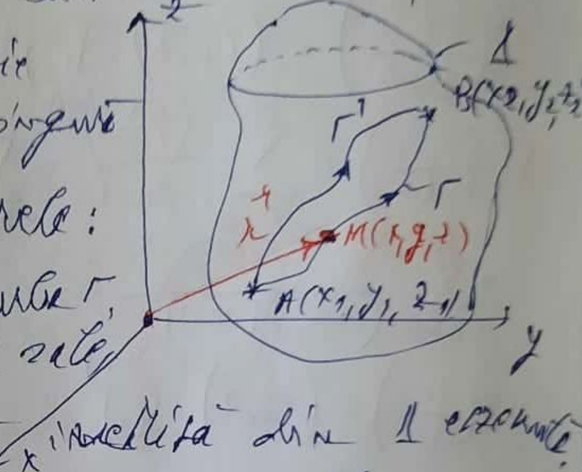
14.01.2022

Independența de drum a integralei curbilinii de tipul doi – cazul funcțiilor de trei variabile — An 1 ZI

$$I = \int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz$$

$P, Q, R : \Delta \subset \mathbb{R}^3$, continue și au derivate parțiale de ordinul 1 continue în Δ; $\Gamma \subset \Delta$

Domeniul Δ trebuie să fie simplu conex (dintr-o „singură bucată")



Se demonstrează următoarele:

1° $\oint_\Gamma \vec{V}\cdot d\vec{r}$ nu depinde de curba Γ, ci numai de extremitățile sale

$\Longleftrightarrow \oint \vec{V}\cdot d\vec{r}$, pe orice curbă închisă din Δ e zero.

$\vec{V} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\cdot\vec{k}$

$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$; $d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$

$\vec{V}\cdot d\vec{r}$ = produsul dintre vectorii $\vec{V}$ și $d\vec{r}$.

2° $(\exists)$ o funcție $F(x,y,z) : \Delta \to \mathbb{R}$, diferențiabilă pe Δ și a cărei diferențială să fie egală cu expresia de sub integrală:

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y,z);\quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y,z);\quad \frac{\partial F}{\partial z} = R(x,y,z)$$

3° Au loc relațiile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$P \to Q \to R$; $x \to y \to z$

4° Funcția $F(x,y,z)$ cu proprietatea:

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz = \vec{V}\cdot d\vec{r}$$

se determină din relația:

$$F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0,z_0)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t,z_0)\,dt+\int_{z_0}^{z}R(x,y,t)\,dt$$

5° Soluția ecuației diferențiale care provine din anularea diferențialei totale a unei funcții de trei variabile:

$$dF(x,y,z)=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=0$$

este dată de relația $F(x,y,z)=C$ unde F se obține din 4°.

6° $$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}dF(x,y,z)=$$

$$=F(x,y,z)\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)$$

(generalizarea formulei Leibniz-Newton la funcții de trei variabile.)

Exemplu. Să se calculeze integrala curbilinie de tipul 2, pe o curbă din $\mathbb{R}^3$ care nu intersectează axele și planele de coordonate.

$$\int_{(1,2,3)}^{(2,3,4)}\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\cdot dy+\left(-\frac{xy}{z^2}\right)\cdot dz$$

Verificăm dacă expresia de sub integrală este diferențiala unei funcții de trei variabile, $F(x,y,z)$

$$P(x,y,z)=1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z};\quad Q(x,y,z)=\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2};\quad R(x,y,z)=-\frac{xy}{z^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}\ \Rightarrow\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (1^\circ)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{x}{z^2};\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{x}{z^2}\ \Rightarrow\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\quad (2^\circ)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{y}{z^2};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}\ \Rightarrow\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\quad (3^\circ)$$

$\Rightarrow (\exists)\ F(x,y,z)$, diferențiabilă și ea este dată de expresia:

$$\underline{F(x,y,z)-F(x_0,y_0,z_0)} = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\cdot dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\cdot dt +$$

$$+\int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\cdot dt = \int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{1}{y_0}+\frac{y_0}{z_0}\right)\cdot dt + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{x}{z_0}+\frac{x}{t^2}\right)\cdot dt$$

$$+\int_{z_0}^{z} -\frac{xy}{t^2}\cdot dt = \left(1-\frac{1}{y_0}+\frac{y_0}{z_0}\right)\cdot(x-x_0) + \frac{x}{z_0}\cdot(y-y_0) - x\cdot\frac{1}{t}\Big|_{y_0}^{y}$$

$$+xy\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right) = \underline{x} - x_0 - \cancel{\frac{x}{y_0}} + \frac{x_0}{y_0} + \cancel{\frac{y_0}{z_0}\cdot x} - \frac{x_0 y_0}{z_0} + \frac{xy}{z_0} -$$

$$-\cancel{\frac{xy_0}{z_0}} - \frac{x}{y} + \cancel{\frac{x}{y_0}} + \frac{xy}{z} - \cancel{\frac{xy}{z_0}} = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} - x_0 + \frac{x_0}{y_0} - \frac{x_0 y_0}{z_0}$$

$$= \left(x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}\right) - \left(x_0 - \frac{x_0}{y_0} + \frac{x_0 y_0}{z_0}\right) = F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)$$

$$F(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}.$$

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z};\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y^2}+\frac{x}{z};\quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}$$

$\Rightarrow$ Soluția ecuației diferențiale:

$$\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\cdot dx + \left(\frac{x}{y^2}+\frac{x}{z}\right)\cdot dy - \frac{xy}{z^2}dz = 0,$$ este

dată de relația: $F(x,y,z) = C$

$$x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} = C$$

$$\Rightarrow I = \int_{(1,2,3)}^{(2,3,4)} dF(x,y,z) = F(x,y,z)\Big|_{(1,2,3)}^{(2,3,4)} = F(2,3,4) - F(1,2,3)$$

Exercițiu Rezolvare similară ex:

$$\int_{(-1,1,2)}^{(2,0,-1)} (y^2+2yz)\cdot dx + (2xy+2xz)\cdot dy + 2xy\cdot dz$$

Schimbarea de variabile la integrale duble

Ca și în cazul integralei simple, integrala dublă se poate calcula uneori mai ușor dacă se face o schimbare de variabile.

La integrala simplă: $J = \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) \cdot dx$

Prin schimbarea de variabilă notată prin $u(x) = t$, rezultau următoarele modificări:

→ variabila de integrare nouă era $t = u(x)$

→ $u'(x) \cdot dx = dt$

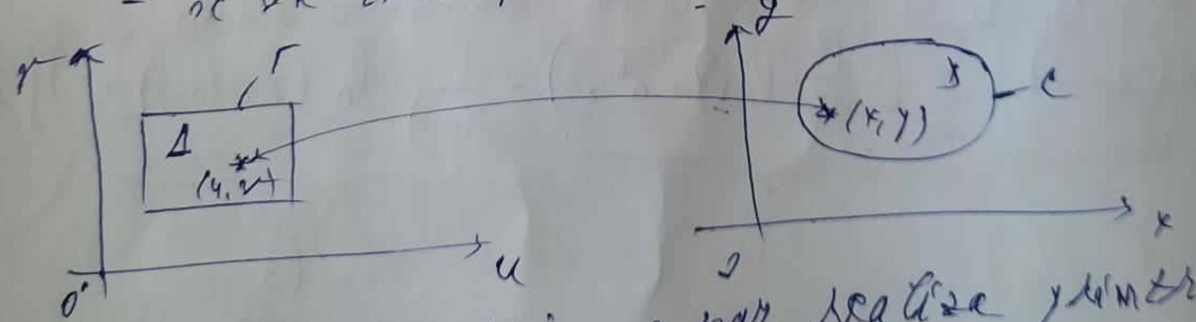
→ intervalul de integrare:

x	a	b
$t = u(x)$	$u(a)$	$u(b)$

$$\Rightarrow J = \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt = F(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a))$$

În mod corespunzător, și în cazul integralei duble (sau triple), printr-o schimbare de variabile, se vor modifica, în mod corespunzător, următoarele:

- domeniul de integrare D și frontiera sa, curba închisă C, într-un alt domeniu de integrare Δ și frontiera sa, curba Γ.
- se va transforma și expresia de sub integrală

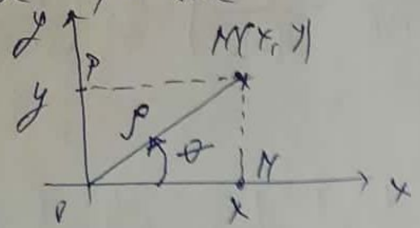


Aceste transformări se vor realiza printr-o „transformare regulată de coordonate", care se definește astfel:

- Fie Δ un domeniu compact în planul variabilelor (u,v), având drept frontieră curba Γ simplă, închisă și netedă sau o reuniune de astfel de curbe.

- Fie transformarea $T: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \Delta \cup \Gamma$,
de la planul (u,v) la planul (x,y).
Transformarea T se numește transformare regulată dacă:
  a) realizează o corespondență biunivocă între domeniul Δ cu frontiera sa curba Γ din planul (u,v) și domeniul D, cu frontiera sa curba C din planul (x,y).
  b) Funcțiile $\varphi(u,v)$ și $\psi(u,v)$ sunt continue și au derivate parțiale continue (de ordinul 1) în domeniul Δ și pe Γ
  c) Determinantul funcțional
$$J \overset{not}{=} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$
are semn constant în domeniul Δ și pe frontiera sa, Γ.
Transformarea T se numește directă dacă $J > 0$. Și inversă dacă $J < 0$.
În aceste ipoteze, putem enunța teorema de schimbare de variabile pt integrala dublă:
<u>Teoremă</u> Fie, în planul (u,v) domeniul compact Δ, având ca frontieră o curbă Γ simplă, închisă și netedă pe porțiuni și transformarea regulată T definită prin:
$$T: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} (u,v) \in \Delta \cup \Gamma.$$
Fie $D = T(\Delta)$ și $C = T(\Gamma)$ și $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe D. Atunci are loc relația:
$$\iint_D f(x,y) \cdot dx\,dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| \cdot du\,dv$$

Exemple. (1°) Transformarea de coordonate polare cu xOy în origine.



În $\Delta\, ONM$: $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{MN}{OM} = \dfrac{y}{\rho} \\ \cos\theta = \dfrac{ON}{OM} = \dfrac{x}{\rho} \end{cases}$

$$\Rightarrow T \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

(x, y) = coordonatele carteziene ale punctului M

(ρ, θ) = coordonatele polare ale lui M

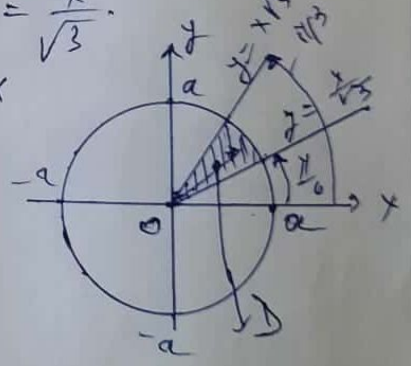
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cdot\cos^2\theta + \rho\cdot\sin^2\theta = \rho \geq 0.$$

$$J = \rho;\ |J| = \rho.$$

Aplicații

(1°) Să se calculeze $I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ unde D este limitat de curbele:

D: domeniul din primul cadran limitat de cercul $x^2+y^2=a^2$ și dreptele $y = x\sqrt{3}$ și $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.



$y = mx + n$; $n = 0$; m = panta $= tg\,\alpha$

$y = x\sqrt{3}$; $tg\,\alpha = \sqrt{3} \to \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

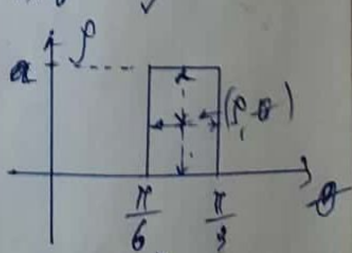
$y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\,\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\beta = \dfrac{\pi}{6}$

Fie $M(x,y)$; $M \in D$.

$OM = \rho \Rightarrow \Delta \begin{cases} \rho \in [0, a] \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \end{cases}$; $J = \rho$.

$T: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$; $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2$

$f(x,y) \longrightarrow f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$



$$\Rightarrow I = \iint_D (x^2+y^2)\cdot dx\,dy = \iint_\Delta \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta =$$

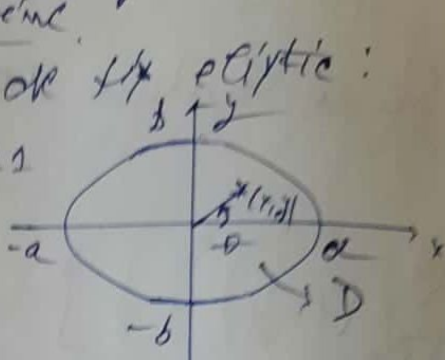
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\int_0^a \rho^3\,d\rho\right)\cdot d\theta = \int_0^a \rho^3 d\rho \cdot \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\theta = \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a \cdot \theta\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \dots = \frac{\pi a^4}{24}$$

Transformarea la coordonate polare generalizate cu polul în origine.

- Se utilizează pentru domenii de tip eliptic:

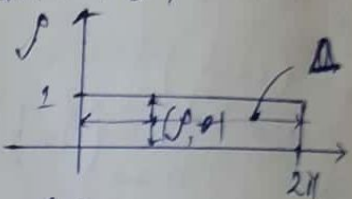
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ -(\mathcal{E});\quad D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$



$$T: \begin{cases} \frac{x}{a}=\rho\cos\theta \\ \frac{y}{b}=\rho\sin\theta \end{cases};\quad \begin{cases} x=a\rho\cdot\cos\theta \\ y=b\cdot\rho\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$$D \Rightarrow \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\le 1 \iff \rho^2\le 1;\quad \Delta: \begin{cases}\rho\in[0,1] \\ \theta\in[0,2\pi].\end{cases}$$

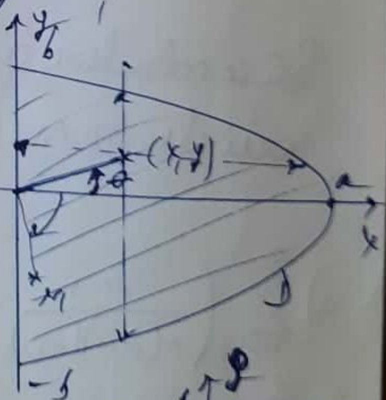
$$J=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta\end{vmatrix}=$$



$$=ab\rho\cos^2\theta+ab\rho\sin^2\theta=ab\cdot\rho;\quad |J|=ab\rho$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_\Delta f(a\rho\cos\theta,\, b\rho\sin\theta)\cdot ab\rho\cdot d\rho\, d\theta$$

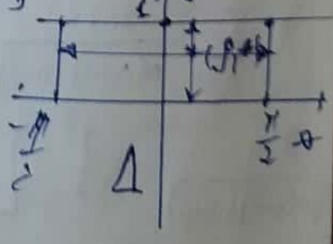
Exemplu: $I=\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dx\,dy$;



$$D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad x>0,$$

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta \\ y=b\rho\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \Delta: \begin{cases}\rho^2\le 1 \iff \rho\in[0,1]. \\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

$$J=ab\cdot\rho$$



$$I=\iint_\Delta \sqrt{1-\rho^2}\cdot ab\rho\cdot d\rho\, d\theta =$$

$$=\int_0^1\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab\rho\sqrt{1-\rho^2}\cdot d\theta\right)d\rho=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 ab\rho\sqrt{1-\rho^2}\cdot d\rho\right)d\theta=\int_0^1 ab\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

Aplicații recapitulative

(1°) Arătați că funcția $u(x,y) = -y^2 + e^{x^3-y^2}$ verifică ecuația: $2y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 6x^2y = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^3-y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^3-y^2) = e^{x^3-y^2} \cdot 3x^2 \,/\cdot 2y \qquad (e^{v(x)})' = e^{v(x)} \cdot v'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y + e^{x^3-y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^3-y^2) = -2y - 2y \cdot e^{x^3-y^2} \,/\cdot 3x^2$$

$$\Rightarrow 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 3x^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{6x^2y \cdot e^{x^3-y^2}} - 6x^2y - \cancel{6x^2y \cdot e^{x^3-y^2}} = -6x^2y$$

$$\Rightarrow -6x^2y + x^2y = 0 \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(2°) Să se calculeze diferențiala de ordinul 2 a funcției: $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + 2y^3 - 4x^2y^2 - x^2 + 2y^2 - 5xy + 6x - 4y + 6.$

în punctul $M(1,2)$

$$d^2f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^{(2)} f(x,y) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot (dy)^2\right)_{(1,2)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 2y^2 - 8xy^2 - 2x - 5y + 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 6y - 16y^2 - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x - 4y - 16xy - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x^2y + 4y - 5x - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x + 12y - 8x^2 + 4$$

Derivatele parțiale de ord 2 se calculează în punctul $M(1,2)$ și apoi se înlocuiesc în expresia lui $d^2f(1,2)$