Modelo de Vasicek
Edgar Gerardo Alarcón González
Introducción
Objetivo
Antecedentes
El Modelo
Proposiciones
Implementación
Epílogo
¿Qué es lo que sigue?
Conclusiones
Bibliografía

Modelo de Vasicek

Edgar Gerardo Alarcón González

5 de enero de 2021

Introducción

Objetivo

Objetivo

El objetivo de este trabajo es explicar el contexto general y la razón de existir del Modelo de Vasicek, así como mostrar sus resultados teóricos más importantes. Explorar la información obtenida con diversas fuentes de información, comparar y ver su comportamiento basados en una implementación computacional.

Los temas más importantes a revisar, los podrán observar en la barra al costado izquierdo de este documento.

Antecedentes

Antecedentes (Black-Scholes)

Para poder hablar del **modelo de Vasicek**, debemos saber cuál es el objetivo y de dónde surge esta metodología. Con esta finalidad, recordemos primeramente uno de los resultados más importantes que tenemos en los productos financieros derivados.

Ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Recordemos que esta ecuación nos puede servir para valuar un producto financiero **derivado de un bien subyacente S**. Esto significa que nos basamos en el comportamiento de S y apoyados de lema de Itô se logra realizar una valuación **neutral al riesgo** del derivado.

Antecedentes (Bono)

Pongámonos en contexto con un contrato financiero muy importante.

Bono (Ver video)

A grandes rasgos, un **Bono** es un contrato financiero que respecta a un préstamo. En este contrato participan dos partes, el prestamista y el prestatario. Existen diversos tipos de bonos, pero en los más esenciales se consiste en dar un préstamo a tiempo $t = 0$ el cual se liquidará en un tiempo de maduración $t = T$, todo esto con ciertos intereses.

Cuando en tiempos tales que $t \in (0, T)$, el prestatario paga un porcentaje (tasa cupón) del préstamo total al prestamista (*Valor Facial/Nominal*), se dice que ese bono está cuponado o simplemente se le llama "bono" pero cuando esto no sucede y únicamente se paga el préstamo en el tiempo de maduración a la tasa de interés establecida, entonces se le llama "bono cupón-cero".

Estos contratos se dice tienen "problemas técnicos" pues valuarlos resulta más complicado **al no existir un bien subyacente** (**S**) del cual apoyarse.

Antecedentes (Valuación de un Bono)

Ahora veamos el siguiente resultado.

Ecuación para valuar un Bono.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0$$

Donde

- r es una tasa de interés.
- u es la tasa spot real.
- T es el tiempo de maduración del Bono.
- t es un tiempo tal que está en el intervalo $[0, T]$.
- $V := V(r, t; T)$ es el precio del bono a tiempo t y tasa r.
- $u - \lambda w$ y w funciones que dependen de r y t.

De esta ecuación, el primer término se interpreta como el “tiempo de decaimiento”, el segundo como “difusión”, el tercero como “deriva” (*drift*) y el cuarto como “descuento”.

Antecedentes (Nociones teóricas)

La solución de la ecuación para la valuación de un bono se puede interpretar como el **valor presente esperado** de todos los flujos de efectivo. Por ejemplo, suponiendo que hay un *payoff* y sabiendo que las tasas de interés también *pueden ser aleatorias* entonces el valor de un contrato en tiempo t sería.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} Payoff\right]$$

Así como en las opciones que ya hemos trabajado, esta esperanza no se calcula con respecto de la *variable aleatoria real*, sino con respecto a una **variable neutral al riesgo**. La diferencia está en que en el término del *drift* no se hace con respecto a la tasa spot real, sino con respecto a la llamada **tasa spot neutral al riesgo** esta es $u - \lambda w$. De tal manera que se modelará el valor del instrumento financiero usando una tasa neutral al riesgo. Esta tasa satisface

$$\partial r = (u - \lambda w)\partial t + w\partial X$$

Donde X, que modela el precio del riesgo de mercado, será incluida pues r no se negocia.

Antecedentes (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck)

El modelo que vamos a estudiar viene dado por una ecuación diferencial estocástica que está relacionada con la siguiente definición

Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Es un proceso estocástico x_t definido por

$$\partial x_t = -\theta x_t \partial t + \sigma \partial W_t$$

Donde $\theta > 0$ y $\sigma > 0$ son parámetros y W_t denota un proceso de Wiener.

Este proceso cumple una propiedad llamada **“mean reversion”**, la cual es una propiedad financiera que indica una media móvil a lo largo del tiempo.

El Modelo

¿Qué es y cuál es el objetivo del modelo?

El Modelo de Vasicek fue introducido por Oldřich Vašíček en 1997[1] y lo que busca es encontrar una **tasa spot** r_t neutral al riesgo basándose en la valuación de Bonos y más en particular en la dinámica que estos tienen con base en la siguiente ecuación diferencial estocástica[2].

Modelo de Vasicek

$$\partial r_t = (a - br_t)\partial t + \sigma dW_t$$

Donde a, b y σ son constantes estrictamente positivas y W_t es un movimiento Browniano estándar bajo la medida martingala spot.

Se sabe que los Bonos cuponados se pueden descomponer en Bonos cupón cero, de tal manera que el modelo se centra principalmente en este tipo de instrumentos financieros para posteriormente realizar una generalización. Para efectos de esta presentación, nos centraremos en mostrar resultados y estudiar el caso para Bonos no cuponados.

---

[1] Wikipedia - Vasicek model

[2] Existen más parametrizaciones del modelo, por ejemplo $\partial r_t = \kappa(\theta - r_t)\partial t + \beta dW_t$.

¿Qué representan los parámetros?

De la ecuación diferencial estocástica planteada por Vasicek

- a/b representa el **valor medio a largo plazo**
- b representa la **velocidad de reversión**, esto es, qué tan rápido se *reagrupan* alrededor de a/b.
- σ representa la **volatilidad instantánea**, mide la amplitud de la aleatoriedad de entrada al sistema.
- $\sigma^2/(2b)$ representa la **varianza a largo plazo**, con esta varianza se *reagrupan* alrededor de a/b.

Proposiciones

Proposiciones (Para la tasa spot)

1. Solución para r_t.

La solución a la ecuación diferencial estocástica planteada por Vasicek está dada por

$$r_t = r_s e^{-b(t-s)} + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-b(t-s)}\right) + \sigma \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_u.$$

Para cualquier $s < t$ la distribución condicional de r_t con respecto al σ-álgebra $\mathcal{F}_s$ es Gaussiana, con esperanza condicional basada en la medida martingala neutral al riesgo $\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[r_t|\mathcal{F}_s\right] = r_s e^{-b(t-s)} + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-b(t-s)}\right)$$

y varianza condicional

$$Var_{\mathbb{P}}\left(r_t|\mathcal{F}_s\right) = \frac{\sigma^2}{2b}\left(1 - e^{-2b(t-s)}\right)$$

Demostración.

La prueba de esta proposición se encuentra en el libro Martingale Methods in Financial Modelling - Marek Musiela & Marek Rutkowski - Lemma 10.1.2.

□

Proposiciones (Para la tasa spot)

Sin embargo, y aunque no entraremos en detalle sí hacemos las siguientes aclaraciones que vienen en la demostración de la proposición anterior.

Tomando $Y_t = r_t e^{b(t-s)}$ con $t \geq s$ entonces usando la definición del modelo y de derivar con respecto de ∂t se tiene que.

$$\partial Y_t = e^{b(t-s)}(a\partial t + \sigma \partial W_t)$$

De donde se llega más fácilmente al resultado deseado. Ahora, otro punto importante qué comentar es que, un resultado, aparentemente conocido, es que la integral de Itô de $\int_s^t g(u)dW_u$ es una variable aleatoria independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$ y que tiene una distribución $Normal\left(0, \int_s^t g^2(u)du\right)$ que en este caso se tiene entonces un resultado final de que

$$r_{t|s} \sim Normal\left(r_s e^{-b(t-s)} + \frac{a}{b}\left[1 - e^{-b(t-s)}\right], \frac{\sigma^2}{2b}\left[1 - e^{2b(t-s)}\right]\right)$$

De aquí es muy clara la propiedad de **"mean reversion"**.

Proposiciones (Para la tasa spot)

Derivado de los resultados anteriores, no es muy complicado notar que

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[r_t | \mathcal{F}_s \right] = \frac{a}{b}$$

y también

$$\lim_{t \to \infty} Var_{\mathbb{P}} \left(r_t | \mathcal{F}_s \right) = \frac{\sigma^2}{2b}$$

Que nos permite ver el porqué de la interpretación de los parámetros.

Proposiciones (Para el valor del Bono)

2. Solución para la valuación de un Bono cupón cero.

El precio a tiempo t un Bono cupón cero con (con valor facial igual a 1) bajo el modelo de Vasicek es

$$B(t,T) = e^{m(t,T)-n(t,T)r_t}$$

Donde

- $n(t,T) = \dfrac{1}{b}\left(1 - e^{-b(T-t)}\right)$
- $m(t,T) = \dfrac{\sigma^2}{2}\displaystyle\int_t^T n^2(u,T)du - a\int_t^T n(u,T)du$

Más aún, la función de volatilidad de un bono es $b(\cdot,T) : [0,T] \to \mathbb{R}$, en específico, $b(t,T) = \sigma n(t,T)$ y así, la dinámica del precio del bono bajo $\mathbb{P}$ es

$$\partial B(t,T) = B(t,T)(r_t \partial t - \sigma n(t,T)\partial W_t)$$

Demostración.

La prueba de esta proposición se encuentra en el libro Martingale Methods in Financial Modelling - Marek Musiela & Marek Rutkowski - Proposition 10.1.2 y Proposition 10.1.3

$\square$

Modelo de Vasicek

Edgar Gerardo Alarcón González

Introducción
Objetivo
Antecedentes

El Modelo
Proposiciones
Implementación

Epílogo
¿Qué es lo que sigue?
Conclusiones

Bibliografía

Implementación

Implementación (Lee)

Una vez conocidos los resultados, procedemos a conocer cómo funcionan y principalmente a ver si podemos diversificar las fuentes de información y homologar la teoría desarrollada en las fuentes citadas. Para esto, consideraremos un ejemplo realizado por un autor llamado Lee, el cual nos presenta una implementación en código R del modelo de Vasicek en su artículo "Fun with the Vasicek Interest Rate Model"[3].

Tomaremos un ejemplo muy particular el cual es para la valuación de un Bono[4], aquí, el autor se toma los parámetros como $T = 1$, $a = (0.1)(0.3)$, $b = 0.3$, $\sigma = 0.03$, $s = 0$ y $r_s = 0.03$. De aquí, se obtienen los siguientes resultados

```
Exact Vasicek Price: 0.9614

MC Price: 0.9623

MC Standard Error: 0.0005
```

[3]En su artículo, Lee está usando una parametrización alternativa del modelo de Vasicek, bajo nuestra notación, tenemos que $a = \kappa\theta$, $b = \kappa$, $\sigma = \beta$.

[4]Tomamos este ejemplo pues la implementación de la valuación del Bono trae intrínsecamente la de la tasa spot.

Implementación (Edgar)

Ahora bien, nosotros **NO** usaremos la implementación realizada por Lee, pues de hecho él tiene fórmulas tanto con otras parametrizaciones como un poco más desarrolladas en algunos puntos. Sin embargo hicimos **nuestra implementación**[5] del cálculo exacto de la valuación del Bono, basados en los resultados expuestos en este trabajo.

La ejecución de nuestra función se ve la siguiente manera

```
Bono(t = 0, tf = 1, a = 0.1*0.3, b = 0.3,
     sigma = 0.03, s = 0, rs = 0.03)
```

Lo cual nos da como resultado

$$B(0,1) = 0.9613625$$

Lo cual coincide con los resultados propuestos por Lee.

[5] El código lo podrán encontrar dando clic ya sea que gusten ver el `script.R` o bien, la `presentación.Rmd`.

Implementación (Edgar)

Ahora, vamos a proponer una metodología para que dada una muestra $\{r_t\}_{t\geq s\geq 0}$ podamos estimar los parámetros a y b. Esto lo hacemos con base en la idea de residuales y apoyados de que conocemos la media teórica que debería tener r_t.

Esto significa que buscamos hacer la siguiente minimización

$$\min_{a,b}\left[\sum_{\forall t}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[r_t|\mathcal{F}_s\right]-r_t\right)^2\right]$$

Nota: Nosotros debemos pensar que r_t está dada y que no conocemos de dónde proviene su naturaleza. Es importante hacer énfasis en esto última pues, de esta aproximación tristemente solo podemos estimar a y b; esto pues, la media condicional depende de estos parámetros y faltaría encontrar un estimador para σ. Recordemos que t, T, s y r_s tiene sentido pensarlos como parámetros conocidos.

Implementación (Shiny)

Introducción
Objetivo
Antecedentes
El Modelo
Proposiciones
Implementación
Epílogo
¿Qué es lo que sigue?
Conclusiones
Bibliografía

Una vez que ya hemos verificado con un ejemplo que nuestra implementación es correcta, hemos desarrollado una pequeña aplicación en RStudio-Shiny para poder manipular las funciones creadas con base en la teoría expuesta. Para poder acceder a esta aplicación basta con dar clic sobre la siguiente imágen.

Aplicación en R Shiny.

Epílogo

Introducción
Objetivo
Antecedentes
El Modelo
Proposiciones
Implementación
Epílogo
¿Qué es lo que sigue?
Conclusiones
Bibliografía

¿Qué es lo que sigue?

¿Qué es lo que sigue?

En el libro Paul Wilmott - Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance se habla sobre un modelo de Vasicek extendido. Con el objetivo de calibrar el modelo tradicional, se propone estimar estadísticamente los parámetros b y σ. Por otro lado, el parámetro a se propone ahora como una función del tiempo $a(t)$, modificación que altera la ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma

$$\partial r_t = (a(t) - br_t)\partial t + \sigma dW_t$$

Esto eventualmente afectará las relaciones anteriores y también se podrá encontrar una solución explícita para la función $a(t)$.

Conclusiones

Conclusiones

Aún quedan bastantes cosas por hacer con respecto al modelo, al menos en términos aplicados. Se puede explorar la metodología Monte Carlo propuesta por Lee para entender el funcionamiento estocástico de lo realizado.

A su vez, es importante buscar cómo encontrar una estimación “estadísticamente adecuada” para los parámetros del modelo, en nuestros ejemplos hemos logrado ver el comportamiento teórico del mismo variando sus parámetros. Pero lo ideal sería usar la información estadística disponible para estimar los parámetros que mejor se adecúen al modelo.

En este trabajo hemos logrado verificar computacionalmente el desarrollo teórico del modelo, se hace énfasis final en que una implementación práctica con datos reales será lo idea y un buen paso siguiente a dar antes que explorar el modelo de Vasicek extendido por ejemplo.

Introducción
Objetivo
Antecedentes
El Modelo
Proposiciones
Implementación
Epílogo
¿Qué es lo que sigue?
Conclusiones
Bibliografía

Bibliografía

Bibliografía

Introducción
Objetivo
Antecedentes
El Modelo
Proposiciones
Implementación
Epílogo
¿Qué es lo que sigue?
Conclusiones
Bibliografía

Podrán ver todas las fuentes de información completas con la que se construyó esta presentación dando clic en los siguientes enlaces.

- Etheridge A. - A Course in Financial Calculus
- Marek Musiela & Marek Rutkowski - Martingale Methods in Financial Modelling
- Paul Wilmott - Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance
- Lee - Fun with the Vasicek Interest Rate Model


GRACIAS
MUCHAS
memegenerator.es