LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 8

UNITATEA DE ÎNVĂŢARE NR.3

LOGICA PREDICATELOR

LOGICA PREDICATELOR

Să considerăm următorul exmplu de propoziţie în limbaj natural:

S: “Dacă George este om atunci George este muritor”

Dacă *A* reprezintă propoziţia:

“George este om”

iar *B* reprezintă:

“George este muritor”

atunci, în contextul **LP**, *S* devine:

$S: A \rightarrow B$

LOGICA PREDICATELOR

- *S* exprimă anumite caracteristici ale unei anumite persoane particulare, respectiv George.
- Cum putem însă exprima proprietăţi similare ale altor persoane, cum ar fi Socrate sau Petre?
- O soluţie ar fi să introducem tot atâtea simboluri propoziţionale diferite câţi oameni există! Dar acest lucru este imposibil în practică.

LOGICA PREDICATELOR

- Limbajul “Logicii Predicatelor” oferă o soluţie acestei probleme.
- Elementul de noutate al acestui limbaj este introducerea **variabilelor** şi a **cuantificatorilor.**

LOGICA PREDICATELOR

S: “Dacă George este om atunci George este muritor”

Presupunem că x este o variabilă care ia valori în mulţimea numelor de persoane, de exemplu: x = George sau x = Ion sau x = …

şi dacă “Om” şi “Muritor” sunt simboluri ce reprezintă proprietăţi, atunci putem reprezenta relaţia generală între aceste proprietăţi prin:

$$P : \mathrm{Om}(x) \rightarrow \mathrm{Muritor}(x)$$

LOGICA PREDICATELOR

Reprezentări, cum ar fi “Om(x)” sau “Muritor(x)”, care exprimă relaţii generale sub formă de proprietăţi, se numesc ***predicate***.

O ***formulă***, de exemplu P de mai sus, este o reprezentare care conţine predicate legate prin conectori logici.

LOGICA PREDICATELOR

Substituţia variabilei *x* cu constanta “George” transformă *P* în formula:

S : Om(George) → Muritor(George)

În plus, dacă variabila *x* ia valoarea “Socrate”, rezultatul va fi o nouă formulă ce reprezintă relaţia dinte Socrate şi proprietatea de a fi muritor. “Ion”, “George” şi “Petre” sunt ***constante*** în noul limbaj formal.

LOGICA PREDICATELOR

Predicatele pot conţine mai multe variabile, exprimând astfel nu numai proprietăţi, dar şi relaţii între mai multe obiecte.

De exemplu, dacă variabilele *x* şi *y* iau valori în mulţimea numerelor întregi şi dacă introducem predicatul *I*, "mai_mare", putem exprima una dintre relaţiile fundamentale între întregi:

$$I(X,Y) : \text{mai\_mare}(x, y)$$

care este interpretată drept "*x* este mai mare decât *y*".

Dacă în expresia de mai sus înlocuim *x* cu 5 şi *y* cu 3, avem evident o versiune particulară a lui *I*:

$$I(5, 3) : \text{mai\_mare}(5, 3)$$

care este adevărată pentru respectivele numere întregi.

LOGICA PREDICATELOR

Să considerăm formula:

$Q(x, y)$: zbor_$X(x, y)$

care este interpretată ca:

"Există un zbor al companiei *X* între oraşele *x* şi *y*."

Validitatea formulei este numai *parţială*, deoarece poate să nu existe un zbor al companiei *X* între New York şi Bucureşti, de exemplu.

În schimb, formula:

$P(x)$: Om$(x) \rightarrow$ Muritor(x)

are o validitate universală, deoarece se îndeplineşte pentru orice variabilă *x*.

LOGICA PREDICATELOR

În Logica Predicatelor, pe scurt **LPr**, validitatea generală sau parţială este reprezentată prin două simboluri speciale numite ***"cuantificatori"***

1. ***cuantificatorul universal***, notaţi prin "∀"
2. ***cuantificatorul existenţial***, notaţi prin "∃ "

Astfel, formula iniţială *P* devine:

$$P(x) : (\forall\ x)(\mathrm{Om}(x) \rightarrow \mathrm{Muritor}(x))$$

şi *Q* devine:

$$Q(x, y) : (\exists(x, y))\ \mathrm{zbor\_}X(x, y)$$

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

Un limbaj **LPr** conţine următoarele simboluri fundamentale:

(I) Simboluri logice:

(i) *Variabile x, y, z, …* ,x_0, y_0, z_0, …, x_i, …

(ii) *Conectori logici* $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(iii) *Virgule, paranteze* , ( )

(iv) *Cuantificatori* $\forall$, $\exists$

(II) Simboluri specifice:

(i) *Simboluri predicative P, Q,, R, …,* P_0, Q_0, R_0, …, P_1, …

(ii) *Simboluri pentru constante* *a, b, …,* a_0, b_0, …, a_1, …, a_2, …

(iii) *Simboluri funcţionale* *f, g,* f_0, g_0, f_1, …

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

Fiecare cuantificator este **dual** celuilalt: $\forall$ este echivalent secventei de simboluri $\neg \exists \neg$ şi $\exists$ este echivalent cu $\neg \forall \neg$.

Pentru formula $(\forall x)Q(x)$ avem, de exemplu,

$$(\forall x)Q(x) \leftrightarrow \neg(\exists x) \neg Q(x)$$

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

Exemplul 1: $\mathcal{L}_A$= (=, ≤, +, *, 0, 1) este un limbaj pentru aritmetică.

a) = şi ≤ sunt simboluri predicative binare (de aritate 2):

=(x, y) se citeşte “$x = y$”,

iar ≤(x, y) reprezintă “$x \leq y$”.

b) + şi * sunt predicate ternare (de aritate 3):

+(x, y, z) se citeşte “$x + y = z$”, iar *(x ,y, z) se citeşte “$x * y = z$”

c) 0 şi 1 sunt simboluri constante.

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

Un ***termen*** este definit inductiv astfel:

i. O constantă este un termen.

ii. O variabilă este un termen.

iii. Dacă *f* este o funcţie *n*-ară şi $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este un termen.

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

O ***formulă atomică*** sau ***atom*** este orice secvenţă de simboluri $P(t_1,\ldots, t_n)$, unde P este un simbol predicativ n-ar şi t_i este un termen, pentru orice $i=1,2, \ldots, n$.

O **formulă** este definită inductiv astfel:

i. Orice atom este o formulă.

ii. Dacă σ_1, σ_2 sunt formule, atunci $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$, $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$, $(\neg \sigma_1)$ şi $(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ sunt formule.

iii. Dacă v este o variabilă şi ϕ este o formulă, atunci $((\forall v)\varphi)$, $((\exists v)\varphi)$ sunt de asemenea formule.

iv. Numai secvenţele de simboluri formate conform regulilor (i), (ii), (iii) sunt formule.

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

Exemplul 2: Următoarele expresii sunt formule:

φ_1 : $(\forall y)\ (\exists x)\ [P(x, f(y)) \vee Q(x)]$

φ_2 : $(\forall\ y)\ (\exists\ x)\ [P(x) \vee Q(x, y) \rightarrow \neg(R(x))]$

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

O subsecvenţa t_1 de simboluri a unui termen t, astfel încât t_1 este un termen, se numeşte un ***subtermen*** al lui t.

O subsecevnţă φ_1 de simboluri a unei formule φ, astfel încât φ_1 este o formulă, se numeşte o ***subformulă*** a lui φ.

Exemplul 3:

i. dacă $f(x, y)$ este un termen, atunci x, y şi $f(x, y)$ sunt subtermeni ai lui $f(x,y)$.

ii. $P(x)$, $\neg R(x)$, $R(x)$, $P(x) \vee Q(x, y)$ sunt subformule ale formulei φ_2 din exemplul 2.

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

- O apariţie a unei variabile v într-o formulă φ se spune că este ***legată*** dacă există o subformulă ψ a lui φ care conţine variabila v şi începe cu $(\forall v)$ sau cu $(\exists v)$.
- O apariţie a unei variabile v într-o formulă se spune că este ***liberă*** dacă nu este legată.
- O variabilă v ce apare într-o formulă φ se spune că este ***liberă*** dacă are cel puţin o apariţie liberă în φ. Se spune că v este ***legată*** dacă nu este liberă.

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

Exemplul 4:

$$(\forall\, y)\ [P(x) \vee Q(x, y) \rightarrow \neg(R(x))]$$

- y este variabilă legată
- x este variabilă liberă

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

O ***frază*** sau ***formulă închisă*** este o formulă fără variabile libere.

Exemplul 5: Din formula $\varphi(x,y)$: $(x+y=x*y)$ putem forma formula închisă:

$$\sigma(x, y) : (\forall x)\ (\exists y)\ (x+y = x* y)$$

LIMBAJUL LOGICII PREDICATELOR

O ***mulţime substituţie***, sau mai simplu ***substituţie***, este o mulţime:

$$\theta = \{x_1/t_1 , x_2/t_2 , \ldots , x_n/t_n\}$$

unde x_i şi t_i, $1 \le i \le n$, sunt variabile şi termeni corespondenţi pentru care dacă $x_i = x_j$ atunci $t_i = t_j$, $1 \le j \le n$.

Exemplul 6: Dacă aplicăm substituţia $\theta = \{x/2 , y/2\}$ formulei:

$K : \varphi(x, y)$

în exemplul anterior, se obţine formula:

$K : (2+2 = 2*2)$

BAZELE AXIOMATICE ALE LPr

O variabilă **x este liberă pentru termenul t în formula σ**, formal *liber*(*x, t,* σ), dacă nici una din variabilele libere din *t* nu devine legată după substituţia lui *x* cu *t* pentru toate apariţiile libere ale lui *x* în σ.

Exemplul 7: Fie σ : (∀ *y*) *P*(*x, y*).

Atunci *x* nu este liberă pentru termenul *y* în σ deoarece, după aplicarea substituţiei *x / y* pentru apariţia liberă a lui *x*, variabila *y* a termenului *y* este legată.

Invers, *x* este liberă pentru termenul *z,* unde *z* este o variabilă diferită de *y* deoarece, după substituţia *x / z* în σ, variabilele termenului *z*, şi anume *z*, nu sunt legate. În plus, *y* nu este liberă pentru *y* în σ (σ nu conţine apariţii libere ale lui *y*).

BAZELE AXIOMATICE ALE LPr

Pentru formulele φ, τ, σ din **LPr**, axiomele **LPr** sunt:

1. $\varphi \to (\tau \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\tau \to \sigma)) \to ((\varphi \to \tau) \to (\varphi \to \sigma))$
3. $(\neg \varphi \to \neg\tau) \to (\tau \to \varphi)$
4. Dacă *liber*(x, t, φ), atunci formula:

   $(\forall x)\phi \to \varphi(x / t)$ este o axiomă.
5. Dacă x nu este liberă în formula φ, atunci formula:

   $(\forall x)(\varphi \to \tau) \to (\varphi \to (\forall x)\tau))$ este o axiomă.

La fel ca în **LP**, simbolul $\vdash$ reprezintă derivarea formulelor în sistemul axiomatic al **LPr**. Acest sistem axiomatic conţine două reguli:

1) Modus Ponens: $\varphi, \varphi \to \tau \vdash \tau$

2) Generalizare: $\varphi \vdash (\forall x)\varphi$

BAZELE AXIOMATICE ALE LPr

presupunem, de exemplu, că *s*-a derivat formula:

"Om(x) → Muritor(x)"

Atunci formula:

"($\forall$ x) (Om(x) → Muritor(x))"

este de asemenea derivată.

- Cu alte cuvinte, putem întotdeauna să obţinem validitatea unei formule generalizate ($\forall$ x)φ pe baza validităţii formulei φ. Anumite erori în discuţiile comune sunt generate de o aplicare incorectă a regulii generalizării.

De exemplu, spunem de multe ori că:

"toţi politicienii sunt escroci"

deoarece ştim că politicienii *a* şi *b* sunt escroci.

Cu toate acestea, acest enunţ nu este logic valid: pentru a putea generaliza, adică pentru a caracteriza toţi politicienii şi nu numai *a* şi *b*, trebuie să ne asigurăm că următoarea formulă este derivabilă în sistemul nostru axiomatic:

"politician(x) $\rightarrow$ escroc(x)"

Ceea ce (sperăm!) nu este cazul

BAZELE AXIOMATICE ALE LPr

Teoremă : *Dacă φ şi σ sunt formule ale* **LPr,** atunci următoarele formule sunt derivabile în **LPr:**

1. $(\forall x)(\varphi \to \sigma) \to ((\forall x)\varphi \to (\forall x)\sigma)$
2. $((\forall x)\varphi \to (\forall x)\sigma) \to (\exists x)(\varphi \to \sigma)$
3. $((\exists x)\varphi \to (\exists x)\sigma) \to (\exists x)(\varphi \to \sigma)$
4. $(\exists x)(\varphi \leftrightarrow \sigma) \to ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\varphi)$
5. $((\forall x)\varphi \vee (\forall x)\varphi) \to (\forall x)(\varphi \vee \sigma)$
6. $(\forall x)(\varphi \vee \sigma) \to ((\exists x)\varphi \vee (\forall x)\varphi)$
7. $(\exists x)(\varphi \vee \sigma) \leftrightarrow ((\exists x)\varphi \vee (\exists x)\sigma)$
8. $(\exists x)(\varphi \wedge \sigma) \to ((\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\sigma)$
9. $(\forall x)(\varphi \wedge \sigma) \to ((\forall x)\varphi \wedge (\exists x)\sigma)$
10. $(\forall x)(\varphi \wedge \sigma) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi \wedge (\exists x)\sigma)$
11. $(\exists y)(\forall x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\varphi$
12. $(\forall x)(\forall y)\ \varphi \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi$
13. $(\exists x)(\exists y)\ \varphi \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi$
14. $(\forall x)\varphi \leftrightarrow \varphi$ dacă nu există nici o apariţie liberă a lui x în φ
15. $(\exists x)\varphi \leftrightarrow \varphi$ dacă nu există nici o apariţie liberă a lui x în φ

BAZELE AXIOMATICE ALE LPr

Exemplul 8:

$(\forall x)[(x = 2x) \vee (x \neq 2x)]$ este adevărată

Cu toate acestea, formula:

$[(\forall x)(x = 2x) \vee (\forall x) (x \neq 2x)]$

NU este o formulă adevărată. Dacă ar fi adevărată, atunci cel puţin una din formulele:

$(\forall x)(x = 2x)$, $(\forall x)(x \neq 2x)$ ar trebui să fie adevărată. Acest lucru nu se întâmplă deoarece dacă $x =1$, $x = 2x$ nu este adevărată şi dacă $x = 0$, $x \neq 2x$ nu este adevărată.

În concluzie, trebuie să fim foarte atenţi la utilizarea comutativităţii şi distributivităţii cuantificatorilor deoarece pot apărea frecvent greşeli de raţionament.

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

Un ***literal*** este un atom sau un atom negat.

O secvenţă de simboluri de forma:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_k)(C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n)$$

unde C_i, $i = 1,\ldots, n$ sunt literali şi $x_1,\ldots, x_k$ sunt toate variabile ce apar în C_i, $1 \le i \le n$, se numeşte ***clauză***. Dacă $n = 0$, avem clauză vidă, care se notează prin $\square$.

Parantezele cuantificatorilor vor fi omise ori de câte ori poziţia variabilelor şi a cuantificatorilor este explicită.

O clauză poate fi scrisă echivalent şi în una din următoarele forme:

(a) $\forall x_1 \ldots \forall x_k (A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee \neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_l)$

(b) $\forall x_1 \ldots \forall x_k (A_1 \vee \ldots \vee A_m \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_l)$

(c) $\forall x_1 \ldots \forall x_k (A_1, \ldots , A_m \leftarrow B_1,\ldots , B_l)$

(d) $\{C_1, C_2,\ldots, C_n\}$, ***formă mulţime-teoretică,*** unde pentru orice $1 \le i \le n$, C_i este A_j, $1 \le j \le m$, sau C_i este $\neg B$, $1 \le j \le l$

(e) $A_1, \ldots , A_m \leftarrow B_1,\ldots , B_l$.

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

Exemplul 9: Următoarele secvenţe de simboluri sunt clauze:

- $\forall x \forall y \forall z (P(x) \vee \neg Q(x, y) \vee R(x, y, z))$
- $\forall x \forall y (\neg P(f(x, y), a) \vee Q(x, y))$

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

O frază ce rezultă prin eliminarea cuantificatorilor dintr-o clauză φ şi substituţia tuturor variabilelor cu constante este o ***instanţă de bază*** a lui φ.

De exemplu, fraza:

$$P(a) \vee Q(b) \vee \neg R(a, b)$$

este o instanţă de bază a clauzei:

$$\forall x \forall y (P(x) \vee Q(y) \vee \neg R(x, y))$$

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

O ***clauză Horn*** este o clauză de forma:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \ (A \leftarrow B_1, \ldots, B_l)$$

unde A, $B_1, \ldots, B_l$ sunt atomi şi $l \geq 1$. Atomii B_i, i = 1, …, *l*, sunt **premisele** clauzei Horn şi A este **concluzia**.

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

- Un ***scop*** este o clauză Horn fără concluzie, adică o clauză de forma:

  $\forall x_1 \ldots \forall x_k (\leftarrow B_1, \ldots, B_l)$

  Atomii B_i sunt ***subscopurile*** scopului.

- Un ***fapt*** este o clauză Horn fără presupuneri, adică este o clauză de forma:

  $\forall x_1 \ldots \forall x_k (A \leftarrow)$

- Un ***program logic*** este o mulţime finită de clauze Horn

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

Exemplul 10: Se dau următoarele propoziţii în limbaj natural:

- S_1: *Petre este hoţ*
- S_2: *Mariei îi place mâncarea*
- S_3: *Mariei îi place vinul*
- S_4: *Lui Petre îi plac banii*
- S_5: *Petre îl place pe* ***x*** *dacă lui* ***x*** *îi place vinul*
- S_6: ***x*** *poate fura* ***y*** *dacă* ***x*** *este hoţ şi dacă lui* ***x*** *îi place* ***y***

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

Prin introducerea constantelor “*Petre*”, “*Maria*”, “*vin*”, “*mâncare*” şi “*banii*”, a variabilelor *x* şi *y*, a predicatelor “*hoţ*”(aritate1), “*place*” (aritate 2) şi “*poate_fura*” (aritate 2) formăm următorul program:

C_1: *hoţ*(*Petre*) $\leftarrow$

C_2: *place*(*Maria*, *mâncare*) $\leftarrow$

C_3: *place*(*Maria*, *vin*) $\leftarrow$

C_4: *place*(*Petre*, *bani*) $\leftarrow$

C_5: *place*(*Petre*, *bani*) $\leftarrow$ *place*(*x*, *vin*)

C_6: *poate_fura*(*x*, *y*) $\leftarrow$ *hoţ*(*x*), *place*(*x*, *y*)

NOTAȚII ÎN PROGRAMAREA LOGICĂ

- Clauzele Horn C_1, C_2, C_3 şi C_4 sunt fapte.
- Clauzele Horn C_5 şi C_6 constituie partea procedurală a programului.

Să presupunem că dorim să aflăm dacă *Petre poate fura* (dacă există ceva ce *Petre poate fura*); avem de formulat următotul scop:

$G: \leftarrow poate\_fura(Petre, y)$

SEMINAR 8

Ex 1: Să se determine care din următoarele expresii sunt termeni, formule sau nici una din acestea:

a) Nicu
b) Matematician(x)
c) număr(6)
d) este_planetă(x)
e) (3+1)+10
f) $(\forall x)[$număr$(x) \wedge x=x+x]$
g) = [+(x,y),z]
h) $(x+y)+j^2$
i) cea mai bună carte
j) urăște(x,y) ∧ iubește(x,z)

SEMINAR 8

Ex 2: Să se găsească aparițiile libere de variabile în următoarele formule:

a) $(\forall x)P(x,y) \rightarrow (\forall z)Q(z,x)$

b) $Q(z) \rightarrow \neg (\forall x) (\forall y)P(x,y,a)$

c) $(\forall x)P(x) \land (\forall y)Q(x,y)$

SEMINAR 8

Ex 3: Să se determine aparițiile libere ale variabilelor din următoarele formule:

a) $(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)[x>y \land y>z] \rightarrow (\exists w)[w>w]$

b) $(\exists x)(este\_rosu(x)) \lor (\forall y)\ [este\_albastru(y) \lor este\_galben(x)]$

c) $x+x=x+x$

d) $(\exists y)[x+x=x+x]$

e) $(\exists x)\ (\exists y)[este\_profesor(x,y) \land invatat(x,y,z)]$

SEMINAR 8

Ex 4: Folosind simbolul aritmetic “<”(mai mic decât) și limbajul LPr, să se formuleze următoarele afirmații:

a) Există un număr x mai mic decât 5 și mai mare ca 3.

b) Pentru orice număr x există un număr y mai mic ca x.

c) Pentru orice număr x există un număr y mai mare decât x.

d) Pentru orice două numere x și y suma $x+y$ este egală cu suma $y+x$.

e) Pentru orice număr x există un număr y, astfel încât pentru orice z pentru care, dacă diferența $z\text{-}5$ este mai mică decât y, atunci diferența $x\text{-}7$ este mai mică decât 3.

SEMINAR 8

Ex 5: Să se determine forma mulțime teoretică a următoarelor propoziții:

a) Lui Ion îi place mâncarea.
b) Merele sunt mâncare.
c) Păsările sunt mâncare.
d) Orice poate fi mâncat fără a omorî pe cineva este mâncare.
e) Barbu mănâncă și este încă viu.
f) Maria manâncă tot ceeea ce mănâncă Barbu.

SEMINAR 8

Ex 6: Să presupunem că dragonii există în realitate și că tocmai am capturat un dragon mare. Să se formuleze următoarele afirmații din limbajul cotidian folosind clauze Horn.

a) Orice dragon care trăiește la grădina zoologică nu este fericit.
b) Orice animal care întâlnește oameni politicoși este fericit.
c) Oamenii care vizitează gradina zoologică sunt politicoși.
d) Animalele care traiesc la gradina zoologică întâlnesc oameni care o vizitează.

SEMINAR 8

Ex 7: Să se exprime următorele propoziții din limbajul cotidian sub formă de clauze Horn:

a) x este mama lui y dacă x este femeie și x este un părinte a lui y.

b) x este tatăl lui y dacă x este bărbat și x este un părinte a lui y.

c) x este om dacă părintele lui este om.

d) x este om dacă tatăl lui este om.

e) Nimeni nu este propriul lui părinte.