2018～2019学年第二学期期中考试模拟试卷

《线性代数及其应用》(共3页)

(考试时间：2019年4月15日)

题号	一	二	三	四	成绩	核分人签字
得分						

一、填空题与单项选择题(共30分，每小题5分)

1． $\begin{bmatrix}4 & 8 & -1\\ -4 & 1 & -8\\ 7 & -4 & -4\end{bmatrix}^{-1}=\underline{\dfrac{1}{81}\begin{bmatrix}4 & -4 & 7\\ 8 & 1 & -4\\ -1 & -8 & -4\end{bmatrix}}$.

2． $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 6 & 2\end{vmatrix}$ 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{12}-\boldsymbol{A}_{32}-\boldsymbol{A}_{42}=\underline{-22}$.

3．设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 元列向量，$\boldsymbol{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$\boldsymbol{B}=[\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_2-3\alpha_3,3\alpha_1-2\alpha_3]$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|=\underline{-320}$.

4．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，则下列命题错误的是(C).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{BA}$ (B) $(\boldsymbol{BA})^2=\boldsymbol{E}$ (C) $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$ (D) $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{ABA}$

5．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为3阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{ABA}^{\mathrm{T}})-r(\boldsymbol{B})=$(A).

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

6．设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶奇异反对称矩阵，则 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{ABA}$ 是(D).

(A)非奇异对称矩阵 (B)非奇异反对称矩阵

(C)奇异对称矩阵 (D)奇异反对称矩阵

二、**(16分)**当 p 为何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+6x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=p\\ x_2+2x_3+2x_4=2\\ 5x_1+2x_2-3x_3+5x_4=11\end{cases}$ 有解？并求有解时求其向量形式通解.

解：$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 3 & -5 & p\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -6 & 18 & 2-2p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13-p\end{array}\right]$，$p$=13时方程组有解.

此时 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & -4 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 8 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，通解为 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ -6\\ 4\\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}4\\ -8\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$，$k$ 为任意常数.

三、计算题(共 32 分，2 个小题，每小题 16 分)

1．设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-2\\-2&2&-1\\1&2&2\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{T}}=63\boldsymbol{E}_3+18\boldsymbol{XA}^{-1}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解：$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=9\boldsymbol{E}$.方程两边同右乘 $\boldsymbol{A}$ 得：$9\boldsymbol{AX}=63\boldsymbol{A}+18\boldsymbol{X}$，

即 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=7\boldsymbol{A}$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\neq 0$.

$$[\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\ \vdots\ 7\boldsymbol{A}]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&-2&14&7&-14\\-2&0&-1&-14&14&-7\\1&2&0&7&14&14\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&11&-8&-2\\0&1&0&-2&11&8\\0&0&1&-8&2&11\end{array}\right],$$

即 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}11&-8&-2\\-2&11&8\\-8&2&11\end{bmatrix}$.

2．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$，求 $r\left(\boldsymbol{A}^*\right)$，$\boldsymbol{A}^{2019}$.

解：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=3=n-1\Rightarrow r\left(\boldsymbol{A}^*\right)=1$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\\&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{2019}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{2019}&\\&\boldsymbol{C}^{2019}\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{C}^{2019}=\begin{bmatrix}-1&2019\\0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^{2019}=(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B})^{2018}\boldsymbol{B}=(-2)^{2018}\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2^{2018}&2^{2018}\\2^{2018}&-2^{2018}\end{bmatrix}$.

故 $\boldsymbol{A}^{2019}=\begin{bmatrix}-2^{2018}&2^{2018}&0&0\\2^{2018}&-2^{2018}&0&0\\0&0&-1&2019\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$.

四、证明题(共 22 分，2 个小题，第 1 小题 14 分，第 2 小题 8 分)

1．若 $\mathbf{P}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.证明当 $ab\neq0$ 时，向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+(1+a)\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+(1-a)\boldsymbol{\alpha}_4,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=(1+b)\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+(1-b)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

线性无关.

证明：$$\left[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\right]=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]\begin{bmatrix}1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\\1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]\boldsymbol{C},$$

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\\1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1+b&-b\\1&0&1&-b\\1+a&-a&1&0\\1&-a&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1+b&-b\\1&0&1&-b\\a&0&0&0\\1&-a&1&0\end{vmatrix}$$

$$=-a\begin{vmatrix}1&1+b&-b\\1&1&-b\\a&0&0\end{vmatrix}=a^2b^2\neq0.$$

因此矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，$r\left(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4\right)=r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=4$，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关.

2．设 $\boldsymbol{AB}$ 为 n 阶矩阵方程，且满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$.证明矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.

证明：由已知 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=-1$.

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EB}|=\left|\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\right|=\left|\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{B}\right|$$
$$=|\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=-|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|.$$

可得 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，因此矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不可逆.