Tarea 8 - Derivados a tiempo continuo

Edgar Gerardo Alarcón González

4 de diciembre de 2020

Del examen general de finanzas matemáticas del posgrado en ciencias matemáticas, enero 2017, resolveremos los ejercicios 3 y 4, relativos a finanzas en tiempo continuo.

Ejercicio 3.
Un *straddle* es una opción europea construida sobre un subyacente S sintetizada por la compra simultánea de un *call* y un *put* de la misma maduración y *strike*.

I) Determinar el *payoff* de esta opción en el modelo de Black-Scholes. Dar su premio al tiempo t. Dar en particular la fórmula cuando la opción está a la moneda (*at the money*) a tiempo $t = 0$.

II) Determinar las ganancias y pérdidas máximas que se pueden realizar al comprar tal opción. ¿Cuál es la estrategia de esta opción?

Antecedentes.

Para hablar de un *straddle* primero comencemos recordando un poco de los contratos *call* y *put*.

- Opción *call* Europea

  Un contrato *call* es una opción de compra, es decir, este contrato se vende a cambio de una **prima** y en él se pacta que a tiempo $T > 0$ el tenedor del mismo tendrá la opción de comprar o no un bien subyacente con valor $S(T)$ a un precio E de ejercicio (*strike*) pactado a tiempo $t = 0$. De tal manera que el tenedor del contrato ejercerá su derecho de compra si $S(T) > E$ y no lo hará en otro caso. Esto se traduce a que las ganancias a tiempo T (*payoff*), sin contemplar la prima de venta del contrato (Figura 1), de la posición larga (perspectiva del tenedor/comprador del contrato) estarán dadas por la siguiente función.

  $$payoff^L_{call} = max(S(T) - E, 0)$$

  Mientras que la posición corta (perspectiva del vendedor del contrato) obtiene como ganancia el negativo de esta relación

  $$payoff^C_{call} = min(E - S(T), 0)$$

  Recordemos que podemos calcular el valor de la opción *call* a tiempo $t \in [0, T]$ de la siguiente manera gracias a la fórmula de Black-Scholes

  $$V_{call}(S_t, t) = S_t\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

  Donde:

  - $S_t := S(t)$ es el precio del bien subyacente a tiempo t,
  - r es la tasa libre de riesgo,
  - T es el tiempo de maduración del contrato,

- E es el precio *strike* (de ejercicio),
- Φ es la función de distribución (acumulada) de una normal estándar,
- σ la volatilidad en el retorno del bien subyacente,
- $d_1 = \dfrac{log(S_t/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, y,
- $d_2 = \dfrac{log(S_t/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$

- Opción *put* Europea

  Un contrato *put* es una opción de venta, es decir, este contrato se vende a cambio de una **prima** y en él se pacta que a tiempo $T > 0$ el tenedor del mismo tendrá la opción de vender o no un bien subyacente con valor $S(T)$ a un precio E de ejercicio pactado a tiempo $t = 0$. De tal manera que el tenedor del contrato ejercerá su derecho de venta si $S(T) < E$ y no lo hará en otro caso. Esto se traduce a que las ganancias a tiempo T, sin contemplar la prima de venta del contrato (Figura 1), de la posición larga estarán dadas por la siguiente función.

$$payoff^L_{put} = max(E - S(T), 0)$$

  Mientras que la posición corta obtiene como ganancia el negativo de esta relación

$$payoff^C_{put} = min\,(S(T) - E, 0)$$

  Recordemos que la "paridad *put*-*call*" relaciona el valor de una opción *call* y una *put* de esta forma para cualquier tiempo t.

$$V_{call}(S_t, t) - V_{put}(S_t, t) = S_t - Ee^{-r(T-t)}$$

  De aquí, podremos calcular el valor de una opción *put* partiendo del valor de una opción *call* de la siguiente manera (invocando la simetría/paridad de Φ).

$$\begin{aligned} V_{put}(S_t, t) &= Ee^{r(T-t)} - S_t + V_{put}(S_t, t) \\ &= Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) \end{aligned}$$

  Cuando incluimos la prima que se debe pagar por comprar el contrato, tendremos a tiempo T las verdaderas ganancias (positivas) y pérdidas (negativas) que tiene cada una de las partes (Figura 2), a esto se le conoce como *profit*. En este sentido, nos damos cuenta de que una opción *call* se compra cuando se cree que el bien subyacente subirá de precio (con respecto al precio *strike* E) y se vende si se cree lo contrario. Análogamente una opción *put* se compra cuando se cree que el precio del activo bajará de precio (con respecto al precio *strike* E) y se vende cuando se cree lo contrario. Una diferencia importante entre ambas es que en la opción *call* los flujos de efectivo no están acotados y por el contrario en la opción *put* sí.

Nota 1: En general, el bien subyacente tiene un valor no conocido a tiempo t, esto significa que $S = S(t)$.

Nota 2: La P en la "Figura 2", representa el valor futuro a tiempo T de la prima (precio de compra de la opción).

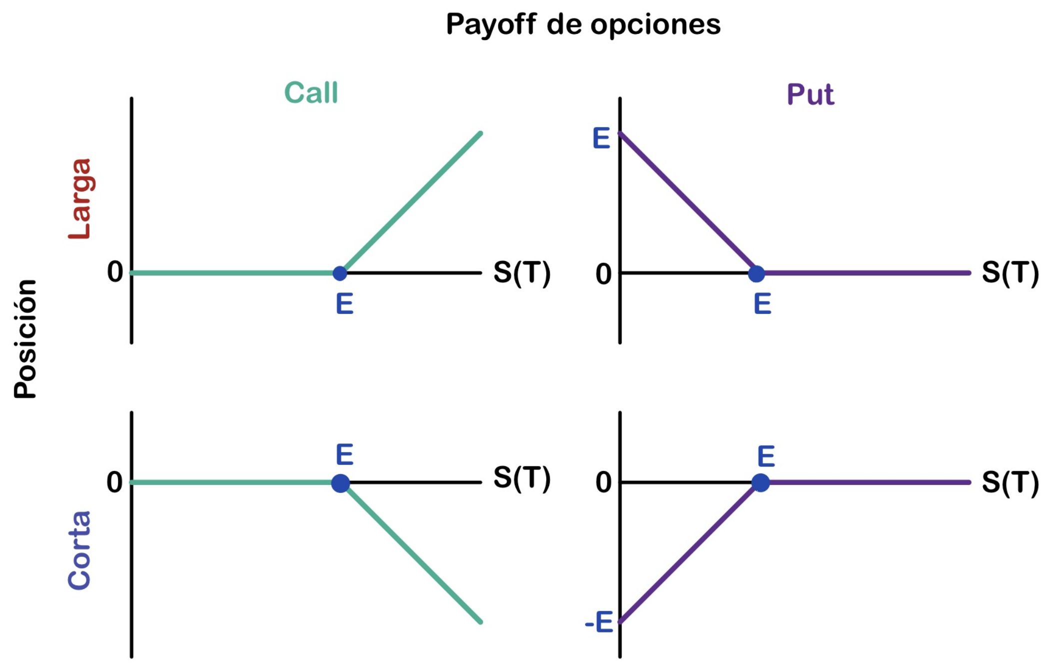


Figura 1: *payoff* de opciones *call* y *put*

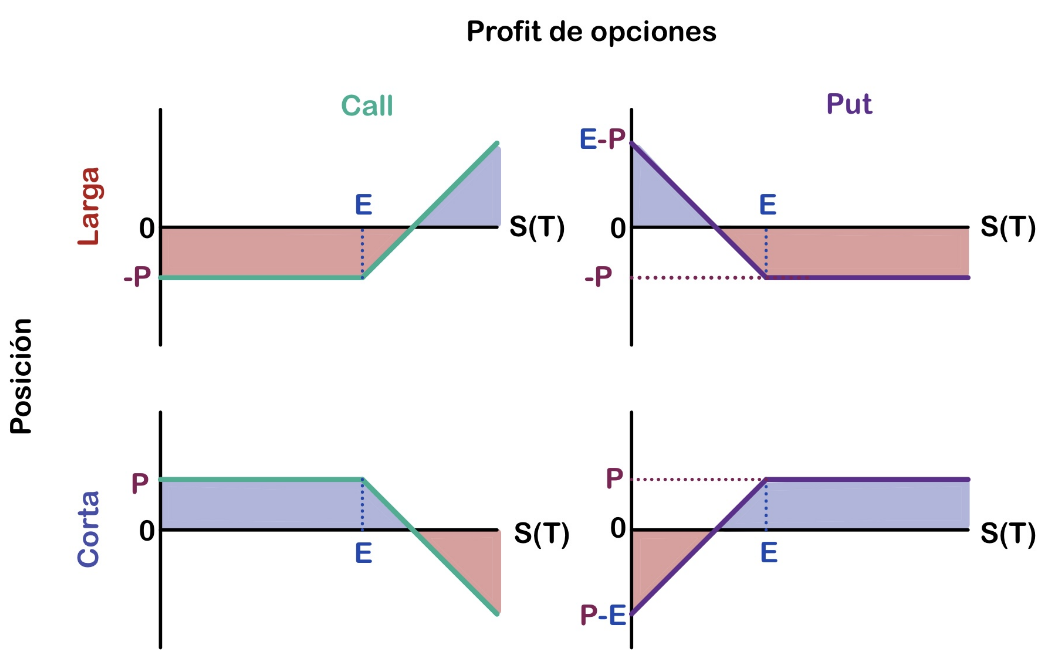


Figura 2: *payoff* de opciones *call* y *put* considerando primas de venta (*profit*)

Solución.

I) Como se nos indica en las instrucciones, una opción *straddle* Europea se construye con la compra de dos opciones Europeas, una *call* y una *put* tales que ambas compartan la misma maduración T y precio *strike* E. Con base en esta información, como ambos *payoff* se tratan por separado y pensando en que somos la parte larga en ambas opciones y sin concierar la prima por venta (Figura 3), entonces las ganancias en ambas se suman, y así tendremos que

$$\begin{aligned} payoff^{L}_{straddle} &= payoff^{L}_{call} + payoff^{L}_{put} = max(S(T)-E,0) + max(E-S(T),0) \\ &= |S(T)-E| \end{aligned}$$

por otro lado, si fuéramos la parte corta tendríamos bajo un razonamiento análogo que

$$\begin{aligned} payoff^{C}_{straddle} &= payoff^{C}_{call} + payoff^{C}_{put} = min(E-S(T),0) + min\,(S(T)-E,0) \\ &= -|S(T)-E| \end{aligned}$$

Cuando se contempla la prima de venta a tiempo T, podremos ver nuestro *profit* (las ganancias o pérdidas). En la "Figura 3" tenemos la representación gráfica de los *payoff* y *profit* de este tipo de opciones para las posiciones larga y corta, donde P representa el valor futuro de la prima de venta en este tiempo.

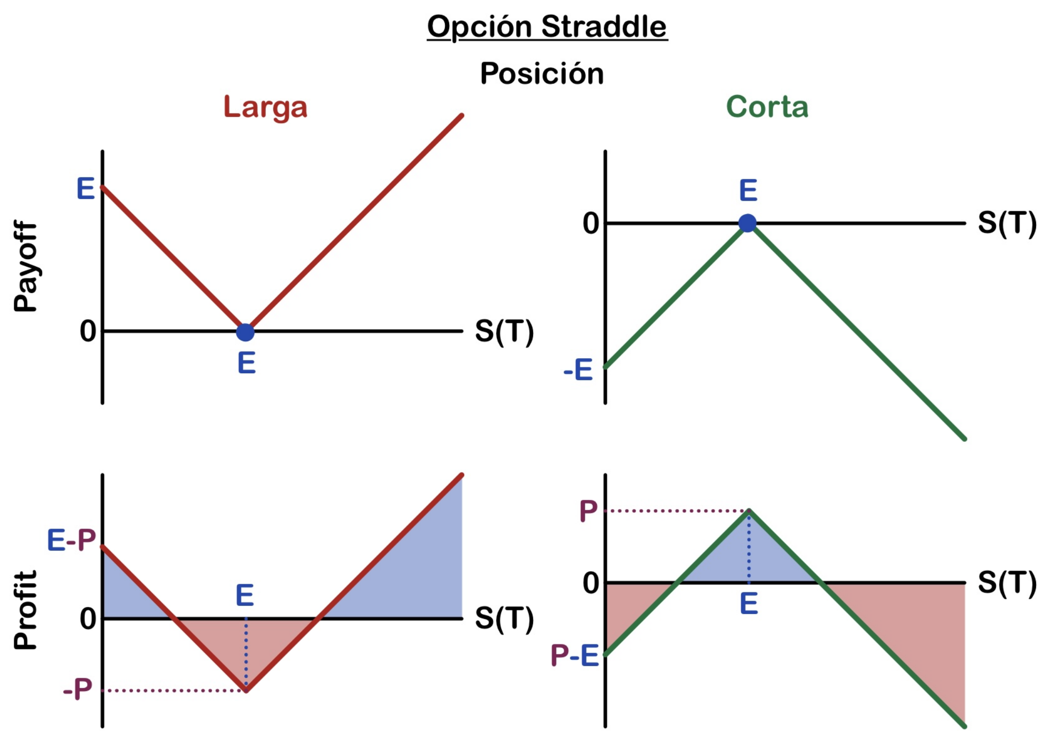


Figura 3: *payoff* y*profit* de una opción *straddle*

Ahora bien, si deseamos conocer se "premio.º valor a tiempo $t \in [0,T]$, podemos usar directamente la ecuación de Black-Scholes y en particular ahora que ya conocemos su *payoff*, podemos usar la fórmula de valuación de cualquier opción para un *payoff* arbitrario.

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \phi\left(log(S/S')\middle| -\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) payoff(S')\frac{dS'}{S'}$$

Donde ϕ es la función de densidad de una Normal estándar. De aquí, es claro que al usar que en general, $payoff_{straddle} = payoff_{call} + payoff_{put}$, entonces $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} V_{straddle}(S_t, t) &= V_{call}(S_t, t) + V_{put}(S_t, t) \\ &= S_t\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + Ee^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) \\ &= S_t\left(\Phi(d_1) - \Phi(-d_1)\right) - Ee^{-r(T-t)}\left(\Phi(d_2) - \Phi(-d_2)\right) \\ &= S_t\left(2\Phi(d_1) - 1\right) - Ee^{-r(T-t)}\left(2\Phi(d_2) - 1\right) \end{aligned}$$

Donde la primera igualdad era ya intuitiva, dado que estamos adoptando la misma posición (larga o corta) en ambas opciones, es decir, si compro un *straddle* es porque, en un mercado libre de arbitraje, compré un *call* y un *put*, entonces el costo debe ser la suma de los costos; análogamente si lo vendiera. En particular, si la opción estuviera *at the money* en $t = 0$ entonces es porque $E = S_0$ y por lo tanto tendríamos que para cada

$$V_{straddle}(S_t, t) = S_t\left(2\Phi(d_1) - 1\right) - S_0e^{-r(T-t)}\left(2\Phi(d_2) - 1\right), \qquad \forall t \in [0, T].$$

II) Ahora, al buscar las pérdidas y ganancias máximas con esta opción, basta con que nos fijemos en el *profit* de ambas posiciones, larga y corta (Figura 3); recordemos que $P = VF_T(E) := pe^{rT}$, donde p es el precio al que se vendió el contrato (prima de venta en $t = 0$), el cual debe coincidir con la suma de los precios individuales de la opción *call* y *put*. Además, podemos apoyarnos directamente de conocer el *payoff* en general para una opción *straddle*.

- Posición larga
  En este caso tendremos que

  $$profit^{L}_{straddle} = payoff^{L}_{straddle} - P = |S(T) - E| - pe^{rT}$$

  De tal manera que la ganancia está no acotada, pues crece tanto como $S(T)$ se aleja de E. Siendo más específicos, por parte de la opción , ésta me está haciendo ganar si el precio del bien subyacente es bajo, de este lado (izquierdo), la ganancia más alta es la misma que la del *put* largo, $E - P$; mientras que del otro lado (derecho), las ganancias son por parte de la opción *call*, las cuales son no acotadas. Por otro lado, la pérdida más grande se da justo cuando el precio del subyacente a tiempo T no se aleja mucho del precio de ejercicio, en este caso mi pérdida máxima es de $-P$.

- Posición corta
  En este caso tendremos que

  $$profit^{C}_{straddle} = payoff^{C}_{straddle} + P = -|S(T) - E| + pe^{rT}$$

  Simétricamente, la pérdida está no acotada, pues decrece tanto como $S(T)$ se aleja de E. Siendo más específicos, por parte de la opción *put*, ésta me está haciendo perder si el precio del bien subyacente es bajo, de este lado (izquierdo), la pérdida más alta es la misma que la del *put* corto, $P - E$; mientras que del otro lado (derecho), las pérdidas son por parte de la opción *call*, las cuales son no acotadas. Por otro lado, la ganancia más grande se da justo cuando el precio del subyacente a tiempo T no se aleja mucho del precio de ejercicio, en este caso mi ganancia máxima es de P.

En conclusión, la estrategia de esta opción es, por parte de la posición larga, comprarla cuando se especula que el subyacente se alejará mucho del precio de ejercicio (alta volatilidad); mientras que por parte de la posición corta, venderla cuando se especula que el subyacente se quedará cerca del precio de ejercicio (baja volatilidad).

Ejercicio 4.
Dado un precio *strike* E, una opción *digital* es una opción europea tal que posee un *payoff* de la forma $\mathbf{1}_{S_T>E}$

I) Determinar el precio de arbitraje en el modelo de Black-Scholes de tal opción

II) Calcular el delta de una opción digital.

Solución.

I) Existen diversas formas de hacerlo, nosotros lo haremos por dos estilos diferentes. El primero será con una fórmula y el segundo mediante un portafolio que replica el *payoff*.

Estilo 1 - Por fórmula

Para esto, usaremos la antes mencionada fórmula de valuación de cualquier opción con un *payoff* arbitrario.

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_0^{\infty} \phi \left(log(S/S') \middle| - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t) \right) payoff(S') \frac{dS'}{S'}$$

En este caso particular tenemos entonces que $payoff(S') = \mathbf{1}_{S'>E}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} V_{digital}(S_t,t) &= e^{-r(T-t)} \int_E^{\infty} \phi \left(log(S_t/S_t') \middle| - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t) \right) \frac{dS_t'}{S_t'} \\ &= e^{-r(T-t)} \int_E^{\infty} \phi \left(log(S_t) - log(S_t') \middle| - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t) \right) \frac{dS_t'}{S_t'} \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $x = log(S_t) - log(S_t')$ tendremos que $dx = -dS_t'/S_t'$ entonces

$$\begin{aligned} V_{digital}(S_t,t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{log(S_t)-log(E)} \phi \left(x \middle| - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t) \right) dx \\ &= e^{-r(T-t)} \Phi \left(\frac{log(S_t/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &= e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \end{aligned}$$

Estilo 2 - Replicando el payoff

Consideremos la siguiente estrategia: Ir largo en n contratos *call* con *strike* $= E$ y vender en corto n contratos *call* con *strike* $= E + 1/n$ todos los contratos bajo con mismo subyacente S y tiempo de maduración T. Notemos que a tiempo T tendremos beneficios y obligaciones del tipo *call* de todas las opciones con las que estamos trabajando. Si denotamos *payoff* $=$ *payoff*(E) simplemente para hacer énfasis en el *strike* que estamos manejando, podremos ver de esta manera que el *payoff* de nuestra estrategia será el siguiente

$$\begin{aligned} payoff_{estrategia} &= n\left(payoff^L_{call}(E) + payoff^C_{call}(E+1/n)\right) \\ &= n\left(payoff^L_{call}(E) - payoff^L_{call}(E+1/n)\right) \\ &= n\left(max\{S_T - E, 0\} - max\{S_T - (E+1/n), 0\}\right) \end{aligned}$$

De tal manera que si lo vemos por casos, el *payoff* de nuestra estrategia tiene el siguiente comportamiento

$$payoff_{estrategia} = \begin{cases} 0 & si \quad S_T \leq E \\ n(S_T - E) & si \quad E < S_T \leq E + 1/n \\ n(1/n) = 1 & si \quad E + 1/n < S_T \end{cases}$$

Recordemos que en general el *payoff* se piensa como función de S_T, y siendo este el caso, notemos que el de nuestra estrategia es una función no decreciente, donde la parte creciente es una recta con pendiente tan grande como lo sea n (Figura 5).

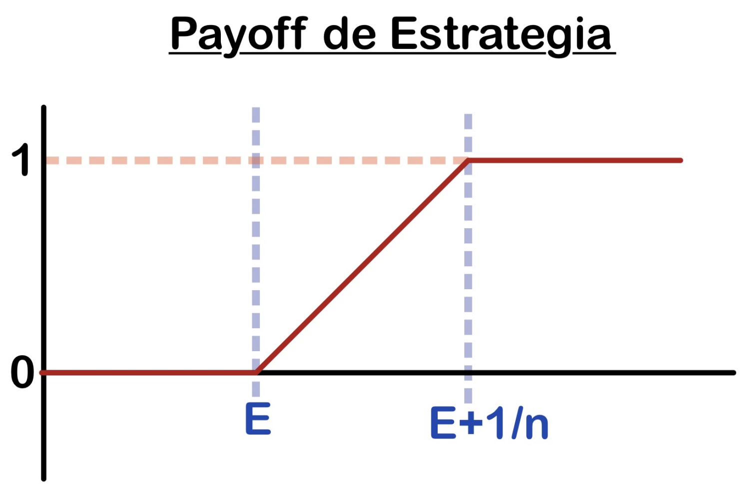


Figura 5: *payoff* de la estrategia propuesta.

De aquí notemos que

$$\lim_{n \to \infty} payoff_{estrategia} = \mathbf{1}_{S_T > E} = payoff_{digital}$$

Por lo tanto, el portafolio de la opción *digital* puede ser tan cercano como nosotros queramos al de nuestra estrategia por la propiedad arquimediana. Suponiendo que podemos comprar "fracciones"de portafolio, podemos denotar como $\varepsilon = 1/n$ y así, cuando $n \uparrow \infty$ entonces $\varepsilon \downarrow 0$. De tal manera que bajo este cambio de variable tendremos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} payoff_{estrategia} = \mathbf{1}_{S_T > E} = payoff_{digital}$$

Ahora, como nuestro portafolio (estrategia) replica al de la opción *digital*, entonces bajo un mercado libre de arbitraje, los precios de la opción *digital* y la de mi portafolio deben coincidir. Procedemos entonces a valuar nuestro portafolio, lo cuál es fácil de hacer porque lo hemos construido a partir de opciones *call* y nosotros conocemos el valor de esta opción, de hecho para cualquier tiempo $t \in [0, 1]$, que ya anteriormente hemos denotado como $V_{call}(S_t, t)$. Esto es sencillo, recordando que nuestra estrategia consiste ir largo en $n = 1/\varepsilon$ contratos *call* con *strike* $= E$ y vender en corto $n = 1/\varepsilon$ contratos *call* con *strike* $= E + 1/n = E + \varepsilon$ todos los contratos bajo con mismo subyacente S y tiempo de maduración T. Si denotamos como $V(S_t, t) = V^E(S_t, t)$ como el precio o la valuación de una opción, únicamente para enfatizar el *strike* que se está utilizando, podemos traducir todo lo anterior a que la valuación de nuestra estrategia, para cada ε fijo, está dada por

$$V_{estrategia}(S_t, t) = \frac{V^E_{call}(S_t, t) - V^{E+\varepsilon}_{call}(S_t, t)}{\varepsilon} = -\frac{V^{E+\varepsilon}_{call}(S_t, t) - V^E_{call}(S_t, t)}{\varepsilon}$$

Tomando el límite para así replicar la opción *digital* tendremos que

$$\begin{aligned} V_{digital}(S_t, t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} V_{estrategia}(S_t, t) \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V^{E+\varepsilon}_{call}(S_t, t) - V^E_{call}(S_t, t)}{\varepsilon} \\ &= -\frac{\partial V^E_{call}(S_t, t)}{\partial E} \end{aligned}$$

Ahora, para poder realizar esta último cálculo, tengamos presente lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial E}d_2 = \frac{\partial}{\partial E}\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right) = \frac{\partial}{\partial E}d_1$$

Donde en particular podemos ver que

$$\frac{\partial}{\partial E}d_1 = \frac{\partial}{\partial E}\frac{log(S_t/E) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -\frac{1}{E\sigma\sqrt{T-t}}$$

Independientemente de esto, haciendo un par de cálculos vemos que

$$\begin{aligned}
S_t \cdot exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) &= S_t \cdot exp\left(-\frac{\left(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}\right)\\
&= S_t \cdot exp\left(-\frac{d_2^2 + 2d_2\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)}{2}\right)\\
&= exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right)\cdot S_t \cdot exp\left(-\frac{2d_2\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)}{2}\right)\\
&= exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right)\cdot exp\left(log(S_t) - d_2\sigma\sqrt{T-t} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\\
&= exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right)\cdot exp\left(log(S_t) - log(S_t/E) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\\
&= exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right)\cdot exp\left(log(E) - r(T-t)\right)\\
&= Ee^{-r(T-t)}exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$e^{-r(T-t)}E\phi(d_2) - S_t\phi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-r(T-t)}Ee^{-d_2^2/2} - S_te^{-d_1^2/2}\right) = 0$$

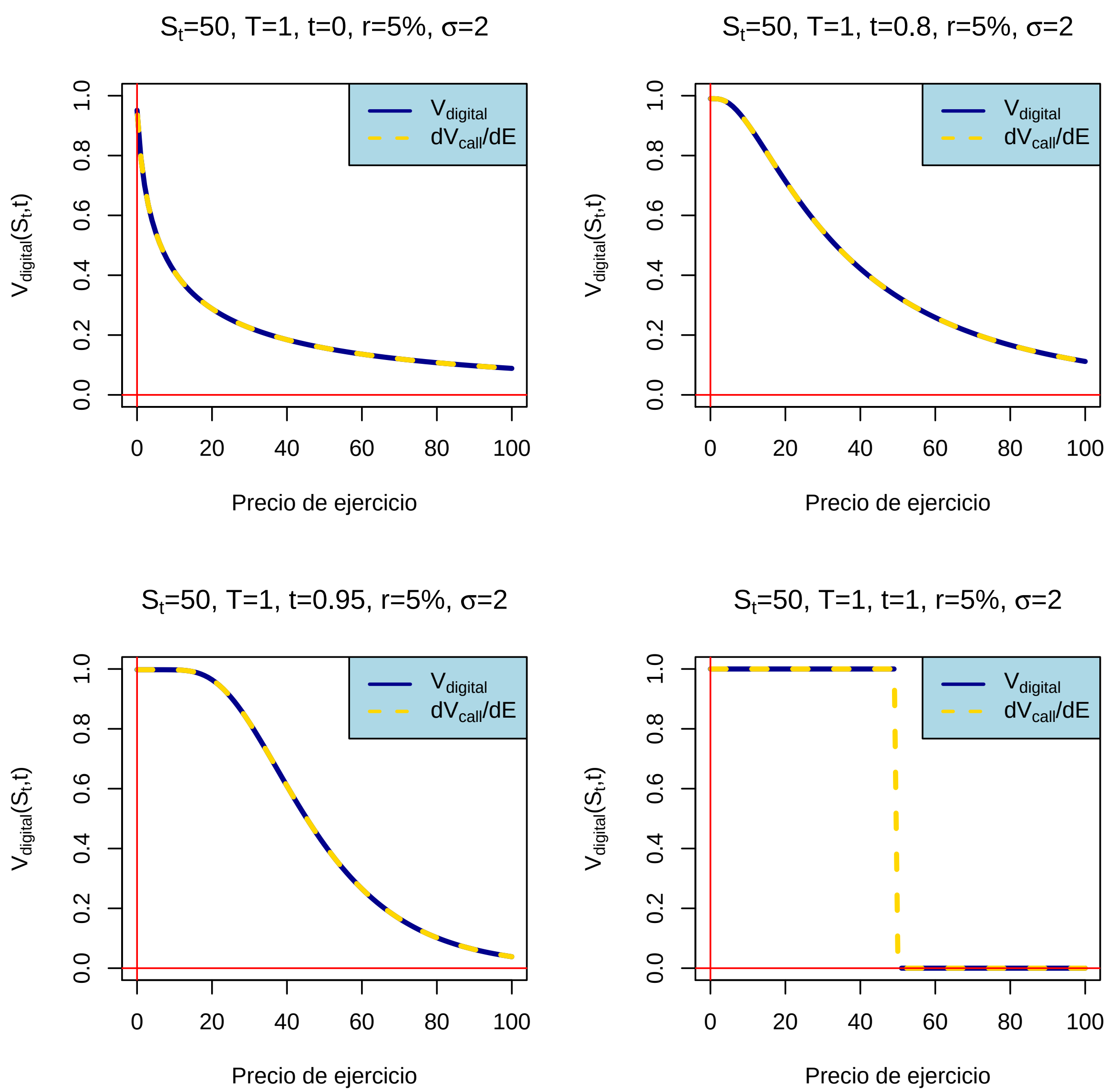
Antes de continuar, veamos que en efecto la derivada de la valuación de la opción *call* con respecto al *strike* en efecto coincide con la de la opción *digital* que de hecho obtenemos en el *Estilo 1*, programando esto en R tenemos que

```
# Las siguientes funciones asumen la existencia de los objetos:

# 1. St    := Precio del bien subyacente en tiempo t.
# 2. T     := Tiempo de maduración de la opción.
# 3. t     := Tiempo de valuación de la opción.
# 4. r     := Tasa libre de riesgo.
# 5. sigma := Volatilidad.


# Opción Digital -----------------------------------------------------------
V_digital <- function(E){
  # Calculamos
  d1 = (log(St/E)+(r+1/2*sigma^2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
  d2 = d1 - sigma*sqrt(T-t)
  # Precio
  return(exp(-r*(T-t))*pnorm(d2))
}
```

```r
# Opción Call -----------------------------------------------------------
V_call <- function(E){
  # Calculamos
  d1 = (log(St/E)+(r+1/2*sigma^2)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-t))
  d2 = d1 - sigma*sqrt(T-t)
  # Precio
  return(-(St*pnorm(d1)-E*exp(-r*(T-t))*pnorm(d2)))
}
## Derivamos
V_call_derivada <- function(E){
  numDeriv::grad(V_call,E)
}
```



Nota: Los gráficos realizados en R sobre la opción *digital* y la parcial de la opción *call* con respecto al *strike* NO son los *payoff* ni se parecen necesariamente. Lo que vemos son los gráficos de la valuación de la opción *digital* a diferentes tiempos de valuación.

Con todo lo anterior, hacemos ahora así el cálculo siguiente

$$\begin{aligned}
V_{digital}(S_t,t) &= -\frac{\partial V_{call}(S_t,t)}{\partial E} \\
&= \frac{\partial}{\partial E}\left(Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S_t\Phi(d_1)\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial E}\left(E\Phi(d_2)\right) - S_t\frac{\partial}{\partial E}\Phi(d_1) \\
&= e^{-r(T-t)}\left(\Phi(d_2) + E\phi\left(d_2\right)\frac{\partial}{\partial E}d_1\right) - S_t\phi(d_1)\frac{\partial}{\partial E}d_1 \\
&= e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + e^{-r(T-t)}E\phi\left(d_2\right)\frac{\partial}{\partial E}d_1 - S_t\phi(d_1)\frac{\partial}{\partial E}d_1 \\
&= e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \left(\frac{\partial}{\partial E}d_1\right)\left(e^{-r(T-t)}E\phi\left(d_2\right) - S_t\phi(d_1)\right) \\
&= e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

$$\therefore V_{digital}(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \qquad \forall t\in[0,T].$$

II) Recordemos que .^{el} delta"de una opción en general hace referencia a la "letra griega"Δ que se obtiene de la siguiente manera

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

En nuestro caso particular, tenemos que calcular la Δ referente a una opción *digital* de tal manera que podemos utilizar el primer inciso donde obtuvimos ya que $V = V_{digital}(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$. Comenzaremos realizando el siguiente cálculo

$$\frac{\partial}{\partial S_t}d_2 = \frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{log(S_t/E) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) = \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

De tal manera que

$$\Delta = \frac{\partial V_{digital}(S_t,t)}{\partial S_t} = \frac{\partial}{\partial S_t}e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) = e^{-r(T-t)}\phi(d_2)\frac{\partial}{\partial S_t}d_2 = \frac{e^{-r(T-t)}\phi(d_2)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

De donde recordamos un resultado anterior que nos lleva a

$$e^{-r(T-t)}E\phi\left(d_2\right) - S_t\phi(d_1) = 0 \Longleftrightarrow e^{-r(T-t)}E\phi\left(d_2\right) = S_t\phi(d_1) \Longleftrightarrow e^{-r(T-t)}\phi\left(d_2\right) = \frac{S_t\phi(d_1)}{E}$$

$$\therefore \frac{e^{-r(T-t)}\phi(d_2)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} = \Delta = \frac{\phi(d_1)}{E\sigma\sqrt{T-t}}$$