Fórmula de Panjer

Figura 1: Harry Panjer

La fórmula de Panjer es un resultado que proporciona una expresión exacta, aunque recursiva, de la función de masa de probabilidad de un riesgo en modelo de pérdidas agregadas. Este modelo tiene ciertas hipótesis que de no cumplirse se puede recurrir a las aproximaciones antes mencionadas para el modelo colectivo.

Primeramente, supondremos que el número de reclamaciones de un riesgo (S) en el modelo colectivo, es decir, su frecuencia (N) es de clase (a,b,0) y recordemos las distribuciones provenientes de esta clase:

Distribución	p_0	a	b
Binomial(n,p)	$(1-p)^n$	$-\dfrac{p}{1-p} < 0$	$\dfrac{(n+1)p}{1-p} > 0$
Poisson(λ)	$e^{-\lambda}$	0	$\lambda > 0$
BinNeg(r,p)	p^r	$(1-p) \in (0,1)$	$(r-1)(1-p) \geq 0$
Geométrica(p)	p	$(1-p) \in (0,1)$	0

Cuadro 1: Distribuciones de la clase (a,b,0)

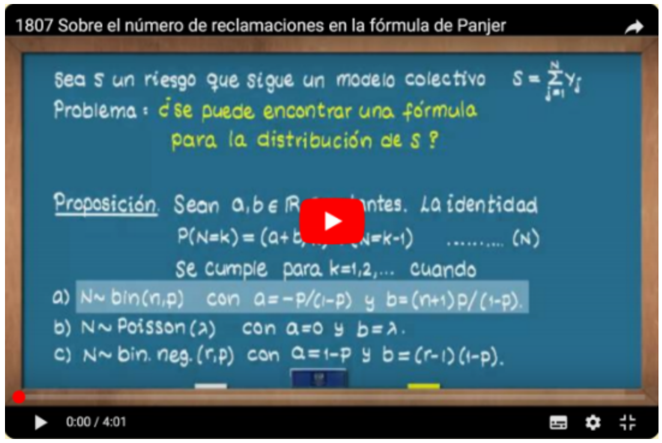


Figura 2: `https://www.youtube.com/watch?v=ul2j6FhifCw`

Otro supuesto es que la severidad (Y) del modelo será discreta con soporte en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, lo cual implica que el riesgo (S) tendrá también un soporte discreto. Específicamente , la densidad del riesgo sí representará probabilidades puntuales.

Esto finalmente nos lleva a algunos resultados preliminares a enunciar la fórmula de Panjer, estos resultados son importantes para comprender la demostración de la fórmula. A pesar de esto y debido a la finalidad de esta sección , estos resultados únicamente se comentarán en el vídeo a continuación y nos enfocaremos más en la aplicación de este resultado.

Una notación muy habitual para este tema es la siguiente:

Notación:

$$
\begin{aligned}
p_k &= P(N = k) & k &= 0, 1, ... \\
f_r &= P(Y = r) & r &= 1, 2, ... \\
f_r^{*k} &= P(Y_1 + ... + Y_k = r) & 1 \leq k \leq r &= 1, 2, ... \\
g_r &= P(S = r) & r &= 0, 1, ...
\end{aligned}
$$

Resultados preliminares

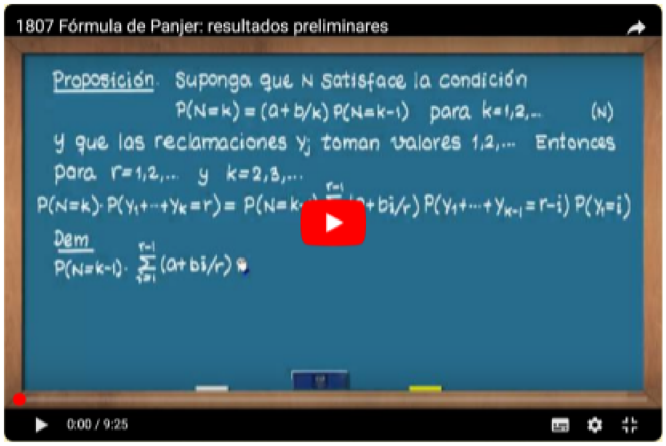


Figura 3: `https://www.youtube.com/watch?v=vVBwC-oLnqg`

Proposición: Formula de Panjer

Supondremos que S es un modelo colectivo con frecuencia N de clase (a,b,0) y severidad Y con soporte tal que $Sop\{Y\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Las probabilidades puntuales exactas de S están dadas por.

$$
\begin{aligned}
f_S(t) &= \mathbb{P}[S = t] \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}[N = 0] & \text{si} \quad t = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{t} \left(a + \frac{b(j)}{t} \right) \mathbb{P}[Y = j]\mathbb{P}[S = t - j] & \text{si} \quad t \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \qquad e.o.c \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nota: Bajo la notación anterior, el resultado se expresa como:

$$
g_t = \begin{cases} P_0 & \textbf{si} \quad t = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{t} \left(a + \frac{b(j)}{t} \right) f_j g_{t-j} & \textbf{si} \quad t \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0 & \qquad e.o.c \end{cases}
$$

La demostración de esta fórmula se muestra también en el siguiente vídeo:

Figura 4: `https://www.youtube.com/watch?v=r52-snnbVNU`

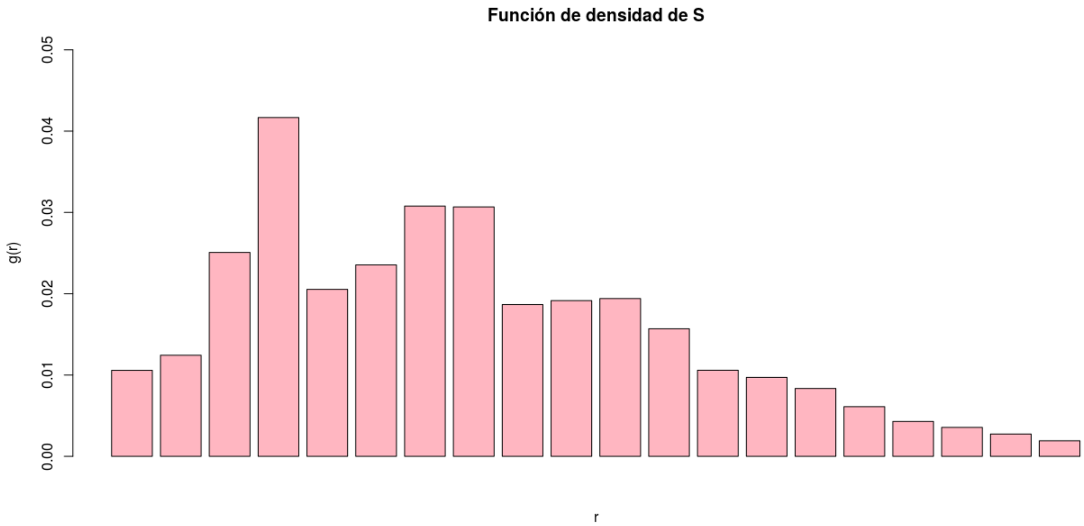
A continuación escribimos explícitamente los primeros términos de la formula recursiva de Panjer:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= p_0 = P(N=0) \\
g_1 &= \left(a + \frac{b}{1} f_1 g_0\right) \\
g_2 &= \left(a + \frac{b}{2} f_1 g_1\right) + \left(a + \frac{2b}{2} f_2 g_0\right) \\
g_3 &= \left(a + \frac{b}{3} f_1 g_2\right) + \left(a + \frac{2b}{3} f_2 g_1\right) + \left(a + \frac{3b}{3} f_3 g_0\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Como un ejemplo consideremos el caso cuando N sigue una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3{,}5$, y el monto de las reclamaciones tiene la siguiente función de densidad.

r	1	2	3	4	5
f_r	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

Entonces la formula de Panjer produce la función de probabilidad para S que se muestra en la Figura a continuación:



Casos especiales de Panjer

Recordemos primero que supuestos necesitaba la fórmula original de Panjer:

1. N (frecuencia) de clase (a,b,0)

2. Y_j (severidad) $\in \mathbb{N}\diagdown\{0\} \quad \forall j$

Teniendo en mente que hablamos del modelo colectivo de Riesgo:

$$S \;=\; \sum_{j=1}^{N} Y_j \quad \text{Recuerden que si } N \equiv 0 \Rightarrow S \equiv 0 \text{ por convención}$$

En tal caso, las probabilidades exactas de S vienen dadas por la recursión que ya conocemos:

$$\mathbb{P}[S = s] \;=\; \begin{cases} \mathbb{P}[N = 0] & \text{si} \quad s = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\overline{K}} \left(a + \frac{b(j)}{t}\right) \mathbb{P}[Y = j]\mathbb{P}[S = s - j] & \text{si} \quad s \in \mathbb{N}\diagdown\{0\} \\ 0 & \quad e.o.c \end{cases}$$

Donde: $\overline{K} = máx\{s, máx\{Sop\{Y\}\}\}$.

Primer punto ¿Qué pasa si $0 \in Sop\{Y\}$?

Esto es de mucho interés pues hay v.a.´s asociadas al pago de una compañía de seguros tales que $0 \in Sop\{Y\}$, un ejemplo son aquellas que tienen un deducible y a una compañía de seguros que le podría interesar calcular probabilidades de un portafolio del estilo

$$S = \sum_{j=1}^{N} máx\{X_i - d, 0\}$$

Donde X_j es el monto del siniestro del asegurado j . Pensándolo desde este punto de vista, para una aseguradora, que un $X_j \leq d$ es equivalente a que no haya ocurrido un siniestro, es decir, el riesgo (S) del portafolio es cero. En otras palabras , asumiendo que $0 \in Sop\{Y\}$ para alguna v.a Y de interés, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S=0] &= \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{N} Y_j = 0\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\{N=0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{N=n, \bigcap_{k=1}^{n} \{Y_k = 0\}\}\right)\right] \\
&= \mathbb{P}[N=0] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[N=n](\mathbb{P}[Y=0])^n \begin{cases} \text{Pues cada caso es ajeno} \\ \text{y las v.a.'s son indep.} \end{cases} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N=n](\mathbb{P}[Y=0])^n \begin{cases} \text{Aquí asumimos} \\ \text{que } \mathbb{P}[Y=0] \neq 0 \end{cases} \\
&= \mathbb{E}[(\mathbb{P}[Y=0])^N] \begin{cases} \text{Asumiendo que} \\ sop\{N\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} \\
\therefore\ & \mathbb{P}[S=0] = \mathbb{E}[(\mathbb{P}[Y=0])^N]
\end{aligned}$$

Si: $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ & $\mathbb{P}[Y=0] \neq 0$ & $sop\{N\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$

¿Les suena $\mathbb{E}[t^x]$?

Por definición:

$$G_X(t) \doteq \mathbb{E}[t^X]$$

Es la función generadora de probabilidad de la v.a. X.

Entonces, para nuestro interés si $\mathbb{P}[Y=0] \neq 0$ y N es de clase $(a, b, 0)$; se tiene que:

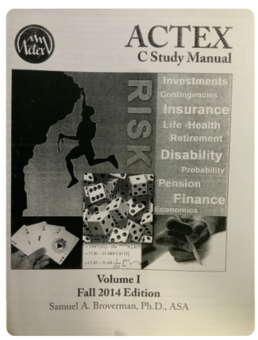
$$\mathbb{P}[S=0] = G_N(\mathbb{P}[Y=0])$$

Por facilidad del lector agregamos lo siguiente:

Distribución	Función generadora de probabilidad
$\text{unif}\{x_1, \ldots, x_n\}$	$G(t) = (t^{x_1} + \cdots + t^{x_n})/n$
$\text{Ber}(p)$	$G(t) = 1 - p + pt$
$\text{bin}(n, p)$	$G(t) = (1 - p + pt)^n$
$\text{geo}(p)$	$G(t) = p/[1 - t(1-p)]$
$\text{Poisson}(\lambda)$	$G(t) = e^{-\lambda(1-t)}$
$\text{bin neg}(r, p)$	$G(t) = (p/[1 - t(1-p)])^r$

Curso intermedio de probabilidad, L. Rincón, pág:313

Por último nos falta ver qué sucede si $S > 0$.
Según el siguiente documento:



En la página LM-250 hay otra demostración de lo anterior y además, en la página LM-251 se deduce lo siguiente:

- Sea N (frecuencia) de clase $(a, b, 0)$
- Sea Y (severidad) $\cdot\ni\cdot$ sop{Y}$\subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{P}[Y = 0] \neq 0$

Entonces

$$\mathbb{P}[S = s] = \begin{cases} G_N(\mathbb{P}[Y = 0]) \text{ si } s = 0 \\ \dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{min\{s, máx\{sop\{Y\}\}\}} \left(a + \frac{b(j)}{s}\right) \mathbb{P}[Y = j]\mathbb{P}[S = s - j]}{1 - a\mathbb{P}[Y=0]} & s \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 1:

- Sea $N \sim Bin(n = 2, p = 0.25)$
- Consideremos el monto del siniestro $\doteqdot X \sim Unif\{1,2,3\}$ $(\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{3}\ \forall k \in \{1,2,3\})$ para cada asegurado j.
- Sea Y el monto que paga una aseguradora con un contrato de deducible $d = 2$ sobre el monto de siniestro (X) para cada asegurado j.
- Definimos el riesgo de la compañía como:

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j = \sum_{j=1}^{N} máx\{X_j - d, 0\}$$

¿Qué sentido tiene la distribución de N en este caso?

Notemos que

$$\mathbb{P}[Y = k] = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si} & k = 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si} & k = 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} & \end{cases}$$

Script:"Panjer especial"

Segundo Punto ¿Qué pasa si N es de clase $(a, b, 1)$?

Recordemos primero que si N es de clase $(a, b, 1)$ quiere decir que sufrió una modificación a su probabilidad en cero. Esto es, que $\mathbb{P}[N = 0]$ no es necesariamente la original de la distribución de la cual proviene. Por ejemplo, en el caso cero-truncado obligamos a que $\mathbb{P}[N = 0] = 0$. Para el caso cero modificado uno podría proponer que $\mathbb{P}[N = 0] = \frac{\pi}{4}$ por ejemplo.

Denotemos como $N^\star$ la clase $(a, b, 1)$ de la original N de clase $(a, b, 0)$.
Entonces si $\mathbb{P}[N = k] \doteqdot P_k$, tendremos:

- $\mathbb{P}[N^\star = 0] = P_0^\mu$
- $\mathbb{P}[N^\star = k] = P_k^\mu = \left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right) P_k$

  ¡Cuidado con la notación!

Entrados en este caso supongamos que $\mathbb{P}[Y=0]=0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[S=0]=\mathbb{P}[N^\star=0] \quad \text{(la probabilidad modificada).}$$

Por otro lado si $\mathbb{P}[Y=0]\neq 0$, análogamente

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \mathbb{P}[S=0]=\mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{N^\star} Y_j=0\right] \\
=\quad & \mathbb{P}\left[\{N^\star=0\}\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{N^\star=n,\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_k=0\}\right\}\right)\right] \\
=\quad & \mathbb{P}[N^\star=0]+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[N^\star=n](\mathbb{P}[Y=0])^n \\
=\quad & P_0^\mu+\sum_{k=1}^{\infty}P_k^\mu(\mathbb{P}[Y=0])^k \\
=\quad & P_0^\mu+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)P_k(\mathbb{P}[Y=0])^k \\
=\quad & P_0^\mu+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\mathbb{P}[Y=0])^k \\
=\quad & P_0^\mu+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}P_k\mathbb{P}[Y=0]^k\right)-P_0\right] \\
=\quad & P_0^\mu+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)(G_N(\mathbb{P}[Y=0])-P_0) \\
=\quad & P_0^\mu+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)(G_N(\mathbb{P}[Y=0])-1+1-P_0) \\
=\quad & P_0^\mu+(1-P_0^\mu)\left(\frac{G_N(\mathbb{P}[Y=0])-1}{1-P_0}+1\right) \\
=\quad & \cancel{P_0^\mu}+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)(G_N(\mathbb{P}[Y=0]-1))+1-\cancel{P_0^\mu} \\
=\quad & 1+\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)(G_N(\mathbb{P}[Y=0]-1)) \\
=\quad & 1-\left(\frac{1-P_0^\mu}{1-P_0}\right)(1-G_N(\mathbb{P}[Y=0])) \\
\text{o}\quad & \text{bien } \mathbb{P}[S=0]=G_{N^\star}(\mathbb{P}[Y=0])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathbb{P}[S=0] &= G_{N^*}(\mathbb{P}[y=0]) \\ &= 1-\left(\frac{1-P_0^M}{1-P_0}\right)(1-G_N(\mathbb{P}[y=0]))\end{aligned}$$

Sea cual sea el caso, usando como referencia el último libro mencionado en la misma página, se deduce que, si N^* es de $(a,b,1)$ entonces:

$$\text{Tomando } S=\sum_{j=1}^{N^*} y_j, \text{ si } x \in sop\{S\}/\{0\}:$$

$$\mathbb{P}[S=x] = \frac{[P_1^M-(a+b)P_0^M]\mathbb{P}[y=x] + \displaystyle\sum_{j=1}^{min\{x,max\{sop\{y\}\}\}} \left(a+\frac{bj}{x}\right)\mathbb{P}[y=j]\mathbb{P}[s=x-j]}{1-a\mathbb{P}[y=0]}$$

Nótese que éste es un caso que generaliza al anterior pues si $P_0^M = P_0 \Rightarrow P_k^M = P_k \ \forall k>0$ además, $P_1^M = P_1 = P_0(a+b) \Rightarrow P_1^M - P_0^M(a+b) = 0$; Recuperando así la fórmula anterior. De igual forma, es fácil ver que si $P_0^M = P_0$ entonces: $G_{N^*}(t) = G_N(t) \ \forall t$(bien definida según N).

Ejemplo 2

- Consideremos $N \sim Poi(\lambda = 5)$
- $\mathbb{P}[X=x] = \begin{cases} 0{,}25 & si \quad \text{x=1} \\ 0{,}5 & si \quad \text{x=2} \\ 0{,}25 & si \quad \text{x=3} \end{cases}$
- Hacemos N^* tal que $P_0^M = \frac{\pi}{4}$
- Definimos $S = \sum_{j=1}^{N^*} x_j$ Modelo Colectivo

Ejemplo 3

- Consideremos $N \sim Poi(\lambda = 5)$
- $\mathbb{P}[X=x] = \begin{cases} 0{,}25 & si \quad \text{x=0} \\ 0{,}5 & si \quad \text{x=1} \\ 0{,}25 & si \quad \text{x=2} \end{cases}$
- Hacemos N^* tal que $P_0^M = \frac{\pi}{4}$

- Definimos $S = \sum_{j=1}^{N^*} x_j$ Modelo Colectivo

En Resumen: Definiendo $S = \sum_{j=1}^{N} y_j$ modelo colectivo

- Si N es de clase $(a, b, 0)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[S=0] = \begin{cases} \mathbb{P}[N=0] & si \quad \mathbb{P}[y=0]=0 \\ G_N(\mathbb{P}[y=0]) & si \quad \mathbb{P}[y=0] \neq 0 \end{cases}$$

Luego $\forall x \in sop\{S\}/\{0\}$

$$\mathbb{P}[S=x] = \frac{\sum_{j=1}^{min\{x,max\{sop\{y\}\}\}} \left(a + \frac{bj}{x}\right) \mathbb{P}[y=j]\mathbb{P}[s=x-j]}{1 - a\mathbb{P}[y=0]}$$

- Si N es de clase $(a, b, 1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[S=0] = \begin{cases} P_0^M & si \quad \mathbb{P}[y=0]=0 \\ 1 - \left(\frac{1-P_0^M}{1-P_0}\right)(1 - G_N(\mathbb{P}[y=0])) & si \quad \mathbb{P}[y=0] \neq 0 \end{cases}$$

Luego $\forall x \in sop\{S\}/\{0\}$

$$\mathbb{P}[S=x] = \frac{[P_1^M - (a+b)P_0^M]\mathbb{P}[y=x] + \sum_{j=1}^{min\{x,max\{sop\{y\}\}\}} \left(a + \frac{bj}{x}\right) \mathbb{P}[y=j]\mathbb{P}[s=x-j]}{1 - a\mathbb{P}[y=0]}$$

Nota: Recuerda $M_N(t) \doteq \mathbb{E}[e^{tx}]$ y $G_N(t) = \mathbb{E}[t^x]$ y además $G_N(e^t) \doteq \mathbb{E}[(e^t)^x] = \mathbb{E}[e^{tx}] = M_N(t)$,

$$\begin{aligned} M_N(ln(t)) &\doteq \mathbb{E}[e^{ln(t)x}] = \mathbb{E}[e^{ln(t^x)}] \\ &= \mathbb{E}[t^x] \doteq G_N(t) \end{aligned}$$

$$\therefore G_N(e^t) = M_N(t) \ \& \ M_n(ln(t)) = G_N(t)$$

Nota: Recuerden que para las siguientes propiedades, sus demostraciones no involucran el supuesto de que $y \geq 0$, de hecho son válidas para construcciones bien definidas de S.

Proposición

Suponiendo que las cantidades y funciones indicadas existen, el riesgo S en el modelo colectivo cumple las siguientes propiedades

1. $E(S) = E(N)E(Y)$
2. $E(S^2) = E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))E^2(Y)$
3. $Var(S) = Var(N)E^2(Y) + Var(Y)E(N)$
4. $M_S(t) = M_N(ln(M_Y(t)))$

Introducción a la teoría del Riesgo, L. Rincón, pág: 19

Considerando $f_0 \doteq \mathbb{P}[y = 0]$ tenemos lo siguiente:

Table D.1 Starting values $[f_s(0)]$ for recursions.

Distribution	$f_s(0)$
Poisson	$exp[\lambda(f_0 - 1)]$
Geometric	$[1 + \beta(1 - f_0)]^{-1}$
Binomial	$[1 + q(f_0 - 1)]^m$
Negative Binomial	$[1 + \beta(1 - f_0)]^{-r}$
ZM Poisson	$p_0^M + (1 - p_0^M)\frac{exp(\lambda f_0)-1}{exp(\lambda)-1}$
ZM geometric	$p_0^M + (1 - p_0^M)\frac{f_0}{1-\beta(1-f_0)}$
ZM binomial	$p_0^M + (1 - p_0^M)\frac{[1+q(f_0-1)]^m-(1-q)^m}{1-(1-q)^m}$
ZM negative binomial	$p_0^M + (1 - p_0^M)\frac{[1+\beta(1-f_0)]^{-r}-(1+\beta)^{-r}}{1-(1+\beta)^{-r}}$
ZM logarithmic	$p_0^M + (1 - p_0^M)\{1 - \frac{ln[1+\beta(1-f_0)]}{ln(1+\beta)}\}$

Loss Models, página 486

Son los valores iniciales para $\mathbb{P}[S = 0]$ en cada caso

Momento de S con Panjer

Sea $S \doteqdot \sum_{j=1}^{N} X_j$ entonces:

Para N de clase $(a, b, 0)$**:**

5.4.3 Theorem (DePril's Recursion). *If the distribution of N is nondegenerate and satisfies*

$$p_n = \left(a + \tfrac{b}{n}\right) p_{n-1}$$

for some $a, b \in \boldsymbol{R}$ and all $n \in \boldsymbol{N}$, then the identity

$$E[S^n] = \tfrac{1}{1-a} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a + b\tfrac{k}{n}) E[S^{n-k}] E[X^k]$$

holds for all $n \in \boldsymbol{N}$

Lectures on Risk Theory

Klays D. Schmidt

Para N de clase $(a, b, 1)$**:**

Teorema 4.3. *Si la distribución primaria $\{p_k\}$ de S en (14) es clase $(a, b; 1)$, entonces, para $n \in \mathbb{N}$*

$$E[S^n] = \frac{[p_1 - (a+b)p_0]E(X^n) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (a + \frac{bj}{n}) E(X^j) E(S^{n-j})}{1-a} \tag{18}$$

siempre que $E(X^j)$, con $j = 1, 2, ..., n$, exista

Distribuciones clase (a,b) y algoritmo de Panjer

César Escalante Coterio

Ejemplo 4

- Consideremos $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$
- $N \sim Bin(n = 4, p = 0.2)$
- $\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} 0.5 & si \quad x = 1 \\ 0.3 & si \quad x = 2 \\ 0.2 & si \quad x = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow M_x(t) \doteq \mathbb{E}[e^{tx}] = 0.5e^t + 0.3e^{2t} + 0.2e^{3t}$

Continuemos el ejemplo en el Script de esta sección

Adicionalmente, si la severidad resulta continua, existen diversas maneras de discretizarla y utilizar la fórmula de Panjer. se invita al lector a revisar y meditar esta clase de metodologías si en algún momento se enfrenta a situaciones de este estilo.

Un vídeo donde se explican algunos detalles más de estos lo podemos ver a continuación:

Figura 5: `https://www.https://www.youtube.com/watch?v=H4ETDaUUvTk`