מטלה 5

כשנרשום $FreeVar(A)$ נתכוון לקבוצת המשתנים החופשיים המופיעים בנוסחא A.

1. תהיינה A, B נוסחאות.
   א. אם $x \notin FreeVar(A)$, הראו שהנוסחא $\forall x(A \vee B) \to (A \vee \forall x B)$ תקפה.
   ב. האם $\forall x(A \vee B) \to (A \vee \forall x B)$ תקפה כאשר $x \in FreeVar(A)$?
   ג. האם הנוסחא $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to \exists x B)$ תקפה? הוכיחו.
   ד. האם הנוסחא $\exists x A \wedge \exists x B \to \exists x(A \wedge B)$ תקפה? הוכיחו.

2.

יהיה M מבנה כך שלכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור t כך ש $[|t|]^M = a$. הוכיחו/הפריכו:
   א. כל פסוק מהצורה $\forall x A$ הוא נכון ב M אם"ם $A\{\frac{t}{x}\}$ נכונה ב M לכל שם עצם סגור t.
   ב. כל נוסחא מהצורה $\forall x A$ היא נכונה ב M אם"ם $A\{\frac{t}{x}\}$ נכונה ב M לכל שם עצם סגור t.
   ג. כל פסוק מהצורה $\exists x A$ הוא נכון ב M אם"ם קיים שם עצם סגור t שעבורו $A\{\frac{t}{x}\}$ נכונה ב M.
   ד. כל נוסחא מהצורה $\exists x A$ היא נכונה ב M אם"ם קיים שם עצם סגור t שעבורו $A\{\frac{t}{x}\}$ נכונה ב M.

3. במילון מסוים E , R הם סימני יחס (1 מקומי ותלת מקומי) ו f סימן פונקציה.
   תהיה A הנוסחא הבאה:

$$\forall v_0 \exists v_1 \forall v_0 \left(\forall v_5 R(v_0) \to \left(\neg \exists v_0 \big(E(v_2, v_4, v_0)\big) \to \left(\exists v_3 \forall v_3 \big(R(v_5) \to E(v_3, v_2, v_4)\big)\right)\right)\right)$$

   א. חשבו $A\{\frac{f(v_1,v_3)}{v_4}, \frac{f(v_1,v_5)}{v_0}\}$ וציירו את השלד של A.
   ב. רשמו את A בצורת PNF. הסבירו מהלך של כל שלב בתהליך.

4. תנו מילון מתאים להצרנת הטענות הבאות:
   הערה: בכל פעם שנגיד "סיבוב x" נתכוון ל "הישר המתקבל מפעולת סיבוב של 90° על x "
   i. ישר כלשהו x מקביל לישר כלשהו y אם"ם x לא מקביל לסיבוב של y.
   ii. סיבוב ישר כלשהו x מקביל לישר כלשהו y אם"ם x מקביל לסיבוב ישר y.
   iii. אם x כלשהו מקביל ל y כלשהו ו z כלשהו מקביל לy אז z מקביל ל x.
   iv. קיים ישר y שמקביל לישר B והסיבוב של y מקביל לישר A.
   v. A לא מקביל ל B.

5. הוכיחו/הפריכו:
   א. אם $\Gamma^{\exists} \vDash A^{\exists}$ אז $\Gamma^{\forall} \vDash A^{\forall}$
   ב. אם $\Gamma^{\forall} \vDash A^{\forall}$ אז $\Gamma^{\exists} \vDash A^{\exists}$