

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИУ, Информатика и системы управления

КАФЕДРА ИУ7, Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6 *ПО ДИСЦИПЛИНЕ*

"Анализ алгоритмов"

| Студент | ИУ7-54Б (Группа) | (Подпись, дата) | |
|------------|---------------------|-----------------|--------------------------------------|
| Преподават | ель | (Подпись, дата) | <u>Л.Л. Волкова</u> (И.О.Фамилия) |

Содержание

| Введение | 3 | |
|---|----|--|
| 1. Аналитическая часть | 4 | |
| 1.1 Задача коммивояжера | 4 | |
| 1.2 Описание муравьиного алгоритма | 4 | |
| Вывод | 7 | |
| 2. Конструкторская часть. | 8 | |
| 2.1 Разработка алгоритмов | 8 | |
| Вывод | 8 | |
| 3. Технологическая часть. | 9 | |
| 3.1 Требования к программному обеспечению | 9 | |
| 3.2 Средства реализации | 9 | |
| 3.3 Реализация алгоритмов | 9 | |
| Вывод | 16 | |
| 4. Исследовательская часть. | 17 | |
| 4.1 Демонстрация работы программы | 17 | |
| 4.2 Технические характеристики | 17 | |
| 4.3 Время выполнения алгоритмов | 18 | |
| Вывод | 20 | |
| Заключение | 21 | |
| Список литературы | 22 | |

Введение

Данная лабораторная работа посвящена исследованию муравьиного алгоритма.

Имитация самоорганизации муравьиной колонии составляет основу муравьиных алгоритмов оптимизации — нового перспективно- го метода природных вычислений. Колония муравьев может рассматриваться как многоагентная система, в которой каждый агент (муравей) функционирует автономно по очень простым правилам. В противовес почти примитивному поведению агентов, поведение всей системы получается на удивление разумным.

Муравьиные алгоритмы серьезно исследуются европейскими учеными с середи- ны 90х годов. На сегодня уже получены хорошие результаты муравьиной оптимизации таких сложных комбинаторных задач, как: задачи коммивояжера, задачи оптимизации маршрутов грузовиков, задачи раскраски графа, квадратичной задачи о назначениях, оптимизации сетевых графиков, задачи календарного планирования и других. Особенно эффективны муравьиные алгоритмы при online-оптимизации процессов в распределенных нестационарных системах, например трафиков в телекоммуникационных сетях [1].

Цель данной работы является исследование особенностей работы муравьиного алгоритма.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- 1. Реализовать муравьиный алгоритм на основе теоретический знаний;
- 2. Получить практические навыки во время реализации;
- 3. Экспериментально подтвердить различия во временной эффективности работы муравьиного алгоритма при разных значениях коэффицента важности величины пути и коэффициента важности мощности феромона при помощи разработанного программного обеспечения на материале замеров процессорного времени;
- 4. Описать и обосновать полученные результаты в отчете о выполненной лабораторной работе, выполненном как расчётнопояснительная записка к работе.

1. Аналитическая часть

В данном разделе будет описана теоретическая основа муравьиного алгоритма.

1.1 Задача коммивояжера

Задача коммивояжера формулируется как задача поиска минимального по стоимости замкнутого маршрута по всем вершинам без повторений на полном взвешенном графе с п вершинами. Вершины графа являются городами, которые должен посетить коммивояжер, а веса ребер отражают расстояния или стоимости проезда. Эта задача является NP-трудной, и точный переборный алгоритм ее решения имеет факториальную сложность [2].

1.2 Описание муравьиного алгоритма

Муравьиные алгоритмы представляют собой вероятностную жадную эвристику, где вероятности устанавливаются, исходя из информации о качестве решения, полученной из предыдущих решений. Идея муравьиного алгоритма - моделирование поведения мура- вьёв, связанного с их способностью быстро находить кратчайший путь от муравейника к источнику пищи и адаптироваться к изменяющимся условиям, находя новый кратчайший путь.

Моделирование поведения муравьёв связано с распределением феромона на тропе – ребре графа в задаче коммивояжёра. При этом вероятность включения ребра В маршрут отдельного муравья пропорциональна количеству феромона на этом ребре, а количество откладываемого феромона пропорционально длине маршрута. Чем короче маршрут, тем больше феромона будет отложено на его рёбрах, следовательно, большее количество мура- вьёв будет включать его в синтез собственных Моделирование маршрутов. такого подхода, использующего положительную обратную связь, приводит к преждевременной схо- димости – большинство муравьёв двигается по локально оптимальному маршруту. Избе- жать этого можно, моделируя отрицательную обратную связь в виде испарения феромона.

С учётом особенностей задачи коммивояжёра, мы можем описать локальные правила поведения муравьёв при выборе пути.

- 1. Муравьи обладают «памятью». Поскольку каждый город может быть посещён толь- ко один раз, то у каждого муравья есть список уже посещённых городов. Обозначим через Ji,k список городов, которые необходимо посетить муравью k, находящемуся в городе i.
- 2. Муравьи обладают «зрением», которое определяет степень желания посетить город j, если муравей находится в городе i. Будем считать, что видимость обратно пропорциональна расстоянию между городами.
- 3. Муравьи обладают «обонянием», с помощью которого они могут улавливать след фе- ромона, подтверждающий желание посетить город ј из города і на основании опыта других муравьёв. Количество феромона на ребре (i,j) в момент времени t обозначим через тіj(t).
- 4. На основании предыдущих утверждений мы можем сформулировать вероятностно- пропорциональное правило, определяющее вероятность перехода k-ого муравья из города i в город j:

$$P_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{(\tau_{ij}(t))^{\alpha}(\eta_{ij}(t))^{\beta}}{\sum\limits_{l \in J(i,k)} (\tau_{il}(t))^{\alpha}(\eta_{il}(t))^{\beta}}, j \in J(i,k) \\ 0, j \notin J(i,k) \end{cases}$$
(1.1)

где $\tau_{ij}(t)$ – уровень феромона, $\eta_{ij}(t)$ – эвристическое расстояние, а α и β – константные параметры.

Выбор города является вероятностным, в общую зону всех городов бросается случай- ное число, которое и определяет выбор муравья. При $\alpha = 0$ алгоритм вырождается до жадного алгоритма, по которому на каждом шаге будет выбираться ближайший город.

5. При прохождении ребра муравей оставляет на нём некоторое количество феромо- на, которое должно быть связано с оптимальностью сделанного выбора. Пусть есть маршрут, пройденный муравьём k к моменту времени t, Т — длина этого маршрута, Lk(t) - цена текущего решения для k-ого муравья а Q — параметр, имеющий значение порядка цены оптимального решения. Тогда откладываемое количество феромона

$$\Delta \tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, (i,j) \in T_k(t) \\ 0, (i,j) \notin T_k(t) \end{cases}$$

$$\tag{1.2}$$

а испаряемое количество феромона

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p)\tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^{m} \Delta \tau_{ij,k}(t)$$
 (1.3)

где т – количество муравьёв в колонии [3].

1.3 Вариации муравьиного алгоритма

Выделяют четыре вариации муравьиного алгоритма.

- 1. Элитарная муравьиная система. Из общего числа муравьёв выделяются так на- зываемые «элитные муравьи». По результатам каждой итерации алгоритма произ- водится усиление лучших маршрутов путём прохода по данным маршрутам элитных муравьёв и, таким образом, увеличение количества феромона на данных маршрутах. В такой системе количество элитных муравьёв является дополнительным парамет- ром, требующим определения. Так, для слишком большого числа элитных муравьёв алгоритм может «застрять» на локальных экстремумах.
- 2. **Мах-Міп муравьиная система.** Добавляются граничные условия на количество феромонов (ттах, ттіп). Феромоны откладываются только на глобально лучших или лучших в итерации путях. Все рёбра инициализируются значением ттах
- 3. **Ранговая муравьиная система(ASrank).** Все решения ранжируются по степени их пригодности. Количество откладываемых феромонов для каждого решения взвешенно так, что более подходящие решения получают больше феромонов, чем менее подходящие.
- 4. Длительная ортогональная колония муравьёв (COAC). Механизм отложения феромонов COAC позволяет муравьям искать решения совместно и эффективно. Ис- пользуя ортогональный метод, муравьи в выполнимой области могут исследовать их выбранные области быстро и эффективно, с расширенной способностью глобального поиска и точностью.

Вывод

В аналитическом разделе была описана теоретическая основа муравьиного алгоритма, изучены различные его вариации со своими преимуществами и недостатками. Также описана задача коммивояжера.

2. Конструкторская часть.

В данном разделе будет приведены блок-схемы алгоритмов, описанных в аналитическом разделе.

2.1 Разработка алгоритмов

На рисунке 2.1 приведена обобщенная схема муравьиного алгоритма.

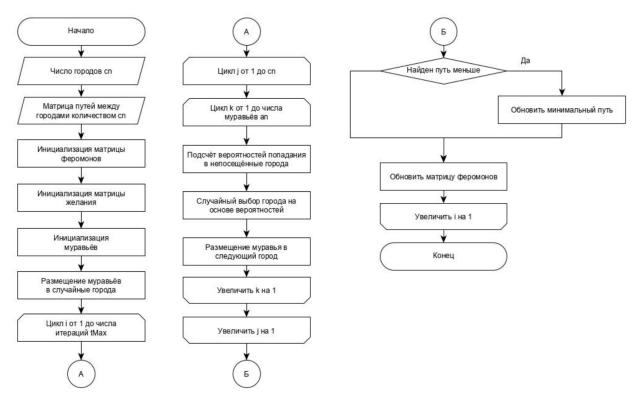


Рисунок 2.1: Схема муравьиного алгоритма

Вывод

В данном разделе были рассмотрены блок-схемы, которые позволяют перейти к технологической части.

3. Технологическая часть.

В данном разделе будут рассмотрены требования к разрабатываемому программному обеспечению, средства, использованные в процессе разработки для реализации поставленных задач.

3.1 Требования к программному обеспечению

Программное обеспечение должно реализовывать поставленную на лабораторную работу задачу. Интерфейс для взаимодействия с программой - командная строка. Пользователь должен иметь возможность вводить количество объектов, которые будут обрабатываться.

3.2 Средства реализации

Для разработки данной программы применён язык C++ [2] с функцией rdtsc() из библиотеки stdrin.h [3] для вычисления времени работы процессора, чтобы расширить знания в области данного языка программирования.

3.3 Реализация алгоритмов

В листингах 3.1-3.8 приведена реализация муравьиного алгоритма.

Листинг 3.1: Класс Муравья (Aco.hpp)

```
1. class Ant
2. {
3. public:
     explicit Ant(size t graph size);
5.
6. size_t path_len;
    std::vector<bool> visited;
    std::vector<size t> path;
8.
9.
       void visit city(const size t city, const size t
 cur path len,
      const size t cur path dist);
11.
12.
        void clear visits();
     void make_default_path();
bool is_visited(const size_t city) const;
13.
15. };
16.
```

Листинг 3.2: Методы класса Ant (Aco.cpp)

```
1. /// Ant
2.
3. Ant::Ant(size t graph size) : path len(0)
     for (size t i = 0; i < graph_size; i++)</pre>
5.
6.
7.
         path.push back(0);
         visited.push back(false);
8.
9.
10.
11.
    void Ant::visit city(const size t city, const size t
 cur_path_len,
13.
     const size t cur path dist)
14. {
15.
       path len += cur path dist;
        path[cur path len] = city;
16.
17.
        visited[city] = true;
18.
19.
20. void Ant::clear visits()
21.
        for (size t i = 0; i < visited.size(); i++)</pre>
22.
23.
            visited[i] = false;
24.
        path len = 0;
25.
     }
26.
27.
     void Ant::make default path()
28. {
29.
       path len = 0;
        visit_city(path[path.size() - 1], 0, 0);
30.
31.
32.
33. bool Ant::is visited(const size t city) const
34.
35.
        return visited[city];
36.
```

Листинг 3.3: Класс алгоритма ACO (Aco.hpp)

```
1. class ACO
2. {
3. private:
4. const std::vector<std::vector<int>> dist graph;
     const size t cities count;
6.
    std::vector<std::vector<double>> pher graph;
7.
8.
    std::vector<std::vector<double>> desire graph;
9.
10.
        std::vector <Ant> ants;
11.
       size t ants count;
12.
13.
        std::vector<double> paths probs;
14.
     double alpha = 0.5;
double rho = 0.5;
15.
16.
       size t tMax = 100;
17.
18.
       double beta = 1 - alpha;
19.
      const double Q = 5;
20.
21.
       const double ants factor = 1;
       const double init pher value = 1;
22.
23.
24. public:
25.
       size t min len = 0;
        std::vector<size t> min path;
26.
27.
28.
    explicit ACO(const Graph<int>& graph);
29.
30.
       void execute();
31.
       void change params(double alpha, double rho, size t tMax);
32.
33. private:
34.
       void make default state();
35.
       void init ants();
36.
       void init_pher_graph();
37.
        void pave_ants_paths();
       size_t get_next_city(const Ant& ant, const size t
38.
  cur_city);
39.
       void update min path();
40.
       void update pheromones();
41.
       void make default ants();
       size t select next city();
42.
        double get sum probabilities();
43.
44. };
```

Листинг 3.4: Методы инициализации и запуска алгоритма (Aco.hpp), Часть 1

```
1. // ACO
2.
3. ACO::ACO(const Graph<int>& graph) :
     dist graph(graph.graph), cities count(graph.size)
5. {
6.
     // init pher graph
     for (size t i = 0; i < cities count; i++)
7.
8.
9.
          std::vector<double> line;
10.
            for (size t j = 0; j < cities count; j++)</pre>
11.
                line.push back(init pher value);
12.
            pher graph.push back(line);
13.
        }
14.
15.
        // init desire_graph
16.
        for (size t i = 0; i < cities count; i++)
17.
18.
            std::vector<double> line;
19.
            for (size_t j = 0; j < cities_count; j++)</pre>
                 line.push back(dist graph[i][j] == 0 ? 0 :
20.
21.
                    1.0 / dist graph[i][j]);
22.
            desire graph.push back(line);
23.
24.
25.
        // init ants count
        ants count = cities count * ants factor;
26.
27.
        for (size t i = 0; i < ants count; i++)
28.
        {
29.
            Ant ant(cities count);
30.
            ants.push back(ant);
31.
32.
       // init paths probs
33.
34.
        for (size t i = 0; i < cities count; i++)</pre>
35.
            paths probs.push back(0);
36.
    }
37.
38. void ACO::execute()
39. {
40.
        make default state();
41.
        init pher graph();
42.
        init_ants();
43.
44.
        for (size t i = 0; i < tMax; i++)
45.
46.
            pave ants paths();
47.
            update min path();
48.
            update pheromones();
49.
            make default ants();
50.
51.
    }
52.
```

Листинг 3.5: Методы инициализации и запуска алгоритма (Aco.hpp), Часть 2

```
void ACO::change params(double alpha, double rho, size t
  tMax)
54. {
55.
        this->alpha = alpha;
        this->beta = 1 - alpha;
56.
57.
        this->rho = rho;
58.
        this->tMax = tMax;
59. }
60.
61. void ACO::make default state()
62. {
63.
       min len = 0;
64.
       min_path.clear();
65.
66.
67. void ACO::init ants()
68. {
        for (size t i = 0; i < ants count; i++)</pre>
69.
70.
71.
            ants[i].clear visits();
72.
            ants[i].visit city(rand() % cities count, 0, 0);
73.
74.
     }
75.
76. void ACO::init pher graph()
77.
78.
        for (size_t i = 0; i < cities_count; i++)</pre>
79.
            for (size t j = 0; j < cities count; j++)</pre>
80.
                pher graph[i][j] = init pher value;
81. }
```

Листинг 3.6: Основные функции муравьиного алгоритма (Aco.hpp), Часть 1

```
1. void ACO::pave ants paths()
2. {
3.
      for (size t i = 0; i < cities count - 1; i++)</pre>
4.
          for (size t j = 0; j < ants_count; j++)</pre>
5.
6.
7.
              const size t cur city = ants[j].path[i];
8.
              const size t next city = get next city(ants[j],
  cur city);
9.
              const int dist = dist graph[cur city][next city];
10.
11.
                 ants[j].visit city(next city, i + 1, dist);
12.
             }
13.
14.
15.
        for (size t j = 0; j < ants count; <math>j++)
16.
             size t i ind = ants[j].path[ants[j].path.size() -
17.
  1];
             size t j ind = ants[j].path[0];
18.
19.
             const int dist init city = dist graph[i ind][j ind];
             ants[j].path len += dist init city;
20.
21.
        }
22.
    }
23.
24. size t ACO::get next city(const Ant& ant, const size t
  cur city)
25.
    {
        double sumP = 0;
26.
27.
        for (size t i = 0; i < cities count; i++)</pre>
28.
29.
30.
             double pher factor = pow(pher graph[cur city][i],
  alpha);
             double desire factor =
  pow(desire graph[cur city][i], beta);
32.
             sumP += pher factor * desire factor;
33.
        }
34.
35.
        for (size t i = 0; i < cities count; i++)</pre>
36.
             if (i == cur_city || ant.is_visited(i))
37.
38.
                 paths probs[i] = 0;
39.
             else
40.
                 double pher factor =
41.
  pow(pher graph[cur city][i], alpha);
                 double desire factor =
  pow(desire graph[cur city][i], beta);
                 paths probs[i] = pher factor * desire factor /
43.
  sumP;
44.
45.
        return select next city();
46.
```

47. }

Листинг 3.7: Основные функции муравьиного алгоритма (Aco.hpp), Часть 2

```
void ACO::update min path()
49.
50.
         for (size t i = 0; i < ants count; i++)
51.
52.
             const size t cur len = ants[i].path len;
             if (cur len < min len || min len == 0)
53.
54.
55.
                 min len = cur len;
56.
                 min path = ants[i].path;
57.
58.
        }
59.
     }
60.
61.
     void ACO::update pheromones()
62.
         for (size t i = 0; i < cities count; i++)</pre>
63.
64.
             for (size t j = 0; j < cities count; j++)</pre>
65.
                 pher graph[i][j] *= (1 - rho);
66.
67.
         for (size t i = 0; i < ants count; i++)</pre>
68.
69.
             Ant& ant = ants[i];
70.
             double dt = Q / ant.path len;
71.
72.
             for (size t j = 0; j < cities count - 1; <math>j++)
73.
                 pher graph[ant.path[j]][ant.path[j + 1]] += dt;
74.
             pher graph[ant.path[cities count - 1]][ant.path[0]]
  += dt;
75.
76.
77.
78.
     void ACO::make default ants()
79.
80.
         for (size t i = 0; i < ants count; i++)</pre>
81.
82.
             ants[i].clear visits();
83.
             ants[i].make default path();
84.
85.
```

Листинг 3.8: Основные функции муравьиного алгоритма (Aco.hpp), Часть 3

```
size t ACO::select next city()
  87.
  88.
           double sum probabilities = get sum probabilities();
          double rand_num = ((double) rand() / (RAND MAX)) *
  89.
   sum probabilities;
  90.
        double total = 0;
          size t city = 0;
  91.
  92.
           for (size_t i = 0; i < cities count && total < rand num;</pre>
  93.
     i++)
  94.
           {
  95.
               total += paths probs[i];
  96.
               if (total >= rand_num)
  97.
                  city = i;
  98.
          }
  99.
  100.
         return city;
  101. }
  102.
  103. double ACO::get sum probabilities()
  104. {
  105.
          double sum probabilities = 0;
  106.
107.
         for (size_t i = 0; i < cities count; i++)</pre>
               sum probabilities += paths probs[i];
  108. return sum probabilities;
109.
```

Вывод

В данном разделе были рассмотрены требования к разрабатываемому программному обеспечению, средства, использованные в процессе разработки для реализации поставленных задач.

4. Исследовательская часть.

4.1 Демонстрация работы программы

Пример работы программы представлен на рисунке 4.1.

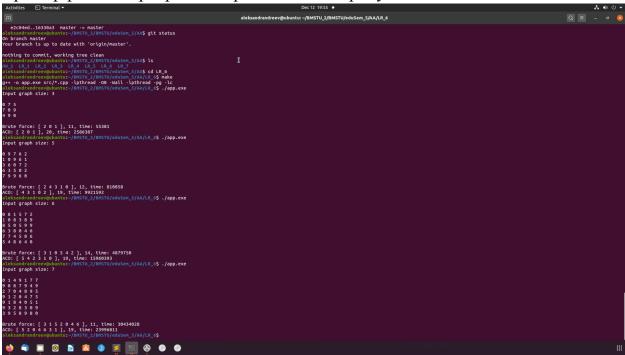


Рисунок 4.1: Демонстрация работы программы

4.2 Технические характеристики

В Таблице 4.2 приведены технические характеристики ЭВМ, на котором проводилось тестирование разрабатываемого программного обеспечения.

Таблица 4.2: Технические характеристики ЭВМ, на котором проводилось тестирование разрабатываемого программного обеспечения

| OC | Mac OS Mojave 64-bit |
|-----------|-----------------------|
| ОЗУ | 8 Gb 2133 MHz LPDDR3 |
| Процессор | 2,3 GHz Intel Core i5 |

4.3 Время выполнения алгоритмов

В Таблицах 4.3.1 и 4.3.2 приведена информация о времени выполнения алгоритмов на случайных данных в микросекундах. Каждый замер проводился 10 раз, результат усреднялся.

Таблица 4.3.1: Сравнение работы муравьиного алгоритма на различных параметрах (в микросекундах), Часть 1

| № | α | ρ | T _{max} | Минимальный путь |
|----|------|------|------------------|------------------|
| 1 | 0 | 0 | 100 | 16 |
| 2 | 0 | 0 | 200 | 16 |
| 3 | 0 | 0,25 | 100 | 18 |
| 4 | 0 | 0,25 | 200 | 16 |
| 5 | 0 | 0,5 | 100 | 16 |
| 6 | 0 | 0,5 | 200 | 16 |
| 7 | 0 | 0,75 | 100 | 16 |
| 8 | 0 | 0,75 | 200 | 16 |
| 9 | 0 | 1 | 100 | 16 |
| 10 | 0 | 1 | 200 | 16 |
| 11 | 0,25 | 0 | 100 | 16 |
| 12 | 0,25 | 0 | 200 | 16 |
| 13 | 0,25 | 0,25 | 100 | 16 |
| 14 | 0,25 | 0,25 | 200 | 16 |
| 15 | 0,25 | 0,5 | 100 | 19 |
| 16 | 0,25 | 0,5 | 200 | 16 |
| 17 | 0,25 | 0,75 | 100 | 16 |
| 18 | 0,25 | 0,75 | 200 | 16 |
| 19 | 0,25 | 1 | 100 | 14 |
| 20 | 0,25 | 1 | 200 | 12 |
| 21 | 0,5 | 0 | 100 | 16 |
| 22 | 0,5 | 0 | 200 | 18 |
| 23 | 0,5 | 0,25 | 100 | 16 |

Таблица 4.3.1: Сравнение работы муравьиного алгоритма на различных параметрах (в микросекундах), Часть 2

| № | α | ρ | T _{max} | Минимальный путь |
|----|------|------|------------------|------------------|
| 24 | 0,5 | 0,25 | 200 | 16 |
| 25 | 0,5 | 0,5 | 100 | 16 |
| 26 | 0,5 | 0,5 | 200 | 16 |
| 27 | 0,5 | 0,75 | 100 | 16 |
| 28 | 0,5 | 0,75 | 200 | 16 |
| 29 | 0,5 | 1 | 100 | 15 |
| 30 | 0,75 | 1 | 200 | 13 |
| 31 | 0,75 | 0 | 100 | 22 |
| 32 | 0,75 | 0 | 200 | 16 |
| 33 | 0,75 | 0,25 | 100 | 21 |
| 34 | 0,75 | 0,25 | 200 | 18 |
| 35 | 0,75 | 0,5 | 100 | 16 |
| 36 | 0,75 | 0,5 | 200 | 16 |
| 37 | 0,75 | 0,75 | 100 | 16 |
| 38 | 0,75 | 0,75 | 200 | 16 |
| 39 | 0,75 | 1 | 100 | 18 |
| 40 | 1 | 1 | 200 | 15 |
| 41 | 1 | 0 | 100 | 22 |
| 42 | 1 | 0 | 200 | 23 |
| 43 | 1 | 0,25 | 100 | 20 |
| 44 | 1 | 0,25 | 200 | 25 |
| 45 | 1 | 0,5 | 100 | 27 |
| 46 | 1 | 0,5 | 200 | 22 |
| 47 | 1 | 0,75 | 100 | 24 |
| 48 | 1 | 0,75 | 200 | 18 |

Таблица 4.3.1: Сравнение работы муравьиного алгоритма на различных параметрах (в микросекундах), Часть 3

| No | α | ρ | T _{max} | Минимальный путь |
|----|---|---|------------------|------------------|
| 49 | 1 | 1 | 100 | 22 |
| 50 | 1 | 1 | 200 | 21 |

Вывод

В данном разделе был проведен сравнительный анализ работы реализованного муравьиного алгоритма при различных параметрах, из которого можно сделать вывод, что при правильном подборе параметров муравьиный алгоритм находит оптимальный ответ за приемлимое время, намного отличающееся (на 99.6% быстрее на графе из 10 узлов) от времени нахождения пути полным перебором.

Заключение

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены принципы муравьиного алгоритма. Было проведено исследование работы алгоритма при различных параметрах, из которого можно сделать вывод, что при правильном подборе параметров муравьиный алгоритм находит оптимальный ответ за приемлимое время, намного отличающееся (на 99.6% быстрее на графе из 10 узлов) от времени нахождения пути полным перебором.

Список литературы

- [1] Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Алгоритмы: Построение и анализ, год выпуска 2019, тираж 1328, 700 страниц.
- [2] ISO/IEC JTC1 SC22 WG21 N 3690 «Programming Languages C++» [Электронный ресурс]. https://devdocs.io/cpp/ Дата обращения: 13.09.2021
- [3] Гасфилд, Строки, деревья и последовательности в алгоритмах. Информатика и вычислительная биология. Невский Диалект БВХ-Петербург, год выпуска 2003, типаж 900, 653 страницы.
- [4] Вычисление процессорного времени выполенения программы [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.tutorialspoint.com/python/time_clock.htm. Дата обращения: 13.09.2021