Costo por pago.

Usando la notación de la SOA (Society of Actuaries), las variables aleatorias del pago de una aseguradora (Y) que hemos visto son denotadas como Y_L refiriéndose al costo por pérdida (cost per loss).

Existe una v.a. derivada de Y_L llamada costo por pago (cost per payment) definida como:

$$\boxed{Y_P \doteqdot Y_L | Y_L > 0}$$

Que se puede interpretar como el pago que la aseguradora haría de verse forzada a pagar pues el siniestro ya alcanzó su umbral de pago.

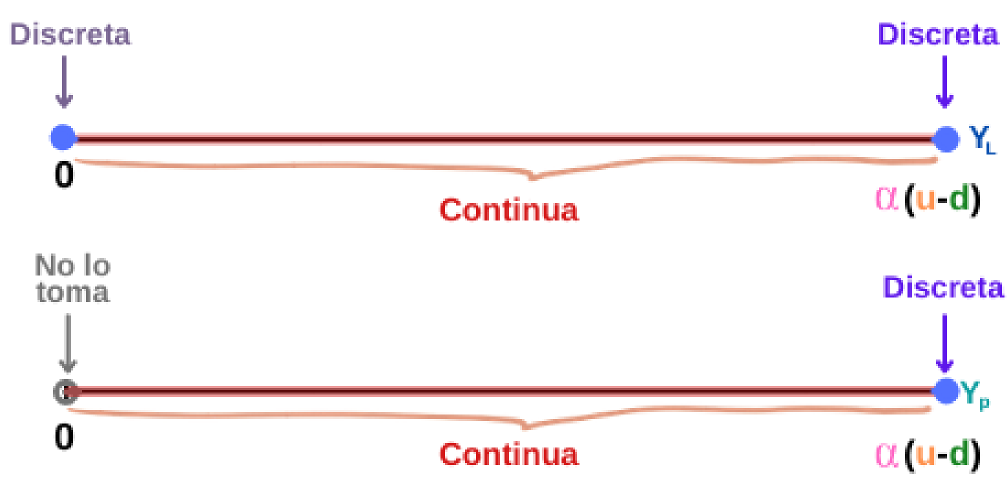
Por ejemplo, en el caso particular de Y_L con cobertura de deducible, entonces:

$$Y_P \doteqdot Y_L | Y_L > 0 = Y_L | X > d$$

Que querría decir, condicionado a que el siniestro superó el deducible. Pues $Y_L \equiv 0$ si $X \leq d$.

> Nota: $Y_p > 0$ siempre pues Y_L es siempre positiva y más aún, $Y_p \doteqdot Y_L | Y_L > 0$, es decir, es un valor aleatorio condicionado a que dicho valor es estrictamente positivo.

Teniendo definida la variable aleatoria Y_p, vamos a obtener su función de densidad. Haremos esto para la versión generalizada de Y_L, la cuál es teniendo todas las coberturas. Esto hará que Y_p sea una v.a. mixta ya que, por definición,$Y_P \doteqdot Y_L | Y_L > 0$ son valores que toma Y_L solo que "asumiendo" que Y_L es ya positiva y recordemos que esta versión generalizada es continua en $(0, \alpha(u - d))$ y discreta en $\alpha(u - d)$.



Procedemos aplicando el teorema de probabilidad total y tomando $t \in (0, \alpha(u-d))$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y_L \leq t] &= \mathbb{P}[\underbrace{Y_L \leq t | Y_L > 0}_{Y_p \leq t}]\mathbb{P}[Y_L > 0] + \mathbb{P}[\cancelto{1}{Y_L \leq t | Y_L} \equiv 0]\mathbb{P}[Y_L \equiv 0] \\
&= \mathbb{P}[Y_p \leq t]\mathbb{P}[Y_L > 0] + \mathbb{P}[Y_L \equiv 0] \\
F_{Y_L}(t) &= F_{Y_p}(t)S_{Y_L}(0) + f_{Y_L}(0) \Leftrightarrow F_{Y_p}(t) = \frac{F_{Y_L}(t) - f_{Y_L}(0)}{S_{Y_L}(0)} \\
\therefore F_{Y_p}(t) &= \frac{F_{Y_L}(t) - f_{Y_L}(0)}{1 - F_{Y_L}(0)} = \frac{F_{Y_L}(t) - f_{Y_L}(0)}{1 - f_{Y_L}(0)} \quad \forall t \in (0, \alpha(u-d))
\end{aligned}$$

Como estamos en la parte continua de Y_p podemos tomar la derivada y así:

$$f_{Y_p}(t) = \frac{f_{Y_L}(t)}{1 - f_{Y_L}(0)} \quad \forall t \in (0, \alpha(u-d))$$

Vamos a ver qué sucede en la parte discreta de Y_p, ie, en el punto $\alpha(u-d)$:

$$\begin{aligned}
f_{Y_p}(\alpha(u-d)) = \mathbb{P}[Y_p \equiv \alpha(u-d)] &\ddot{=} \mathbb{P}[Y_L \equiv \alpha(u-d) | Y_L > 0] \\
&= \frac{\mathbb{P}[\{Y_L \equiv \alpha(u-d)\} \bigcap \{Y_L > 0\}]}{\mathbb{P}[Y_L > 0]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[Y_L \equiv \alpha(u-d)]}{\mathbb{P}[Y_L > 0]} = \frac{f_{Y_L}(\alpha(u-d))}{S_{Y_L}(0)}
\end{aligned}$$

De tal manera que podemos unir los dos casos y así escribir que:

$$f_{Y_p}(t) = \frac{f_{Y_L}(t)}{1 - f_{Y_L}(0)} \mathbb{I}_{(0, \alpha(u-d)]}(t) \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} \text{Esto sucede si} \\ \mathbb{P}[Y_L \equiv 0] > 0. \\ \text{En otro caso} \quad Y_p \stackrel{d}{=} Y_L. \end{matrix}$$

Que en términos del monto del siniestro (X) queda:

$$f_{Y_p}(t) = \begin{cases} \dfrac{f_X\left(\frac{t + d\alpha}{(1+r)\alpha}\right)}{\alpha(1+r)S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & \text{si} \quad t \in (0, \alpha(u-d)) \quad (\textit{continua}) \\ \dfrac{S_X\left(\frac{u}{1+r}\right)}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & \text{si} \quad t = \alpha(u-d) \quad (\textit{discreta}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con base a el costo por pérdida (Y_L), la función de distribución acumulada del costo por pago (Y_p) es:

$$F_{Y_p}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \frac{F_{Y_L}(t) - f_{Y_L}(0)}{1 - f_{Y_L}(0)} & \text{si} \quad t \in (0, \alpha(u-d)] \end{cases}$$

Que en términos del monto del siniestro (X) queda:

$$F_{Y_p}(t) \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^t \frac{f_X\left(\frac{x+d\alpha}{\alpha(1+r)}\right)}{\alpha(1+r)S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} dx & \text{si} \quad t \in (0, \alpha(u-d)) \\ 1 & \text{si} \quad t \geq \alpha(u-d) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{f_X\left(\frac{x+d\alpha}{(1+r)\alpha}\right)}{\alpha(1+r)S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} dx &= \frac{1}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \int_0^t \frac{f_X\left(\frac{x+d\alpha}{\alpha(1+r)}\right)}{\alpha(1+r)} dx \\ &= \frac{1}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}} f_X(s)ds \begin{cases} \text{Cambio de variable} \\ s = \frac{x+d\alpha}{\alpha(1+r)} \Rightarrow ds = \frac{1}{\alpha(1+r)}dx \\ x = 0 \Rightarrow s = \frac{d}{1+r} \\ x = t \Rightarrow s = \frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)} \end{cases} \\ &\ddot{=} \frac{\mathbb{P}[\frac{d}{1+r} \leq X \leq \frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}]}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} = \frac{F_X\left(\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}\right) - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{F}_{Y_p}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \frac{F_X\left(\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}\right) - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} & \text{si} \quad t \in (0, \alpha(u-d)) \\ 1 & \text{si} \quad t \geq \alpha(u-d) \end{cases}$$

Recordemos que la ley de esperanza iterada establece que tomando X, Y v.a. entonces:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

Nota: $\mathbb{E}[X|Y]$ es una v.a. que depende de los valores de Y, podríamos decir que $\mathbb{E}[X|Y] = g(Y)$, su soporte viene dado por una transformación en el soporte de Y.

Sea $\mathscr{L}$ una v.a. auxiliar definida como:

$$\mathscr{L} = \begin{cases} 1 & \text{sii} \quad Y_L \equiv 0 \\ 2 & \text{sii} \quad Y_L > 0 \end{cases}$$

Noten que $\mathscr{L}$ es v.a. pues depende de una. De hecho, ésta es discreta con $sop\{\mathscr{L}\} = \{1, 2\}$.
Obtengamos ahora la esperanza de Y_p utilizando lo anterior.
Llamemos $g(x) \doteqdot \mathbb{E}[Y_L|\mathscr{L} = x]$, así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_L] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_L|\mathscr{L}]] = \mathbb{E}[g(\mathscr{L})] = \sum_{k \in sop\{\mathscr{L}\}} g(k)\mathbb{P}[\mathscr{L} = k] \\
\mathbb{E}[Y_L] &= \sum_{k=1}^{2} g(k)\mathbb{P}[\mathscr{L} = k] \\
&= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{E}[Y_L|\mathscr{L} = k]\mathbb{P}[\mathscr{L} = k] \\
&= \mathbb{E}[Y_L|\mathscr{L} = 1]\mathbb{P}[\mathscr{L} = 1] + \mathbb{E}[Y_L|\mathscr{L} = 2]\mathbb{P}[\mathscr{L} = 2]
\end{aligned}$$

El evento $\mathscr{L} = 1$ es equivalente al evento $Y_L \equiv 0$.
El evento $\mathscr{L} = 2$ es equivalente al evento $Y_L > 0$.

$$\mathbb{E}[Y_L] = \cancelto{0}{\mathbb{E}[Y_L|Y_L \equiv 0]}\mathbb{P}[Y_L \equiv 0] + \mathbb{E}[Y_L|Y_L > 0]\mathbb{P}[Y_L > 0]$$

El valor esperado de algo que ya toma un valor no aleatorio, es dicho valor.

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\mathbb{E}[Y_L|Y_L > 0]}_{Y_p}\mathbb{P}[Y_L > 0] \\
&= \mathbb{E}[Y_p]\mathbb{P}[Y_L > 0]
\end{aligned}$$

El resultado general anterior se conoce como ”Ley de la Partición.º ”Ley de Esperanza Total”.
Tomando $\{B_i\}$ partición de Ω. E[X]=$\sum_{\forall i} \mathbb{E}[X|B_i]\mathbb{P}[B_i]$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_p] &= \frac{\mathbb{E}[Y_L]}{\mathbb{P}[Y_L > 0]} \\ &= \frac{\alpha(1+r)}{S_X\left(\frac{d}{1+r}\right)} \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} S_X(t)dt\end{aligned}$$

En general, dada una función $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ¿Qué significa tomar $h(Y_p)$?

$Y_p \doteq Y_L | Y_L > 0$, es decir, son valores aleatorios positivos provenientes de una v.a subyacente Y_L. Entonces, aplicarle una función a Y_p (y en general a una v.a condicionadas a algo) significa por definición.

$$h(Y_p) \doteq h(Y_L)|Y_L > 0$$

Es decir que es aplicarle "h", a los valores positivos que se obtuvieron. Tomando esto en cuenta, ya podemos saber cómo obtener momentos de Y_p.

En una versión "simplificada"de lo anterior, si deseamos obtener momentos de Y_p:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[{Y_L}^k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[{Y_L}^k|Y_L]] \\ &= \cancelto{0}{\mathbb{E}[{Y_L}^k]}\mathbb{P}[Y_L \equiv 0] + \mathbb{E}[{Y_L}^k|Y_L > 0]\mathbb{P}[Y_L > 0]\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[Y_L^k|Y_L \equiv 0] = \mathbb{E}[0^k] = \mathbb{E}[0] = 0$$

$$\mathbb{E}[Y_L^k|Y_L > 0] \doteq \mathbb{E}[Y_p^k]$$

$$\mathbb{E}[{Y_L}^k] = \mathbb{E}[Y_p^k] \cdot \mathbb{P}[Y_L > 0]$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_p^k] &= \frac{\mathbb{E}[Y_L^k]}{\mathbb{P}[Y_L > 0]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[Y_L^k]}{1 - f_{Y_L}(0)} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

De donde ya sabemos obtener momento en general para Y_L.

Cuantiles para las coberturas

Una vez construido todo en esta sección, es el momento de mostrar un teorema interesante aunque poco mencionado por varios autores:

Teorema de equivarianza de cuantiles

Sea X una v.a y Sop$\{ X\}$ su soporte. Tomando ϕ una función no-decreciente al menos $\forall x \in Sop\{X\}$, entonces:

$$q_{\varphi(X)}(\alpha) = \varphi(q_X(\alpha))$$

Nota: $\varphi(X)$ es una v.a que depende de X.

Notemos ahora que todas las variables aleatorias de cobertura que construimos son funciones no-decrecientes de un monto de siniestro X. Esto por la simple lógica en su construcción de “A mayor el monto de siniestro, el pago de la aseguradora no puede disminuir”.

Aplicando el teorema a la v.a generalizada de perdida por una cobertura completa (coaseguro, inflación, etc):

$$Y_L \quad = \quad máx\{\alpha(mín\{X(1+r), u\} - d), 0\}$$

Entonces los cuantiles del $\gamma \in [0,1]$ de Y_L estarán dados por:

$$q_{Y_L}(\gamma) \quad = \quad máx\{\alpha(mín\{q_X(\gamma)(1+r), u\}) - d), 0\} \quad \forall\gamma \in [0,1]$$

Adicionalmente, si quisiéramos obtener los cuantiles de Y_p podríamos obtenerlos de los de Y_L haciendo:

$$\begin{aligned} \gamma &= F_{Y_p}(x) \\ &= \frac{F_{Y_L}(x) - f_{Y_L}(0)}{1 - f_{Y_L}(0)} \end{aligned}$$

Si y solo si

$$F_{Y_L}(x) = (1 - f_{Y_L}(0))\gamma + f_{Y_L}(0)$$

Si y solo si

$$\begin{aligned} x &= q_{Y_p}(\gamma) \\ &= q_{Y_L}((1 - f_{Y_L}(0))\gamma + f_{Y_L})(0) \end{aligned}$$

De donde se deduce que los cuantiles de Y_p vienen dados por los de Y_L en función del segmento de recta.

$$L \quad = \quad \{\beta \in [0,1] : \beta = (1 - f_{Y_L}(0)\gamma + f_{Y_L}(0) \quad con \quad \gamma \in [0,1])\}$$

Esto significa que, mientras Y_L tiene un rango de probabilidades $[0,1]$ de manera “libre”. Y_p se encuentra atrapada en un universo “más pequeño”que Y_L sin siquiera notarlo.

De hecho:

Si $\gamma = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} q_{Y_p}(\gamma) &= q_{Y_L}((1 - f_{Y_L}(0))\gamma + f_{Y_L}(0)) \\ &= q_{Y_L}(f_{Y_L}(0)) \\ &= q_{Y_L}(F_{Y_L}(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nota:$0 \notin Sop\{Y_p\}$ **pero sí es ínfimo de su soporte.**

Si $\gamma = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} q_{Y_p}(\gamma) &= q_{Y_L}((1 - f_{Y_L}(0))\gamma + f_{Y_L}(0)) \\ &= q_{Y_L}(1) \\ &= \alpha(u - d) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$q_{Y_p}(\gamma) \;=\; q_{Y_L}((1 - f_{Y_L}(0))\gamma + f_{Y_L}(0)) \quad \forall \gamma \in [0, 1]$$

Si ponemos el segmento de recta en función del monto de siniestro (X):

$$(1 - f_{Y_L}(0))\gamma + f_{Y_L}(0) \quad = \quad \left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\gamma + F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$$

Entonces:

$$q_{Y_p}(\gamma) \quad = \quad \left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\gamma + F_X\left(\frac{d}{1+r}\right) \quad \forall\gamma \in [0,1]$$

Finalmente , si ponemos a q_{Y_L} con la identidad proveniente del teorema de equivarianza en los cuantiles, obtendremos una identidad para $q_{Y_p}(\gamma) \quad \forall\gamma \in [0,1]$ en términos únicamente del monto de siniestro (X):

$$q_{Y_p}(\gamma) \quad = \quad máx\{\alpha(mín\{q_X(\beta(\gamma))(1+r), u\} - d), 0\} \quad \forall\gamma \in [0,1]$$

Donde: $\beta(\gamma) \doteq \left(1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)\right)\gamma + F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)$.

Ejemplo

Supongamos que el monto de siniestros es $X \sim Unif(100, 200)$. Consideremos con todas las coberturas: $\alpha = 75\,\%, r = 10\,\%, d = 120$ y $u = 180$.Para las v.a Y_L y Y_P, obtenga:

I La función de densidad.

II La función de distribución acumulada.

III Valor esperado.

IV Segundo momento.

V La varianza.

VI El valor esperado del coseno de la v.a. .

VII La mediana.

VIII El cuantil del 90 %.

Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
f_X(t) &= \frac{1}{100}\mathbb{I}_{(100,200)}(t) \\
F_X(t) &= \frac{t-100}{100}\mathbb{I}_{(100,200)}(t) \\
S_X(t) &= \frac{200-t}{100}\mathbb{I}_{(100,200)}(t)
\end{aligned}
$$

Con base en los resultados obtenidos en esta sección del curso, resolveremos primero para Y_L y luego para Y_p

Soluciones para Y_L:

$i)$ La función de densidad.

$$f_{Y_L}(t) = \begin{cases} F_{\chi}(\frac{d}{1+r}) & si \quad t = 0 \quad (discreta) \\ \frac{f_{\chi}(\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)})}{\alpha(1+r)} & si \quad t \in (0, \alpha(u-d)) \quad (continua) \\ S_{\chi}(\frac{u}{1+r}) & si \quad t = \alpha(u-d) \quad (discreta) \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{120}{1,1}-100}{100} = \frac{1}{11} & si \quad t = 0 \\ \frac{1}{0,75(1,1)}(\frac{1}{100}) = \frac{2}{165} & si \quad t \in (0, 0,75(180-120) = 45) \\ \frac{200-\frac{180}{1,1}}{100} = \frac{4}{11} & si \quad t = 45 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

$ii)$ La función de distribución acumulada.

$$F_{Y_L}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ F_{\chi}(\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}) & si \quad t \in [0, \alpha(u-d)) \\ 1 & si \quad t \geq \alpha(u-d) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ \frac{\frac{t+120(75\%)}{75\%(1,1)} - 100}{100} = \frac{\frac{t}{0,825} + \frac{100}{11}}{100} & si \quad t \in [0, 45) \\ 1 & si \quad t \geq 45 \end{cases}$$

iii) Valor esperado.

$$\mathbb{E}[Y_L] = \alpha(1+r) \int_{\frac{d}{1+r}}^{\frac{u}{1+r}} S_X(t)dt = 0{,}75(1{,}1) \int_{\frac{120}{1,1}}^{\frac{180}{1,1}} \frac{200-t}{100} dt$$

$$= \frac{315}{11} = 28{,}636\bar{3}$$

iv) Segundo momento.

$$\mathbb{E}[g(Y_L)] =$$

$$g(0)[F_X(\tfrac{d}{1+r})] + \int_0^{\alpha(u-d)} g(t) \frac{f_X(\frac{1+d\alpha}{\alpha(1+r)})}{\alpha(1+r)} dt + g(\alpha(u-d)) \cdot [S_X(\tfrac{u}{1+r})]$$

$$\mathbb{E}[Y_L^2] = 0^2(\tfrac{1}{11}) + \int_0^{45} t^2(\tfrac{2}{165})dt + 45^2(\tfrac{4}{11}) = \tfrac{12150}{11} = 1104{,}545\bar{4}$$

v) La varianza.

$$Var(Y_L) = \mathbb{E}[Y_L^2] - \mathbb{E}^2[Y_L] = \tfrac{34425}{121} \approx 284{,}5041322$$

vi) El valor esperado del coseno de la v.a.

$$\mathbb{E}[cos(Y_L)] = cos(0)(\tfrac{1}{11}) + \int_0^{45} cos(t)(\tfrac{2}{165})dt + cos(45)(\tfrac{4}{11}) \approx 0{,}29224925$$

vii) La mediana.

$$q_{Y_L}(\gamma) = max\{\alpha(min\{q_{\chi}(\gamma)(1+r), u\} - d), 0\}$$

Obtengamos $q_{\chi}(0{,}5)$ la mediana de χ

$$0{,}5 = F_{\chi}(\chi_0) = \tfrac{\chi_0 - 100}{100} \Longleftrightarrow \chi_0 = 150 = q_{\chi}(0{,}5)$$

$$\longrightarrow q_{Y_L}(0{,}5) = max\{0{,}75(min\{q_{\chi}(0{,}5)(1{,}1), 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(min\{150(1{,}1), 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(min\{165, 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(165 - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(45), 0\}$$

$$= max\{33{,}75, 0\} = 33{,}75$$

$viii)$ El cuantil del 90 %.
Obtengamos el cuantil $q_{\chi}(0{,}9)$:

$$0{,}9 = F_{\chi}(\chi_0) = \tfrac{\chi_0 - 100}{100} \Longleftrightarrow \chi_0 = q_{\chi}(0{,}9) = 190$$

$$\longrightarrow q_{Y_L}(0{,}9) = max\{0{,}75(min\{q_{\chi}(0{,}9)(1{,}1), 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(min\{190(1{,}1), 180\} - 120), 0\}$$

$$= 45$$

Soluciones para Y_p

$i)$ La función de densidad.

$$f_{Y_p}(t) = \begin{cases} \dfrac{f_{\chi}(\frac{t+d\alpha}{(1+r)\alpha})}{\alpha(1+r)S_{\chi}(\frac{d}{1+r})} & si \quad t \in (0, \alpha(u-d)) \quad (continua) \\[2ex] \dfrac{S_{\chi}(\frac{u}{1+r})}{S_{\chi}(\frac{d}{1+r})} & si \quad t = \alpha(u-d) \quad (discreta) \\[2ex] 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{1}{100}}{0{,}75(1{,}1)(\frac{10}{11})} = \frac{1}{75} & si \quad t \in (0,45) \\ \frac{\frac{200-\frac{180}{1{,}1}}{100}}{\frac{10}{11}} = \frac{2}{5} & si \quad t = 45 \\ 0 & en \quad otro \quad caso \end{cases}$$

ii) La función de distribución acumulada.

$$F_{Y_p}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \frac{F_X(\frac{t+d\alpha}{\alpha(1+r)}) - F_X(\frac{d}{1+r})}{S_X(\frac{d}{1+r})} & si \quad t \in (0, \alpha(u-d)) \\ 1 & si \quad t \geq \alpha(u-d) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \frac{\frac{\frac{t}{0{,}825}+\frac{100}{11}}{100} - \frac{1}{11}}{\frac{10}{11}} = \frac{\frac{t}{82{,}5}}{\frac{10}{11}} = \frac{11t}{825} & si \quad t \in (0,45) \\ 1 & si \quad t \geq 45 \end{cases}$$

iii) Valor esperado.

$$\mathbb{E}[Y_p] = \frac{\mathbb{E}[Y_L]}{\mathbb{P}[Y_L>0]} = \frac{\frac{315}{11}}{\frac{10}{11}} = \frac{315}{10} = 31{,}4$$

iv) Segundo momento.

$$\mathbb{E}[Y_p^k] = \frac{\mathbb{E}[Y_L^k]}{\mathbb{P}[Y_L>0]}$$

$$\longrightarrow \mathbb{E}[Y_p^2] = \frac{\mathbb{E}[Y_L^2]}{\mathbb{P}[Y_L>0]} = \frac{\frac{12150}{11}}{\frac{10}{11}} = 1215$$

v) La varianza.

$$Var(Y_p) = \mathbb{E}[Y_p^2] - \mathbb{E}^2[Y_p] = \frac{894}{4} = 222{,}75$$

vi) El valor esperado del coseno de la v.a.
De hecho, en general tomando $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función tal que las cantidades expresadas existan.
Siempre se satisface que cuando $\mathbb{P}[Y_L = 0] \equiv f_{Y_L}(0)$:

$$\boxed{\mathbb{E}[h(Y_L)] = h(0)f_{Y_L}(0) + \mathbb{E}[h(Y_p)](1 - f_{Y_L}(0))}$$

La prueba queda como ejercicio para el lector.
De donde obtenemos de forma general:

$$\boxed{\mathbb{E}[h(Y_p)] = \frac{\mathbb{E}[h(Y_L)] - h(0)f_{Y_L}(0)}{1 - f_{Y_L}(0)} = \frac{\mathbb{E}[h(Y_L)] - h(0)F_{\chi}(\frac{d}{1+r})}{S_{\chi}(\frac{d}{1+r})}}$$

Entonces:

$$\mathbb{E}[cos(Y_p)] = \frac{\mathbb{E}[cos(Y_L)] - cos(0)F_{\chi}(\frac{d}{1+r})}{S_{\chi}(\frac{d}{1+r})} = \frac{\mathbb{E}[cos(Y_L)] - \frac{1}{11}}{\frac{10}{11}} \approx 0{,}2214741759$$

O bien, por definición de esperanza:

$$\mathbb{E}[cos(Y_p)] = \int_0^{45} \frac{cos(t)}{75} dt + cos(45)(\tfrac{2}{5}) \approx 0{,}2214741759$$

vii) La mediana.

$$q_{Y_p}(\gamma) = max\{\alpha(min\{q_{\chi}(\beta(\gamma))(1+r), u\} - d), 0\}$$

$$\text{Donde: } \beta(\gamma) \ddot{=} (1 - F_{\chi}(\tfrac{d}{1+r}))\gamma + F_{\chi}(\tfrac{d}{1+r})$$

$$\gamma = 0{,}5 \longrightarrow \beta(\gamma) = (1 - F_{\chi}(\tfrac{d}{1+r}))\gamma + F_{\chi}(\tfrac{d}{1+r}) = \tfrac{10}{11}(0{,}5) + \tfrac{1}{11} = \tfrac{6}{11}$$

$$\text{Note que } q_{\chi}(p) = p(100) + 100 \longrightarrow q_{\chi}(\tfrac{6}{11}) = \tfrac{1700}{11} = q_{\chi}(\beta(\gamma))$$

$$\longrightarrow q_{Y_p}(\gamma) = max\{0{,}75(min\{\tfrac{1700}{11}(1{,}1), 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(min\{170, 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(170 - 120), 0\}$$

$$= max\{37{,}5, 0\} = 37{,}5$$

viii) El cuantil del 90 %.

$$\gamma = 0{,}9 \longrightarrow \beta(\gamma) = (1 - F_{\chi}(\tfrac{d}{1+r}))\gamma + F_{\chi}(\tfrac{d}{1+r}) = \tfrac{10}{11}(0{,}9) + \tfrac{1}{11} = \tfrac{10}{11}$$

$$\longrightarrow q_{\chi}(\beta(\gamma)) = q_{\chi}(\tfrac{10}{11}) = 100(\tfrac{10}{11} + 1) = \tfrac{2100}{11}$$

Por lo tanto:

$$q_{Y_p}(\gamma) = max\{0{,}75(min\{\tfrac{2100}{11}(1{,}1), 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(min\{210, 180\} - 120), 0\}$$

$$= max\{0{,}75(180 - 120), 0\}$$

$$= max\{45, 0\} = 45$$

Script:"Coberturas"