2018-2019-02 期中试题参考答案

一、填空题与单项选择题（共 30 分，每小题 5 分）

1. $a=-3$或 1； 2. $-\dfrac{2}{3}$； 3. $\begin{bmatrix} -5^{m-1} & 3\cdot 5^{m-1} & 0 & 0 \\ -2\cdot 5^{m-1} & 6\cdot 5^{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；（若只有一个子对角块正确，给 3 分）

4. B； 5. A； 6. D.

二、(17 分)解　对方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 施行初等行变换，

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 10 & b \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & b \end{array}\right]$$ ··························5 分

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right],$$ ··························7 分

当 $b=4$ 时，$r(\tilde{A})=r(A)=3<4$，方程组有无穷多解. 此时 ··························10 分

$$\tilde{A}\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-3+7x_3, \\ x_2=\ 1-2x_3, \\ x_4=\ 0 \end{cases}$ 其中 x_3 为自由变量. ··························13 分

则方程组的通解为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \forall k\in\mathbb{P}$. ··························17 分

三、(12 分)解 法 1

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \overset{c_j-c_1}{\underset{j=2,3,\ldots,n}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 2 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ n+a & -a & \cdots & -a & -a \end{vmatrix}$$ ······4 分

$$\xlongequal{r_n+r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 2 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ……………………8 分

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}(a+\frac{n(n+1)}{2})$$ ……………………………………………12 分

解法 2 $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,\ldots,n]{r_i-ir_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & \cdots & a & -2a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & -(n-1)a \\ a & 0 & \cdots & 0 & -na \end{vmatrix}$$ ……4 分

$$\xlongequal{c_n+nc_1+(n-1)c_2+\cdots+2c_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a+\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ……………………8 分

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}(a+\frac{n(n+1)}{2})$$ ……………………12 分

解法 3

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix} \dfrac{n(n+1)}{2}+a & \dfrac{n(n+1)}{2}+a & \cdots & \dfrac{n(n+1)}{2}+a & \dfrac{n(n+1)}{2}+a \\ 2 & 2 & \cdots & 2+a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1+a & \cdots & n-1 & n-1 \\ n+a & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

………4 分

$$\xlongequal[j=1,2,\ldots,n-1]{c_j-c_n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n(n+1)}{2}+a \\ 0 & 0 & \cdots & a & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$ ……………………8 分

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}\left(a+\frac{n(n+1)}{2}\right).$$ ……………………12 分

四、(18 分)解法 1

$$\left|A^*\right|=\left|\begin{array}{cc:cc}3&2&0&0\\-1&-1&0&0\\ \hdashline 0&0&2&5\\0&0&1&3\end{array}\right|=\begin{vmatrix}3&2\\-1&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix}=(-3+2)(6-5)=-1,$$ ……………………2 分

$\Rightarrow |A|^3=\left|A^*\right|=-1\Rightarrow |A|=-1.$ ……………………4 分

对 $2AXA^*=XA^{-1}+5E$ 两边同右乘 A 得 $2|A|AX=X+5A$， ………………7 分

再两边同左乘 A^* 得 $2|A|^2X=A^*X+5|A|E$， ………………9 分

整理得 $(A^*-2E)X=5E$. ………………11 分

从而 $X=5(A^*-2E)^{-1}$. ……………………13 分

将 A^*-2E 分块，$A^*-2E=\begin{bmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{bmatrix}$,其中 ……………………14 分

$B_1=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix}$可逆，$B_1^{-1}=\begin{bmatrix}3&2\\-1&-1\end{bmatrix}$，$B_2=\begin{bmatrix}0&5\\1&1\end{bmatrix}$可逆，$B_2^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-5\\-1&0\end{bmatrix}$.…16 分（每个逆矩阵 1 分）

因此 $X=5(A^*-2E)^{-1}=5\begin{bmatrix}B_1^{-1}&O\\O&B_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&10&0&0\\-5&-5&0&0\\0&0&-1&5\\0&0&1&0\end{bmatrix}$. ……………18 分（分块求逆公式 1 分，结果 1 分）

解法 2

………… 整理得 $(A^*-2E)X=5E$. ………11 分

$$\left[A^*-2E\,\vdots\,5E\right]=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&2&0&0&5&0&0&0\\-1&-3&0&0&0&5&0&0\\0&0&0&5&0&0&5&0\\0&0&1&1&0&0&0&5\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2+r_1}\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&2&0&0&5&0&0&0\\0&-1&0&0&5&5&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&5\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right]$$ 14 分

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&15&10&0&0\\0&1&0&0&-5&-5&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&5\\0&0&0&1&0&0&1&0\end{array}\right].$$ ……………………16 分

所以 $X=\begin{bmatrix}15 & 10 & 0 & 0\\ -5 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ……………18 分

五、（14 分）解

（1）$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_1\begin{bmatrix}1\\8\\9\\5\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+2k_2\\8k_1\\9k_1+k_2\\5k_1+9k_2\end{bmatrix}$ 其中 k_1, k_2 为常数. …………2 分

（2） 解法 1 因为 α_1,α_2 线性无关，因此 α_1,α_2,γ 线性无关当且仅当 γ 不能由 α_1,α_2 线性表示，即非齐次方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\gamma$ 无解， 必有 $r(A)\neq r(\bar{A})$. 而 …………6 分

$$\bar{A}=[\alpha_1,\alpha_2\,\vdots\,\gamma]=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 3\\ 8 & 0 & k\\ 9 & 1 & -7\\ 5 & 9 & 13\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 3\\ 0 & -16 & k-24\\ 0 & -17 & -34\\ 0 & -1 & -2\end{array}\right],$$ …………10 分

$$\to\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -16 & k-24\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & k+8\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$ …………12 分

必有 $k+8\neq 0$, 因此 $k\neq -8$. ……………………14 分

解法 2 α_1,α_2,γ 线性无关当且仅当齐次方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\gamma=0$ 只有零解，必有 $r(A)=3$, …………6 分

$$令\ A=[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 8 & 0 & k\\ 9 & 1 & -7\\ 5 & 9 & 13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -16 & k-24\\ 0 & -17 & -34\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}.$$ …………10 分

$$\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -16 & k-24\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & k+8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ …………12 分

因为 $r(A)=3$, 所以 $k\neq -8$. …………14 分

六、(9 分)证法 1

因为 $A^2=A$，所以 $A(A-B-E)=A^2-AB-A=-AB$. …………2 分

又因为 $A-B-E$ 可逆，所以 $\mathrm{r}(AB)=\mathrm{r}(-A(A-B-E))=\mathrm{r}(-A)=\mathrm{r}(A)$. ………4 分

同理,因为$A^2=A$，所以$(A-B-E)A=A^2-BA-A=-BA$. 从而 ………6 分

$r(BA)=r(-(A-B-E)A)=r(-A)=r(A)$. ………8 分

因此 $r(AB)=r(BA)$. ………9 分

证法 2 因为$A-B-E$可逆，所以

$r(AB)=r((A-B-E)AB)=r(A^2B-BAB-AB)$. ………3 分

又因为$A^2=A$，所以上式 $=r(AB-BAB-AB)=r(-BAB)$. ………4 分

同理，$r(BA)=r(BA(A-B-E))=r(BA^2-BAB-BA)=r(BA-BAB-BA)=r(-BAB)$. …8 分

因此$r(AB)=r(BA)$. ………9 分