# 第七章　二次型

1、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，求 $a$ 的值.

2、实二次型 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形 $y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，则二次型 $g(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 经过正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形______________，二次型 $h(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}$ 经过正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形______________.

3、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，若 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1,-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2]$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下的标准形为(　　).

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

4、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 $a$ 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

5、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的规范形为(　　).

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

6、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 的秩为_______，正惯性指数为_______.

7、实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$ 的负惯性指数为___________，符号差为___________.

8、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 $a$ 的取值范围是______________.

9、设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$ 合同，则实二次型 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的规范形为_____________.

10、设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均是 $n$ 阶实对称矩阵，则正确命题是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　　(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似　　(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同

11、设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$，则下列矩阵中与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}-2&1\\1&-2\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$

12、判断下列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的合同和相似关系.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$； (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&4\\0&0&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$； (4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$；

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

13、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-k)x_3^2+2kx_1x_2+2x_1x_3$ 为正定二次型(或矩阵的特征值都大于零)，求参数 $k$ 的取值范围.

14、以下矩阵中，正定的矩阵为(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&7&4\\2&5&0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}5&2&0\\2&6&-3\\0&-3&-1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&8\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&3\end{bmatrix}$

15、设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶正定矩阵，则以下命题错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都正定 (B) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 正定 (C) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 正定 (D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$正定.

16、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 的秩为 2.

(1) 求实数 $a$ 的值；

(2) 求一个正交替换将实二次型 $f$ 化为标准形；

(3) 求实二次型 $f$ 的秩、正负惯性指数和符号差.

17、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ .

(1) 求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值；

(2) 若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 $a$ 的值.

18、设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$ .

19、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $n$ 阶正定矩阵，证明(1) $\boldsymbol{AB}$ 的特征值都大于零；(2) $\boldsymbol{AB}$ 正定的充要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

20、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\ (\geq 3)$ 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$ .

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 2 , 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

(2) 证明: $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)$ 是正定矩阵；

(3) 证明：$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}_n$（$k>3$）为正定矩阵.

21、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正定矩阵，证明存在 $n$ 阶正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

参考答案

1、$a=0$.

2、$y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2-\frac{1}{3}y_3^2$， $-6y_1^2-3y_2^2+2y_3^2$.

3、应选(A).

4、$a=2$，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

5、应选(C).

6、秩和正惯性指数均为2.

7、$n$，0.

8、$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$ 的负惯性指数为 1，所以 $4-a^2\geq 0$，求得 $-2\leq a\leq 2$.

9、$y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

10、应选(B).

11、应选(D).

12、(1) 合同且相似；(2) 相似但不合同；

(3) 相似但不合同；(4) 合同但不相似；(5)合同但不相似.

13、$-1<k<0$(实二次型对应的对称矩阵的顺序主子式都大于零).

14、应选(D).

正定矩阵的主对角线元素都大于零，选项(A)中有一个主对角线元素等于零，选项(B)中有一个主对角线元素小于零；选项(C)中 2 阶顺序主子式等于零.

15、应选(B).

选项(B)中，与正定矩阵相似的矩阵不一定是对称矩阵，所以不一定是正定矩阵.

选项(A)，利用正定矩阵的定义可以证明.

选项(C)，与正定矩阵合同的矩阵一定是正定矩阵.

选项(D)，证明正定矩阵的所有方法都可以证明.

16、(1) $a=-1$； (2) 令 $\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{S}$ 为正交矩阵，实二次型 $f(\boldsymbol{X})$ 经正交线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{SY}$ 化为标准形 $g(\boldsymbol{Y})=2y_2^2+6y_3^2$；

(3) 秩为 2，正惯性指数为 2，负惯性指数为 0，符号差为 2.

17、（1）$\boldsymbol{A}$ 的全体特征值 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$．

（2）$a-2<a<a+1$，则 $a-2=0$， 因此 $a=2$．

18、证明 必要性 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定，则 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$，因此 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$．

充分性 设 $r(\boldsymbol{A})=n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

显然，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵. 对任意 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{AX}\neq\boldsymbol{0}$，此时

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{AX},\boldsymbol{AX})>0，$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

19、证明（1）因为 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{S}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}$．此时

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AS}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{SAS}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}，$$

记 $\boldsymbol{SAS}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同，因此 $\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵，故 $\boldsymbol{C}$ 的特征值都大于零. 又相似矩阵的特征值都相同，则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值都大于零

（2）由(1)的结论，知 $\boldsymbol{AB}$ 正定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{AB}$ 对称 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$．

20、证明 (1)设 $\lambda$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，则 $\lambda^2+2\lambda-3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$ 的特征值，故 $\lambda^2+2\lambda-3=0$，解得 $\lambda\in\{1,-3\}$．因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 必(正交)相似于对角矩阵. 又正惯性指数为 2，所以 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\operatorname{diag}(1,1,\underbrace{-3,\cdots,-3}_{n-2个})=\boldsymbol{\Lambda}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $1,1,-3$）（$n-2$ 重）.

(2) 显然 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

方法 1 根据(1)的解答过程可知，$-1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n|\neq0$，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n$ 是可逆矩阵，于是 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

方法 2 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^2$，又 $-1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 0 不是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n$ 的特征值，因而 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^2$ 的特征值均为正数，故 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

(3) 因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}_n$ 仍为实对称矩阵. 由(1)的解答过程可知 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}_n$ 的全部特征值必取自集合 $\{k+1,\ k-3\}$．于是，当 $k>3$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}_n$ 的特征值全部大于零，从而 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}_n$ 为正定矩阵.

21、证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶正定矩阵，所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)，$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个实特征值，且都大于零. 上式两边同时左乘 $\boldsymbol{Q}$，右乘 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，使得，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}.$$

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，且它的特征值都大于零，因此 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^2.\end{aligned}$$