מטלה 4 – לוגיקה למדעי המחשב

1. לכל אחת מהנוסחאות הבאות רשמו מי הם המשתנים החופשיים וציירו את שלד הנוסחא.
   א. $A \coloneqq \forall x \forall y \forall x \big(P(x) \to R(x,y,z,w)\big) \wedge \exists x \exists y \forall z \big(P(z) \to \forall z (R(x,y,z)\big)$
   ב. $B \coloneqq \exists x \forall z \exists y \left(P(x,y,z) \to \big(R(x,y,z) \to \exists z \exists z (R(z,x) \wedge E(r,t,x,z) \to L(w)\big)\big)\right)$
   ג. חשבו את $B\left\{\frac{f(x,y)}{w}, \frac{g(x)}{r}, \frac{f(x,z)}{x}\right\}$

2. יהיו שם עצם t, נוסחא A מעל מילון Σ ויהיה מבנה M ל Σ. הוכיחו כי
$$\left[\left|A\left\{\frac{S}{x}\right\}\right|\right]_{\rho}^{M} = [|A|]^{M}_{\rho\left[\frac{[|s|]_\rho^M}{x}\right]}$$

3. נתון המילון $\Sigma = \{0,1,\epsilon,f,=\}$.
   נתבונן במבנה M ש $D^M \coloneqq \{0,1\}^*$ - קבוצה זו היא כל המחרוזות מעל התווים 0,1 כולל המחרוזת הריקה.
   במבנה זה 0,1 מתפרשים כתווים 0,1 בהתאמה.
   הקבוע ϵ מתפרש כמחרוזת הריקה.
   סימן הפונקציה f מתפרש כשרשור מחרוזות.
   לדוגמא: $f(011,11)$ היא המחרוזת 01111.
   = מתפרש כשיוויון, כרגיל.
   הצרינו את הטענות הבאות עם מילון זה:
   א. קיימת מחרוזת שהתו הראשון בה הוא 1, האחרון הוא 0.
   ב. במחרוזת str ישנם רק שני מופעים של 1.
   ג. המחרוזת y התקבלה מהמחרוזת x על ידי החלפת בדיוק תו אחד של 0 לתו של 1 או ההיפך.
   ד. בכל מחרוזת שמופיע בה 1, כל מופעי 0 קודמים לכל מופעי 1.

4. האם קיים מבנה שמספק את כל הפסוקים הבאים?
   א. $\forall x \forall y \big(P(x,y) \to P(y,x)\big)$
   ב. $\forall x \forall y \big(P(x,y) \leftrightarrow \neg O(y,x)\big)$
   ג. $\forall x \exists y \exists z \big(P(x,y) \wedge P(x,z)\big)$
   ד. $\forall x \forall y \forall z \big(P(x,y) \wedge P(y,z) \to \neg O(x,z)\big)$
   ה. $\forall x \big(P(x,x)\big)$
   אם כן, תארו אותו.

5. יהיה $\preccurlyeq$ יחס סדר בינארי על קבוצת הטבעיים שמקיים:
   - לכל $a,b,c \in N$: אם $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c$ אז $a \preccurlyeq c$
   - לכל $a,b \in N$: אם $b \preccurlyeq a$, $a \preccurlyeq b$ אז $a = b$

   הוכיחו שקיים יחס סדר **מלא** $\preccurlyeq^*$ המרחיב את $\preccurlyeq$, כלומר עונה על:

- לכל $a, b \in N$: אם $a \preccurlyeq b$ אז $a \preccurlyeq^* b$
- לכל $a, b \in N$: $a \preccurlyeq^* b$ או $b \preccurlyeq^* a$
- לכל $a, b, c \in N$: אם $a \preccurlyeq^* b,\ b \preccurlyeq^* c$ אז $a \preccurlyeq^* c$
- לכל $a, b \in N$: אם $b \preccurlyeq^* a$, $a \preccurlyeq^* b$ אז $a = b$