2014 ～ 2015 学年第一学期期末考试试卷

《 线性代数及其应用 》 （A 卷 共 4 页）

（考试时间：2015 年 1 月 4 日）

一、填空题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均是 3 元列向量，且行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=3$，则行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3|=$______________.

2、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2,\ |\boldsymbol{B}|=3$，$\boldsymbol{B}^*$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则 $\begin{vmatrix}(3\boldsymbol{A})^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & -2\boldsymbol{B}^*\end{vmatrix}=$_________.

3、若向量 $\boldsymbol{\beta}=[1,1,-2]^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,a,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,a]^{\mathrm{T}}$ 线性表示，且表示方式唯一，则参数 a 的取值范围_________________.

4、设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,x,2]^{\mathrm{T}}$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值所对应的特征向量，则参数 $x=$________________.

5、设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$ 合同，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数为 __________，规范形为 __________________________.

二、单项选择题（共 15 分，每小题 3 分）

1、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，则以下说法中错误的是（　　　）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵　　(B) $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵

(C) $\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角阵　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵

2、设 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵秩为 2，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为（　　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 k_1,k_2 为任意常数

(B) $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 k_1,k_2 为任意常数

(C) $\boldsymbol{X}_1+k_1(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 k_1,k_2 为任意常数

(D) $\boldsymbol{X}_1+k_1(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

3、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & x & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(y,2,-2)$ 相似，则参数 x,y 的值为（　　）.

(A) $x=0,y=-1$　　(B) $x=0,y=1$

(C) $x=y=-1$　　(D) $x=y=0$

4、以下法则中，不是线性变换的为（　　）.

(A) 给定 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$，规定 $\sigma(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}$；

(B) 对 $\forall\,\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，规定 $\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

(C) 对 $\forall\,\boldsymbol{\alpha}=[x,y]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$，规定 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[x^2,xy]^{\mathrm{T}}$；

(D) 对 $\forall\,\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\dots,x_n]\in\mathbb{R}^n$，规定 $\sigma(\boldsymbol{X})=[x_1,\dots,x_{n-1},0]\in\mathbb{R}^n$；

5、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & -2\\ 4 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 6\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$（　　）.

(A) 相似且合同　　(B) 相似但不合同

(C) 合同但不相似　　(D) 不相似且不合同

三、（共 16 分，每小题 8 分）

1、求 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $W=\left\{\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ 2a+b-d & -c-d\end{bmatrix}\middle|\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ 的基和维数.

2、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$n$ 是正整数， 求 $\boldsymbol{A}^n$.

四、（12 分）设（I）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和（II）$\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+7\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=3\boldsymbol{\alpha}_3+5\boldsymbol{\alpha}_4$ 分别为线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的两个基.

（1）求由基$\{\boldsymbol{\beta}_i\}$到基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$的过渡矩阵；

（2）求向量$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$在基$\{\boldsymbol{\alpha}_i\}$下的坐标.

五、（共 12 分）在$\mathbb{R}^3$中，对于任意向量$\boldsymbol{\alpha}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$，规定

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=[\,x-y,y-z,z\,]^{\mathrm{T}}.$$

（1）求线性变换σ在标准基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$下的矩阵；

（2）求线性变换σ在基$\boldsymbol{\alpha}_1=[0,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$下的矩阵.

六、(共 11 分)

（1）设$f(x)$为多项式, λ为n阶方阵$\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值．证明：若$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}_{n\times n}$，则$f(\lambda)=0$；

（2）设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}$有$r\,(\neq 0)$个非零特征值. 证明$r(\boldsymbol{A})=r$；

（3）设$\boldsymbol{A}$是秩为$r\,(\neq 0,n\,)$的n阶实对称矩阵，且满足$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，求$|\,2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\,|$.

七、（15 分）用正交线性替换化实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形，并写出所用的正交线性替换.

八、（4 分）设$\mathbb{R}^3$空间中的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$都线性无关，证明存在非零列向量$\boldsymbol{\eta}$，使得$\boldsymbol{\eta}$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示.