2016-2017(1)期中试题参考答案

一、填空题及单项选择题（共15分，每小题3分）

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;　　2. $p=-3$;　　3. B;　　4. C;　　5. D.

二、(14分)**解**　**法一**　当系数行列式$|A|=0$时,齐次线性方程组有非零解.

而

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & -3 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a+1 & -4 \\ 0 & 3 & -a-2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-(a+5)(a-2).$$

故当$a=-5$或$a=2$时,所给齐次线性方程组有非零解.

当$a=-5$时,　$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$r(A)=2<3$,方程组有无穷多组解.

同解方程组为　$\begin{cases} x_1=-2x_3, \\ x_2=-x_3. \end{cases}$

方程组的通解为　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k为任意常数.

当$a=2$时,　$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$r(A)=2<3$,方程组有无穷多组解.

同解方程组为　$\begin{cases} x_1=\frac{1}{3}x_3, \\ x_2=\frac{4}{3}x_3. \end{cases}$

方程组的通解为　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, k为任意常数.

注　通解也可表示为$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, k为任意常数.

法二　对方程组的系数矩阵作初等行变换,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & -3 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -a-2 \\ 0 & a+1 & -4 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -(a+2) \\ 0 & 0 & (a+5)(a-2) \end{bmatrix}.$$

当$a=-5$或$a=2$时,$r(A)=2<3$,所给齐次线性方程组有非零解.(以下同法一)

三、1.(10分)**解**

$$D_n \xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i - b & \sum_{i=1}^n a_i - b & \cdots & \sum_{i=1}^n a_i - b & \sum_{i=1}^n a_i - b & \sum_{i=1}^n a_i - b \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 - b & a_2 \\ a_3 & a_3 & \cdots & a_3 - b & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} - b & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n - b & a_n & \cdots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\ldots,n-1]{c_j - c_n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sum_{i=1}^n a_i - b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -b & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -b & \cdots & 0 & 0 & a_{n-1} \\ -b & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} b^{n-1} (\sum_{i=1}^n a_i - b).$$

2.（14分） (1) $2A_{13} - A_{23} - 2A_{43} = 2A_{13} - A_{23} + 0A_{33} - 2A_{43}$

$= -(-2A_{13} + A_{23} + 0A_{33} + 2A_{43}) = -(a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} + a_{41}A_{43}) = 0.$

(2)$M_{13}+M_{23}+M_{33} = A_{13}-A_{23}+A_{33}+0A_{43} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -6 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 9 & 5 \\ 0 & 13 & 2 \\ 0 & 23 & 7 \end{vmatrix} = -2(91-46) = -90.$

四、1.（14分）解 对$A^{-1}BA = A^*B - E$两边同左乘A得 $BA = |A|B - A$.

再两边同右乘A^*得, $B|A| = |A|BA^* - |A|E$.

整理得 $B(A^* - E) = E$. $\Rightarrow B = (A^* - E)^{-1}$.

$[A^* - E \vdots E] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 7 \end{array}\right].$

故$B = (A^* - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -9 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.（14分）解（1）$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = AC$,其中$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

由$C=\begin{bmatrix}2&-4&6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,得$r(C)=1$.

又$A^2=E_3$,

$$(AB)^{2016}=(AAC)^{2016}=C^{2016}=(\mathrm{tr}C)^{2015}C$$

$$=(-3)^{2015}\begin{bmatrix}2&-4&6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}=-3^{2015}\begin{bmatrix}2&-4&6\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}.$$

（2）由$A^2=E_3$得$|A^2|=|A|^2=1$.

$$|(A+B)^{2016}|=|A+AC|^{2016}=|A(E+C)|^{2016}=\left|A\begin{bmatrix}3&-4&6\\1&-1&3\\-1&2&-2\end{bmatrix}\right|^{2016}$$

$$=|A|^{2016}\begin{vmatrix}3&-4&6\\1&-1&3\\-1&2&-2\end{vmatrix}^{2016}=(|A|^2)^{1008}\cdot(-2)^{2016}=2^{2016}.$$

五、1（10分）

证明 令$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=\mathbf{0}$

代入$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4,\beta_2=\alpha_2-\alpha_1,\beta_3=\alpha_3-\alpha_1,\beta_4=\alpha_4-\alpha_1$,整理得

$$(k_1-k_2-k_3-k_4)\alpha_1+(2k_1+k_2)\alpha_2+(3k_1+k_3)\alpha_3+(4k_1+k_4)\alpha_4=\mathbf{0}.$$

由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关得$\begin{cases}k_1-k_2-k_3-k_4=0,\\2k_1+k_2=0,\\3k_1+k_3=0,\\4k_1+k_4=0.\end{cases}$ （1）

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10&0&0&0\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&1\end{vmatrix}=10\neq0.$$

依据克拉默法则，方程组（1）只有零解，即只能$k_1=k_2=k_3=k_4=0$.

故向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

2.（9分）(1)**证明** 设A为n阶反对称矩阵,其中n为奇数.则$A^{\mathrm{T}}=-A$.

$$|A|=|A^{\mathrm{T}}|=|-A|=(-1)^n|A|=-|A|,\text{得 }|A|=0.\text{故}A\text{不可逆}.$$

(2) 据(1)之结论,由A为可逆的反对称矩阵知A的阶数n是偶数,$|A_{n\times n}|\neq0$.

作矩阵$C_{(n+1)\times(n+1)}=\begin{bmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}$.

因为$C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}&-\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-A&-\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=-C$,所以$C$为奇数阶反对称矩阵,$|C|=0$.

$$|B|=\begin{vmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}A&\alpha\\-\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{vmatrix}=-|C|=0.$$

又$|A_{n\times n}|\neq0$,故$r(B)=n$.