ФИ173 Андреев А.А. ИУ7-24Б 12 мая 2020

№1857. $\frac{du}{dt}$ – ?

$u = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, где $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = \sqrt{t^2+1} \end{cases}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{y}}}{\sin \frac{x}{\sqrt{y}} \cdot y} \cdot 6t + \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot x}{\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \frac{3t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3t^2}{\sqrt{t^2+1}}\right) \cdot \left(2 - \frac{t}{t^2+1}\right)$$

№1862 $z = x^y$, где $y = \varphi(x)$; $\frac{dz}{dx}$ – ? и $\frac{dz}{dy}$ – ?

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln x \cdot x^y$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\partial x} = \ln x \cdot x^y \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} + \ln x \cdot x^{s} \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

№1863. $z = f(u; v)$ $u = x^3 - y^2$, $v = e^{xy}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{df'(u,v)}{du} \cdot 2x + \frac{df(u,v)}{dv} \cdot ye^{xy}$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{z'}{\cancel{dv}\, v'} = \frac{df(u,v)}{du} \cdot 2y + \frac{df(u,v)}{du} \cdot xe^{xy}.$$

№1871. Показать, что $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ уд-ет

$$x\frac{dz}{dx} + y\cdot\frac{dz}{dy} = x\cdot y + z$$

$$\frac{dz}{dx} = x^0\cdot y + 1\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = y + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{dz}{dy} = x + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\cancel{x + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y + \varphi}$$

$$x\cdot y + x\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\cdot x + y\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = xy + z$$

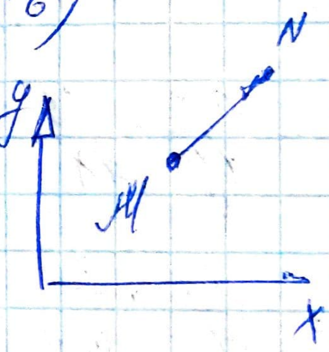
$$2\cdot xy + (x+y)\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 2xy + x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$2xy = 2xy$$

ч.т.д.

№1877. Найти произ-ю ф-ии $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в $M(1;2)$ в напр-ии к $N(4;6)$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 4xy + y^2\Big|_N = -1 \text{ и } \frac{dz}{dy} = -2x^2 + 2yx\Big|_M = 2$$



$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad \xi\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{5} = 1$

$\cos\beta = \frac{4}{5}$ $\quad$ Ответ: (1)

№1882. б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Точка, в которой произв-я ф-ии в любом направлении равна нулю. Найти стац. точку.

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{dz}{dy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot x^2 + y^3 - 3y = 0 \\ x^3 + 3 \cdot y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;0) - M(1;1)$$

стац. точки

№1883 Показать, что производная функции $z = \frac{y^2}{x}$ в любой точке эллипса $2x^2 + y^2 = c^2$ вдоль нормали к эллипсу равна нулю.

Решение:

$z = \frac{y^2}{x}$ $\quad 2x^2 + y^2 = c^2$ (1) $\quad$ Нормаль. $(2x_0; y_0)$

$a^2 = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{b = 1}$ $\quad$ Касательная: $2x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 1$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -y^2 \cdot \frac{1}{x^2}$ $\quad \frac{dz}{dy} = \frac{2y}{x}$ в $(x_0; y_0)$: $\frac{2y_0}{x_0}$

$\frac{dz}{dn} = \cos\alpha \cdot \frac{dz}{dx} + \cos\beta \cdot \frac{dz}{dy} = 0$

$\cos\alpha = 2x_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}}$

$\cos\beta = \frac{y_0}{\sqrt{4x_0^2 + y_0^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dn} = 0}$

ч.т.д.

№1888. $z = \ln\frac{y}{x}$ $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и $B(1;1)$

Найти угол между градиентами ф-ии z в A и B.

Решение:

$$\text{grad}\, z = \left(\frac{dz}{dx}; \frac{dz}{dy}\right) = \left(-\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$$ общий случай.

<u>Для точки A:</u>

$$\underset{A}{\text{grad}}\, z = (-2; 4)$$

<u>Для точки B:</u>

$$\underset{B}{\text{grad}}\, z = (-1; 1)$$

$$\cos\left(\underset{A}{\text{grad}}\, z; \underset{B}{\text{grad}}\, z\right) = \cos\varphi = \frac{-2(-1)+4}{2\sqrt{5}\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+1}\right)$$

Ответ:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+1}\right)$$