分枝-限界法

基本思想

- 在解空间树中，以广度优先 BFS 或最佳优先方式搜索最优解，利用部分解的最优信息，裁剪那些不能得到最优解的子树以提高搜索效率。

与回溯法的区别

- 求解目标不同：一般而言，回溯法的求解目标是找出解空间树中满足约束条件的所有解，而分支限界法的求解目标则是尽快地找出满足约束条件的一个解；
- 搜索方法不同：回溯算法使用深度优先方法搜索，而分支限界一般用广度优先或最佳优先方法来搜索；
- 对扩展节点的扩展方式不同：分支限界法中，每一个活节点只有一次机会成为扩展节点。活节点一旦成为扩展节点，就一次性产生其所有儿子节点；
- 存储空间的要求不同：分治限界法的存储空间笔回溯法大得多，因此当内存容量有限时，回溯法成功的可能性更大。

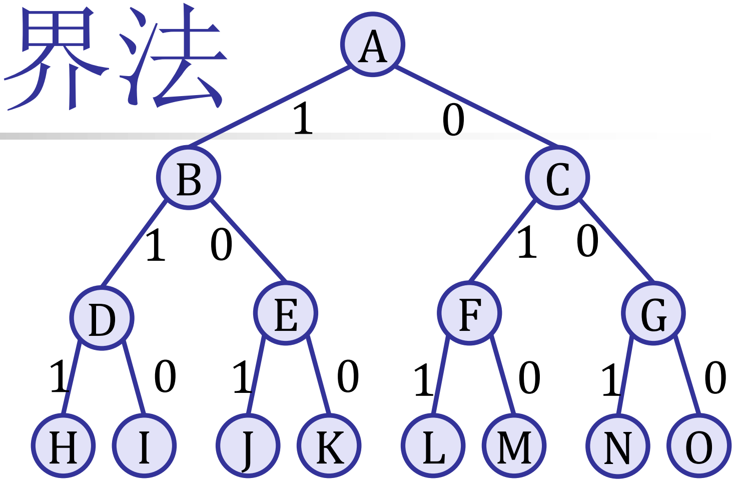
求解步骤

1. 定义解空间
2. 确定解空间的树结构
3. 按BFS等方式搜索：
   a. 每个活节点仅有一次机会变成扩展节点；
   b. 由扩展节点生成所有一步可达的新节点；
   c. 在新节点中，删除不可能导出最优解的节点；
      //限界策略
   d. 将余下的新节点加入活动表（队列）中；
   e. 从活动表中选择节点再扩展；//分支策略
      - 先进先出、优先队列
   f. 直至活动表为空

两种常见的活节点扩充方式

- 先进先出队列 (FIFO)：从活节点表中取出节点的顺序与加入节点的顺序相同，因此活节点表的性质与队列相同；
- 优先队列：活节点表中的每个节点都有一个对应的耗费或收益——权值。
  - 如果查找一个具有最小耗费的解，则活节点表可用小根堆来建立，下一个扩展节点就是具有最小耗费的活节点。
  - 如果希望搜索一个具有最大收益的解，则可用大根堆来构造活节点表，下一个扩展节点时具有最大收益的活节点。

FIFO队列分支限界法



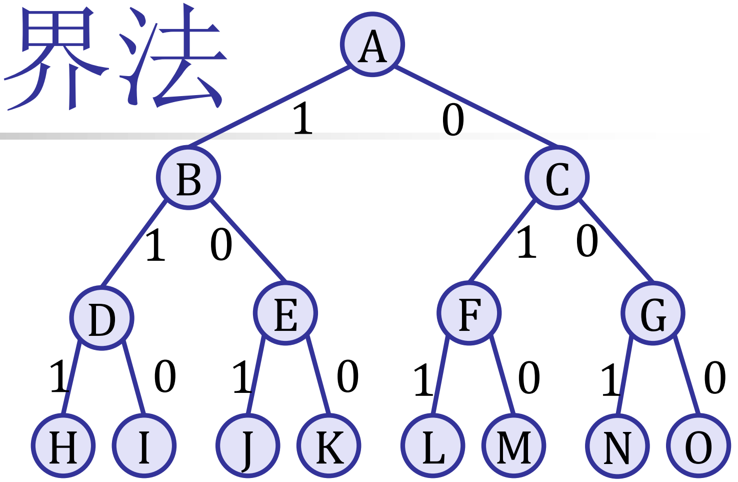
问题：n=3，w=(20, 15, 15)，v=(40, 25, 25)，c=30。

求解：解空间树如图，BFS搜索。

扩展结点	活结点	队列(可行结点)	可行解(叶结点)	解值
A	B,C	BC		
B	D,E(D死结点)	CE		
C	F,G	EFG		
E	J,K(J死结点)	FG	K	40
F	L,M	G	L,M	50,25
G	N,O	φ	N,O	25,0

∴ 最优解为 L，即 (0, 1, 1)；解值为 50。

FIFO队列分支限界法



问题：n=3，w=(20, 15, 15)，v=(40, 25, 25)，c=30。

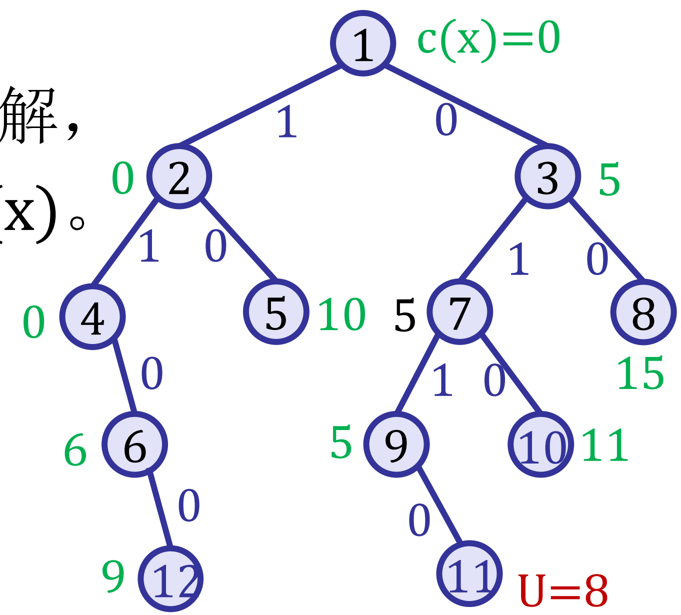
求解：优先队列，按价值率优先。

扩展结点	活结点	队列(可行结点)	可行解(叶结点)	解值
A	B,C	B → C		
B	D,E(D死结点)	E → C		
E	J,K(J死结点)	C	K	40
C	F,G	F → G		
F	L,M	G	L	50(最优)
G	N,O	φ		

∴ 最优解为 L，即 (0, 1, 1)；解值为50。

状态空间树

- 已知有一台机器，4 个作业等待处理。求可行作业子集 A，使得罚款额 $\sum_{j \notin A} p_j$ 最小。
- (p_i, d_i, t_i) = (罚款额, 截止期, 需要的处理时间) 表示。
- 4 个作业对应的三元组分别为 (5,1,1), (10,3,2), (6,2,1), (3,1,1)。
- 在每个结点 x 快速计算一个可行解，并计算当前节点已发生成本值 c(x)。
- U 为当前可行解成本。
- 显性约束：截止期 d_i；
- 隐性约束：$c(x) \geq U$。
- 初始值：$u(x) = 0$；$U = \infty$。

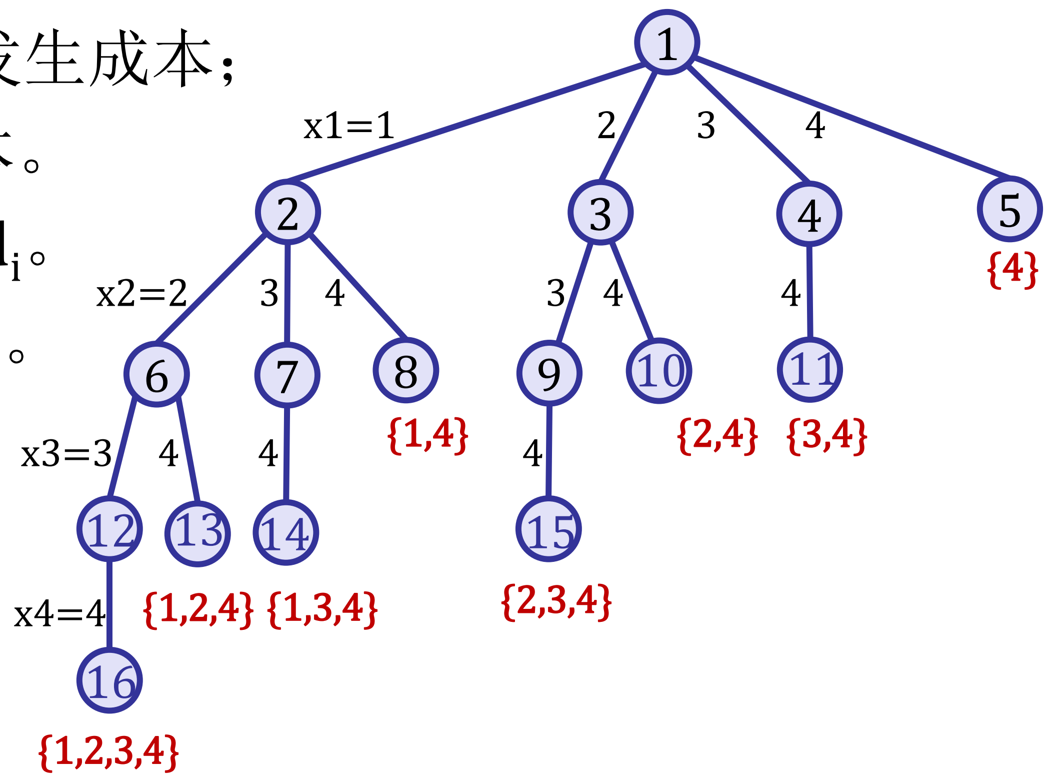


$$1 \xrightarrow{2(3)} 2 \xrightarrow{4(3,5)} 4 \xrightarrow{3(5,6)} 3 \xrightarrow{7(5,6,8)} 7 \xrightarrow{9(5,6,8,10)} 9 \xrightarrow[c(11)=8=U]{6(5,8,10)} 6 \rightarrow 12$$

调度问题的另一种解空间树

- (p_i, d_i, t_i) = (罚款额, 截止期, 处理时间) = (5,1,1), (10,3,2), (6,2,1), (3,1,1)。
- c(x) 为当前节点已发生成本；
- U 为当前可行解成本。
- 显性约束：截止期 d_i。
- 隐性约束：$c(x) \geq U$。
- 初始值：$u(x) = 0$；

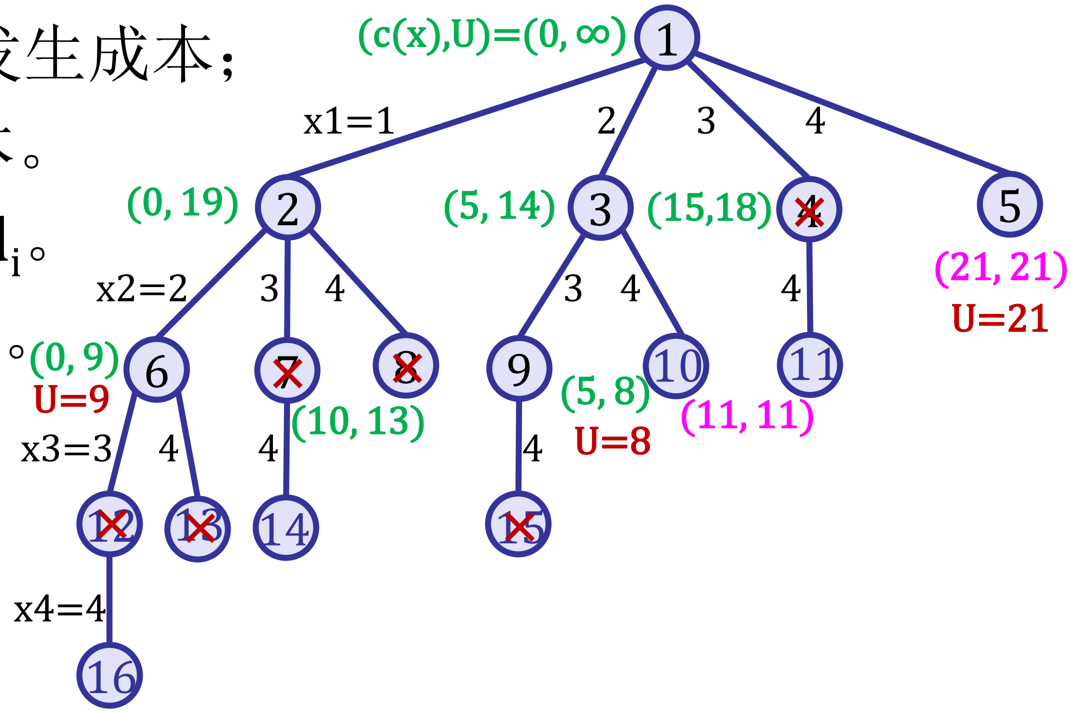
  $U = \infty$。



调度问题的另一种解空间树

- (p_i, d_i, t_i) = (罚款额, 截止期, 处理时间) = (5,1,1), (10,3,2), (6,2,1), (3,1,1)。
- c(x) 为当前节点已发生成本；
- U 为当前可行解成本。
- 显性约束：截止期 d_i。
- 隐性约束：$c(x) \geq U$。
- 初始值：$u(x) = 0$；

  $U = \infty$。



$$1 \xrightarrow[U(5)=21]{2(3,4)} 2 \xrightarrow{6(3,4,7)} 6 \xrightarrow[U(6)=9]{3(4,7)} 3 \xrightarrow[U(9)=8]{9} 9$$

旅行商问题

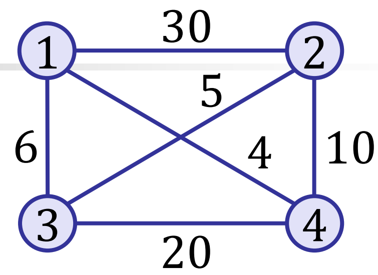
- 给定一系列城市和每对城市之间的距离，求解访问每一座城市一次并回到起始城市的最短回路。
- 问题的可行解是所有顶点的全排列。随着顶点数的增加，会产生组合爆炸，是组合优化中的一个 NP 完全问题。在运筹学和理论计算机科学中非常重要。
- 该问题实质是在一个带权完全无向图中，找一个权值最小的 Hamilton 回路。
- 1959 年，Dantzig 等人提出旅行商问题的数学规划，并且是在最优化领域中进行了深入研究。
- 已经有了大量的近似算法、启发式算法和精确方法来求解数量上万的实例，并且能将误差控制在 1% 内。
- 常用的算法包括遗传算法、模拟退火法、蚁群算法、禁忌搜索算法、贪心算法和神经网络等。

乔治·丹齐格(1914.11.8~2005.5.13)

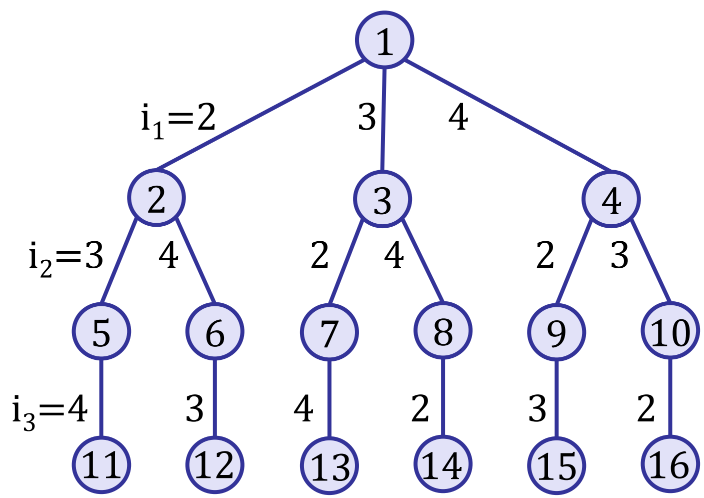
- 美国数学家，运筹学大师。
- 经常上课迟到，初中数学还有过不及格。
- 有一天又迟到，进入课堂，看到黑板上写着两道题目，误以为是老师留的课外作业，就抄了下来。
- 几周后Neyman教授批改作业，发现了Dantzig同学的神奇‘作业’，然后就激动得一大早就去找他，要他看自己为他的作业写好的序言，然后尽早发表他的证明。
- Dantzig同学这才恍然大悟，原来自己所认为的作业是公认悬而未解的统计学难题！
- 事后Dantzig感慨道：如果自己没有迟到，知道这两道是统计学领域中的公开难题，根本就不会去解决他们，连试试的信心和勇气恐怕都不会有。
- 1947年提出了单纯形法，被称为线性规划之父。获得了包括“冯诺伊曼理论奖”在内的诸多奖项。他在《线性规划与扩展》一书中研究了线性编程模型，为计算机语言的发展做出突出贡献。

旅行商问题

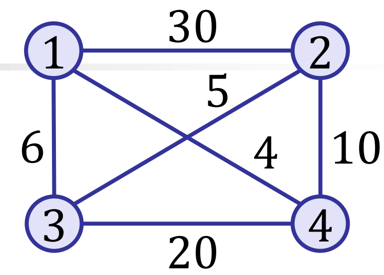
- 在旅行商问题中，每个节点只能出、入一次，构成哈密尔顿环。
- A 是邻接矩阵，a_{ij} 表示节点 i 和 j 之间边的费用。
- A 的第 i 行元素表示从 i 节点出发到其他节点的费用(距离)，A 的第 j 列表示其他节点到 j 节点的费用。
- 设 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 为一条从节点1 开始的周游路线，f_i 来自邻接矩阵的第 i行；所有 f_i 不同列。



$$A = \begin{pmatrix} \infty & 30 & 6 & 4 \\ 30 & \infty & 5 & 10 \\ 6 & 5 & \infty & 20 \\ 4 & 10 & 20 & \infty \end{pmatrix}$$



归约矩阵和归约数



- 定义 $p_i = \min_{1\le j\le n} a_{ij}$。
- $p = \sum_{1\le i\le n} p_i$ 为 A 的行归约数。
- $p = 4 + 5 + 5 + 4 = 18$。
- $R = (a_{ij} - p_i)$ 为 A 的行归约矩阵。
- 定义 $q_j = \min_{1\le i\le n} p_{ij}$。
- $q = \sum_{1\le j\le n} q_j$ 为 R 的列归约数。
- $q = 0$。
- $A' = (r_{ij} - q_j)$ 为 R 的列归约矩阵。
- $A' = (a_{ij} - p_i - q_j)$ 为 A 的归约矩阵。
- $h = p + q$ 为矩阵 A 的归约数。
- $h = 18 + 0 = 18$。

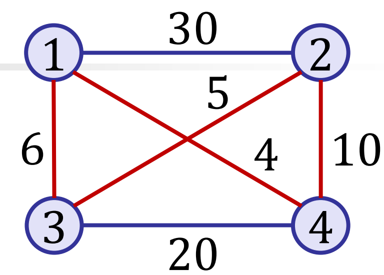
$$A = \begin{pmatrix} \infty & 30 & 6 & 4 \\ 30 & \infty & 5 & 10 \\ 6 & 5 & \infty & 20 \\ 4 & 10 & 20 & \infty \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \infty & 26 & 2 & 0 \\ 25 & \infty & 0 & 5 \\ 1 & 0 & \infty & 15 \\ 0 & 6 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 26 & 2 & 0 \\ 25 & \infty & 0 & 5 \\ 1 & 0 & \infty & 15 \\ 0 & 6 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

归约矩阵的性质

- 已知有向赋权图 G = (V, E)。
- f = (3, 2, 4, 1) 是图 G 的一条从节点 1 出发的哈密尔顿回路。
- f_i 对应 A 的第 i 行，且所有 f_i 不同列。
- 分别记 W(f)、W'(f) 为矩阵 A 和 A' 上路径 f 的回路费用：
  - W(f) = 6 + 10 + 5 + 4 = 25
  - W'(f) = 2 + 0 + 5 + 0 = 7
  - W(f) = W'(f) + 18
  - A 的归约数 h = 18



$$A = \begin{pmatrix} \infty & 30 & 6 & 4 \\ 30 & \infty & 5 & 10 \\ 6 & 5 & \infty & 20 \\ 4 & 10 & 20 & \infty \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \infty & 26 & 2 & 0 \\ 25 & \infty & 0 & 5 \\ 1 & 0 & \infty & 15 \\ 0 & 6 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 26 & 2 & 0 \\ 25 & \infty & 0 & 5 \\ 1 & 0 & \infty & 15 \\ 0 & 6 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

归约矩阵的性质

定理1 已知有向赋权图 G = (V, E) 和它的一条哈密尔顿回路 f，A 是 G 的邻接矩阵，A’ 是 A 的归约矩阵，归约常数为 h。分别记以 A 和 A’ 计算的回路费用为 W(f)、W’(f)，有：

$$W(f) = W'(f)+h$$

证明：根据归约矩阵的构造过程知道 $A' = (a_{ij} - p_i - q_j)$。因为路径 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 中，f_i 不同行不同列，所以

$$\begin{aligned} W(f) &= \textstyle\sum_{1\le i\le n} a_{i,e_i} = \sum_{1\le i\le n} a'_{i,e_i} + \sum_{1\le i\le n} p_i + \sum_{1\le i\le n} q_{e_i} \\ &= \textstyle\sum_{1\le i\le n} a'_{i,e_i} + p + q = W'(f) + h \end{aligned}$$

定理2 已知有向赋权图 G = (V, E) 的最短的哈密尔顿回路 f，A 是 G 的邻接矩阵， Q 是 A 的归约矩阵。以 Q 为邻接矩阵构造图 G’，则 f 也是 G’ 的最短的哈密尔顿回路。

TSP问题的归约矩阵解法

- 不妨取节点 1 为根节点。
- **限界条件**：

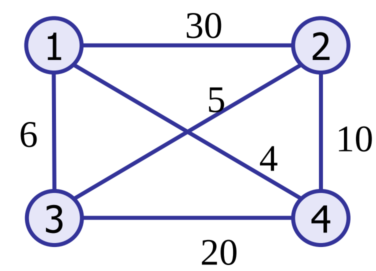
  显示：当前节点和路径上的下一个节点之间有边。

  隐式：当前路径长度 < bestc。
- **启发式**：优先产生边长最小的子节点，有望获得更好的限界效果。

旅行商问题

- 右图的邻接矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 30 & 6 & 4 \\ 30 & \infty & 5 & 10 \\ 6 & 5 & \infty & 20 \\ 4 & 10 & 20 & \infty \end{pmatrix}$$

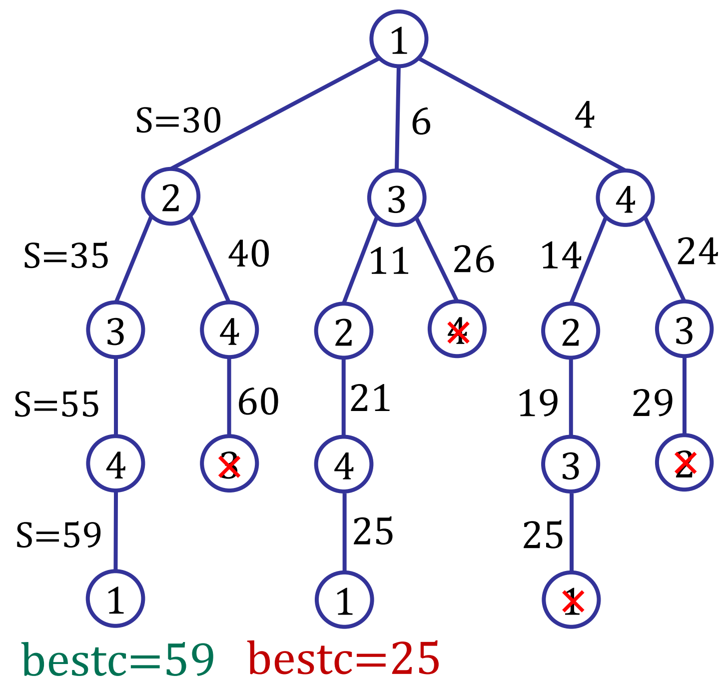


- **限界条件**：

  显示：当前节点和路径上的下一个节点之间有边。

  隐式：当前路径长度 < bestc。

- **启发式**：优先产生边长最小的子节点，有望获得更好的限界效果。



TSP问题的归约矩阵解法例

已知邻接矩阵 A。

计算 A 的归约矩阵 A’ 和归约数：

- $p_i = \min_{1\le j\le n} a_{ij}$;
- $p = \sum_{1\le i\le n} p_i$
  $= 10 + 2 + 2 + 3 + 4 = 21$
- $R = (a_{ij} - p_i)$
- $q_j = \min_{1\le i\le n} p_{ij}$;
- $q = \sum_{1\le j\le n} q_j$
  $= 1 + 0 + 3 + 0 + 0 = 4$
- $A' = (r_{ij} - q_j)$
- $h = p + q = 25$

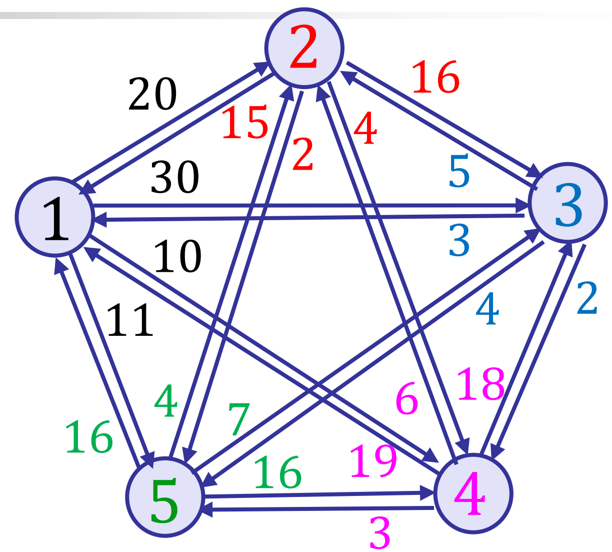
$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 20 & 0 & 1 \\ 13 & \infty & 14 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 0 \\ 12 & 0 & 3 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

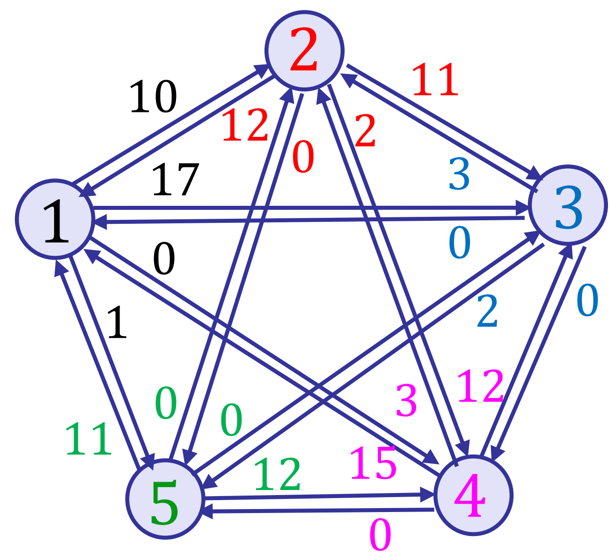
$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

以 A 和 A' 为邻接矩阵构造图 G 和 G'，则问题变成寻找 G' 的最短哈密尔顿回路 f。



$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$



$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $h_A = 25$。$W(f) = W'(f) + h$。
- 计算节点 1 到各点的距离：

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $h_A = 25$。$W(f) = W'(f) + h$。
- 计算节点 1 到各点的距离：
  - $\delta(1) = h = 25$
  - $\delta(2) = \delta(1) + q_{12} + h'$
    $= 25 + 10 + 0 = 35$；

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $h_A = 25$。$W(f) = W'(f) + h$。
- 计算节点 1 到各点的距离：
  - $\delta(1) = h = 25$
  - $\delta(2) = \delta(1) + q_{12} + h'$
    $= 25 + 10 + 0 = 35$；
  - $\delta(3) = \delta(1) + q_{13} + h'$
    $= 25 + 17 + 11 = 53$；

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $h_A = 25$。$W(f) = W'(f) + h$。
- 计算节点 1 到各点的距离：
  - $\delta(1) = h = 25$
  - $\delta(2) = \delta(1) + q_{12} + h'$
    $= 25 + 10 + 0 = 35$；
  - $\delta(3) = \delta(1) + q_{13} + h'$
    $= 25 + 17 + 11 = 53$；
  - $\delta(4) = \delta(1) + q_{14} + h'$
    $= 25 + 0 + 0 = 25$；

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $h_A = 25$。$W(f) = W'(f) + h$。
- 计算节点 1 到各点的距离：
  - $\delta(1) = h = 25$
  - $\delta(2) = \delta(1) + q_{12} + h'$
    $= 25 + 10 + 0 = 35$；
  - $\delta(3) = \delta(1) + q_{13} + h'$
    $= 25 + 17 + 11 = 53$；
  - $\delta(4) = \delta(1) + q_{14} + h'$
    $= 25 + 0 + 0 = 25$；
  - $\delta(5) = \delta(1) + q_{14} + h'$
    $= 25 + 1 + 5 = 31$；

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $h_A = 25$。$W(f) = W'(f) + h$。
- 上计算节点 1 到各点的距离：
  - $\delta(1) = h = 25$
  - $\delta(2) = \delta(1) + q_{12} + h'$
    $= 25 + 10 + 0 = 35$；
  - $\delta(3) = \delta(1) + q_{13} + h'$
    $= 25 + 17 + 11 = 53$；
  - $\delta(4) = \delta(1) + q_{14} + h'$
    $= 25 + 0 + 0 = 25$；
  - $\delta(5) = \delta(1) + q_{14} + h'$
    $= 25 + 1 + 5 = 31$；
- $\delta(4)$ 最小，选择节点 4 展开。

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

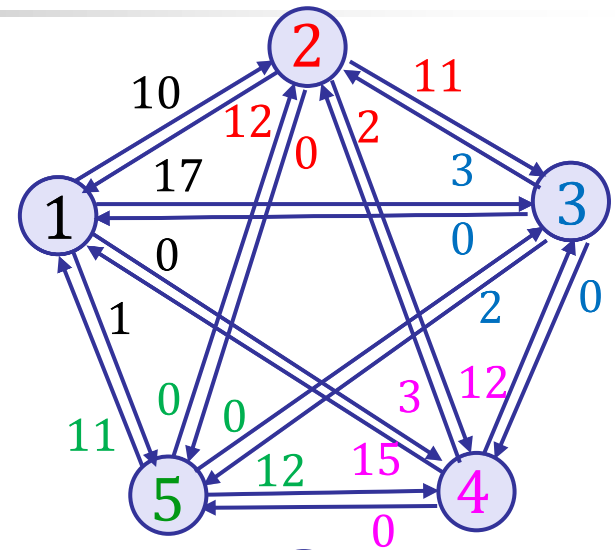
- 因为 δ(4) 最小，我们选择边 1 → 4 加入路径 f。
- 节点 1 不需要再考虑其他子节点，节点 4 也不需要再考虑其他父亲节点，因此删除 A’ 中第 1 行第 4 列。
- 节点 4 不是叶子节点，因此它也不能回到节点 1，$a'_{41} = \infty$。
- 接下来只需要考虑以节点 4 为根节点，各子节点到节点 4 的距离。把第 4 行换到第 1 行，得到矩阵B。

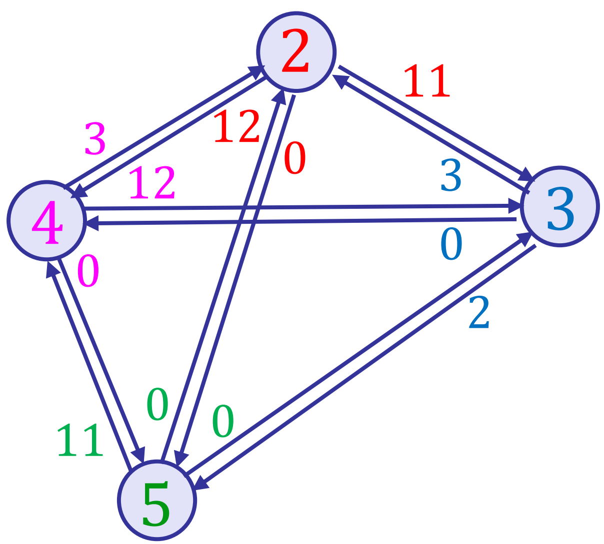
$$A' = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

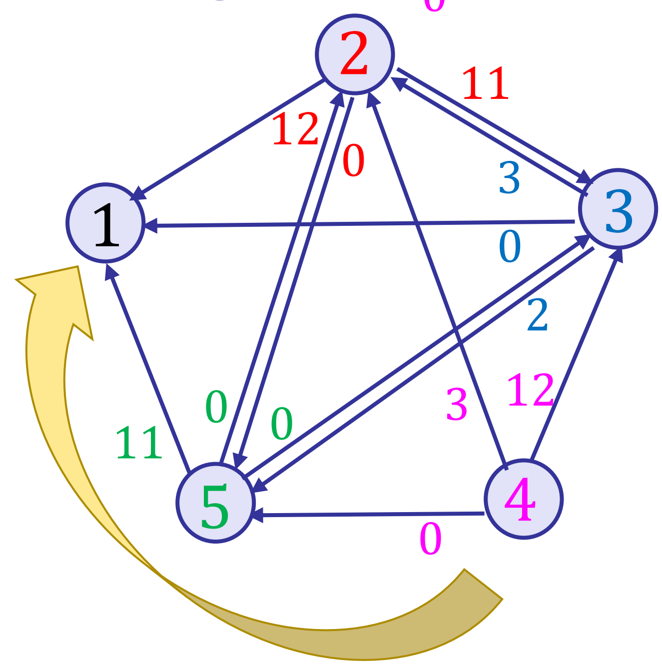
$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 3 & 12 & 0 \\ 12 & \infty & 11 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- 删除 A’ 中第 1 行第 4 列等价于删除了图 G’中节点 1 的出边和节点 4 的入边，$a'_{41} = \infty$ 相当于删除 4 → 1 边。
- 然后，使节点 4 与节点 1 重合，得到矩阵 B 对应的图：







TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(4)=25$。
- 在 B 上计算节点 4 到各点的距离：

$$B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\infty & 3 & 12 & 0\\ 12 & \infty & 11 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 2\\ 11 & 0 & 0 & \infty\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}4\\2\\3\\5\end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(4) = 25$。
- 在 B 上计算节点 4 到各点的距离：
  - $\delta(2) = \delta(4) + b_{12} + h'$
    $= 25 + 3 + 0 = 28$；

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \infty & 3 & 12 & 0 \\ 12 & \infty & 11 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(4)=25$。
- 在 B 上计算节点 4 到各点的距离：
  - $\delta(2)=\delta(4)+b_{12}+h'$
    $=25+3+0=28$；
  - $\delta(3)=\delta(4)+b_{13}+h'$
    $=25+12+13=50$；

$$B=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\infty & 3 & 12 & 0\\ 12 & \infty & 11 & 0\\ 0 & 3 & \infty & 2\\ 11 & 0 & 0 & \infty\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}4\\2\\3\\5\end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(4) = 25$。
- 在 B 上计算节点 4 到各点的距离：
  - $\delta(2) = \delta(4) + b_{12} + h'$
    $= 25 + 3 + 0 = 28$；
  - $\delta(3) = \delta(4) + b_{13} + h'$
    $= 25 + 12 + 13 = 50$；
  - $\delta(5) = \delta(4) + b_{14} + h'$
    $= 25 + 0 + 11 = 36$；

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \infty & 3 & 12 & 0 \\ 12 & \infty & 11 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(4) = 25$。
- 在 B 上计算节点 4 到各点的距离：
  - $\delta(2) = \delta(4) + b_{12} + h'$
    $= 25 + 3 + 0 = 28$；
  - $\delta(3) = \delta(4) + b_{13} + h'$
    $= 25 + 12 + 13 = 50$；
  - $\delta(5) = \delta(4) + b_{14} + h'$
    $= 25 + 0 + 11 = 36$；
- $\delta(2)$ 最小，选择节点 2 展开。
- 得到矩阵 C。

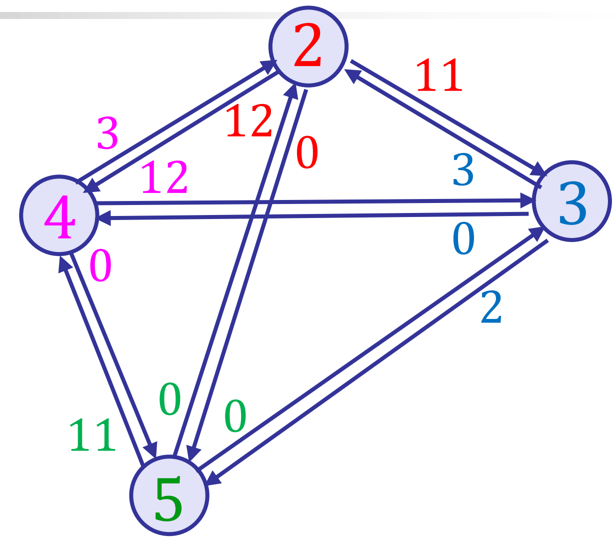
$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 3 & 12 & 0 \\ 12 & \infty & 11 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

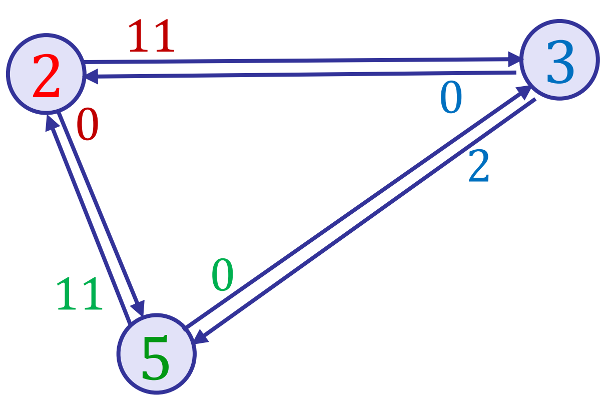
$$C = \begin{pmatrix} \infty & 11 & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

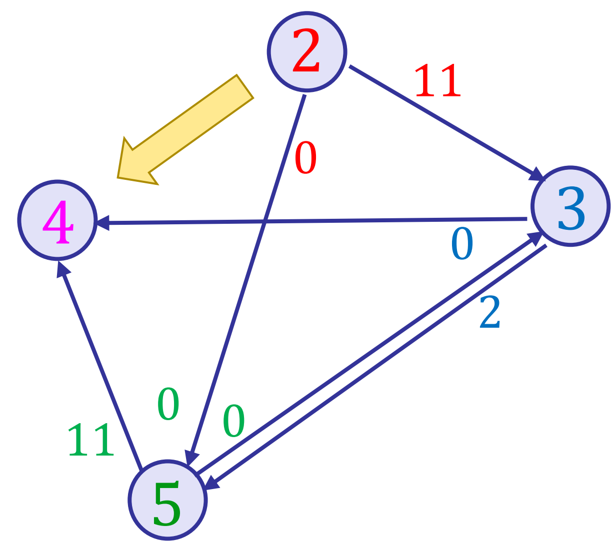
TSP问题的归约矩阵解法例

- 对应到图中，即删除图中节点 4 的出边和节点 2 的入边，并把 2 → 4 边删除。
- 将节点 2 与节点 4 重合，得到矩阵 C 对应的图：

$$C=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}\infty & 11 & 0\\ 0 & \infty & 2\\ 11 & 0 & \infty\end{pmatrix} & \begin{array}{c}2\\3\\5\end{array}\end{array}$$







TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(2)=28$。
- 在 C 上计算节点 2 到各点的距离：

$$C=\begin{pmatrix}\infty & 11 & 0\\ 0 & \infty & 2\\ 11 & 0 & \infty\end{pmatrix}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(2) = 28$。
- 在 C 上计算节点 2 到各点的距离：
  - $\delta(3) = \delta(2) + c_{12} + h'$

    $= 28 + 11 + 13 = 53$；

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 11 & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

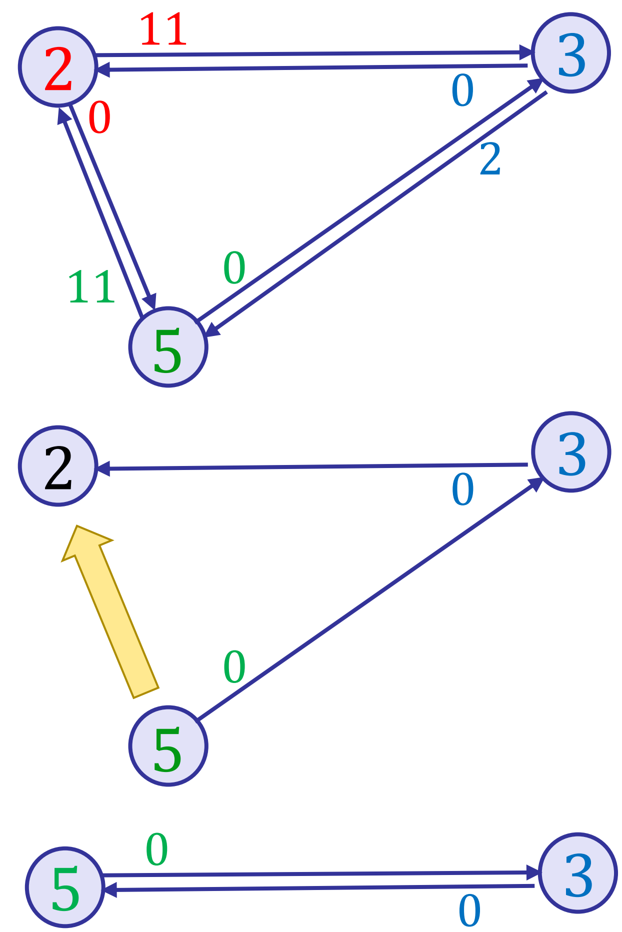
- $\delta(2) = 28$。
- 在 C 上计算节点 2 到各点的距离：
  - $\delta(3) = \delta(2) + c_{12} + h'$
    $= 28 + 11 + 13 = 53$；
  - $\delta(5) = \delta(2) + c_{13} + h'$
    $= 28 + 0 + 0 = 28$；

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \infty & 11 & 0 \\ 0 & \infty & 2 \\ 11 & 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

TSP问题的归约矩阵解法例

- $\delta(2) = 28$。在 C 上计算节点 2 到各点的距离：
  - $\delta(3) = \delta(2) + c_{12} + h'$
    $= 28 + 11 + 13 = 53$；
  - $\delta(5) = \delta(2) + c_{13} + h'$
    $= 28 + 0 + 0 = 28$；
- $\delta(5)$ 最小，选择节点 5 展开。得到矩阵 D：

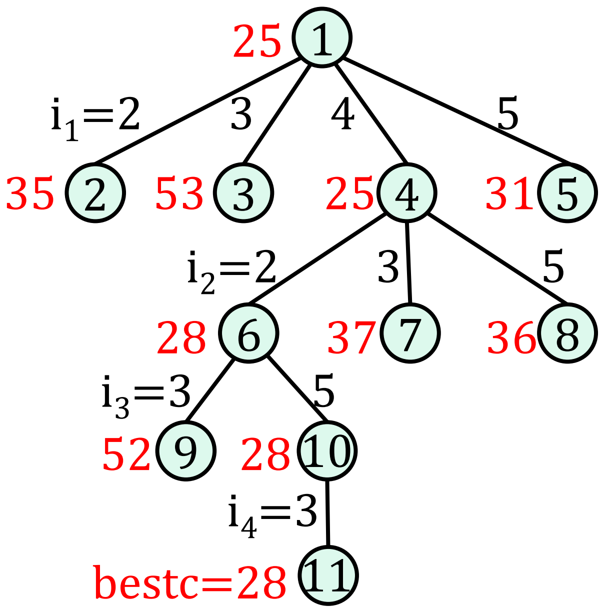
$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cancel{\infty} & \cancel{11} & \cancel{0} \\ 0 & \infty & \cancel{2} \\ 11 & 0 & \cancel{\infty} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}$$



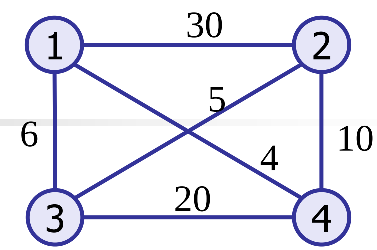
TSP问题的归约矩阵解法例

- 状态空间树见右图。
- 因为各个待展开的节点处的当前路径值都满足限界条件，当前解即最优解。
- f = (1, 4, 2, 5, 3)；

  W(f)=28。
- 如果不用归约矩阵，仍然按照“当前路径长度短的优先”建立优先队列，则得到的可行解为 (1, 4, 5, 2, 3)，可行值为36。



旅行商问题



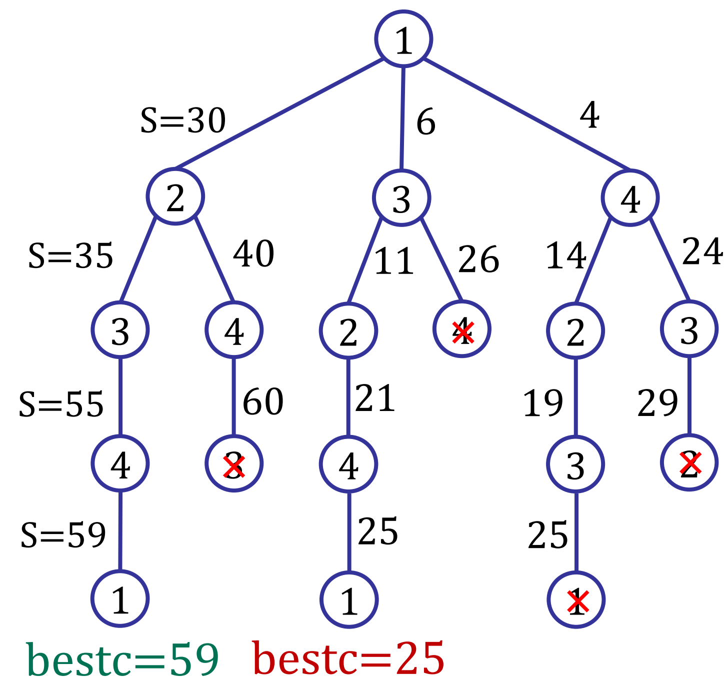
$$A = \begin{pmatrix} \infty & 30 & 6 & 4 \\ 30 & \infty & 5 & 10 \\ 6 & 5 & \infty & 20 \\ 4 & 10 & 20 & \infty \end{pmatrix}$$

- **限界条件**：

  显示：当前节点和路径上的下一个节点之间有边。

  隐式：当前路径长度 < bestc。

- **启发式**：优先产生边长最小的子节点，有望获得更好的限界效果。
- 请用归约矩阵法求出一条最短汉密尔顿回路。



习题

- 对以下最小罚款额调度问题的实例：

  (10, 3, 2)，(3, 4, 2)，(8, 2, 1)，(6, 3, 1)

  分别用回溯法和基于LC-检索 (LeastCost-Search) 的分枝-限界法求解。

  要求：写出限界条件；画出展开的部分状态空间树。

- 对以下0/1背包问题的实例:

  n = 4，c = 7，w = [3, 5, 2, 1]，p = [9, 10, 7, 4]

  分别用回溯法和基于LC-检索的分枝-限界法求解。

  要求：写出限界条件；画出展开的部分状态空间树。