cdots,n)=\prod_{i=1}^{n}i!.$

(6) 方法 1 将原行列式D_n(n为阶数)化为上三角行列式得

$$D_n=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1\\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a\end{vmatrix}=(n+1)a^n.$$

方法 2 先将D_n按第 1 列展开，再将D_n的$(1,2)$元的$n-1$阶余子式按第 1 行展开得

$$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}.$$

由于$D_1=2a, D_2=3a^2$，且利用上述递推式可得

$$D_n-aD_{n-1}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n,$$

7、 **解** (1) 系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27.$$

那么，

$$|\mathrm{B}_1|=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81\Rightarrow x_1=\frac{|\mathrm{B}_1|}{|\boldsymbol{A}|}=3;$$

$$|\mathrm{B}_2|=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108\Rightarrow x_2=\frac{|\mathrm{B}_2|}{|\boldsymbol{A}|}=-4;$$

$$|\mathrm{B}_3|=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27\Rightarrow x_3=\frac{|\mathrm{B}_3|}{|\boldsymbol{A}|}=-1;$$

$$|\mathrm{B}_4|=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27\Rightarrow x_4=\frac{|\mathrm{B}_4|}{|\boldsymbol{A}|}=1..$$

（2）系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5&6&&&\\1&5&6&&\\&1&5&6&\\&&1&5&6\\&&&1&5\end{vmatrix}=\frac{3^6-2^6}{3-2}=665\neq 0.$$

那么，

$$|\boldsymbol{B}_5|=\begin{vmatrix}5&6&&&1\\1&5&6&&-2\\&1&5&6&2\\&&1&5&-2\\&&&1&-4\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按}\boldsymbol{c}_5}1+2\cdot5+2\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&0&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$=49+2\frac{3^4-2^4}{3-2}-4\frac{3^5-2^5}{3-2}=-665\Rightarrow x_5=\frac{|\boldsymbol{B}_5|}{|\boldsymbol{A}|}=-1;$$

$x_4=-4-5x_5=1;\ x_3=-2-5x_4-6x_5=-1;$

$x_2=2-5x_3-6x_4=1;\ x_1=-2-5x_2-6x_3=-1.$

8、 **解** 由抛物线的对称轴与 y 轴平行可知其方程必为 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的形式，而抛物线过点 $(1,1),\ (2,-1),\ (3,1)$，所以

$$\begin{cases} a+\ \ b+c=\ \ 1, \\ 4a+2b+c=-1, \\ 9a+3b+c=\ \ 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\ \ 2, \\ b=-8, \\ c=\ \ 7. \end{cases}$$

抛物线的方程为 $y=2x^2-8x+7$.

注 也可以巧用已知条件解题：抛物线的对称轴与 y 轴平行，且过点 $(1,1),\ (3,1)$，说明对称轴为 $x=2$；进而 $(2,-1)$ 是抛物线的顶点，可设抛物线的方程为

$$y=a(x-2)^2-1(a\neq 0).$$

带点 $(1,1)$ 或 $(3,1)$ 即知 $a=2$；抛物线的方程为 $y=2(x-2)^2-1$.

9、 **解** 方法 1 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \xrightarrow[i\geq 2]{r_i-ir_1} \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -3a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_1.$$

当 $a=0$ 时，$r(\boldsymbol{B}_1)=1<n$，则方程组有非零解. 其同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，则方程组的通解为

$$[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},\ \forall k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in\mathbf{P},$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}_1\rightarrow\begin{bmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-\sum_{i=2}^{n}r_i} \begin{bmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_2.$$

由 $\boldsymbol{B}_2$ 可知，当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(\boldsymbol{A})=n-1<n$，则方程组有非零解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0. \end{cases}$$

选 x_1 为自由变量，则方程组的通解为 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}=k[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}},\ \forall k\in\mathbf{P}$.

方法 2 方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=a^{n-1}(a+\tfrac{n(n+1)}{2}).$$

当$|\boldsymbol{A}|=0$，即$a=0$或$a=-\frac{n(n+1)}{2}$时，则方程组有非零解；

当$a=0$时，对系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

其同解方程组为$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，则方程组的通解为

$$[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},\ \forall k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in\mathbf{P},$$

其中$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}$.

当$a=-\frac{n(n+1)}{2}$时，对系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ -3a & 0 & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0.\end{cases}$$

选x_1为自由变量，则方程组的通解为$[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}=k[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}}$，$\forall k\in\mathbf{P}$.

1、 $\frac{1}{2}(3\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}(3\begin{bmatrix}5&4&2&0\\1&-5&7&4\\-4&-3&1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-2&2&-4\\5&-9&1&2\\6&3&-7&5\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}7&7&2&2\\-1&-3&10&5\\-9&-6&5&-4\end{bmatrix}$

2、 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1,b_2,\dots,b_n]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$;

$$\boldsymbol{BA}=[b_1,b_2,\dots,b_n]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n.$$

3、$2\boldsymbol{AB}-3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&9&6\\5&2&-5\\7&0&-9\end{bmatrix}$; $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&3&1\\5&10&-2\\0&12&0\end{bmatrix}$.

4、$\varepsilon_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=[1,0,\dots,0]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{23}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=[a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}]$,

$$\boldsymbol{A}\varepsilon_j=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{23}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{bmatrix},\quad \varepsilon_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\varepsilon_j=(\varepsilon_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\varepsilon_j=[a_{11},a_{12},\dots,a_{1n}]\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}=a_{1j}$$

5、 $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{X}$可交换，即$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，设$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{bmatrix}$,

那么有$\begin{bmatrix}x_1+x_4&x_2+x_5&x_3+x_6\\x_4+x_7&x_5+x_8&x_6+x_9\\x_1+x_7&x_2+x_8&x_3+x_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_3&x_1+x_2&x_2+x_3\\x_4+x_6&x_4+x_5&x_5+x_6\\x_7+x_9&x_7+x_8&x_8+x_9\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_5=x_9,\\x_2=x_6=x_7,\\x_3=x_4=x_8.\end{cases}$

所以$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_3&x_1&x_2\\x_2&x_3&x_1\end{bmatrix}$; $\forall x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbf{P}$.

6、 **证** 充分性显然，下证必要性.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{DA}$ 得

$$\begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \cdots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_na_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1a_{n1} & d_2a_{n2} & \cdots & d_na_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \cdots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_2a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_na_{n1} & d_na_{n2} & \cdots & d_na_{nn} \end{bmatrix}.$$

由矩阵相等的定义以及 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ 两两互异，得 $a_{ij}=0, i\neq j$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角阵.

7、$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x+1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix}=x^2-2x-5$，

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

8、 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

9、 记被 n 次幂的方阵为 $\boldsymbol{A}$.

(1) 因为 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}$满足 $\boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{J}^3=\boldsymbol{O}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n &= (\lambda\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{J})^n\\ &= (\lambda\boldsymbol{E}_3)^n + n(\lambda\boldsymbol{E}_3)^{n-1}\boldsymbol{J} + \frac{n(n-1)}{2}(\lambda\boldsymbol{E}_3)^{n-2}\boldsymbol{J}^2\\ &= \begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2}/2\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 因为 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$,

我们猜想 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$.

假设结论对 $n=k-1$ 时成立,

即 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k-1} = \begin{bmatrix}\cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta\\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta\end{bmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix}\cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta\\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$.

由数学归纳法可知结论成立.

（3）因为 $\boldsymbol{A}^2 = 4\boldsymbol{E}_4$，所以 $\boldsymbol{A}^n = \begin{cases}(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n-1}{2}}\boldsymbol{A} = 2^{n-1}\boldsymbol{A}, & \text{当}n\text{为奇数时};\\ (\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n}{2}} = 2^n\boldsymbol{E}_4, & \text{当}n\text{为偶数时}.\end{cases}$

（4）因为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{J}$，其中 $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}[1,1,\dots,1]$ 满足 $\boldsymbol{J}^2 = n\boldsymbol{J}$，$\boldsymbol{J}^k = n^{k-1}\boldsymbol{J}$，

$$\begin{aligned}\text{则 }\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{E}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{J})^n &= C_n^0\boldsymbol{E}_n(-\frac{1}{n})^n\boldsymbol{J}^n + C_n^1\boldsymbol{E}_n(-\frac{1}{n})^{n-1}\boldsymbol{J}^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1}\boldsymbol{E}_n(-\frac{1}{n})\boldsymbol{J} + C_n^n\boldsymbol{E}_n\\ &= C_n^0(-\frac{1}{n})^n n^{n-1}\boldsymbol{J} + C_n^1(-\frac{1}{n})^{n-1}n^{n-2}\boldsymbol{J} + \cdots + C_n^{n-1}(-\frac{1}{n})\boldsymbol{J} + C_n^n\boldsymbol{E}_n\\ &= (C_n^0(-1)^n + C_n^1(-1)^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1}(-1))\frac{1}{n}\boldsymbol{J} + C_n^n\boldsymbol{E}_n\\ &= ((1-1)^n - 1)\frac{1}{n}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{E}_n\\ &= \boldsymbol{E}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

10、 证 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$.

11、证　若 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵，即 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$，而 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

反之，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵.

12、 $$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AA}^{\boldsymbol{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\right|$$

$$=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|=-\left|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right|.$$

$\therefore\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right|=0$.

13、 (1) $|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}5&-2\\-8&3\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=-\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}-5&2\\8&-3\end{bmatrix}$.

(2) 用初等行变换法.

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\4&3&3&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2-4r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&7&-5&-4&1&0\\0&3&-2&-2&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&-2\\0&3&-2&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3-3r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-1&0&1&-2\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&5&6&-14\\0&1&0&-2&-2&6\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]\xrightarrow{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&4&-9\\0&1&0&-2&-2&5\\0&0&1&-2&-3&7\end{array}\right]$$

$$\therefore\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&4&-9\\-2&-2&5\\-2&-3&7\end{bmatrix}.$$

(3) 用初等行变换法.

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{r_2-r_3\\r_3-r_4}]{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\therefore\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(4) $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=81\boldsymbol{E}_3$，或 $\boldsymbol{A}(\dfrac{1}{81}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}_3$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{81}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{81}\begin{bmatrix}1&8&4\\-8&-1&4\\-4&4&-7\end{bmatrix}$.

14、 由已知得$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\2&5&4\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}.$$

15、 由多项式除法得到

$$\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

即$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$，因此$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$可逆，并且$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

16、 (1) 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}\\\sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}\\\vdots\\\sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{bmatrix}=a\boldsymbol{X}_0$

(2) 由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=a\boldsymbol{X}_0$，则$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0=a\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_0$，

即$a\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{X}_0$，而$a\neq0$，否则有$\boldsymbol{X}_0=0$.

$\therefore \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_0=\dfrac{1}{a}\boldsymbol{X}_0$，则$\boldsymbol{A}^{-1}$的每一行元素之和为$\dfrac{1}{a}$.

而$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{b}\boldsymbol{A}^*$，即$\boldsymbol{A}^*=b\boldsymbol{A}^{-1}$，$\therefore \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}_0=b\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_0=\dfrac{b}{a}\boldsymbol{X}_0$.

17、证 (1) 充分性 假设$|\boldsymbol{A}|=0$，由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，根据定义可知$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，这与$|\boldsymbol{A}^*|\neq0$矛盾，故$\boldsymbol{A}$可逆.

必要性 由$\boldsymbol{A}$可逆，可知$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$可逆.

(2) 分不同情况讨论：

若$|\boldsymbol{A}|\neq0$，即$\boldsymbol{A}$可逆，由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，得$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$，从而$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若$|\boldsymbol{A}|=0$，则$r(\boldsymbol{A})\leq n-1$，从而$r(\boldsymbol{A}^*)\leq1$，故$|\boldsymbol{A}^*|=0$（也可采用反证法：若$|\boldsymbol{A}^*|\neq0$，则$\boldsymbol{A}^*$可逆，由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，根据定义可知$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，这与$|\boldsymbol{A}^*|\neq0$矛盾）. 也有$|\boldsymbol{A}^*|=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

18、 $|\boldsymbol{A}_{3\times3}|=4$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X})\Rightarrow(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$，

从而

$$\boldsymbol{X}=(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

19、　(1)
$$\left[\begin{array}{cc|cc}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\\hline 0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\\hline 0&1&1&1\\2&3&-1&-1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}&\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}25&0&0&0\\0&25&0&0\\\hline 2&4&0&0\\-2&-4&0&0\end{array}\right].$$

(2)
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&0&1\\\hline 0&0&2&3\\0&0&5&-7\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\2&3&0&1\\\hline 0&0&3&4\\0&0&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{E}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&6&8\\2&3&1&3\\\hline 0&0&9&14\\0&0&8&6\end{array}\right].$$

20、
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}.$$

21、　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，即有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，比较 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{AB}$ 的第一列元素

$$\begin{cases} 1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ 0 = a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \quad \cdots\cdots \\ 0 = a_{n-1,n-1}b_{n-1,1} + a_{n-1,n}b_{n1} \\ 0 = a_{nn}b_{n1} \end{cases}$$

由 $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$ 知，$a_{ii} \neq 0(i=1,2,\ldots,n)$，故由上式解得 $b_{n1} = b_{n-1,1} = \cdots = b_{21} = 0$

类似地，比较第 2 至 n 列可得，$i > j$ 时，$b_{ij} = 0$，故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 为上三角形矩阵.

22、$\boldsymbol{A}$ 是分块对角矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. 于是

$\boldsymbol{A}^{2k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{2k} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{2k} \end{bmatrix}$. 下面求 $\boldsymbol{B}^{2k}$ 与 $\boldsymbol{C}^{2k}$. 由于 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{G}^2=\boldsymbol{O}$，

$(2\boldsymbol{E})\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}(2\boldsymbol{E})$，由二项展开公式得

$$\boldsymbol{B}^{2k} = (2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G})^{2k} = (2\boldsymbol{E})^{2k} + \mathrm{C}_{2k}^{1}(2\boldsymbol{E})^{2k-1}\boldsymbol{G} = 4^k\boldsymbol{E} + k4^k\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 4^k & k4^k \\ 0 & 4^k \end{bmatrix}$$

23、 (1) 用分块法.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) 用分块法.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) $$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3/2 \\ r_4\times(-2)}]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_4-r_3}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-3r_3]{\substack{r_3-\frac{7}{2}r_4 \\ r_2-r_4}} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-r_2-2r_3]{r_2-r_3} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

24、 $|\boldsymbol{A}_{4\times4}|=-4$，$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=240\neq0$，

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=-2(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\text{，}$$

从而

$$\boldsymbol{X}=-2\boldsymbol{A}^{-1}=-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=-2\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-2&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&5&-3\end{bmatrix}.$$

25、 (1) $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&-1&2\\0&5&-3&-1&2\\0&7&-3&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-7r_2-2r_3]{r_3-5r_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&2&4&-8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=3.$

(2) $\boldsymbol{A}\xrightarrow[\substack{r_3-3r_1\\r_2\times(-1)}]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&1&2&-1&4\\0&1&4&-3&9\\0&-1&-5&3&-10\\0&-1&6&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2+10r_3]{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1&1&2&-1&4\\0&1&4&-3&9\\0&0&-1&0&-1\\0&0&0&-2&3\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=4.$

26、**证** (1) 充分性. 由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 可知 $r(\boldsymbol{A})\leq r(\boldsymbol{\alpha})=1$，又由 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 知 $r(\boldsymbol{A})\geq1$，故 $r(\boldsymbol{A})=1$.

必要性. 已知 $r(\boldsymbol{A})=1$. 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组，则有 $\boldsymbol{\alpha}_j=k_j\boldsymbol{\alpha}_i(j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$. 于是

$$\boldsymbol{A}=[k_1\boldsymbol{\alpha}_i,\dots,k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i,k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_i,\dots,k_n\boldsymbol{\alpha}_i]=\boldsymbol{\alpha}_i[k_1,\dots,k_{i-1},1,k_{i+1},\dots,k_n].$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_1,\dots,a_n]^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$. 又记 $b_1=k_1,\dots,b_{i-1}=k_{i-1},b_i=1,b_{i+1}=k_{i+1},\dots,b_n=k_n$，则 $b_1,\dots,b_n$ 不全为零，令 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_i=[a_1,\dots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\dots,b_n]^{\mathrm{T}}$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1,\dots,b_n]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

(2) 由 (1) 可知存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,\dots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,\dots,b_n]^{\mathrm{T}}$，其中 $a_1,\dots,a_n$ 不全为零，$b_1,\dots,b_n$ 不全为零，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 又由 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，从而

$$\boldsymbol{A}^m=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^m=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{m-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}.$$

(3) $r(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=6$，由(2)可知

$$\boldsymbol{A}^m=(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^{m-1}\boldsymbol{A}=6^{m-1}\boldsymbol{A}=6^{m-1}\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&6\\3&-6&9\end{bmatrix}.$$

27、 证 因为 $r(\boldsymbol{A})=r$，故当 $r=n$ 时，可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 满足条件.

当 $r<n$ 时，存在 n 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}$. 取

$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_{n-r}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$.

28、证 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，从而 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$. 又有

$$n=r(\boldsymbol{E})=r\left[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\right]\le r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}),$$

故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

29、证 (1) 当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=n$.

(2) 当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}^*)\le n$，即 $r(\boldsymbol{A}^*)\le n-r(\boldsymbol{A})=1$

若 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$，则 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})=\boldsymbol{O}$，于是 $A_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为零，与

$r(\boldsymbol{A})=n-1$ 矛盾，故 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(3) 当 $r(\boldsymbol{A})\le n-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均为零，由伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})$ 的定义知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，

即 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$.

30、证 利用 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

(1) 当 $|\boldsymbol{A}|\ne 0$ 时，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^*=\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right|(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^n\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}|^{-1}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

(2) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，由习题 29 知，$r(\boldsymbol{A}^*)\le 1$.

当 $n\ge 3$ 时，$r(\boldsymbol{A}^*)^*=0,(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{O}$，从而 $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

1. 由$3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=\frac{1}{6}\left(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3\right)\\&=\frac{1}{6}\left([6,15,3,9]^{\mathrm{T}}+[20,2,10,20]^{\mathrm{T}}-[20,5,-5,5]^{\mathrm{T}}\right)\\&=\frac{1}{6}[6,12,18,24]^{\mathrm{T}}=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

2. 设$\boldsymbol{\alpha}_5=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，得非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_4=-1,\\2x_1-x_2+2x_3+4x_4=-2,\\3x_1-x_2+4x_3+5x_4=-3,\\x_1+x_2+x_3+8x_4=2.\end{cases}$$

对其增广矩阵施行初等行变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&3&-1\\2&-1&2&4&-2\\3&-1&4&5&-3\\1&1&1&8&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&3&-1\\0&1&2&-2&0\\0&2&4&-4&0\\0&2&1&5&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&3&-1\\0&1&2&-2&0\\0&0&1&-3&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

因为$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3<4$，所以线性方程组有无穷多解，故$\boldsymbol{\alpha}_5$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，但表示式不唯一.

3. (1) $\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，其部分组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$也线性无关. 又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，从而$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 假设$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，而由(1)知$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示. 与$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关矛盾，从而假设错误，得证结论成立.

4. (1) $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}2&3&1\\2&-1&1\\7&2&3\\-1&4&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&4&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$. $r(\boldsymbol{A}_{4\times3})=3$，因此$\boldsymbol{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

(2) $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\-2&-3&-3\\1&4&-1\\1&5&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$. $r(\boldsymbol{A}_{4\times3})=2<3$，因此$\boldsymbol{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

5. 设有数$k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\beta}_{s-1}=\mathbf{0}$，即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_s)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_s)+\cdots+k_{s-1}(\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+\lambda_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$

整理得　$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1})\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$.

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{s-1}=0$，从而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$也线性无关.

6.**证**　由题设知有数$k_1,k_2,\cdots,k_{r-1},k_r$，使得$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，其中$k_r\neq 0$，否则与向量$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$线性表示矛盾. 因此$\boldsymbol{\alpha}_r=-k_r^{-1}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}-\boldsymbol{\beta})$，即$\boldsymbol{\alpha}_r$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$线性表示，故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$等价，从而有相同的秩.

7. (1) $$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{R},$$

考察$\boldsymbol{R}$的主元可知向量组$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$的秩为 3，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4\}$是其一个极大无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

(2) $$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix}6&1&1&7&1\\4&0&4&1&3\\1&2&-9&0&5\\-1&3&-16&-1&6\\2&-4&22&3&-9\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-5&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{R},$$

考察$\boldsymbol{R}$的主元可知$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}$的秩为 4，$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$是其一个极大无关组，且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2$.

8. **证**　$\boldsymbol{\alpha}_1=1\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_r\in W$.

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，知$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示. 因而$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$不能生成$W$.

9. **证**　若向量组(Ⅰ)不含非零向量，则$r_1=0$，显然$r_1\le r_2$.

若向量组(Ⅰ)含非零向量，因为向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示，所以向量组(Ⅱ)必含非零向量，向量组(Ⅰ)、向量组(Ⅱ)都存在极大无关组，分别记为向量组(Ⅲ)、(Ⅳ). 由向量组(Ⅰ)可有向量组(Ⅱ)线性表示可知，向量组(Ⅲ)可有向量组(Ⅱ)线性表示，而向量组(Ⅱ)可有向量组(Ⅳ)线性表示，从而向量组(Ⅲ)可有向量组(Ⅳ)线性表示. 又因为向量组(Ⅲ)线性无关，所以$r_1\le r_2$.

10. **证**　方法 1　显然$\mathbf{0}\in W$，所以子集W是非空的.

对任意的$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_r,0\cdots,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_r,0\cdots,0]^{\mathrm{T}}\in W$，$k\in\mathbf{P}$，有

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_r+b_r,0\cdots,0]^{\mathrm{T}}\in W$，即加法封闭；

$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_r,0\cdots,0]^{\mathrm{T}}\in W$，即数量乘法封闭.

从而得证W是$\mathbf{P}^n$的子空间.

方法 2　$W=\{a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{\varepsilon}_r\mid a_1,a_2,\cdots,a_r\in\mathbf{P}\}=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r)$是由$\mathbf{P}^n$中的向量组$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r\}$生成的子空间.　□

11. (1) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}$,

考察 $\boldsymbol{R}$ 的主元可知 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 是 W_1 的一个基，$\dim W_1=2$.

(2) $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&2&1\\-1&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{有限次}}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}$,

考察 $\boldsymbol{R}$ 的主元可知 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\}$ 是 W_2 的一个基，$\dim W_2=2$.

12. (1) 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1&2&-1\\3&-2&1&2&0\\7&4&-1&6&-2\\10&2&0&8&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{13}&\frac{10}{13}&\frac{-2}{13}\\0&1&-\frac{5}{13}&\frac{2}{13}&-\frac{3}{13}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=2<5$，所以方程组有无穷多解，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{13}x_3-\frac{10}{13}x_4+\frac{2}{13}x_5,\\x_2=\ \frac{5}{13}x_3-\frac{2}{13}x_4+\frac{3}{13}x_5,\end{cases}\text{其中 } x_3,x_4,x_5 \text{ 为自由变量，}$$

则方程组的通解为

$$\boldsymbol{X}=k_1\begin{bmatrix}-1\\5\\13\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-10\\-2\\0\\13\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}2\\3\\0\\0\\13\end{bmatrix},\forall k_1,k_2,k_3\in\mathbf{P},$$

且 $\boldsymbol{\eta}_1=[-1,5,13,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-10,-2,0,13,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=[2,3,0,0,13]^{\mathrm{T}}$ 是方程组的一个基础解系.

(2) 同解方程组为 $x_1=-2x_2-3x_3-\cdots-nx_n$，其中 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由变量.

方程组的通解为 $x_1=-2k_2-3k_3-\cdots-nk_n,\forall k_2,k_3,\cdots,k_n\in\mathbf{P}$， 且

$\boldsymbol{\eta}_1=[-2,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-3,0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-n,0,\cdots,0,1]^{\mathrm{T}}$ 为一个基础解系.

(3) 先将齐次线性方程组的系数矩阵化为行阶梯型矩阵，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\1&-1&0&0&1&-1\\1&0&0&-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=3<6$，所以基础解系含有 $6-3=3$ 个解向量. 方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_4-x_5, \\ x_2=x_4-x_6, \\ x_3=x_4. \end{cases} \qquad \text{其中 } x_4, x_5, x_6 \text{ 为自由变量；}$$

则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{P},$$

且 $\boldsymbol{\eta}_1=[1,1,1,1,0,0]^{\mathrm{T}}$ ， $\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,0,0,1,0]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\eta}_3=[0,-1,0,0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 为一个基础解系.

(4) 对系数矩阵施以初等变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A})=2$，基础解系含有 $4-2=2$ 个解向量，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{2}x_3-x_4, \\ x_2=\dfrac{7}{2}x_3-2x_4, \end{cases} \quad \text{其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由变量；}$$

则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall k_1, k_2 \in \mathbf{P},$$

且 $\boldsymbol{\eta}_1=\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2},1,0\right]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=[-1,-2,0,1]^{\mathrm{T}}$ 为一个基础解系.

13. 3 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，说明 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2+3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=1$，方程组有无穷多解，同解方程组为 $x_1=2x_2-3x_3$，其中 x_2, x_3 为自由变量，取

$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=[2,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-3,0,1]^{\mathrm{T}}$，所求的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，满足 $r(\boldsymbol{B})=2$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 注意矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是不唯一的.

14.**证** 由题设知 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系中含有三个线性无关的解向量. 根据齐次线性方程组解的运算性质知 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 均为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解. 下面只需证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关. 令矩阵

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]&=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]\\&\xrightarrow{c_2-c_1}[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]\\&\xrightarrow{c_2+c_3}[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]\to[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]\to[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1]=\mathbf{C}\end{aligned}$$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，从而为 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

15. (1) 基础解系含有 3 个线性无关的解向量，所以这个 5 元方程组的系数矩阵的秩为 2，设其中的一个方程为 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=0$，将基础解系代入得到一个以所求方程组的系数为未知量的齐次线性方程组，

$$\begin{cases}a_1+a_2-a_4-a_5=0,\\a_2+2a_4-a_5=0,\\a_1+a_3+2a_4-a_5=0.\end{cases}$$

对其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1&-1\\0&1&0&2&-1\\1&0&1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3&0\\0&1&0&2&-1\\0&0&1&5&-1\end{bmatrix}.$$

$r(\boldsymbol{A})=3<5$，所以方程组有无穷多解，其同解方程组为 $\begin{cases}a_1=3a_4,\\a_2=-2a_4+a_5,\\a_3=-5a_4+a_5,\end{cases}$

则方程组的通解为 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}3\\-2\\-5\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\ \forall k_1,k_2\in\mathbf{P}$，

可得所求方程组为 $\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3+x_4=0,\\x_2+x_3+x_5=0.\end{cases}$

(2) 基础解系为 2 个线性无关的解向量，所以这个 3 元线性方程组的系数矩阵的秩为 1，设其中的一个方程为 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$，将基础解系代入得，

$$\begin{cases}6a_1+a_2-7a_3=0,\\ \quad\ a_2-3a_3=0.\end{cases}$$

对其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施以初等变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&1&-7\\0&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{6}&-\frac{7}{6}\\0&1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{2}{3}\\0&1&-3\end{bmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases}a_1=\frac{2}{3}a_3,\\ a_2=3a_3,\end{cases}$ 其中 a_3 为自由变量，通解为 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_3\begin{bmatrix}2\\9\\3\end{bmatrix},\forall a_3\in\mathbf{P}$，所求的方程组为 $2x_1+9x_2+3x_3=0$.

16. (1) 因为(I)与(II)同解，则 $r(\boldsymbol{A}_1)=r(\boldsymbol{A}_2)$，且 $r(\boldsymbol{A}_2)\le 2$. 对(I)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 施行初等行变换得

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&3\\1&1&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&-1&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

所以 $a=2, r(\boldsymbol{A}_1)=2, r(\boldsymbol{A}_2)=2$.

(2) 由(1)知方程组(II)的同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-3x_3,\\ x_2=\quad x_3,\end{cases}$ 把其代入方程组(II)中，得

$$\begin{cases}b+c=3,\\ b^2+c=3.\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}b=0\\c=3\end{cases}.$$

当 $\begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}$ 时，(I)与(II)同解；而当 $\begin{cases}b=0\\c=3\end{cases}$ 时，(I)与(II)不同解，舍去.

17. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le 3$. 又 $\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{O}$，则 $1\le r(\boldsymbol{A})\le 2,\ 1\le r(\boldsymbol{B})\le 2$. 若 $r(\boldsymbol{A})=2$，必有 $r(\boldsymbol{B})=1$，此时 $k=9$. 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解是 $t[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，其中 t 为任意实数.

若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 2 个解向量，同解方程组为 $\alpha x_1+bx_2+cx_3=0$，且满足

$$\begin{cases}a+2b+\quad 3c=0,\\ \qquad (k-9)c=0.\end{cases}$$

如果 $c\ne 0$，方程组的通解是 $t_1[c,0,-a]^{\mathrm{T}}+t_2[0,c,-b]^{\mathrm{T}}$，其中 t_1,t_2 为任意实数；

如果 $c=0$，方程组的通解是 $t_1[1,2,0]^{\mathrm{T}}+t_2[0,0,1]^{\mathrm{T}}$，其中 t_1,t_2 为任意实数.

.

18. 令 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，得非齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\
x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\
2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3, \\
3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5.
\end{cases}
$$

对其增广矩阵施行初等行变换，得

$$
\tilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right]
$$

(1)当 $a=-1$，$b \neq 0$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2,\ r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，线性方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(2) 当 $a \neq -1$ 时，$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=4,$，线性方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一表示，表示式为 $\boldsymbol{\beta} = -\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3 + 0 \cdot \boldsymbol{\alpha}_4.$

19. (1) 由题设知线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，从而

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0
$$
，解得 $\lambda=1$ 或 -1.

当 $\lambda=1$ 时，$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，$r(\widetilde{\boldsymbol{A}}) \neq r(\boldsymbol{A})$，方程组无解，与题设矛盾，故舍去；

当 $\lambda=-1$ 时，$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right]$，由 $r(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})$ 得 $a=-2$.

(2) 由(1)可知，当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，方程组有无穷多解.

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = x_3 + \dfrac{3}{2}, \\ x_2 = \quad -\dfrac{1}{2} \end{cases}$，其中 x_3 为自由变量. 通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \forall k \in \mathbf{P}$.

20. 令 $\boldsymbol{\eta}_1 = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) = [2, \ 1, \ ]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2 = \dfrac{1}{3}(2\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_3) = [1, 0, 1, 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3 = (3\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{X}_4) - (2\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{X}_3) = [-1, 1, -3, -2]^{\mathrm{T}}$. 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i = \boldsymbol{\beta},\quad i=1,2,3$，所以 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 都是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解. 于是 $\boldsymbol{\xi}_1 = \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2 = [0, 2, -1, 3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3 = [2, -1, 4, 3]^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 因为 $4 - r(\boldsymbol{A}) = 2$ 且 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\eta}_1+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=[1,2,0,4]^{\mathrm{T}}+k_1[0,2,-1,3]^{\mathrm{T}}+k_2[2,-1,4,3]^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

21. (1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是所给的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解，令

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为 $4-r(\boldsymbol{A})\geq 2$，即 $r(\boldsymbol{A})\leq 2$.

又 $\boldsymbol{A}$ 有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\4&3\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $r(\boldsymbol{A})\geq 2$， 因此 $r(\boldsymbol{A})=2$. □

(2) 对方程组的增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 施行行初等变换，得

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&-b&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&4-2a&4a-b-5&4-2a\end{array}\right].$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以有 $\begin{cases}-2a+4=0,\\4a-b-5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$ 代入原方程组中得到同解方程组

$\begin{cases}x_1=2-2x_3+4x_4,\\x_2=-3+x_3-5x_4,\end{cases}$ 通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}4\\-5\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k_1,k_2 为任意常数.

22. 必要性 设对任意的 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解，则对 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 有解，记作 $\boldsymbol{X}_i$，即 $\boldsymbol{AX}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i$，$i=(1,2,\cdots,m)$.

此时 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m)=(\boldsymbol{AX}_1,\boldsymbol{AX}_2,\cdots,\boldsymbol{AX}_m)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m)=\boldsymbol{E}_m$，因此

$$m=r(\boldsymbol{E}_m)=r(\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_m))\leq r(\boldsymbol{A})\leq\min\{m,n\},$$

故 $r(\boldsymbol{A})=m$.

充分性 设 $r(\boldsymbol{A})=m$，则对任意的 $\boldsymbol{\beta}$，又 $r(\boldsymbol{A})\leq r(\boldsymbol{A},\beta)\leq\min(m,n+1)\leq m$，因此 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=m$，故对任意的 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 总有解.

23. (1) 设有数 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$，使得

$$k_0\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0}, \qquad (*)$$

等式的两端同时左乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，得 $k_0\boldsymbol{A\gamma}_0+k_1\boldsymbol{A\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$，即 $k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，$\therefore k_0=0$；又因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的导出组的基础解系，线性无关，由(＊)式知，$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，所以 $\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 由题设 $\boldsymbol{A\gamma}_0=\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{0},i=1,2,\cdots,n-r$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_i)=\boldsymbol{A\gamma}_0+\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{\beta},i=1,2,\cdots,n-r$，即 $\boldsymbol{\gamma}_0,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解. 又假设存在 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$，使得 $k_0\boldsymbol{\gamma}_0+k_1(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r})=\boldsymbol{0}$，整理得

$$(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}=\boldsymbol{0}.$$

由(1)知$\gamma_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关，得到$k_0=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，即$\gamma_0,\gamma_0+\eta_1,\gamma_0+\eta_2,\cdots,\gamma_0+\eta_{n-r}$是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$的$n-r+1$个线性无关的解.

24. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是的一个标准正交基，求$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$与$\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$的内积.

解 $(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$

$$\begin{aligned}&=(\alpha_1,2\alpha_1)+(\alpha_1,\alpha_2)+(\alpha_1,2\alpha_3)-(\alpha_2,2\alpha_1)+(\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_2,2\alpha_3)+(\alpha_3,2\alpha_1)\\&\quad+(\alpha_3,\alpha_2)+(\alpha_3,2\alpha_3)\\&=2(\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_2,\alpha_2)+2(\alpha_3,\alpha_3)=5.\end{aligned}$$

25. 先将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交化，令

$$\beta_1=\alpha_1=[1,1,-1,1]^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_1=\frac{1}{2}[1,-3,-1,\ 1]^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\alpha_3-\frac{5}{4}\beta_1-\frac{1}{6}\beta_2=\frac{1}{3}[2,0,7,5]^{\mathrm{T}}.$$

再单位化得

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{2}[1,1,-1,1]^{\mathrm{T}},\ \eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}[1,-3,-1,\ 1]^{\mathrm{T}},\ \eta_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{78}}[2,0,7,5]^{\mathrm{T}}.$$

26. (1) 由α与β正交知$(\alpha,\beta)=0$，故

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=|\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2.$$

该式的几何意义为：直角三角形斜边长度的平方等于两直角边长的平方和.

(2) 因为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-\frac{1}{4}|\alpha-\beta|^2\\&=\frac{1}{4}(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-\frac{1}{4}(\alpha-\beta,\alpha-\beta)\\&=\frac{1}{4}\left[|\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta|^2-|\alpha|^2+2(\alpha,\beta)-|\beta|^2\right]=(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

所以等式成立.

27. **证** (1) 因为$\boldsymbol{A}$是n阶正交阵，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 故

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{E},$$

从而$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正交阵.

(2) 因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$都是n阶正交阵，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，故

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},$$

从而$\boldsymbol{AB}$也是正交阵.

1. (1) $W=\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间；

(2) $W=\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3=1\right\}$ 不是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间． W 对向量的加法及数量乘法运算都不封闭.

(3) $W=\left\{(x, y) \mid xy \geq 0\right\}$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间． W 对向量的加法运算不封闭；

(4) $W=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间． W 对向量的加法及数量乘法都不封闭；

(5) $W=\left\{\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\right\}$ 是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间；

(6) 实空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 内，所有 n 阶可逆矩阵组成的子集合不是 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 的子空间，它对矩阵的加法和数乘运算均不封闭.

2. (1) $W=\left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbf{R},\ x_1+x_2+x_3=0\right\}$ 是齐次线性方程组 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解空间，所以 W 的维数是 2，方程组的基础解系 $\eta_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$， $\eta_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$ 是 W 的一个基.

(2) 对任意 $a,b \in \mathbf{R}$，有 $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

又矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ 为一个基，且该线性空间的维数为 2.

(3) 对任意 $s,t \in \mathbf{R}$，有 $[s+3t, s-t, 2s-t, 4t]=s[1,1,2,0]+t[3,-1,-1,4]$，又向量组 $[1,1,2,0]$, $[3$, 线性无关，从而为 W 的一个基，且 W 的维数是 2.

3. $\dim\mathbf{R}^2=2$，所以 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 的一个基．但由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=4\boldsymbol{\nu}_1-\frac{3}{2}\boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\nu}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}_2$，而 $\mathbf{R}^2=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)$，所以 $\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3$ 可以生成 $\mathbf{R}^2$.

4. 设 $f_1(x)=5x+x^2,\ f_2(x)=1-8x-2x^2,\ f_3(x)=-3+4x+2x^2,\ f_4(x)=2-3x$，则 $f_1(x)$，$f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 在 $\mathbf{R}[x]_2$ 的标准基 $1, x, x^2$ 下的坐标分别是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$,

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，因此向量组 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 的秩也为 3，而 $\dim\mathbf{R}[x]_2=3$，因此 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4$ 能生成 $\mathbf{R}[x]_2$.

5. $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$，而 $|\boldsymbol{A}|=16\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关，又 $\dim\mathbf{R}^4=4$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 $\mathbf{R}^4$ 的一个基. □

6. 记 $\boldsymbol{A}$ 的列向量为 $\boldsymbol{\nu}_1=\begin{bmatrix}5\\8\\-5\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\nu}_2=\begin{bmatrix}-5\\8\\-9\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\nu}_3=\begin{bmatrix}-9\\-6\\3\\-7\end{bmatrix}$，考察非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Y}=x_1\boldsymbol{\nu}_1+x_2\boldsymbol{\nu}_2+x_3\boldsymbol{\nu}_3$ 的增广矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}5&-5&-9&6\\8&8&-6&7\\-5&-9&3&1\\3&-2&-7&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-1&5&14\\0&1&12&40\\0&0&2&7\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

$r(\tilde{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3$，该方程组有唯一解，所以 $\boldsymbol{Y}$ 在 $L(\boldsymbol{\nu}_1,\boldsymbol{\nu}_2,\boldsymbol{\nu}_3)$ 中.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，有方程组 $\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=4,\\2k_1+3k_2+4k_3=1,\\k_1+4k_2+3k_3=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-6,\\k_2=-1,\\k_3=4\end{cases}$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在该基下的坐标为 $\boldsymbol{X}_1=[-6,-1,4]^{\mathrm{T}}$.

8. (1) $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}4&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$，则由基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 到 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}4&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$，从而由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 到 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&4&4\\1&4&-3\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}=[3,4,1]^{\mathrm{T}}$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{SX}=\begin{bmatrix}4&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\2\\3\end{bmatrix}$.

9. (1) $[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4]=[\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}]\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}$.

(2) 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 在两个基下有相同的坐标, 则 $\boldsymbol{X}$ 在基(I)下的坐标为 $[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}$ 在基(II)下有相同的坐标为 $\boldsymbol{S}^{-1}[x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{SX}'=\boldsymbol{X}'$，进一步整理得齐次线性方程组 $(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-x_4, \\ x_2=-x_4, \\ x_3=-x_4, \end{cases}$ 通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \forall k\in\mathbf{R}$，故 $\boldsymbol{X}=k\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \forall k\in\mathbf{R}$.

10. $\left[1-2x+x^2, 3-5x+4x^2, 2x+3x^2\right]=\left[1, x, x^2\right]\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，则由基(II)到基(I)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，从而由基(I)到基(II)的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

设 $-1+2x$ 在基(I)下的坐标为 $\boldsymbol{Y}$, 它在基(II)下的坐标为 $\boldsymbol{X}=\left[-1, 2, 0\right]^{\mathrm{T}}$，则由坐标变换公式得

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} -23 & -9 & 6 \\ 8 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1、**解** （1）$|\lambda\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -3\\ -3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-8)$，可知 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=8$.

对 $\lambda_1=2$，

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_1 的全部特征向量为

$$k_1[-1,\ 1]^{\mathrm{T}}\,(k_1\neq 0).$$

对 $\lambda_2=8$，

$$\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_2 的全部特征向量为

$$k_2[1,\ 1]^{\mathrm{T}}\,(k_2\neq 0).$$

（2）$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}\xlongequal{\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_3}\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & -2\\ \lambda+1 & \lambda+3 & -3\\ -\lambda-1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}\begin{vmatrix}\lambda+1 & 1 & -2\\ 0 & \lambda+2 & -1\\ 0 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

对 $\lambda_1=-1$，由

$$\boldsymbol{A}-(-1)\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_1 的全部特征向量为

$$k[1,\ 1,\ -1]^{\mathrm{T}}\,(k\neq 0).$$

（3）$|\lambda\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal[i>1]{\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}_1}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ \lambda-2 & \lambda-2 & 0 & 0\\ \lambda-2 & 0 & \lambda-2 & 0\\ \lambda-2 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_3-\boldsymbol{c}_4}\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2),$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\ \lambda_4=-2$.

对 $\lambda_1=2$，由

$$A-2E_4=\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_1 的全部特征向量为

$$k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3\ (k_1,\ k_2,\ k_3 \text{不全为零}).$$

对 $\lambda_4=-2$，由

$$A-(-2)E_4=\begin{bmatrix}3&1&1&1\\1&3&-1&-1\\1&-1&3&-1\\1&-1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow X_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_2 的全部特征向量为 $k_4X_4(k_4\neq 0)$.

2、**证** 设 λ 是 A 的任一特征值，而 $X\neq \mathbf{0}$ 为对应的特征向量，则

$$\begin{aligned}AX=\lambda X,\ A^3=3A&\Rightarrow \lambda^3X=A^3X=3AX=3\lambda X\\&\Rightarrow(\lambda^3-3\lambda)X=\mathbf{0}\\&\Rightarrow\lambda^3-3\lambda=0\\&\Rightarrow\lambda\in\{0,\ \pm\sqrt{3}\}.\end{aligned}$$

3、**解** (1) A 的特征多项式

$$|\lambda E_3-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2,$$

可知 A 的全部特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

对 $\lambda_1=2$，

$$A-2E_3=\begin{bmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_1 的全部特征向量为 $k_1X_1(k_1\neq 0)$.

对 $\lambda_2=1$，

$$A-1E_3=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow X_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_2 的全部特征向量为 $k_2X_2(k_2\neq 0)$.

(2) $f(A)$ 的全部特征值为 $\mu_1=f(\lambda_1)=6,\ \mu_{2,3}=f(\lambda_{2,3})=5$.

$f(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $\mu_1=6$ 的全部特征向量，即为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的全部特征向量

$$k_1\boldsymbol{X}_1(k_1\neq 0).$$

$$f(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^2+5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}^2+5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&1&1\end{bmatrix}+5\boldsymbol{E}$$ 对于特征值 $\mu_2=\mu_3=5$，

$$f(\boldsymbol{A})-5\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

可知 $f(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $\mu_{2,3}=5$ 的全部特征向量为 $l_1\boldsymbol{Y}_1+l_2\boldsymbol{Y}_2$（$l_1$，$l_2$ 不全为零）.

注 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值可由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值完全确定，但 $f(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $f(\lambda)$ 的特征向量不一定是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，有时需要解方程组 $[f(\lambda)\boldsymbol{E}-f(\boldsymbol{A})]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 来确定 $f(\boldsymbol{A})$ 的属于特征值 $f(\lambda)$ 的全部特征向量.

4、**证** 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 又 $\boldsymbol{X}_i\neq\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_i 的特征向量，从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{X}_i\Rightarrow \boldsymbol{X}_i=\lambda_i\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_i\text{，必有 }\lambda_i\neq 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_i=\lambda_i^{-1}\boldsymbol{X}_i$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}_i=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}_i=\tfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}\boldsymbol{X}_i,$$

其中 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}=\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n\ (i=1,2,\cdots,n)$.

5、**解** （1） $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_1]{\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1}\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\\lambda-1&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\boldsymbol{c}_1-\boldsymbol{c}_2-\boldsymbol{c}_3}\begin{vmatrix}\lambda+5&-2&-2\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-1)^2,$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=-5,\ \lambda_2=\lambda_3=1$.

对 $\lambda_1=-5$，

$$\boldsymbol{A}-(-5)\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值 λ_1 的全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{X}_1(k_1\neq 0).$$

对 $\lambda_2=1$，

$$A-1E_3=\begin{bmatrix}-2&2&2\\2&-2&-2\\2&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow X_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值λ_2的全部特征向量为

$$k_2X_2+k_3X_3\text{（}k_2,\ k_3\text{不全为零）}.$$

(2) 由(1)可知

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-5\text{，}\ A^*=|A|A^{-1}=-5A^{-1}\text{，}\ 2E+A^{-1}-A^*=2E+6A^{-1}.$$

得知$2E+A^{-1}-A^*$的全部特征值和特征向量为

$$\mu_1=2+6\lambda_1^{-1}=\tfrac{4}{5}\text{，}\qquad k_1X_1(k_1\neq 0)\text{；}$$

$$\mu_{2,3}=2+6\lambda_{2,3}^{-1}=8\text{，}\qquad k_2X_2+k_3X_3\text{（}k_2,\ k_3\text{不全为零）}.$$

6、**解** 由题设，可知

$$y=\mathrm{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3\text{，}$$

$$|A|=7x+6=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1\Rightarrow x=-1.$$

对$\lambda_1=-1$，

$$A-(-1)E_3=\begin{bmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

可知属于特征值λ_1的全部特征向量为$kX(k\neq 0)$.

7、**证** 由题设知，$r(A)<n,\ r(B)<n\Rightarrow A,\ B$均以0为特征值.

n元齐次线性方程组$\begin{cases}AX=0,\\BX=0\end{cases}$的系数矩阵的秩

$$r\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=r\left(\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}O\\B\end{bmatrix}\right)\le r\begin{bmatrix}A\\O\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}O\\B\end{bmatrix}=r(A)+r(B)<n\text{，}$$

必有非零解向量，即A与B有属于特征值0的公共特征向量.

8、**证** （反证法）假设X_1+X_2为A的属于λ的特征向量，则$A(X_1+X_2)=\lambda(X_1+X_2)$，即$AX_1+AX_2=\lambda X_1+\lambda X_2$. 又$AX_i=\lambda_iX_i(i=1,2)$，于是有$(\lambda_1-\lambda_2)X_1+(\lambda_1-\lambda_2)X_2=0$，因为$X_1,X_2$线性无关，则$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$. 故假设不成立，原命题正确.

9、 **证** 因为A可逆，于是$A^{-1}(AB)A=BA$，即AB与BA相似.

10、**证** 因为A,B可对角化，所以存在可逆矩阵S_1,S_2，使得$S_1^{-1}AS_1=\Lambda_1,S_2^{-1}AS_2=\Lambda_2$均为对角矩阵.

令$S=\begin{bmatrix}S_1&O\\O&S_2\end{bmatrix}$，则$S$可逆，且

$$S^{-1}\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}S=\begin{bmatrix}S_1^{-1}&O\\O&S_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1&O\\O&S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1^{-1}AS_1&O\\O&S_2^{-1}BS_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1&O\\O&\Lambda_2\end{bmatrix}$$

为对角矩阵.

11、**证** （1） $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&1\\2&\lambda+2&-2\\-3&-6&\lambda+1\end{vmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{c}_3+\boldsymbol{c}_1]{\boldsymbol{c}_2-2\boldsymbol{c}_1}\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\lambda+4&\lambda-2\\2&\lambda-2&0\\-3&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\boldsymbol{r}_1+2\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3}\begin{vmatrix}\lambda+4&0&0\\2&\lambda-2&0\\-3&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4),$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-4$.

判断是否可对角化，只需考察各重根特征值的几何重数是否等于代数重数.

对 $\lambda_{1,2}=2$，

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-2&-4&2\\3&6&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$3-r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)=3-1=2\Rightarrow\boldsymbol{A}\text{ 可对角化.}$$

解 （2） 由(1)可知，$\boldsymbol{A}$ 有属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的线性无关特征向量 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

对 $\lambda_3=-4$，由

$$\boldsymbol{A}-(-4)\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}7&2&-1\\-2&2&2\\3&6&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{X}_3]=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\text{diag}(2,\ 2,\ -4)=\boldsymbol{\Lambda}$.

12、**解** 令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_3]$，则

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}=\text{diag}(0,\ 1,\ -1)=\boldsymbol{\Lambda}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}.$$

那么，

$$\boldsymbol{A}^{100}=(\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1})^{100}=\boldsymbol{S\Lambda}^{100}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\text{diag}(0,\ 1,\ 1)\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\2&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&2\\2&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&-1\\-4&2&-1\end{bmatrix}.$$

13、**解** （1） $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -4 & 2\\ -2 & \lambda-9 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

对于 $\lambda_1=1$ ，求解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为 $x_1+2x_2-2x_3=0$，求得一个基础解系为 $\boldsymbol{X}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$；

对于 $\lambda_3=10$ ，求得 $(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{X}_3=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3]$，则 $\boldsymbol{S}$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(1,1,10)$.

(2) 先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，过程与(1)相同.

将 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{X}_2-\frac{(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_2+\frac{4}{5}\boldsymbol{\beta}_1=[\frac{2}{5},\frac{4}{5},1]^{\mathrm{T}}.$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{X}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=[-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=[\frac{2}{3\sqrt5},\frac{4}{3\sqrt5},\frac{5}{3\sqrt5}]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{X}_3}{|\boldsymbol{X}_3|}=[\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}]^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(1,1,10)$.

14、**解** (1) $|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+1)$,

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$.

对于 $\lambda_1=3$，求解 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为 $\begin{cases}x_1-x_2=0,\\ x_3=0,\end{cases}$ 求得一个基础解系为 $\boldsymbol{X}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_2=-1$，求解 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$\begin{cases} x_1+x_2 \quad =0, \\ \quad\quad x_3=0, \end{cases}$ 求得一个基础解系为 $\boldsymbol{X}_2=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$.

对于$\lambda_3=0$，求解$(-0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$.因为

$$-0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$\begin{cases} x_1=0, \\ x_2=0, \end{cases}$ 求得一个基础解系为 $\boldsymbol{X}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$.

将$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{X}_1}{|\boldsymbol{X}_1|}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{X}_2}{|\boldsymbol{X}_2|}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]^{\mathrm{T}}.$$

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{X}_3]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(3,-1,0)$.

(2) $$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 2 \\ -4 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-7 & \lambda-7 & 0 \\ -4 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-7 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda+1 & -2 \\ 2 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-7)^2(\lambda+2),$$

则$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=7$, $\lambda_3=-2$.

对于$\lambda_1=7$，求解$(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 因为

$$7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以同解方程组为$2x_1-2x_2+x_3=0$，求得一个基础解系为$\boldsymbol{X}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=[-1,0,2]^{\mathrm{T}}$.

对于$\lambda_3=-2$，求得$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系为$\boldsymbol{X}_3=[2,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

将$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{X}_2-\frac{(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{X}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1=[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},2]^{\mathrm{T}}.$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{X}_3$单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=[\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=[-\tfrac{1}{3\sqrt{2}},\tfrac{1}{3\sqrt{2}},\tfrac{4}{3\sqrt{2}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{X}_3}{|\boldsymbol{X}_3|}=[\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}]^{\mathrm{T}}.$$

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]$，则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(7,7,-2)$.

(3) 类似于(1)的计算过程可得正交矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}，且 Q^{\mathrm T}AQ=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}.$$

15、**解** (1) 由 A 的各行元素之和为 3，知 $A[1,1,1]^{\mathrm T}=3[1,1,1]^{\mathrm T}$，则 3 是 A 的一个特征值，$\alpha_1=[1,1,1]^{\mathrm T}$ 是相应的特征向量.

又方程组 $AX=0$ 有两个线性无关解，所以 A 有 0 特征值，且 $n-r(A)\geq 2$，则 $r(A)\leq 1$. 而 $r(A)\geq 1$，故 $r(A)=1$，从而实对称矩阵 A 的特征值为 $3,0,0$. 进而 A 的属于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1=k_1[1,1,1]^{\mathrm T},\forall k_1\in\mathbf{R},k_1\neq 0.$$

设 $X=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm T}$ 是 A 的属于特征值 0 的特征向量，则 X 与 α_1 都正交，因此 $x_1+x_2+x_3=0$. 求得一个基础解系为 $\alpha_2=[-1,1,0]^{\mathrm T},\alpha_3=[-1,0,1]^{\mathrm T}$，故 A 的属于特征值 0 的全部特征向量为

$$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=k_2[-1,1,0]^{\mathrm T}+k_3[-1,0,1]^{\mathrm T},$$

其中 $\forall k_2,k_3\in\mathbf{R}$，$k_2,k_3$ 不全为零.

(2) 将 α_2,α_3 正交化，得

$$\beta_1=\alpha_2=[-1,1,0]^{\mathrm T},$$
$$\beta_2=\alpha_3-\tfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_3-\tfrac{1}{2}\beta_1=[-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1]^{\mathrm T}.$$

再将 α_1,β_1,β_2 单位化，得

$$\eta_1=\tfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=[\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3},\tfrac{1}{\sqrt3}]^{\mathrm T}，\eta_2=\tfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=[-\tfrac{1}{\sqrt2},\tfrac{1}{\sqrt2},0]^{\mathrm T}，\eta_3=\tfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=[-\tfrac{1}{\sqrt6},-\tfrac{1}{\sqrt6},\tfrac{2}{\sqrt6}]^{\mathrm T}.$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，$\Lambda=\mathrm{diag}(3,0,0)$，则 Q 为正交矩阵，且 $Q^{\mathrm T}AQ=\Lambda$.

16、**解** 方法 1 因为 A 是实对称矩阵，所以 $0=(X,X_3)=97+k-99$，得 $k=2$.

设 $X_1=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm T}$ 是 A 的对应于特征值 2 的一个特征向量，则

$$(X_1,X_3)=x_1+x_2+x_3=0.$$

该齐次线性方程组的一个基础解系为 $\alpha_1=\left[-1,1,0\right]^{\mathrm T},\alpha_2=\left[-1,\ 0,\ 1\right]^{\mathrm T}$. 令

$$S=\left[\alpha_1,\alpha_2,X_3\right]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

则 S 为可逆矩阵, 且 $S^{-1}AS=\mathrm{diag}(2,2,3)=\Lambda$，因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}\left(2\boldsymbol{E}_3+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$=2\boldsymbol{E}_3+\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&1&1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}7&1&1\\1&7&1\\1&1&7\end{bmatrix}.$$

方法 2 求$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$与方法 1 相同.

将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\tfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1=[-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1]^{\mathrm{T}}.$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{X}_3$单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\tfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=[-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=\tfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=[-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_3=\tfrac{\boldsymbol{X}_3}{|\boldsymbol{X}_3|}=[\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}]^{\mathrm{T}}.$$

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]$，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(2,2,3)$，则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$，因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&1&1\\1&7&1\\1&1&7\end{bmatrix}.$$

方法 3 实对称矩阵$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3$的全部特征值为$0,0,1$，且$\boldsymbol{Y}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{X}_3$为$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3$的属于特征值 1 的单位特征向量. 由实对称矩阵的谱分解定理，有

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

故$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}_3+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&1&1\\1&7&1\\1&1&7\end{bmatrix}$.

17、**解** 设λ是实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的任一特征值，则λ是实数，且$\lambda^3+\lambda-10$是矩阵$\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{O}$的特征值，因而$\lambda^3+\lambda-10=0$. 又观察可知$2^3+2-10=0$；于是$\lambda^3+\lambda-10=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+5)$. 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，所以$2$为$\boldsymbol{A}$的$3$重特征值. 此时存在正交矩阵$\boldsymbol{S}$，使得$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=2\boldsymbol{E}_3$，从而$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}(2\boldsymbol{E}_3)\boldsymbol{S}^{-1}=2\boldsymbol{E}_3$.

18.证 （1）注意到$\boldsymbol{A}$为对称矩阵，故$\boldsymbol{A}$与对角阵$\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$相似，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的全部特征值. 另外，$r(\boldsymbol{A})=1$，从而$r(\boldsymbol{\Lambda})=1$，于是$\boldsymbol{\Lambda}$的对角元只有一个非零，又$|\boldsymbol{A}|=0$，所以$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的特征值且为$n-1$重.

解　(2) 由 $\boldsymbol{A\alpha}=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)\boldsymbol{\alpha}$，可见 $\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq 0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，且对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

当 $\lambda=0$ 时，求解方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1\div a_1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i-a_ir_1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\lambda=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，

$\boldsymbol{\alpha}_n=(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

19、**解**　(1) 因为 $\forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$k\in\mathbf{R}$，有 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AXB}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，且

$$\sigma(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{AYB}=\sigma(\boldsymbol{X})+\sigma(\boldsymbol{Y}),$$
$$\sigma(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{AXB}=k\sigma(\boldsymbol{X}),$$

所以 σ 为 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 上的线性变换.

(2) 因为 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in \mathrm{V}, k\in\mathbf{P}$，有 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0\in \mathrm{V}$，且

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_0=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})-\boldsymbol{\alpha}_0,$$

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0=k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}_0)-(k-1)\boldsymbol{\alpha}_0=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})-(k-1)\boldsymbol{\alpha}_0,$$

所以当 $\boldsymbol{\alpha}_0\neq\mathbf{0}$ 时，σ 不是 V 上的线性变换；当 $\boldsymbol{\alpha}_0=\mathbf{0}$ 时，σ 是 V 上的线性变换.

(3) 令 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[0,1]^{\mathrm{T}}$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[1,0]^{\mathrm{T}},\sigma(\boldsymbol{\beta})=[1,0]^{\mathrm{T}}$.

因为 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=[2,-2]^{\mathrm{T}}\neq\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$，所以 σ 不是线性变换.

20、**证**　$\forall \boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，$k\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=\sigma(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\\&=(0,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\\&=(0,x_2,\cdots,x_n)+(0,y_2,\cdots,y_n)\\&=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=\sigma(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)=(0,kx_2,\cdots,kx_n)=k(0,x_2,\cdots,x_n)=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

从而得证 σ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的线性变换.

21、**解**　记 $\boldsymbol{\alpha}_1=x^2\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_2=x\mathrm{e}^x,\boldsymbol{\alpha}_3=\mathrm{e}^x$，则

$$\begin{cases} \mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_1) = (x^2\mathrm{e}^x)' = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = 1\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_2) = (x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 1\boldsymbol{\alpha}_2 + 1\boldsymbol{\alpha}_3, \\ \mathrm{D}(\boldsymbol{\alpha}_3) = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + 1\boldsymbol{\alpha}_3, \end{cases}$$

可知D在基 $x^2\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

22、**证** (1) 记 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$，则 $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbf{R}^{2\times 2}, k \in \mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned} &\sigma(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{AP} \in \mathbf{R}^{2\times 2}, \\ &\sigma(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{AP} + \boldsymbol{BP} = \sigma(\boldsymbol{A}) + \sigma(\boldsymbol{B}), , \\ &\sigma(k\boldsymbol{A}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P} = k\boldsymbol{AP} = k\sigma(\boldsymbol{A}), \end{aligned}$$

从而 σ 是 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换. □

解 (2) 因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_1 &= 1\boldsymbol{E}_{12} + 1\boldsymbol{E}_{11} + 1\boldsymbol{E}_{22} + 1\boldsymbol{E}_{21}, \\ \boldsymbol{B}_2 &= 1\boldsymbol{E}_{12} + 1\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{22} + 1\boldsymbol{E}_{21}, \\ \boldsymbol{B}_3 &= 1\boldsymbol{E}_{12} + 1\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{22} + 0\boldsymbol{E}_{21}, \\ \boldsymbol{B}_4 &= 0\boldsymbol{E}_{12} + 1\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{22} + 0\boldsymbol{E}_{21}, \end{aligned} ,$$

所以基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$ 到基 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3, \boldsymbol{B}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3)因为

$$\begin{aligned} \sigma(\boldsymbol{E}_{11}) &= \boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}, \\ \sigma(\boldsymbol{E}_{12}) &= \boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} - 2\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}, \\ \sigma(\boldsymbol{E}_{21}) &= \boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 1\boldsymbol{E}_{21} + 0\boldsymbol{E}_{22}, \\ \sigma(\boldsymbol{E}_{22}) &= \boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 0\boldsymbol{E}_{11} + 0\boldsymbol{E}_{12} + 0\boldsymbol{E}_{21} - 2\boldsymbol{E}_{22} \end{aligned} ,$$

所以σ在标准基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$，而标准基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$到基$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$的过渡矩阵$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$，从而$\sigma$在基$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_3$，下的矩阵

$$\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\3&1&0&0\\-3&-3&-2&0\\3&3&3&1\end{bmatrix}.$$

23、**解** (1) 方法 1 基像组为

$$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\sigma([1,0,0]^{\mathrm{T}})=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}=1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2-1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\sigma([0,1,0]^{\mathrm{T}})=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}=-1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\sigma([0,0,1]^{\mathrm{T}})=[0,-1,1]^{\mathrm{T}}=0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1-1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2+1\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_3,\end{cases}$$

故σ在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

(2) 基像组为

$$\begin{cases}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)=\sigma([1,0,0]^{\mathrm{T}})=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\\\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)=\sigma([1,1,0]^{\mathrm{T}})=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}=-1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\\\sigma(\boldsymbol{\alpha}_3)=\sigma([1,1,1]^{\mathrm{T}})=[0,0,0]^{\mathrm{T}}=0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3,\end{cases}$$

可知σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

(3) 由标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},$$

σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

（4） $\sigma(\gamma)=\sigma([1,-2,3]^{\mathrm{T}})=[3,-5,2]^{\mathrm{T}}=8\boldsymbol{\alpha}_1-7\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\Rightarrow[\sigma(\gamma)]_{\{\alpha_i\}}=[8,-7,2]^{\mathrm{T}}$.

24、**证** （1）因为

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[3\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2,8\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3]$$

$$=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$，因 $|\boldsymbol{S}|=-1\neq0$， $\boldsymbol{S}$ 可逆，得证 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是一个基. □

解 （2） $\boldsymbol{S}$ 就是由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵，从而 σ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}-5&0&-8\\-3&-1&-6\\2&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&0&1\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}53&-11&116\\44&-9&97\\-20&4&-44\end{bmatrix}.$$

25、**证** （1）设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}, \qquad ①$$

两边同时左乘以 $\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$=(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1-(2k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \qquad ②$$

①－②得

$$2k_3\boldsymbol{\alpha}_1+(3k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，可知 $k_2=k_3=0$. 代入①可知 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，从而 $k_1=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. □

解 (2) $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3]$

$$=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

故线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

1、**解** （1） $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&\frac{5}{2}\\0&\frac{5}{2}&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=[x_1,x_2,x_3,x_4]\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$.

2、**解** 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})=2$，从而

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=24(c-3)=0,$$

解得 $c=3$.

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-3\\\lambda-4&\lambda-5&3\\0&3&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-6&6\\0&3&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda-6&6\\3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9).$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0, 4, 9, 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(0,4,9)$. 于是作正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{SY}$，有 $f=4y_2^2+9y_3^2$.

3、**解** （1） 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&-2\\4&3&2\\-2&2&6\end{bmatrix}$. 因为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_3|=\begin{vmatrix}3-\lambda&4&-2\\4&3-\lambda&2\\-2&2&6-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-7)^2(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $7,7,-2$.

对特征值7，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-7\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,2]^{\mathrm{T}}$；

对特征值 -2，解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=[2,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，得 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}[-1,1,4]^{\mathrm{T}}$.

单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=[\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=[-\tfrac{1}{3\sqrt{2}},\tfrac{1}{3\sqrt{2}},\tfrac{4}{3\sqrt{2}}]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=[\tfrac{2}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}]^{\mathrm{T}}.$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 为标准正交特征向量组. 令

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\quad \boldsymbol{\eta}_2,\quad \boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(7,7,-2)$. 作正交替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$，可将二次型 f 化为标准形 $f=7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$.

（2）二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$，因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$.

对特征值5，解齐次线性方程组 $(5\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，可求得 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,-2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于特征值 5 的特征向量. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\qquad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\left[\frac{4}{5},\frac{2}{5},-1\right]^{\mathrm{T}}.$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\left[\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5},0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\left[\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{2\sqrt{5}}{15},-\frac{\sqrt{5}}{3}\right]^{\mathrm{T}}.$$

对特征值−4，求解齐次线性方程组 $(-4\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值−4的特征向量. 将 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}3\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 10\\ -6\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 5\\ 0 & -5\sqrt{5} & 10\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交阵，且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}(5,5,-4)$. 故二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 经正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形 $g(\boldsymbol{Y})=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

注 在求二重特征值5的特征向量时，也可通过观察直接得到 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-2,2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于5的正交的特征向量，以避免正交化过程.

(3) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$. 因为

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}_4-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda+1\right)^2,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1.$

对特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次方程组 $\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left[0,0,-1,-1\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left[1,1,0,0\right]^{\mathrm{T}};$$

对特征值 $\lambda_3=\lambda_4=-1$，解齐次方程组 $\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\left[1,-1,0,0\right]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\left[0,0,1,1\right]^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 已经是正交组，只需单位化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\begin{bmatrix}0\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_4=\frac{\boldsymbol{\alpha}_4}{|\boldsymbol{\alpha}_4|}=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为标准正交的特征向量组，令

$$\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\right]=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{S}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AS}=\mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$. 作正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{SY}$，可将原二次型化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2.$

4、**解** (1) 由配方法，

$$\begin{aligned}f\left(x_1,x_2,x_3\right)&=x_1^2+5x_1x_2-3x_2x_3\\&=(x_1+\tfrac{5}{2}x_2)^2-\tfrac{25}{4}x_2^2-3x_2x_3\\&=(x_1+\tfrac{5}{2}x_2)^2-\tfrac{25}{4}\left(x_2+\tfrac{6}{25}x_3\right)^2+\tfrac{9}{25}x_3^2.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{5}{2}x_2, \\ y_2 = \qquad x_2 + \frac{6}{25}x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{5}{2}y_2 + \frac{3}{5}y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 - \frac{6}{25}y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为可逆矩阵．作满秩线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{SY}$，可将二次型化为标准形 $g = y_1^2 - \frac{25}{4}y_2^2 + \frac{9}{25}y_3^2$.

（2）由配方法，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 \\ &= 2\left[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2\right] - 2(x_2 - x_3)^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2\right) + \frac{5}{3}x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 + \frac{5}{3}x_3^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = \qquad x_2 - \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \qquad y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3. \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为可逆矩阵．作满秩线性替换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{SY}$，可将原二次型化为标准形

$$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2.$$

（3）由于所给二次型没有平方项，故先作满秩线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = \qquad y_3, \\ x_4 = \qquad\qquad y_4, \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_3y_4$$

$$=(y_1^2+y_1y_3+\frac{1}{4}y_3^2)-(y_2^2+y_2y_3+\frac{1}{4}y_3^2)+y_3y_4$$

$$=(y_1+\tfrac{1}{2}y_3)^2-(y_2+\tfrac{1}{2}y_3)^2+(\tfrac{y_3+y_4}{2})^2-(\tfrac{y_3-y_4}{2})^2.$$

再令

$$\begin{cases} z_1= y_1 +\frac{1}{2}y_3, \\ z_2= y_2 +\frac{1}{2}y_3, \\ z_3= \frac{1}{2}y_3+\frac{1}{2}y_4, \\ z_4= \frac{1}{2}y_3-\frac{1}{2}y_4 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y_1= z_1 -\frac{1}{2}z_3-\frac{1}{2}z_4, \\ y_2= z_2-\frac{1}{2}z_3-\frac{1}{2}z_4, \\ y_3= z_3+z_4, \\ y_4= z_3-z_4, \end{cases}$$

就将原二次型化为标准形 $g(z_1,z_2,z_3,z_4)=z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2$.

所作的满秩线性替换为

$$\begin{cases} x_1=z_1+z_2-z_3-z_4, \\ x_2=z_1-z_2, \\ x_3= z_3+z_4, \\ x_4= z_3-z_4, \end{cases}$$

记为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{SZ}$，其中

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

为可逆矩阵.

5、**解** 根据二次型 f 的特点，作满秩线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1+y_2, \\ x_2 = y_1-y_2, \\ x_3 = y_3+y_4, \\ x_4 = y_3-y_4, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = y_{n-1}+y_n, \\ x_n = y_{n-1}-y_n \end{cases} \quad 或 \quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{SY},$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&\cdots&0&0\\1&-1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&1&\cdots&0&0\\0&0&1&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&0&\cdots&1&-1\end{bmatrix}$$

为可逆阵，将 f 化为标准形

$$g = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{n-1}^2 - y_n^2,$$

因此 f 的秩为 n，正、负惯性指数均为 $\frac{n}{2}$，故符号差为 0.

6、**解** (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. 其各阶顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = 1 > 0, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2, \quad |\boldsymbol{A}_3| = |\boldsymbol{A}| = -t(5t+4).$$

由 $1 - t^2 > 0, t(5t+4) < 0$，解得 $-\frac{4}{5} < t < 0$. 因而当 $-\frac{4}{5} < t < 0$ 时，二次型 f 是正定的.

(2) 二次型 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$. 其各阶顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = 1 > 0, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2, \quad |\boldsymbol{A}_3| = |\boldsymbol{A}| = t(1 - t^2).$$

由 $1 - t^2 > 0,\ t(1 - t^2) > 0$，解得 $0 < t < 1$. 因而当 $0 < t < 1$ 时，二次型 f 是正定的.

(3) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & 0 \\ 1 & t & -1 & 0 \\ 1 & -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式为

$$|\boldsymbol{A}_1| = t, \quad |\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t+1)(t-1),$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2), \quad |\boldsymbol{A}_4| = |\boldsymbol{A}| = (t+1)^2(t-2).$$

f 正定当且仅当 A 的各阶顺序主子式均大于零，即

$$\begin{cases} t > 0, \\ (t+1)(t-1) > 0, \\ (t+1)^2(t-2) > 0, \end{cases}$$

解得 $t > 2$. 因此当 $t > 2$ 时，f 是正定的.

7、**解** 由已知条件知，对任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，有 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$. 要使二次型 f 正定，只需下述齐次线性方程组仅有零解,

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 = 0, \\ x_2 + a_2x_3 = 0, \\ \cdots \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = 0, \\ a_nx_1 + x_n = 0. \end{cases}$$

此方程组仅有零解的充分必要条件是其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n \neq 0.$$

故当 $1 + (-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n \neq 0$，即 $a_1a_2\cdots a_n \neq (-1)^n$ 时，对于任意的不全为零的 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，有 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$，即二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是正定的.

8、 **证** 方法 1 设 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值为 λ，则 $\boldsymbol{ABX} = \lambda\boldsymbol{X}$，其中 X 为对应的特征向量. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，于是 $\boldsymbol{BX} = \lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$. 等式两边同时左乘 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX} = \lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 正定，就有 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定，又 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} > 0$. 又由 $\boldsymbol{B}$ 正定，所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX} > \boldsymbol{0}$，因此 $\lambda > 0$，即 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零.

方法 2 由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 正定，知必存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$. 于是

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q}.$$

因而矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 和矩阵 $(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$ 相似. 由 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可逆，知 $\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，因而 $(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}})$ 正定，其特征值全大于零. 又 $\boldsymbol{AB}$ 与之相似，故 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值全大于零.

因为 $\boldsymbol{AB} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 的特征值全大于零，故

$$\boldsymbol{AB}\text{正定} \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}\text{实对称} \Leftrightarrow \boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}. \qquad \square$$

9、**证** 因为 $\boldsymbol{B}$ 是实反对称矩阵，即 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 实对称知 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，即 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2$ 是实对称的.

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，故对 $\forall \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\mathrm{X} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX} + (\boldsymbol{BX})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX} > 0.$$

因此，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}^2$ 是正定矩阵.

10、 **证** $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\lambda\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，且由 $\lambda > 0$ 可知，对 $\forall \boldsymbol{X} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + (\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX}) > 0,$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵. $\square$