2. Sea N una v.a. discreta con distribución $\{P_k : k = 0, 1, ...\}$. Sean a y b dos constantes. Se dice que N tiene distribución tipo $(a, b, 0)$ si se cumple la igualdad

$$P_k = \left(a + \tfrac{b}{k}\right) P_{k-1} \quad \text{para } k = 1, 2, ...$$

a) Demuestre que las siguientes distribuciones son de tipo $(a, b, 0)$ encontrando las constantes a y b con las cuales se cumple la condición mencionada

   a.1) $bin(n, p)$.

   a.2) $Poisson(\lambda)$.

   a.3) $bin.neg(r, p)$.

b) Recíprocamente, demuestre que si N tiene distribución tipo (a,b,0), entonces N es alguna de (a.1),(a.2) ó (a.3)

a)

a.1) Consideremos $X \sim Bin(n, \gamma)$. Entonces su f.m.p. está dada por:

$$P_x = \binom{n}{x} (1-\gamma)^{n-x} \gamma^x \mathbb{I}(x)_{\{0,1,\ldots,n\}} \text{ para } n \in \mathbb{N}_1 \;\&\; \gamma \in (0,1)$$

Demostración:
Tomando $k \in \{1, 2, ...\}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{P_k}{P_{k-1}} &= \frac{\binom{n}{k}(1-\gamma)^{n-k}\gamma^k}{\binom{n}{k-1}(1-\gamma)^{n-k+1}\gamma^{k-1}} \mathbb{I}_{1,2,\ldots,n}(k) = \frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{n!}{(n-k+1)(k-1)}} \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{(n-k+1)!(k-1)!}{(n-k)!k!} \frac{\gamma}{1-\gamma} \\
&= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{\gamma}{1-\gamma} = -\frac{\gamma}{1-\gamma} + \frac{(n+1)\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}{k} = a + \frac{b}{k} \begin{cases} \text{Tomando} \\ a = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \;\&\; b = (n+1)\left(\frac{\gamma}{q-\gamma}\right) \end{cases} \\
\therefore P_k &= \left(a + \frac{b}{k}\right) P_{k-1} \text{ con } a = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \;\&\; b = (n+1)\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) \quad \forall\ k \in \{1, 2, ...\} \;\square
\end{aligned}$$

a.2) Consideremos $X \sim Poi(\lambda)$. Entonces su f.m.p. está dada por:

$$P_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \; \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x) \text{ para } \lambda > 0$$

Demostración:
Tomando $k \in \{1, 2, ...\}$ tenemos:

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots\}}(k) = \frac{\lambda}{k} = a + \frac{b}{k} \quad \left\{ \text{Tomando } a = 0 \ \& \ b = \lambda \right.$$

$$\therefore P_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) P_{k-1} \text{ con } a = 0 \ \& \ b = \lambda. \ \forall \ k \in \{1, 2, \ldots\} \ \square$$

a.3) Consideremos $X \sim BinNeg(r, \gamma)$. Entonces su f.m.p. está dada por:

$$P_k = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)\Gamma(k+1)}(1-\gamma)^r\gamma^k \ \mathbb{I}_{\mathbb{N}_0}(x) \text{ para } r > 0 \ \& \ \gamma \in (0, 1)$$

Demostración:
Tomando $k \in \{1, 2, \ldots\}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{P_k}{P_{k-1}} &= \frac{\frac{\Gamma(r+k)}{\cancel{\Gamma(r)}\Gamma(k+1)}\cancel{(1-\gamma)^r}\gamma^k}{\frac{\Gamma(r+k-1)}{\cancel{\Gamma(r)}\Gamma(k)}\cancel{(1-\gamma)^r}\gamma^{k-1}} = \frac{\Gamma(r+k)\Gamma(k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(r+k-1)}\gamma = \frac{(r+k-1)\cancel{\Gamma(r+k-1)}\cancel{\Gamma(k)}}{k\cancel{\Gamma(k)}\cancel{\Gamma(r+k-1)}}\gamma \\
&= \frac{r+k-1}{k}\gamma = \gamma + \frac{r-1}{k}\gamma = a + \frac{b}{k} \quad \left\{ \text{Tomando } a = \gamma \ \& \ b = (r-1)\gamma \right. \\
\therefore P_k &= \left(a + \frac{b}{k}\right) P_{k-1} \text{ con } a = \gamma \ \& \ b = (r-1)\gamma \ \ \forall k \in \{1, 2, \ldots\} \ \square
\end{aligned}$$

b)
Nota 1: Primero notemos que los casos anteriores son excluyentes (a, b)
a.1) Como $\gamma \in (0, 1)$ y $n \in \mathbb{N}_1$ entonces:

$$\tfrac{\gamma}{1-\gamma} > 0 \iff -\tfrac{\gamma}{1-\gamma} = a < 0 \text{ y } (n+1)\left(\tfrac{\gamma}{1-\gamma}\right) = b > 0$$
$$\therefore \text{Si } X \sim Bin(n, p) \Rightarrow X \in \text{ Tipo}(a < 0, b > 0)$$

a.2) Como $\lambda > 0$ entonces: $\lambda = b > 0$ y $a = 0$

$$\therefore \ \text{Si } X \sim Poi(\lambda) \Rightarrow X \in \ \text{Tipo}(a = 0, b > 0)$$

a.3) Como $\gamma \in (0, 1)$ y $r > 0$ entonces:

$$\gamma = a \in (0, 1) \text{ y } (r-1)\gamma = b \geq 0$$
$$\therefore \ \text{Si } X \sim BinNeg(\gamma, r) \Rightarrow X \in \ \text{Tipo}(a \in (0, 1), b \geq 0)$$

Nota 2: Si $X \in$ Tipo$(a, b = -a) \Rightarrow P_1 = (a + \frac{b}{1})P_0 \Rightarrow P_k = (a + \frac{b}{k})P_{k-1} = 0 \ \forall k > 0.$
De tal manera que $P_0 \equiv 1 \ \therefore \ X \equiv 0 \in$ Tipo$(a, b = -a)$

Nota 3:) Veamos que si $X \in$ Tipo(a_x, b_x) y $Y \in$ Tipo(a_y, b_y) con $a_x = a_y$ y $b_x = b_y$ entonces $X \overset{d}{\equiv} Y$.

Demostración: Sea $P_k^x \equiv \mathbb{P}[x = k]$ y $P_k^Y \equiv \mathbb{P}[Y = k]$

En general $P_k = (a + \frac{b}{k})P_{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}_1$, entonces,$P_x = \left[\prod_{n=1}^{k}\left(a + \frac{b}{k-n+1}\right)\right] P_0$ $\forall k \in \mathbb{N}_1$

Así: $1 = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{n=1}^{k}\left(a + \frac{b}{k-n+1}\right)\right] P_0 = P_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}\left(a + \frac{b}{k-n+1}\right)\right]$

$\Rightarrow P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}\left(a + \frac{b}{k-n+1}\right)\right]^{-1}$. De esta manera, si dos variables aleatorias tienen los mismos parámetros de tipo (a, b) entonces también comparten la probabilidad en cero; esto es:

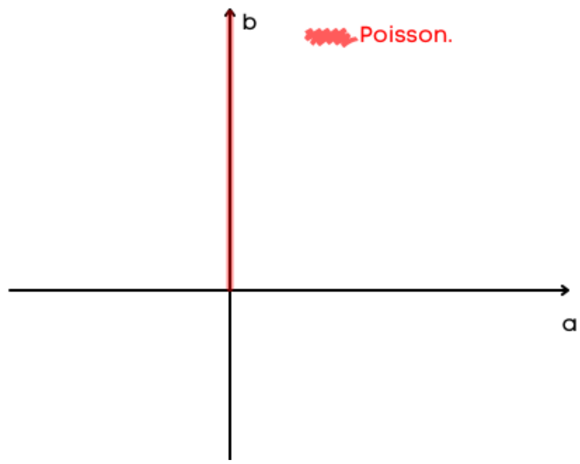
$$
\begin{aligned}
P_0^X &= \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}\left(a_X + \frac{b_X}{k-n+1}\right)\right]^{-1} = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}\left(a_Y + \frac{b_Y}{k-n+1}\right)\right]^{-1} = P_0^Y \\
\text{Luego: } P_k^X &= \left[\prod_{n=1}^{k}\left(a_X + \frac{b_X}{k-n+1}\right)\right] P_0^X = \left[\prod_{n=1}^{k}\left(a_Y + \frac{b_Y}{k-n+1}\right)\right] P_0^Y = P_k^Y \ \forall k \in \mathbb{N}_1 \\
\therefore P_k^X &= P_k^Y \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ y por lo tanto } X \overset{d}{\equiv} Y \ \square
\end{aligned}
$$

Lo anterior significa que dado $(a^*, b^*) \in \mathbb{R}^2$. Si este vector puede ser escrito con las a's y b's de alguna distribución de la nota 1 (y nota 2) entonces si $X \in$ Tipo(a^*, b^*), X tendrá alguna de estas distribuciones. Vamos a probar que es imposible que exista otra distribución que satisfaga ser de tipo (a, b), es decir, que $P_k = (a + \frac{b}{k})P_{k-1}$ y no sea alguna de las notas 1 y 2. Para eso, basta ver que si(a^*, b^*) no es generado por alguna (a, b) de las notas 1 y 2, entonces $P_k = (a + \frac{b}{k})P_{k-1}$ no puede ser una probabilidad.

Demostración:

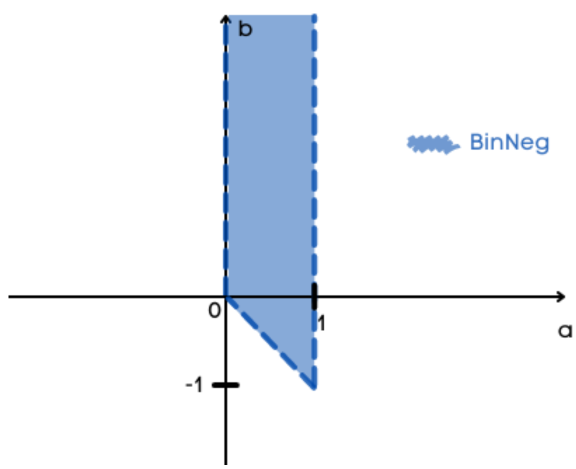
∘ Región Poisson

$X \in$ Tipo$(a = 0, b > 0) \Leftrightarrow X \sim Poi(\lambda = b) \forall b > 0$. Entonces tenemos cubierta la región de la derecha.



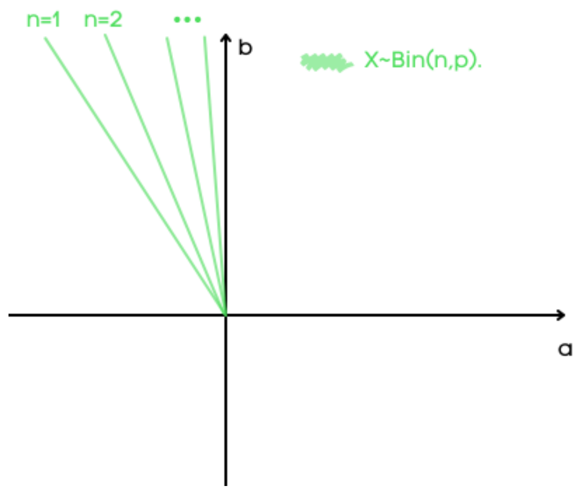
∘ Región Binomial Negativa

$X \in BinNeg(r, \gamma)$ con $r > 0$ y $\gamma \in (0, 1)$ sii $X \in$ Tipo$(a = \gamma, b = (r-1)\gamma) \therefore a \in (0, 1)$ y $b = (r-1)a = ra - a > -a$

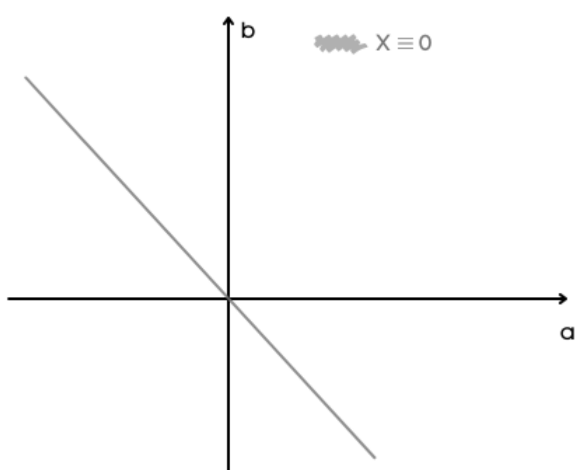


∘ Región Binomial

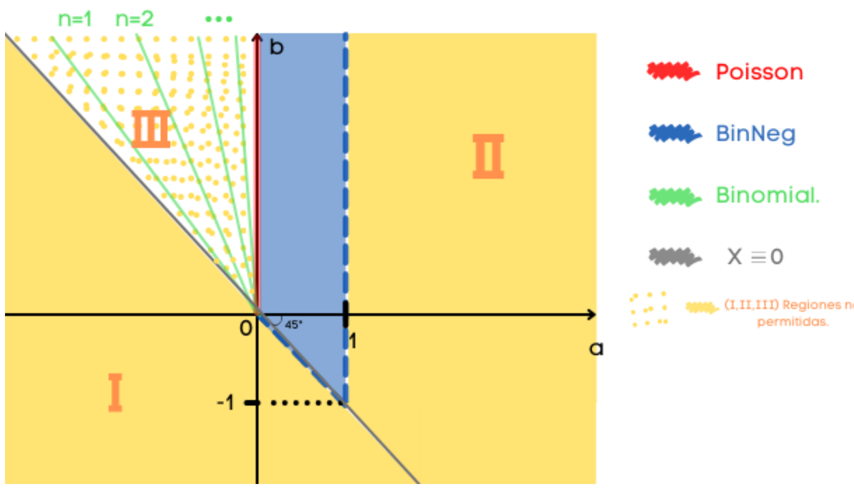
$X \in Bin(n, \gamma)$ con $n \in \mathbb{N}_1$ y $\gamma \in (0, 1)$. sii $X \in$ Tipo$(a = -\frac{\gamma}{1-\gamma}, b = (n+1)\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)) \therefore a \in (-\infty, 0)$ y $b = -a(n+1)$ con $n \in \mathbb{N}_1$



∘ Región $X \equiv 0 (P_k = \delta_0^{(k)})$
$X \equiv 0$ sii $X \in$ Tipo$(a, b = -a)$



De tal manera que las regiones que ya tenemos caracterizadas son descritas en el siguiente gráfico. Al conjunto puntos (a, b) en la unión de estas regiones, lo llamaremos T. Veamos que si $X \in Tipo(a, b)$ con $(a, b) \notin T$ entonces P_k^X no es función de probabilidad.



Veamos entonces que la región I no es válida. $(a, b) \in$ I$\iff b < -a$. Si este es el caso $\longrightarrow P_k = (a + \frac{b}{k})P_{k-1} < a(1 - \frac{1}{k})P_{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}_1$. En particular si $k = 1 \longrightarrow P_1 < 0$! Lo cual es imposible para una f.m.p.

Ahora, trabajando en la región III, tenemos que $(a, b) \in$ III $\iff a < 0 < b$ y $b \neq -a(n + 1)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Para esto veamos una identidad:

Cuando $a \neq 0$. Podemos obtener P_k mediante la recursión como:

$$P_k = P_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{t=1}^{k} \left(\frac{b}{a} + t \right) \text{ para } k \in \mathbb{N}_1$$

Para esto haremos inducción:

Base: $P_1 = (a+b)P_0 = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)P_0 = P_0 \frac{a^1}{1!}\left(1 + \frac{b}{a}\right) = P_0 \frac{a^1}{1!}\left(\frac{b}{a} + 1\right) = P_0 \frac{a^1}{1!} \prod_{t=1}^{1} \left(\frac{b}{a} + t\right)$

Paso inductivo:

$P_{k+1} = \left(a + \dfrac{b}{k+a}\right) P_k = \dfrac{a}{k+1}\left(k+1+\dfrac{b}{a}\right) P_k = \dfrac{a}{k+1}\left(\dfrac{b}{a}+k+1\right) P_0 \dfrac{a^k}{k!} \displaystyle\prod_{t=1}^{k}\left(\dfrac{b}{a}+t\right) =$
$P_0 \dfrac{a^{k+1}}{(k+1)!} \displaystyle\prod_{t=1}^{k+1}\left(\dfrac{b}{a}+t\right)$

Ahora, regresando a la región III, tenemos que $b \neq -a(n+1)\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

Por lo que para cada $(a,b) \in$ III $\exists m \in \mathbb{N}_1$ tal que $-am < b < -a(m+1)$ (esto por la propiedad arquimedeana). Luego como $a < 0$, tenemos: $-am < b < -a(m+1) \iff -m = -\dfrac{am}{a} > \dfrac{b}{a} > -\dfrac{a(m+1)}{a} = -(m+1) \iff -m+t > \dfrac{b}{a}+t > -(m+1)+t$ para cualquier t. Sin embargo, notemos que $-(m+1)+t \geq 0 \iff t \geq m+1$. De tal manera que $\exists N \in \mathbb{N}_1$ tal que $\forall n \geq N$, $\displaystyle\prod_{t=1}^{n}\left(\dfrac{b}{a}+t\right)$ no cambiará su signo, pues las entradas a partir de cierto punto se hacen positivas. Pero: $P_k = P_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{t=1}^{k}(\dfrac{b}{a}+t)$ con $a < 0$. Entonces $\exists k \in \mathbb{N}_1$ tal que $P_k < 0$!. A menos que justo a partir de este punto $P_k = 0 \iff \dfrac{b}{a}+k = 0 \iff b = -ak$ con $k \in \mathbb{N}_1$ pero ese es precisamente el caso Binomial, que ya vimos.

Por último, veamos que sucede cuando $(a,b) \in$II. Esto significa que $a \geq 1$ y $b \geq -a$. Así, $b \geq -a \iff a + \frac{b}{k} \geq a - \frac{a}{k} = a(1-\frac{1}{k}) = a(\dfrac{k-1}{k}) \geq \dfrac{k-1}{k}$. De esta manera podemos ver que $P_n \geq \frac{1}{n}P_1\ \forall n \geq 1$ inductivamente:

Base: $P_1 \geq \frac{1}{1}P_1$

Paso inductivo: $P_{k+1} = (a + \frac{b}{k+1})P_k \geq (a + \frac{b}{k+1})\frac{1}{k}P_1 \geq (\frac{k+1-1}{k+1})\frac{1}{k}P_1 = \frac{1}{k+1}P_1$

Luego, si P_x fuera una f.m.p. entonces $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \geq P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}P_1$

Entonces: $1 \geq P_0 + P_1 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$! La suma no está acotada.

En conclusión: $(a,b) \in$ I $\cup$ III $\longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_1$ con $P_k < 0$; y si $(a,b) \in$ II entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k$ diverge.

De tal manera que si X es v.a. con $X \in Tipo(a, b)$, entonces X tiene, necesariamente, alguna de las distribuciones a.1),a.2), o a.3)■

¡La respuesta que has escrito aquí es ejemplar!