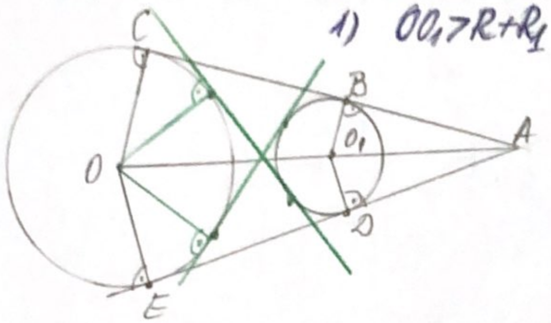
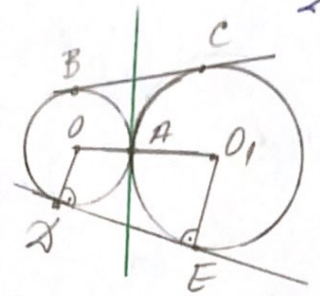
Тема 2: Окръжност: допирателни, видове ъгли, взаимно положение. Многоъгълник и окръжност

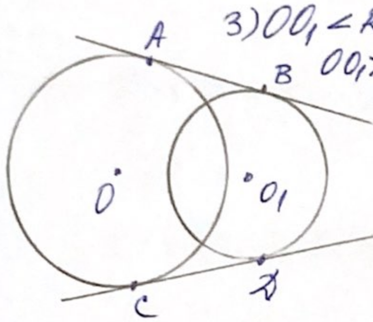
1) $OO_1 > R+R_1$



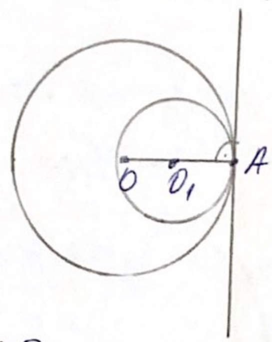
2) $OO_1 = R+R_1$



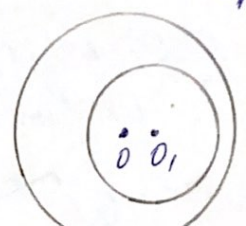
3) $OO_1 < R+R_1$
$OO_1 > R-R_1$



4) $OO_1 = R-R_1$



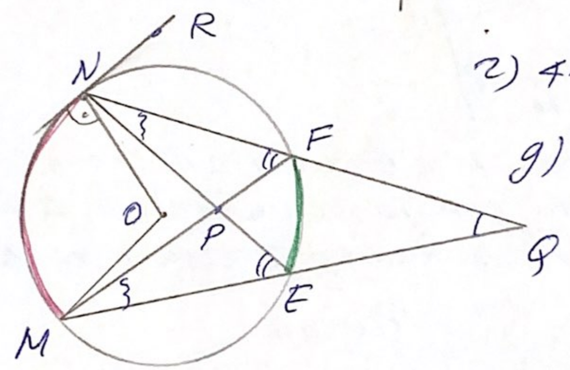
5) $OO_1 < R-R_1$



а) $\measuredangle MON = \overset{\frown}{MN}$ (централен ъгъл)

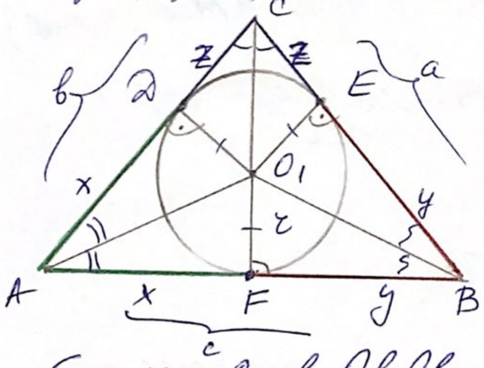
б) $\measuredangle MFN = \dfrac{\overset{\frown}{MN}}{2}$ (вписан ъгъл)

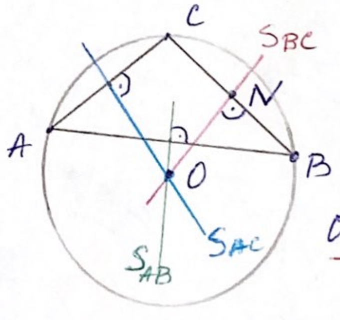
в) $\measuredangle RNF = \dfrac{\overset{\frown}{NF}}{2}$ (периферен)



г) $\measuredangle MPN = \dfrac{\overset{\frown}{MN}+\overset{\frown}{FE}}{2}$

д) $\measuredangle MQN = \dfrac{\overset{\frown}{MN}-\overset{\frown}{FE}}{2}$





$O = S_{AB} \cap S_{BC} \cap S_{AC}$

$ON \perp CB \Rightarrow N$ - среда на CB

$S = p \cdot r$; $O_1 = l_a \cap l_b \cap l_c$

$$\left|\begin{array}{l} x+y=c \\ x+z=b \\ y+z=a \end{array}\right. \Rightarrow 2x+2y+2z=P$$

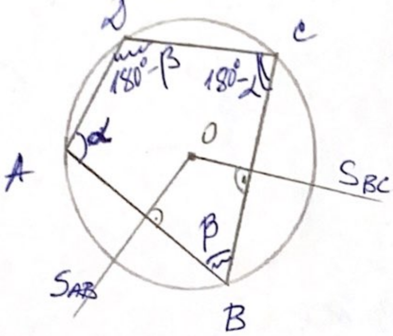
$\Rightarrow x+y+z=p$

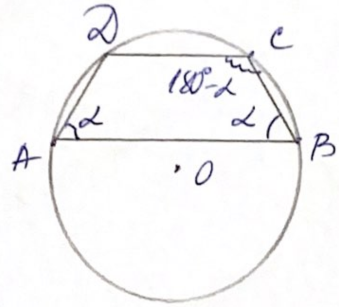
$\Rightarrow \boxed{x=p-a;\ y=p-b;\ z=p-c}$ (*)

(T1) ABCD-вписан в окр. $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$

$O = S_{AB} \cap S_{BC} \cap S_{CD} \cap S_{DA}$

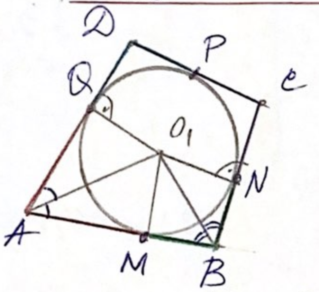
(T2) ABCD-трапец, вписан в окръжност $\Leftrightarrow$ $AD = BC$





(T3) ABCD-описан около окр. $\Leftrightarrow$ $AB + CD = BC + AD$

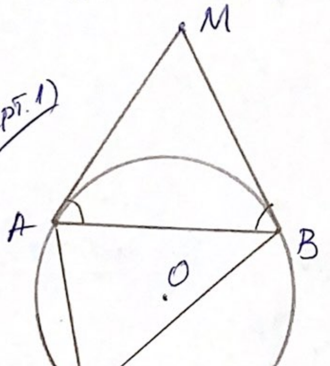
$O_1 = l_{AB} \cap l_{BC} \cap l_{CD} \cap l_{DA}$



$\boxed{S = p.r}$

(1) В окръжност k е вписан $\triangle ABC$ с $\sphericalangle C = 62^\circ$. През A и B са построени допирателни към k, които се пресичат в точка M. Да се намерят ъглите на $\triangle AMB$.

(черт.1)

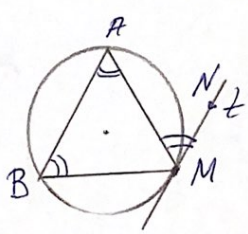


Решение:

$\sphericalangle ACB = \underset{(вп.)}{\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}} = 62^\circ = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$ (периф.)

$\Rightarrow \sphericalangle AMB = 180^\circ - 2.62^\circ = 56^\circ$ (черт.1)

черт.2



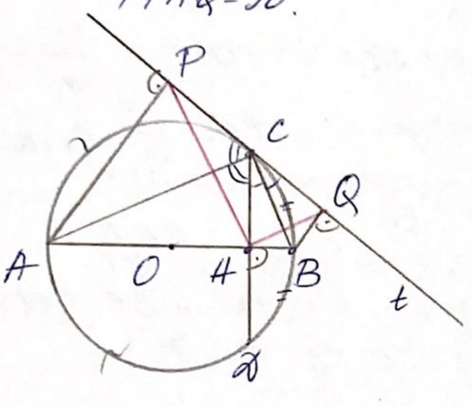
(2) През т. $M \in k$ е построена допирателна, успоредна на хорда AB. а) Да се док., че $\triangle AMB$ е равнобедрен; б) да се намерят ъглите на $\triangle AMB$, ако $\overset{\frown}{AM} = 100^\circ$ (черт.2)

Решение: а) $t \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle BAM = \sphericalangle AMN = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2}$ (кръстни)

но $\sphericalangle ABM = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \Rightarrow \sphericalangle BAM = \sphericalangle ABM \Rightarrow BM = AM$; б) $\sphericalangle B = \sphericalangle A = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} = 50^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle BMA = 80^\circ$

③ В окръжност k диаметърът AB е перпендикулярен на хорда CD, а H е общата им точка. Права t е допирателна към k в точка C. Точките P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати съответно от A и B към t. Да се докаже, че $\sphericalangle PHQ = 90°$.



Доказателство:

$AB \perp CD \Rightarrow H$ – среда на $CD \Rightarrow \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$; $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow \sphericalangle BCQ = \sphericalangle HCB \Rightarrow \triangle CBQ \cong \triangle CBH$

(1) CB – обща; 2) $\sphericalangle Q = \sphericalangle H = 90°$; 3) $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle CBH$)

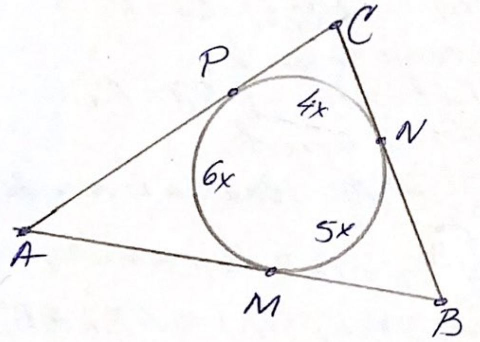
$\Rightarrow CH = CQ$

От $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \sphericalangle ACP = \sphericalangle ACD$

$\Rightarrow \triangle ACP \cong \triangle ACH$ (II пр.) $\Rightarrow CH = CP$

$\Rightarrow CH = CP = CQ \Rightarrow \sphericalangle PHQ = 90°$

④ През т. M, N и P от окр. k са построени допирателни, които се пресичат в т. A, B и C. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако $\overset{\frown}{MN} : \overset{\frown}{NP} : \overset{\frown}{MP} = 5 : 4 : 6$



Решение: $\overset{\frown}{MN} = 5x$; $\overset{\frown}{NP} = 4x$; $\overset{\frown}{MP} = 6x$

$\overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{NP} + \overset{\frown}{MP} = 360° \Rightarrow 15x = 360°$

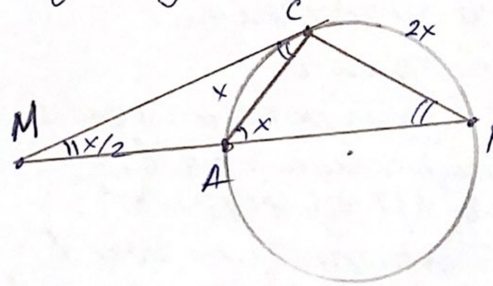
$\Rightarrow x = 24°$

$\Rightarrow \sphericalangle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PNM} - \overset{\frown}{PM}) = \frac{1}{2} \cdot 3x = 36°$

$\sphericalangle B = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MPN} - \overset{\frown}{MN}) = \frac{1}{2} \cdot 5x = 60°$

$\sphericalangle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PMN} - \overset{\frown}{PN}) = \frac{1}{2} \cdot 7x = 84°$

⑤ През т. M, външна за окр. k, са построени допирателна MC ($C \in k$) и секуща AB ($A \in MB$). Ако $\sphericalangle BAC = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AC}$, то да се докаже, че $MA = AC$ и $MC = BC$.



Доказателство:

$\sphericalangle BAC = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} = \overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{CB} = 2\overset{\frown}{AC}$

Нека $\overset{\frown}{AC} = x \Rightarrow \overset{\frown}{CB} = 2x \Rightarrow \sphericalangle CAB = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} = x$

$\sphericalangle MCA = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{x}{2}$. Но $\sphericalangle CAB = \sphericalangle MCA + \sphericalangle CMA$

(външен за $\triangle MAC$) $\Rightarrow \sphericalangle CMA = \sphericalangle ACM = \frac{x}{2}$

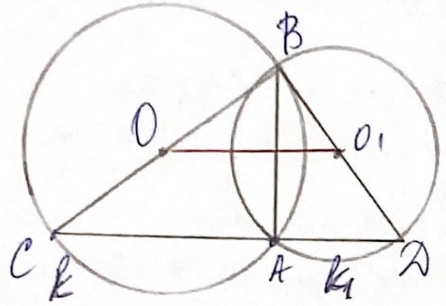
$\Rightarrow MA = AC$.

Но $\sphericalangle CBA = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \sphericalangle CBM = \sphericalangle CMB = \frac{x}{2}$

$\Rightarrow MC = CB$.

(6) Окръжностите $k(O)$ и $k_1(O_1)$ се пресичат в точки A и B, а BC и BD са техни диаметри.
а) Да се докаже, че $A \in CD$; б) $S_{BCD} = ?$, ако $AB = 2$ cm, $OO_1 = 3$ cm

Решение:



а) BC - диаметър $\Rightarrow \angle CAB = 90^\circ$ $(A \in k)$ (вписан)

BD - диаметър $\Rightarrow \angle BAD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = 90^\circ$ (вп.)

$\Rightarrow \angle CAD = \angle BAC + \angle BAD = 180^\circ$

$\Rightarrow A \in CD$

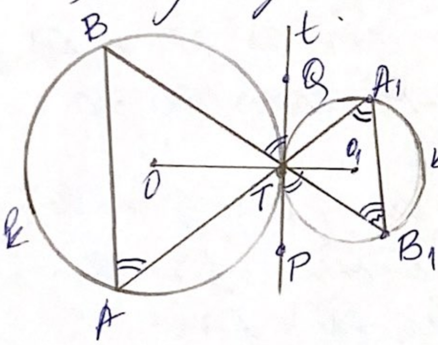
б) $BA \perp CD \Rightarrow S_{BCD} = \frac{BA . CD}{2}$

Но OO_1 - ср. отс. в $\triangle BCD \Rightarrow BA = 2OO_1$

$\Rightarrow S_{BCD} = OO_1 . CD = 6$ cm^2

(7) Окръжностите $k(O)$ и $k_1(O_1)$ се допират външно в т. T. През T са построени права $t \perp OO_1$ и секущи AA_1 и BB_1 на k и k_1 $(A \in k, B \in k, A_1 \in k_1, B_1 \in k_1)$. Да се докаже, че:
а) t е допирателна на k и k_1; б) $AB \parallel A_1B_1$.

Доказателство:



а) $T \in k$ и $t \perp OT \Rightarrow |O; t| = OT = R$

$\Rightarrow t$ е допирателна към k.

$T \in k_1$ и $O_1T \perp t \Rightarrow |O_1; t| = O_1T = R_1$

$\Rightarrow t$ е допирателна към k_1.

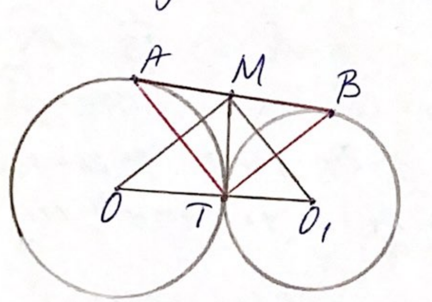
б) $\angle QTB = \frac{\overset{\frown}{BT}}{2} = \angle TAB$ (вписан и периферен)

$\angle PTB_1 = \frac{\overset{\frown}{TB_1}}{2} = \angle TA_1B_1$ (вписан и периф.)

Но $\angle QTB = \angle PTB_1$ (връхни) $\Rightarrow \angle TAB = \angle TA_1B_1$ (кр.) $\Rightarrow AB \parallel A_1B_1$

(8) Окръжностите $k(O)$ и $k_1(O_1)$ се допират външно в т. T, а AB е тяхна обща външна допирателна $(A \in k, B \in k_1)$. Общата вътрешна допирателна на k и k_1 пресича AB в точка M. Да се докаже, че $\triangle ATB$ и $\triangle OMO_1$ са правоъгълни.

Доказателство:



а) $MA = MT$ - допирателни към k

$MB = MT$ - допирателни към k_1.

$\Rightarrow MA = MB = MT \Rightarrow \angle ATB = 90^\circ$

б) MA и MT - допирателни към k

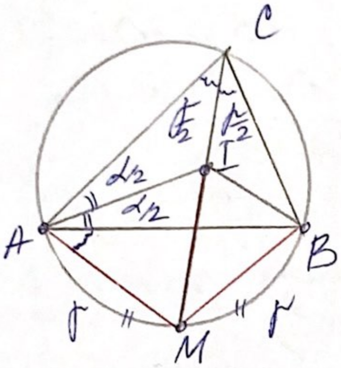
$\Rightarrow MO$ - ъглополов.

MT и MB - допир. към k_1

$\Rightarrow MO_1$ - ъглополов.

$\Rightarrow \angle OMO_1 = \angle OMT + \angle TMO_1 = \frac{\angle AMT + \angle TMB}{2} = 90^\circ$

(9) Точка M е среда на дъгата AB, която не съдържа т. C, от описаната около $\triangle ABC$ окр. Да се докаже, че $MA = MB = MI$, където I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.



Доказателство:

$I = l_a \cap l_b \cap l_c$. M-среда на $\overset{\frown}{AB} \Rightarrow \angle ACM = \angle MCB = \frac{\gamma}{2}$

$\Rightarrow I \in CM$ (CM-ъглополовяща)

$\angle ACM = \frac{\gamma}{2} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \gamma$

AI-ъглополовяща $\Rightarrow \angle CAI = \angle IAB = \frac{\alpha}{2}$

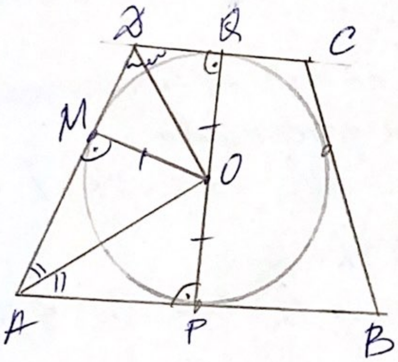
$\angle MAB = \frac{\overset{\frown}{MB}}{2} = \frac{\gamma}{2} = \angle ABM$

$\Rightarrow MA = MB$

$\angle MAI = \angle MAB + \angle BAI = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

$\angle AIM = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ (външен за $\triangle AIC$) $\Rightarrow MA = MB = MI$

(10) В равнобедрен трапец е вписана окръжност, центърът на която е точка O. Ако $AO = 15$ см и $DO = 8$ см, то да се намери S_{ABCD}. (23И^2)



Решение:

ABCD-описан около окр. $\Rightarrow AB + CD = 2AD$

OA и DO-ъглополовящи

$\Rightarrow \angle ADO = \frac{\angle ADC}{2}$; $\angle DAO = \frac{\angle DAB}{2}$

$\Rightarrow \angle ADO + \angle DAO = \frac{\angle ADC + \angle DAB}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AOD = 90^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = 17$ см $=$

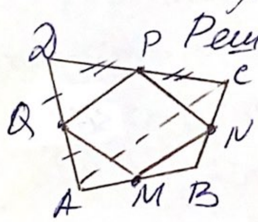
$= \frac{AB+CD}{2}$. M-допирна точка

$\Rightarrow MO = r = \frac{h}{2}$. $S_{AOD} = \frac{DO.AO}{2} = \frac{AD.r}{2}$

$\Rightarrow r = \frac{DO.AO}{AD} = \frac{8.15}{17} = \frac{120}{17} \Rightarrow h = PQ = 2r = \frac{240}{17}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} . h = \frac{17.240}{17} = 240$ см^2

(11) Точките M, N, P и Q са средите на страните AB, BC, CD и DA на изпъкнал четириъгълник ABCD. Известно е, че MNPQ е описан около окръжност. Известно е, че MNPQ е описан около окръжност. Какво със сигурност е вярно за ABCD: а) че е вписан; б) че е описан; в) че е с равни диагонали; г) че е квадрат? (23И^1)



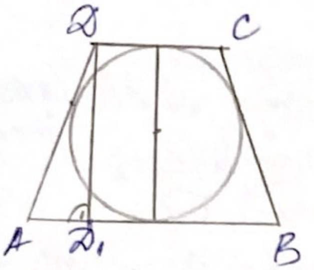
Решение: QP-ср. отс. $\Rightarrow QP \parallel AC$, $QP = \frac{1}{2}AC$ } MNPQ-усп.
MN-ср. отс. $\Rightarrow MN \parallel AC$; $MN = \frac{1}{2}AC$

Но и MNPQ-описан около окр. $\Rightarrow MN + QP = QM + PN$

$\Rightarrow MN = QM \Rightarrow$ MNPQ-ромб $\Rightarrow AC = BD \Rightarrow \boxed{В}$

(още $PM \perp QN$)

(12) Около окръжност е описан равнобедрен трапец с дължини на основите 18 см и 8 см. Дължината на окръжността в см е: а) 12; б) 6π; в) 12π; г) 10π. (23И¹)



Решение: $ABCD$-описан

$\Rightarrow AB+CD=2AD \Rightarrow AD=\frac{18+8}{2}=13$ см

$DD_1=h=2r$. $\triangle ADD_1$: $AD_1=\frac{AB-CD}{2}=5$ см

$DD_1=\sqrt{AD^2-AD_1^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$ см

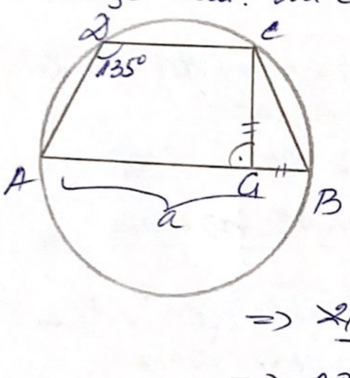
$P_0=2\pi r=12\pi$ см $\Rightarrow \boxed{в}$

(13) В равнобедрен трапец с бедро 5 е вписана окръжност с радиус 2. Лицето на $S_{ABCD}=?$ (23И²)

Решение: $DD_1=h=2r=4$; $AD=5 \Rightarrow AD_1=\sqrt{AD^2-DD_1^2}=3$

$2AD=AB+CD$ ($ABCD$-описан) $\Rightarrow \frac{AB+CD}{2}=AD=5 \Rightarrow S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot DD_1=$
$=5.3=15$

(14) В окръжност е вписан трапец $ABCD$ с малка основа $CD=1$ см и лице 2 см². Да се намери голямата основа AB, ако $\overset{\frown}{ABC}=270°$.



Решение:

$\sphericalangle ADC=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}=135° \Rightarrow \sphericalangle A=\sphericalangle B=45°$ (прилежащи)

$\Rightarrow \triangle BCG$-равнобедрен и правоъгълен

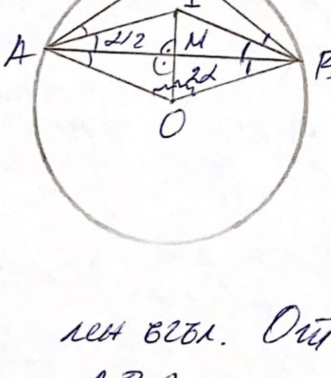
$\Rightarrow CG=GB=\frac{AB-CD}{2}=\frac{a-1}{2}=h \Rightarrow a=2h+1$

$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=\frac{(2h+1+1)}{2}\cdot h=2$

$\Rightarrow \frac{\cancel{2}(h+1)h}{\cancel{2}}=2 \Rightarrow h^2+h-2=0 \Rightarrow h_1=1$ см ($h_2=-2<0$ н.р.)

$\Rightarrow AB=2GB+CD=3$ см

(15) Центровете на вписаната и описаната окръжности за $\triangle ABC$ са симетрични относно AB. Да се намерят ъглите на триъгълника.



Решение:

O-ц-р на описана окр. $\Rightarrow OA=OB=R$

I-център на вписана окр. $\Rightarrow AI, BI$-ъглополовящи. O и I-симетрични относно $AB \Rightarrow AB\perp OI$ и $OI\cap AB=M$

$\Rightarrow M$-среда на OI. Но $AO=OB$

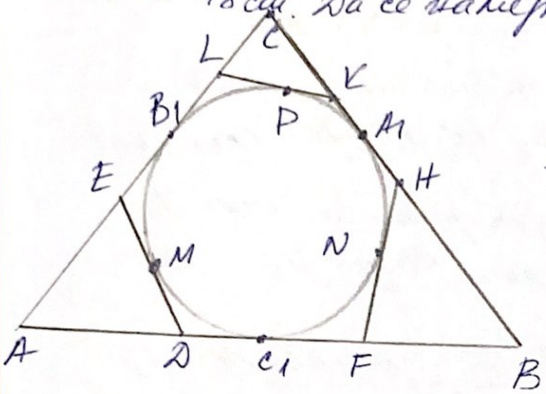
$\Rightarrow M$-среда на $AB \Rightarrow AOBI$-ромб

$\Rightarrow \sphericalangle IAB=\sphericalangle IBA=\sphericalangle BAO=\sphericalangle ABO=\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \sphericalangle ABC=\alpha=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ (вписан) $\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=2\alpha=\sphericalangle AOC$-централен ъгъл. От $\triangle AMO$: $\sphericalangle M=90° \Rightarrow \frac{\alpha}{2}+2\alpha=90° \Rightarrow \alpha=36°$

$\triangle ABC \Rightarrow \sphericalangle A=\sphericalangle B=36° \Rightarrow \sphericalangle C=108°$

(16) В равнобедрен Δ с основа 12 см е вписана окръжност. Построени са три допирателни към окр., така че те отсичат от дадения Δ три малки триъгълника. Сборът от периметрите им е 48 см. Да се намери бедрото на дадения Δ.



Решение:

$DM = DC_1$ (допир.) ; $ME = EB_1$ (допир.)

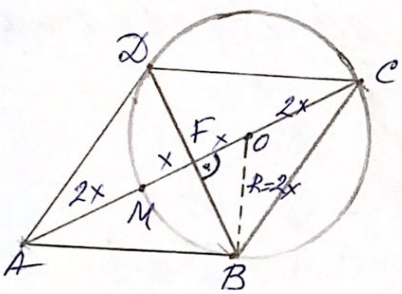
$\Rightarrow P_{ADE} = AD + AE + DM + ME = \underline{AD + DC_1} + \underline{AE + EB_1} = AC_1 + AB_1$

Аналогично $P_{FBH} = BC_1 + BA_1$, $P_{CLK} = CB_1 + CA_1$

$\Rightarrow P_{ADE} + P_{FBH} + P_{LKC} = AC_1 + AB_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 = AB + AC + CB = 48 \Rightarrow 12 + 2AC = 48$

$\Rightarrow AC = BC = \frac{48-12}{2} = 18$ см.

(17) Даден е ромб с остър ъгъл при върха A. Да се намерят ъглите му, ако окръжността, описана около ΔBCD, минава през медицентъра на ΔABD.



Решение:

Нека т. M – медицентър на Δ ~~BAD~~ ΔBAD, т. O – ц-р на описаната около ΔBCD окръжност. $\Rightarrow$ $\boxed{AM = 2x, \; MF = x}$ $\Rightarrow AF = FC = 3x$

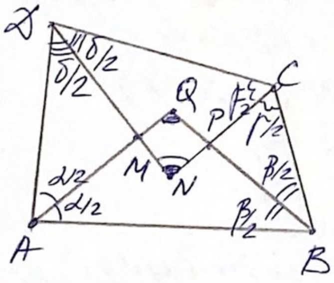
$\Rightarrow MC = 2R = 4x \Rightarrow R = 2x = OC = OB$

$\Rightarrow FO = x \Rightarrow \Delta FOC: \angle F = 90^\circ;\ OF = \frac{1}{2} OB$

$\Rightarrow \angle FBO = 30^\circ \Rightarrow \angle FOB = 60^\circ = \overset{\frown}{MB}$ (централен ъгъл)

$\Rightarrow \angle MCB = \frac{\overset{\frown}{MB}}{2} = 30^\circ$ (вписан) $\Rightarrow \angle BCD = \angle BAD = 60^\circ$, $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$

(18) Пресечните точки на ъглополовящите на ъглите на изпъкнал четириъгълник образуват четириъгълник. Да се докаже, че около него може да се опише окръжност.



Доказателство:

AQ – ъглоп. $\Rightarrow \angle QAB = \angle QAD = \frac{\alpha}{2}$; QB – ъглополов. $\Rightarrow \angle ABQ = \angle CBQ = \frac{\beta}{2}$; CN – ъглоп. $\Rightarrow \angle NCB = \angle NCD = \frac{\gamma}{2}$

$\angle NDC = \angle NDA = \frac{\delta}{2}$ (DN – ъглоп.)

$AQ \cap QB = M$; $NC \cap DN = M$

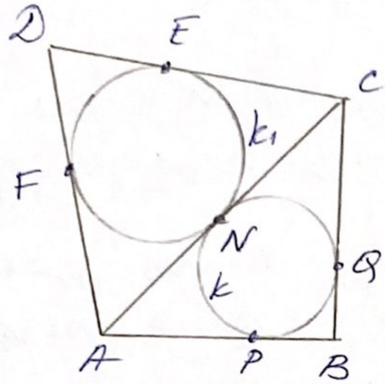
$\Delta ABQ \Rightarrow \angle AQB = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\Delta DNC \Rightarrow \angle DNC = 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2}$

$\Rightarrow \angle AQB + \angle DNC = 360^\circ - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

$\Rightarrow MNPQ$ – вписан в окр.

(19) Даден е изпъкнал четириъгълник ABCD. Окръжностите, вписани в $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ се допират (вътрешно). Да се докаже, че в ABCD може да се впише окръжност.



Доказателство:

AN и AP - допирателни към k

$\Rightarrow AN = AP = \dfrac{AC+AB-BC}{2}$ (от (*))

AN и AF - допирателни към k_1

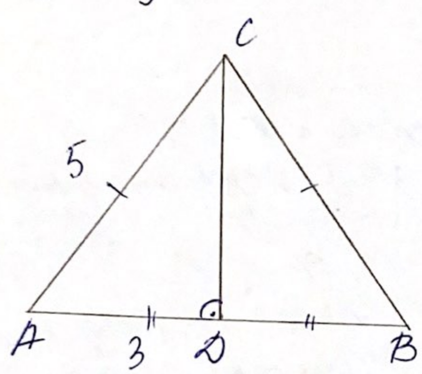
$\Rightarrow AN = AF = \dfrac{AC+AD-DC}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{AC}+AB-BC}{2} = \dfrac{\cancel{AC}+AD-DC}{2} \;/.2$

$\Rightarrow AB-BC = AD-DC \Rightarrow AB+DC = AD+BC$

$\Rightarrow$ ABCD - описан около окръжност.

(20) Даден е $\triangle ABC$: $AC=BC=5$, $AB=6$. Да се намерят r и R. (M2-2019)



Решение:

D - среда на AB $\Rightarrow CD = h_c = m_c = l_c$

$\Rightarrow CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 4$

$p = \dfrac{AB+BC+AC}{2} = 8$

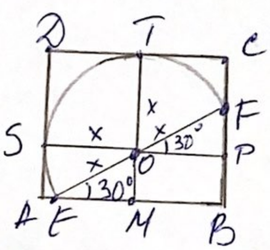
$S_\triangle = \dfrac{AB.CD}{2} = \dfrac{6.4}{2} = 12$

$S_\triangle = p.r \Rightarrow r = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$.

$S_\triangle = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow 12 = \dfrac{5^2.6}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{25}{8}$.

(21) От правоъгълника ABCD със страна $BC=6$ е изрязан полукръг, който се загражда от диаметъра EF и полуокр. ESTF, като $E \in AB$, $S \in AD$, $T \in CD$, $F \in BC$ и $\angle BEF = 30°$. Да се намери лицето на правоъгълника. (M1-2017)

Решение:



Нека $OT = SO = OE = OF = R = x$

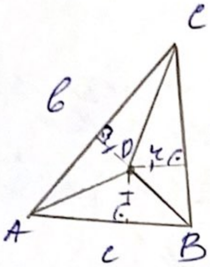
$\triangle EOM \Rightarrow OM = \dfrac{OE}{2} = \dfrac{x}{2}$. $TM = TO + OM = \dfrac{3x}{2} = BC = 6$

$\Rightarrow x = 4$; $\triangle OPF$: $OP = x\cos 30° = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow SP = SO + OP = 4 + 2\sqrt{3} = AB$

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.BC = (4+2\sqrt{3})6 = 12(2+\sqrt{3})$

(22) За $\triangle ABC$ центърът на вписаната окръжност е O и лицата на $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$ са съответно 4, 9 и 11. Да се намерят страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$. (M1-2017)



Решение:

$S_{AOB} = \frac{c \cdot r}{2} = 4 \Rightarrow c = \frac{8}{r}$; $S_{BOC} = \frac{a \cdot r}{2} \Rightarrow a = \frac{18}{r}$

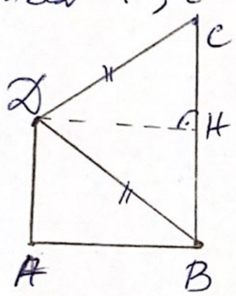
$S_{AOC} = \frac{b \cdot r}{2} \Rightarrow b = \frac{22}{r} \Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{24}{r}$

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = 24 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow 24 = \sqrt{\frac{24}{r} \cdot \frac{16}{r} \cdot \frac{6}{r} \cdot \frac{2}{r}} = \frac{2 \cdot 24 \cdot \sqrt{2}}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt[4]{2^3}$

$\Rightarrow c = 4\sqrt[4]{2}$; $a = 9 \cdot \sqrt[4]{2}$; $b = 11 \cdot \sqrt[4]{2}$

(23) Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB=4$, $BC=6$, $CD=5$ и диагонал $BD=5$, в който може да се впише окръжност. $S_{ABCD} = ?$, $r = ?$ (M1-2016)



Решение:

$AB + CD = BC + AD \Rightarrow 4 + 5 = 6 + AD$

$\Rightarrow AD = 3$. Но $AD^2 + AB^2 = BD^2$

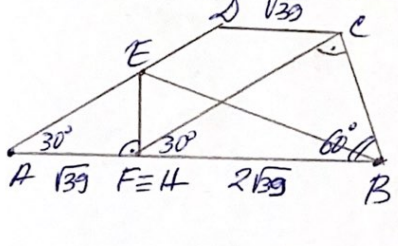
$\Rightarrow \angle A = 90^\circ$; $DH = \sqrt{DB^2 - BH^2} = 4 \Rightarrow \angle B = 90^\circ$

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} =$

$= \frac{AD \cdot AB}{2} + \frac{DH \cdot BC}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 4}{2} = 18$

$S = p \cdot r = 9 \cdot r \Rightarrow r = 2$

(24) $ABCD$-трапец с основи $AB = 3\sqrt{39}$ и $CD = \sqrt{39}$; $\angle ABC = 60^\circ$; $\angle BAD = 30^\circ$. $E \in AD$, такава че BE разполовява лицето на трапеца. Да се намери BE. (M2-2016).



Решение:

$F: \begin{cases} F \in AB \\ CF \parallel AD \end{cases}$. От $\triangle FCB$: $BC = \frac{BF}{2} = \sqrt{39}$

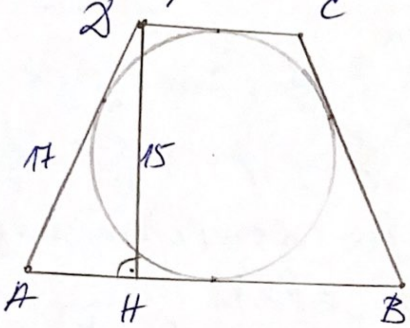
$S_{FCB} = \frac{BF \cdot BC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2}$

$S_{AFCD} = S_{FCB}$ и $S_{ABCD} = 39\sqrt{3}$. По усл. $2 \cdot S_{ABE} = S_{ABCD} = AB \cdot AE \sin 30^\circ$

$\Rightarrow AE = 2\sqrt{13}$. Нека $EH \perp AB$ $(H \in AB) \Rightarrow \triangle AEH \Rightarrow EH = \sqrt{13}$

$AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{39} \Rightarrow H \equiv F \Rightarrow \triangle EFB \Rightarrow BE = \sqrt{EF^2 + FB^2} = 13$

(25) Около окръжност с диаметър 15 е описан равнобедрен трапец с дължина на бедрото 17. Намерете основите на трапеца. (М1-2015)



Решение:

$AB+CD=2AD \Rightarrow AB+CD=34$

$DH=2r=15$. От $\triangle ADH$

$AH=\frac{AB-CD}{2}=\sqrt{AD^2-DH^2}=8$

$\Rightarrow \begin{cases} AB+CD=34 \\ AB-CD=16 \end{cases}$ (+)

$\Rightarrow 2AB=50 \Rightarrow AB=25 \Rightarrow CD=9.$