《线性代数及其应用》

一、行列式

1、n阶排列，逆序数，奇(偶)排列，余子式，代数余子式

2、展开定理(定理2.3.3，推论2.3.4)

按行展开：$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$，$i = 1, 2, \cdots, n$

按列展开：$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$，$j = 1, 2, \cdots, n$

推论2.3.4　$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j$；

$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j$.

3、行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 初等变换性质 $\begin{cases} \boldsymbol{A} \xrightarrow[\text{或}\boldsymbol{c}_i \times k]{r_i \times k} \boldsymbol{B} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{k}|\boldsymbol{B}|; \\ \boldsymbol{A} \xrightarrow[\text{或}\boldsymbol{c}_j + l\boldsymbol{c}_i]{\boldsymbol{r}_i + l\boldsymbol{r}_j} \boldsymbol{B} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|; \\ \boldsymbol{A} \xrightarrow[\text{或}\boldsymbol{c}_i \leftrightarrow \boldsymbol{c}_j]{\boldsymbol{r}_i \leftrightarrow \boldsymbol{r}_j} \boldsymbol{B} \Rightarrow |\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|. \end{cases}$

(3) 若行列式有两列(行)成比例，则行列式等于零.

(4)

若行列式的某一列(行)可以拆成两列(行)之和，则行列式可以拆成两个行列式之和，即

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_j, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n|.$$

4、行列式计算：三角化法(性质)；

降阶法(性质+展开定理)；

范德蒙德、三对角行列式的结论.

5、分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|;$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_m \\ \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

二、矩阵

1、矩阵及其运算(加法、数乘、乘法、幂、转置、方阵的行列式、分块运算)

(1) 求方阵的幂(① 二项式定理 例3.1.12；② 秩为1的矩阵 例3.1.13、70页26题；

③ 可对角化 例6.2.12)

(2) 转置的性质 $\begin{cases} (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{cases}$

(3) 方阵的行列式 $\begin{cases} |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|; \\ |k\boldsymbol{A}_n|=k^n|\boldsymbol{A}|; \\ |\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \end{cases}$

2、初等变换及初等矩阵

(1) 左行右列(矩阵的初等变换可用矩阵乘法来表示)

$$\begin{cases} \text{初等行变换} \begin{cases} \boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \times k} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}_m[i(k)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}; \\ \boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i + l r_j} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}_m[i+j(l)]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}; \\ \boldsymbol{A} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}_m[i,j]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}; \end{cases} \\ \text{初等列变换} \begin{cases} \boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i \times k} \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n[i(k)]=\boldsymbol{C}; \\ \boldsymbol{A} \xrightarrow{c_j + l c_i} \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n[i+j(l)]=\boldsymbol{C}; \\ \boldsymbol{A} \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n[i,j]=\boldsymbol{C}. \end{cases} \end{cases}$$

(2) 初等矩阵都是可逆的，且初等矩阵的逆仍是初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}\left[i(k)\right]^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i(\tfrac{1}{k})\right];$$
$$\boldsymbol{E}\left[i+j(l)\right]^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i+j(-l)\right];$$
$$\boldsymbol{E}\left[i,j\right]^{-1}=\boldsymbol{E}\left[i,j\right].$$

3、可逆矩阵

(1) 定义、性质 $\begin{cases} |\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}; \\ (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}; \qquad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}; \\ (k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}; \qquad (\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}. \end{cases}$

(2) 伴随矩阵 ① $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

② $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

③ $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, & r(\boldsymbol{A})\le n-2. \end{cases}$

(3) 判定：$\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$ 或推论3.3.5

(4) 逆矩阵的求法 ① 伴随矩阵法 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$；

② $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 及运算律(推论3.3.5)；

③ 初等变换法 $\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}\right] \xrightarrow{\text{行}} \left[\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}\right]$.

(5) 矩阵方程的求解：$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$，已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$.

① 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

法1 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

法2 $\left[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{C}\right] \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{X}\right] \Rightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$.

② 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆(不一定是方阵).

$$\begin{aligned} AX=C &\Leftrightarrow A[X_1,X_2,\cdots,X_s]=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s] \\ &\Leftrightarrow [AX_1,AX_2,\cdots,AX_s]=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s] \\ &\Leftrightarrow AX_i=\gamma_i, i=1,2,\cdots,s \end{aligned}$$

通过求解 s 个线性方程组来确定矩阵 X，如求解 $AX_1=\gamma_1$ 可以确定 X 的第一列.

4、分块矩阵

加法与数量乘法、转置、乘法(例3.4.4)、求幂 $\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} A^m & O \\ O & B^m \end{bmatrix}\right)$

分快矩阵求逆 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$.

4、矩阵的秩与矩阵的相抵

(1) 矩阵的秩与性质

① $0 \le r(A) \le \min\{m,n\}$；

② $r(kA)=r(A),\quad k\ne 0;$

③ $r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$；

④子矩阵的秩不会超过原矩阵的秩;

⑤ $r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=r(A)+r(B)$；

⑥ $r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

⑦ $r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le r(A)($ 或 $r(B))$；

若 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$，其中 $A\in \mathbf{P}^{m\times n}$，$B\in \mathbf{P}^{n\times s}$.

⑧ 设 $A\in \mathbf{R}^{m\times n}$，则 $r(AA^{\mathrm{T}})=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$.

(2) 求矩阵的秩（理论依据：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩）

$$A \xrightarrow{\text{初等(行)变换}} R \text{（行阶梯形矩阵）},$$

则 $r(A)=R$ 的非零行的个数.

(3) 矩阵的相抵(等价)

① $A\cong B \Leftrightarrow r(A)=r(B) \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P,Q, 使得 $PAQ=B$.

② $r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A)$，其中 P,Q 可逆.

③ $r(A)=r \Rightarrow PAQ=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 或 $A=P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q$.

三、线性空间

1、向量组的线性相关性的判断

(1) 证明方法--① 定义法 转化为齐次线性方程组的求解;

② 矩阵的秩 定理4.2.10，

向量组的秩 命题4.2.8--在一般的线性空间上也成立;

③ 坐标化方法(定理5.2.7).

(2) 基本结论

判断向量组线性相关

充要 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量可由其余向量线性表示.

充分 ① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组线性相关，则向量组线性相关.

② 向量组的个数大于分量的个数，则向量组线性相关.

③ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 被个数少于 s 的向量组线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

判断向量组线性无关

① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 任何一个向量都不可由其余向量线性表示.

②

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

③ 一个向量组线性无关，则其任何一个部分组线性无关.

2、等价向量组

(1) 向量组(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，则 r（Ⅰ） $\le r$（Ⅱ）.

(2) 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，则 r（Ⅰ）= r（Ⅱ）.

3、子空间的验证

(1) 非空、加法和数量乘法的封闭;

(2) 生成子空间--例4.3.6，例4.3.8，例5.1.11

4、向量组的秩及极大无关组、(线性)子空间的基与维数

(1)

对于 $\mathbf{P}^n$ 中的向量，写成列向量作初等行变换，确定向量组的秩与极大无关组（例4.2.13）;

对于一般的线性空间($\mathbf{P}^{n\times n},\mathbf{R}[x]_n$)中的向量，利用坐标化方法(定理5.2.7).

(2) 对于 $W=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，则 $\dim W=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$， 即生成子空间的维数与基就是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩与极大无关组.

5、坐标的概念、基变换公式

坐标：$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$.

基变换公式：由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{S}$，即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}.$$

坐标变换公式：

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{\gamma}&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{\gamma}&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{Y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{X}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Y}$$

6、欧氏空间

(1)

内积的概念、长度、正交(正交向量组必线性无关)、施密特正交化、标准正交基（一个向量在标准正交基下的坐标—例4.5.7）.

(2) 正交矩阵定义、性质

性质 ① 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

② 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1.

③ 若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{*}$ 也是正交矩阵.

④ 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

⑤ 若 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 λ^{-1} 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

⑥ 正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值只能是 1 或 -1.

⑦ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基.

四、线性方程组(含参量、不含参量)

1、解的情况

(1) $$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\Rightarrow\begin{cases} r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}}), & \text{无解} \\ r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}})\begin{cases} =n, & \text{唯一解} \\ <n, & \text{无穷多解}\end{cases} \end{cases}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则 $$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}\Rightarrow\begin{cases} |\boldsymbol{A}|\neq 0, & \text{唯一解} \\ |\boldsymbol{A}|=0\begin{cases} r(\boldsymbol{A})=r(\tilde{\boldsymbol{A}}), & \text{无穷多解} \\ r(\boldsymbol{A})\neq r(\tilde{\boldsymbol{A}}), & \text{无解}\end{cases} \end{cases}$$

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$.

2、解的结构

齐次 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$：

(1) 解空间 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$、$\dim\mathrm{N}(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A})=$基础解系所含向量的个数.

(2) 基础解系不唯一，$n-r(\boldsymbol{A})$ 的线性无关的解均可作为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

(2) 结构式：通解=基础解系的任意线性组合.

非齐次 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$：

(1) 非-非=齐.

(2) 结构式：通解=特解＋导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

五、特征值和特征向量

1、特征值和特征向量的定义、性质

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$； $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 具有相同的特征值(特征向量未必相同)；

(3) 定理6.1.14(属于不同特征值的线性无关的特征向量放在一起仍线性无关).

(4)

$$\begin{array}{c|cccc|c} \boldsymbol{A} & k\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^m & f(\boldsymbol{A}) & & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \lambda_0 & k\lambda_0 & \lambda_0^m & f(\lambda_0) & & \lambda_0^{-1} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{X} & \boldsymbol{X} & \boldsymbol{X} & & \boldsymbol{X} \end{array}$$

$W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A}) \subseteq W_{f(\lambda_0)}(f(\boldsymbol{A}))$； $W_{\lambda_0}(\boldsymbol{A}) = W_{\lambda_0^{-1}}(\boldsymbol{A}^{-1})$

2、相似矩阵的定义、性质(秩、行列式、迹、特征值相等，但特征向量未必相同).

相似的判定：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可对角化(实对称矩阵)，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似(正交相似).

3、矩阵的相似对角化

$\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 数域 $\mathbf{P}$ 内有 n 个特征值，每一个特征值的几何重数等于代数重数

（充分条件） $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可对角化

若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则 $r(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数.

4、实对称矩阵的相似对角化

（1）特征值：n 阶实对称矩阵有 n 个实特征值.

（2）特征向量：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交.

（3）

实对称矩阵必正交相似于实对角矩阵(几何重数等于代数重数；实对称矩阵有 n 个线性无关的特征向量).

（4）

若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似(相似) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值.(正交相似 $\Rightarrow$ 既相似，又合同)

六、线性变换

1、线性变换的定义（定义6.4.1）

2、线性变换在一个基下的矩阵(定义6.4.9)

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}$$

3、线性变换在不同基下的矩阵之间的关系(相似) 定理6.4.14

$$\left.\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n) &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\\ \sigma(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) &= (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B}\\ (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) &= (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{S}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$$

七、二次型

1、二次型的矩阵及秩($f \xleftrightarrow{1-1} \boldsymbol{A}$ (对称))

2、矩阵的合同：合同必相抵；

正交相似 $\Rightarrow$ 既相似，又合同

实对称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数与秩相同

3、化二次型为标准形(不唯一)--正交替换法、配方法(满秩线性替换)

4、惯性定理：实二次型的规范形唯一(正、负惯性指数，符号差)

5、正定二次型

（1）判定：① 定义；

② $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零($\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数等于 n)；

③ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同(与正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同的实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 正定)；

④ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{S}$ ，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}$ ；

⑤ $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于零

(2) 必要条件：(i) $a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$ ； (ii) $|A|>0$.

相似与合同的判定：

1、若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 正交相似(既相似又合同).

2、若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可对角化，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

3、若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵， 且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数与秩相同，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同.

4、若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵， $\boldsymbol{B}$ 是不对称矩阵，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不合同，但可以相似.

5、相似必相抵，合同必相抵.