2018～2019 学年第一学期第一次月考试卷答案

《高等数学 2A》（共 3 页，附 2 页草纸）

（考试时间：2018 年 10 月 19 日）(1 小时)

一、求下列极限（每小题 12 分，共 48 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n-\sin n}-n)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sin n-2n}{\sqrt{n^2-2n-\sin n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{\sin n}{n}-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{\sin n}{n^2}}+1}=-1.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

解法二：

$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. a，b 均为非零常数，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin 2x}{|x|}$.

解：$$\lim_{x\to0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin 2x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin 2x}{-x}=\lim_{x\to0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{2x}{-x}=-2,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin 2x}{|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{a}{e^{\frac{1}{x}}}+b}{\frac{a}{e^{\frac{1}{x}}}-b}\cdot\frac{2x}{x}=-2,$$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin 2x}{|x|}=-2.$$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}(\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x})=\frac{3}{2}.$$

二、 **解答题（每小题 12 分，共 36 分）**

1．求函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x>0\\ \dfrac{1}{2\cos x}, & x\le 0\end{cases}$ 的所有间断点，并判断间断点的类型，请给出

是第几类间断点，并指出是其中的什么类型间断点.

解：对于 $x=0$，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x^2-1}=-\sin 1,$$

$\therefore x=0$ 是第一类间断点中的跳跃型间断点.

易知：$x=1$ 是第二类间断点中的振荡型间断点.

对于 $x=k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k=0,-1,-2,\cdots)$，

$$\lim_{x\to k\pi-\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to k\pi-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos x}=\infty,$$

$\therefore x=k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k=0,-1,-2,\cdots)$ 第二类间断点中的无穷型间断点.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\ (1+\dfrac{x^{4n}}{1+x^{2n}})$，求 $f(x)$ 的表达式.

解：$x^2<1$, 即 $-1<x<1$ 时，

$$f(x)=\arctan\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x^{4n}}{1+x^{2n}})=\arctan 1=\frac{\pi}{4};$$

$x^2=1$，即 $x=\pm 1$ 时，

$$f(x)=\arctan\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x^{4n}}{1+x^{2n}})=\arctan\frac{3}{2};$$

$x^2>1$，即 $x<-1$或 $x>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan(1+\dfrac{1}{\frac{1}{x^{4n}}+\frac{1}{x^{2n}}})=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x<-1 \text{ 或 } x>1,\\ \arctan\dfrac{3}{2}, & x=\pm 1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & -1<x<1.\end{cases}$$

3. $x\to 0$时，$\cos x-\cos 2x$ 和 $\tan x-\sin x$ 是无穷小量，请比较这两个无穷小量的阶.

解法一：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\cos x-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{\frac{3x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3}=0,$

$\therefore x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是比 $\cos x-\cos 2x$ 高阶的无穷小.

解法二：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos 2x-1}\neq 1,$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\cos x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{(\cos x-1)-(\cos 2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}+\frac{(2x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3}=0,$$

$\therefore x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是比 $\cos x-\cos 2x$ 高阶的无穷小.

解法三：$x\to 0$时, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^3}{2}$,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos 2x-1}\neq 1, \therefore \cos x-\cos 2x=(\cos x-1)-(\cos 2x-1)\sim -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(2x)^2}{2}=\dfrac{3x^2}{2}$,

$\therefore x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是与 x^3 同阶的无穷小，$\cos x-\cos 2x$ 是与 x^2 同阶的无穷小.

$\therefore x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是比 $\cos x-\cos 2x$ 高阶的无穷小.

解法四：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\cos x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\cos x-(2\cos^2 x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(2\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2\cos x+1}$$
$$=0,$$

$\therefore x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是比 $\cos x-\cos 2x$ 高阶的无穷小.

三、证明题（每小题 8 分，共 16 分）

1\. 设$u_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$. 证明数列$\{u_n\}$收敛.

证明: $u_{n+1}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$,

$\therefore u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0,$

即$u_{n+1}>u_n$, $\{u_n\}$为单调递增数列.

又因为

$$\begin{aligned}u_n&=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{2\cdot1}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\&=1+(1-\frac{1}{2})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\\&=2-\frac{1}{n}\\&<2,\end{aligned}$$

$\therefore\{u_n\}$有上界.

$\therefore\{u_n\}$单调递增有上界，由单调有界准则，数列$\{u_n\}$收敛.

2\. 设$a_k>0(k=1,2,\cdots,2n-1)$, n为正整数.

证明方程$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x-1=0$ 至少存在两个实根.

证明: 设$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x-1$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且

$f(0)=-1<0,$

由$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，根据极限的保号性知: 存在$x_1<0,$使得$f(x_1)>0,$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，根据极限的保号性知: 存在$x_2>0,$使得$f(x_2)>0,$

(或者写 $f(1)=a_1+\cdots+a_{2n-1}>0$),

由零值点定理知: 必存在$\xi_1\in(x_1,0)$以及$\xi_2\in(0,x_2)$ (或者写$\xi_2\in(0,1)$)

使得: $f(\xi_1)=0,\quad f(\xi_2)=0,$

即方程$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x-1=0$ 至少存在两个实根.