高等数学习题解

下 册

天津大学数学系 编

2 0 1 0 年 10 月



目 录

第七章		向量代数与空间解析几何 ·····								
习	题	7 – 1	(第一节	. ,						
习	题	7-2	(第二节	· 向量及其线性运算) · · · · · · · · 2						
习	题	7-3	(第三节	· 向量的数量积与向量积) · · · · · · · · 3						
习	题	7-4	(第四节	•						
习	题	7-5	(第五节	空间直线的方程) · · · · · · · 10						
习	题	7-6	(第六节	常见曲面的方程) · · · · · · · 15						
习	题	7-7		•						
复	习	题一	է							
第八章 多元函数微分学及其应用 ······29										
习	. 题	8-1		多元函数的基本概念) · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
习	题	8-2	(第二节	·						
习	题	8-3	(第三节	•						
习	题	8-4	(第四节	方向导数与梯度)						
习	题	8-5	(第五节	多元函数徽分学的几何应用)						
习	题	8-6	(第六节	多元函数的泰勒公式与极值) •••• 52						
复	习	题ノ	<i>j</i>	60						
第九	音	重积分								
习	— 题			二重积分的概念与性质)						
习	题		•	二重积分的计算) · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
31	题	9-3	第三节	三重积分						
أبتر	E.	9-4	(第四节	重积分的应用)						
H	题	9-5	(第五节							
复	习	题 ナ	լ	83						
第十章 曲线积分与曲面积分 · · · · · 91										
羽	更题	ш <i>я</i> хихэ 10−1		第一类曲线积分) · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
习	题	10-1								
	题题	10-2		第二类四线传页) 93 格林公式及其应用) 96						
习	题	10-3	(第四节	第一类曲面积分)						
习	题	10-4	(第五节	第二类曲面积分) · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
习	题	10-6	(第六节	第一类出现代分) · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·						
コ	题	10-7	(第八节	尚						
-3	163	10 - 1	(ምፒ፣	州市元州公八弓灰及 1/1 1/1 1/1 1/1 1/1 1/1 1/1 1/1 1/1 1						

复	习	题十	·	
第十·	章	级类	ጷ	
习	题	11-1	第一节	数项级数的基本概念) · · · · · · 137
习	题	11-2	(第二节	正项级数敛散性判别法) · · · · · · 139
习	题	11-3	(第三节	一般项级数 敛散性判别法) · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
习	题	11-4	(第四节	幕级数) · · · · · · 147
习	题	11-5	(第五节	函数的幂级数展开) · · · · · · · 152
习	题	11-6	(第六节	函数项级数的一致收敛性) · · · · · · · · 161
习	题	11 - 7	·(第七节	傅里叶级数) · · · · · · · · 163
复	习	题 十	<u> </u>	

 $r_{\vec{k}}^{(i)}$

第七章 向量代数与空间解析几何

习 题 7-1

1. 在空间直角坐标系中指出下列各点所在的卦限:

$$A(3,-1,1), B(-3,2,-1), C(-3,-2,-1),$$

 $D(3,-2,-1), E(-3,-2,1), F(-3,2,1).$

解 A: IV, B: VI, C: VII, D: VIII, E: III, F: II.

2。指出下列各点在空间直角坐标系中所处的特殊位置:

$$A(0,1,-2), B(0,0,-2), C(1,-1,0),$$

 $D(3,0,-2), E(3,0,0), F(0,-2,0).$

解 A: yOz 平面上, B: z 轴上, C: xOy 平面上, D: zOx 平面上, E: x 轴上, F: y 轴上.

3. 指出点 P(3,-1,2) 关于原点 、 各坐标轴 、 各坐标面的对称点的坐标.

解 P 点关于原点的对称点为 (-3,1,-2), 关于 x 轴的对称点为 (3,1,-2), 关于 y 轴的对称点为 (-3,-1,-2), 关于 z 轴的对称点为 (-3,1,2), 关于 xOy 坐标面的对称点为 (3,-1,-2), 关于 zOx 坐标面的对称点为 (3,1,2), 关于 yOz 坐标面的对称点为 (-3,-1,2).

4. 求点 P(4,-3,5) 到坐标原点 、 各坐标轴 、 各坐标面的距离.

解 P 到坐标原点的距离为 $\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$, P 到 x 轴的距离为 $\sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{2}$ 2 轴的距离为 $\sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$, P 到 z 轴的距离为 $\sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, P 到 x O y 坐标面的距离为 |5| = 5, P 到 y O z 坐标面的距离为 |4| = 4, P 到 z O x 坐标面的距离为 |-3| = 3.

5. 在x 轴上求一点 P, 使它到点 A(1,3,-4) 的距离为 5.

解 设 P 点的坐标为 (x,0,0), 则

$$AP = \sqrt{(x-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5,$$

脚膏 $(x-1)^2 = 0$. 由此得到 x = 1. 因此所求点为 (1,0,0).

6. 在坐标面 yOz 上求与三点 A(3,1,2), B(4,-2,-2) 和 C(0,5,1) 等距的点.

解 设所求点为 D(0, y, z), 则由 AD = BD = CD 得

$$3^{2} + (y-1)^{2} + (z-2)^{2} = 4^{2} + (y+2)^{2} + (z+2)^{2} = (y-5)^{2} + (z-1)^{2}$$

解此方程组得 y=1, z=-2. 因此所求点为 D(0,1,-2).

7. 证明以 A(4,1,9), B(10,-1,6), C(2,4,3) 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解 因为

$$AB = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$$

$$BC = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98},$$

$$AC = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7,$$

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, AB 和 AC 是其两个腰. 又因为

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

所以 △ABC 是等腰直角三角形...

习 题 7-2

1. 设 a 和 b 均为非零向量, 下列等式在什么条件下成立?

(1)
$$|a+b| = |a-b|$$
;

(2)
$$|a+b| = |a| + |b|$$
;

(3)
$$|a+b| = ||a|-|b||$$
;

$$(4) \ \frac{a}{|a|} = \frac{b}{|b|}.$$

解 根据平行四边形法则可知,当 $a\perp b$ 时有 |a+b|=|a-b|. 根据向量加法的定义,当 a 与 b 同向时有 |a+b|=|a|+|b|,而当 a 与 b 反向时有 |a+b|=||a|-|b|| 因为 $\frac{a}{|a|}$ 是与 a 同向的单位向量,而 $\frac{b}{|b|}$ 是与 b 同向的单位向量,所以当 a 与 b 同向时有 $\frac{a}{|a|}=\frac{b}{|b|}$.

2.
$$\mathfrak{F}_{a} = (1, -2, 3), b = (4, -3, -1), c = (3, -2, 5), \ \text{$\not = a + 2b, $2a - 3b + c$}.$$

鮉

$$a + 2b = (1, -2, 3) + (8, -6, -2) = (9, -8, 1),$$

 $2a - 3b + c = (2, -4, 6) - (12, -9, -3) + (3, -2, 5) = (-7, 3, 14).$

3. 求 a=2i-j-2k 的模、 方向余弦及与 a 同向的单位向量 a° .

解

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3,$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3},$$

$$a^{\circ} = \frac{a}{|a|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

4. 设 $\overrightarrow{AB} = 8i + 9j - 12k$, 其中 A 点的坐标为 (2,-1,7), 求 B 点的坐标

解由

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (2, -1, 7) + (8, 9, -12) = (10, 8, -5)$$

知 B 点的坐标为 (10,8,-5).

5. 已知向量 a = mi + 5j - k 与向量 b = 3i + j + nk 平行, 求 m 与 n.

解 因为 a 与 b 平行, 所以

$$\frac{m}{3}=\frac{5}{1}=\frac{-1}{n}.$$

由此得到 m=15, $n=-\frac{1}{5}$.

6. 已知两点 A(2,3,5) 和 B(3,0,4), 求向量 \overrightarrow{AB} 的模和方向余弦.

解 因为 $\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$,所以 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{11}}$, $\cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{11}}$, $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{11}}$.

7. 已知向役 \overrightarrow{OA} 与 x 轴、y 轴正向夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$, 且 $|\overrightarrow{OA}|=6$, 求点 A 的坐标.

解 设点 A 的坐标为 (x,y,z), 则由 $\frac{x}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 得 x = 3, 由 $\frac{y}{6} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $y = 3\sqrt{2}$. 而

$$z = \pm \sqrt{6^2 - x^2 - y^2} = \pm \sqrt{36 - 9 - 18} = \pm 3.$$

于是 A 点的坐标为 $(3,3\sqrt{2},\pm 3)$.

8. 已知向量 a=8i+5j+8k, b=2i-4j+7k, c=i+j+2k, 求向量 d=a-2b+3c 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影.

解 因为

$$d = (8i + 5j + 8k) - 2(2i - 4j + 7k) + 3(i + j + 2k) = 7i + 16j,$$

所以 d 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别是 7,16,0.

习 题 7-3

- 1. 下列结论是否成立, 为什么?
- 屬 不成立. 因为当 a 和 b 都不为 0, 而 $a \perp b$ 时, 也有 $a \cdot b = 0$.
- (2) $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$.

解 不成立. 因为 $(a \cdot b)c$ 是与 c 平行的向量, 而 $a(b \cdot c)$ 是与 a 平行的向量.

(3) 如果 $a \neq 0$, 且 $a \cdot c = a \cdot b$, 那么 c = b.

解 不成立. 例如,若 $b \neq 0$,且 $b \perp a$,则有 $a \cdot b = 0$. 但此时若取 c = 2b,则因 $c \perp a$,从而有 $a \cdot c = 0$. 这时 $c \neq b$.

(4) 如果 $a \neq 0$, 且 $a \times c = a \times b$, 那么 c = b.

解 不成立 例如,取 b=a,c=2a,则因 b # a,c # a,有 $a \times b=a \times c=0$. 但此 时 $b \neq c$.

2.
$$\Im a = 3i - j - 2k$$
, $b = i + 2j - k$, $\&$

(1)
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$
;

(2)
$$|a-b|$$
;

(3)
$$(3a-2b)\times(a+3b)$$
;

$$(4)$$
 $(\widehat{a,b})$.

鯒

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3, \\ |\mathbf{a} - \mathbf{b}| &= |2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}| = \sqrt{14}, \\ (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{b}) &= (3\mathbf{a}) \times \mathbf{a} - (2\mathbf{b}) \times \mathbf{a} + (3\mathbf{a}) \times (3\mathbf{b}) - (2\mathbf{b}) \times (3\mathbf{b}) \\ &= 11(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 11 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 11(5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = 55\mathbf{i} + 11\mathbf{k} + 77\mathbf{k}, \end{aligned}$$

$$(\widehat{a,b}) = \arccos \frac{a \cdot b}{|a| \ |b|} = \arccos \frac{3}{2\sqrt{21}}.$$

3. Exp
$$|a| = 1$$
, $|b| = 2$, $|c| = 3$, $\mathbb{E}[a + b + c = 0]$, $\Re a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.

解 由 a+b+c=0 得

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0,$$

即有.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) = 0.$$

由此得到

$$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot \left(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 \right) = -7.$$

4. 求与
$$a = (1, -3, 1), b = (2, -1, 3)$$
 都垂直的单位向量.

解因

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k,$$

故所求向量为

$$\pm \frac{a \times b}{|a \times b|} = \pm \frac{1}{3\sqrt{10}} (-8i - j + 5k).$$

5. 已知三点 A(1,2,3), B(2,2,1), C(1,1,0), 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 所求面积为

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}\right| = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

6. $\forall a = (12, 9, -5), b = (4, 3, -5), \ \vec{x} \ \lambda \in b - \lambda a \ \text{ enf} \ a.$

解 $b - \lambda a$ 垂直于 a 等价于 $(b - \lambda a) \cdot a = 0$, 即 $\lambda |a|^2 = a \cdot b$. 由此得到

$$\lambda = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{12 \times 4 + 9 \times 3 + (-5) \times (-5)}{12^2 + 9^2 + (-5)^2} = \frac{2}{5}.$$

7.
$$c \neq a = (2, -3, 1), b = (1, -1, 3), c = (1, -2, 0), *$$

(1)
$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$$
;

(2)
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$
;

(3)
$$a \cdot (b \times c)$$
;

$$(4) (a \times c) \cdot b$$
.

解

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = 8(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - 8(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -8\mathbf{j} - 24\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 2,$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -2,$$

8. 在空间直角坐标系中,下列各向量组是否共面?若不共面,求以它们为棱的平行六面体的体积。

(1)
$$a = (-1,3,2), b = (4,-6,2), c = (-3,12,11)$$
;

તર ક

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$

所以三个向量共面.

(2)
$$a = (2, -4, 3), b = (-1, -2, 2), c = (3, 0, -1)$$
.

解 因为

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

所以三个向量不共面,以它们为棱的平行六面体的体积为 2.

(1) 向量 c 在向量 d 上的投影;

(2) 以 c 和 d 为邻边的平行四边形的面积.

解 (1) 因为

$$|d|^{2} = (a - b) \cdot (a - b) = |a|^{2} - 2a \cdot b + |b|^{2}$$

$$= |a|^{2} - 2|a| |b| \cos(\widehat{a,b}) + |b|^{2} = 3,$$

$$c \cdot d = (2a + 3b) \cdot (a - b) = 2|a|^{2} + a \cdot b - 3|b|^{2}$$

$$= 2|a|^{2} + |a| |b| \cos(\widehat{a,b}) - 3|b|^{2} = -9,$$

所以

$$\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}}) = \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|} = -3\sqrt{3}.$$

(2) 以 c 和 d 为邻边的平行四边形的面积等于

$$|c \times d| = |(2a + 3b) \times (a - b)| = 5|a \times b| = 5|a| |b| \sin(\widehat{a, b}) = 5\sqrt{3}.$$

10. 应用向量运算证明: 对任意实数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, 许瓦兹 (Schwarz) 不等式

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

成立、并指出其中等号成立的条件.

证
$$\Leftrightarrow a = a_1 i + a_2 j + a_3 k, b = b_1 i + b_2 j + b_3 k, 则$$

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})|$$

$$\leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

由上式可知, 当且仅当 a // b, 即向量 (a_1, a_2, a_3) 与 (b_1, b_2, b_3) 的对应坐标成比例时等号成立.

11. 证明
$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$$
.

ίŒ

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}))$$

$$= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

12. 己知
$$(a \times b) \cdot c = 2$$
, 求 $[(a+b) \times (b+c)] \cdot (c+a)$.

$$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a) = (a\times b + a\times c + b\times c)\cdot(c+a)$$
$$= (a\times b)\cdot c + (b\times c)\cdot a$$
$$= 2(a\times b)\cdot c = 4.$$

13. 化简下列各式:

(1)
$$(2a+b) \times (c-a) + (b+c) \times (a+b)$$
.

解

$$(2a+b)\times(c-a)+(b+c)\times(a+b)$$

$$=2(a\times c)+b\times c-b\times a+b\times a+c\times a+c\times b$$

$$=a\times c.$$

(2)
$$(a+2b-c) \cdot [(a-b) \times (a-b-c)].$$

解

$$(a+2b-c) \cdot [(a-b) \times (a-b-c)]$$

$$= (a+2b-c) \cdot (-a \times b - a \times c - b \times a + b \times c)$$

$$= (a+2b-c) \cdot (-a \times c + b \times c)$$

$$= -2(a \times c) \cdot b + a \cdot (b \times c)$$

$$= 3a \cdot (b \times c).$$

习 题 7-4

1. 求通过点 (2,3,-1) 且以向量 (1,-2,5) 为法向量的平面方程.

解 方程为

$$(x-2)-2(y-3)+5(z+1)=0$$
,

即

$$x - 2y + 5z + 9 = 0.$$

2. 永满足以下条件的平面方程:

(1) 过点
$$(0,1,-1)$$
, $(1,-1,2)$, $(2,-1,3)$;

解设

$$a = (1, -1, 2) - (0, 1, -1) = (1, -2, 3),$$

 $b = (2, -1, 3) - (0, 1, -1) = (2, -2, 4),$

则

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

因此 n=(1,-1,-1) 是所求平面的法向量,所求平面的方程为

$$x-(y-1)-(z+1)=0$$
,

即

$$x-y-z=0.$$

(2) 过点 (2,6,-1) 且平行于平面 3x-2y+z-2=0;

解 n = (3, -2, 1) 是所求平面的法向量,所求平面的方程为

$$3(x-2)-2(y-6)+(z+1)=0$$
,

即

$$3x - 2y + z + 7 = 0.$$

(3) 过点 (-1,2,1) 且与两平面 x-y+z-1=0 和 2x+y+z+1=0 垂直;

解 $n_1 = (1, -1, 1)$ 和 $n_2 = (2, 1, 1)$ 是已知的两张平面的法向量. 因

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j + 3k,$$

所以 n = (2, -1, -3) 是所求平面的法向量,所求平面为

$$2(x+1)-(y-2)-3(z-1)=0,$$

即

$$2x - y - 3z + 7 = 0.$$

(4) 过点 (2,3,-5) 且平行于 zOx 坐标面;

解 n = (0,1,0) 是所求平面的法向量,所求平面为 y = 3.

(5) 过点 (1,-5,1) 和 (3,2,-2) 且平行于 y 轴;

解 过两个已知点作向量 a = (2,7,-3). 因

$$\mathbf{a} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k},$$

所以 n = (3,0,2) 是所求平面的法向量,所求平面为

$$3(x-1) + 2(z-1) = 0,$$

即

$$3x + 2z - 5 = 0.$$

(6) 过 x 轴, 并且点 (5,4,1) 到该平面的距离为 1.

解 设所求平面方程为 Ax + By + Cz + D = 0, 则因平面过原点, 故有 D = 0. 又因平面过 x 轴, 所以其法向量 n = (A, B, C) 垂直于向量 i, 从而 A = 0. 再由点 (5, 4, 1) 到该平面的距离为 1 得

$$\frac{|4B+C|}{\sqrt{B^2+C^2}} = 1.$$

由此得到

$$15B^2 + 8BC = 0.$$

注意到 B 和 C 不能同时为 0, 方程的解为 B=0, 或 $B=-\frac{8}{15}C$, 其中 C 为任意非零实数. 于是所求平面的方程为

$$z = 0$$
 或 $8y - 15z = 0$.

3. 求两平行平面 2x - y + 2z + 9 = 0 与 4x - 2y + 4z - 21 = 0 之间的距离.

解 在平面 2x - y + 2z + 9 = 0 上取一点 A(-4,1,0), 两平面间的距离即 A 点到平面 4x - 2y + 4z - 21 = 0 的距离

$$d = \frac{|4 \times (-4) - 2 \times 1 + 4 \times 0 - 21|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{13}{2}.$$

4. 求点 (1,2,1) 到平面 x+2y-3z-10=0 的距离.

解

$$d = \frac{|1+4-3-10|}{\sqrt{1+2^2+(-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

5. 求平面 x-y-z+5=0 与平面 2x-2y-z-1=0 之间夹角的余弦.

解 两平面的法向量分别为 $n_1 = (1, -1, -1)$ 和 $n_2 = (2, -2, -1)$, 两平面之间夹角的全球 $n_1 = (1, -1, -1)$ 和 $n_2 = (2, -2, -1)$

$$\cos(\widehat{n_1,n_2}) = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

6. 求两平面 2x-y+z-7=0 与 x+y+2z-11=0 之间的夹角.

解 两平面的法向量分别为 $n_1=(2,-1,1)$ 和 $n_2=(1,1,2)$, 两平面之间夹角的余弦为

$$\cos(\widehat{n_1, n_2}) = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{1}{2}.$$

上一月一下面之间夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

7. 求过 z 轴且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ 成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面方程.

解 设所求平面方程为 Ax+By+Cz+D=0, 则因平面过原点, 故有 D=0. 又因平面过 z 轴, 所以其法向量 n=(A,B,C) 垂直于向量 k, 从而 C=0. 平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$

的法向量为 $n_0=(2,1,-\sqrt{5})$. 因为所求平面与平面 $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ 成 $\frac{\pi}{3}$ 角,所以

$$\frac{n_0 \cdot n}{|n_0| |n|} = \cos \frac{\pi}{3}.$$

由此得到

$$\frac{2A+B}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{10}} = \frac{1}{2},$$

即有

$$3A^2 + 8AB - 3B^2 = 0.$$

由此解得 A = -3B 或 B = 3A. 代入平面方程,并注意到 A = B 不能同时为 O(在这里实际上是都不为 O(,得到平面方程为

$$x+3y=0 \ \vec{\mathbf{x}} \ 3x-y=0.$$

习 题 7-5

- 1. 求满足以下条件的各直线方程:
- (1) 过点 (3,2,-1) 和 (-2,3,5).

解 方程为

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z+1}{5+1},$$

即

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{6}$$
.

- (2) 过点 (0,-3,2) 且平行于平面 x+2z=1 和 y-3z=2.
 - 解 两个已知平面的法向量为 $n_1 = (1,0,2)$ 和 $n_2 = (0,1,-3)$, 而

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2i + 3j + k,$$

所以 s = (-2,3,1) 是所求直线的方向向量,所求直线的方程为

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{1}$$
.

- (3) 过点 (2,-3,1) 且垂直于平面 2x+3y-z-1=0.
- 解 已知平面的法向量为 (2,3,-1) 是所求直线的方向向量,因此所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

2. 求点 A(2,3,-1) 到直线 $\frac{x-1}{2} = y+5 = \frac{z+15}{-2}$ 的距离.

解 已知直线的方向向量为 $s=(2,1,-2), M_0(1,-5,-15)$ 是已知直线上的一点. 因

$$s \times \overrightarrow{M_0 A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 14 \end{vmatrix} = 30i - 30j + 15k = 15(2i - 2j + k),$$

所以根据本节例 5 的公式所求距离为

$$d = \frac{|\mathbf{s} \times \overrightarrow{M_0 A}|}{|\mathbf{s}|} = 15.$$

3. 求直线
$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-6}$$
 与直线
$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 + 3t, & \text{之间央角的余弦.} \\ z = -6 + t \end{cases}$$

解 两条已知直线的方向向量分别为 $s_1 = (2,3,-6)$ 和 $s_2 = (2,3,1)$, 两条直线之间 夹角的余弦为

$$\cos(\widehat{s_1,s_2}) = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| \ |s_2|} = \frac{4+9-6}{7\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

4. 求直线
$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 1 + t, & 5$$
平面 $3x + 6y + 3z - 1 = 0$ 的夹角. $z = 5 - t$

解 直线的方向向量为 s=(2,1,-1), 平面的法向量为 n=(1,2,1). 直线与平面的夹角的正弦为

$$\sin(\widehat{s,n}) = \frac{|s \cdot n|}{|s| |n|} = \frac{1}{2}.$$

由此得到直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

5. 求过直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4}$ 且垂直于平面 x+4y-3z+7=0 的平面方程.

源 。知直线的方向向量为 s=(3,2,4), 平面的法向量为 $n_0=(1,4,-3)$. 所求平面的法向量为

$$n = s \times n_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -22i + 13j + 10k.$$

再注意到所求平面过已知直线上的已知点 (2,-1,2), 得到所求平面的方程为

$$22(x-2)-13(y+1)-10(z-2)=0,$$

gr.

$$22x - 13y - 10z = 37.$$

6. 求点 P(-1,2,0) 在平面 $\Pi: x+y+3z+5=0$ 上的投影点 (即由点 P 向平面 Π 作垂线的垂足) 的坐标.

解 过点 P 作直线 L 垂直于平面 Π , 则 Π 的法向量即为 L 的方向向量. 因此 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

代入平面方程得

$$11t + 6 = 0.$$

由此解得 $t=-\frac{6}{11}$. 这是直线 L 与平面 Π 的交点所对应的 t. 将其代入直线方程得到交点 的坐标为 $\left(-\frac{17}{11},\frac{16}{11},-\frac{18}{11}\right)$. 这即是点 P 在平面 Π 上的投影点的坐标.

7. 求点 P(1,-4,5) 在直线 $L: \left\{ egin{array}{ll} y-z+1=0, \\ x+2z=0 \end{array}
ight.$ 上的投影点 (即由点 P 向直线 L作垂线的垂足) 的坐标.

解 直线 L 的方向向量为

$$s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

过点 P 以 s 为法向量的平面 Ⅱ 的方程为

$$2(x-1)-(y+4)-(z-5)=0$$

即

$$2x-y-z-1=0.$$

于是、 $\triangle P$ 在直线 $\triangle L$ 上的投影即为平面 \square 与直线 $\triangle L$ 的交点. 解方程组

$$\begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0, \\ x + 2z = 0. \end{cases}$$

得交点为 (0,-1,0).

$$(z, -1, 0)$$
. $\left\{ egin{array}{ll} x = z + 2, \ y = 2z - 4 \end{array}
ight.$ 在平面 $x + y - z = 0$ 上的投影直线的方程.

解 由方程知所给直线的方向向量为

$$s_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

且 $P_0(2,-4,0)$ 是其上一点; 所给平面的法向量为 $n_0 = (1,1,-1)$. 记

$$n = n_0 \times s_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

过点 P_0 作以 n 为法向量的平面 Π , 其方程为

$$3(x-2) - 2(y+4) + z = 0,$$

即

$$3x - 2y + z - 14 = 0.$$

于是所求直线是平面 Ⅱ 与所给平面的交线. 因此所求直线的方程为

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 3x - 2y + z - 14 = 0. \end{cases}$$

9. 求过点 M(2,1,3) 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解 记 $P_0(-1,1,0)$, $s_0=(3,2,-1)$, 则点 P_0 在所给的直线上, s_0 是所给直线的方向向量。记

$$egin{aligned} m{n} &= m{s}_0 imes \left(rac{1}{3} \overrightarrow{P_0 M}
ight) = egin{bmatrix} m{i} & m{j} & m{k} \ 3 & 2 & -1 \ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2m{i} - 4m{j} - 2m{k}, \ m{s} &= rac{1}{2}m{n} imes m{s}_0 = egin{bmatrix} m{i} & m{j} & m{k} \ 1 & -2 & -1 \ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 4m{i} - 2m{j} + 8m{k}, \end{aligned}$$

则 s 是所求直线的方向向量, 所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

解 用 L_1 和 L_2 分别表示两条已知直线。记 $M_1(1,1,0)$, $M_2(1,5,-2)$, $s_1=(1,6,2)$, $s_2=(2,15,6)$, 则点 M_1 和 M_2 分别在直线 L_1 和 L_2 上, s_1 和 s_2 分别是 L_1 和 L_2 的方向向量。记

$$n = s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 15 & 6 \end{vmatrix} = 6i - 2j + 3k.$$

过点 M: 以 n 为法向量作平面 II, 则 II 的方程为

$$6(x-1)-2(y-1)+3z=0$$

即

$$6x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

两条直线间的距离即是 M2 到平面 II 的距离

$$d = \frac{|6 - 10 - 6 - 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = 2.$$

11. 一平面通过平面 x+5y+z=0 和 x-z+4=0 的交线, 且与平面 x-4y-8z+12=0 成 45° 角、求此平面的方程.

解 设所求平面方程为

$$\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0,$$

即

$$(\lambda + \mu)x + 5\lambda y + (\lambda - \mu)z + 4\mu = 0,$$

则据已知条件,它的法向量与已知平面法向量之间的夹角是 45°. 由此得到

$$(\lambda + \mu) - 20\lambda - 8(\lambda - \mu) = \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + 25\lambda^2 + (\lambda - \mu)^2} \sqrt{1 + (-4)^2 + (-8)^2} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

化简得

$$\lambda(3\lambda+4\mu)=0.$$

它的不全为零的解为 $\lambda=0,$ 或 $\lambda=-\frac{4}{3}\mu,$ 其中 μ 为任意非零实数. 代入所设方程得到所求平面为

$$x-z+4=0$$
 和 $x+20y+7z-12=0$.

12. 求过直线 $L: \left\{ egin{array}{ll} x+y-2z+10=0, \\ 2x-y+z=0 \end{array}
ight.$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=10$ 相切的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$-\lambda(x+y-2z+10) + \mu(2x-y+z) = 0$$

即

$$(\lambda + 2\mu)x + (\lambda - \mu)y + (-2\lambda + \mu)z + 10\lambda = 0,$$

根据已知条件, 球心到此平面的距离等于球的半径. 因此有

$$\frac{|10\lambda|}{\sqrt{(\lambda+2\mu)^2+(\lambda-\mu)^2+(-2\lambda+\mu)^2}}=\sqrt{10}.$$

化简得

$$2\lambda^2 + \lambda\mu - 3\mu^2 = 0,$$

即

$$(2\lambda + 3\mu)(\lambda - \mu) = 0.$$

由此得到 $\lambda=\mu,\ \lambda=-\frac{3}{2}\mu,$ 其中 μ 是不为零的任意实数. 代入所设方程得到所求平面为 $3x-z+10=0 \ \ \text{和} \ \ x-5y+8z-30=0.$

习 颢 7-6

1. 求下列球面的球心与半径 r:

(1)
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 2z + 10 = 0$$
.

解 (1) 配方得

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 4^2.$$

因此球心为 (3, -4, 1), 半径 r = 2.

(2)
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$
.

解 (2) 配方得

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3^2$$
.

因此球心为 (-1,2,0), 半径 r=3.

2. 指出下列方程所表示的曲面的名称, 并作出曲面图形:

(1)
$$4y^2 + 9z^2 = 36$$
;

(2)
$$x^2 - z^2 = 9$$
;

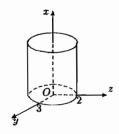
(2) 双曲柱面

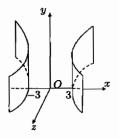
(3)
$$y^2 = 4z$$
;

$$(4) x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

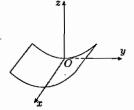
解

(1) 椭圆柱面

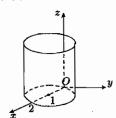




(3) 抛物柱面



(4) 圆柱面



3. 求下列旋转曲面方程:

(1) xOy 坐标平面上的曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 轴旋转.

$$\mathbf{M} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{(y^2 + z^2)}{9} = 1.$$

(2) yOz 坐标平面上的曲线 $-\frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 绕 y 轴旋转.

$$\mathbf{A} \mathbf{F} - \frac{y^2}{4} + x^2 + z^2 = 1.$$

4. 指出下列曲面的名称, 并作图:

(1)
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1;$$

(2)
$$\frac{z}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$
;

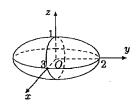
(3)
$$4x^2 - 4y^2 + z^2 = 1$$
;

$$(4) z^2 = 16x^2 + y^2;$$

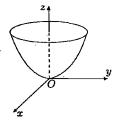
$$(5) y^2 - 4z^2 = 9.$$

解

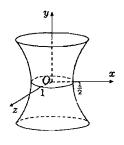
(1) 椭球面



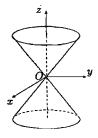
(2) 椭圆抛物面



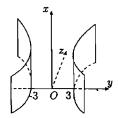
(3) 单叶双曲面



(4) 椭圆锥面



(5) 双曲柱面



习 题 7-7

1. 求空间曲线 C: $\begin{cases} 2x^2 + z^2 + 4y = 4z, \\ x^2 + 3z^2 - 8y = 12z \end{cases}$ 关于三个坐标平面上的投影柱面方程.

解 在方程组中消去 y 得到曲线在坐标面 zox 上的投影柱面方程

$$x^2(z-2)^2 = 4.$$

这是一个圆柱面. 由此方程可知, 在曲线 C 上, $x \in [-2, 2], z \in [0, 4]$. 在方程组中消去 z 得到曲线在坐标面 xoy 上的投影柱面方程

$$y = -\frac{1}{4}x^2, \quad x \in [-2, 2].$$

在方程组中消去 x 得到曲线在坐标面 yoz 上的投影柱面方程

$$y = \frac{1}{4}z^2 - z$$
 $z \in [0, 4]$.

2. 求圖锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ $(y\geq 0)$ 与平面 z=y 的交线在三个坐标面上投影柱面的方程.

解 在方程组

$$\begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = y \end{cases}$$

中消去 z 得到曲线在坐标面 xoy 上的投影柱面方程

$$y=\frac{1}{2}(1-x^2), \quad x\in[-1,1],$$

在曲线上 $y \leq \frac{1}{2}$. 在方程组中消去 y 得到曲线在坐标面 zox 上的投影柱面方程

$$z = \frac{1}{2}(1 - x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

在方程组中消去 x 得到曲线在坐标面 yoz 上的投影柱面方程

$$z=y, \quad y \in \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

z = x + 1 在三个坐标面上投影曲线的方程.

解 在方程组中消去 z 得到曲线在坐标面 xoy 上的投影柱面方程

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{5}{4},$$

从而投影曲线方程为

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}, \\ z = 0, \end{cases}$$

且由此可知,在曲线上 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 在方程组中消去 x 得到曲线在坐标面 yoz 上的投影柱面方程

$$\left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}.$$

从而投影曲线方程为

$$\begin{cases} \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{5}{4}, \\ x = 0. \end{cases}$$

在方程组中消去 y 得到曲线在坐标面 zox 上的曲线方程为

$$\left\{\begin{array}{ll} z=x+1,\\ y=0, \end{array}\right. x\in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

4. 证明曲面 $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ 与 $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ 的交线位于某一平面上.

解 交线方程为

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1, \\ 2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0. \end{cases}$$

第一个方程两边同乘 2 后与第二个方程两边相加得到等价方程组

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1, \\ 6x - 5y = 2. \end{cases}$$

因此, 交线在平面 6x - 5y = 2 上.

- 5. 求平面 x+y+z=1 与三个坐标面所围四面体在坐标面 xOy 上的投影.
- 解 借助于图形容易看出所求的投影是三角形 $\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1 x, 0 \le x \le 1\}$.
- 6. 求曲面 $z=2(x^2+y^2)$ 与平面 z=4 所围立体在坐标面 xOy 上的投影.
- 解 借助于图形容易看出所求的投影是曲面 $z=2(x^2+y^2)$ 与平面 z=4 的交线在坐标面 xOy 上的投影

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ z = 0 \end{cases}$$

所围的平面图形

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 2\}.$$

7. 求曲面 $y=\sqrt{x}$ 与平面 $x+z=\frac{\pi}{2},\ y=0,\ z=0$ 所围立体在坐标面 xOy 上的投影.

・解 平面 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 与 z=0 的交线在坐标面 xOy 上的投影为曲线

$$\begin{cases} x+z=\frac{\pi}{2}, \\ z=0, \end{cases}$$

即直线段

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2}, \\ z = 0, \end{cases} \quad y \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right].$$

曲面 $y = \sqrt{x}$ 与平面 $x + z = \frac{\pi}{2}$ 的交线在坐标面 xOy 上的投影为曲线段

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ z = 0, \end{cases} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

平面 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 与 y=0 的交线在坐标面 xOy 上的投影为直线段

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

因此所围立体在坐标面 xOy 上的投影是 xOy 坐标平面上由上述一个曲线段和两个直线段所围的平面图形

$$\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}.$$

8. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x\geq 0)$ 央在平面 z=0 和 z=1 之间部分在坐标面 xOy 和 yOz 上的投影 (曲面在坐标面上的投影指的是曲面上各点在该坐标面上的投影的全体组成的集合).

解 借助于图形容易看出在坐标面 xOy 上的投影是 $\{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}$, 在 yOz 上的投影是 $\{(x,y) | -z \le y \le z, 0 \le z \le 1\}$.

列曲线在指定点处的切线方程和法平面方程:

(1)
$$x = \frac{t}{1+t}, y = \frac{1+t}{t}, z = t^2$$
, 在对应于 $t = 1$ 的点.

解 t=1 所对应的点为 $M_0(\frac{1}{2},2,1)$. 因为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} &= \frac{1}{(1+t)^2}\Big|_{t=1} = \frac{1}{4}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} &= -\frac{1}{t^2}\Big|_{t=1} = -1, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} &= 2t\Big|_{t=1} = 2, \end{aligned}$$

所以 s=(1,-4,8) 是曲线在 M_0 点的切向量,切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8},$$

法平面方程为

$$(x-\frac{1}{2})-4(y-2)+8(z-1)=0.$$

法平面方程可化简为

$$2x - 8y + 16z - 1 = 0.$$

(2) $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$, 在对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点.

解 $t=\frac{\pi}{4}$ 所对应的点为 $M_0\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 因为

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} &= 2a\sin t\cos t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = a,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} &= b(\cos^2 t - \sin^2 t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = 0,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} &= -2c\cos t\sin t\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -c, \end{split}$$

所以 s = (a, 0, -c) 是曲线在 M_0 点的切向量, 切线方程为

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c},$$

法平面方程为

$$a(x-\frac{a}{2})-c(z-\frac{c}{2})=0.$$

法平面方程可化简为

$$2ax - 2cz - a^2 + c^2 = 0.$$

(3)
$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = 2x + 1, \end{cases} \not\triangleq (0, 1, 1) \not\triangleq.$$

解 容易求得曲面 $z=x^2+y^2$ 和 y=2x+1 在点 (0,1,1) 处的法向量分别为 $n_1=(0,2,-1)$ 和 $n_2=(2,-1,0)$. 因

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

故 s = (1,2,4) 是曲线在点 (0,1,1) 处的切向量, 切线方程为

$$x=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{4},$$

法平面方程是

$$x + 2y + 4z - 6 = 0.$$

10. 求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 上的点,使该点的切线平行于平面 x + 2y + z = 4.

解 设所求点所对应的参数为 t, 则曲线在该点的切向量为 $s = (1, 2t, 3t^2)$. 所给平面的法向量为 n = (1, 2, 1). 为了使切线平行于所给平面,应有

$$s \cdot n = 0$$
.

即

$$3t^2 + 4t + 1 = 0.$$

由此解得 t=-1 和 $t=-\frac{1}{3}$. 于是得到所求的点有两个, $P_1(-1,1,-1)$ 和 $P_2\Big(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\Big)$.

11. 求曲线

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t, \\ z = e^{-t} \end{cases}$$

上 $t \in [0, +\infty)$ 一段的弧长.

解 所求弧长为

$$\begin{split} s &= \int_0^{+\infty} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{\mathrm{e}^{-2t}(-\cos t - \sin t)^2 + \mathrm{e}^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + \mathrm{e}^{-2t}} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{3}\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \sqrt{3}. \end{split}$$

12. 求曲线

$$\begin{cases} y = x^2, \\ z = 1 - x \end{cases} (-1 \le x \le 1)$$

的弧长.

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = 1 - t. \end{cases} -1 \le t \le 1.$$

曲线的弧长为

$$\begin{split} s &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^{2}} \ \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4t^{2} + 1} \ \mathrm{d}t \\ &= 4 \int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1}{2} + t^{2}} \ \mathrm{d}t \\ &= 4 \left[\frac{t}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + t^{2}} + \frac{1}{4} \ln\left(t + \sqrt{\frac{1}{2} + t^{2}}\right) \right] \Big|_{0}^{1} \\ &= \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}). \end{split}$$

13. 证明曲线
$$\left\{ egin{array}{ll} x^2+y^2=2y, \\ z=x^2+y^2 \end{array}
ight.$$
 的弧长为 $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4\cos^2 \theta} \, \mathrm{d} \theta.$

证 曲线的参数方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos \theta, \\ y = 1 + \sin \theta, \\ z = 2 + 2 \sin \theta, \end{array} \right. \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

曲线的弧长为

$$\begin{split} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 4\cos^2\theta} \ \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\cos^2\theta} \ \mathrm{d}\theta. \end{split}$$

复习题七

1. 填空題:

(2) 若向量 b 与向量 a = 2i - j + 2k 共线, 且满足 $a \cdot b = -18$, 则 b =_____

解 因为向量 b 与向量 a 共线, 所以存在 λ 使得 $b = \lambda a$. 于是

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{a}|^2=9\lambda.$$

由此及 $a \cdot b = -18$ 得 $\lambda = -2$, 从而

$$b = -2a = -4i + 2i - 4k$$

(3) 己知
$$(a \times b) \cdot c = 2$$
, 则 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) = ____.$

解

$$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a) = (a\times b + a\times c + b\times c)\cdot(c+a)$$
$$= (a\times b)\cdot c + (b\times c)\cdot a$$
$$= 2(a\times b)\cdot c = 4.$$

(4) 要使原点到平面 2x - y + kz = 6 的距离等于 2 , 则 $k = _____$

解 据已知有

$$\frac{6}{\sqrt{4+1+k^2}} = 2.$$

由此得到 $k=\pm 2$.

(5) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 x + z = a 的交线在 xOy 平面上的投影曲线方程是

解 由所给的两个方程中消去 z 得 $2x^2-2ax+y^2=R^2-a^2$. 因此所求的投影曲线方程是

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 2ax + y^2 = R^2 - a^2, \\ z = 0. \end{array} \right.$$

(6) 设 a, b, c 均为非零向量,且 $a=b\times c$, $b=c\times a$, $c=a\times b$, 则 |a|+|b|+|c| 的值是 _______.

解 由已知得

$$|a|^2 = a \cdot (b \times c), |b|^2 = b \cdot (c \times a), |c|^2 = c \cdot (a \times b),$$

从而有

$$|a|^2 = |b|^2 = |c|^2$$
,

进一步有

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}|.$$

由已知条件又知向量 a,b,c 彼此垂直,故有

$$|a| = |b \times c| = |b| |c| = |a|^2.$$

由此得到 |a|=1. 于是

$$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=3.$$

2. 选择题:

(1) 已知
$$|a| = 2$$
, $|b| = \sqrt{2}$, $a \cdot b = 2$, $\Re |a \times b| = ($

(A)
$$2\sqrt{2}$$
.

(B)
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$
.

解 由

$$\cos(\widehat{a,b}) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

得到 $(\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{4}$. 因此

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 2.$$

选 C.

(2) 已知向量 a=i+j+k,则垂直于 a ,且垂直于 y 轴的单位向量是 (

(A)
$$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(i+j+k)$$
.

(B)
$$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}(i-j+k)$$
.

(C)
$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(i-k)$$
.

(D)
$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(i+k)$$
.

解 与 a 和 y 轴都垂直的向量是

$$\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{j})=\pm\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\pm(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}).$$

因此, 与 a 和 y 轴都垂直的单位向量是 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(i-k)$. 选 C.

- (3) 空间直线的方程为 $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$, 则该直线过原点且 (
- (A) 垂直于 y 轴, 但不平行于 x 轴. (B) 垂直于 x 轴.
- (C) 垂直于 z 轴, 但不平行于 x 轴. (D) 平行于 x 轴.

解 所给直线的方程即为

$$\begin{cases} z = 2y, \\ x = 0. \end{cases}$$

因此直线在坐标面 yOz 上, 从而垂直于 x 轴. 选 B.

(A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面. (C) 锥面.

(D) 旋转抛物面.

解 所给方程即为

$$x=2+\frac{1}{4}(y^2+z^2).$$

由此可知, 它是 xOy 坐标平面上的抛物线 $x=2+\frac{1}{4}y^2$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转抛物面. 选 D.

`(5) 曲面
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
 与 $x^2 + y^2 = 2az$ ($a > 0$) 的交线是 ().

(A) 抛物线.

(B) 双曲线.

(C) 岛.

(D) 椭圆.

解 将两个方程的等号两边相减得

$$z^2 + 2az - a^2 = 0.$$

由方程 $x^2 + y^2 = 2az$ 及 a > 0 知 $z \ge 0$. 因此由上面方程得到 $z = (\sqrt{2} - 1)a$. 于是所给的交线又可表示为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ z = (\sqrt{2} - 1)a. \end{cases}$$

由此可见、交线是球面与一个平面的交线, 从而是一个圆. 选 C.

3. 平行四边形 ABCD 的两边为 $\overrightarrow{AB}=a-2b, \ \overrightarrow{AD}=a-3b$,其中 $|a|=5, \ |b|=3$, $(\widehat{a,b})=\frac{\pi}{6}$,求此平行四边形的面积.

解 所求面积为

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |(\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})| = |-3(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - 2(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})|$$
$$= |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 5 \cdot 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{15}{2}.$$

4. 验证 3 个平面 x+y-2z-1=0, x+2y-z+1=0, 4x+5y-7z-2=0 通过同一条直线、并写出该直线的对称式方程。

解 因为

$$3(x+y-2z-1)+(x+2y-z+1)=4x+5y-7z-2$$

阿以平面 4x+5y-7z-2=0 在过平面 x+y-2z-1=0 和 x+2y-z+1=0 的平 四東日,因此三个平面通过同一条直线。平面 x+y-2z-1=0 和 x+2y-z+1=0 的 的法向量分别为 $n_1=(1,1,-2)$ 和 $n_2=(1,2,-1)$ 。因此向量

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3i - j + k$$

是该直线的方向向量. 满足方程 x+y-2z-1=0 和 x+2y-z+1=0 的点 $M_0(0,-1,-1)$ 是直线上的一个点. 于是直线的方程为

$$\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}.$$

5. 求直线 $\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-7}$ 在平面 2x - y - 3z + 6 = 0 上的投影直线的方程.

解 所给直线的方向向量为 s=(9,-4,-7), 所给平面的法向量为 $n_1=(2,-1,-3)$. 于是向量

$$n_2 = s \times n_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & -4 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 5i + 13j - k$$

垂直于所给直线和其在所给平面上的投影. 以 n_2 为法向量,过所给直线上的点 (1,-1,0) 作平面,方程为

$$5(x-1) + 13(y+1) - z = 0,$$

即

$$5x + 13y - z + 8 = 0.$$

于是所求的投影直线方程为

$$\begin{cases} 2x - y - 3z + 6 = 0, \\ 5x + 13y - z + 8 = 0. \end{cases}$$

6. 已知三角形的顶点 A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1) , 试计算从顶点 B 到边 AC 的高 h.

解 以 \overrightarrow{AB} 和 \overrightarrow{AC} 为邻边的平行四边形面积为

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{4} & -5 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & -3 \end{vmatrix} = |15\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}| = 25.$$

又由 $S = |\overrightarrow{AC}|h$ 得

$$h = \frac{S}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{25}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5.$$

7. 设一平面垂直于平面 z=0 ,并通过从点 (1,-1,1) 到直线 $\left\{ egin{array}{l} y-z+1=0, \\ x=0 \end{array}
ight.$ 垂线,求此平面的方程.

解 所给直线的方向向量为

$$s_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

过点 $M_0(1,-1,1)$, 以 s_0 为法向量作平面, 方程为

$$(y+1)+(z-1)=0$$

即

$$y+z=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} y+z=0, \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

得到 $y=-\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$. 于是得到从点 M_0 向直线 $\left\{ \begin{array}{l} y-z+1=0, \\ x=0 \end{array} \right.$ 作垂线的垂足 $M(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 因为所求平面垂直于平面 z=0, 而点 M_0 和 M 都在其上,所以它的法向量 n 平行于向量

$$\mathbf{k} \times \overrightarrow{MM_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

取 n = (1, 2, 0), 则所求平面方程为

$$(x-1) + 2(y+1) = 0.$$

即

$$x + 2y + 1 = 0.$$

8. 求过点 A(-1,0,4) 且平行于平面 3x-4y+z-10=0 ,又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

解 所给平面的法向量为 $n_0=(3,-4,1)$, 所给直线过点 $M_0(-1,3,0)$ 且其方向向量为 $s_0=(1,1,2)$. 用 s 表示所求直线的方向向量,则向量 s, s_0 , $\overrightarrow{M_0A}$ 共面. 因此 s 垂直于向量

$$n_1 = s_0 \times \overrightarrow{M_0M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

⇒ 战人方式直线平行于所给平面,所以 s 又垂直于向量 no. 于是可取

$$s = n_0 \times n_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 1 \\ 10 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 16i + 19j + 28k.$$

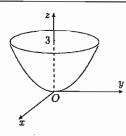
因此所求直线的方程为

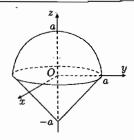
$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}.$$

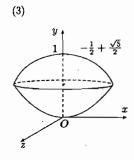
9. 画出下列各曲面所围立体的图形:

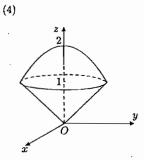
(1)
$$z = 2x^2 + y^2$$
, $z = 3$; (2) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2} - a$, $\not = 4 \Rightarrow 0$; (3) $y = x^2 + z^2$, $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$; (4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.

(1)









- 10. 求准线为曲线 $C: \left\{ \begin{array}{ll} x^2+y^2+4z^2=1, \\ x^2=y^2+z^2, \end{array} \right.$ 而母线平行于 z 轴的柱面方程.
- 解 在方程组中消去 z 得曲线 C 在坐标面 xOy 上的投影柱面

$$5x^2 - 3y^2 = 1.$$

这就是所求的柱面.

第八章 多元函数微分学及其应用

习 题 8-1

1.
$$\Re f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$
, $\&\& f(-y,x), f(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}), f(x, f(x,y))$.

解

$$\begin{split} f(-y,x) &= \frac{y^2 - x^2}{-2xy} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}, \\ f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) &= \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \\ f(x, f(x, y)) &= \frac{x^2 - \left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right)^2}{2x \cdot \frac{x^2 - y^2}{2xy}} = \frac{4x^4y^2 - (x^2 - y^2)^2}{4x^2y(x^2 - y^2)}. \end{split}$$

2.
$$\Re f\left(\frac{x}{y}, \sqrt{xy}\right) = \frac{x^3 - 2xy^2\sqrt{xy} + 3xy^4}{y^3}, \ \ \mathop{\mathrm{id}}\nolimits \mathop{\not{R}}\nolimits f(x,y), f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right).$$

解 因为

$$f\left(\frac{x}{y},\sqrt{xy}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\frac{x}{y}\sqrt{xy} + 3xy,$$

所以

$$f(x,y) = x^3 - 2xy + 3y^2,$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{xy} + \frac{12}{y^2}.$$

3. 设
$$f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$$
, 求 $f(x, y)$.
$$f(x+y) = \frac{y}{x}, \quad \text{则 } x = \frac{u}{1+v}, \quad y = \frac{uv}{1+v}. \quad \text{因此}$$

$$f(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v},$$

从而

$$f(x,y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

4. 设
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$$
, 求 $f(tx, ty)$.

解

$$f(tx,ty)=t^2\Big(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\Big).$$

解

$$f(x+y,x-y,xy) = (x+y)^{xy} + (xy)^{x+y+x-y} = (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}.$$

6. 设
$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$$
, 如果当 $y = 1$ 时, $z = x$, 试确定函数 $f(x)$ 和 $z(x, y)$.

解 因为当 y=1 时 z=x, 所以 $f(\sqrt{x}-1)=x-1$. 令 $\sqrt{x}-1=t$, 则 $x=(t+1)^2$.

因此

$$f(t) = (t+1)^2 - 1 = t^2 + 2t,$$

从而

$$f(x) = x^2 + 2x = x(x + 2),$$

 $z = \sqrt{y} + x - 1.$

7. 求下列函数的定义域,并画出定义域的图形:

(1)
$$z = \sqrt{x - 2\sqrt{y}};$$
 (2) $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)};$ (3) $z = -\frac{1}{\sqrt{x + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x - y^2}};$ (4) $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - y^2}};$

(3)
$$z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$
 (4) $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}};$ (5) $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}};$ (6) $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \ln(1 - \sqrt{y}).$

解 (1)
$$\{(x,y) \mid y \ge 0, x \ge 2\sqrt{y}\};$$
 (2) $\{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, y^2 \le 4x\};$

(3)
$$\{(x,y) \mid x+y>0, x-y>0\}; (4) \{(x,y) \mid x \leq x^2+y^2 < 2x\};$$

(5)
$$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2 \geq 0, x^2+y^2 \neq 0\};$$

(6)
$$\{(x,y) \mid -y^2 \le x \le y^2, 0 < y < 1\}.$$

8. 求下列函数的极限:

(1)
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln\!2.$$

(2)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$
.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

(3)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \lim_{x^2+y^2\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2}.$$

(4)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}}$$
.

盤

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}}=\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{1}{(1-(x^2+y^2))^{\frac{1}{x^2+y^2}}}=\mathrm{e}.$$

9. 求函数 $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ 的间断点.

解 圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有的点.

10. 求函数 $z = \tan(x^2 + y^2)$ 的间断点.

FF
$$x^2 + y^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$
, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

11. 证明极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

因其与 k 有关, 所以极限不存在.

12. 证明函数
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
 在原点 $O(0,0)$ 处不连续.

证 当 P(x,y) 沿直线 y = kx 趋近于 O(0,0) 时,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}.$$

显然它因 k 不同而异,故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ 不存在,从而 f(x,y) 在点 O(0,0) 处不连续。

习 题 8-2

1. 求下列函数的一阶偏导数:

(1)
$$z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$
.

67

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

(2)
$$z = (1 + xy)^y$$
.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 (1 + xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln(1 + xy)} = e^{y \ln(1 + xy)} \left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right]$$

$$= (1 + xy)^y \left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy} \right].$$

$$(3) z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{split}$$

(4)
$$z = \ln(\sin\frac{x+a}{\sqrt{y}})$$
.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}}\cot\frac{x+a}{\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\cot\frac{x+a}{\sqrt{y}}.$$

(5)
$$u = x^{yz}(x > 0, x \neq 1)$$
.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yzx^{yz-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx^{yz}\ln x, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = yx^{yz}\ln x.$$

(6)
$$z = \arctan \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$
.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x - y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} + \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

2. if
$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{y}{2x}}$$
, if $f'_x(2,1)$).

解

$$f_x'(2,1) = \frac{y - \frac{y}{2x^2}}{2\sqrt{xy + \frac{y}{2x}}}\bigg|_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{7}{24}.$$

解

$$f'_{x}(1,2,0) = \frac{y}{xy+z}\Big|_{(1,2,0)} = 1,$$

$$f'_{y}(1,2,0) = \frac{x}{xy+z}\Big|_{(1,2,0)} = \frac{1}{2},$$

$$f'_{z}(1,2,0) = \frac{1}{xy+z}\Big|_{(1,2,0)} = \frac{1}{2}.$$

4. if
$$z = \ln(x^2 + xy + y^2)$$
, if $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+2y}{x^2+xy+y^2},$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x^2 + xy + xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2.$$

5. if
$$u=(x-y)(y-z)(z-x)$$
, if $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}$

解 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (y-z)(z-x) - (x-y)(y-z), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (x-y)(z-x) - (y-z)(z-x), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= (x-y)(y-z) - (x-y)(z-x), \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

6.
$$\forall z = xy + xe^{\frac{y}{z}}, \ \text{Wit} \ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

证 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + e^{\frac{y}{x}} + xe^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + xe^{\frac{x}{y}} \frac{1}{x} = x + e^{\frac{y}{x}},$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}\right) + y\left(x + e^{\frac{y}{x}}\right)$$
$$= xy + \left(xy + xe^{\frac{y}{x}}\right) = xy + z.$$

解 设所求角为 α ,则

$$\tan \alpha = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,4)} = \frac{1}{2}x\Big|_{(2,4)} = 1.$$

由此得到 $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

8. 设函数
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
 来 $f_y'(0,0)$.

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1.$$

9. If
$$z = \ln(x^2 + y)$$
, if $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ if $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 + y} \right) = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + y} \right) = \frac{-1}{(x^2 + y)^2}. \end{split}$$

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}} \right) = \frac{\sqrt{2xy + y^2} - y \frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}}}{2xy + y^2} = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{3/2}}.$$

11. If $u = z \arctan \frac{x}{y}$, We if $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

证因为

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{zy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-zx}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{zy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-2xyz}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-zx}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xyz}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \end{split}$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

12. 验证函数 $u = \ln \frac{1}{r} \ (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^2}$.

证由

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^2}$$

得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \Big(-\frac{x}{r^2} \Big) = -\frac{1}{r^2} + \frac{2x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2x}{r^3} \frac{x}{r} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2x^2}{r^4}.$$

再利用对称性得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2y^2}{r^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2z^2}{r^4}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^2} + \frac{2}{r^4}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{1}{r^2}.$$

13. 求下列函数的全微分:

(1)
$$z = yx^y$$
.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y^2 x^{y-1} dx + x^y (1 + y \ln x) dy.$$

(2)
$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
.

解
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} (y dx - x dy).$$

(3)
$$z = \ln(1 + \frac{x}{y})$$
.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{x+y} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right).$$

(4)
$$z = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y}$$
.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + (\frac{y}{x})^2} + \frac{\frac{1}{y}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} + \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = 0,$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0.$$

(E)
$$u = e^{x+yz}$$
.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = e^{x+yz} (dx + z dy + y dz).$$

(6)
$$u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z$$
.

解 因为

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x} &= z \left(xy + \frac{x}{y} \right)^{z-1} \left(y + \frac{1}{y} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= z \left(xy + \frac{x}{y} \right)^{z-1} \left(x - \frac{x}{y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \left(xy + \frac{x}{y} \right)^z \ln \left(xy + \frac{x}{y} \right), \end{split}$$

所以

$$du = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1} \left[\left(y + \frac{1}{y}\right)z \, dx + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right)xz \, dy + \left(xy + \frac{x}{y}\right) \ln\left(xy + \frac{x}{y}\right) dz \right].$$

14.
$$\Re f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \text{ if } df(3,4,5).$$

解 因为

$$f'_x(3,4,5) = \frac{-xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\Big|_{(3,4,5)} = -\frac{3}{25},$$

$$f'_y(3,4,5) = \frac{-yz}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\Big|_{(3,4,5)} = -\frac{4}{25},$$

$$f'_z(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Big|_{(3,4,5)} = \frac{1}{5},$$

所以

$$df(3,4,5) = -\frac{1}{25}(3dx + 4dy - 5dz).$$

15.
$$\& f(x,y,z) = \sqrt[x]{\frac{x}{y}}, \& df(1,1,1).$$

解 因为

$$f'_{x}(1,1,1) = \frac{1}{z} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x}-1} \frac{1}{y} \Big|_{(1,1,1)} = 1,$$

$$f'_{y}(1,1,1) = \frac{1}{z} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x}-1} \frac{-x}{y^{2}} \Big|_{(1,1,1)} = -1,$$

$$f'_{z}(1,1,1) = -\frac{1}{z^{2}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x}} \ln \frac{x}{y} \Big|_{(1,1,1)} = 0,$$

所以

$$df(1,1,1) = dx - dy.$$

16. 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 在点 (2,1) 处当 $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = -0.2$ 时的全增量和全微分.

鰡

$$\begin{split} \Delta z &= z|_{(2.1,0.8)} - z|_{(2,1)} = \frac{0.8}{2.1} - \frac{1}{2} \approx -0.119, \\ \mathrm{d}z &= z_x'\Big|_{(2,1)} \Delta x + z_y'\Big|_{(2,1)} \Delta y = -\frac{y}{x^2}\Big|_{(2,1)} \Delta x + \frac{1}{x}\Big|_{(2,1)} \Delta y = -0.125. \end{split}$$

17. 试研究函数 $z = |x| + \sin xy$ 在点 (0,0) 处是否可微.

解 因为函数 |x| 在点 (0,0) 处对 x 的偏导数不存在,所以函数 $z=|x|+\sin xy$ 在点 (0,0) 处对 x 的偏导数不存在,从而不可微.

18. 证明函数 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 (0,0) 处存在两个偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$, 但在点 (0,0) 并非可微.

证 由于

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

所以函数 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 (0,0) 处两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在,且都等于 0. 于是若函数 f(x,y) 在点 (0,0) 处可微,则应有

$$f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

然而当 (x,y) 沿着直线 y=x 趋于 (0,0) 时,有

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

这表明 f(x,y) - f(0,0) 不是比 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 高阶的无穷小量. 因此函数 f(x,y) 在点 (0,0) 处不可微.

习 题 8-3

1. 求下列复合函数的一阶偏导数或全导数:

(1)
$$z = \frac{u^2}{v}, u = x - 2y, v = 2x + y.$$

解

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{v} - 2\frac{u^2}{v^2} = \frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -4\frac{u}{v} - \frac{u^2}{v^2} = \frac{(2y-x)(9x+2y)}{(2x+y)^2}. \end{split}$$

(2)
$$z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y.$$

解

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + 3\frac{u^2}{v} \\ &= \frac{2x}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{(3x - 2y)y^2}. \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) - 2\frac{u^2}{v} \\ &= -\frac{2x^2}{y^3} \ln(3x - 2y) - \frac{2x^2}{(3x - 2y)y^2}. \end{split}$$

(3)
$$z = x \arctan(xy), x = t^2, y = se^t$$
.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{x^2}{1 + x^2 y^2} e^t = \frac{t^4 e^t}{1 + t^4 s^2 e^{2t}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \left(\arctan(xy) + \frac{xy}{1 + x^2 y^2}\right) 2t + \frac{x^2}{1 + x^2 y^2} se^t$$

$$= 2t \left(\arctan(t^2 se^t) + \frac{t^2 se^t}{1 + t^4 s^2 e^{2t}}\right) + \frac{t^4 se^t}{1 + t^4 s^2 e^{2t}}.$$

(4)
$$z = \frac{x^2 + y^2}{xy} e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}}$$
.

解 令
$$u = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$
, 則
$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + u)e^u \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) = \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{xy}\right) \frac{x^2 - y^2}{x^2y} e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (1 + u)e^u \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) = \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{xy}\right) \frac{y^2 - x^2}{xy^2} e^{\frac{x^2 + y^2}{xy}}.$$

(5)
$$z = \arctan(x - y), x = 3t, y = 4t^3$$
.

解
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{3 - 12t^2}{1 + (x - y)^2} = \frac{3(1 - 4t^2)}{1 + (3t - 4t^3)^2}.$$

(6)
$$z = e^{x-2y}, y = \sin x$$
.

F

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x-2y} - 2e^{x-2y} \cos x = e^{x-2\sin x} (1 - 2\cos x).$$

2. 设 f 是可做函数,求下列复合函数的偏导数:

(1)
$$z = f(x^2 - y^2, e^{xy}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + ye^{xy}f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1' + xe^{xy}f_2'.$$

(2)
$$z = xy + \frac{y}{x}f(xy).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{y}{x^2} f(xy) + \frac{y^2}{x} f'(xy), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{1}{x} f(xy) + y f'(xy).$$

(3)
$$z = f(x^2 + y^2, \sin(xy), y)$$
.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + y\cos(xy)f_2', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf_1' + x\cos(xy)f_2' + f_3'.$$

(4)
$$u = f(x^2, xy, xyz)$$
.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf_1' + yf_2' + yzf_3', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xf_2' + xzf_3', \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xyf_3'.$$

3. 设函数 $z=x^3f\left(\frac{y}{x^2}\right)$, 其中 f 为可导函数, 验证 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=3z$.

证 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 f\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2y f'\left(\frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x f'\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

所以

$$x\frac{z}{x} + 2y\frac{z}{y} = 3x^3f\left(\frac{y}{x^2}\right) = 3z.$$

4. 设 z=f(u,v,w), 且 f 具有连续偏导数, $u=\varphi(x,y)$ 偏导存在, $v=\psi(x),w=\chi(y)$ 可导,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_v' \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_u' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_w' \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

5. 设函数 f 和 g 具有二阶连续导数或偏导数, 求下列复合函数的指定的偏导数:

(1)
$$z = f(x + y, xy), \, \not x \, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

解

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_1' + y f_2', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f_{11}'' + y f_{12}'' + y (f_{21}'' + f_{22}'') = f_{11}'' + 2y f_{12}'' + y^2 f_{22}''. \end{split}$$

(2)
$$z = xf\left(xy, \frac{x}{y}\right), \, \stackrel{?}{\not \sim} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

鼦

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= f + x(yf_1' + \frac{1}{y}f_2') = f + xyf_1' + \frac{x}{y}f_2', \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= xf_1' - \frac{x}{y^2}f_2' + xf_1' + xy(xf_{11}' - \frac{x}{y^2}f_{12}'') - \frac{x}{y^2}f_2' + \frac{x}{y}(xf_{21}'' - \frac{x}{y^2}f_{22}'') \\ &= 2xf_1' - \frac{2x}{y^2}f_2' + x^2yf_{11}'' - \frac{x^2}{y^3}f_{22}''. \end{split}$$

(3)
$$z = f\left(xy + \frac{y}{x}\right), \, \not \stackrel{\partial}{=} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

42

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y - \frac{y}{x^2})f',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(y - \frac{y}{x^2}\right)^2 f'' + \frac{2y}{x^3}f'.$$

(4)
$$z = f(2x - y) + g(x, xy), \, \stackrel{\wedge}{x} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2f' + g_1' + yg_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2f'' + xg_{12}'' + xyg_{22}'' + g_2'.$$

6. 设函数 φ 和 ψ 具有二阶导数, c 为常数, 证明函数 $z=\varphi(x-ct)+\psi(x+ct)$ 满足弦振动方程

$$c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

证 因为

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi' + \psi', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi'', \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -c\varphi' + c\psi', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\varphi'' + c^2\psi'', \end{split}$$

所以

$$c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

7. 设 z=f(x,y) 具有连续偏导数,而 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\frac{y}{x}$, 试以 u,v 为新的自变量变换方程 $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2 + y^2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

所以

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x+y) - y(x-y)}{x^2 + y^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{-y(x+y) - x(x-y)}{x^2 + y^2} \frac{\partial z}{\partial v}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

因此方程化为

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

8. 水下列方程所确定的隐函数的指定的导数或偏导数:

于是

$$y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}.$$

(2) $y = x + \ln y$, $x y' \approx y''$.

解 方程两边对 x 求导得

$$y'=1+\frac{1}{y}y'.$$

由此解得

$$y' = \frac{y}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1}.$$

上式两边再对 x 求导得

$$y'' = \frac{-y'}{(1-y)^2} = \frac{y}{(1-y)^3}.$$

(3)
$$x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$$
, $\stackrel{?}{x} \frac{\partial z}{\partial x} \stackrel{?}{\approx} \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 记 $F(x,y,z) = x + 2y + z - 2\sqrt{xyz}$, 则

$$F'_x = 1 - \frac{yz}{\sqrt{xyz}}, \quad F'_y = 2 - \frac{xz}{\sqrt{xyz}}, \quad F'_z = 1 - \frac{xy}{\sqrt{xyz}}.$$

于是

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}. \end{split}$$

(4)
$$\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$$
, $x \frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{\partial x}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, 则

$$F'_x = \frac{1}{z}, \quad F'_y = \frac{1}{y}, \quad F'_z = -\frac{x+z}{z^2}.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_x'} = \frac{z}{x+z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_x'} = \frac{z^2}{(x+z)y}.$$

(5)
$$xy + yz + xz = 3$$
, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$.

解 中所给方程知, 当 x=1,y=1 时, z=1. 令 F(x,y,z)=xy+yz+zx-3, 则

$$F'_x = y + z$$
, $F'_y = z + x$, $F'_z = x + y$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{y+z}{x+y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{z+x}{x+y}.$$

从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y+z}{x+y} \right) = -\frac{\left(1 + \frac{\partial z}{\partial z} \right) (x+y) - (y+z)}{(x+y)^2}.$$

代入 x=1,y=1,z=1, 并注意到 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=-1$ 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

(6)
$$z^3 - 3xyz = 1$$
, $\stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 令 $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 1$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\left(z + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) (z^2 - xy) - yz \left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2}$$
$$= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

9. 求由方程 $2xz - 2xyz + \ln(xyz) = 0$ 所确定的函数 z = f(x,y) 的全微分.

解 令 F = 2xz - 2xyz + ln(xyz) = 0, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_x'} = -\frac{z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_x'} = \frac{(2xyz - 1)z}{(2xz - 2xyz + +1)y}.$$

于是

$$dz = -\frac{z}{x} dx + \frac{(2xyz-1)z}{(2xz-2xyz+1)y} dy.$$

10. 设 F(u,v)=0, 其中 F 有连续偏导数,且 $u=x^2-y^2, v=y^2-z^2$,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

解

$$F'_x = 2xF'_u, \quad F'_z = -2zF'_v,$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_x'} = \frac{xF_u'}{zF_x'}.$$

11. 设 u=f(x,y,z), 而 z 由方程 $z^5-5xy+5z=1$ 所确定, 其中 f 具有连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 而由 $z^5 - 5xy + 5z = 1$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{z^4 + 1}.$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x + f'_z \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x + \frac{y}{z^4 + 1} f'_z.$$

12. 设 $z=\varphi(x,y)$, 而 y=f(x) 由方程 $\psi(x,y)=0$ 所确定, 其中 φ 与 ψ 具有连续偏导数, 试求 $\frac{dz}{dz}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \varphi_x' + \varphi_y' \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi_x' - \varphi_y' \frac{\psi_x'}{\psi_y'}.$$

13. 函数 z=z(x,y) 由方程 $x-az=\varphi(y-bz)$ 所确定,其中 $\varphi'(u)$ 存在且连续, a,b 是不全为零的常数,证明 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证 令
$$F(x, y, z) = x - az - \varphi(y - bz)$$
, 则

$$F'_x = 1$$
, $F'_y = -\varphi'$, $F'_z = -a + b\varphi'$.

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{1}{a - b\varphi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\varphi'}{a - b\varphi'}.$$

由此得到

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

14. 设 F(u,v) 具有连续偏导数,证明由方程 F(cx-az,cy-bz)=0 所确定的函数 z=f(x,y) 满足方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$.

证 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{cF_u}{aF_u + bF_v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{cF_v}{aF_u + bF_v},$$

所以

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

15. 设 F 有连续偏导数, 证明由方程 $ax+by+cz=F(x^2+y^2+z^2)$ 所确定的函数 z=z(x,y) 满足方程 $(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay$.

证 令
$$G(x, y, z) = F(x^2 + y^2 + z^2) - ax - by - cz$$
, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{2xF' - a}{2zF' - c}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{G'_y}{G'_z} = -\frac{2yF' - b}{2zF' - c}.$$

于是

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \frac{(cy - bz)(2xF' - a) + (az - cx)(2yF' - b)}{c - 2zF'}$$

$$= bx - ay$$

16. 设函数 u=f(z), 而 z 由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 确定为 x,y 的函数,其中 f 与 φ 均为连续可搬函数,证明 $\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$.

证 由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}.$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(z)}{1 - y\varphi'(z)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(z)\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)}.$$

由此得到

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

17. 设 F(u,v) 有连续偏导数,而由方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定 z 为 x,y 的函数,证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

证 因为

$$F_x' = F_1' - \frac{z}{x^2} F_2', \quad F_y' = -\frac{z}{y^2} F_1' + F_2', \quad F_z' = \frac{1}{y} F_1' + \frac{1}{x} F_2',$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{\frac{z}{x^2}F_2' - F_1'}{\frac{1}{y}F_1' + \frac{1}{x}F_2'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = \frac{\frac{z}{y^2}F_1' - F_2'}{\frac{1}{y}F_1' + \frac{1}{x}F_2'}.$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{z}{x}F_2' - xF_1' + \frac{z}{y}F_1' - yF_2'}{\frac{1}{y}F_1' + \frac{1}{x}F_2'}$$

$$= \frac{z\left(\frac{1}{y}F_1' + \frac{1}{x}F_2'\right) - xy\left(\frac{1}{y}F_1' + \frac{1}{x}F_2'\right)}{\frac{1}{y}F_1' + \frac{1}{x}F_2'}$$

$$= z - xy.$$

*18.
$$\mathfrak{F}$$
 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases} \, \mathfrak{F} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \mathfrak{F} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$

解 在每个方程两边同时对 x 求导, 并注意到 z 和 y 都是 x 的函数得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \\ 2x + 4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0. \end{cases}$$

由此解得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{3z+1}.$$

*19.
$$\begin{cases}
 x = e^u \cos v, \\
 y = e^u \sin v, \quad \stackrel{?}{\cancel{\times}} \frac{\partial z}{\partial x} \stackrel{?}{\cancel{\times}} \frac{\partial z}{\partial y}. \\
 z = uv,
\end{cases}$$

解 在方程 $x = e^u \cos v$ 和 $y = e^u \sin v$ 的两边同时对 x 求导,并注意到 u 和 v 都是 x, y 的函数,得

$$\left\{ \begin{array}{l} 1=\mathrm{e}^{u}\cos v\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{e}^{u}\sin v\frac{\partial v}{\partial x},\\ 0=\mathrm{e}^{u}\sin v\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{e}^{u}\cos v\frac{\partial v}{\partial x}. \end{array} \right.$$

由此解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v.$$

在方程 $x = e^u \cos v$ 和 $y = e^u \sin v$ 的两边同时对 y 求导,并注意到 u 和 v 都是 x, y 的函数,得

$$\begin{cases} 0 = e^{u} \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^{u} \sin v \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = e^{u} \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^{u} \cos v \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

由此解得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{-u} \cos v.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = (v \cos v - u \sin v) e^{-u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = (v \sin v + u \cos v) e^{-u}.$$

习 题 8-4

1. 永函数 $u=x^2+y^2+z^4-3xz$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 处沿 $\mathbf{l}=(1,2,2)$ 方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}$.

解 因为

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} &= (2x - 3z)\Big|_{(1,1,1)} = -1, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)} &= 2y\Big|_{(1,1,1)} = 2, \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,1)} &= (4z^3 - 3x)\Big|_{(1,1,1)} = 1, \end{split}$$

而向量1的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$
, $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$,

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\gamma = \frac{5}{3}.$$

2. 求函数 $u=2xy-z^2$ 在点 $P_0(2,-1,1)$ 处沿从 P_0 点到 A(3,1,-1) 点方向的方向导数.

解 向量 $\overrightarrow{P_0A} = (1,2,-2)$ 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Ħij

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0} = 2y\Big|_{P_0} = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} = 2x\Big|_{P_0} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} = -2z\Big|_{P_0} = -2,$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{P_{0,A}}}\Big|_{P_{0}} = -2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot \frac{-2}{3} = \frac{10}{3}.$$

3. 求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处沿与 x 轴正向夹角为 α 的 l 方向的方向导数,试问在怎样的方向上此方向导数有: (1) 最大的值; (2) 最小的值; (3) 等于零.

解 因为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{P_0} = 1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{P_0} = 1,$$

而 l 的方向余弦为 $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

由此易见,当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时方向导数有最大值,当 $\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时方向导数有最小值,当 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时方向导数等于零.

4. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在位于地物线 $y^2=4x$ 上点 $P_0(1,2)$ 处沿着这地物线在此点 切线方向的方向导数.

$$\mathbf{R} \ \ z_x'(1,2) = z_y'(1,2) = \frac{1}{x+y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{3}.$$

抛物线上的点 P_0 的切线斜率为 $k = y'\Big|_{(1,2)} = \frac{2}{y}\Big|_{(1,2)} = 1$,

方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 故方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{P_0}=\pm(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2})=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. 求函数 $z=x^2-y^2$ 在点 M(1,1) 处沿与 x 轴的正向组成角 $\alpha=60^o$ 的方向的方向导数.

解 颞中所给的方向为:

$$l = (\cos(\pm 60^{\circ}), \sin(\pm 60^{\circ})) = (\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

又

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M} = 2x\Big|_{m} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M} = -2y\Big|_{M} = -2,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \mp \sqrt{3}.$$

6. 求函数 u=xyz 在点 M(1,1,1) 处沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 方向的方向导数. 函数在该点的梯度的大小等于什么?

解 因为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M}=yz\Big|_{M}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M}=xz\Big|_{M}=1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M}=xy\Big|_{M}=1,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma,$$
 $|\mathbf{grad}u|_{M}| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}.$

7. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$, 求 grad f(0,0,0) 及 grad f(1,1,1).

解

$$\mathbf{grad}f(0,0,0) = (f'_x(0,0,0), f'_y(0,0,0), f'_z(0,0,0)) = (3,-2,-6),$$

$$\mathbf{grad}f(1,1,1) = (f'_x(1,1,1), f'_y(1,1,1), f'_z(1,1,1)) = (6,3,0),$$

8. 求函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在 $A(\epsilon,0,0)$ 及 $B(0,\epsilon,0)$ 两点的梯度之间的夹角.

解 山

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2z$$

得

$$\operatorname{grad} u\Big|_{A} = (2\varepsilon, 0, 0), \quad \operatorname{grad} u\Big|_{B} = (0, 2\varepsilon, 0).$$

因为

$$(2\epsilon,0,0)\cdot(0,\epsilon,0)=0,$$

所以两点的梯度之间的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

- (1) grad $(\alpha u + \beta v) = \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v \quad (\alpha, \beta)$ 为常数);
- (2) $\operatorname{grad}(uv) = u\operatorname{grad}v + v\operatorname{grad}u;$
- (3) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u)\operatorname{grad} u$, 其中 f(u) 为可微函数.

ùΕ

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (\alpha u + \beta v), \frac{\partial}{\partial y} (\alpha u + \beta v), \frac{\partial}{\partial z} (\alpha u + \beta v) \right) \\ &= \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial x}, \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y}, \alpha \frac{\partial u}{\partial z} + \beta \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(uv) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv), \frac{\partial}{\partial y}(uv), \frac{\partial}{\partial z}(uv)\right) \\ &\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}, u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= u\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= u\mathbf{grad}v + v\mathbf{grad}u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}f(u) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\Big) \\ &= \Big(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\Big) \\ &= f'(u)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\Big) \\ &= f'(u)\mathbf{grad}u. \end{aligned}$$

习 题 8-5

1. 求下列曲面在指定点处的切平面方程和法线方程:

(1)
$$z = x^2 + y^2 - 1$$
, $\triangle \land (2, 1, 4)$.

解曲

$$z_{x}'\Big|_{(2,1)} = 2x\Big|_{(2,1)} = 4, \quad z_{y}'\Big|_{(2,1)} = 2y\Big|_{(2,1)} = 2$$

得曲面在点 (2,1,4) 处的法向量 n=(4,2,-1). 于是曲面在点 (2,1,4) 处的切平面为

$$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,$$

即

$$4x + 2y - z - 6 = 0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

(2)
$$e^z - z + xy = 3$$
, \triangle (2,1,0).

解 令 $F(x,y,z) = e^z - z + xy - 3$, 则

$$F_x(2,1,4) = 1$$
, $F_y(2,1,4) = 2$, $F_z(2,1,4) = 0$.

于是所求的切平面方程为

$$(x-2) + 2(y-1) = 0,$$

即

$$x + 2y - 4 = 0$$
;

法线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0},$$

即

. .

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

2. 设函数 F(u,v) 具有连续的一阶偏导数,且 $F'_u(3,1)=1, F'_v(3,1)=-1$, 求曲面 F(x+y,x-z)=0 在点 $M_0(2,1,1)$ 处的法线方程.

解因

$$F'_x(2,1,1) = F'_u(3,1) + F'_v(3,1) = 0,$$

$$F'_y(2,1,1) = F'_u(3,1) = 1,$$

$$F'_z(2,1,1) = -F'_v(3,1) = 1,$$

故曲面在点 M_0 处法向量 n=(0,1,1), 从而法线方程为

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1},$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

3. 在曲面 z=xy 上求一点,使得该点处的法线垂直于平面 x+3y+z+9=0,并写出该法线的方程.

解 设所求点为 P(x,y,z)、则 P 点处的法向量 n=(y,x,-1) 平行于已知平面的法向量 $n_0=(1,3,1)$. 于是有

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{3} = \frac{-1}{1}$$
.

由此得到 x = -3, y = -1, z = xy = 3, 即所求点为 P(-3, -1, 3). 曲面在此点的決线方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

4. 设平面 $3x + \lambda y - 3z + 16 = 0$ 与椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 相切, 试求 λ 的值.

解 设切点为 M(x,y,z), 则椭球面在切点处的法向量 n=(6x,2y,2z) 平行于所给平面的法向量 $n_0=(3,\lambda,-3)$. 由此得到

$$\frac{6x}{3} = \frac{2y}{\lambda} = \frac{2z}{-3}.$$

设上述比值为 t, 则有

$$x=\frac{1}{2}t, \quad y=\frac{1}{2}\lambda t, \quad z=-\frac{3}{2}t.$$

将此代入平面方程和椭球面方程得

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{9}{2}\right)t + 16 = 0, \\ \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{9}{4}\right)t^2 = 16. \end{cases}$$

由此解得 $\lambda = \pm 2$.

5. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上的点, 使该点处的切平面平行于平面 x + 4y + 6z = 0, 并写出切平面方程.

解 设所求点为 M(x,y,z), 则曲面在该点的法向量为 n=(x,2y,3z). 按照要求, n平行于已知平面的法向量 $n_0=(1,4,6)$, 因此有

$$\frac{x}{1}=\frac{2y}{4}=\frac{3z}{6}.$$

设上述比值为 t、则

$$x=t$$
, $y=2t$, $z=2t$.

代入曲面方程得

$$t^2 + 8t^2 + 12t^2 = 21.$$

由此解得 $t=\pm 1$. 于是所求的点为 (1,2,2) 和 (-1,-2,-2). 法向量为 n=(1,4,6). 切平面方程为

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0 \text{ in } (x+1)+3(y+2)+6(z+2)=0,$$

即

$$x + 4y + 6z - 21 = 0$$
 π $z + 4y + 6z + 21 = 0$.

6. 证明曲面 $xyz=a^3$ (a>0) 上任一点处的切平面与 3 个坐标面形成的四面体的体积为 $\frac{9a^3}{2}$.

证 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任意一点,则曲面在点 M_0 处的法向量为 $(y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0)$, 从而切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0.$$

将其化为截距式得

$$\frac{x}{3x_0} + \frac{y}{3y_0} + \frac{z}{3z_0} = 1.$$

千是切平面与三个坐标面形成的四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6}27x_0y_0z_0 = \frac{9}{2}a^3.$$

7. 证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 在任意点处的切平面均通过一定点,其中函数 f 具有连续偏导数.

证 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上任意一点,则由

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z - c} f_1', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z - c} f_2', \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{a - x}{(z - c)^2} f_1' + \frac{b - y}{(z - c)^2} f_2'$$

知曲面在点 Mo 处的法向量为

$$n_0 = \left(f_1' \Big|_{M_0}, f_2' \Big|_{M_0}, \frac{a - x_0}{z_0 - c} f_1' \Big|_{M_0} + \frac{b - y_0}{z_0 - c} f_2' \Big|_{M_0} \right),$$

从而切平面方程为

$$f_1'\Big|_{M_0}(x-x_0)+f_2'\Big|_{M_0}(y-y_0)+\Big(\frac{a-x_0}{z_0-c}f_1'\Big|_{M_0}+\frac{b-y_0}{z_0-c}f_2'\Big|_{M_0}\Big)(z-z_0)=0,$$

或写成

$$f_1'\Big|_{M_0}\Big[(x-x_0)+\frac{a-x_0}{z_0-c}(z-z_0)\Big]+f_2'\Big|_{M_0}\Big[(y-y_0)+\frac{b-y_0}{z_0-c}(z-z_0)\Big]=0.$$

由此容易看出 x=a,y=b,z=c 满足方程. 因此切平面过定点 (a,b,c).

8. 证明曲面 z=x+f(y-z) 上任何一点处的切平面均平行于一条定直线, 其中 f 为可做函数.

 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任意一点,则曲面在 M_0 点处的法向量为 $n_0=(1,f'(y_0-z_0),-1-f'(y_0-z_0))$. 不难看出向量 n_0 垂直于向量 s=(1,1,1). 因此曲面在点 M_0 处的切平面平行于以 s 为方向向量的定直线 x+y+z=0.

9. 求曲线
$$\begin{cases} xyz = 1, \\ y^2 = x \end{cases}$$
 在点 $(1,1,1)$ 处切向量的方向余弦.

解 曲面 xyz = 1 和 $y^2 = x$ 在点 (1, 1, 1) 处的法向量分别为

$$n_1 = (1,1,1)$$
 π $n_2 = (1,-2,0)$.

于是二曲面的交线在点 (1.1,1) 处的切向量为

$$s = \pm (\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2) = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \pm (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}),$$

其方向余弦为

$$\cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

10. 求函数 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点 (1,-2,1) 处沿曲线 $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=6,\\ x+y+z=0 \end{array}\right.$ 的 切线方向的方向导数.

解 在点 (1,-2,1) 处曲面 $x^2+y^2+z^2=6$ 和 x+y+z=0 的法向量分别为 $n_1=(1,-2,1)$ 和 $n_2=(1,1,1)$. 因

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 3k,$$

故二曲面的交线在点 (1,-2,1) 处的切线方向为 $s=\pm(1,0,-1)$, 其方向余弦为

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \gamma = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,-2,1)} &= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(1,-2,1)} = \frac{5}{6\sqrt{6}},\\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,-2,1)} &= \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(1,-2,1)} = \frac{1}{3\sqrt{6}},\\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,-2,1)} &= \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{(1,-2,1)} = \frac{-1}{6\sqrt{6}}. \end{split}$$

于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{(1,-2,1)}=\pm\left(\frac{5}{6\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-1}{6\sqrt{6}}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

习 题 8-6

1. 求下列函数的极值:

(1)
$$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$
.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

得驻点 (1,0). 由

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$$
, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

知 $B^2 - AC < 0$ 且 A > 0, 因此函数在 (1,0) 处取得极小值. 极小值为 $z|_{(1,0)} = -1$.

(2)
$$z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$$
.

解 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-4y}{3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}}$$

知函数不存在驻点,而在点 (0,0) 处函数的两个偏导数都不存在. 因为 $z|_{(0,0)}=1$, 而当 $(x,y)\neq (0,0)$ 时 z<1, 因此函数在点 (0,0) 处取极大值. 极大值为 $z|_{(0,0)}=1$.

(3)
$$z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \quad (x > 0, y > 0).$$

解 解方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{array} \right.$$

得驻点 (4,2). 由

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(4,2)} = \frac{16}{x^3}\Big|_{(4,2)} = \frac{1}{4},$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{(4,2)} = -\frac{1}{y^2}\Big|_{(4,2)} = -\frac{1}{4},$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(4,2)} = \frac{2x}{y^3}\Big|_{(4,2)} = 1$$

知 $B^2 - AC < 0$ 且 A > 0,因此函数在 (4,2) 处取得极小值. 极小值为 $z|_{(4,2)} = 6$.

(4)
$$z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$
 $(a > 0, b > 0)$.

Mr. 函数的定义域为

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}.$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(1 - 2\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(1 - \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2})}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0 \end{cases}$$

得到函数在 D 的内部的驻点 (0,0), $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

函数的二阶偏导数为

$$\begin{split} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\frac{xy}{a^2}(-3 + 2\frac{x^2}{a^2} + 3\frac{y^2}{b^2})}{(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1 - 3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}}{(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\frac{xy}{b^2}(-3 + 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{y^2}{b^2})}{(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})^{\frac{3}{2}}}. \end{split}$$

对于点 (0,0), A=0, B=1, C=0, 从而 $B^2-AC>0$. 因此函数在点 (0,0) 不取得极值.

对于点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $A = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{b}{a}$, $B = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $C = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{a}{b}$, 从 而 $B^2 - AC < 0$ 且 A < 0. 因此函数在这两个点取极大值. 极大值为 $z|_{\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \pm \frac{b}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

对于点 $\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $A=\frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{b}{a}$, $B=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $C=\frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{a}{b}$, 从而 $B^2-AC<0$ 且 A>0. 因此函数在这两个点取极小值。极小值为 $z|_{\left(\mp\frac{a}{\sqrt{3}},\pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right)}=-\frac{ab}{3\sqrt{3}}$.

2. 若函数 $f(x,y) = 3x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 (1,-1) 处取极值, 运确定常数 a.

解 因为函数 f(x,y) 在点 (1,-1) 处可导, 故若函数在 (1,-1) 取得极值, 必有

$$f'_x(1,-1) = (6x + a + y^2)\Big|_{(1,-1)} = a + 7 = 0,$$

由此得到 a = -7. 经进一步判断可知当 a = -7 时函数在点 (1, -1) 处取极值.

3. 求函数 $z = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \le 1$ 上的最大值和最小值.

解 因为方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

无解, 而函数 $z = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$ 在 D 的内部处处可导, 所以函数在 D 的内部不可能取得最大值和最小值, 函数的最大值和最小值只能在 D 的边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上取得. 这需求函数满足条件 $x^2 + y^2 = 1$ 的条件极值. 作拉格朗日函数

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases}
\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 2 + 2\lambda x = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y + 2\lambda y = 0, \\
x^2 + y^2 = 1
\end{cases}$$

得三组解 (0,1), $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$. 因

$$z|_{(0,1)} = 1$$
, $z|_{(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $z|_{(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$,

所以函数的最小值为 $z\Big|_{(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})} = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$, 最大值为 $z\Big|_{(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

4. 求函数 z = xy(4-x-y) 在 x = 1, y = 0, x + y = 6 围成区域上的最大值和最小值.

解 方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y(4 - 2x - y) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x(4 - 2y - x) = 0 \end{cases}$$

在所给区域内部只有一个解 $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{4}{3}$. 而 $z\Big|_{(\frac{4}{3},\frac{4}{3})} = \frac{64}{27}$.

在所给区域的边界段 $\{(x,y) \mid y=0, 1 \le x \le 6\}$ 上, z=0.

在所给区域的边界段 $\{(x,y)\mid x=1,0\leq y\leq 5\}$ 上, $z=3y-y^2$. 令 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=3-2y=0$ 得 $y=\frac{3}{2}$. 而 $z\Big|_{y=\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}$.

在所给区域的边界段 $\{(x,y)\mid 1\leq x\leq 6, y=6-x\}$ 上, $z=2x^2-12x\}$. 令 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=4x-12=0$ 得 x=3. 而此时 y=3, $z|_{x=3}=-18$.

比较上述各个函数值的大小知,函数在所给区域上的最大值是 $z\Big|_{(\frac{4}{3},\frac{4}{3})}=\frac{64}{27},$ 最小值是 $z\Big|_{(3,3)}=-18.$

5. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的第一卦限上求一点,使该点处切平面与 3 个坐标面围成的四面体体积最小.

輝 设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为所给的椭球面上一点,则椭球面在 P 点的法向量为 $n=\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right)$,从而切平面为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

即

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1.$$

中此可知也平面在三坐标轴上的截距依次为 $\frac{a^2}{x_0}$, $\frac{b^2}{y_0}$, $\frac{c^2}{z_0}$. 于是切平面与三个坐标轴围成的四面体体积为 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$. 为了使 V 取最小值,只需函数 $F(x_0,y_0,z_0)=x_0y_0z_0$ 取最大值。作拉格朗日函数

$$L(x,y,z) = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial l}{\partial x} = yz + 2\frac{\lambda}{a^2}x = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial y} = xz + 2\frac{\lambda}{a^2}y = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial z} = xy + 2\frac{\lambda}{a^2}z = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

得唯一解 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. 因为所求的点一定存在,所以这个解即为所求.

6. 将周长为 2p 的矩形绕它的一边旋转而成一个圆柱体,问矩形的边长各为多少时,才能使圆柱体的体积最大.

解 设矩形的作为旋转轴的一边长为 y, 另一边长为 x, 则 x + y = p, 圆柱体的体积为

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 (p - x), \quad 0 < x < p$$

由

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi x (2p - 3x)$$

得到唯一驻点 $x=\frac{2}{3}p$. 因

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d} x^2}\Big|_{x=\frac{2}{3}p} = 2\pi (p-3x)\Big|_{x=\frac{2}{3}p} = -2\pi p < 0,$$

故函数 V 在点 $x=\frac{2}{3}p$ 处取极大值. 又由驻点唯一,所以 $x=\frac{2}{3}p$ 也是最大值点. 此时 $y=\frac{1}{3}p$.

7. 在平面 3x-2z=0 上求一点,使它与点 A(1,0,1), B(2,2,3) 的距离平方和为最小.

解 设 P(x,y,z) 为平面上一点,则 P 到点 A,B 的距离平方和为

$$h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2.$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = (x - 1)^{2} + y^{2} + (z - 1)^{2} + (x - 2)^{2} + (y - 2)^{2} + (z - 3)^{2} + \lambda(3x - 2z).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2(x-2) + 3\lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2(y-2) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-1) + 2(z-3) - 2\lambda = 0, \\ 3x - 2z = 0, \end{cases}$$

得唯一解 $x = \frac{18}{13}, y = 1, z = \frac{27}{13}$. 因为所求的点一定存在,所以这个解即为所求.

8. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 x + y - 2z = 2 之间的最短距离.

解 设 M(x,y,z) 是旋转抛物面上一点,则 M 到平面 x+y-2z=2 的距离为

$$d = \frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}.$$

为了使 d 取最小值,只需函数 $f(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2$ 取最小值. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = (x + y - 2z - 2)^{2} + \lambda(z - x^{2} - y^{2}).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x+y-2z-2) - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(x+y-2z-2) - 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = -4(x+y-2z-2) + \lambda = 0, \\ z - x^2 - y^2 = 0, \end{cases}$$

得唯一解 $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{8}$. 因为所求的点一定存在,所以这个解即为所求. 最短距离为

$$d\Big|_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})} = \frac{\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{8} - 2\right|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

9. 做一个长方形箱子,容积为 $\frac{9}{2}$ k^3 ,箱子的盖及侧面的造价为 8 元 / k^2 ,箱子底的造价为 1 元 / k^2 ,试求箱子的长、宽、高各为多少时,箱子的造价最低.

解 设箱子的长、宽、高分别为x米、y米、z米,则 $xyz=\frac{9}{2}$,箱子的造价为

$$u = 8(xy + 2zx + 2zy) + xy.$$

将 $z = \frac{9}{2xy}$ 代入 u 得

$$u = 8\left(xy + \frac{9}{y} + \frac{9}{x}\right) + xy, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

解方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 9y - \frac{72}{x^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 9x - \frac{72}{y^2} = 0, \end{array} \right.$$

得唯一驻点 x=2,y=2. 此时 $z=\frac{9}{8}$. 因为所求的点一定存在,所以这个解即为所求.

10. 在圆锥面 $Rz = h\sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 z = h (R > 0, h > 0) 所围的圆锥体内作一个底面平行于 xOy 平面的最大长方体,求此最大长方体的体积.

解 设长方体的各个面都平行于坐标面,其在第一卦限下部的顶点在圆锥面上,坐标为 (x, y, z),则长方体的体积为

$$V=4xy(h-z).$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = 4xy(h-z) + \lambda(Rz - h\sqrt{x^2 + y^2}).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 4y(h-z) - \lambda h \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4x(h-z) - \lambda h \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = -4xy + \lambda R = 0, \\ Rz - h\sqrt{x^2 + y^2} = 0, \end{cases}$$

得唯一解 $x=\frac{\sqrt{2}}{3}R,y=\frac{\sqrt{2}}{3}R,z=\frac{2}{3}h$. 因为所求的点一定存在,所以这个解即为所求. 此时长方体的体积为

$$V = 4\frac{\sqrt{2}}{3}R \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}R \cdot (h - \frac{2}{3}h) = \frac{8}{27}R^2h.$$

11. 如果点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是光滑曲面 F(x,y,z)=0 上与原点距离最近的点,试证过点 M_0 的法线必定通过坐标原点.

证 曲面上到原点的距离最近的点 P 是函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 满足条件 F(x,y,z)=0 的极值点. 作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda F(x, y, z),$$

则 P 点的坐标 (x,y,z) 满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda F_x'(x,y,z) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda F_y'(x,y,z) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda F_z'(x,y,z) = 0. \end{array} \right.$$

由此得到

$$(x,y,z)=-\frac{\lambda}{2}(F'_x,F'_y,F'_z).$$

这表明,曲面在点 P 处的法向量 (F'_x, F'_y, F'_z) 平行于向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$. 因此曲面在点 P 处的法线必定通过坐标原点 O.

*12. 求函数
$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$
 在点 $(1,-2)$ 处的泰勒公式.

解 因为

$$f(1,-2) = 5,$$

$$f'_{x}(1,-2) = (4x - y - 6)\Big|_{(1,-2)} = 0,$$

$$f'_{y}(1,-2) = (-x - 2y - 3)\Big|_{(1,-2)} = 0,$$

$$f''_{xx}(1,-2) = 4, \quad f''_{xy}(1,-2) = -1, \quad f''_{yy}(1,-2) = -2,$$

而三阶和更高阶的偏导数都为 0, 所以函数 f(x,y) 在点 (1,-2) 处的泰勒公式为

$$f(x,y) = f(1,-2) + f'_x(1,-2)(x-1) + f'_y(1,-2)(y+2)$$

$$+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(1,-2)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,-2)(x-1)(y+2) + f''_{yy}(1,-2)(y+2)^2]$$

$$= 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

*13. 求函数 $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$ 在点 (0,0) 的三阶泰勒公式.

解 因为

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = e^{x}\ln(1+y)\Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = e^{x}\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial x^{2}}\Big|_{(0,0)} = e^{x}\ln(1+y)\Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,0)} = e^{x}\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial^{2} f}{\partial y^{2}}\Big|_{(0,0)} = -e^{x}\frac{1}{(1+y)^{2}}\Big|_{(0,0)} = -1,$$

$$\frac{\partial^{3} f}{\partial x^{3}}\Big|_{(0,0)} = e^{x}\ln(1+y)\Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial^{3} f}{\partial x^{2} \partial y} = e^{x}\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$\frac{\partial^{3} f}{\partial x \partial y^{2}}\Big|_{(0,0)} = -e^{x}\frac{1}{(1+y)^{2}} = -1, \quad \frac{\partial^{3} f}{\partial y^{3}}\Big|_{(0,0)} = 2e^{x}\frac{1}{(1+y)^{3}}\Big|_{(0,0)} = 2,$$

$$\frac{\partial^{4} f}{\partial x \partial y^{3}} = e^{x}\ln(1+y), \quad \frac{\partial^{4} f}{\partial x^{3} \partial y} = e^{x}\frac{1}{1+y}, \quad \frac{\partial^{4} f}{\partial x^{2} \partial y^{2}} = -e^{x}\frac{1}{(1+y)^{2}},$$

$$\frac{\partial^{4} f}{\partial x \partial y^{3}} = 2e^{x}\frac{1}{(1+y)^{3}}, \quad \frac{\partial^{4} f}{\partial y^{4}} = -6e^{x}\frac{1}{(1+y)^{4}},$$

所以

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{3} \frac{1}{m!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m} f(0,0) + R_{3}(x,y)$$

 $y + \frac{1}{2!} (2xy - y^{2}) + \frac{1}{3!} (3x^{2}y - 3xy^{2} + 2y^{3}) + R_{3}(x,y),$

其中

$$R_3(x,y) = \frac{e^{\theta x}}{4!} \left[x^4 \ln(1+\theta y) + \frac{4x^3 y}{1+\theta y} - \frac{6x^2 y^2}{(1+\theta y)^2} + \frac{8xy^3}{(1+\theta y)^3} - \frac{6y^4}{(1+\theta y)^4} \right],$$

此处 $0 < \theta < 1$.

*14. 求函数 $f(x,y) = e^{x+y}$ 在点 (0,0) 的 n 阶泰勒公式.

解 利用 e^x 在点 x=0 处的 n 阶泰勒公式得

$$f(x,y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k + R_n(x,y),$$

其中

$$R_n(x,y) = \frac{e^{\theta(x+y)}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^{n+1-k} y^k,$$

这里 $0 < \theta < 1$.

复习题八

1. 填空题:

(1) 设
$$f(x,y) = \ln[(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)]$$
, 则 $f(x,y)$ 的定义域为_____;

解 解不等式

$$(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)>0$$

得到函数定义域 $\{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

(2) 说
$$z = 1 + y + \varphi(x + y)$$
, 且当 $y = 0$ 时, $z = 1 + \ln^2 x$, 則 $\varphi(x + y) =$ ______;

解 根据已知条件得 $\varphi(x) = \ln^2 x$. 因此 $\varphi(x+y) = \ln^2 (x+y)$.

(3) if
$$f(x,y) = e^{2y-x}\sin(x+2y)$$
, if $f'_y|_{(0,\frac{\pi}{2})} =$ _____;

解
$$f_y'\Big|_{(0,\frac{\pi}{4})} = 2e^{2y-x}[\sin(x+2y) + \cos(x+2y)]\Big|_{(0,\frac{\pi}{4})} = 2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

(4) 设
$$x+2y+xy+1+z-2e^{z^2-1}=0$$
 确定了函数 $z=f(x,y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ______;

解 记 $F(x,y,z) = x + 2y + xy + 1 + z - 2e^{z^2-1}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = \frac{1+y}{4ze^{z^2-1}-1}.$$

(5) 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 (1,2,0) 处的切平面方程为______.

解 记
$$F(x, y, z) = z - e^z + 2xy - 3$$
, 则

$$\begin{split} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(1,2,0)} &= 2y|_{(1,2,0)} = 4, \\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(1,2,0)} &= 2x|_{(1,2,0)} = 2, \\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(1,2,0)} &= (1 - e^z)\Big|_{(1,2,0)} = 0. \end{split}$$

因此切平面的法向量为 n = (2,1,0), 切平面方程为

$$2(x-1) + (y-2) = 0,$$

即

$$2x + y - 4 = 0.$$

2. 选择题:

- (1) 在曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中,与平面 x + 2y + z = 4 平行的切线 ().
 - (A) 只有一条. (B) 只有两条. (C) 至少有三条. (D) 不存在.

解 所给曲线在参数为 t 的点处的切向量为 $s(t) = (1, -2t, 3t^2)$. 切线与所给平面平行 当且仅当切向量垂直于所给平面的法向量 n = (1, 2, 1), 即

$$s(t) \cdot n = 1 - 4t + 3t^2 = 0.$$

由此解得 $t=\frac{1}{3}$ 和 t=1. 因此曲线有两条切线平行于所给平面. 选 B.

(2) 二元函数
$$f(x,y) = \left\{ egin{array}{ll} rac{5xy}{x^2+y^2}, & (x,y)
eq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{array}
ight.$$
 在点 $(0,0)$ 处 $($

- (A) 连续、偏导数存在.
- (B) 连续、偏导数不存在.
- (C) 不连续, 偏导数存在.
- (D) 不连续、偏导数不存在.

解 因为当 (x,y) 沿直线 y=x 趋于 (0,0) 时

$$f(x,y)=\frac{5}{2}\to\frac{5}{2},$$

山乃当 (-,y) 沿直线 y=-x 趋于 (0,0) 时

$$f(x,y) = -\frac{5}{2} \longrightarrow -\frac{5}{2},$$

所以函数在点 (0,0) 处极限不存在, 从而不连续. 又由

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0,$$

知,函数在点(0,0)处两个偏导数都存在, $f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$. 选 C.

(3) 曲面
$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$$
 在点 $M_0(4, 2, -9)$ 处的切平面方程为(). (A) $x + 2y + z + 1 = 0$. (B) $x - 2y + z + 1 = 0$.

(C)
$$x - 2y - 2z - 1 = 0$$
. (D) $x + 2y - z + 1 = 0$.
 \mathbf{P} \mathbf{E} $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} + 1$, \mathbf{E}
$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(4,2,-9)} = \frac{1}{2}x\Big|_{(4,2,-9)} = 2$$
,
$$\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(4,2,-9)} = 2y\Big|_{(4,2,-9)} = 4$$
,
$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{(4,2,-9)} = -\frac{2}{9}z\Big|_{(4,2,-9)} = 2$$
.

因此曲面在点 M_0 处的法向量为 n=(1,2,1), 切平面方程为

$$(x-4) + 2(y-2) + (z+9) = 0$$

即

$$x + 2y + z + 1 = 0$$
.

选 A.

(4) 读
$$(x,y) \neq (0,0)$$
 时, $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. N $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = ($).
(A) $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$. (B) $\frac{2xy^2}{x^2 + y^2}$. (C) $\frac{2x^2y}{x^2 + y^2}$. (D) $\frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}$. $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{2\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

选 A.

- (5) 函数 f(x,y) 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微是 f(x,y) 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处存在偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 的 ().
 - (A) 充分条件, 但不是必要条件.
- (B) 必要条件, 但不是充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既不是充分条件也不是必要条件.

解 选 A.

3. 设函数
$$z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{y}{x}}$$
, 求 dz.

解

$$dz = e^{-\arctan \frac{y}{x}} d(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) d(e^{-\arctan \frac{y}{x}})$$

$$= e^{-\arctan \frac{y}{x}} (2x dx + 2y dy) + (x^2 + y^2) e^{-\arctan \frac{y}{x}} d(-\arctan \frac{y}{x})$$

$$= e^{-\arctan \frac{y}{x}} (2x dx + 2y dy) - (x^2 + y^2) e^{-\arctan \frac{y}{x}} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

$$= e^{-\arctan \frac{y}{x}} [(2x + y) dx + (2y - x) dy].$$

4.
$$\Re f(x,y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$$
, $\Re \frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

解 因为

$$\begin{split} &\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{-(xy)^2}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2xy^3 e^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3 y e^{-(xy)^2}, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x^2 y^2 e^{-(xy)^2} + e^{-(xy)^2}, \end{split}$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{-(xy)^2}.$$

5. 设 z = f(u, x, y), $u = xe^y$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= f_1' \frac{\partial u}{\partial x} + f_2' = e^y f_1' + f_2', \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= e^y f_1' + e^y (f_{11}'' \frac{\partial u}{\partial y} + f_{13}'') + f_{21}'' \frac{\partial u}{\partial y} + f_{23}'' \\ &= e^y f_1' + x e^{2y} f_{11}'' + e^y f_{13}'' + x e^y f_{21}'' + f_{23}''. \end{split}$$

6. 设 z=f(2x-y)+g(x,xy), 其中函数 f(t) 二阶可导, g(u,v) 具有连续的二阶 偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

鯒

$$\begin{split} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2f' + g_1' + yg_2', \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -2f'' + xg_{12}'' + g_2' + xyg_{22}''. \end{split}$$

7. 设 f(x,y) 具有连续的一阶偏导数,且 $f(x,x^2)=1$, $f'_x(x,x^2)=x$, 求 $f'_y(x,x^2)$,

解 在等式 $f(x,x^2) = 1$ 两边对 x 求导得

$$f'_x(x, x^2) + 2x f'_y(x, x^2) = 0.$$

于是

$$f_y'(x,x^2) = -\frac{1}{2x}f_x'(x,x^2) = -\frac{1}{2}.$$

8. 设可微函数 f(x,y,z) 又是 n 次齐次函数,即它满足关系式

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z),$$

试证明 f(x,y,z) 满足方程

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

证 等式 $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ 两边同时对 t 求导得

$$xf'_{x}(tx, ty, tz) + yf'_{y}(tx, ty, tz) + zf'_{z}(tx, ty, tz) = nt^{n-1}f(x, y, z).$$

在上式中令 t=1 得

$$xf'_x(x,y,z) + yf'_y(x,y,z) + zf'_z(x,y,z) = nf(x,y,z).$$

9. 求由曲线 $\left\{ egin{array}{ll} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{array}
ight.$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $\left(0,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$ 处的指向外侧的单位法向量.

解 旋转曲面的方程为

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12.$$

在所给点指向外侧的法向量为

$$n = (3x, 2y, 3z)|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})} = (0, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}).$$

因 $|n| = \sqrt{30}$, 所以所求的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}^{o} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} \boldsymbol{n} = \left(0, \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

10. 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数,其中 a>0,b>0.

解 曲线的参数方程为 $x=a\cos\theta,y=b\cos\theta$, 点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 所对应的参数为 $\frac{\pi}{4}$. 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -a\sin\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = b\cos\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{b}{\sqrt{2}},$$

所以曲线在所给点处的切向量为

$$s=(-a,b),$$

从而内法线方向为

$$\boldsymbol{n}=(-b,-a).$$

它的方向余弦为 $\cos \alpha = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ 又

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{2x}{a^2}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{2y}{b^2}\Big|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})} = -\frac{\sqrt{2}}{b}.$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\sqrt{2}}{a} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{ab} \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

11. 持数 33 分成 3 个正数 x,y,z 之和,问 x,y,z 各等于多少时,函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 取最小值.

解 这是求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 满足条件 x+y+z=33 的最小值. 作拉格朗日函数

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x + y + z - 33).$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2x + \lambda = 0, \\ F'_y = 4y + \lambda = 0, \\ F'_z = 6z + \lambda = 0, \\ x + y + z = 33, \end{cases}$$

得唯一解 x = 18, y = 9, z = 6. 因所求的解一定存在,所以这个解为所求.

12. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ 上求一点 P, 使得函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在点 P 处沿方向 l = i - j 的方向导数具有最大值.

解 向量 l 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=0$. 设所求点 P 的坐标为 (x,y,z), 则在 P 点函数 f(x,y,z) 沿方向 l 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f_x' \cos \alpha + f_y' \cos \beta + f_z' \cos \gamma = \sqrt{2} x - \sqrt{2} y.$$

作拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = \sqrt{2} x - \sqrt{2} y + \lambda (x^2 + y^2 + z^2).$$

解方程组

$$\begin{cases} L'_{x} = \sqrt{2} + 2\lambda x = 0, \\ L'_{y} = -\sqrt{2} + 2\lambda y = 0, \\ L'_{z} = 2\lambda z = 0, \\ x^{2} + y^{2} + z^{2} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

得两组解 $x=\pm\frac{1}{2}, y=\mp\frac{1}{2}, z=0$. 当 $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}, z=0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}=\sqrt{2};$ 当 $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}=-\sqrt{2}.$ 因此所求的点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right).$

第九章 重积分

习 题 9-1

1. 设平面区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le R^2\}$, 利用二重积分的几何意义计算

$$\iint\limits_{D} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

解 $\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 在几何上表示以半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 为顶的曲顶柱体的体积,故 $V=\frac{2}{3}\pi R^3$.

2. 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

(1) $I_1=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由 x 釉, y 轴与直线 x+y=1 所围成的三角形闭区域。

解 因为对于 $\forall (x,y) \in D$, 有 $0 \le x+y \le 1$. 故 $(x+y)^2 \ge (x+y)^3$, 从而有 $I_2 \le I_1$.

(2)
$$I_1 = \iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$$
 与 $I_2 = \iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \{(x,y)|\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 2\}$

解 因为对于 $\forall (x,y) \in D$, 有 $x+y \ge 1$. 故 $(x+y)^2 \le (x+y)^3$, 从而有 $I_1 \le I_2$.

(3) $I_1=\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D\ln^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 为以点 (1,0),(1,1),(2,0)为项点的三角形闭区域。

解 因为对于 $\forall (x,y) \in D$, 有 $1 \ge x + y \ge 2$. 故 $0 \le \ln(x+y) \le \ln 2 < \ln e = 1$, 从 而 $\ln(x+y) \ge \ln^2(x+y)$, 于是有 $I_1 \ge I_2$.

(4)
$$I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma$$
 与 $I_2 = \iint_D \ln^2(x+y) d\sigma$,其中 $D = \{(x,y)|\ 3 \le x \le 5, 0 \le y \le 1\}$.

解 因为对于 $\forall (x,y) \in D$, 有 $3 \ge x + y \ge 6$. 故 $\ln(x+y) > 1$, 从而有 $I_2 \ge I_1$.

3. 利用二重积分的性质, 估计下列积分 1 的值:

(1)
$$I = \iint_D xy(x+y)d\sigma$$
, $\not\equiv P D = \{(x,y)|\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$

解 由 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, 有 $0 \le x + y \le 2$. 从而 $0 \le xy(x + y) \le 2$. 于是有 $0 \le I \le 2$.

(2)
$$I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$$
, $\sharp \Phi D = \{(x,y) | 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$.

解 由 $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$, 有 $0 \le \sin^2 x \sin^2 y \le 1$. 于是有 $0 \le I \le \pi^2$.

(3)
$$I = \iint_D (x+y+1) d\sigma$$
, #\Phi $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

解 由 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, 有 $1 \le x + y + 1 \le 4$. 于是有 $2 \le I \le 8$.

(4)
$$I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$$
, $\not\exists \ P = \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \le 4\}.$

解 由 $x^2 + y^2 \le 4$, 有 $9 \le x^2 + 4y^2 + 9 \le 25$. 从而有 $36\pi \le I \le 100\pi$.

4. 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq r^2\}$ (r>0), f(x,y) 为 D 上的连续函数,求 $\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$

解 由积分中值定理,存在 $(\xi,\eta) \in D$,使得

$$\begin{split} \lim_{r\to 0} &\frac{1}{\pi r^2} \iint_D f(x,y) \mathrm{d}\sigma = \lim_{\tau\to 0} &\frac{1}{\pi r^2} f(\xi,\eta) \iint_D \mathrm{d}\sigma \\ &= \lim_{r\to 0} &\frac{1}{\pi r^2} f(\xi,\eta) \pi r^2 = f(0,0). \end{split}$$

习 题 9-2

1, 计算下列二重积分:

(1)
$$\iint_D (x+y) dxdy$$
, $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$.

$$\mathbf{H} \quad \iint\limits_{D} (x+y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{0}^{2} (x+y) \, \mathrm{d}y = \int_{0}^{2} (xy + \frac{y^{2}}{2})|_{y=0}^{2} \, \mathrm{d}x = 8.$$

(2)
$$\iint_{D} \cos(x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \not \pm \Phi \ D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y, 0 \le y \le \pi\}.$$

(3)
$$\iint xy^2 dx dy$$
, 其中 D 是由直线 $y = x, x = 2$ 以及双曲线 $xy = 1$ 所围成的区域.

解
$$\iint_D xy^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_1^2 \, \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^x xy^2 \, \mathrm{d}y = \frac{19}{10}.$$

(4)
$$\iint_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
, 其中 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(2,1)$ 为顶点的三角形区域.

$$\mathbf{H} \quad \iint\limits_{\Omega} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \, \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{2x} x \, \mathrm{d}y + \int_1^2 \, \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{-x+3} x \, \mathrm{d}y = \frac{3}{2}.$$

(5)
$$\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y, \not\equiv \forall D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

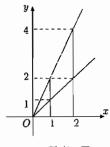
(6)
$$\iint_D (x+y) \operatorname{sgn}(x-y) dx dy$$
, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, for

$$\operatorname{sgn}(x-y) = \begin{cases} 1, & x > y, \\ 0, & x = y, \\ -1, & x < y. \end{cases}$$

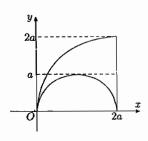
2. 描绘下列积分区域 D 的图形, 并改变累次积分的次序:

(1)
$$I = \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$$
.

$$\mathbf{H} \quad I = \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y) dx.$$



题 (1) 图



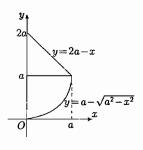
题 (2) 图

(2)
$$I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy$$
, $(a > 0)$.

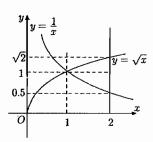
$$\mathbf{f} \quad I = \int_a^{2a} \, \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f \, \mathrm{d}x + \int_0^a \, \mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f \, \mathrm{d}x + \int_0^a \, \mathrm{d}y \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f \, \mathrm{d}x.$$

(3)
$$I = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y) dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{2a-y} f(x,y) dx$$
, $(a > 0)$.

解
$$I = \int_0^a dx \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{2a-x} f(x,y) dy.$$



题 (3) 图



题 (4) 图

(4)
$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x, y) dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^{2}}^{2} f(x, y) dx.$$

解
$$I = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\underline{1}}^{\sqrt{x}} f(x,y) \,\mathrm{d}y.$$

3. 利用极坐标计算下列二重积分:

(1)
$$I = \iint\limits_{D} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$
, # $\Phi D = \{(x, y) \mid \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}$.

解
$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} \sin r \cdot r dr = -6\pi^2.$$

解
$$I = \int_{\underline{\pi}}^{\pi} 3d\theta \int_{1}^{3} \theta \cdot dr = \frac{\pi^{2}}{6}.$$

(3)
$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$
, #\Phi $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2x\}$.

$$\widetilde{\mathbb{H}} \quad I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} r^2 \mathrm{d}r = \frac{32}{9}.$$

(4)
$$I = \iint_D |x^2 + y^2 - 4| dx dy$$
, $\not\exists \ P = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 9\}$.

解
$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2)r dr + \int_0^{2\pi} \int_2^3 (r^2-4)r dr = \frac{41}{2}\pi.$$

(5)
$$I = \iint_D y dx dy$$
, $\not= P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le ax, x^2 + y^2 \le ay\}$, $(a > 0)$.

$$\mathbf{\widetilde{H}} \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sin\theta} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r = \frac{a^3}{16} (\frac{\pi}{2} - 1).$$

4. 将下列二次积分化为极坐标系中的累次积分:

(1)
$$I = \int_0^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx, (R>0).$$

解
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin\theta} f(r)rdr.$$

(2)
$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$$

解
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta}}^{2 \sin \theta} f(r^2) r dr.$$

(3)
$$I = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy, (R>0).$$

解
$$I = \int_0^{\arctan R} d\theta \int_0^R f(\tan \theta) r dr.$$

5. 求平面闭区域 $D=\{(\rho,\theta)|\ \rho\geq\cos\theta, \rho\geq\sqrt{3}\sin\theta, \rho\leq1+\cos\theta, 0\leq\theta\leq\pi/2\}$ 的面积.

解 解方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \cos \theta, \\ \rho = \sqrt{3} \sin \theta \end{array} \right. \stackrel{E_7}{=} \left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 + \cos \theta, \\ \rho = \sqrt{3} \sin \theta, \end{array} \right.$$

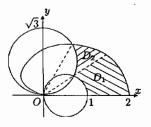
得两个交点的极角 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 和 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 将区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分如图所示,其中

$$D_1: \cos \theta \le \rho \le 1 + \cos \theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6};$$

 $D_2: \sqrt{3}\sin\theta \leq \rho \leq 1 + \cos\theta, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$

于是所求平面区域的面积为

$$S = \iint_{D} d\sigma = \iint_{D_1} d\sigma + \iint_{D_2} d\sigma = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_{\cos\theta}^{1+\cos\theta} \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\sqrt{3}\sin\theta}^{1+\cos\theta} \rho d\rho$$
$$= \left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



题 5 图

6. 作适当的变量代换, 求下列二重积分:

(1)
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \mbox{其中} \ D=\{(x,y) \mid x^2+4y^2\leq 1\};$$
解 令
$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=\frac{1}{2}r\sin\theta \end{cases} \ 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

则 $dxdy = \frac{1}{2}rd\theta dr$. 于是

$$\begin{split} \iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'}(r^2\cos^2\theta + \frac{1}{4}r^2\sin^2\theta)\frac{1}{2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{4}\iint\limits_{D'}(3r^2\cos^2\theta + r^2)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\\ &= \frac{5}{32}\pi, \end{split}$$

其中 $D': 0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$.

(2)
$$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\,\mathrm{d}\sigma,$$
 其中 D 是由橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 围成区域;

解令

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

则

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 ab \mathrm{d}r = \frac{1}{2}ab\pi.$$

(3) $\iint\limits_D (x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是平行四边形, 它的四个顶点是 $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$.

解
$$\Leftrightarrow$$
 $\left\{ \begin{array}{ll} u=x-y \\ v=x+y \end{array} \right.$,则 $D \leftrightarrow D': \left\{ \begin{array}{ll} -\pi \leq u \leq \pi \\ \pi \leq v \leq 3\pi \end{array} \right.$

$$\iint\limits_{D}(x-y)^2\sin^2(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}u^2\sin^2v\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi^4}{3}.$$

7. 试作适当变换, 把二重积分化为定积分:

$$\iint\limits_{D}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\}.$

解 令
$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}, 则 D \leftrightarrow D' : \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}.$$
 于是
$$\iint_D f(x+y) dx dy = \iint_{D'} f(u) \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \int_{-1}^1 f(u) du.$$

习 题 9-3

1. 利用三重积分的性质, 估计下列积分 1 的值:

(1)
$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$
, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, R > 0\}$.

解 由 $0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, 有 $0 \le I \le \frac{4}{3}\pi R^5$.

(2)
$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{1 + x^4 + y^4 + z^4} dV$$
, $\not\equiv \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

解 由 $0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, 有 $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^4+y^4+z^4} \le 1$. 从而有 $\frac{2}{3}\pi \le I \le \frac{4}{3}\pi$.

(3)
$$I = \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} dV$$
, 其中 $\Omega = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$, a,b,c 满足 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > R$, $R > 0$.

解 山

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R} \leq \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R},$$

有.

$$\frac{4\pi R^3}{3(\sqrt{a^2+b^2+c^2}+R)} \leq I \leq \frac{4\pi R^3}{3(\sqrt{a^2+b^2+c^2}-R)}.$$

2. 设
$$f(x,y,z)$$
 是 $\Omega = \{(x,y,z) \, | \, x^2 + y^2 + z^2 \le r^2 \}$ $(r>0)$ 上的连续函数,求
$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^3} \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) \mathrm{d}V.$$

解 由积分中值定理,有

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^3} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^3} f(\xi, \eta, \zeta) \iiint_{\Omega} dV$$
$$= \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^3} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$= \frac{4}{3} f(0, 0, 0),$$

其中 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$.

3. 将重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为直角坐标下的累次积分,其中 Ω 分别为:

(1)
$$\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1 \}.$$

$$\mathbf{R} \cdot I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x+y+z) \mathrm{d}z.$$

(2)
$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \le z \le x^2 + y^2, x + y \le 1, x, y \ge 0\}.$$

P
$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x+y+z) dz.$$

(3) 由
$$y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, x + z = \pi/2$$
 所围成的闭区域.

$$\text{.} \ \mathbf{f} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} f(x, y, z) \mathrm{d}z.$$

4. 将下列三次积分改为形如
$$\int \mathrm{d}z \int \mathrm{d}y \int f(x,y,z) \mathrm{d}x$$
 的三次积分:

(1)
$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^1 f(x, y, z) dz;$$

解 (1) 原式 =
$$\int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx$$
.

(2)
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z) dz$$
.

解 原式 =
$$\int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z) dx$$
.

5. 计算下列三重积分:

(1)
$$I = \iiint_{\Omega} y \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$
, 其中 Ω 是由 $z = 0, z = y, y = 1$ 及 $y = x^2$ 所围成的闭区域.

(2)
$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz$$
, 其中 Ω 是由 $x = 0, y = 0, z = 0$ 及 $x+y+z = 0$

1 所围成的闭区域。

$$\mathbf{F} I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

(3)
$$I=\iiint_\Omega y\cos(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
,其中 Ω 是由 $y=\sqrt{x},y=0,z=0$ 及 $x+z=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域.

$$\mathbf{F} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} y \cos(z + x) dz = \frac{1}{16} \pi^2 - \frac{1}{2}.$$

$$(4) \ I = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{y \sin z}{1+x^2} - 1\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z, \ \sharp \, \, \, \Omega : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq \pi.$$

$$\mathbf{FF} \quad I = \iiint_{\Omega} \frac{y \sin z}{1 + x^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z - 4\pi = -2\pi.$$

(5)
$$I = \iiint_{\Omega} z dV$$
, # $\Omega = \{(x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1, z \ge 0 \right\}$.

是有

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 cr\cos\varphi \cdot abcr^2 \sin\varphi \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}abc^2.$$

6. 证明
$$\int_0^x dv \int_0^v du \int_0^u f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$
.

证 积分区域是 t=0. t=u, u=v 及 v=x 所围成的四面体,则

$$\int_0^x dv \int_0^v du \int_0^u f(t)dt = \int_0^x dt \int_t^x du \int_u^x f(t)dv$$
$$= \int_0^x dt \int_t^x f(t)(x-u)du = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

7. 利用柱坐标计算下列三重积分:

(1)
$$\iiint_{\Omega} z dV$$
, $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{2 - x^2 - y^2} \}$.

解 令
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, 则$$

$$z = z$$

$$\iiint_{\Omega} z \, dV = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} dr \int_{r^{2}}^{\sqrt{2-r^{2}}} z r dz = \frac{7}{12}\pi.$$

(2)
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV, \ \Omega = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \le z \le 2\}.$$

解 利用柱坐标变换得

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{d}r \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 \cdot r \mathrm{d}z = \frac{16}{3}\pi.$$

(3)
$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} dV, \ \Omega = \{(x,y,z) | \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}.$$

解 与(2)的解法类似,有

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, \mathrm{d}V = 2\pi (\frac{1}{2} \ln 2 - 1 + \frac{\pi}{4}).$$

(4)
$$\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dV$$
, $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \le x \le \sqrt{2y - y^2}, 0 \le z \le a\}$

解

7

$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V = \frac{8}{9}a^2.$$

(5)
$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$$
, 其中 Ω 是由柱面 $y=\sqrt{1-x^2}$ 及平面 $y=0$. $z=0,x+y+z=0$

4 所围成的闭区域.

解

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}.$$

8. 利用球坐标计算下列积分:

(1)
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV$$
, $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

解

$$\iiint_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi - \frac{1}{2}.$$

(2)
$$\iiint_{\Omega} z \, dV, \ \Omega = \{(x,y,z) | \ x^2 + y^2 + (z-a)^2 \le a^2, x^2 + y^2 \le z^2\}, (a>0)$$

$$\iiint_{\Omega} z \, \mathrm{d}V = \frac{7}{6} \pi a^4.$$

(3)
$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV, \quad \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \le 1, z \ge 1, y \ge 0\}$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, \mathrm{d}V = \int_0^{\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \, \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r$$
$$= (\frac{7}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{3})\pi.$$

(4)
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

解

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^{2}}} dy \int_{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}^{\sqrt{2-x^{2}-y^{2}}} z^{2} dz$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{0}^{\sqrt{2}} r^{2} \cos^{2} \varphi r^{2} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{15}\pi - \frac{1}{15}\pi.$$

9. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dV$, 其中 Ω 是由 $x^2+y^2=1$ 及 z=1,z=0,x=0,y=0 所围成的位于第一卦限内的闭区域.

解 利用柱坐标变换

$$\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \int_0^1\mathrm{d}r \int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}z = \frac{1}{8}.$$

(2) $I=\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}V$,其中 Ω 为两个球体 $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leq 2Rz$ 的公共部分 (R>0)

解 解法一: 利用柱坐标变换。

解法二: 两球面的交线为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}R^2, z=\frac{R}{2}$. 过 z 轴上区间 [0,R] 中任一点 z 做 垂直于 z 轴的平面截 Ω 得平面区域 D(z). 当 $0 \le z \le \frac{R}{2}$ 时,D(z) 的面积为 $\pi(2Rz-z^2)$; 当 $\frac{R}{2} \le z \le R$ 时,D(z) 的面积为 $\pi(R^2-z^2)$. 于是

$$\begin{split} I &= \int_0^R z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi (2Rz - z^2) \mathrm{d}z + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2) \mathrm{d}z \\ &= \frac{59}{480} \pi R^5. \end{split}$$

(3)
$$\iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dV, \not \sharp \Phi \Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

解 原式 = 0. (提示: 利用函数的奇偶性.)

(4) $\iint\limits_{\Omega}(x^5+y^3+z)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围的空间闭区域。

解 由函数的奇偶性,有

$$\begin{split} & \iiint_{\Omega} (x^5 + y^3 + z) \, \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} z \, \mathrm{d}V \\ & = \int_{0}^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \, \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\sqrt{2}} \dot{r} \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \end{split}$$

(5) $\iint\limits_\Omega (x+y+z)^2 \mathrm{d}V$,其中 Ω 是拋物面 $z=x^2+y^2$ 与半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围的空间闭区域。

解 由积分区域的对称性与被函数的奇偶性知

$$\iiint\limits_{\Omega} (2xy + 2yz + 2xz) \, \mathrm{d}V = 0.$$

因此

$$\begin{split} & \iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 \, \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2) \, \mathrm{d}V \\ & = \int_0^1 \, \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} (\rho^2+z^2) \rho \, \mathrm{d}\rho + \int_1^{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2-z^2}} (\rho^2+z^2) \rho \, \mathrm{d}\rho \\ & = \frac{5}{12}\pi + \frac{1}{10} (16\sqrt{2} - 19)\pi = \left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{89}{60}\right)\pi. \end{split}$$

10 求下列空间闭区域的体积 V:

(1)
$$\Omega$$
 由 $z = \frac{1}{2}, 2z = x^2 + y^2$ 所围而成.

解

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d} heta\int_0^1\mathrm{d}r\int_{rac{r^2}{2}}^{rac{1}{2}}r\mathrm{d}z=rac{\pi}{4}.$$

(2)
$$\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \le 2az, x^2 + y^2 + z^2 \le b^2 \}, (a > b > 0).$$

$$V = \iiint_{\Omega} dV = \int_0^b dz \iint_{D(z)} dx dy$$
$$= \int_0^{\frac{b^2}{2a}} \pi (2az - z^2) dz + \int_{\frac{b^2}{2a}}^b \pi (b^2 - z^2) dz$$
$$= \frac{1}{12a} \pi b^3 (8a - 3b),$$

其中 D(z) 为在区间 [0,b] 上一点 z 处垂直于 z 轴的截面的面积.

(3) Ω 由曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ 与三个坐标面所围而成.

解 做变量代换: $x = r^2 \sin^4 \varphi \cos^4 \theta$, $y = r^2 \sin^4 \varphi \sin^4 \theta$, $z = r^2 \cos^4 \varphi$, 则

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = 32r^5 \sin^7 \varphi \cos^3 \varphi \sin^3 \theta \cos^3 \theta.$$

于是

$$V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \varphi \cos^3 \varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^5 \mathrm{d}r = \frac{1}{90}.$$

11. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 被曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 分成的两部分的体积之比.

解 球体的体积为 $\frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$, 球体与抛物面所围成的体积

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{\sqrt{3}a} \mathrm{d}r \int_{2a-\sqrt{4a^2-r^2}}^{\frac{1}{a}(4a^2-r^2)} r \mathrm{d}z = \frac{37}{6}\pi a^3.$$

两部分的体积之比为,

$$\left(\frac{32}{3}\pi a^3 - \frac{37}{6}\pi a^3\right) : \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{27}{37}.$$

- 1. 计算下列曲面的面积:
- (1) 抛物面 $z = 1 x^2 y^2$ 在 $z \ge 0$ 部分曲面.

$$\mathbf{FF} S = \iint\limits_{D_{\pi y}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

(2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被二平面 $y = \frac{R}{4}$ 与 $y = \frac{R}{2}(R > 0)$ 所央部分的曲面.

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + {z_x'}^2 + {z_y'}^2} dx dy = R \iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$
$$= R \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{3}R}^{\frac{\sqrt{15}}{4}R} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr = \frac{\pi}{2} R^2.$$

(3) 圖柱面 $y^2 + z^2 = 2z$ 被圆锥面 $y^2 + z^2 = x^2$ 所裁出的部分的曲面.

解 设 $\Sigma: y=\sqrt{2z-z^2}$ 在 xOz 平面上的投影为 D, 其中 $D: \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{2z} \leq x \leq \sqrt{2z} \\ 0 \leq z \leq 2 \end{array} \right.$ 所求的曲面面积

$$S = 2 \iint_{D} \sqrt{1 + {y'_x}^2 + {y'_z}^2} d\sigma = 2 \iint_{D} \sqrt{\frac{1}{2z - z^2}} d\sigma$$
$$= 2 \int_{0}^{2} dz \int_{-\sqrt{2z}}^{\sqrt{2z}} \sqrt{\frac{1}{2z - z^2}} dx = 16.$$

(4) 圆锥面 $x^2 = y^2 + z^2$ 包含在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 内部的曲面.

解 曲面 $\Sigma : x = \sqrt{y^2 + z^2}$ 在 yOz 平面上的投影为

$$D_{yz}: \begin{cases} y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

所求曲面面积

$$S = 2 \iint_{D} \sqrt{1 + {x'_y}^2 + {x'_z}^2} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = 2 \iint_{D} \sqrt{1 + 1} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

2. 计算由 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围的平面薄片的质量, 其密度 $\mu = xy$.

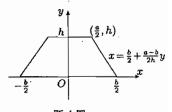
解
$$m = \iint\limits_{D_{xy}} xy dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy dy = \frac{1}{12}.$$

3. 设一形体 Ω 由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成, 其上任一点 (x,y,z) 处的密度是该点到 z 轴的距离, 试求 Ω 的质量.

M =
$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dr \int_r^{6-r^2} r^2 dz = \frac{56}{5}\pi$$
.

4. 求高为 h、底分别为 a 和 b 的等腰梯形均匀 薄片的形心。

解 选择坐标系如图. 设形心坐标为 $(\overline{x}, \overline{y})$, 则由于薄片关于 y 轴对称, 故 $\overline{x} = 0$. 因薄片的的面积 $S = \frac{1}{5}(a+b)h$, 故



$$\overline{y} = \frac{1}{S} \iint_D y d\sigma = \frac{4}{(a+b)h} \int_0^h dy \int_0^{\frac{1}{2}(b+\frac{a-b}{h}y)} y dx = \frac{2a+b}{3(a+b)}h.$$

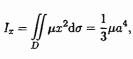
5. 设由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az(a > 0)$ 所围的立体,其上各点的密度与该点到原点的距离成正比 (比例常数 k > 0), 求立体的质心.

解 由于密度均匀,又球体关于 yOz 平面, xOz 平面对称,故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \mathrm{d}V} = \frac{8}{7}a.$$

6. 求边长为 a 的正方形均匀薄片对于其一边的转动惯量 (a > 0).

解 建立选择坐标系如图,则



题6图

其中 μ 是薄片的质量面密度.

7. 求密度为 1, 由 $y^2 = ax$ 与 x = a(a > 0) 所围成的平面图形对于直线 y = -a 的. 转动惯量.

解
$$I = \iint_D (y+a)^2 d\sigma = \int_{-a}^a dy \int_{\frac{y^2}{a}}^a (y+a)^2 dx = \frac{8}{5}a^4.$$

8. 设物体 Ω 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 z=2x 所围成,其上各点的密度等于该点到 xOz 平面距离的平方,求该物体对 z 轴的转动惯量.

$$\underset{\Omega}{\mathbf{H}} I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) y^2 \mathrm{d}V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{2\cos\theta} \mathrm{d}r \int_{r^2}^{2r\cos\theta} r^2 \cdot r^2 \sin^2\theta \cdot r \mathrm{d}z = \frac{1}{8}\pi.$$

9. 设密度为 1 的均匀半圆形薄片占据坐标面 xOy 上的区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq\sqrt{a^2-x^2}\}$, 求薄片对位于点 $M_0(0,0,b)$ 处单位质量质点的引力 F, 其中 a>0,b>0.

解 记引力 $\overrightarrow{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 设 d σ 为半圆内的面积元素, 在 d σ 内任取一点 Q(x,y,0), 则 d σ 对质点 M_0 的引力大小为

$$\mathrm{d}F = G \cdot rac{mM}{rac{\pi}{2}} \cdot rac{\mathrm{d}\sigma}{b^2 + x^2 + y^2}$$
 (G为引力系数).

引力方向与 (x, y, -b) 一致,于是 dF 在三个坐标轴上的分量

$$\mathrm{d}F_x = \frac{2GmM}{\pi a^2} \cdot \frac{x}{\left(b^2 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma$$

$$\mathrm{d}F_x = \frac{2GmM}{\pi a^2} \cdot \frac{y}{(b^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma$$

$$\mathrm{d}F_x = \frac{2GmM}{\pi a^2} \cdot \frac{-b}{\left(b^2 + x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma,$$

从而

$$\begin{split} F_x &= \frac{2GmM}{\pi a^2} \iint\limits_{D} \frac{x}{(b^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma = 0 \\ F_y &= \frac{2GmM}{\pi a^2} \iint\limits_{D} \frac{y}{(b^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma = \frac{4GmM}{\pi a^2} \left(\ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ F_z &= -\frac{2GmMb}{\pi a^2} \iint\limits_{D} \frac{1}{(b^2 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}\sigma = \frac{2GmM}{\pi a^2} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - 1 \right), \\ \vec{\mathsf{W}} \; k &= \frac{2GmM}{\pi a^2}, \; \vec{\mathsf{W}} \end{split}$$

$$\vec{F} = \left(0, \; \; 2k \left(\ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \; \; \pi b k \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{b} \right) \right). \end{split}$$

习 题 9-5

1.
$$\not = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 + \alpha^2}$$

解 被积函数
$$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$$
 在 $D=\{(x,\alpha) | 0 \le x \le 1, -1 \le \alpha \le 1\}$ 上连续, 故

$$\begin{split} \lim_{\alpha \to 0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 + \alpha^2} &= \int_0^1 \left(\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{1 + x^2 + \alpha^2} \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \pi. \end{split}$$

2. 求
$$\int_0^a \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$$
 $(a>0)$ 的位.

解 记
$$I(a) = \int_0^a \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$$
,则

$$\begin{split} I'\left(a\right) &= \int_0^a \left(\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)' \,\mathrm{d}x + \arctan\sqrt{\frac{a-a}{a+a}} \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a} \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} d\left(a^2-x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{split}$$

由此得到
$$I(a) = \frac{1}{2}a + C$$
. 再由 $I(0) = 0$ 得 $C = 0$. 因此 $I(a) = \frac{a}{2}$.

3. 证明
$$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx$$
 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛,其中 $\alpha_0 > 0$.

证 当 $0 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty, x \ge 0$ 时

$$|xe^{-\alpha x}| = xe^{-\alpha x} < xe^{-\alpha_0 x},$$

而 $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha_0 x} dx = \frac{1}{\alpha_0^2}$, 故由魏尔斯特拉斯判别法知 $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x} dx$ 在 $[\alpha_0, +\infty)$ 上一致收敛.

4. if
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos xy dy$$
,

- (1) 证明 2F'(x) + xF(x) = 0;
- $(2) \not \ll F(x).$

证 (1) 记 $f(x,y) = e^{-y^2} \cos xy$, 则 $f_x(x,y) = -ye^{-y^2} \sin xy$. 显然 f(x,y), $f_x(x,y)$ 连续. 而对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$, 有

$$\left| e^{-y^2} \cos xy \right| \le e^{-y^2}, \left| -ye^{-y^2} \sin xy \right| \le ye^{-y^2}.$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$, $\int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy$ 收敛, 所以 $\int_0^{+\infty} f(x,y) dy$, $\int_0^{+\infty} f_x(x,y) dy$ 一致收敛, 因此 F(x) 可微,且

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} f_x(x, y) \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(-ye^{-y^2} \right) \sin xy \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \sin (xy) \, \mathrm{d} \left(e^{-y^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}x \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos xy \, \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}xF(x).$$

于是 2F'(x) + xF(x) = 0;

(2) 由
$$2F'(x) + xF(x) = 0$$
 可知

$$\frac{\mathrm{d}F\left(x\right) }{F\left(x\right) }=-\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,$$

所以 $F(x) = Ce^{-\frac{1}{4}x^2}$, C 为常数,又 $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 所以 $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}.$

复习题九

1. 选择题:

(1) 设
$$I_1 = \iint_D \ln^3(x+y) d\sigma$$
, $I_2 = \iint_D (x+y)^3 d\sigma$, $I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^3 d\sigma$, 其中 D 由 $x = 0, y = 0, x + y = \frac{1}{2}, x + y = 1$ 围成,则 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序为(). (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 \le I_2 \le I_1$. (C) $I_1 < I_3 < I_2$. (D) $I_3 \le I_1 \le I_2$. 解 当 $\frac{1}{2} \le x + y \le 1$ 时, $\ln(x+y) \le 0$, $\sin(x+y) \ge 0$,且 $\sin(x+y) \le x + y$. 因此

$$\frac{1}{2}$$
 当 $\frac{1}{2}$ $\leq x+y \leq 1$ 时, $\ln(x+y) \leq 0$, $\sin(x+y) \geq 0$,且 $\sin(x+y) \leq x+y$. 因此

$$\ln^3(x+y) \le \sin^3(x+y) \le (x+y)^3.$$

由此得到 $I_1 < I_3 < I_2$.

(2) if
$$I_i = \iint\limits_{D_i} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$$
, $i = 1, 2, 3$, $\not = 0$, $i = 1, 2, 3$, $\not = 0$, $i = 1, 2, 3$, $i =$

(A)
$$I_1 < I_2 < I_3$$
.(B) $I_3 \le I_2 \le I_1$.(C) $I_1 < I_3 < I_2$.(D) $I_3 \le I_1 \le I_2$.

解 对任意 x, y 都有 $e^{-(x^2+y^2)} > 0$, 而 $D_1 \subset D_3 \subset D_2$, 故 $I_1 < I_3 < I_2$.

(3) 设
$$f(x,y)$$
 是连续函数,则 $\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 等于 ().

(A)
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$$
. (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy$.

(C)
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$$
. (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_x^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx$.

解 用直角坐标表示积分区域为 $D: y \le x \le \sqrt{1-y^2}, 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此

$$\int_0^{\pi/4} \,\mathrm{d}\theta \int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \,\mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) \,\mathrm{d}x.$$

(4) 设函数
$$f(x,y)$$
 连续, 则 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^2 f(x,y) \mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^{4-y} f(x,y) \mathrm{d}x = ($).

(A)
$$\int_{1}^{2} dx \int_{1}^{4-x} f(x,y) dy$$
. (B) $\int_{1}^{2} dx \int_{x}^{4-x} f(x,y) dy$.

(C)
$$\int_{1}^{2} dy \int_{1}^{4-y} f(x,y) dx$$
. (D) $\int_{1}^{2} dy \int_{y}^{2} f(x,y) dx$.

解 两个积分的积分区域之和为 $D: 1 \le x \le 4-y, 1 \le y \le 2$. 因此

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(5) 设
$$f(x)$$
 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2) = ($).
(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

解因

$$F(t) = y \int_{y}^{t} f(x) dx \Big|_{1}^{t} + \int_{1}^{t} y f(y) dy = - \int_{1}^{t} f(x) dx + \int_{1}^{t} y f(y) dy,$$

故

$$F'(t) = -f(t) + tf(t) = (t-1)f(t).$$

因此 F'(2) = f(2).

2. 计算二重积分
$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} d\sigma$$
, 其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 所图成的区域.

47

原式 =
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta \int_{0}^{-2a\sin\theta} \frac{r^{2}}{\sqrt{4a^{2}-r^{2}}} dr$$

= $-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta \int_{0}^{-2a\sin\theta} \frac{4a^{2}-r^{2}-4a^{2}}{\sqrt{4a^{2}-r^{2}}} dr$
= $-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta \int_{0}^{-2a\sin\theta} \sqrt{4a^{2}-r^{2}} dr + 4a^{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} d\theta \int_{0}^{-2a\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{4a^{2}-r^{2}}} dr$
= $-\frac{\pi^{2}a^{2}}{16} - \frac{1}{2}a^{2} + \frac{\pi^{2}a^{2}}{8} = a^{2} \left(\frac{\pi^{2}}{16} - \frac{1}{2}\right)$.

3. 计算二重积分 $I=\iint_D {
m e}^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2+y^2) {
m d}\sigma$,其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq\pi\}$.

4.
$$\not x \iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma$$
, $\not x + D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\} \cap \{(x,y) \mid (x+1)^2+y^2 \ge 1\}$.

解 由函数的奇偶性,有 $\iint\limits_D \left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$. 设 $D_1:x^2+y^2\leq 4,\ D_2:(x+1)^2+y^2\leq 1,$ 则

$$\iint_{D} \sqrt{x^{2} + y^{2}} d\sigma = \iint_{D_{1}} \sqrt{x^{2} + y^{2}} d\sigma - \iint_{D_{2}} \sqrt{x^{2} + y^{2}} d\sigma$$
$$= \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{2} r^{2} dr - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{-2\cos\theta} r^{2} d\theta = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{9}.$$

即,原式 = $\frac{16}{9}(3\pi - 2)$.

5. 设 f(x,y) 连续可微, 求

$$I = \iint\limits_{D} rac{xf_y'(x,y) - yf_x'(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$.

解 作极坐标变换 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$. 因为

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = -\rho \sin \theta f_x' + \rho \cos \theta f_y' = x f_y' - y f_x',$$

所以

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\rho = 0.$$

6. 求证 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ln2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$, 其中 D 为曲线 xy=1,xy=2 与直线 x=y,y=4x 在第一条限所围的闭区域.

证 令 $u=xy, v=\frac{y}{x},$ 则 $D \leftrightarrow D': 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 4.$ 由 $x=\sqrt{\frac{u}{v}}, y=\sqrt{uv}$ 得到

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2v}.$$

于是

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_1^2 du \int_1^4 f(u) \frac{1}{2v} dv = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

7. 证明 $\int_a^b dx \int_a^x (x-y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b-y)^{n-1} f(y) dy$, 其中 n 为大于 1 的正整数.

证 交换积分次序得

$$\int_{a}^{b} dx \int_{a}^{x} (x - y)^{n-2} f(y) dy = \int_{a}^{b} dy \int_{y}^{b} (x - y)^{n-2} f(y) dx$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{1}{n-1} (x - y)^{n-1} \Big|_{y}^{b} f(y) dy$$
$$= \frac{1}{n-1} \int_{a}^{b} (b - y)^{n-1} f(y) dy.$$

8. 证明

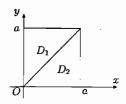
$$2\int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = \left[\int_0^a f(x) dx\right]^2,$$

其中 f(x) 为连续函数.

证 如图,设 $D=D_1\cup D_2$,其中

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le a, x \le y \le a\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le x\}.$$



题8图

因此有

$$\iint\limits_{D} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{1}} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_{2}} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而

$$\left[\int_0^a f(x) \mathrm{d}x\right]^2 = \int_0^a f(x) \mathrm{d}x \int_0^a f(y) \mathrm{d}y = \iint_D f(x) f(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

又

$$\iint_{D_2} f(x)f(y)dxdy = \int_0^a dy \int_y^a f(x)f(y)dx$$
$$= \int_0^a dx \int_x^a f(x)f(y)dy = \iint_{D_2} f(x)f(y)dxdy.$$

即

$$\int_0^a f(x) \mathrm{d}x \int_0^x f(y) \mathrm{d}y = \int_0^a f(x) \mathrm{d}x \int_x^a f(y) \mathrm{d}y;$$

从而有

$$2\int_0^a f(x) dx \int_x^a f(y) dy = \left[\int_0^a f(x) dx \right]^2.$$

9. 设 f(x) 是闭区问 [a,b] 上的连续函数,证明不等式

$$\left(\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a) \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

证记

$$\Delta = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$$

$$= \int_a^b dy \int_a^b f^2(x) dx - \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy$$

$$= \iint_D f^2(x) dx dy - \iint_D f(x) f(y) dx dy$$

$$= \iint_D f(x) [f(x) - f(y)] dx dy,$$

其中 $D: a \le x \le b, a \le y \le b$. 只需证明 $\Delta \ge 0$. 上式关于 x 与 y 是对称的,从而可以交换 x 与 y 的位置,有

$$\Delta = \iint\limits_{D} f(y) \left[f(y) - f(x) \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\iint\limits_{D} f(y) \left[f(x) - f(y) \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

将上述二式相加除以 2, 有

$$\Delta = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[f(x) - f(y) \right]^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

从而有 $\Delta \ge 0$, 即

$$\left(\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a) \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

10. 计算三重积分 $\iint\limits_\Omega x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=x^2+y^2$ 围成的有界区域.

解 原式 =
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^r r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 dr = \frac{\pi}{42}$$
.

11. 已知

$$F(t) = \iiint\limits_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z,$$

其中 f 为可微函数, $\Omega = \{(x,y,z) \, | \, x^2 + y^2 + z^2 \le t^2 \}$ (t > 0), 求 F'(t).

解 利用球坐标变换得

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 \sin\varphi dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r^2) dr.$$

因此

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

12. 设函数 f(u) 具有连续导数, 且 f(0) = 0, 求

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz,$$

其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le t^2\}$ (t > 0):

解

原式 =
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\pi t^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(r)r^2 \sin\varphi dr$$
=
$$\lim_{t \to 0} \frac{2\pi}{\pi t^4} \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^t f(r)r^2 dr$$
=
$$\lim_{t \to 0} \frac{4\pi}{\pi t^4} \int_0^t f(r)r^2 dr$$
=
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)t^2}{t^3} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = f'(0).$$

13. 设 Ω 为曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ (a>0) 所围空间闭区域,该求 Ω 的体积和表面积.

解 体积为

$$V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \mathrm{d}r \int_{\frac{a}{r^2}}^{2a-r} r \mathrm{d}z = \frac{5}{6}\pi a^3.$$

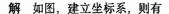
令 $S=S_1+S_2$, 其中 $S_1:z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$, $S_2:z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$. S_1 与 S_2 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leq a^2$.

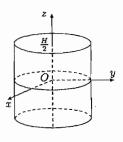
$$\begin{split} S_1 &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{1}{a} \iint_D \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \sqrt{a^2 + 4r^2} r \mathrm{d}r = \frac{1}{6} \pi a^2 \left(5\sqrt{5} - 1 \right). \\ S_2 &= \iint_D \sqrt{2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \sqrt{2} \pi a^2. \end{split}$$

所以 Ω 的表面积

$$S = \frac{1}{6}\pi a^2 \left(5\sqrt{5} - 1\right) + \sqrt{2}\pi a^2.$$

- 14. 均匀圆柱体的底面半径为 R, 高为 H (R, H > 0), 试求其对于
- (1) 通过圆柱体中心且平行于母线的轴的转动惯量;
- (2) 通过圆柱体中心且垂直于母线的轴的转动惯量.





题 14 图

$$\begin{split} I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \mathrm{d}r \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} r^3 \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2} \pi H R^4, \\ I_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + x^2) \mathrm{d}V = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mathrm{d}z \int_{-R}^R \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} (y^2 + z^2) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{12} \pi H R^2 (3R^2 + H^2). \end{split}$$

15. 在第一卦象内作旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 的切平面, 使得该切平面与旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2(x>0,y>0)$ 及三个坐标面所围成的体积最小, 求切点的坐标.

解 设 $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 为抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 上的一点, M_0 处的切平面方程为

$$2x_0x + 2y_0y + z - (2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0) = 0.$$

抛物面与三个坐标面所围成的立体的体积为

$$\iint\limits_{D_{xy}} (1-x^2-y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}.$$

设在 M_0 处的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积为 V_4 , 则

$$V_4 = \frac{1}{6} \frac{2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0}{2x_0} \cdot \frac{2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0}{2y_0} \cdot (2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0) = \frac{(2 - z_0)^3}{24x_0y_0}.$$

令

$$V = \frac{(2-z_0)^3}{24x_0y_0} - \frac{\pi}{8} + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0 - 1),$$

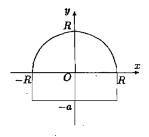
则

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_0} &= -\frac{(2-z_0)^3}{24x_0^2y_0} + 2x_0\lambda = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y_0} &= -\frac{(2-z_0)^3}{24x_0y_0^2} + 2y_0\lambda = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z_0} &= -\frac{3(2-z_0)^2}{24x_0y_0} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= x_0^2 + y_0^2 + z_0 - 1 = 0. \end{aligned}$$

由此解得 $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

16. 在半径为 R 的半圆形均匀薄片的直径上,要接上一个一边与直径等长的同样材料矩形薄片,为了使整个薄片的质心恰好落在圆心上,问接上去的矩形薄片另一边的长度应是多少?

解 设接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为 a, 如图, 建立坐标系. 由题意质心坐标 $\overline{x} = \overline{y} = 0$. 而



$$\overline{y} = rac{1}{\displaystyle\iint\limits_{D} \mathrm{d}x \mathrm{d}y} \iint\limits_{D} y \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

其中 $\iint_{\mathcal{D}} y dx dy = \frac{2}{3}R^3 - Ra^2$. 因为 $\overline{y} = 0$, 故 $\frac{2}{3}R^3 - Ra^2 = 0$, 从而 $a = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

第十章 曲线积分与曲面积分

习 题 10-1

1. 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) \mathrm{d}s$, 其中 L 为星形线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$, 这里 a > 0.

解

$$\oint_{L} \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds = 4a^{\frac{4}{3}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{4} t + \sin^{4} t) 3a \sin t \cos t dt$$

$$= 24a^{\frac{4}{3}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} t d \sin t$$

$$= 4a^{\frac{7}{3}}.$$

(2) $\int_L y^2 ds$, 其中 L 是摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$.

解

$$\begin{split} \int_{L} y^{2} \mathrm{d}s &= \int_{0}^{2\pi} a^{2} (1 - \cos t)^{2} \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos t} \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2} a^{3} \int_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2} a^{3} 2^{\frac{5}{2}} \int_{0}^{2\pi} \sin^{5} \frac{t}{2} \mathrm{d}t \\ &= 16 a^{3} \int_{0}^{\pi} \sin^{5} u \mathrm{d}u = 32 a^{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{5} u \mathrm{d}u \\ &= 32 a^{3} \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{256}{15} a^{3}. \end{split}$$

(3) $\oint_L xy \, ds$, 其中 L 是由直线 x=0,y=0,x=4 及 y=2 所构成的矩形回路.

$$\oint_L xy ds = 0 + \int_0^2 4y dy + \int_0^4 2x dx + 0 = 24.$$

(4) $\mathcal{G}_L(x+y)\,\mathrm{d} s$, 其中 L 为以 O(0,0),A(1,0) 和 B(0,1) 为顶点的三角形围线.

$$\oint_L (x+y) ds = \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{2} dx + \int_0^1 y dy = 1 + \sqrt{2}.$$

-2. 求曲线 $x=3t,y=3t^2,z=2t^3$ 上由点 O(0,0,0) 到点 A(3,3,2) 一段的弧长.

解

$$s = \int_{L} 1 ds = \int_{0}^{1} \sqrt{3^{2} + (6t)^{2} + (6t^{2})^{2}} dt$$
$$= 3 \int_{0}^{1} (2t^{2} + 1) dt = 5.$$

解

$$s = \int_{L} 1 ds = \int_{0}^{x_{0}} \sqrt{1 + (\frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}})^{2} + \left[\frac{-1}{2(1 - x^{2})}\right]^{2}} dx$$

$$= \int_{0}^{x_{0}} \sqrt{1 + \frac{1}{1 - x^{2}} + \frac{1}{4(1 - x^{2})^{2}}} dx = \int_{0}^{x_{0}} \left[1 + \frac{1}{2(1 - x^{2})}\right] dx$$

$$= x_{0} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + x_{0}}{1 - x_{0}} = x_{0} - z_{0}.$$

4. 计算
$$\oint_L \sqrt{2y^2+z^2} \, \mathrm{d}s$$
, 其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x=y$ 的交线. 解
$$\oint_L \sqrt{2y^2+z^2} \, \mathrm{d}s = \int_L a \mathrm{d}s = a \cdot 2\pi a = 2\pi a^2.$$

5. 已知一金属丝成半圆形 $x = a\cos t, y = a\sin t \ (0 \le t \le \pi)$, 其上每一点处的密度等于该点的纵坐标, 求金属丝的质量.

解

$$m = \int_{\mathcal{L}} y ds = \int_{0}^{\pi} a \sin t \sqrt{(-a \sin t)^{2} + (a \cos t)^{2}} dt$$
$$= \int_{0}^{\pi} a^{2} \sin t dt = 2a^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 2a^{2}.$$

6. 设物质曲线 $x=at,y=\frac{a}{2}t^2,z=\frac{a}{3}t^3$ 的线密度为 $\mu(x,y,z)=\sqrt{\frac{2y}{a}},$ 求对应于 $0\leq t\leq 1$ 一段弧的质量,其中a>0.

解

$$\begin{split} m &= \int_{L} \sqrt{\frac{2y}{a}} \, \mathrm{d}s = \int_{0}^{1} t \sqrt{a^{2} + (at)^{2} + (at^{2})^{2}} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{1} at \sqrt{1 + t^{2} + t^{4}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} a \sqrt{\left(t^{2} + \frac{1}{2}\right)^{2} + \frac{3}{4}} \, \mathrm{d}\left(t^{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{t^{2} + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{1 + t^{2} + t^{4}} + \frac{3}{8} \ln\left(t^{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + t^{2} + t^{4}}\right)\right) \Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{a}{8} \left(3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right). \end{split}$$

7. 若 L 为平面曲线 $y = |1-x| - x, 0 \le x \le 2$, 计算 $\int_L (x+y) \, \mathrm{d}s$.

$$\int_{L} (x+y)ds = \int_{0}^{1} (x+1-2x)\sqrt{5}dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx$$
$$= \sqrt{5} \int_{0}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx$$
$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

习 题 10-2

1. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, 其中 L 是顺时针方向的椭圆周 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (a, b > 0) 的上半部分.

解

$$\begin{split} \int_{L} y^{2} dx + x^{2} dy &= \int_{\pi}^{0} \left[b^{2} \sin^{2} t (-a \sin t) + a^{2} \cos^{2} t (b \cos t) \right] dt \\ &= \int_{\pi}^{0} \left(-ab^{2} \sin^{3} t + a^{2}b \cos^{3} t \right) dt \\ &= ab^{2} \int_{0}^{\pi} \sin^{3} t dt + a^{2}b \int_{\pi}^{0} \cos^{3} t dt \\ &= 2ab^{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{3} t dt + 0 = \frac{4}{3}ab^{2}. \end{split}$$

(2) $\int_L (x^2-2xy) \mathrm{d}x + (y^2-2xy) \mathrm{d}y$, 其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从 (-1,1) 到 (1,1) 的一段弧.

$$\int_{L} (x^{2^{-}} - 2xy) dx + (y^{2} - 2xy) dy = \int_{-1}^{1} \left[(x^{2} - 2x^{3}) + (x^{4} - 2x^{3}) \cdot 2x \right] dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x^{2} - 2x^{3} + 2x^{5} - 4x^{4}) dx = -\frac{14}{15}.$$

(3)
$$\oint_L rac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$
,其中 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 解

$$\oint_{L} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^{2} + y^{2}} = \frac{1}{a^{2}} \oint_{L} (x+y)dx - (x-y)dy$$

$$= \frac{1}{a^{2}} \int_{0}^{2\pi} \left[(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)a\cos t \right] dt$$

$$= \frac{1}{a^{2}} \int_{0}^{2\pi} \left(-a^{2}\sin t\cos t - a^{2}\sin^{2}t - a^{2}\cos^{2}t + a^{2}\sin t\cos t \right) dt$$

$$= -\int_{0}^{2\pi} 1 dt = -2\pi.$$

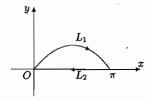
(4) $\oint_L y dx + \sin x dy$, 其中 L 为 $y = \sin x (0 \le x \le \pi)$ 与 x 轴所围成的闭曲线, 方向为顺时针.

解

$$\oint_{L} y dx + \sin x dy$$

$$= \int_{L_{1}} y dx + \sin x dy + \int_{L_{2}} y dx + \sin x dy$$

$$= \int_{0}^{\pi} (\sin x + \sin x \cos x) dx + 0 = 2.$$



(5) $\int_L x^2 dx + z dy - y dz$, 其中 L 为曲线 $x = k\theta$, $y = a\cos\theta$, $z = a\sin\theta$ 上由 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$ 的一段弧.

解

$$\begin{split} &\int_L x^2 \mathrm{d}x + z \mathrm{d}y - y \mathrm{d}z = \int_0^\pi \left[k^2 \theta^2 k + a \sin \theta (-a \sin \theta) - a \cos \theta (a \cos \theta) \right] \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \left(k^3 \theta^2 - a^2 \sin^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{3} k^3 \pi^3 - a^2 \pi. \end{split}$$

(6) $\int_L (y^2-z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, 其中 L 为曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上由 t=0 到 t=1 的一段弧.

解

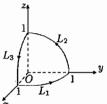
$$\int_{L} (y^{2} - z^{2}) dx + 2yz dy - x^{2} dz = \int_{0}^{1} \left[\left(t^{4} - t^{6} \right) + 2t^{2} \cdot t^{3} 2t - t^{2} \cdot 3t^{2} \right] dt$$

$$= \int_{0}^{1} \left(t^{4} - t^{6} + 4t^{6} - 3t^{4} \right) dt = \int_{0}^{1} \left(3t^{6} - 2t^{4} \right) dt = \frac{1}{35}.$$

(7) $\int_L y dx + z dy + x dz$, 其中 L 为圆柱螺线 $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, z = bt 上由 t = 0 到 $t = 2\pi$ 的一段弧.

$$\int_{L} y dx + z dy + x dz = \int_{0}^{2\pi} \left[a \sin t (-a \sin t) + bt \cdot a \cos t + a \cos t \cdot b \right] dt$$
$$= \int_{0}^{2\pi} \left(-a^{2} \sin^{2} t + abt \cos t + ab \cos t \right) dt = -a^{2} \pi.$$

(8) $\oint_L (y^2-z^2) \mathrm{d}x + (z^2-x^2) \mathrm{d}y + (x^2-y^2) \mathrm{d}z$, 其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的 边界曲线,其方向接曲线依次经过坐标面 xOy,坐标面 yOz 和坐标面 zOx 的方向.



解

$$\oint_{L} (y^{2} - z^{2}) dx + (z^{2} - x^{2}) dy + (x^{2} - y^{2}) dz$$

$$= \int_{L_{1}} + \int_{L_{2}} + \int_{L_{3}} (y^{2} - z^{2}) dx + (z^{2} - x^{2}) dy + (x^{2} - y^{2}) dz$$

$$= \int_{L_{1}} y^{2} dx - x^{2} dy + \int_{L_{2}} z^{2} dy - y^{2} dz + \int_{L_{3}} x^{2} dz - z^{2} dx$$

$$= 3 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin^{2} t \cdot (-\sin t) - \cos^{2} t \cdot \cos t \right] dt$$

$$= -4.$$

2. 一质点受力 $F(x,y)=(2xy^2,2x^2y)$ 的作用,沿平面曲线 $L:x=t,y=t^2$ 从点 A(1,1) 移动到点 B(2,4),求力 F 所作的功.

解
$$W = \int_{AB} 2xy^2 dx + 2x^2y dy = \int_1^2 (2t \cdot t^4 + 2t^2t^2 \cdot 2t) dt = \int_1^2 6t^5 dt = 63.$$

3. 设平面力场 $F = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, L 为圆周 $x = a\cos t, y = a\sin t$ (0 $\leq t \leq 2\pi$), 其中 a > 0. 一质点沿 L 运时针方向运动一周,求力场所作的功.

解

$$W = \oint_{L} \frac{y}{x^{2} + y^{2}} dx - \frac{x}{x^{2} + y^{2}} dy = \oint_{L} \frac{y dx - x dy}{a^{2}}$$
$$= \frac{1}{a^{2}} \int_{0}^{2\pi} [a \sin t(-a \sin t) - a \cos t \cdot a \cos t] dt$$
$$= \int_{0}^{2\pi} (-1) dt = -2\pi.$$

4. 设函数 P(x,y), Q(x,y) 在光滑的有向曲线 L 上连续,证明曲线积分的估计式: $\left|\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y\right| \leq sM,$

其中 s 为 L 的弧长, $M = \max_{(x,y) \in L} \{ \sqrt{[P(x,y)]^2 + [Q(x,y)]^2} \}$.

$$\begin{split} \left| \int_{L} P(x,y) \mathrm{d}x + Q(x,y) \mathrm{d}y \right| &= \left| \int_{L} P(x,y) \cos \alpha + Q(x,y) \sin \alpha \mathrm{d}s \right| \\ &\leq \int_{L} \left| P(x,y) \cos \alpha + Q(x,y) \sin \alpha \right| \mathrm{d}s \\ &= \int_{L} \sqrt{P^{2}(x,y) + Q^{2}(x,y)} \, \mathrm{d}s \\ &\leq M \int_{L} 1 \mathrm{d}s = sM. \end{split}$$

习 题 10-3

1. 应用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L e^x (1-\cos y) dx - e^x (y-\sin y) dy$, 其中 L 为区域 $\{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x\}$ 的正向边界曲线.

解

$$\oint_{L} e^{x} (1 - \cos y) dx - e^{x} (y - \sin y) dy = -\iint_{D} y e^{x} dx dy$$

$$= -\int_{0}^{\pi} e^{x} dx \int_{0}^{\sin x} y dy = -\frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} e^{x} \sin^{2} x dx$$

$$= \frac{1 - e^{\pi}}{5}.$$

(2)
$$\oint_L (x+y) \, \mathrm{d}x - (x-y) \, \mathrm{d}y$$
, 其中 L 为逆时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解

$$\oint_L (x+y) dx - (x-y) dy = \iint_D (-1-1) dx dy = -2\pi ab.$$

 $(3)\oint_L\left(x^3y+{
m e}^y
ight){
m d}x+\left(xy^3+x{
m e}^y-2y
ight){
m d}y$,其中 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$ 。

解

$$\begin{split} &\oint_L \left(x^3y + \mathrm{e}^y\right) \, \mathrm{d}x + \left(xy^3 + x\mathrm{e}^y - 2y\right) \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_D (y^3 + e^y - x^3 - e^y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D (y^3 - x^3) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0. \end{split}$$

(4) $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2) dy$, 其中 L 是以 A(1,1), B(2,3), C(2,5) 为顶点的三角形 ABC 区域的正向边界曲线.

舸

$$\oint_{L} (x+y)^{2} dx - (x^{2} + y^{2}) dy = \iint_{D} [-2x - 2(x+y)] dx dy$$

$$= \iint_{D} (-4x - 2y) dx dy = \int_{1}^{2} dx \int_{2x-1}^{4x-3} (-4x - 2y) dy$$

$$= \int_{1}^{2} (-20x^{2} + 28x - 8) dx = -\frac{38}{3}.$$

(5) $\oint_L \frac{-y}{(x+1)^2+y^2} dx + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} dy$, 其中 L 是以原点为圆心, R 为半径的圆周,方向为逆时针, $R \neq 1$.

解 若 R < 1 , 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则

$$\oint_{L} \frac{-y}{(x+1)^{2}+y^{2}} dx + \frac{x+1}{(x+1)^{2}+y^{2}} dy = \iint_{D} 0 dx dy = 0.$$

若 R>1, 取 $C:(x+1)^2+y^2=\varepsilon^2$, 其中 $0<\varepsilon<1$, 方向为顺时针, 则

$$\oint_{L} \frac{-y}{(x+1)^{2} + y^{2}} dx + \frac{x+1}{(x+1)^{2} + y^{2}} dy$$

$$= \oint_{C} \frac{-y dx + (x+1) dy}{\varepsilon^{2}} = \frac{1}{\varepsilon^{2}} \iint_{D_{\varepsilon}} (1+1) dx dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{2}} \cdot 2\pi \varepsilon^{2} = 2\pi.$$

2. 计算

$$\int_{L} (e^{x} \sin y - my) dx + (e^{x} \cos y - m) dy,$$

其中 L 为由点 O(0,0) 至点 A(a,0) 的半圆周 $y=\sqrt{ax-x^2}$, a 为正数.

解

$$\int_{L} (e^{x} \sin y - my) dx + (e^{x} \cos y - m) dy$$

$$= \oint_{L+AO} - \int_{AO} (e^{x} \sin y - my) dx + (e^{x} \cos y - m) dy$$

$$= -\iint_{D} (e^{x} \cos y - e^{x} \cos y + m) dx dy - \int_{a}^{0} 0 dx$$

$$= -\iint_{D} m dx dy - 0 = -\frac{\pi ma^{2}}{8}.$$

3. 应用曲线积分计算星形线 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ 所围平面区域的面积.

鯏

$$\begin{split} S &= \frac{1}{2} \oint_{L} -y \mathrm{d}x + x \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left[-a \sin^{3}t \cdot (-3a \cos^{2}t \sin t) + a \cos^{3}t \cdot 3a \sin^{2}t \cos t \right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2} a^{2} \int_{0}^{2\pi} \sin^{2}t \cos^{2}t \mathrm{d}t = \frac{3}{8} \pi a^{2}. \end{split}$$

4. 设函数 f 连续可微, L 是任意一条分段光滑的闭曲线,证明对任意正整数 n 都有

$$\oint_{T} f(x^{n} + y^{n})(x^{n-1} dx + y^{n-1} dy) = 0.$$

证 记
$$P = f(x^n + y^n)x^{n-1}$$
, $Q = f(x^n + y^n)y^{n-1}$,
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = f'(x^n + y^n)nx^{n-1}y^{n-1} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

于是

$$\oint_I f(x^n + y^n) \left(x^{n-1} dx + y^{n-1} dy \right) = 0$$

5. 设 $\varphi(y)$ 为连续可微函数, L 为右半平面上连接点 A(0,c) 和点 B(0,d)(c>d) 且 与线段 AB 所国区域面积为 S 的分段光滑曲线,方向从 A 指向 B,计算曲线积分

$$\int_{L} [\varphi(y)e^{x} - my] dx + [\varphi'(y)e^{x} - m] dy.$$

解

$$\begin{split} &\int_{L} \left[\varphi(y) \mathrm{e}^{x} - my \right] \mathrm{d}x + \left[\varphi'(y) \mathrm{e}^{x} - m \right] \mathrm{d}y \\ &= \oint_{L+BA} - \int_{BA} \left[\varphi(y) \mathrm{e}^{x} - my \right] \mathrm{d}x + \left[\varphi'(y) \mathrm{e}^{x} - m \right] \mathrm{d}y \\ &= -\iint_{D} \left(\varphi'(y) \mathrm{e}^{x} - \varphi'(y) \mathrm{e}^{x} + m \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \int_{d}^{c} \left[\varphi'(y) - m \right] \mathrm{d}y \\ &= -mS - \varphi(c) + \varphi(d) + m(c - d) \\ &= -m(S + d - c) + \varphi(d) - \varphi(c). \end{split}$$

6. 设 f(x) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续的导数, 求曲线积分

$$\int_{L} \frac{1 + y^{2} f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^{2}} [y^{2} f(xy) - 1] dy,$$

其中 L 是从点 $A(3,\frac{2}{3})$ 到点 B(1,2) 的直线段.

解 因为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{y^2} (y^2 f(xy) - 1) \right] = f(xy) - \frac{1}{y^2} + xyf'(xy) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1 + y^2 f(xy)}{y} \right],$$

所以在不包含 x 轴的区域内曲线积分与路径无关. 选取积分路径

$$L': y = \frac{2}{x}, \quad x \not M \ 3 \ \mathfrak{P} \ 1,$$

则

$$\int_{L} \frac{1 + y^{2} f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^{2}} [y^{2} f(xy) - 1] dy$$

$$= \int_{L'} \frac{1 + y^{2} f(2)}{y} dx + \frac{x}{y^{2}} [y^{2} f(2) - 1] dy$$

$$= \int_{3}^{1} \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} f(2) \right) + \left(x f(2) - \frac{x^{3}}{4} \right) \left(-\frac{2}{x^{2}} \right) \right] dx$$

$$= \int_{3}^{1} x dx = -4.$$

7. 已知在任何不包含 x 轴上点的区域内曲线积分

$$\int_{L} \frac{x}{y} (x^{2} + y^{2})^{\alpha} dx - \frac{x^{2}}{y^{2}} (x^{2} + y^{2})^{\alpha} dy$$

与路径无关,求常数 lpha,并计算当 L 是以 (1,1) 为起点, (x,y) 为终点且不过 x 轴的曲线时积分的值.

解由

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{x^2}{y^2} \left(x^2 + y^2 \right)^{\alpha} \right] = -\frac{2x}{y^2} [(\alpha + 1)x^2 + y^2] (x^2 + y^2)^{\alpha - 1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{y} (x^2 + y^2)^{\alpha} \right] = \frac{x}{y^2} [-x^2 + (2\alpha - 1)y^2] (x^2 + y^2)^{\alpha - 1}$$

及曲线积分与路径无关得

$$-\frac{2x}{y^2}[(\alpha+1)x^2+y^2](x^2+y^2)^{\alpha-1} = \frac{x}{y^2}[-x^2+(2\alpha-1)y^2](x^2+y^2)^{\alpha-1}$$

由此得到 $\alpha = -\frac{1}{2}$. 又

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{x}{y} \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{x^2}{y^2} \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_1^x x \left(x^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_1^y -\frac{x^2}{y^2} \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2} - \int_1^y \frac{x^2}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

M

$$\int_{1}^{y} \frac{x^{2}}{y^{2}\sqrt{x^{2}+y^{2}}} dy = \int_{1}^{y} \left(\frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{y^{2}} - \frac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}} \right) dy$$
$$= -\frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{y} \bigg|_{1}^{y} = \sqrt{x^{2}+1} - \frac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}{y}.$$

于是

$$\int_{(1,1)}^{(x,y)} \frac{x}{y} \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{x^2}{y^2} \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} - \sqrt{2}.$$

8. 已知 arphi 具有一阶连续导数, arphi(0)=1,试确定 arphi(x) 使曲线积分

$$\int_{L} \varphi(x) \, \mathrm{d}y - \frac{xy}{1+x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

与路径无关,并计算当 L 的起点与终点分别为 (1,0) 和 $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}
ight)$ 时的积分值.

解 由曲线积分与路径无关得

$$\varphi'(x) = -\frac{x}{1+x^2}\varphi(x).$$

由此解得

$$\varphi(x) = Ce^{-\int \frac{x}{1+x^2} dx} = Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

代入初始条件 $\varphi(0)=1$ 得 C=1, 从而 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 沿着从 (1,0) 到 $(\sqrt{3},0)$ 再到 $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ 的折线积分得

$$\int_{(1,0)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})} \varphi(x) \, \mathrm{d}y - \frac{xy}{1+x^2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{(1,0)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}y - \frac{xy}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{1}^{\sqrt{3}} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+3}} \, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9. 设函数 f(x) 具有二阶连续导数, f(0) = 0, f'(0) = 1, 且曲线积分

$$\int_{L} [xe^{2x} - 6f(x)] \sin y \, dx - [5f(x) - f'(x)] \cos y \, dy$$

与路径无关, 求 f(x).

解 由曲线积分与路径无关得

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = xe^{2x}$$

这是二阶线性常系数非齐次微分方程. 特征方程为

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

特征根为 $r_1=2, r_2=3$. 对应齐方程的通解为

$$Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

设 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$ 为方程的特解,代入方程求得 $a=-\frac{1}{2},\ b=-1$. 因此方程的通解为

$$f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{2x}$$

代入条件 f(0) = 0, f'(0) = 1 得 $C_1 = -2$, $C_2 = 2$. 于是

$$f(x) = -2e^{2x} + 2e^{3x} - \frac{1}{2}x(x+2)e^{2x}.$$

10. 为了使线积分

$$\int_I F(x,y)(y\,\mathrm{d} x + x\,\mathrm{d} y)$$

与路径无关,则可做函数 F(x,y) 应该满足怎样的条件?

解 为了使曲线积分与路径无关,应有

$$\frac{\partial}{\partial y}(yF(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(xF(x,y)),$$

即

$$F(x,y) + yf'_y(x,y) = F(x,y) + xF'_x(x,y),$$

亦即

$$yf_y'(x,y) = xF_x'(x,y).$$

11. 设有一力场 $F=\left(y^2\cos x-2xy^3\right)i+\left(4+2y\sin x-3x^2y^2\right)j$,求质点沿曲线 $L:2x=\pi y^2$ 从点 $O\left(0,0\right)$ 运动到点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 时,力场 F 所做的功.

解 力场所做的功为

$$W = \int_{L(OA)} \left(y^2 \cos x - 2xy^3 \right) dx + \left(4 + 2y \sin x - 3x^2y^2 \right) dy.$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(4+2y\sin x-3x^2y^2)=2y\cos x-6xy^2=\frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos x-2xy^3),$$

所以曲线积分与路径没有关系. 沿从 (0,0) 到 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 再到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的折线积分得

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[4 + 2y \sin \frac{\pi}{2} - 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 y^2 \right] \mathrm{d}y = 5 - \frac{\pi^2}{4}.$$

12. 设 L 是平面光滑闭曲线,而 l 为已知的任意非零向量,证明

$$\oint_{L} \cos(\widehat{\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}}) \, \mathrm{d}s = 0,$$

其中 n 是 L 的外法线向量.

解 设 L 与 x 轴正向夹角为 θ . 又设 M(x,y) 为 L 上任意一点, 曲线 L 在点 M 处的外法向量为 $n=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 则 $\cos\beta=\sin\alpha$, 且 L 在点 M 处的切向量为 $s=\pm(\cos\beta,-\cos\alpha)$, 即 s 的方向余弦为 $\pm\cos\beta$ 和 $\mp\cos\alpha$. 因为 $(\widehat{l,n})=|\theta-\alpha|$, 所以

$$\cos(\widehat{l,n}) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\beta.$$

由此及两类曲线积分的关系得

$$\left| \oint_{L} \cos(\widehat{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} \right| = \left| \oint_{L} (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \beta) \, \mathrm{d}\boldsymbol{s} \right| = \left| \oint_{L} \sin \theta \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} - \cos \theta \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \right|.$$

因为 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 都是常数,所以利用铬林公式得

$$\oint_{L} \sin \theta \, \mathrm{d}x - \cos \theta \, \mathrm{d}y = 0.$$

于是

$$\oint_L \cos(\widehat{l,n}) \, \mathrm{d}s = 0.$$

13. 验证下列方程是全微分方程,并求其通解:

(1)
$$xy dx + \frac{1}{2}(x^2 + y) dy = 0.$$

解 由

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y) \right] = x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x,$$

知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此方程是全微分方程. 因

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} xy dx + \frac{1}{2} (x^2 + y) dy = \int_0^y \frac{1}{2} (x^2 + y) dy = \frac{1}{2} x^2 y + \frac{1}{4} y^2.$$

所以方程通解为

$$\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}y^2 = C.$$

(2)
$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (4y^3 + 6x^2y) dy = 0$$

解由

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 + 6x^2y) = 12xy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy^2) = 12xy,$$

知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此方程是全微分方程. 因

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 + 6xy^2) dx + (4y^3 + 6x^2y) dy$$

$$= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (4y^3 + 6x^2y) dy$$

$$= x^3 + y^4 + 3x^2y^2,$$

所以方程通解为

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C.$$

(3)
$$(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy = 0$$
.

解由

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 2x) = 2y,$$

知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$,因此方程是全微分方程. 因

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2xy dy$$

$$= \int_0^x (x^2 + 2x) dx + \int_0^y 2xy dy$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + xy^2,$$

i以方程通解为

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + xy^2 = C.$$

(4) $\sin(x + y) dx + [x \cos(x + y)] (dx + dy) = 0.$

解由

$$\begin{split} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [x \cos(x+y)] = \cos(x+y) - x \sin(x+y), \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [\sin(x+y) + x \cos(x+y)] = \cos(x+y) - x \sin(x+y), \end{split}$$

 $1\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此方程是全徵分方程. 因

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \sin(x+y) \, dx + [x\cos(x+y)] (\, dx + \, dy)$$

$$= \int_0^x (\sin x + x\cos x) dx + \int_0^y x\cos(x+y) dy$$

$$= x\sin(x+y),$$

r以方程通解为

$$x\sin(x+y)=C.$$

14. 设函数
$$f(x)$$
 具有二阶连续导数, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 且
$$[xy(x+y)-f(x)y]\,\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\,\mathrm{d}y=0$$

7全微分方程, 求 f(x) 及此全微分方程的通解.

解由

$$\begin{split} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (f'(x) + x^2 y] = f''(x) + 2xy, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} [xy(x+y) - f(x)y] = x^2 + 2xy - f(x), \end{split}$$

****方程是全微分方程得

$$f''(x)+f(x)=x^2.$$

文是二阶线性常系数非齐次方程, 其特征方程为

$$r^2 + 1 = 0$$

专征根为 $r_{1,2}=\pm i$. 对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

方程有形如 $y^* = ax^2 + bx + c$ 的特解. 将此代入方程求得 a = 1, b = 0, c = -2. 因此 $y^* = x^2 - 2$, 方程的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2.$$

代入条件 f(0) = 0, f'(0) = 1 得 $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. 于是

$$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2.$$

因为

$$\begin{split} & \int_{(0,0)}^{(x,y)} [x^2y + xy^2 - (2\cos x + \sin x + x^2 - 2)y] \mathrm{d}x + (\cos x - 2\sin x + 2x + x^2y) \mathrm{d}y \\ & = \int_0^y (\cos x - 2\sin x + 2x + x^2y) \mathrm{d}y \\ & = (-2\sin x + \cos x + 2x)y + \frac{1}{2}x^2y^2, \end{split}$$

所以方程通解为

$$(-2\sin x + \cos x + 2x)y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C.$$

习 题 10-4

1. 计算下列曲面积分:

(1)
$$\iint_{\Sigma} xyz \, dS$$
, 其中 Σ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.

解 曲面 Σ : z=1-x-y 在 xOy 面的投影域 $D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1-x,\, 0\leq x\leq 1\}$ 于是

$$\iint_{\Sigma} xyz \, dS = \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$
$$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (xy-x^2y-xy^2) dy$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

(2) $\iint_{\Sigma} xz|y|\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是双曲柱面 $x^2-y^2=1$ 含于长方体 $1\leq x\leq \sqrt{5},\ -2\leq y\leq 2,\ 0\leq z\leq 2$ 之内的部分.

解 曲面 Σ 关于坐标面 xOz 对称,被积函数是关于 y 的偶函数,记 Σ_1 为曲面位于第一卦限的部分,则 $\Sigma_1: x=\sqrt{1+y^2}$ 在坐标面 yOz 上的投影区域为 $D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\leq x\in \mathbb{Z}\}$

 $y \le 2, \ 0 \le z \le 2$ }. 于是

$$\begin{split} \iint_{\Sigma} xz|y| \, \mathrm{d}S &= 2 \iint_{\Sigma_{1}} xyz \, \mathrm{d}S \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + y^{2}} yz \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^{2} + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^{2}} \, \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + y^{2}} \, yz \sqrt{1 + \frac{y^{2}}{1 + y^{2}}} \, \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} yz \sqrt{1 + 2y^{2}} \, \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 2 \int_{0}^{2} y \sqrt{1 + 2y^{2}} \, \, \mathrm{d}y \int_{0}^{2} z \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \sqrt{1 + 2y^{2}} \, \, \mathrm{d}(1 + 2y^{2}) \int_{0}^{2} z \, \mathrm{d}z = \frac{52}{3} \end{split}$$

(3) $\iint_{\Sigma} (xy+yz+zx) \, \mathrm{d}S$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所裁部分,其中 a>0.

解 由曲面 Σ 的对称性和被积函数的奇偶性得

$$\iint\limits_{\Sigma} xy\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} yz\,\mathrm{d}S = 0.$$

对于锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}.$$

田面 \angle 在坐标面 xOy 上的投影为 $D_{xy} = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 2ax\}$. 于是

$$\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) \, dS = \iint_{\Sigma} zx \, dS = \iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} \, dx \, dy$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{2a\cos\theta} \rho^3 \cos\theta \, d\rho = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_{0}^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$= 4a^4 \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \, d\theta = 8\sqrt{2}a^4 \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{64}{15} \sqrt{2}a^4.$$

(4) $\oint_{\Sigma} (x^2+y^2) \, \mathrm{d}S$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 z=1 所围之立体的全表

解 对于锥面 $\Sigma_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ 0 \le z \le 1, \ 有$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

对于平面 $\Sigma_2: z=1$,有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1.$$

 $\Sigma=\Sigma_1\bigcup\Sigma_2$. Σ_1 及 Σ_2 在坐标面 xOy 上的投影都是 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$. 于是

$$\oint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \, dS = \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2) \, dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2 + y^2) \, dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} \, dx \, dy + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$= (\sqrt{2} + 1) \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

$$= (\sqrt{2} + 1) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 \, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} (\sqrt{2} + 1).$$

(5)
$$\iint\limits_{\Sigma} \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right) \mathrm{d}S, \ \mbox{其中 } \Sigma \ \mbox{ 为平面 } \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \ \mbox{ 在第一卦限中的部分}.$$

解 对于曲面 $\Sigma: z = 4 - \frac{4}{3}y - 2x$, 有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{61}}{3},$$

 Σ 在坐标面 xOy 上的投影是 $D_{xy}=\left\{(x,y)\left|0\leq y\leq 3-\frac{3}{2}x,\ 0\leq x\leq 2\right.\right\}$. 于是

$$\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS = \iint_{D_{xy}} \left[\left(4 - \frac{4}{3}y - 2x \right) + 2x + \frac{4}{3}y \right] \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy$$
$$= \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 4\sqrt{61}.$$

(6)
$$\oint\limits_\Sigma \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$$
, 其中 Σ 为四面体 $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界曲面.

解 曲面 Σ 由四部分构成, 分别为

 $\Sigma_1: x+y+z=1, \ x>0, \ y>0, \ z>0; \quad \Sigma_2: x=0; \quad \Sigma_3: y=0; \quad \Sigma_4: z=0.$

于是,有

$$\oint \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+y)^2}
+ \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2} + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}
= \left(\sqrt{3}+1\right) \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} + 2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x)^2}
= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \left(\sqrt{3}-1\right) \ln 2$$

2. 求由曲面 $\Sigma_1: x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2$ 和 $\Sigma_2: z + y = 2$ 所围立体的表面积.

解 对于圆锥面 $\Sigma_1: z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, 有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{3x^2}{x^2+y^2}+\frac{3y^2}{x^2+y^2}}=2.$$

对于平面 $\Sigma_2: z=2-y$, 有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2},$$

 Σ_1 及 Σ_2 在坐标面 xOy 上的投影都是 $D_{xy} = \left\{ (x,y) \left| \frac{x^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{3} \leq 1 \right. \right\}$. 于是所求表

$$S = \iint_{\Sigma_1} dS + \iint_{\Sigma_2} dS = \iint_{D_{xy}} 2 dx dy + \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy$$
$$= (2 + \sqrt{2}) \iint_{D_{xy}} dx dy = (2 + \sqrt{2}) \pi \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} (2 + \sqrt{2}) \pi.$$

4. 小胞物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(0 \le z \le 1)$ 的质量,其密度 $\mu = z$.

解 对于抛物面 $\Sigma : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}.$$

 Σ 在坐标面 xOy 上的投影是 $D_{xy} = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 2\}$. 于是所求的质量为

$$m = \iint_{\Sigma} z \, dS = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 \right) \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} \, d\rho$$
$$\underline{u = \sqrt{1 + \rho^2}} \pi \int_1^{\sqrt{3}} (u^2 - 1) u^2 \, du$$
$$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{2}{15} \right) \pi.$$

4. 设球面三角形 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=a^2,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\},$ 其中 a>0,求

- Σ 的周界曲线的形心坐标;
- (2) 球面三角形 ∑ 的形心坐标.

解 (1) 设周界曲线 L 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则由 L 的对称性易知 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$. 而

$$\overline{x} = \frac{1}{s} \int_{L} x \mathrm{d}s,$$

其中s为曲线的弧长. L由三段圆弧 L_1, L_2, L_3 组成,其中

$$L_1: x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$$
 $L_2: x = 0, \quad y = a \cos t, \quad z = a \sin t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$
 $L_3: x = a \sin t, \quad y = 0, \quad z = a \cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

因为每段圆弧都是四分之一的圆,所以 $s=\frac{3}{2}\pi a$. 又

$$\int_{L} x ds = \int_{L_{1}} x ds + \int_{L_{2}} x ds + \int_{L_{3}} x ds$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^{2} \cos t dt + 0 + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^{2} \sin t dt$$

$$= 2a^{2}.$$

于是 $\overline{x}=rac{2a^2}{rac{3}{2}\pi a}=rac{4a}{3\pi}$. 形心坐标为 $\left(rac{4a}{3\pi},rac{4a}{3\pi},rac{4a}{3\pi}
ight)$.

(2) 设球面三角形 Σ 的形心坐标为 \overline{x} , \overline{y} , \overline{z} , 则由 Σ 的对称性易知 $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z}$, 而

$$\overline{x} = \frac{1}{S} \iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}S,$$

其中 S 为曲面 Σ 的面积. 因 Σ 是八分之一的球面,故 $S=\frac{1}{2}\pi a^2$. 因为曲面 Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,所以

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

而 Σ 在坐标面 xOy 上的投影是 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0\}$, 故

$$\iint_{\Sigma} x \, dS = a \iint_{D_{xy}} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{\rho^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho$$

$$= a \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{\rho^2}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho \underbrace{\frac{\rho = a \sin t}{a^3}}_0 a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4} a^3.$$

于是 $\overline{x} = \frac{\frac{\pi}{4}a^3}{\frac{\pi}{2}a^2} = \frac{a}{2}$. 曲面 Σ 的形心坐标为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

5. 求密度为 μ_0 的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ 对于 z 轴的转动惯量,其中 a>0.

解 半球壳曲面 Σ 方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 其在坐标面 xOy 上的投影是 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\}$. 在曲面 Σ 上任取一小片面积微元 dS, 其质量为 $dm=\mu_0\,dS$. 这一小片微元对 z 轴的转动惯量为 $dI=(x^2+y^2)\,dm=\mu_0(x^2+y^2)\,dS$. 于是曲面 Σ 对 z 轴的转动惯量为

$$\begin{split} I &= \iint\limits_{\Sigma} \mu_0(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \mu_0(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{D_{xy}} \mu_0(x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = a\mu_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{u = \sqrt{a^2 - \rho^2}}{2\pi a\mu_0} \int_0^a (a^2 - u^2) \,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\pi a^4 \mu_0. \end{split}$$

6. 求密度为 μ_0 的均匀锥面壳 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0$ $(0\leq z\leq b)$ 对于直线 $\left\{ \begin{array}{l} y=0,\\ z=b \end{array} \right.$ 的转动惯量,其中 $a>0,\,b>0.$

解 所给直线过点 $M_0(0,0,b)$, 方向向量为 s=(1,0,0). 所给锥面 Σ 的方程为 $z=\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}$. 设 M(x,y,z) 为曲面 Σ 上的任一点,则

$$\mathbf{s} \times \overrightarrow{M_0 M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ x & y & z - \mathbf{b} \end{vmatrix} = -(z - b)\mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

从而 M 到所给直线的距离为

$$d = rac{|s imes \overline{M_0 M}|}{|s|} = \sqrt{(z-b)^2 + y^2} = \sqrt{rac{b^2}{a^2}ig(\sqrt{x^2 + y^2} - aig)^2 + y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

故所求的转动惯量为

$$\begin{split} I &= \iint\limits_{\Sigma} \mu_0 \left[\frac{b^2}{a^2} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + y^2 \right] \, \mathrm{d}S \\ &= \mu_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint\limits_{x^2 + y^2 \le a^2} \left[\frac{b^2}{a^2} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + y^2 \right] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \mu_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^a \left[\frac{b^2}{a^2} (\rho - a)^2 + \rho^2 \sin^2\theta \right] \rho \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{12} \pi a \mu_0 (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2 + b^2}. \end{split}$$

习 题 10-5

1. 计算下列第二类曲面积分:

(1)
$$\iint_{\Sigma} xyz \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$
, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 位于第一卦限部分的下侧, $R>0$.

解

$$\begin{split} \iint_{\Sigma} xyz \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= -\iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \, yz \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2} \, \rho^3 \mathrm{sin}\theta \mathrm{cos}\theta \mathrm{d}\rho \\ &= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sin}\theta \mathrm{dsin}\theta \cdot \frac{1}{2} \int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2} \, \rho^2 \mathrm{d}\rho^2 \\ &= -\frac{1}{4} \left(\int_{0}^{R} R^2 \sqrt{R^2 - \rho^2} \, \mathrm{d}\rho^2 - \int_{0}^{R} \left(R^2 - \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}\rho^2 \right) \\ &= -\frac{1}{15} R^5. \end{split}$$

(2) $\iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为介于平面 z=0 和 z=3 的圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内侧满足 $x\geq 0$ 的部分.

解 设 Σ_1 和 Σ_2 分别为曲面 Σ 在第一和第四卦限的部分,则它们在坐标面 zOx 上的

投影都是 $D_{zx} = \{(z, x) \mid 0 \le z \le 3, 0 \le x \le 1\}$. 于是

$$\iint_{\Sigma} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \iint_{\Sigma_2} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

$$= -\iint_{D_{xx}} \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \iint_{D_{xx}} -\sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

$$= -2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx \int_0^3 dz = -\frac{3}{2}\pi.$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 z=1 所围立体的表面外侧.

解 设 Σ_1 和 Σ_2 分别为曲面 Σ 的抛物面部分和平面部分,则它们在坐标面 xOy 上的投影都是 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$. 于是

$$\iint_{\Sigma} y^{2}z \, dx \, dy = \iint_{\Sigma_{1}} y^{2}z \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_{2}} y^{2}z \, dx \, dy$$

$$= -\iint_{D_{xy}} y^{2}(x^{2} + y^{2}) \, dx \, dy + \iint_{D_{xy}} y^{2} \, dx \, dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} y^{2}(1 - x^{2} - y^{2}) \, dx \, dy = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} \rho^{3}(1 - \rho^{2}) \sin^{2}\theta \, d\rho$$

$$= \frac{1}{12}\pi.$$

(4) $\iint_{\Sigma} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧, 这里 a > 0, b > 0, c > 0.

解 设 Σ_1 和 Σ_2 为曲面 Σ 被坐标面 xOy 分割成的上下两部分,则

$$\Sigma_1: z = c\sqrt{1-rac{x^2}{a^2}-rac{y^2}{b^2}}, \quad \text{LW}; \quad \Sigma_2: z = -c\sqrt{1-rac{x^2}{a^2}-rac{y^2}{b^2}}, \quad \text{FW}.$$

它们在坐标面 xOy 上的投影都是 $D_{xy} = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$. 于是

$$\oint_{\Sigma} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} - c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$\frac{x = a\rho \cos \theta}{y = b\rho \sin \theta} 2c \int_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \, ab\rho \, \mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc.$$

(5) $\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中 Σ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 介于平面 z = 0 及 z = h (h > 0) 之间部分的外侧.

解 为了计算 $\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, 设 Σ_1 和 Σ_2 为曲面 Σ 被坐标面 yOz 分割成的前后两部分,则

$$\Sigma_1: x = \sqrt{z^2 - y^2}, \text{ if M}; \quad \Sigma_2: x = -\sqrt{z^2 - y^2}, \text{ f.M}.$$

它们在坐标面 yOz 上的投影都是 $D_{yz} = \{(y,z) \mid -z \le y \le z, 0 \le z \le h\}$. 于是

$$\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_1} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_1} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{yz}} \sqrt{z^2 - y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}} - \sqrt{z^2 - y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= 4 \int_0^h \, \mathrm{d}z \int_0^z \sqrt{z^2 - y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \pi h^3.$$

为了计算 $\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$, 设 Σ_3 和 Σ_4 为曲面 Σ 被坐标面 zOx 分割成的右左两部分,则

$$\Sigma_3: y = \sqrt{z^2 - x^2}$$
, 右侧; $\Sigma_2: y = -\sqrt{z^2 - x^2}$, 左侧.

它们在坐标面 zOx 上的投影都是 $D_{zx} = \{(z,x) \mid -z \le x \le z, 0 \le z \le h\}$. 于是

$$\iint_{\Sigma} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = \iint_{\Sigma_3} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \iint_{\Sigma_4} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

$$= \iint_{D_{zx}} \sqrt{z^2 - x^2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x - \iint_{D_{zx}} -\sqrt{z^2 - x^2} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

$$= 4 \int_0^h \, \mathrm{d}z \int_0^z \sqrt{z^2 - x^2} \, \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \pi h^3.$$

因为 Σ 在坐标面 xoy 上的投影是 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le h^2\}$, 所以

$$\iint\limits_{\Sigma} z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \rho^2 \mathrm{d}\rho = -\frac{2}{3}\pi h^3.$$

综合以上结果得到

$$\iint_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

解 曲面 Σ 又四个平面块组成:

$$\Sigma_1: x + y + z = 1, \quad \Sigma_2: x = 0, \quad \Sigma_3: y = 0, \quad \Sigma_4: z = 0.$$

 Σ_1 在三个坐标面上的投影分别为

$$D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 - y, 0 \le y \le 1\},$$

$$D_{yz} = \{(y,z) \mid 0 \le y \le 1 - z, 0 \le z \le 1\},$$

$$D_{zx} = \{(z,x) \mid 0 \le z \le 1 - x, 0 \le x \le 1\}.$$

因此

$$\iint_{\Sigma_{1}} (x+y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{D_{yz}} (1-z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iint_{D_{zz}} (1-x-z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{1} \, \mathrm{d}y \int_{0}^{1-y} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \, \mathrm{d}z \int_{0}^{1-z} (1-z) \, \mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \, \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} (1-x-z) \, \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

在 Σ_2 上,有

$$\iint\limits_{\Sigma_2} (x+y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = -\iint\limits_{D_{yz}} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = -\int_0^1 \, \mathrm{d}z \int_0^{1-z} y \, \mathrm{d}y = -\frac{1}{6},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2} y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

在 Σ_3 上,有

$$\iint\limits_{\Sigma_3} (x+y) \,\mathrm{d} y \,\mathrm{d} z = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_3} y \,\mathrm{d} z \,\mathrm{d} x = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_3} \,\mathrm{d} x \,\mathrm{d} y = 0.$$

在 $Σ_4$ 上, 有

$$\iint\limits_{\Sigma_4} (x+y) \,\mathrm{d} y \,\mathrm{d} z = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_4} y \,\mathrm{d} z \,\mathrm{d} x = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_4} \,\mathrm{d} x \,\mathrm{d} y = -\frac{1}{2}.$$

于是

$$I = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

2. 计算 $\iint_{\Sigma} f(x) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + g(y) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + h(z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中 Σ 为平行六面体 $\{(x,y,z) | 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b, \ 0 \le z \le c\}$ 表面的外侧, f(x), g(x), h(x) 为 Σ 上的连续函数.

解 只要计算积分 $\oint_{\Sigma} h(z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其它两个可类似的写出结果. Σ 由六个平面块组成,将 Σ 上的积分分成这六个平面块上的积分之和. 在四个垂直于坐标面 xOy 的平面块上,积分都等于零. 而另外两个平面块

$$\Sigma_1: z=0$$
, 下侧; $\Sigma_2: z=c$, 上侧.

它们在坐标面 xOy 上的投影都是 $D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma} h(z) dx dy = \iint\limits_{D_{xy}} h(c) dx dy - \iint\limits_{D_{xy}} h(0) dx dy = ab(h(c) - h(0)).$$

类似的,可得到

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = bc(f(a) - f(0)), \quad \iint\limits_{\Sigma} g(y) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x = ac(g(b) - g(0)).$$

于是

$$\oint_{\Sigma} f(x) \, dy \, dz + g(y) \, dz \, dx + h(z) \, dx \, dy
= bc(f(a) - f(0)) + ac(g(b) - g(0)) + ab(h(c) - h(0)).$$

3. 求流速场 v = (x-2z)i + (x+3y+z)j + (5x+y)k 通过以点 A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) 为顶点的三角形 ABC 上侧的流量.

解 所求的通量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} (x - 2z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + (x + 3y + z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (5x + y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是以 A, B, C 为顶点的三角形的上侧,它的方程为 x+y+z=1. Σ 在坐标面 xOy, 坐标面 yOz, 坐标面 zOx 上的投影域分别为

$$\begin{split} D_{xy} &= \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 - y, \, 0 \le y \le 1\}, \\ D_{yz} &= \{(y,z) \mid 0 \le y \le 1 - z, \, 0 \le z \le 1\}, \\ D_{zx} &= \{(z,x) \mid 0 \le z \le 1 - x, \, 0 \le x \le 1\}. \end{split}$$

因此

$$\iint_{\Sigma} (x - 2z) \, dy \, dz = \iint_{D_{yz}} (1 - y - 3z) \, dy \, dz$$

$$= \int_{0}^{1} \, dz \int_{0}^{1-z} (1 - y - 3z) \, dy = -\frac{1}{6},$$

$$\iint_{\Sigma} (x + 3y + z) \, dz \, dx = \iint_{D_{zz}} (3 - 2x - 2z) \, dz \, dx$$

$$= \int_{0}^{1} \, dx \int_{0}^{1-x} (3 - 2x - 2z) \, dz = \frac{5}{6},$$

$$\iint_{\Sigma} (5x + y) \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} (5x + y) \, dx \, dy$$

$$= \int_{0}^{1} \, dy \int_{0}^{1-y} (5x + y) \, dx = 1.$$

于是

$$\Phi = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 1 = \frac{5}{3}.$$

4. 试将曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ 与 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ 化为直角坐标系下的二重积分,其中 Σ 是由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 、平面 z = 0 及 z = 4 所围立体表面的外侧.

解 用 Σ_1 和 Σ_2 分别表示圆柱的上下底面, Σ_3 和 Σ_4 表示圆柱的侧表面被坐标面 yOz 分割成的前后两部分,则

$$\Sigma_1: z=4$$
,上侧, $\Sigma_2: z=0$,下侧;
$$\Sigma_3: x=\sqrt{1-y^2}, \quad \text{前侧}; \quad \Sigma_4: x=-\sqrt{1-y^2}, \quad \text{后侧}.$$

因为 Σ_3 和 Σ_4 都垂直于坐标面 xOy, 从而

$$\iint\limits_{\Sigma_3} f(x,y,z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_4} f(x,y,z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0.$$

又因为 Σ_1 和 Σ_2 在坐标面 xOy 上的投影都是 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 所以

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z) dx dy = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z) dx dy + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z) dx dy$$

$$= \iint_{D_{T,y}} [f(x,y,4) - f(x,y,0)] dx dy.$$

因为 Σ_1 和 Σ_2 都垂直于坐标面 yOz, 从而

$$\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0, \quad \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0.$$

又因为 Σ_3 和 Σ_4 在坐标面 yOz 上的投影都是 $D_{yz}=\{(y,z)\mid -1\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 4\}$, 所以

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_3} f(x, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iint_{\Sigma_4} f(x, y, z) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{yz}} \left[f\left(\sqrt{1 - y^2}, y, z\right) - f\left(-\sqrt{1 - y^2}, y, z\right) \right] \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

5. 设 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1(z\geq 0)$, 又设 F(x,y,z)=xi+yj, n^0 是 Σ 上的单位法向量,它和 z 轴正向的夹角为锐角,求曲面积分 $\iint_{\Sigma} F\cdot n^0 \,\mathrm{d}S$.

解 设 Σ 表示上半球面的上侧,则根据两类曲面积分的关系有

$$\begin{split} \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}^{0} \, \mathrm{d}S &= \iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^{2} - z^{2}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 2 \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 - x^{2} - z^{2}} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\ &= 4 \int_{0}^{\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_{0}^{1} \sqrt{1 - \rho} \, \rho \, \mathrm{d}\rho = \frac{3}{4}\pi. \end{split}$$

6. 设磁场强度为 E=(x,y,z), 求从球内出发通过上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$ 的磁通量,其中 a>0.

解 设 Σ 表示所给的上半球面的上侧,则 Σ 上任意点 (x,y,z) 处向上的法向量的方向 余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{a}.$$

于是所求通量为

$$\begin{split} \Phi &= \iint\limits_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, \mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{a} \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}S = \frac{1}{a} \iint\limits_{\Sigma} a^2 \, \mathrm{d}S = a \cdot 2\pi a^2 = 2\pi a^3. \end{split}$$

习 题 10-6

- 1. 利用高斯公式计算下列曲面积分:
- (1) $\iint\limits_{\Sigma}yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+zx\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外

解 因为
$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$
, 所以由高斯公式得
$$\iint\limits_{\Sigma} yz \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + zx \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega} 0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0.$$

 $x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$,其中 Σ 是立方体 $0 \le x,y,z \le a$ 表面的外侧。

鯏

$$\iint_{\Sigma} x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

$$= 6 \iiint_{\Omega} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 6 \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a z \, \mathrm{d}z = 3a^4.$$

(3) $\iint_{\Sigma} (x-y) dx dy - x(y-z) dy dz$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 z = 0, z = 1 所围立体的表面之外侧.

解

$$\oint_{\Sigma} (x - y) dx dy - x(y - z) dy dz = \iiint_{\Omega} (-y + z) dx dy dz$$

$$= \iint_{\Omega} z dx dy dz = \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{1} \rho d\rho \int_{0}^{1} z dz = \frac{1}{2}\pi.$$

(4) $\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中 Σ 为抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 满足 $z\geq 0$ 部分的上侧.

解 记 Σ_0 为坐标面 xOy 上的圆域 $x^2 + y^2 \le 1$ 的下侧,则

$$\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} 3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - 0 = 3 \int_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^1 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{1-\rho^2} \rho \mathrm{d}z = \frac{3}{2}\pi.$$

(5) $\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (x+y+z+1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中 Σ 为半椭球面 $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 的下側, a > 0, b > 0, c > 0,

解 记 Σ_0 为坐标面 xOy 上的椭圆域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ 的上侧,则

$$\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (x+y+z+1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (x+y+z+1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$- \iint_{\Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (x+y+z+1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= - \iiint_{\Omega} 3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} (x+y+1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= -2\pi abc - \iint_{D_{xy}} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= -2\pi abc - \pi ab = -\pi ab(2c+1).$$

(6)
$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$
 其中 Σ 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于平面

z=0 和 z=h (h>0) 之间部分, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处外法向量的方向余弦.

解 记
$$\Sigma_0$$
 为圆域
$$\begin{cases} z = h, \\ x^2 + y^2 \le h^2 \end{cases}$$
 的上侧,则
$$\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS$$

$$= \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS$$

$$- \iint_{\Sigma_0} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS$$

$$= \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) \, dx \, dy \, dz - \iint_{\Sigma_0} h^2 \, dS$$

$$= \iint_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz - \pi h^4$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h d\rho \int_\rho^h z \rho \, dz - \pi h^4$$

2. 利用高斯公式计算

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

共中 汕 交 平 琢面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, a > 0.

 $=-\frac{1}{2}\pi h^4.$

解 记 Σ_0 为坐标面 xOy 上的圆域 $x^2 + y^2 \le a^2$ 的下侧,则

$$I = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_0} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

$$- \frac{1}{a} \iint_{\Sigma_0} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{a} \iiint_{\Sigma_0} 3 \, dx \, dy \, dz - 0 = 2\pi a^2.$$

3. 证明由光滑闭曲面 Σ 所包围立体的体积 V 可用下面公式计算:

$$V = \frac{1}{3} \iint (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

其中 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 是 Σ 外法向量的方向余弦.

ùΕ

$$\frac{1}{3} \oiint (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

$$= \frac{1}{3} \oiint x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

$$= \frac{1}{3} \oiint 3 dx dy dz = V.$$

4. 计算

$$I = \iint x f(xy) dy dz - y f(xy) dz dx + z^2 dx dy,$$

其中 f(u) 具有连续导函数, Σ 为由曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 及 z=0 所围立体表面的外侧。

解 Σ 所围空间区域为

$$\Omega = \left\{ (r, \varphi, \theta) \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq r \leq 2, \right\}.$$

由高斯公式得

$$I = \iiint\limits_{\Omega} 2z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 2 \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{d}\varphi \int_1^2 r^3 \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{15}{2}\pi.$$

5. 若流体流速为 v=xyi+yzj+zxk, 求流体由平面 z=1, x=0, y=0 和锥面 $z^2=x^2+y^2$ 所围成的立体在第一卦限部分向外流出的流量.

解 所求流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} xy dy dz + yz dz dx + zx dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{1} r dr \int_{r}^{1} (r \cos \theta + r \sin \theta + z) dz$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{\pi}{16}.$$

6. 求下列向量场 A 的散度:

(1)
$$\mathbf{A} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$$
.
 $\mathbf{A} \Leftrightarrow P = x^2 + yz, \ Q = y^2 + xz, \ R = z^2 + xy, \ \mathbf{M}$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z).$$

(2)
$$A = e^{xy}i + \cos(xy)j + \cos(xz^2)k$$
.

解 令
$$P = e^{xy}$$
, $Q = \cos(xy)$, $R = \cos(xz^2)$, 则
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ye^{xy} - x\sin(xy) - 2xz\sin(xz^2).$$

(3)
$$A = \operatorname{grad}(x^{10}y^{11}z^{12}).$$

$$\mathbf{grad}(x^{10}y^{11}z^{12}) = 10x^9y^{11}z^{12}i + 11x^{10}y^{10}z^{12}j + 12x^{10}y^{11}z^{11}k.$$

于是

$$\begin{split} \mathrm{div} \pmb{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(10 x^9 y^{11} z^{12} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(11 x^{10} y^{10} z^{12} \right) + \left(12 x^{10} y^{11} z^{11} \right) \\ &= 90 x^8 y^{11} z^{12} + 110 x^{10} y^9 z^{12} + 132 x^{10} y^{11} z^{10}. \end{split}$$

(4)
$$A = \frac{r}{r^n}(n > 0)$$
, $\not \perp r = xi + yj + zk$, $r = |r|$.

盤

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^n} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^n} \right) \\ = \frac{r^n - xnr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}}{r^{2n}} + \frac{r^n - ynr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}}{r^{2n}} + \frac{r^n - znr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}}{r^{2n}},$$

$$|x| = |x| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
 得

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

于是

$$\mathrm{div} A = \frac{3r^n - n(x^2 + y^2 + z^2) \cdot r^{n-2}}{r^{2n}} = \frac{3-n}{r^n}.$$

习 题 10-7

- 1. 利用斯托克斯公式求下列曲线积分:
- (1) $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 L 为 x + y + z = 1 与三坐标面的交线,它的方向是从原点看去为顺时针

解 设 Σ 是以 L 为边界曲线的平面上侧,则由 Σ 的方程 x+y+z=1 知其上任意一点处的法向量方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是由斯托克斯公式得

$$\begin{split} &\oint_L (y^2 + z^2) \mathrm{d}x + (x^2 + z^2) \mathrm{d}y + (x^2 + y^2) \mathrm{d}z \\ &= \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{array} \right| \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} (y - z) + \frac{2}{\sqrt{3}} (z - x) + \frac{2}{\sqrt{3}} (x - y) \right] \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma} 0 \, \mathrm{d}S = 0. \end{split}$$

(2) $\oint_L 3y dx + xz dy + yz^2 dz$, 其中 L 为圆周 $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2z, \\ z = 2, \end{array}\right.$ 它的方向是从 z 轴 正向看去为逆时针.

解 设 Σ 是以 L 为边界曲线的平面上侧,则由 Σ 的方程 z=2 知其上任意一点处的 法向量方向余弦为

$$\cos \alpha = 0$$
, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$.

于是由斯托克斯公式得

$$\begin{split} &\oint_{L} 3y \mathrm{d}x + xz \mathrm{d}y + yz^{2} \mathrm{d}z \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & xz & yz^{2} \end{vmatrix} \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma} (z-3) \, \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} (2-3) \, \mathrm{d}S = -4\pi. \end{split}$$

(3) $\oint_L (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, 其中 L 为曲面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 y=z 的交线,它的方向是从点 (0,1,0) 看去为逆时针.

 \mathbf{p} 设 Σ 是以 L 为边界曲线的平面上侧,则由斯托克斯公式得

$$\oint_{L} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} 0 dy dz + 0 dz dx + 0 dx dy = 0.$$

(4) $\oint_L x dx + (x+z) dy + y dz$, 其中 L 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geq 0)$ 和圆柱面 $ax-x^2=y^2$ 的交线,它的方向是从 z 轴正向看去为逆时针,a>0.

解 设 Σ 是以 L 为边界曲线的部分球面的上侧,则 Σ 在坐标面 xOy 上的投影是圆域 $D_{xy} = \left\{ (x,y) \mid \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 \leq \frac{a^4}{4} \right\}$. 于是

$$\begin{split} \oint_L x \mathrm{d}x + (x+z) \mathrm{d}y + y \mathrm{d}z &= \iint\limits_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x+z & y \end{array} \right| \\ &= \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\pi a^2. \end{split}$$

(5) $\oint_L \frac{x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y + z \, \mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的第一卦限部分于三个坐标面的交线、它的方向是从原点看去为顺时针。

解 设 Σ 是以 L 为边界曲线的部分球面的上侧,则由斯托克斯公式得

$$\begin{split} \oint_L \frac{x \, \mathrm{d} x + y \, \mathrm{d} y + z \, \mathrm{d} z}{x^2 + y^2 + z^2} &= \frac{1}{a^2} \oint_L x \, \mathrm{d} x + y \, \mathrm{d} y + z \, \mathrm{d} z \\ &= \iint_{\Sigma} \left| \begin{array}{cc} \mathrm{d} y \, \mathrm{d} z & \mathrm{d} z \, \mathrm{d} x & \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{array} \right| \\ &= \iint_{\Sigma} 0 \, \mathrm{d} y \, \mathrm{d} z + 0 \, \mathrm{d} z \, \mathrm{d} x + 0 \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y = 0. \end{split}$$

2. 求向量场 A=3yi+zj+yk 沿闭曲线 $L:\left\{egin{array}{ll} x^2+y^2=z,\ 2x+2y+z=2 \end{array}
ight.$ 的环量,L 的方向是从 z. 轴正向看去为顺时针,

解 设 Σ 是以 L 为边界曲线的平面下侧,则 Σ 在坐标面 xOy 上的投影是圆域 $D_{xy}=$

 $\{(x,y) \mid (x+1)^2 + (y+1)^2 \le 4\}$. 于是由斯托克斯公式得所求环量为

$$\oint L3y \, dx + z \, dy + y \, dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy \, dz & dz \, dx & dx \, dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & z & y \end{vmatrix}$$

$$= -3 \iint_{\Sigma} dx \, dy = 3 \iint_{D_{xy}} dx \, dy = 12\pi.$$

3. 证明在 \mathbf{R}^3 上曲线积分 $\int_L yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ 与路径无关,并计算

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz.$$

解 令 P = yz, Q = zx, R = xy, 则 P, Q, R 在 \mathbb{R}^3 上有连续的偏导数,且

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

因此积分与路径无关. 沿着从 (0,0,0) 到 (1,0,0) 再到 (1,2,0), 最后到 (1,2,1) 的折线积分得到

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,1)} yz dx + zx dy + xy dz = \int_0^1 0 dx + \int_0^2 0 dy + \int_0^1 2 dz = 2.$$

4. 验证在 \mathbb{R}^3 上下列各式是某函数的全微分,并求其原函数:

(1)
$$(x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$$
;

解 因为

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - 2yz & y^2 - 2xz & z^2 - 2xy \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

所以所给式子是某函数的全微分. 沿着从 (0,0,0) 到 (x,0,0) 再到 (x,y,0), 最后到 (x,y,z) 的折线积分得

$$u(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$$

$$= \int_0^x x^2 dx + y \int_0^y y^2 dy + \int_0^z (z^2 - 2xy) dz + C$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xyz + C.$$

(2)
$$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy$$

解 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy^2) = 12xy = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y + 4y^3),$$

所以所给式子是某函数的全微分. 沿着从 (0,0) 到 (x,0) 再到 (x,y) 的折线积分得

$$u(x, y, z) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(3x^2 + 6xy^2\right) dx + \left(6x^2y + 4y^3\right) dy + C$$
$$= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y \left(6x^2y + 4y^3\right) dy + C$$
$$= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C.$$

5. 求下列向量场的旋度:

(1)
$$\mathbf{A} = y e^z \mathbf{i} + (x^3 - y^2 + z^3) \mathbf{j} + xyz \mathbf{k};$$

解

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y e^{z} & x^{3} - y^{2} + z^{3} & xyz \end{vmatrix} \\
= \left(xz - 3z^{2} \right) \mathbf{i} + \left(ye^{z} - yz \right) \mathbf{j} + \left(3x^{2} - e^{z} \right) \mathbf{k}.$$

(2)
$$A = (x^2y^3z^3, x^3y^2z^3, x^3y^3z^2);$$

解

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 z^3 & x^3 y^2 z^3 & x^3 y^3 z^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

 $(3: A = x \sin(yz)i + y \sin zj + \sin xk.$

解

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x \sin(yz) & y \sin z & \sin x \end{vmatrix}$$
$$= -y \cos z \mathbf{i} + [xy \cos(yz) - \cos x] \mathbf{j} - xz \cos(yz) \mathbf{k}.$$

3.
$$a = 3yi + 2z^2j + xyk, b = x^2i - 4k$$
. $\text{$xrot}(a \times b)$.

解 因为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3y & 2z^2 & xy \\ x^2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8z^2 \boldsymbol{i} + (12y + x^3y) \boldsymbol{j} - 2x^2 z^2 \boldsymbol{k},$$

所以

$$rot(a \times b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -8z^2 & 12y + x^3y & -2x^2z^2 \end{vmatrix} \\
= \left(-16z + 4xz^2\right)j + 3x^2yk.$$

复习题十

- 1. 填空題:
- (1) 已知曲线 L 的方程为 y=1-|x| ($x\in[-1,1]$),起点是 (-1,0),终点是 (1,0),则 $\int_{L}xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$ ______;
 - 解 曲线 L 由两条直线段 L_1 和 L_2 连接而成, 其中

$$L_1: y = 1 + x, x + -1 = 0,$$

 $L_2: y = 1 - x, x + 0 = 0.$

因此

$$\int_{L} xy \, dx + x^{2} \, dy = \int_{L_{1}} xy \, dx + x^{2} \, dy + \int_{L_{2}} xy \, dx + x^{2} \, dy$$
$$= \int_{-1}^{0} (x + 2x^{2}) \, dx + \int_{0}^{1} (x - 2x^{2}) \, dx = 0.$$

(2) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a, 则 $\oint_I (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = ______;$

解 由对称性知
$$\oint_L 2xy \, ds = 0$$
. 于是

$$\begin{split} &\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) \, \mathrm{d}s = \oint_L (3x^2 + 4y^2) \, \mathrm{d}s \\ &= 12 \oint_L \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \, \mathrm{d}s = 12 \oint_L \mathrm{d}s = 12a. \end{split}$$

(3) 设
$$L$$
 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=9$,则 $\oint_L (2xy-2y)\,\mathrm{d}x+(x^2-4x)\,\mathrm{d}y=$

解 利用格林公式得

$$\oint_L (2xy - 2y) \, dx + (x^2 - 4x) \, dy = \iint_D -2 \, dx \, dy = -18\pi.$$

(4) 设
$$\Sigma$$
 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leq z\leq 1)$ 的下侧,则 $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ _______;

解 记
$$\Sigma_0$$
 为圆域 $\left\{ \begin{array}{ll} z=1, \\ x^2+y^2 \leq 1 \end{array} \right.$ 的上侧, Ω 为 Σ 和 Σ_0 所围区域,则

$$\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 2y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + 3(z - 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma + \Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 2y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + 3(z - 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$- \iint_{\Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + 2y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + 3(z - 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} 6 \, \mathrm{d}v - 0 = 2\pi.$$

(5) 设 Σ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ $(0\leq z\leq h)$, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 的外法向量的方向余弦,则 $\iint\limits_{\Sigma} (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S=$ _______.

解 记
$$\Sigma_0$$
 为圆域 $\left\{ \begin{array}{ll} z=h, \\ x^2+y^2 \leq h^2 \end{array} \right.$ 的上侧, Ω 为 Σ 和 Σ_0 所围区域,则

$$\iint_{\Sigma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS$$

$$= \iint_{\Sigma} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$

$$= \iint_{\Sigma + \Sigma_0} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$

$$- \iint_{\Sigma_0} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$

$$= 2 \iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dv - \iint_{\Sigma_0} h^2 \, dx \, dy = 2 \iiint_{\Omega} z \, dv - \pi h^4$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h d\rho \int_\rho^h z \rho \, dz - \pi h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4.$$

(1) 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, Σ_1 是四分之一球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($y\geq$ $0, z \ge 0$),则(

(A)
$$\oiint x \, dS = 4 \iint x \, dS.$$
(B)
$$\oiint y \, dS = 4 \iint y \, dS.$$

(B)
$$\iint y \, dS = 4 \iint y \, dS.$$

(C)
$$\iint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z \, dS$$

(C)
$$\oint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma_{2}} z \, dS.$$
(D)
$$\oint_{\Sigma} yz \, dS = 4 \iint_{\Sigma_{2}} yz \, dS.$$

解 曲面 Σ 被坐标面 xOy 和 zOx 分割成四个部分,其余三部分分别与 Σ_1 关于坐标 面 xOy, zOx 和平面 z=-y 对称,且对于选项中的四个被积函数只有函数 f(x,y,z)=x在对称点处有都能相同的函数值. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma} x \, \mathrm{d}S = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} x \, \mathrm{d}S.$$

选 A.

(2) 设 Σ 是半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \ge 0$), Σ_1 是八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 =$ $a^2 (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0), \text{ M}$

(A)
$$\iint_{\Sigma} x \, \mathrm{d}S = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, \mathrm{d}S$$

(A)
$$\iint_{\Sigma} x \, dS = 4 \iint_{\Sigma} x \, dS.$$
 (B)
$$\iint_{\Sigma} y \, dS = 4 \iint_{\Sigma} x \, dS.$$

(C)
$$\iint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma} x \, dS$$

(C)
$$\iint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS.$$
 (D)
$$\iint_{\Sigma} xyz \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz \, dS.$$

解 由对称性得

$$\iint\limits_{\Sigma} z \, \mathrm{d}S = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} z \, \mathrm{d}S = 4 \iint\limits_{\Sigma_1} x \, \mathrm{d}S.$$

选 C.

(3) 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧,则下列四组积分中,同一组的两个积分 均为零的是().

$$(\mathsf{A}) \oiint x^2 \,\mathrm{d}S, \ \oiint x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

(B)
$$\iint x \, dS$$
, $\iint x \, dy \, dz$.

(C)
$$\oiint x^2y \,dS$$
, $\oiint x^2y \,dz \,dx$. (D) $\oiint x \,dS$, $\oiint x^2 \,dy \,dz$.

(D)
$$\oiint x \, \mathrm{d}S$$
, $\oiint x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.

(4) 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分,则 $\oint x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = ().$

(A)
$$8 \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$
. (B) $4 \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$.

(C)
$$2 \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$
. (D) 0.

解 用 Ω 表示以 Σ 为边界曲面的球域,则

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2 \iiint\limits_{\Omega} (x+y+z) \,\mathrm{d}V = 0.$$

选 D.

(5) 已知
$$\frac{(x+ay)\,\mathrm{d} x+y\,\mathrm{d} y}{(x+y)^2}$$
 为某函数的全磁分,則 $a=($).

(A) -1. (B) 0. (C) 1. (D)

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x + ay}{(x + y)^2} = \frac{(a - 2)x - ay}{(x + y)^3}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x + y)^2} = \frac{-2y}{(x + y)^3}.$$

令
$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x+ay}{(x+y)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{(x+y)^2}$$
 得 $a=2$. 选 D.

3. 计算
$$\oint_L \frac{x\cos y \, dy - \sin y \, dx}{x^2 + \sin^2 y}$$
, 其中 L 是圖周 $x^2 + y^2 = 1$, 方向为逆时针.

解 令 $P=\frac{-\sin y}{x^2+\sin^2 y},~Q=\frac{x\cos y}{x^2+\sin^2 y}$,则在不含点 $(0,k\pi)$ $(k\in \mathbf{N})$ 的区域内 P 和 Q 具有一阶连续偏导数,且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\cos y \left(-x^2 + \sin^2 y\right)}{\left(x^2 + \sin^2 y\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

用 L_1 表示顶点为 $A\left(-1,-\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(1,-\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的矩形的边界曲线,方向为逆时针,根据格林公式有

$$\begin{split} \oint_{L} \frac{x \cos y \, dy - \sin y \, dx}{x^{2} + \sin^{2} y} &= \oint_{L_{1}} \frac{x \cos y \, dy - \sin y \, dx}{x^{2} + \sin^{2} y} \\ &= \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \frac{x \cos y \, dy - \sin y \, dx}{x^{2} + \sin^{2} y} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2} + 1} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y \, dy}{1 + \sin^{2} y} + \int_{1}^{-1} \frac{-1}{x^{2} + 1} \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y \, dy}{1 + \sin^{2} y} \\ &= 2 \arctan x \Big|_{-1}^{1} + 2 \arctan(\sin y) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{split}$$

4. 设在上半平面 $D=\{(x,y)|y>0\}$ 内,函数 f(x,y) 具有连续偏导数,且对任意的 t>0 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L, 都

$$\oint_{\Gamma} y f(x,y) dx - x f(x,y) dy = 0.$$

证
$$\Leftrightarrow P = yf(x,y), Q = -xf(x,y)$$
, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x,y) + yf_2'(x,y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x,y) - xf_1'(x,y).$$

在 $f(tx, ty) = t^{-2}f(x, y)$ 两边对 t 求导, 得

$$xf_1'(tx, ty) + yf_2'(tx, ty) = -2t^{-3}f(x, y).$$

令 t=1, 得 $xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y)$. 由此得到

$$f(x,y) + yf'_2(x,y) = -f(x,y) - xf'_1(x,y),$$

从而 $\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 因此

$$\oint_L y f(x, y) dx - x f(x, y) dy = 0.$$

5. 计算

$$I = \iint \frac{x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

解令

$$P = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

则在不包含原点 O(0.0,0) 的区域上 P,Q,R 具有连续一阶偏导数,且由

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{z^2 + z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

得到

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

用 Σ_0 表示球面 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 的内侧,其中 ε 是充分小的正数,使得 Σ_0 被包含在 Σ 之内.用 Ω 表示以 Σ 和 Σ_0 为边界曲面的区域, Ω_0 表示球域 $x^2+y^2+z^2\leq \varepsilon^2$. 于是

$$I = \iint_{\Sigma + \Sigma_0} \frac{x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \iint_{\Sigma_0} \frac{x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \iiint_{\Omega} 0 \, \mathrm{d}V - \frac{1}{\varepsilon^3} \oint_{\Sigma_0} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_0} 3 \, \mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon^3} 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = 4\pi.$$

6. 计算

$$I = \oint_{L} (y^{2} - z^{2}) dx + (2z^{2} - x^{2}) dy + (3x^{2} - y^{2}) dz,$$

其中 L 是平面 x+y+z=2 与柱面 |x|+|y|=1 的交线,从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

解 设 Σ 为平面 x+y+z=2 上由 L 所围成部分的上侧,则 Σ 的法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

 Σ 在坐标面 xOy 上的投影为 $D_{xy} = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\}$. 于是由 Stokes 公式得

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - z^2 & 2z^2 - x^2 & 3x^2 - y^2 \end{array} \right| dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_{\Sigma} (-8x - 4y - 6z) dS$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{3}} \iint\limits_{D_{xy}} (x - y + 6)\sqrt{3} dx dy$$

$$= -2 \iint\limits_{D_{xy}} 6 dx dy = -12 \cdot (\sqrt{2})^2 = -24.$$

7. 计算

$$I = \iint [f(x,y,z) + x] \mathrm{d}y \mathrm{d}z + [2f(x,y,z) + y] \mathrm{d}z \mathrm{d}x + [f(x,y,z) + z] \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

其中 f(x,y,z) 为连续函数, Σ 是平面 x-y+z=1 在第四卦限部分的上侧.

螺 曲面 Σ上点的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

于是

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{3}} [f(x, y, z) + x - 2f(x, y, z) - y + f(x, y, z) + z] dS$$
$$= \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{3}} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

8. 设函数 f(x,y) 在区域 D 上有连续的二阶偏导数,且满足关系式 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, 证明:

(1) 等式

$$\oint_{L} f \frac{\partial f}{\partial n} \, dS = \iint_{D} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^{2} \right] \, dx \, dy$$

成立, 其中 L 为 D 的边界, n 为 L 的外法向量;

(2) 若 f(x,y) 在 L 上恒等于零,则 f(x,y) 在 D 上也恒等于零.

证 (1) 选取 L 的方向,使 L 是 D 的正向边界。设 L 上的单位外法向量为 $n=(\cos\alpha,\cos\beta)$,则与 L 方向一致的单位切向量为 $S=(-\cos\beta,\cos\alpha)$. 于是

$$\begin{split} \oint_L f \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}S &= \oint_L f \Big(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta \Big) \, \mathrm{d}S \\ &= \oint_L - f \frac{\partial f}{\partial y} \, \mathrm{d}x + f \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_D \Big[\frac{\partial}{\partial x} \Big(f \frac{\partial f}{\partial x} \Big) + \frac{\partial}{\partial y} \Big(f \frac{\partial f}{\partial y} \Big) \Big] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_D \Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial x} \Big)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \Big(\frac{\partial f}{\partial y} \Big)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_D \Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y} \Big)^2 \Big] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \end{split}$$

(2) 若 f(x,y) 在 L 上恒等于零,则由 (1) 得

$$\iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint\limits_{L} f \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}S = 0.$$

由此得到在 $D \perp \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 从而 f(x,y) 是常数函数. 又因在 $L \perp f(x,y) = 0$, 所以 在 $D \perp f(x,y) = 0$.

9. 设 f(x) 具有连续的导数,且 $f(0)=\frac{1}{2}$. 已知在不包含 x 釉上点的平面区域上曲线积分 $\int_{r} [x+f(x)]y^2\mathrm{d}x+yf(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关,试求 f(x).

解 因为曲线积分与路径无关、所以

$$\frac{\partial}{\partial y}[(x+f(x))y^2] = \frac{\partial}{\partial x}(yf(x)),$$

从而有

$$f'(x) - 2f(x) = 2x.$$

这是一阶线性非齐次微分方程, 通解为

$$f(x) = e^{2x} \left(\int 2xe^{-2x} dx + C \right) = Ce^{2x} - x - \frac{1}{2}.$$

代入条件 $f(0) = \frac{1}{2}$ 得 C = 1. 于是 $f(x) = e^{2x} - x - \frac{1}{2}$.

 ${f 10}.$ 在过点 O(0,0) 和 A(1,0) 的曲线族 $y=a(x-x^2)$ 中求一条曲线 L,使沿该曲线 从 O 到 A 的积分 $I(a)=\int_I (1+ay)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

解

$$I(a) = \int_0^1 \left[1 + a^2(x - x^2) + (2x + ax - ax^2)a(1 - 2x) \right] dx$$
$$= \frac{a^2}{6} - \frac{a}{3} + 1.$$

令

$$I'(a) = \frac{a}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

得唯一驻点 a=1. 因 $I''(a)=\frac{1}{3}>0$, 所以 a=1 是 I(a) 的极小值点,从而也是最小值点。 因此所求曲线为 $y=x-x^2$.

11. 求密度均匀的曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t (-\infty < t \le 0)$ 的质心.

解 所给曲线 L 的弧长为

$$s = \int_{L} ds = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{(e^{t} \cos t - e^{t} \sin t)^{2} + (e^{t} \sin t + e^{t} \cos t)^{2} + e^{2t}} dt = \sqrt{3}.$$

于是质心的坐标为

$$\begin{split} \overline{x} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{L} x \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t} \mathrm{cost} \sqrt{\left(\mathrm{e}^{t} \cos t - \mathrm{e}^{t} \mathrm{sint}\right)^{2} + \left(\mathrm{e}^{t} \sin t + \mathrm{e}^{t} \mathrm{cost}\right)^{2} + \mathrm{e}^{2t}} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t} \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{2}{5}, \\ \overline{y} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{L} y \, \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t} \sin t \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{5}, \\ \overline{z} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{L} y \, \mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}. \end{split}$$

12. 求均匀球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被锥面 $z\tan\beta=\sqrt{x^2+y^2}(0<\beta\leq\frac{\pi}{2})$ 截在其内部分的质心.

%。 设所给曲面 Σ 的密度为 μ , 质心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$. 由对称性知 $\overline{x}=\overline{y}=0$. Σ 在坐标面 xOy 上的投影为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\sin^2\beta\}$. Σ 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 从而

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

于是

$$\overline{z} = \frac{\iint \mu z \, dS}{\iint \mu \, dS} = \frac{\iint \mu a \, dx \, dy}{\iint \int \mu a \, dx} = \frac{\mu \pi a^3 \sin^2 \beta}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a \sin \beta} \frac{\mu a \rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \, d\rho} = \frac{\mu \pi a^3 \sin^2 \beta}{2\mu \pi a^2 (1 - \cos \beta)} = \frac{a}{2} (1 + \cos \beta).$$

最终得到质心坐标为 $(0,0,\frac{a}{2}(1+\cos\beta))$.

13. 求密度为 $\mu = |xy|$ 的半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2(z \ge 0)$ 关于 z 轴的转动惯量, a > 0.

解 所给曲面 Σ 在坐标面 xOy 上的投影为 $D_{xy} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$. Σ 的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 从而

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

于是 Σ 关于 z 轴的转动惯量为

$$\begin{split} I_z &= \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2) |xy| \, \mathrm{d}S = a \iint\limits_{D_{xy}} \frac{(x^2 + y^2) |xy|}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= a \int_0^{2\pi} \, \mathrm{d}\theta \int_0^a \frac{\rho^5}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} |\sin\theta \cos\theta| \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{u = \sqrt{a^2 - \rho^2}}{4a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^a (a^2 - u^2)^2 \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{16}{15} a^6. \end{split}$$

14. 设力的方向指向坐标原点,力的大小与质点到原点的距离成正比. 质点由 (a,0) 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a,b>0) 送时针方向移动到 (0,b),求力所做的功.

解 力 F = -k(xi + yj), 质点移动的曲线为

$$L: x = a\cos\theta$$
, $y = b\sin\theta$, $\theta = 0$ 9 $\frac{\pi}{2}$.

于是力所做的功为

$$W = -k \int_{L} x \, dx + y \, dy$$
$$= -k \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[a^{2} \cos \theta (-\sin \theta) + b^{2} \sin \theta \cos \theta \right] \, d\theta$$
$$= \frac{1}{2} (a^{2} - b^{2}) k.$$

15. 设 $A=\operatorname{grad}\varphi(r)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi(r)$ 具有二阶导数, 求满足 $\operatorname{div} A\equiv 0$ 的 $\varphi(r)$.

解由

$$A = \operatorname{grad} \varphi(r) = \left(\frac{\underline{x}}{r}\varphi'(r), \frac{\underline{y}}{r}\varphi'(r).\frac{\underline{z}}{r}\varphi'(r)\right)$$

得

$$\begin{split} \operatorname{div} & A = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \varphi'(r) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \varphi'(r) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \varphi'(r) \right) \\ & = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \varphi'(r) + \frac{x^2}{r^2} \varphi''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \varphi'(r) + \frac{y^2}{r^2} \varphi''(r) \\ & + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) \varphi'(r) + \frac{z^2}{r^2} \varphi''(r) \\ & = \varphi''(r) + \frac{2}{r} \varphi'(r). \end{split}$$

因此 $\varphi'(r)$ 满足微分方程

$$\varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = 0.$$

这是可降阶的二阶方程. 令 $\varphi'(r)=p$, 则 $\varphi''(r)=p'$. 代入方程得

$$p'+\frac{2}{r}p=0.$$

解此一阶线性方程得 $p = \frac{C}{r^2}$. 因此 $\varphi'(r) = \frac{C}{r^2}$. 由此得到

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

16. 设 Σ 是一个光滑封闭曲面,向量场 F 的分量有连续的二阶偏导数, n^0 是 Σ 上 ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞ ∞

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}^{0} \ \mathrm{d}S = 0.$$

证 设 F = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k, 则

$$\text{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
 = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

用 Ω 表示以 Σ 为边界曲面的闭区域,则由高斯公式有

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{rot} F \cdot n^{0} \, dS$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \, dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \, dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial^{2} R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^{2} Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^{2} P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^{2} R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^{2} Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^{2} P}{\partial y \partial z} \right) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_{\Omega} 0 \, dx \, dy \, dz = 0.$$

第十一章 级数

习题 11-1

1. 判断下列级数的敛散性,并求出其中收敛级数的和:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}.$$

解 由于

$$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right),$$

故级数部分和

$$S_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{5n - 4} - \frac{1}{5n + 1} \right)$$
$$= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n + 1} \right) \stackrel{\mathbf{d}}{\to} \frac{1}{5} \quad (n \to \infty),$$

所以级数收敛、级数的和为 $\frac{1}{5}$.

$$(2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n-1}{n}.$$

解 由于级数部分和

$$S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln n - \ln(n+1) = \ln \frac{1}{n+1},$$

故 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, 所以级数发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right).$$

解 由于级数部分和

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} \to \frac{3}{2} \quad (n \to \infty),$$

所以级数收敛,级数的和为 $\frac{3}{2}$.

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

解 由于

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)},$$

故级数部分和

$$S_{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right) \to \frac{1}{4} \quad (n \to \infty),$$

所以级数收敛, 级数的和为 $\frac{1}{4}$

(5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right).$$

解 由于

$$\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right),$$

故级数部分和

$$\begin{split} S_n &= \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \right) \\ &+ \left(\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \right) \\ &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{2} \right) + \left(\sqrt{1} - \sqrt{n+1} \right) \\ &= 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \to 1 - \sqrt{2} \quad (n \to \infty), \end{split}$$

所以级数收敛,级数的和为 $1-\sqrt{2}$.

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi.$$

解 由于

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1, & n = 2k, & k \in \mathbb{N}^+, \\ -1, & n = 2k-1, & k \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

由此知 $\lim_{n\to\infty} \cos n\pi \neq 0$, 从而级数发散.

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1\neq 0,$$

从而级数发散.

(8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \right).$$

解 由于调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,而几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$ 发散.

2. 已知数列
$$\{u_n\}$$
 收敛于 a ,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛,且其和为 u_1-a .

证 由于级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$$
 的部分和

$$S_n = u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + \dots + u_n - u_{n+1}$$

= $u_1 - u_{n+1} \rightarrow u_1 - a(n \rightarrow \infty)$,

所以级数收敛, 且其和为 $u_1 - a$.

3. 已知数列
$$\{u_n\}$$
 满足 $\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$, 证明:

(1) 级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$$
 发散;

(2)
$$\exists u_n \neq 0 \ (n=1,2,\cdots)$$
 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = \frac{1}{u_1}$.

证 (1) 由于级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$$
 的部分和

$$S_n = u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \dots + u_{n+1} - u_n$$

= $u_{n+1} - u_1 \to \infty (n \to \infty),$

所以级数发散.

$$(u_n)$$
 知来 $u_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的部分和
$$\sigma_n = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \cdots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$
$$= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \to \frac{1}{u_1} (n \to \infty),$$

所以级数收敛,且其和为 $\frac{1}{u_1}$

习题 11-2

1. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$$

$$\mathbf{R} \quad \frac{1}{n(2n-1)} \le \frac{1}{n^2}, \ \overline{m} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \underline{\psi}$$
 数,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} \ \underline{\psi}$ 敛.

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+4)}.$$

解
$$\frac{2}{(n+1)(n+4)} < \frac{2}{n^2}$$
, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+4)}$ 收敛.

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

解
$$\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\frac{1}{n}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}<\frac{2}{n\sqrt{n}},$$
 而 p $(p=\frac{3}{2}>1)$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛,故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ 收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

解
$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
, 而 $p \ (p=\frac{3}{2}>1)$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 收敛.

(5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$$

解 由 $0 < \frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{N})$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 为正项级数. 因当 $n \to \infty$ 时 $\sin \frac{\pi}{3^n} \sim \frac{\pi}{3^n}$, 而几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\pi}{3^n}$ 收敛,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛。

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$
.

解 由 $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{N})$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ 为正项级数. 因当 $n \to \infty$ 时 $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ 收敛.

(7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$$
 $(a > 1)$.

解 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以由比较判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ 发散.

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

解 因

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,所以由比较判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 发散.

2. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

解 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1$,所以由比值判别法得级数收敛。

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^n}{(n+1)n^n} = \frac{1}{n+1} (1+\frac{1}{n})^n \to 0 < 1$$
,所以由比值判别法得级数收敛.

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$
.

解 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2 > 1$,所以由比值判别法得级数发

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^n}}.$$

解 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^{n+1}}} \frac{\sqrt{n^n}}{2^n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}} \to 0 < 1$,所以由比值判别法得级数收敛.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}.$$

解
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^4}{(n+1)!} \frac{n!}{n^4} = \frac{(n+1)^3}{n^4} \to 0 < 1$$
,所以由比值判别法得级数收敛.

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$
.

解
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi n}{2^{n+1}}} = 1$$
. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{2^{n+1}}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\pi(n+1)}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{\pi n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac$

 $\frac{1}{2} < 1$,由比值判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{2^{n+1}}$ 收敛. 再由比较判别法得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ 收敛.

(7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$$
.

解 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$,所以由根值判别法得级数收敛

(8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n+1}{3n-2})^n$$

解 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1$,所以由根值判别法得级数收敛

(9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$$
.

$$\mathbf{R}$$
 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi n^2}{2^n}} = 1$. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n^2}{3^n}$, $\sqrt[n]{\frac{\pi n^2}{3^n}} \to \frac{1}{3} < 1$, 故由根值判别法得级数

 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n^2}{3^n}$ 收敛. 再由比较判别法得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}$ 收敛.

$$(10) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}.$$

解 取函数 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^p}$. 所以当 x 充分大时,不论 p 为何值,都能有 f'(x)<0,即函数 f(x) 为非负单调减,且有

$$\int_{3}^{n} \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^{p}} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p} [(\ln \ln n)^{1-p} - (\ln \ln 3)^{1-p}], & p \neq 1, \\ \ln (\ln \ln n) - \ln (\ln \ln 3), & p = 1. \end{cases}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_3^n \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} (\ln \ln 3)^{1-p}, & p>1, \\ +\infty, & p\leq 1. \end{cases}$$

于是根据积分判别法, 所给的级数在 p > 1 时收敛, 当 $p \le 1$ 时发散.

$$3.$$
 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 并举例说明其逆命题不成立.

证 因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,故 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,从而存在某个常数 C 满足 $|u_n|< C$ $(n\in \mathbb{N})$,故 $0< u_n< C$ 对任意的 $n\in \mathbb{N}$ 成立.因此 $0< u_n^2< Cu_n$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}Cu_n$ 收敛,根据比较判别法得正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

其逆命题不成立,例如正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

4. 讨论级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$$
 的敛散性, 其中 $a>0$ 为实数.

解 由于 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+1} = a$,根据根值判别法得: 当 a>1 时级数发散; 当 a<1 时级数收敛. 而当 a=1 时, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e} \neq 0$,故此时,级数发散.

综上所述, 级数当 $a \ge 1$ 时发散, 当 a < 1 时收敛.

5 剩前级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4} dx$$
 的敛散性.

解 因为
$$0 < \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4} dx < \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
 ,且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,故级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4} dx$$
 收敛.

6. 利用级数收敛的性质证明:

(1)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$$
 (2) $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ (a > 1). 证 (1) 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{1}{2(2n+1)} (1+\frac{1}{n})^n \to 0 < 1,$$

所以由比值判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ 收敛. 因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

(2) 因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n} \to 0 < 1,$$

所以由比值判别法得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ 收敛. 因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

习题 11-3

1. 判断下列级数的敛散性, 若级数收敛, 指出是绝对收敛还是条件收敛:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$$

解 因 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^{n-1}}} = \frac{1}{3} < 1$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛.

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$$
.

解 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, 又 $\frac{\ln n}{\ln(n+1)} < 1$, 故 $\{\frac{1}{\ln n}\}$ 单调递减。根据莱布尼茨判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$ 是条件收敛的.

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
.

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,又 $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}}<1$,故 $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ 单调递减。根据莱布尼茨判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛的.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn}{n^2} (k \ 为常数).$$

解 因为 $|\frac{\sin kn}{n^2}| \le \frac{1}{n^2}$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin kn}{n^2}$ 绝对收敛.

$$(5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{n(\ln n)^2}.$$

解 因为 $|\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n(\ln n)^2}| \leq \frac{1}{n(\ln n)^2}$, 由第二节例 13 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛,所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{n(\ln n)^2}$ 绝对收敛.

(6)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} \sin \frac{\pi}{n}.$$

解 因为 $\left|\frac{1}{(\pi)^n}\sin\frac{\pi}{n}\right| \leq \frac{1}{(\pi)^n}$,而级数 $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\pi)^n}$ 收敛,所以级数 $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n}$ 绝对收敛.

(7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

解 级数是交错级数. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$ 数列 $\{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\}$ 严格单减趋于 0. 根据莱布尼兹判别法,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 收敛. 因为当 $n\to\infty$ 时

$$\left| (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ 发散,所以原级数条件收敛。

(8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{10}}{2^n}.$$

解 因为 $|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{10}}{2^n}|=\frac{n^{10}}{2^n}$,而 $\frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^{10}}=\frac{(n+1)^{10}}{2n^{10}}\to \frac{1}{2}<1$,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{2^n}$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{10}}{2^n}$ 绝对收敛.

(9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(\sqrt{n^2+1} \pi)$$
.

解 因为 $\tan(\sqrt{n^2+1}\pi) = \tan(\sqrt{n^2+1}-n)\pi = \tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$,而 $0 < \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 严格单减趋于 0. 根据莱布尼兹判别法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(\sqrt{n^2+1}\pi)$ 收敛.因为当 $n \to \infty$ 时

$$\left| (-1)^n \tan(\sqrt{n^2 + 1} \pi) \right| = \tan \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \sim \frac{\pi}{2n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n}$ 发散,所以原级数条件收敛.

(10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$
.

解 显然布尼兹级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是收敛的,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

(11)
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$$

解 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n-1},$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right)$ 发散, 从而原级数发散.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

证 因为 $0 \le |u_n v_n| \le \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 收敛,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

3. 设 a 和 b 为任意实数,证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛,且它们的乘积等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$.

证 设 $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $v_n = \frac{b^n}{n!}$. 因为 $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1$, 所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ 绝对收敛. 同理可证 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛. 又因为

$$u_1v_n + u_2v_{n-1} + \dots + u_nv_1 = \frac{a^1}{1!} \frac{b^n}{n!} + \frac{a^2}{2!} \frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{a^n}{n!} \frac{b^1}{1!} .$$

$$= \frac{(a+b)^{n+1}}{(n+1)!},$$

根据定理 11.11 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

$$= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

习题 11-4

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{|x|}{2}$,所以当. $\frac{|x|}{2}<1$,即 |x|<2 时,幂函数绝对收敛,收敛半径为 2.

当 x=2 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为发散的,当 x=-2 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛. 所以幂级数的收敛域为 [-2,2).

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 2^n} x^n.$$

解 因为 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}$, 所以级数收敛半径为 2.

当 x=-2 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3}$ 收敛. 当 x=2 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$ 发散. 故级数的収敛域 β (-2,2).

(3)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 5^n}.$$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{5}$, 所以级数收敛半径为 5.

当 $x = \pm 5$ 时级数发散. 故级数的收敛域为 (-5,5).

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$$
.

解 令 x-5=t. 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\sqrt{n}}$, 且 |t|=|x-5|<1. 即 4< x<6 时,级数绝对收敛,则原级数收敛半径为 1.

x=6 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, x=4 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,故级数的收敛域为 (4,6].

(5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (2x+1)^n$$
.

解 令 2x+1=t, 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$, 知 |t|=|2x+1|<1 即 -1< x<0 时,级数绝对收敛,则原级数收敛半径为 $\frac{1}{2}$.

当 x = -1 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛. 当 x = 0 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 故级数的收敛域为 [-1,0).

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$
.

解 因为 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e$, 所以级数收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

当 $x = \pm \frac{1}{e}$ 时级数发散. 故级数的收敛域为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

(7)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}.$$

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x|$, 所以 |x|<1 时级数绝对收敛,收敛区间为 (-1,1), 收敛半径为 1

当 x=-1 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 收敛. 当 x=1 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 发散. 故级数的收敛域为 [-1,1).

(8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

解 $u_n(x) = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)|x|^2}{2n(2n+1)^2} = 0$. 故 $R = +\infty$. 级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(9)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x|^2$, 故当 $|x|^2<1$ 即 |x|<1 时,级数绝对收敛,则收敛半径为 1.

当 x=1 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 收敛,当 x=-1 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ 收敛,所以原级数的收敛域为 [-1,1].

(10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}.$$

解 令 $(x-1)^2 = t$, 则级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{4^n}$, t < 4 时级数绝对收敛, 故收敛区间为 (-1,3), 收敛半径为 2.

当 x = -1 或 x = 3 时级数发散. 故级数的收敛域为 (-1,3).

2. 求下列幂级数的和函数:

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}.$$

解 容易求得所给幂级数的收敛域为 (-1,1). 设其和函数为 S(x), 则对任意 $x \in (-1,1)$ 有

$$\int_0^x S(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^\infty x^n = \frac{x^2}{1-x},$$

所以 $S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}, |x| < 1.$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$$
.

解 容易求得所给幂级数的收敛域为 (-1,1). 设其和函数为 S(x), 则对任意 $x \in (-1,1)$ 有

$$\int_0^x S(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \frac{n+1}{2} x^n,$$

$$\int_0^x \left(\int_0^x S(x) \, \mathrm{d}x \right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty x^{n+1} = \frac{x^2}{2(1-x)}.$$

从而

$$S(x) = \left(\frac{x^2}{2(1-x)}\right)'' = \frac{1}{(1-x)^3}, |x| < 1.$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}.$$

解 容易求得所给幂级数的收敛域为 (-1,1). 设其和函数为 S(x), 则对任意 $x \in$

(-1,1) 有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1,$$

在上式两边从 0 到 x 积分有所以

$$S(x) - S(0) = \int_0^x \frac{1}{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(\frac{1 + x}{1 - x}).$$

由所给幂级数易知 S(0) = 0, 于是得到 $S(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$, |x| < 1.

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$
.

解 所给幂级数的收敛域为 (-1,1]. 设其和函数为 S(x), 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

对任意 $x \in (-1,1)$, 在上式两边从 0 到 x 积分有 $S(x) - S(0) = \ln(1+x)$. 由所给幂级数 易知 S(0) = 0, 于是得到

$$S(x) = \ln(1+x), x \in (-1,1).$$

因为幂级数的和函数 S(x) 在收敛域 (-1,1] 内连续,从而在点 x=1 处左连续,而函数 $\ln(1+x)$ 在点 x=1 处连续,所以在 x=1 处也有 $S(x)=\ln(1+x)$. 因此

$$S(x) = \ln(1+x), x \in (-1,1].$$

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

解 所给幂级数的收敛域为 [-1,1], 设其和函数为 S(x), 则

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

而

$$[xS(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \ [xS(x)]'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \ x \in (-1,1).$$

所以

$$[xS(x)]' = \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x),$$

从而

$$xS(x) = \int_0^x -\ln(1-x) \, \mathrm{d}x = (1-x)\ln(1-x) + x, \quad x \in (-1,1).$$

当 $x \neq 0$ 时, $S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) + 1$,由原函数 S(0) = 0,其端点 S(1) = 1,而 $S(-1) = 1 - \ln 2$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1; \\ 0, & x = 0; \\ 1 + (\frac{1}{x} - 1) \ln(1 - x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1). \end{cases}$$

(6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}.$$

 $\mathbf F$ 所给幂级数的收敛域为 [-2,2) ,设其和函数为 S(x),则

$$[xS(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n-1} = \frac{1}{2-x}.$$

故

$$xS(x) = \int_0^x \frac{1}{2-x} dx = \ln 2 - \ln(2-x), \quad x \in (-2,2).$$

当 $x \neq 0$ 时, $S(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{2}{2-x}$,由原函数 $S(0) = \frac{1}{2}$. 因为幂级数的和函数 S(x) 在点 x = -2 处右连续,而函数 $\frac{1}{x} \ln \frac{2}{2-x}$ 在点 x = -2 处连续,所以

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{2}{2-x}, & x \in [-2,0) \cup (0,2), \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ 的和函数,并计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-2}}{3^n}$ 的和.

解 容易求得所给幂级数的收敛域为 (-1,1). 设其和函数为 S(x), 则对任意 $x \in$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$
$$= x \Big(\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} dx \Big)'$$
$$= x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Big)' = x \Big(x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \Big)'.$$

III.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \, \mathrm{d}x \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

₩

$$S(x) = x \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}, |x| < 1.$$

由此又得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-2}}{3^n} = \frac{S(\frac{2}{3})}{4} = \frac{15}{2}.$$

习题 11-5

1. 把下列函数展为 x 的幂级数:

(1) 2^x .

$$\mathbf{p} \quad f(x) = 2^x = e^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\ln 2)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) $\cos^2 x$.

$$\mathbf{f}(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(3) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解
$$\Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$
, 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \cdots, \quad x \in (-1,1).$$

所以

$$f(x) = \int_0^x f'(x)dx$$

$$= x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7}x^7 - \cdots$$

$$= x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n! 2^n (2n+1)} x^{2n+1}.$$

当 $x=\pm 1$ 时级数为莱布尼兹级数,收敛. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $x=\pm 1$ 连续,所以上面的 展开式在 $x=\pm 1$ 也成立,即有

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1}, \quad x\in[-1,1].$$

(4)
$$(1+x)e^{-x}$$
.

解

$$f(x) = (1+x)e^{-x}$$

$$= (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-n)}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(5)
$$(1+x)\ln(1+x)$$
.

解 因为

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1,1),$$

所以

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

当 $x=\pm 1$ 时级数收敛,且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 在 $x=\pm 1$ 连续. 所以上面的展开式在 $x=\pm 1$ 也成立,即有所以

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

(6) $x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$.

解 根据

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ \ x \in [-1,1],$$

$$\ln\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n}, \quad x \in [-1,1],$$

得当 x ∈ [-1,1] 时

$$x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} x^{2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

(7)
$$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$$

解 由于

$$f(x) = \frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2}$$

$$= \frac{12 - 5x}{7} \left(\frac{1}{x + 6} + \frac{1}{1 - x} \right)$$

$$= \frac{12 - 5x}{7} \left(\frac{1}{6} \frac{1}{1 + \frac{x}{6}} + \frac{1}{1 - x} \right),$$

利用函数 $\frac{1}{1+x}$ 和 $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{1+\frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6^n}, \quad x \in (-6,6)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1).$$

所以

$$f(x) = \frac{12}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{6^{n+1}} + 1 \right] x^n - \frac{5}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{6^{n+1}} + 1 \right] x^{n+1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n, \quad x \in (-1,1).$$

(8)
$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$
.

解 由于

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{x}{4} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-x} + \frac{x+1}{(1-x)^2} \right)$$

利用函数 $\frac{1}{1+x}$ 和 $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1).$$

$$\frac{x+1}{(1-x)^2} = (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^n, \quad x \in (-1,1).$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [2n + 3 + (-1)^n] x^{n+1}$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} [2n + 1 - (-1)^n] x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

2. 把下列函数在指定的点处展为泰勒级数:

(1)
$$\frac{1}{3-r}$$
, $\not\equiv x_0 = 1 \not\sqsubseteq$.

解 利用函数 $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (\frac{x-1}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x-1}{2})^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (x-1)^n \quad x \in (-1,3).$$

(2) $\ln x$, 在 $x_0 = 2$ 处.

解 利用函数 ln(1+x) 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = \ln[2 + (x - 2)] = \ln 2 + \ln(1 + \frac{x - 2}{2})$$
$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} (x - 2)^n, \quad x \in (0, 4].$$

(3) $\sin x$, $\alpha x_0 = -\frac{\pi}{4} \ \Omega$.

解 利用函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的麦克劳林展开式得

$$\begin{split} f(x) &= \sin x = \sin[(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4}] \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sin \frac{\pi}{4} \cos(x + \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Big[\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4}) \Big] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x + \frac{\pi}{4})^{2n+1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x + \frac{\pi}{4})^{2n} \Big], \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{split}$$

(4)
$$\frac{1}{x^2+5x+6}$$
, $\alpha x_0=1$ Δx_0

解 由于

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$
$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{3}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{4}},$$

利用函数 $\frac{1}{1+x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^n}, \quad x \in (-2,4)$$
$$\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{4^n}, \quad x \in (-3,5).$$

所以

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) (x-1)^n, \quad x \in (-2,4).$$

(5)
$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$
, $\notin x_0=-4$ \oint .

解 由于

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - (\frac{x + 4}{3})} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (\frac{x + 4}{2})},$$

利用函数 $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{3^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n, \quad x \in (-6, -2).$$

(6)
$$\ln \frac{1}{x^2+2x+2}$$
, $\not \equiv x_0 = -1 \not \equiv 0$.

解 利用函数 ln(1+x) 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = -\ln[1 + (x+1)^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^{2n}, x \in [-2, 0].$$

解
$$f(x) = 3 + 2x - 4x^2 + 7x^3$$
 的各阶导数为

$$f'(x) = 2 - 8x + 21x^{2}; f''(x) = -8 + 42x; f'''(x) = 42;$$

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (n > 4);$$

由此可知

$$f(x) = 8 + 15(x - 1) + 17(x - 1)^{2} + 7(x - 1)^{3}, x \in (-\infty, +\infty)$$

(8)
$$\frac{1}{x}$$
, 在 $x = 1$ 处.

解 利用函数 $\frac{1}{1+x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - 1)^n, \quad x \in (0, 2).$$

3. 证明双曲正弦和双曲余弦函数的幂级数展开式:

$$sh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty),
ch x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

üΕ

$$\begin{split} & \sh x = \frac{1}{2} (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \Big) \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, & x \in (-\infty, +\infty), \\ & \ch x = \frac{1}{2} (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \Big) \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, & x \in (-\infty, +\infty). \end{split}$$

4. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

解 由于对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{n+1} x^2 = 0,$$

所以级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 又对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\begin{split} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} (x \cos x + \sin x). \end{split}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}.$$

解 由于对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} \frac{n!}{2n+1} x^2 = 0,$$

所以级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 又对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!} (x^2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n$$
$$= (2x^2+1)e^{x^2}.$$

(3)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n.$$

解 由于对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{2^{n+1}(n+1)!} \frac{2^n n!}{n^2 + 1} |x| = 0,$$

所以级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 又对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1) + n + 1}{2^n n!} x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (\frac{x}{2})^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (\frac{x}{2})^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{x}{2})^n$$

$$= (\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1) e^{\frac{x}{2}}.$$

(4)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n$$
.

解 由于对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+3)!} \frac{(2n+1)!}{n^2} |x| = 0,$$

所以级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 对任意 $x \in (0, +\infty)$, 有

$$\begin{split} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n+1) - (2n+1) + 1}{(2n+1)!} x^n \\ &= \frac{\sqrt{x}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} (\sqrt{x})^{2n-1} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (\sqrt{x})^{2n+1} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{4} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \frac{1}{4} \operatorname{ch} \sqrt{x} + \frac{1}{4\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right). \end{split}$$

对任意 $x \in (-\infty, 0)$, 有

$$\begin{split} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)!} x^n &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(2n+1) - (2n+1) + 1}{(2n+1)!} (-|x|)^n \\ &= \frac{\sqrt{|x|}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \left(\sqrt{|x|}\right)^{2n-1} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{|x|}\right)^{2n} \\ &+ \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\sqrt{|x|}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{-\sqrt{|x|}}{4} \sin \sqrt{|x|} - \frac{1}{4} \cos \sqrt{|x|} + \frac{1}{4\sqrt{|x|}} \sin \sqrt{|x|} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{-x}} \sin \sqrt{-x} - \cos \sqrt{-x}\right). \end{split}$$

而当 x=0 时,由所给级数得其和为 0.总之,和函数为

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{-x}} \sin \sqrt{-x} - \cos \sqrt{-x} \right), & -\infty < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sinh \sqrt{x} - \cosh \sqrt{x} \right), & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

5. 用构造幂函数法求下列数项级数的和:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}.$$

解 因为 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ 都收敛,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \Big).$$

考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1}$. 它们的收敛域都是 [-1,1]. 设它们的和函数分别是 $S_1(x)$ 和 $S_2(x)$. 由

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

得

$$S_1(x) = S_1(0) + \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

$$S_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{x^2}{1+x^2}$$

得

$$S_2(x) = S_2(0) + \int_0^x \frac{x^2}{1+x^2} dx = x - \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(S_1(1) - S_2(1)) = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$$

解 利用 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的麦克劳林展开式得

$$\begin{split} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [(2n+1)-1]}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Big) \\ &= \frac{1}{2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + 1 \Big) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \end{split}$$

(3)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}.$$

解 利用 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式得

$$\begin{split} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} &= \frac{1}{3} \Big(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 2} \Big) \\ &= \frac{1}{3} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big) \\ &= \frac{1}{3} \Big[\ln 2 + \ln 2 - \Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Big) \Big] \\ &= \frac{1}{3} \Big(2 \ln 2 - \frac{5}{6} \Big). \end{split}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

解 利用 e^x 的麦克劳林展开式得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1) + n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e.$$

6. 利用幂级数展开式、求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 在 x = 0 处的 n 阶导数.

解 利用函数 e^x 的麦克劳林展开式得

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, x \in (-\infty, +\infty).$$

因此
$$f^{(2n-1)}(0) = 0$$
, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$.

习 题 11-6

1. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^\infty v_n(x)$ 都在集合 E 上一致收敛,证明函数项级数 $\sum_{n=1}^\infty (u_n(x)+v_n(x))$ 也在 E 上一致收敛.

证 对任给的 $\epsilon>0$,因为函数项级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^\infty v_n(x)$ 都在集合 E 上一致收敛,则对一切 $x\in E$ 和一切 $p\in \mathbb{N}^+$,分别存在 N_1 , $N_2\in \mathbb{N}^+$,使得当 $n>N_1$ 时,有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

当 $n > N_1$ 时,有

$$|v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots+v_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 使得当 n > N 时, 有

$$|(u_{n+1}(x) + v_{n+1}(x)) + (u_{n+2}(x) + v_{n+2}(x)) \cdots + (u_{n+p}(x) + v_{n+p}(x))|$$

$$\leq |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| + |v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \cdots + v_{n+p}(x)|$$

$$< \varepsilon.$$

所以数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) + v_n(x))$ 也在 E 上一致收敛.

2. 若 $v_n(x) \geq |u_n(x)|$, 且 $\sum_{n=1}^\infty v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 在区间 I 上也一致收敛.

证 对任给的 $\varepsilon>0$,因为函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,则对一切 $x\in I$,存在 $N\in \mathbb{N}^+$,使得当 n>N 时,有

$$|v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \cdots + v_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

义 $v_n(x) \geq |u_n(x)|$, 从而当 n > N 时, 有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)|$$

$$\leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)|$$

$$\leq |v_{n+1}(x) + v_{n+2}(x) + \dots + v_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上也一致收敛.

3. 证明下列级数在指定的区间上一致收敛:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, (-\infty, +\infty).$$

ίŒ

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, (-2,+\infty).$$

ίŒ

$$|u_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right| < \frac{1}{2^n-2}, \quad x \in (-2,+\infty),$$

而正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n - 2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$$
, $[0,+\infty)$.

ίŒ

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right| \le \frac{x}{2n^2x} = \frac{1}{2n^2}, \quad x \in [0, +\infty),$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$$
, $0 \le x < +\infty$.

证 因为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \ge \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x < +\infty,$$

所以 $0 \le x^2 \mathrm{e}^{-nx} \le x^2 \frac{2}{n^2 x^2} = \frac{2}{n^2}$,而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

4. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛,其中 a 为正常数,并计算其和函数 S(x) 的积分 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(x)\,\mathrm{d}x$.

证 由
$$(ne^{-nx})' = -n^2e^{-nx} < 0$$
 得

$$ne^{-nx} \le ne^{-na}, x \in [a, +\infty).$$

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-na}$, 有

$$\sqrt[n]{ne^{-na}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e^a} \rightarrow \frac{1}{e^a} < 1.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-na}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛. 显然 $n e^{-nx}$ 在 $[\ln 2, \ln 3]$ 连续,从而

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} n \mathrm{e}^{-nx} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

5. 证明函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且具有连续的导函数.

证 由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。又因对每个 $n \in \mathbb{N}^+$,函数 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都连续,所以 f(x) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

由于对每个 $n \in \mathbb{N}^+$, 函数 $(\frac{\sin nx}{n^3})' = \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都连续,又 $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛,所以 f(x) 具有连续的导函数.

习题 11-7

1. 下面给出的是以 2π 为周期的函数在一个周期内的表达式

(1)
$$f(x) = x$$
, $x \in [-\pi, \pi)$; (2) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $x \in [-\pi, \pi)$.

整片厂开成傅里叶级数,并作出傅里叶级数和函数的图形.

 \mathbf{H} (1) f(x) 是在 $[-\pi,\pi)$ 上满足收敛定理的奇函数,有

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

 $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{(-1)^{n-1} 2}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$

所以, 在 f(x) 的连续点, 即当 $x \neq (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

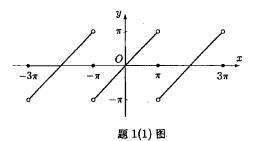
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

而在 $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = 0.$$

傅里叶级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq (2k-1)\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \\ 0, & x = (2k-1)\pi \ (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$



(2) f(x) 是在 $[-\pi,\pi)$ 上满足收敛定理的奇函数,有

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \sin nx \, dx = \frac{(-1)^{n-1} 8n}{\pi (4n^2 - 1)}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

所以, 在 f(x) 的连续点, 即当 $x \neq (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

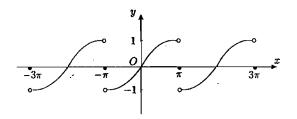
$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{4n^2 - 1} \sin nx.$$

而在 $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = 0.$$

傅里叶级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq (2k-1)\pi & (k \in \mathbf{Z}), \\ 0, & x = (2k-1)\pi & (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$



題 1(2) 图

2. 下面给出的是以 2π 为周期的函数在一个周期内的表达式:

(1)
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi < x \le 0, \\ 1 - \frac{2x}{\pi}, & 0 < x \le \pi; \end{cases}$$
 (2) $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \le x \le 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

将其展开成傅里叶级数.

 \mathbf{M} (1) 不难看出 f(x) 满足收敛定理的条件. 由于

$$a_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(1 + \frac{2x}{\pi} \right) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right) \cos nx dx$$

$$= \frac{-4}{\pi^{2} n^{2}} (\cos n\pi - 1), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{\pi^{2} n^{2}}, \quad n = 1, 3, \cdots, \\ 0, \quad n = 2, 4, 6, \cdots. \end{cases}$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(1 + \frac{2x}{\pi} \right) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi} \right) \sin nx dx$$

$$= 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

所以, 在 f(x) 的连续点, 即当 $x \neq (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

而在 $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=-1=f((2k-1)\pi).$$

所以

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2) 不难看出 f(x) 满足收敛定理的条件. 由于

$$a_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{-\pi}{2},$$

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-\pi) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi n^{2}} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{(-1)^{n} - 1}{\pi n^{2}} \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-\pi) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx$$

$$= \frac{1 - (-1)^{n} 2}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

所以,在 f(x) 的连续点,即当 $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时,有

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n 2}{n} \sin nx \right]$$

而在 f(x) 的间断点 $x = 2k\pi$ 和端点 $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, 有

$$S(2k\pi) = \frac{1}{2}[f(0+0) + f(0-0)] = -\frac{\pi}{2} \neq f(2k\pi),$$

$$S((2k-1)\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = 0 \neq f((2k-1)\pi).$$

所以傅里叶级数为

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n 2}{n} \sin nx \right], \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

3. 设

$$f(x) = \left\{ egin{array}{ll} -rac{\pi}{2}, & -\pi \leq x < -rac{\pi}{2}, \ x, & -rac{\pi}{2} \leq x < rac{\pi}{2}, \ rac{\pi}{2}, & rac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{array}
ight.$$

将 f(x) 展开为以 2π 为周期的傅里叶级数,作出其和函数 S(x) 的图形,并计算 $S\Big(\frac{5}{2}\pi\Big)$ 和 $S\Big(-\frac{11}{3}\pi\Big)$ 的值.

解 不难看出 f(x) 满足收敛定理的条件. 由于

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos nx \, dx$$

$$= 0 \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{n^{2}\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

所以, 在 f(x) 的连续点, 即当 $x \neq (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] \sin nx.$$

而在 $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=0.$$

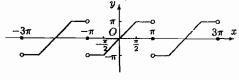
傅里叶级数的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq (2k-1)\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \\ 0, & x = (2k-1)\pi \ (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

根据和函数 S(x) 的周期性及 S(x) 与 f(x) 的关系得

$$S\left(\frac{5}{2}\pi\right) = S\left(\frac{1}{2}\pi\right) = f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi,$$

$$S\left(-\frac{11}{3}\pi\right) = S\left(\frac{1}{3}\pi\right) = f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{3}\pi.$$



题3区

4. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+2\pi)^2, & -\pi \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$ 写出 f(x) 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数 S(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式.

解 根据 S(x) 与 f(x) 的关系得

$$S(x) = \left\{ egin{array}{ll} (x+2\pi)^2, & -\pi \leq x < 0, \ 2\pi^2, & x = 0, \ x^2, & 0 < x \leq \pi. \end{array}
ight.$$

5. 把函数

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{4}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

展开成傅里叶级数,并由其推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

解 不难看出 f(x) 满足收敛定理的条件. 由于

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos nx \, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} \right) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2n} (1 - \cos n\pi) = \frac{1}{2n} [1 - (-1)^{n}], \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因为在 $(-\pi,0) \cup (0,\pi)$ 中 f(x) 连续,所以傅里叶级数收敛于 f(x) ,而在 f(x) 的间断点 x=0 和区间 $[-\pi,\pi]$ 的两个端点 $\pm\pi$,有

$$S(0) = \frac{1}{2}[f(0+0) + f(0-0)] = 0,$$

$$S(\pm \pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = 0.$$

所以 f(x) 展开成傅里叶级数为

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \dots + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x, \quad x \in (-\pi,0) \cup (0,\pi).$$

故傅里叶级数的和函数 S(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi), \\ 0, & x = 0, \pm \pi. \end{cases}$$

根据和函数 S(x) 与 f(x) 的关系得

$$S(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

6. 设 f(x) 是以 2π 为周期的函数, 证明 f(x) 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$

证 由定积分的知,对于周期为l的连续函数f(x),有

$$\int_a^{a+l} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^l f(x) \, \mathrm{d}x,$$

即定积分 $\int_a^{a+l} f(x) dx$ 的值与 a 无关.

由于 f(x), $\cos nx$, $\sin nx$ 均是周期为 2π 的周期函数, 所以 $f(x)\cos nx$ 和 $f(x)\sin nx$ 也是周期为 2π 的周期函数, 因此

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\pi + 2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

类似可证 $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$, $n = 1, 2, \cdots$.

7. 设 f(x) 是以 2π 为周期的函数,且当 $x\in(0,2\pi]$ 时, $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$,将 f(x) 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

解 不难看出 f(x) 满足收敛定理的条件. 由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \, \mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cos nx \, \mathrm{d}x = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

得 f(x) 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

而在 f(x) 在 $x=2k\pi$, 有

$$S(2k\pi) = \frac{1}{2}[f(0+0) + f(2\pi - 0)] = 0.$$

故傅里叶级数的表达式为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

8. 将 f(x) = 2x + 3, $x \in [0, \pi]$, 展开为以 2π 为周期的余弦级数.

解 对 f(x) 进行偶延拓, 有

$$F(x) = \left\{ egin{array}{ll} 2x + 3, & 0 \le x \le \pi, \\ -2x + 3, & -\pi < x < 0. \end{array}
ight.$$

函数 F(x) 的傅里叶系数 $b_n = 0, n = 1, 2, \dots,$ 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x + 3 \, dx = 2\pi + 6$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (2x + 3) \cos nx \, dx = \frac{4}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \begin{cases} \frac{-8}{\pi n^2}, & n = 1, 3, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

在 $(0,\pi)$ 内各点 F(x) 连续,且 F(x)=f(x),所以傅里叶级数收敛于 f(x) 在点 x=0,傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F(0+0)+F(0-0))=0\neq f(0).$$

在点 $x = \pi$, 傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F(-\pi+0)+F(\pi-0))=0\neq f(\pi).$$

于是

$$2x + 3 = \pi + 3 - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x, \quad x \in (0,\pi).$$

9. 将 $f(x)=x(\pi-x)$ $(x\in[0,\pi])$ 展开为以 2π 为周期的正弦级数,并作出该余弦级数和函数的图形.

解 对函数 f(x) 作奇延拓

$$F(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi, \\ x(x + \pi), & -\pi < x \le 0 \end{cases}$$

则 F(x) 在 $(-\pi,\pi)$ 上满足收敛定理,知

$$a_0 = 0; \quad a_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{-4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \cdots.$$

在 $(0,\pi)$ 内各点 F(x) 连续,且 F(x)=f(x),所以傅里叶级数收敛于 f(x). 在点 x=0,傅里叶级数收敛于

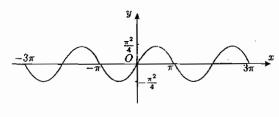
$$\frac{1}{2}(F(0+0)+F(0-0))=0=f(0).$$

在点 $x = \pi$, 傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F(-\pi+0)+F(\pi-0))=0=f(\pi).$$

于是

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin(2n-1)x, \quad x \in [0,\pi].$$



题 1(2) 图

10. 将 $f(x)=2x^2$, $x\in[0,\pi]$, 分别展开为以 2π 为周期的正弦级数和余弦级数.

解 对 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上延拓为奇函数,有

$$F_1(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \pi, \\ -2x^2, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

符合收敛条件, 且 $a_0 = 0$; $a_n = 0$, $n = 1, 2, \cdots$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi} \left[\frac{-2}{n^3} + (-1)^n \left(\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2}{n} \right) \right].$$

在 $(0,\pi)$ 内各点 $F_1(x)$ 连续,且 $F_1(x)=f(x)$,所以傅里叶级数收敛于 f(x) 在点 x=0,傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F_1(0+0)+F_1(0-0)]=0=f(0).$$

在点 $x = \pi$, 傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F_1(-\pi+0)+F_1(\pi-0))=0\neq f(\pi).$$

于是

$$2x^{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2}{n^{3}} + (-1)^{n} \left(\frac{2}{n^{3}} - \frac{\pi^{2}}{n} \right) \right] \sin nx, \quad x \in [0, \pi).$$

另外,对 f(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上延拓为偶函数

$$F_2(x) = 2x^2, (-\pi \le x \le \pi).$$

符合收敛条件,且 $b_n=0$, $n=1,2,\cdots$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 dx = \frac{4}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x^2 \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{8}{n^2 \pi} (\pi \cos n\pi) = (-1)^n \frac{8}{n^2}$$

在 $(0,\pi)$ 内各点 $F_2(x)$ 连续,且 $F_2(x)=f(x)$,所以傅里叶级数收敛于 f(x) 在点 x=0,傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F_2(0+0)+F_2(0-0)]=0=f(0).$$

在点 $x = \pi$, 傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(F_2(-\pi+0)+F_2(\pi-0))=2\pi^2=f(\pi).$$

于是

$$2x^{2} = \frac{2}{3}\pi^{2} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^{2}} \cos nx, \quad x \in [0, \pi].$$

11. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \\ x+1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

展开为以 2 为周期的傅里叶级数,作出傅里叶级数和函数 S(x) 的图形,并计算 $S\left(-\frac{7}{2}\right), S(2)$ 和 S(3) 的值.

解 f(x) 在 $x \in [-1,1]$ 上符合收敛定理,故

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x \, \mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1) \, \mathrm{d}x = 1$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x \cos n\pi x \, \mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1) \cos n\pi x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \cos n\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x \sin n\pi x \, \mathrm{d}x + \int_0^1 (x+1) \sin n\pi x \, \mathrm{d}x$$

$$= 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \sin n\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{1 - 3 \cdot (-1)^n}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因为在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 中 f(x) 连续, 所以傅里叶级数收敛于 f(x) , 在 f(x) 的间断点 x=0 处,傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(f(0-0)+f(0+0))=\frac{1}{2}\neq f(0).$$

在区间的两个端点 $x = \pm 1$ 处,傅里叶级数收敛于

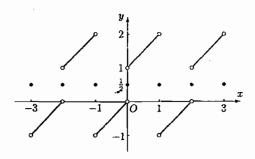
$$\frac{1}{2}(f(-1+0)+f(1-0))=\frac{1}{2}\neq f(\pm 1).$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 3 \cdot (-1)^n}{n} \sin n\pi x, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1).$$

根据和函数 S(x) 的周期性及 S(x) 与 f(x) 的关系得

$$S\left(-\frac{7}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, \quad S(2) = S(0) = \frac{1}{2}, \quad S(3) = S(1) = \frac{1}{2}.$$



题 11 图

12. 将函数 f(x) = 2 + |x|, $x \in [-1,1]$ 展开成为以 2 为周期的傅里叶级数.

解 f(x) 在 $x \in [-1,1]$ 上符合收敛定理, 故

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (2 - x) dx + \int_0^1 (2 + x) dx = 5$$

$$n_1 = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^0 (2 - x) \cos n\pi x dx + \int_0^1 (2 + x) \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] = 0, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^0 (2 - x) \sin n\pi x dx + \int_0^1 (2 + x) \sin n\pi x dx$$

$$= 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因为在 (-1,1) 中 f(x) 连续,所以傅里叶级数收敛于 f(x) ,在区间的两个端点 $x=\pm 1$ 处,傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(f(-1+0)+f(1-0))=3=f(\pm 1).$$

于是

$$f(x) = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x, \quad x \in [-1, 1]$$

13. 将函数 .

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x \le 4, \\ x - 6, & 4 < x \le 8 \end{cases}$$

展开成为以 8 为周期的傅里叶级数, 并画出傅里叶级数的和函数 S(x) 的图形.

解 f(x) 在 $x \in [0,8]$ 上符合收敛定理, 故

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{4} \left[\int_0^4 (2 - x) dx + \int_4^8 (x - 6) dx \right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\int_0^4 (2 - x) \cos \frac{n\pi x}{4} dx + \int_4^8 (x - 6) \cos \frac{n\pi x}{4} dx \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \frac{-16}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] + \frac{16}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \right\} = \frac{8}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n], \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\int_0^4 (2 - x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx + \int_4^8 (x - 6) \sin \frac{n\pi x}{4} dx \right]$$

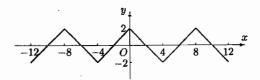
$$= 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因为在 (0,8) 中 f(x) 连续,所以傅里叶级数收敛于 f(x),在区间的两个端点 x=0,8 处,傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}(f(0+0)+f(0-0))=2=f(0)=f(8).$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}, \ x \in [0,8].$$



题 13 图

复习题十一

1. 填空題:

(1) 若
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{2n}$$
 在 $x=2$ 处条件收敛,则其收敛域为 _______;

解 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{2n}$ 在 x=2 处条件收敛,所以其在 x=0 处也条件收敛.根据幂级数的性质得其收敛域为 [0,2].

(2) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 x=0 处收敛,在 x=-4 处发散,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 _______.

解 由已知得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在 x=5 处收敛,在 x=1 处发散. 由此得到它 的收敛域为 (1,5].

(3) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 R=3,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 _______;

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 有相同的的收敛半径 3 ,故收敛区间为 (-2,4).

 $\sum_{n=1}^{a_n x}$ 有相问的的收敛十代 3 ,放收或应问为 (-2,3).

(4) 函数
$$f(x) = a^x$$
 $(a > 1, a \neq 1)$ 的麦克劳林级数为 ______;

$$\mathbf{f} \quad a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(5) 幂级数
$$1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$$
 的和函数为 ______;

解 设
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$
, 其收敛域为 $(-1,1)$. 当 $x \in (-1,1)$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n\right)' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

从而
$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1,1).$$

及数
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$$
 的和为 ______;

解 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,有

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n},$$

$$(x+1)e^{x} = (xe^{x})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^{n},$$

$$(x^{2} + 3x + 1)e^{x} = [x(x+1)e^{x}]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{2}}{n!} x^{n},$$

故
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 5e.$$

(7) 符号函数
$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$
, $(-\pi \le x \le \pi)$ 的傅立叶级数为 _____

解 符号函数 f(x) 为奇函数, 故 $a_n = 0$, $n = 0, 1, \cdots$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n].$$

因为 f(x) 在 $(-\pi,0) \cup (0,\pi)$ 内连续,而傅立叶级数的和函数 S(x) 在间断点 x=0 和两个端点 $\pm \pi$ 处的值

$$S(0) = \frac{1}{2}[f(0+0) + f(0-0)] = 0 = f(0),$$

$$S(\pm \pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)] = 0 \neq f(\pm \pi).$$

因此

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

- 2. 选择题:
- (1) 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则下列级数中必定收敛的为 ().

(A)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}.$$

$$(\mathbf{B})\,\sum_{n=1}^\infty a_n^2.$$

(C)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1}-a_{2n})$$
.

$$\mathbf{(D)} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}).$$

解 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 也收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 必定收敛. 故选 (D).

- (2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,则下列结论中正确的是 ().
 - (A) 若 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
 - (B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$, 則级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
 - (C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.
 - (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,则存在非零常数 λ ,使得 $\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$.
- 解 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}na_n=\lambda\neq 0$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 选 B.
- (3) 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ ().
- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 收敛性与 a 的取值有关.

解 因为
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$$
 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 发散. 选 C.

(4) 设正项级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
 收敛,常数 $k\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\frac{k}{n}\right)a_{2n}$ (

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 k 有关. 解 当 $k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时有 $\frac{k}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 从而

$$\left| (-1)^n \left(n \tan \frac{k}{n} \right) a_{2n} \right| \sim k a_{2n}.$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_{2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{k}{n}\right) a_{2n}$ 绝对收敛. 选 (C).

(5) 若
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$
 在 $x=-1$ 收敛,则在 $x=2$ 处级数 ().

(B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 可能收敛也可能发散.

解 由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 x=-1 收敛及阿贝尔定理知幂级数在区间 (-1,3) 内绝对收

(6) 幂级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n}$$
 的和函数 $S(x)$ 为 ().

$$(A) \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}.$$

(C)
$$\frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}.$$

对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n}, \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!} x^{n},$$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

$$x \operatorname{sh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n},$$

故选 (D).

(7) 若幂级数
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(2n+3)!} x^{2n}$$
 的和函数为 $S(x)$, 则 $S(0)$ 等于 ().

(A) 0.

(B) $\frac{1}{6}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

解 $S(0) = \frac{1}{6}$. 故选 (B).

3. 判断下列级数的敛散性:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n+1}}.$$

解 因为 $\frac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n+1}} \sim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{6}}$, 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{7}{6}}$ 收敛,故原级数收敛.

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 1}}{n^2 + 1}$$

解 因为 $\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

(3)
$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}}} + \cdots$$

解 $\Leftrightarrow a_0 = 0, a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots,$ 则 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},$ 可得 $\lim_{n \to \infty} a_n = 2.$

故

$$\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+a_n}}{2-a_n}} = \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2+a_n}}} \to \frac{1}{2}.$$

根据比值判别法知原级数收敛。

4. 讨论下列级数的绝对收敛与条件收敛性:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$$

解 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 前 n 项和为 S_n , 则

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln (n+1) - \ln n = \ln (n+1)$$

极限不存在,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散. 容易验证 $\left\{ \ln \frac{n+1}{n} \right\}$ 单调递减趋于 0 ,故原级数条件收敛.

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

解 当 p>1 时, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ 收敛,故原级数绝对收敛.当 $0< p\leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ 发散, $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 单调递减趋于 0 ,故原级数条件收敛.当 $p\leq 0$ 时,通项不趋于 0 ,故原级数发散.

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$$

解 因为

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \frac{1}{e} < 1.$$

故原级数绝对收敛.

(4)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

解 因为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n \sqrt{n} - 1}{n - 1}.$$

容易验证 $\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 单调递减趋于 0 ,故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛. 但 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散,故原级数发散.

5. 设函数 f(x) 在区间 [-1,1] 上有定义,在 x=0 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}=0$,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由题设知, f(x) 在 x=0 的某邻域内具有二阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

由 f''(x) 的连续性知, $\exists M > 0$, 使得 $|f''(x)| \leq M$, 于是

$$|f(x)| = \frac{1}{2}|f''(\xi)x^2| \le \frac{M}{2}x^2,$$

令
$$x = \frac{1}{n}$$
, 得 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \le \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}$. 因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

6. 求下列幂级数的收敛域及和函数:

(1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n+1}.$$

解 由于

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1,$$

易知其收敛域为 (-1,1). 当 $x \in (-1,1)$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right]'$$
$$= x \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \approx 1,$$

易知其收敛域为 (0,2). 当 $x \in (0,2)$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = (x-1) \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \right]'$$
$$= (x-1) \left(\frac{x-1}{2-x} \right)' = \frac{x-1}{(2-x)^2}.$$

(3)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} x^n$$
.

解 由于

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2 - 1} = 1,$$

易知其收敛域为 [-1,1]. 当 $x \in (-1,1)$ 时,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$$

当 x=1 时,

$$S(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{4}.$$

当 $x \neq 1$ 时,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} dx = x \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -x \ln(1-x),$$

ī

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \sum_{n=2}^{\infty} x^n \, \mathrm{d}x = \int_0^x \frac{x^2}{1-x} \, \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x).$$

故

$$S(x) = \begin{cases} \frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x} \ln(1-x), & x \in [-1,0) \cup (0,1), \\ 0, & x = 0, \\ \frac{3}{4}, & x = 1. \end{cases}$$

7. 求级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x^2 + x + 1)^n$$
 的收敛域.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1,$$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} t^n$ 的收敛域为 [-1,1]. 解不等式 $-1 \le x^2 + x + 1 \le 1$ 得 $-1 \le x \le 0$. 故原级数的收敛域为 [-1,0].

8. 把下列函数展为 x 的幂级数:

(1)
$$f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$$
.

解 利用函数 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln(1+x)(1+x^2) = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^n + x^{2n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right] - 1} [1 + (-1)^n]}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1];$$

(2)
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

解 利用函数 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \right]$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

(3)
$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

解 $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^3}$. 利用函数 $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad x \in (-1,1),$$

和

$$\frac{x}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}, \quad x \in (-1,1).$$

因此

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \quad x \in (-1,1).$$

(4)
$$f(x) = (1 + e^x)^3$$
.

解 $f(x) = (1 + e^x)^3 = 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}$. 利用函数 $\frac{1}{e^x}$ 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = 1 + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$$
$$= 8 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

(5)
$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

解 利用函数 $(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林展开式得

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} t^{2n}\right] dt$$
$$= x + \sum_{n=1}^\infty \frac{(2n - 1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1];$$
$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=1}^\infty \frac{(2n - 1)!!}{(2n + 2)!!} x^{2n+2}, \quad x \in [-1, 1].$$

所以

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

(6) $f(x) = \sin 4x \cos x.$

解 利用函数 sin x 的麦克劳林展开式得

$$f(x) = \sin 4x \cos x = \frac{\sin 5x + \sin 3x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} [(5x)^{2n-1} + (3x)^{2n-1}]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(5^{2n-1} + 3^{2n-1}\right) x^{2n-1}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

9. 将下列函数在指定点处展开为泰勒级数:

(1)
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$
, $f(x) = 2$ \Lambda.

解由于

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 1} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1 - (x - 2)} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{x - 2}{3}} \right),$$

而利用函数 $\frac{1}{1+x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{1-(x-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n, \quad x \in (1,3)$$
$$\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n}, \quad x \in (-1,5).$$

所以

$$f(x) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right] (x-2)^n, \quad x \in (1,3).$$

(2)
$$f(x) = \frac{x-1}{4-x}$$
, $\notin x = 1$ $\&$.

解 由于

$$f(x) = \frac{x-1}{4-x} = \frac{(x-1)}{3} \frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}$$

而利用函数 $\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林展开式得

$$\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}, \ x\in(-2,4).$$

所以

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x-1)^n, \quad x \in (-2,4).$$

(3)
$$f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$$
, $\notin x = 1$ \oint .

解由于

$$f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln 3 + \ln(1 + \frac{x - 1}{3}) + \ln 4 + \ln(1 + \frac{x - 1}{4}),$$

利用函数 ln(1+x) 的麦克劳林展开式得

$$\ln(1 + \frac{x-1}{3}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} (x-1)^n, \quad x \in (-2, 4],$$

$$\ln(1 + \frac{x-1}{4}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n4^n} (x-1)^n, \quad x \in (-3, 5].$$

111

$$f(x) = \ln 12 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) (x-1)^n, \quad x \in (-2,4].$$

(4)
$$f(x) = \int_1^x \ln t \, dt$$
, $\notin x = 1 \, \text{$\rlap/$\Delta}$.

解由于

$$f(x) = \int_1^x \ln t \, dt = \int_1^x \ln[1 + (t - 1)] \, dt,$$

利用函数 ln(1+x) 的麦克劳林展开式得

$$\ln[1+(t-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (t-1)^n, \quad t \in (0,2].$$

所以

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} (x-1)^{n+1}, \quad x \in (0,2].$$

10. 下面给出的是周期函数在一个周期内的表达式,将各函数展开成傅里叶级数:

(1) $f(x) = x \sin x \ x \in [-\pi, \pi).$

解 因 f(x) 为偶函数, 所以 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] \, dx$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - 1}, \qquad n = 2, 3, \dots.$$

而在 $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=0=f(x).$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上傅里叶级数处处收敛于 f(x). 因此

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1}\cos nx, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

(2)
$$f(x) = x - [x]; x \in [-1, 1).$$

解

$$f(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = f(x)$$

即 f(x) 是以 1 为周期的周期函数,满足收敛定理的条件. 由于

$$a_0 = 2 \int_0^1 \{x - [x]\} dx = 2 \int_0^1 x \, dx = 1,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \{x - [x]\} \cos 2nx dx = 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x \, dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = 2 \int_0^1 \{x - [x]\} \sin 2nx dx = 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x \, dx = -\frac{1}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

而在 x = k $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2} \neq f(x).$$

所以

$$x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}, \quad x \neq k, \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

(3)
$$f(x) = |\sin x|, x \in (-\pi, \pi].$$

解 因为 f(x) 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数,所以 $b_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$,而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \, dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{2}{n^2 - 1} [\cos(n - 1)\pi - 1], \quad n = 2, \dots.$$

于是 f(x) 的傅里叶级数是余弦级数

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}, -\infty < x < +\infty.$$

(4)
$$f(x) = x, x \in (a, a + 2l).$$

解 f(x) 满足收敛定理的条件. 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \, dx = 2(a+l),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l} \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx = -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

而在 x = a + 2lk $(k \in \mathbb{Z})$ 处傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = a + l \neq f(x).$$

 $x=a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x\neq c+2lk, \ k\in\mathbf{Z}.$

