מטלה 3- לוגיקה למדמ"ח

1. נגדיר מערכת היסק לתחשיב הפסוקים מעל קבוצת הקשרים $\{\rightarrow\}$ וכלל היסק MP והאקסיומות:

$$(A1)\quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$
$$\big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$$
$$(A \rightarrow B) \rightarrow \big((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$$

א. הוכיחו שהמערכת נאותה.

ב. הוכיחו שאם $\Gamma, A \vdash B$ וגם $\Gamma \nvdash B$ אז $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

ליטרל הוא משתנה או שלילתו.

לכל פסוק יסודי p נסמן $\bar{p} \coloneqq \neg p$, $\overline{\neg p} \coloneqq p$. אז לכל ליטרל l, $\bar{l}$ ייקרא המשלים שלו.

2. נתבונן במערכת ההוכחה הבאה $\Re$:
   - $\Sigma = \{p_0, p_1, \dots\}$ הוא המילון של המערכת.
   - הנוסחאות הן קבוצות סופיות של ליטרלים.
     שימו לב! גם $\emptyset$ היא נוסחא במערכת!
   - כלל היסק היחיד R: עבור נוסחאות A, B כך ש $l \in A$,$\bar{l} \in B$: $\frac{A\ ,\ B}{A-\{l\} \cup B-\{\bar{l}\}}$.
     שימו לב! משתי נוסחאות A ו- B **שאין** ליטרל המופיע עם שלילה באחת ובלי שלילה באחרת, לא ניתן להסיק דבר עם R.

- דוגמא לנוסחא במערכת: $\{p_0, \neg p_0,\ p_8,\ p_1,\ \neg p_2\}$.
- דוגמא להסקה: תהיינה $\{p_0, p_1, \neg p_2\}, \{\neg p_1, p_3\}$. ניתן להסיק מהן את $\{p_0, p_3, \neg p_2\}$ בלבד.

יחס היכיחות במערכת $\vdash_{\Re}$ מוגדר כמו תמיד.

א. אילו נוסחאות ניתן להוכיח מהקבוצה $X = \{\ \{\alpha\}, \{\alpha, \neg\beta\}\ \}$?

ב. אילו נוסחאות ניתן להוכיח מהקבוצה $X = \{\ \{\alpha\}, \{\neg\alpha\}\ \}$?

ג. הוכיחו את $\{\theta, \gamma, \alpha\}$ מתוך $X = \{\{\gamma, \neg\alpha, \neg\beta\}, \{\alpha, \gamma, \delta, \theta\}, \{\theta, \beta, \alpha\}, \{\alpha, \neg\delta\}, \{\theta, \neg\gamma, \neg\beta\}\}$.

ד. הוכיחו שאם Γ קבוצת נוסחאות סופית אז קבוצת הנוסחאות היכיחות ממנה סופית.

נגדיר סמנטיקה:

תהיה סביבה $\rho: Variables \rightarrow \{T, F\}$.

- נאמר ש ρ מספקת את הנוסחה A אם קיים $l \in A$ כך ש: $[|l|]_\rho = T$.
- נאמר ש ρ מספקת קבוצת נוסחאות Γ אם היא מספקת כל נוסחא ב Γ.
- אם יש סביבה המספקת קבוצת נוסחאות Γ, נאמר ש Γ ספיקה.

ה. יהיו שתי נוסחאות A, B. הוכיחו שאם קיימים $l_1, l_2 \in A$ כאשר $l_1 \neq l_2$, כך ש $\overline{l_1}, \overline{l_2} \in B$ אז אם $\frac{A,B}{C}$ אז כל סביבה מספקת את C.

ו. הוכיחו ש $\emptyset$ היא הנוסחא היחידה שאינה ספיקה.

ז. הוכיחו שאם Γ ספיקה ו $\Gamma \vdash_{\Re} A$ אזי A ספיקה.

ח. הסיקו ש $\Re$ נאותה, כלומר שאם $\Gamma \vdash_{\Re} \emptyset$ אזי Γ לא ספיקה.

3.

תהיה קבוצת פסוקים Γ.

א. נאמר ש $HS(\Gamma)$ אם קיימות שתי סביבות ρ_1, ρ_2 כך שלכל $\varphi \in \Gamma$:

$[|\varphi|]_{\rho_2} = True$ או $[|\varphi|]_{\rho_1} = True$

הוכיחו/הפריכו : $HS(\Gamma)$ אם"ם לכל Δ תת קבוצה סופית של Γ: $HS(\Delta)$.

ב. נאמר ש $P(\Gamma)$ אם קיימות שתי סביבות **שונות** ρ_1, ρ_2 כך שלכל $\varphi \in \Gamma$:

$[|\varphi|]_{\rho_2} = True$ וגם $[|\varphi|]_{\rho_1} = True$

הוכיחו/הפריכו : $P(\Gamma)$ אם"ם לכל Δ תת קבוצה סופית של Γ : $P(\Delta)$.

ג. נאמר ש $D(\Gamma)$ אם קיימות שתי סביבות **שונות** ρ_1, ρ_2 כך שלכל $\varphi \in \Gamma$:

$[|\varphi|]_{\rho_2} = True$ וגם $[|\varphi|]_{\rho_1} = False$

הוכיחו/הפריכו : $D(\Gamma)$ אם"ם לכל Δ תת קבוצה סופית של Γ: $D(\Delta)$.

4. במערכת D מתקיימים שלושת הכללים הבאים-

- כלל המונוטוניות: אם $\Delta \vdash_D \varphi$ וגם $\Delta \subset \Gamma$ אז $\Gamma \vdash_D \varphi$.
- חתך: אם $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash_D \varphi$ וגם $\Gamma \vdash_D \phi$ אז $\Gamma \vdash_D \varphi$.
- קומפקטיות: אם $\Gamma \vdash_D \varphi$ אז יש $\Delta \subset \Gamma$ **סופית** כך ש $\Delta \vdash_D \varphi$.

הוכיחו :

א. טרנזיטיביות של יחס יכיחות: אם לכל $\varphi \in \Delta$: $\Gamma \vdash_D \varphi$, וגם $\Gamma \cup \Delta \vdash_D \phi$ אז $\Gamma \vdash_D \phi$.

ב. טרנזיטיביות של יחס נביעה: אם $\Gamma \vDash \Delta$, וגם $\Gamma \cup \Delta \vDash \phi$ אז $\Gamma \vDash \phi$.

.5

נגדיר מערכת היסק N מעל $WFF_{\{\neg,\rightarrow\}}$. עם האקסיומות

$$(A_1) : \neg(A \rightarrow A)$$
$$(A_2) : (A \rightarrow A) \rightarrow \neg(B \rightarrow B)$$
$$(A_3) : (B \rightarrow B) \rightarrow \big((A \rightarrow A) \rightarrow \neg(B \rightarrow B)\big)$$

וכללי ההיסק

$$M_1 : \frac{B, A \rightarrow B}{\neg A}$$
$$M_2 : \frac{\neg\neg A}{A}$$
$$M_3 : \frac{\neg A \rightarrow \neg B}{B \rightarrow A}$$

ונסמן $\vdash_N A$ אם A יכיח במערכת החדשה.

א. הוכיחו/הפריכו: לכל פסוק $A \in WFF_{\{\neg,\rightarrow\}}$, אם $\vdash_N A$ אז $\vDash A$.

ב. הוכיחו/הפריכו: קיים פסוק $B \in WFF_{\{\neg,\rightarrow\}}$, כך ש- $\vdash_N B$ ו-$B \equiv (p_1 \rightarrow \neg p_2) \wedge (\neg p_3 \rightarrow p_4)$.