线性空间

一、填空题

1、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,5,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[3,-2,3,-4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,1,t,3]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$________.

2、当 n 为_____时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=\left[1,\lambda_i,\lambda_i^2,\lambda_i^3\right](i=1,2,\dots,n)$ 线性相关，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 是互不相同的数.

3、已知向量组 (I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ ；(II) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ ；(III) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ ，如果它们的秩分别为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3,r(\mathrm{III})=4$ ，则 $r\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5\right)=$__________.

4、已知由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,4,5,k]^{\mathrm{T}}$ 生成的子空间的维数为 3，则参数 k 的取值范围是__________.

5、线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 3b \end{bmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ 维数为__________.

6、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,a,3]^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标为 $[b,c,1]^{\mathrm{T}}$，则 $a=$______,$b=$_______,$c=$______.

7、设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 为 3 阶正交矩阵，$a_{11}=1$，$\boldsymbol{\beta}=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的解是_______________.

8、与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 的每个行向量都正交的全体向量所构成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间的维数是___________.

二、选择题

1、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 元向量，下列命题中错误的是______.

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，任意 $s-1$ 个向量都线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

(D) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都是它的极大无关组

2、下列向量组中，线性无关的是(　　).

(A) $[1,2,3,4],[4,3,2,1],[0,0,0,0]$

(B) $[a,b,c],[b,c,d],[d,e,f],[f,a,b]$

(C) $[a,1,b,0,0],[c,0,d,2,3],[e,4,f,5,6]$

(D) $[a,1,2,3],[b,1,2,3],[c,4,2,3],[d,0,0,0]$

3、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不

能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则对于任意的常数$k$，必有_____.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

4、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则下面结论正确的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$线性无关　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

5、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为非零矩阵，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则必有(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关

6、设向量组(I)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$能由向量组(II)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示，则下面结论正确的是(　　).

(A) $r<s$时向量组(II)线性无关　　(B) $r>s$时向量组(II)线性相关

(C) $r<s$时向量组(I)线性无关　　(D) $r>s$时向量组(I)线性相关

7、设矩阵$\boldsymbol{A}_{n\times m}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m],\boldsymbol{B}_{n\times m}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m]$，且列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关；则列向量$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关的充分必要条件是_____.

(A) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$线性表示

(B) 向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示

(C) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m$等价

(D) 矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价

8、设$\boldsymbol{\alpha}_1=[0,0,c_1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,c_2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,c_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[-1,1,c_4]^{\mathrm{T}}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

9、设向量组(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由向量组(II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，则(　　).

(A) 当$s<t$时，向量组(II)必线性相关

(B) 当$s>t$时，向量组(II)必线性相关

(C) 当$s<t$时，向量组(I)必线性相关

(D) 当$s>t$时，向量组(I)必线性相关

10、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均为$n$阶矩阵，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且$\boldsymbol{B}$可逆，则(　　).

(A) 矩阵$\boldsymbol{C}$的行向量组与矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组等价

(B) 矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组与矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组等价

(C) 矩阵$\boldsymbol{C}$的行向量组与矩阵$\boldsymbol{B}$的行向量组等价

(D) 矩阵$\boldsymbol{C}$的列向量组与矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组等价

三、解答题

1、设$\boldsymbol{\alpha}_i=\left[a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}\right]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\dots,r;r<n)$是$n$元实向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，已知$\boldsymbol{\beta}=\left[b_1,b_2,\dots,b_n\right]^{\mathrm{T}}$是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量. 试判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$的线性相关性.

2、设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$n\times s$矩阵，$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，证明：$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关的充要条件是$\boldsymbol{C}$的列向量组线性无关.

3、设n阶实降秩阵$\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n\right]$，其列向量组的极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$，方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$是$\mathbf{R}^n$的一个基.

4、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$的秩为$r$的充要条件是$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示.

5、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$均为$n$元列向量，

（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$；（II）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$；（III）$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t$.

证明(1)（I)可由(II)线性表示的充分必要条件是$r(\mathrm{II})=r(\mathrm{III})$；

(2)（II)可由(I)线性表示的充分必要条件是$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{III})$；

(3)（I)与(II)等价的充分必要条件是$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{III})$.

6、设(I) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,4,2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,0,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,a,-1]^{\mathrm{T}}$；

(II) $\boldsymbol{\beta}_1=[2,7,3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[1,3,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[3,10,4,b]^{\mathrm{T}}$.

试问a,b取何值时，

(1)（I)可由(II)线性表示？

(2)（II)可由(I)线性表示？

(3)（I)与(II)等价？

7、(2019年数二)已知向量组(I) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$,

$$(\mathrm{II})\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}.$$

若向量组(I)和(II)等价，求a的值，并将$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

8、设(I) $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,a,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[a,1,1]^{\mathrm{T}}$；

（II） $\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,a]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[-2,a,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[-2,a,a]^{\mathrm{T}}$，

(I)可由(II)线性表示，（II)不可由(I)线性表示，求参数 a .

9、设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[2,4,3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$，已知 $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A\alpha}_4$.

10、(1) 证明 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}5&11\\12&2\end{bmatrix}$ 是线性空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个基；

(2) 求 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&6\\6&5\end{bmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 下的坐标.

11、设 W 是由所有 2 阶实对称矩阵组成的集合，证明 W 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一个子空间，求 W 的基和维数.

12、证明 $W=\left\{\begin{bmatrix}a+b+c+3d\\2a+b+2c+5d\\3a+2b+4c+9d\\3b+2c+5d\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}<\mathbb{R}^4$，并求 W 的基和维数.

13、证明 $W=\left\{\begin{bmatrix}a+b+c+3d&2a+b+2c+5d\\3a+2b+4c+9d&3b+2c+5d\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间，并求 W 的基和维数.

14、利用坐标向量判断 $\mathbb{R}[x]_3$ 中的多项式组

$$f_1(x)=1+2x+3x^2,f_2(x)=1+x+2x^2+3x^3,$$
$$f_3(x)=1+2x+4x^2+2x^3,f_4(x)=3+5x+9x^2+5x^3,$$

的线性相关性，并求该向量组的秩和极大无关组.

15、设 $\mathbb{R}[x]_3$ 的子空间 W 是由

$$f_1(x)=1+2x+3x^2,f_2(x)=1+x+2x^2+3x^3,$$
$$f_3(x)=1+2x+4x^2+2x^3,f_4(x)=3+5x+9x^2+5x^3,$$

生成，求 W 的基和维数.

16、求向量组 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\3&5\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&-1\\t&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&2\\4&t+6\end{bmatrix}$ 的秩和极大无关组.

17、设线性空间 V 中，向量组(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，

（II） $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+5\boldsymbol{\alpha}_4$,

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+(t+6)\boldsymbol{\alpha}_4,$$

求向量组(II)的秩和极大无关组.

18、若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是 3 维线性空间 V_3 的一个基，而向量组

（I） $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$；

（II） $\boldsymbol{\beta}_1=\xi_1-2\xi_2+2\xi_3, \boldsymbol{\beta}_2=2\xi_1-\xi_2-2\xi_3, \boldsymbol{\beta}_3=2\xi_1+2\xi_2+\xi_3$

分别是V_3的另外两个基. (1)求由基(I)到基(II)的过渡矩阵$\boldsymbol{S}_1$；(2)求由基(II)到基(I)的过渡矩阵$\boldsymbol{S}_2$.

19、设$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=[3,4,3]^{\mathrm{T}}$是$\mathbb{R}^3$的一个基，由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) 求$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$；(2) 求$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标；

(3) 求$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.

20、在线性空间$\mathbb{R}[x]_2$中，有两个基

(I) $f_1=1+2x+x^2, f_2=2+3x+4x^2, f_3=3+4x+3x^2$；

(II) $g_1=1+x+x^2, g_2=1-x^2, g_3=1+x^2$；

(1) 求由基g_1,g_2,g_3到基f_1,f_2,f_3的过渡矩阵$\boldsymbol{S}$；

(2) 求$h(x)=f_1+2f_2-3f_3$在基g_1,g_2,g_3下的坐标；

(3) 求$p(x)=2g_1+2g_2-3g_3$在基f_1,f_2,f_3下的坐标.

21、设(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$和(II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$都是线性空间$V$的基，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4 .$$

(1) 求由基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$的过渡矩阵$\boldsymbol{S}$；

(2) 求向量$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3+4\boldsymbol{\beta}_4$在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的坐标；

(3) 求向量$\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4$在基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$下的坐标；

(4) 求在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$和基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$下具有相同坐标的全体向量.

22、设(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$和(II) $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$都是线性空间$V$的基，其中

$$\boldsymbol{\gamma}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\gamma}_4=-\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_4 .$$

(1) 求由基$\{\boldsymbol{\gamma}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$的过渡矩阵$\boldsymbol{S}$；

(2) 求在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$和基$\{\boldsymbol{\gamma}_i\}$下具有相同坐标的全体向量.

23、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$是$\mathbf{R}^n$中线性无关的向量组，且$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$分别与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$正交，证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

24、设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$是欧氏空间$\mathbf{R}^n$的一个标准正交基，记$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}_n+\lambda\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q}$.

25、若$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$（$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$为$n$元列向量），证明$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$的长度相等.

26、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$可逆，证明$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$是正交矩阵.

答案与提示

一、填空题

1、$t=1$.

解 记 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&t\\2&-4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&-12&t+5\\0&-10&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&0&t-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $r(\boldsymbol{A})<3$，因此 $t=1$.

2、$n\geq 5$.

解 若 $n\geq 5$，则向量的个数大于分量的个数，因此向量组线性相关. 若 $n=4$，如

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\\\boldsymbol{\alpha}_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\lambda_2^3\\1&\lambda_3&\lambda_3^2&\lambda_3^3\\1&\lambda_4&\lambda_4^2&\lambda_4^3\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq 4}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0,$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 进而 $n\leq 3$ 时，向量组也线性无关.

3、解 因为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可唯一地由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即存在数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$，因为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_4+(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-k_2\boldsymbol{\alpha}_2-k_3\boldsymbol{\alpha}_3+(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5),\\&\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_5,\end{aligned}$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 等价，因此两个向量组的秩相等，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩也为 4.

4、解 由题设，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[3,4,5,k]^{\mathrm{T}}$ 的秩为 3. 记 $\boldsymbol{A}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right]$，则 $r(\boldsymbol{A})=3$. 此时

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&4&5\\1&5&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&2&2\\0&3&k-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&k-6\\0&0&0\end{bmatrix},$$

则 $k\neq 6$.

5、2.

6、$a=3,b=2,c=-2$.

7、$[1,0,0]^{\mathrm{T}}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，因此 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解. 又正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行

向量和列向量均为单位向量，且 $a_{11}=1$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&a_{32}\\0&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

8、维数为 2.

解 设 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的三个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交，则 $0=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},i=1,2,3$，即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

于是与 $\boldsymbol{A}$ 的三个行向量都正交的的全体向量所构成的 $\mathbf{R}^4$ 的子空间为

$$W=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^4\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\right\}.$$

注意到 $W_1=\left\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\right\}$ 与子空间 W 的维数相同（W 中的行向量对应 W_1 中的列向量），且 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\dim W=4-r(\boldsymbol{A})=2$.

二、选择题

1、选择(C).

解 选项(A)和(D)是书上的结论.

选项(B)，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性无关，由 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，与假设条件不符. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关

选项(C)，取 $s=3,\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，则任意两个向量都线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

2、选择(C).

解 选项(A)中有零向量，因而向量组线性相关.

选项(B)中，向量的个数大于分量的个数，因而向量组线性相关.

选项(C)中，记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&b&0&0\\c&0&d&2&3\\e&4&f&5&6\end{bmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})\le 3$，且 $\boldsymbol{A}$ 有一个 3 阶子式 $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&3\\4&5&6\end{vmatrix}=-3\ne 0$，因而 $r(\boldsymbol{A})=3$，故选项(C)中的三个向量线性无关.

选项(D)中，取 $a=b$ 或 $d=0$，向量组线性相关.

3、选择(A).

解 因为向量$\boldsymbol{\beta}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，所以存在数$k_1,k_2,k_3$，使得

$$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

又向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关. 考虑向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$的线性相关性，其中$l_1,l_2$为任意常数. 设

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4(l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2)=\mathbf{0},$$

则

$$(x_1+l_1k_1x_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+l_1k_2x_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+l_1k_3x_4)\boldsymbol{\alpha}_3+l_2x_4\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}.$$

由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，知

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad +l_1k_1x_4=0,\\ \qquad x_2 \qquad +l_1k_2x_4=0,\\ \qquad\qquad x_3+l_1k_3x_4=0,\\ \qquad\qquad\qquad l_2x_4=0. \end{cases}$$

方程组的系数行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&0&l_1k_1\\0&1&0&l_1k_2\\0&0&1&l_1k_3\\0&0&0&l_2\end{vmatrix}=l_2$.

当$l_2\neq 0$时，方程组只有零解，表明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$线性无关；

当$l_2=0$时，方程组有非零解，表明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

4、选择(B).

解 选项(B)，因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，且向量$\boldsymbol{\beta}_2$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关，其部分组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

若取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$或$\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$线性相关；若取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_3$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$线性无关. 若取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，则$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关；若取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$或$\boldsymbol{\alpha}_3$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$线性相关.

选项(D)，由选择题3，知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关.

5、选择(A).

解 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times s$矩阵，由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$. 又$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为非零矩阵，则$r(\boldsymbol{A})\ge 1, r(\boldsymbol{B})\ge 1$，因此$r(\boldsymbol{A})<n, r(\boldsymbol{B})<n$，故$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

6、应选(D).

7、应选(D).

8、应选(C).

解 选项(A)，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=-c_1$，当$c_1\neq 0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

选项(B)，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4|=c_1$，当$c_1\neq 0$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关；

选项(C)，因为$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关；

选项(D)，$\left|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right|=-(c_3+c_4)$，当$c_3+c_4\neq 0$时，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.

9、选择(D).

解 因为(I)可由(II)线性表示，所以当$r>s$时，有$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})\le s<r$，因此(I)线性相关.

取$(\mathrm{I})\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},(\mathrm{II})\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，但(II)线性无关，排除(A).

取$(\mathrm{I})\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\mathrm{II})\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，但(II)线性无关，排除(B).

取$(\mathrm{I})\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(\mathrm{II})\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，但(I)线性无关，排除(C).

10、选择(B).

解 因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，所以$\boldsymbol{C}$列向量组可由$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示(由书例 3.4.4). 又$\boldsymbol{B}$可逆，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，因此$\boldsymbol{A}$列向量组可由$\boldsymbol{C}$的列向量组线性表示，故$\boldsymbol{A}$列向量组与$\boldsymbol{C}$的列向量组等价.

三、解答题

1、解 由题设，知

$$0=a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+\cdots+a_{in}b_n=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i,i=1,2,\ldots,r\ .$$

设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_0\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，等式两边同时左乘$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_0\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\mathbf{0}$$
$$\Rightarrow k_1(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_r(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r)+k_0(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=0,$$

则$k_0(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=0$，即$k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$.而$\boldsymbol{\beta}$为非零向量，因此$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\neq 0$，故$k_0=0$. 此时

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，所以$k_1=\cdots=k_r=0$，因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$线性无关.

2、证 因为$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，所以$r(\boldsymbol{A})=n$.

必要性 设$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关，则$r(\boldsymbol{B})=s$. 此时

$$s=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\le r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{C})\le s\ ,$$

则$r(\boldsymbol{C})=s$，因此$\boldsymbol{C}$的列向量组线性无关.

充分性 设$\boldsymbol{C}$的列向量组线性无关，则$r(\boldsymbol{C})=s$. 此时

$$s=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{AB})\le r(\boldsymbol{B})\le s\ ,$$

则$r(\boldsymbol{B})=s$，因此$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

3、证 由题设，知$r(\boldsymbol{A})=r$，因此$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$的基础解系所含向量个数为

$$n-r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=n-r(\boldsymbol{A})=n-r=t\ ,$$

故 $r+t=n$. 又 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的解，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_k=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_k=\mathbf{0},k=1,2,\ldots,t,$$

因此 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_k)=0=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_k,i=1,2,\ldots,n,k=1,2,\ldots,t$.

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-l_t\boldsymbol{\beta}_t,$$

因此

$$\begin{aligned}&(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r)\\=&(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-l_t\boldsymbol{\beta}_t)=0,\end{aligned}$$

故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$. 又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $k=k_2=\cdots=k_r=\mathbf{0}$. 此时

$$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0},$$

由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 的基础解系，知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关，因此 $l_1=l_2=\cdots=l_t=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关. 又 $\mathbf{R}^n$ 的维数为 n，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基.

4、略.(利用命题 4.2.7 和等价向量组具有相同的秩的结论)

5、证 (1) 必要性 由题设，知向量组(II)与(III)等价，因此两个向量组的秩相等.

充分性 记 $r(\mathrm{II})=r(\mathrm{III})=r$.

若 $r=0$，则(III)中的向量均为零向量，因此向量组(I)可由(II)线性表示.

若 $r\neq0$，设(IV) $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\ldots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 为向量组(II)的一个极大无关组，则(IV)线性无关，且(II)与(IV)等价. 由 $r(\mathrm{III})=r$，知(IV)也是(III)的极大无关组，因此(I)可由(IV)线性表示，进而(I)可由(II)线性表示.

(2) (3) 略.

6、解 记(III) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$.

(1) (I)可由(II)线性表示，当且仅当 $r(\mathrm{II})=r(\mathrm{III})$. 此时

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&2&1&3\\4&2&1&7&3&10\\2&0&a&3&1&4\\0&2&-1&1&1&b\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-4r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&2&1&3\\0&-2&1&-1&-1&-2\\0&-2&a&-1&-1&-2\\0&2&-1&1&1&b\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&2&1&3\\0&-2&1&-1&-1&-2\\0&0&a-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&b-2\end{array}\right],$$

则 $a=1$.

(2) (II)可由(I)线性表示，当且仅当 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{III})$，则 $b=2$.

(3) (I)与(II)等价，当且仅当 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{III})$，则 $a=1,b=2$.

7、(1) $a\neq -1$；

(2) 当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k 为任意常数；

当 $a\neq\pm1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

8、解　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3)$ 线性相关，知 $\beta_i(i=1,2,3)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即(II)可由(I)线性表示，与题设矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 此时

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-(a+2)(a-1)^2=0,$$

求得 $a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，则(I)可由(II)线性表示. 而 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不可由(I)线性表示，故 $a=1$.

当 $a=-2$ 时，

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3 \vdots \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\1&-2&-2&1&-2&1\\-2&4&-2&-2&1&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1\end{array}\right],$$

则(I)中的 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不可由(II)线性表示，不符合题意，故舍去.

9、法 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_4=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\x_1+3x_2+4x_3=1,\\x_1+x_2+3x_3=-1.\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&1\\1&3&4&1\\1&1&3&-1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{array}\right].$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组有唯一解，其唯一解为 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[3,2,-2]^{\mathrm{T}}$. 此时 $\boldsymbol{\alpha}_4=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$A\boldsymbol{\alpha}_4 = 3A\boldsymbol{\alpha}_1 + 2A\boldsymbol{\alpha}_2 - 2A\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 - 2\boldsymbol{\alpha}_4 = [5,15,11]^{\mathrm{T}}.$$

法 2 通过 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&4\\1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&1\\1&3&-1\end{bmatrix}$，求得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&1\\1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&-2\\\frac{17}{2}&\frac{1}{2}&-6\\5&1&-5\end{bmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_4=[5,15,11]^{\mathrm{T}}$.

10、证 (1) 设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}5&11\\12&2\end{bmatrix}$ 在标准基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}5\\11\\12\\2\end{bmatrix}$.

记 $\boldsymbol{M}=\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]$，则

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1&1&5\\2&3&1&11\\1&2&3&12\\2&1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&5\\0&1&-1&1\\0&0&2&7\\0&-1&-3&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&5\\0&1&-1&1\\0&0&2&7\\0&0&0&7\end{bmatrix},$$

因此 $r(\boldsymbol{M})=4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，从而 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 也线性无关. 又 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的维数为 4，则 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 是 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的一个基.

(2) $\left[1,-8,-5,3\right]^{\mathrm{T}}$.

11、证 因为

$$\begin{aligned}W&=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\middle|a,b,c\in\mathbf{R}\right\}\\&=\left\{a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\middle|a,b,c\in\mathbf{R}\right\}\\&=\left\{a\boldsymbol{E}_{11}+b(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21})+c\boldsymbol{E}_{22}\ \middle|a,b,c\in\mathbf{R}\right\}\\&=L(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}),\end{aligned}$$

所以 $W<\mathbf{R}^{2\times2}$.

解 设 $x_1\boldsymbol{E}_{11}+x_2(\boldsymbol{E}_{12}+\boldsymbol{E}_{21})+x_3\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{O}$，则

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此$x_1 = x_2 = x_3 = 0$，故$\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$线性无关，从而$\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{22}$是$W$的一个基，且$\dim W = 3$.

12、证（1）$W = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$.

记$\boldsymbol{\alpha}_1 = [1, 2, 3, 0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [1, 1, 2, 3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [1, 2, 4, 2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = [3, 5, 9, 5]^{\mathrm{T}}$，则

$$W = \{ a\boldsymbol{\alpha}_1 + b\boldsymbol{\alpha}_2 + c\boldsymbol{\alpha}_3 + d\boldsymbol{\alpha}_4 \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \} = L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) < \mathbf{R}^4.$$

（2）记$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4]$，则

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 3$，且$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组，从而$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是$W$的一个基，且$W$的维数为 3.

13、基为$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$；维数为 3.

14、解 设(II) f_1, f_2, f_3, f_4在基(I) $1, x, x^2, x^3$下的坐标分别为

$$\text{(III)} \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

记$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4]$，则

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此$r(\boldsymbol{M}) = 3$，故$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$线性相关，从而$f_1, f_2, f_3, f_4$也线性相关．又$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的秩为 3，且$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大无关组，因此向量组$f_1, f_2, f_3, f_4$的秩也为 3，且$f_1, f_2, f_3$是该向量组的一个极大无关组.

15、基为f_1, f_2, f_3；维数为 3.

16、解 设(II) $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\3&5\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}1&-1\\t&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}1&2\\4&t+6\end{bmatrix}$ 在标准基(I) $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标分别为

$$\text{(III)}\quad \boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\t\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\t+6\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$，则

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&t&4\\3&5&1&t+6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&t-1&0\\0&0&0&t-1\end{bmatrix}.$$

当 $t\neq 1$ 时， $r(\text{III})=4$，且 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 是(III)的极大无关组，则 $r(\text{II})=4$，且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 是(II)的极大无关组；

当 $t=1$ 时，$r(\text{III})=2$，且 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是(III)的极大无关组，则 $r(\text{II})=2$，且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是(II)的极大无关组.

17、解 记 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是子空间 W 的一个基. 设(II) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 在基(I) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标为

$$\text{(III)}\quad \boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\t\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\t+6\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$，则

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&t&4\\3&5&1&t+6\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&t-1&0\\0&0&0&t-1\end{bmatrix}.$$

当 $t\neq 1$ 时， $r(\text{III})=4$，且 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 是(III)的极大无关组，则 $r(\text{II})=4$，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是(II)的极大无关组；

当 $t=1$ 时，$r(\text{III})=2$，且 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是(III)的极大无关组，则 $r(\text{II})=2$，且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是(II)的极大无关组.

18、因为 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]\boldsymbol{P}_1$，且

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\boldsymbol{P}_2,$$

所以$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}_1^{-1}=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{P}_2^{-1}$，因此

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3](\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2),$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3](\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1).$$

(1)由基(I)到基(II)的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&0&3\\-1&1&4\\0&-3&3\end{bmatrix}.$$

(2) 由基(II)到基(I)的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5&-3&-1\\1&3&-5\\1&3&1\end{bmatrix}.$$

19、解 (1) 由题设，知$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{S}$，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{S}^{-1}.$$

求得$\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-2\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-2\\0&-1&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix},$$

即$\boldsymbol{\beta}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

(2) 法 1 设向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标为$\boldsymbol{X}=[1,2,-3]^{\mathrm{T}}$，则由坐标变换公式可得

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-2\\2\end{bmatrix}.$$

法 2 由题设，知$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=4\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3$，则

$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=(2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3)+2(3\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)-3(4\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_3)=-4\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$，

因此$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标为$[-4,-2,2]^{\mathrm{T}}$.

(3) 法 1 设 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{X}_1$， $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Y}_1=[2,2,-3]^{\mathrm{T}}$，则由坐标变换公式，得

$$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} & -2\\ 0 & -1 & 0\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

法 2 由 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{S}^{-1}$，知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=2\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3=2(-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3)+2(-\tfrac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\tfrac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_3)-3(-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $[2,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

（或者 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2-3\boldsymbol{\beta}_3=[1,2,-3]^{\mathrm{T}}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3$.）

20、(1) $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}$；(2) $[-4,-2,2]^{\mathrm{T}}$；(3) $[2,-2,1]^{\mathrm{T}}$

21、解(1) 设由基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}$，则由基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 到基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，求得 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

(2)因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_1&=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3+4\boldsymbol{\beta}_4\\&=\boldsymbol{\alpha}_1+2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+4(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)\\&=10\boldsymbol{\alpha}_1+9\boldsymbol{\alpha}_2+7\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4,\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 下的坐标为 $[10,9,7,4]^{\mathrm{T}}$.

(3) 由(1)知，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_2&=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}_1+2(-\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+3(-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3)+4(-\boldsymbol{\beta}_3+\boldsymbol{\beta}_4)\\&=-\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3+4\boldsymbol{\beta}_4,\end{aligned}$$

因而 $\boldsymbol{\gamma}_2$ 在基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 下的坐标为 $[-1,-1,-1,4]^{\mathrm{T}}$.

(4) 设 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$ 和基 $\{\boldsymbol{\beta}_i\}$ 下具有相同坐标的向量，在两个基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$. 由坐标变换公式，得 $\boldsymbol{SX}=\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$，即 $(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. 记 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$，则 $x_2=x_3=x_4=0$(x_1 为自由变量)，因此

$$\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=k\boldsymbol{\alpha}_1\text{，其中 }k\text{ 为任意常数.}$$

22、(1) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$；(2) $-k\boldsymbol{\alpha}_1 + k\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 k 为任意常数.

23、证 因为 $\dim \mathbf{R}^n = n$，所以 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，则存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, l_1, l_2$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} + l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}.$$

记 $\boldsymbol{\gamma} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = -l_1\boldsymbol{\beta}_1 - l_2\boldsymbol{\beta}_2$.

因为 $(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j) = 0, i = 1, 2, \ldots, n-1, j = 1, 2$，所以

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = \left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, -l_1\boldsymbol{\beta}_1 - l_2\boldsymbol{\beta}_2\right) = 0,$$

因此 $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$，即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，则 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$，因此存在不全为零的实数 l_1, l_2，使得 $l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

24、解 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基，所以

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i) = 1, i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = 0, i \neq j, i, j, = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

又 $\boldsymbol{Q} = \left[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\right]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}_n$，从而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_n + \lambda\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} + \lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Q} \\ &= \boldsymbol{E}_n + \lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}})\left[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\right] \\ &= \boldsymbol{E}_n + \lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1), \boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2), \ldots, \boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n)\right] \\ &= \boldsymbol{E}_n + \lambda\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\right] \\ &= \boldsymbol{E}_n + \lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}\right] \\ &= \boldsymbol{E}_n + \operatorname{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0) = \operatorname{diag}(1+\lambda, 1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

25、证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$，因而

$$(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}),$$

即 $|\boldsymbol{Y}|^2 = |\boldsymbol{X}|^2$，表明 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的长度相等.

26、证 显然，$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)^{-1}$ 为实矩阵. 因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，所以

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),$$

因而

$$
\begin{aligned}
&\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right] \\
&=\left[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1} \\
&=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1} \\
&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1} \\
&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{E}_{n},
\end{aligned}
$$

故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 为正交矩阵.