Modellbasierte Korpusforschung und Bayessche Statistik

Workshop

Christoph Finkensiep[1], Martin Rohrmeier[2]

GMTH Jahreskongress, Freiburg 23.09.2023

[1]Universiteit van Amsterdam, c.finkensiep@lva.nl

[2]École Polytechnique Fédérale de Lausanne, martin.rohrmeier@epfl.ch

Agenda

- Theorie
  - Modelle
  - Wahrscheinlichkeiten (basics)
  - Bayessche Inferenz
- Praxis
  - Probabilistic Programming
  - Ausführliches Beispiel

Vorwissen: Bruchrechnung, Dreisatz

Modelle, Wahscheinlichkeiten, Inferenz

Das Problem

Ich habe einen Datensatz erhoben / annotiert / berechnet. Was nun?

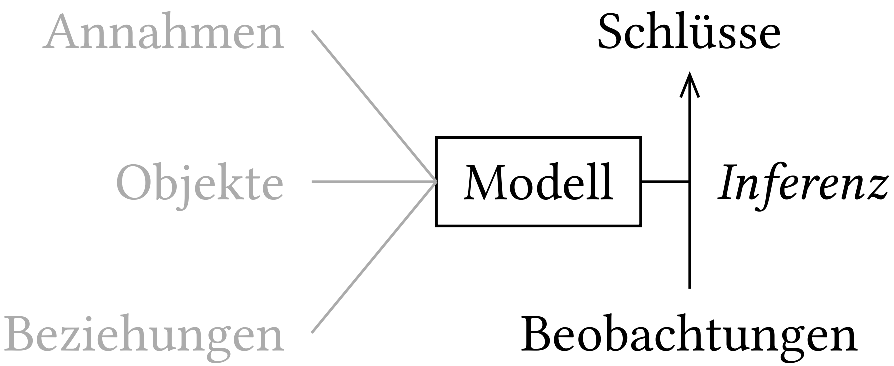
Statistik ist kompliziert…

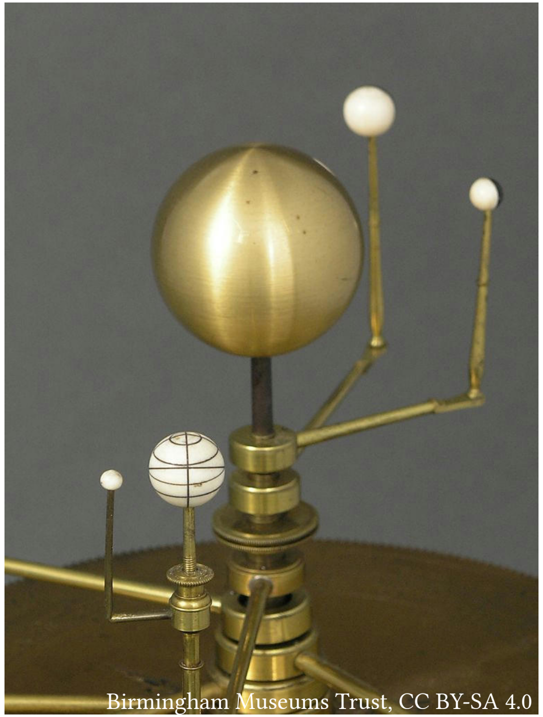
- viele verschiedene Methoden
- Annahmen und Implikationen nicht offensichtlich
- Was mache ich in komplexen Fällen?

Der Ansatz

Modelle!

- beschreiben einen Ausschnitt der Welt (vereinfacht)
- relevante **Objekte** und **Beziehungen**
- explizite **Annahmen**
- erlauben **Simulation** und **Inferenz**

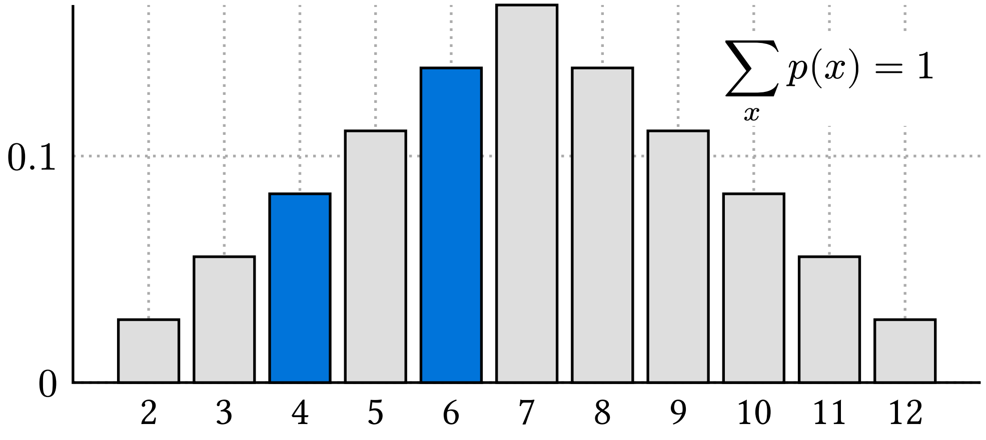




Basics: Verteilungen

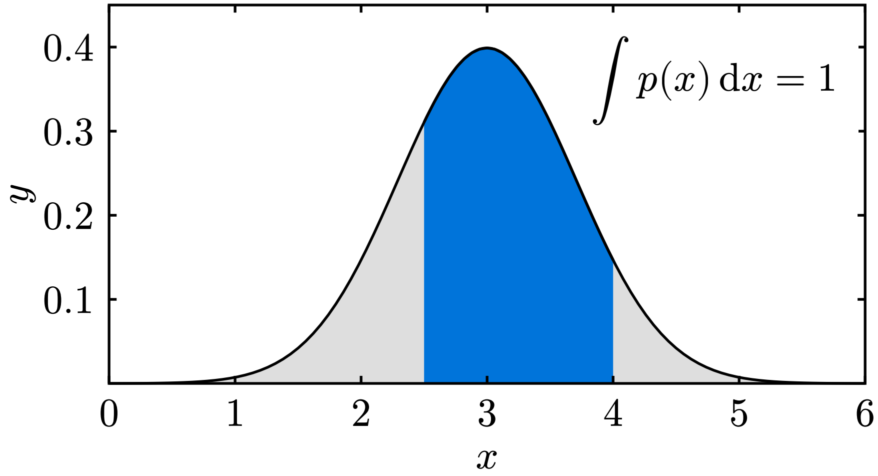
Zufallsvariable X:

diskret: „Massefunktion“ $p(x)$



$$P(X \in \{4, 6\}) = p(4) + p(6)$$

kontinuierlich: „Dichtefunktion“ $p(x)$



$$P(2.5 \leq X \leq 4) = \int_{2.5}^{4} p(x)\,\mathrm{d}x$$

Basics: Die Grundrechenarten

Gemeinsame Verteilung:

$$p(x, y)$$

	c	**d**	**e**	...
Dur	0.5	0.04	0.02	...
Moll	0.09	0.12	0.08	...

Randverteilung:

$$p(x) = \sum_y p(x, y)$$

Dur	0.7
Moll	0.3

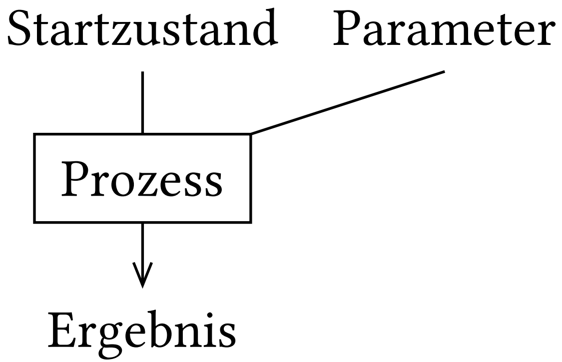
c	**d**	**e**	...
0.71	0.06	0.03	...

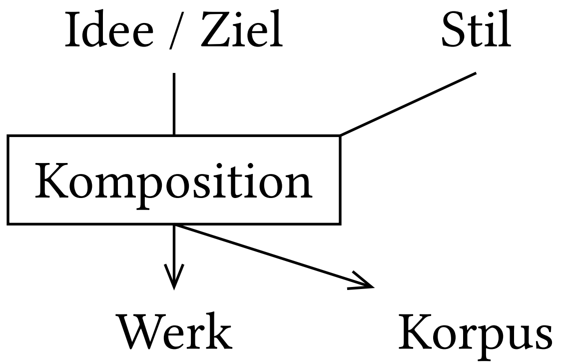
Bedingte Verteilung:

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)}$$

	c	**d**	**e**	...	
Dur	0.71	0.06	0.03	...	$= 1$
Moll	0.3	0.4	0.27	...	$= 1$

Inferenz


Startzustand
Parameter
Prozess
Ergebnis


Idee / Ziel
Stil
Komposition
Werk
Korpus

latente Variablen (z / θ)

$$\Big\downarrow \boxed{p(x \mid z)}$$

beobachtete Variablen (x)

Inferenz

$$p(z \mid x) = \frac{p(x, z)}{p(x)} = \frac{p(x \mid z) \cdot p(z)}{p(x)}$$

Der Satz von Bayes

x: beobachtete Variablen

z: latente Variablen

joint likelihood

prior

posterior

$$p(z \mid x) = \frac{p(x, z)}{p(x)} = \frac{p(x \mid z) \cdot p(z)}{p(x)}$$

evidence

Beispiel: Dur oder Moll?

Beobachtet:

Dur: 112
Moll: 36

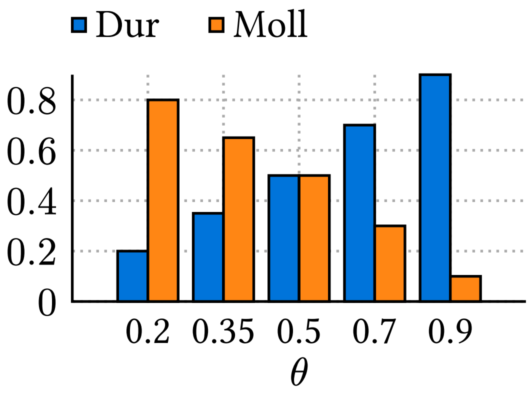
1 Dur
2 Dur
3 Moll
4 Dur
…

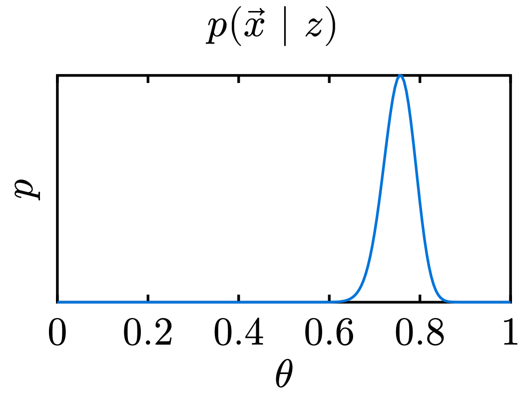
Modell (Prozess):

- wähle Wahrscheinlichkeit θ
- für jedes Stück:
  - wirf Münze mit Wk. θ
    - Kopf: Dur
    - Zahl: Moll

Likelihood:

$$p(\vec{x} \mid \theta) = \prod_i p(x_i \mid \theta) = \prod_i \begin{cases} \theta & (x_i = \text{Dur}) \\ 1 - \theta & (x_i = \text{Moll}) \end{cases}$$





$$\max_\theta p(\vec{x} \mid \theta) = \frac{112}{112 + 36} = 0.757$$

Make it Bayessch

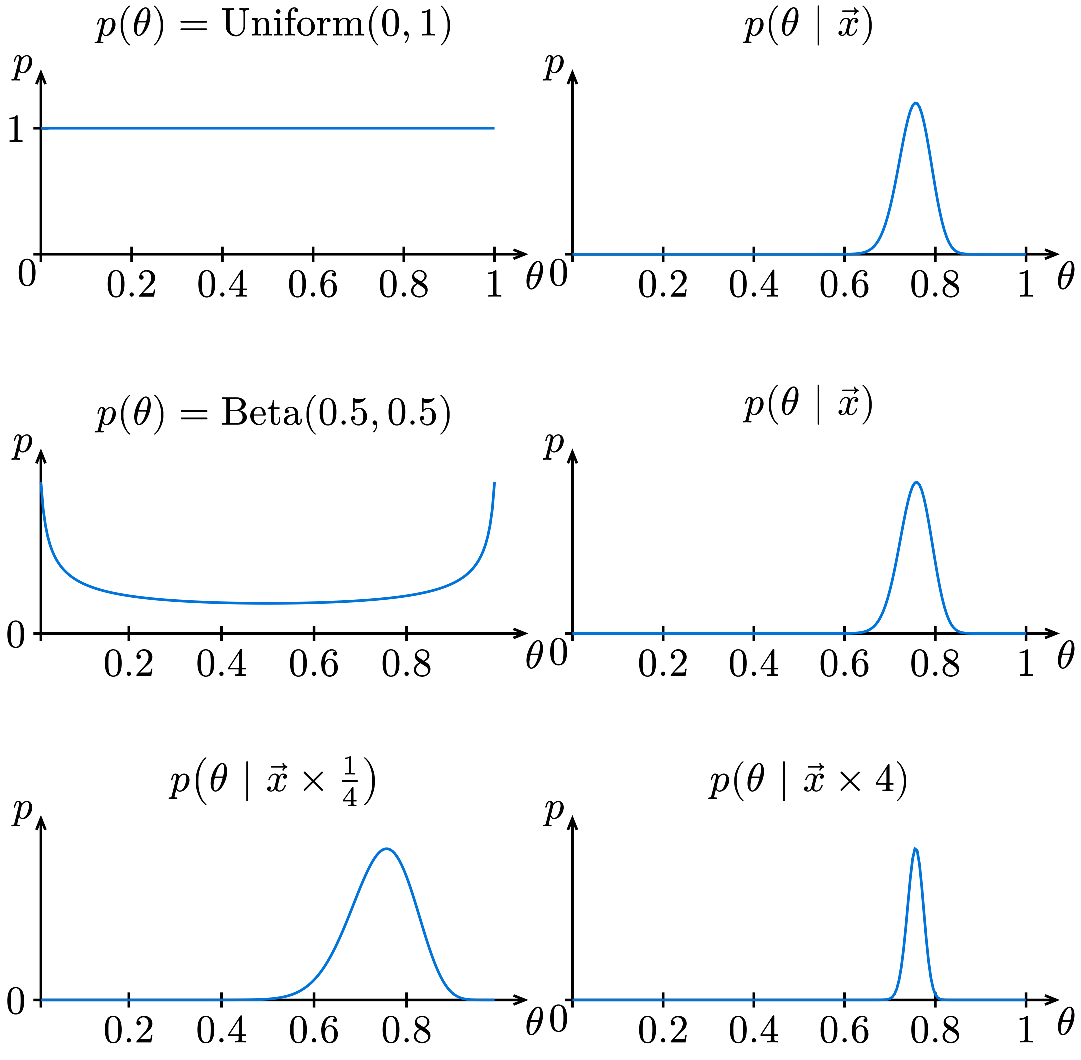
$$p(\theta \mid \vec{x}) = \frac{p(\vec{x} \mid \theta) \cdot p(\theta)}{p(\vec{x})}$$

Modell:

- wähle $\theta \sim \text{Uniform}(0, 1)$ (oder $\theta \sim \text{Beta}(0.5, 0.5)$)
- für jedes Stück i:
  - wähle $x_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$

Problem:

$$p(\vec{x}) = \int p(\vec{x}, \theta)\, \mathrm{d}\theta \text{ ???}$$



Probabilistic Programming

Ein Modell als Programm

Tonart wählen:

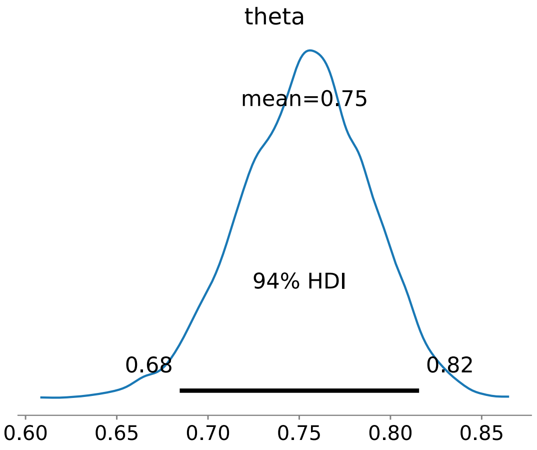
- wähle $\theta \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$
- für jedes Stück i:
  - wähle $x_i \sim \mathrm{Bernoulli}(\theta)$

```
def generate_keys(n):
  theta = uniform(0, 1)
  xs = []
  for i in range(n):
    maj = bernoulli(theta)
    xs.append("d" if maj else "m")
  return xs
```

Ein Modell als Programm

Tonart wählen:

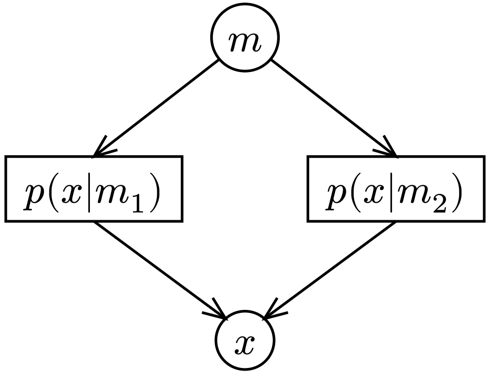
- wähle $\theta \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$
- für jedes Stück i:
  - wähle $x_i \sim \mathrm{Bernoulli}(\theta)$




```python
import pymc as pm
import arviz as az

keys = [0, 0, 1, 0, ...]

with pm.Model() as model:
  theta = pm.Uniform("theta", 0, 1)
  pm.Bernoulli("obs", p=theta, observed=keys)

with model:
  idata = pm.sample(5000, chains=2)

az.plot_posterior(idata)
```

Ausführliches Beispiel: Notebook

Modellvergleich



$$\text{Bayes Factor: } K = \frac{p(x \mid m_1)}{p(x \mid m_2)} = \frac{p(m_1 \mid x) \cdot p(m_2)}{p(m_2 \mid x) \cdot p(m_1)}$$

Weiterführendes Material

- PyMC – viel Material für Einsteiger
- pyro – Beispiele und Tutorials für variational Inference
- numpyro – komplexere Modelle, setzt etwas pyro voraus
- Bücher über Bayesian Statistics