CURS 1

ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI SISTEME DINAMICE

Bibliografie:

1. V. Barbu, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

2. P. Băzăvan, *Sisteme dinamice,* ro.scrib.com/document/226939230/ sisteme + dinamice.

3. C. G. Lefter, *Ecuaţii diferenţiale şi sisteme dinamice*, Editura Alexandru Myller, Iaşi, 2006.

4. V. Gârban, *Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii cu derivate parţiale – Curs pentru învăţământul la distanţă*, Editura Renaissance, Bucureşti, 2010.

5. H. Tudor, I. Radomir, *Matematici speciale: curs practic pentru ingineri*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2007.

6. A. Niță, *Ecuații diferențiale,* Editura Matrixrom, București, 2020.

7. A. Niță, A. Niță, *Ecuații și sisteme diferențiale,* Editura Matrixrom, București, 2020.

8. https://cismasemanuel.files.wordpress.com/2018/09/matematica-clasa-xii-m1.pdf

Cerințe examen:

Examen scris (test grilă), cu subiecte de teorie și aplicații:	30%
Activitate seminar/ laborator:	40%
Lucrare de control cu subiecte de teorie și aplicații:	20%
Prezența la activitățile didactice:	10%

Standard minim de performanță:

1. Însușirea cunoștințelor de bază
2. Obținerea unui procent de minim 50% din nota finală
3. Activitate în timpul semestrului.

Capitolul 1. Ecuații diferențiale de ordinul întâi

1.1. Noțiuni introductive

Modelarea matematică a multor fenomene din diverse domenii ale științei şi tehnicii utilizează noțiunile și rezultatele din teoria ecuațiilor diferențiale, domeniu al matematicii care studiază dependența dintre o funcţie sau mai multe funcţii (de una sau mai multe variabile) şi derivatele lor, numită generic ecuaţie diferenţială, respectiv sistem de ecuaţii diferenţiale.

Amintesc două probleme în a căror rezolvare se apelează la ecuaţii diferenţiale:

1. *Modelarea oscilaţiilor libere ale unui resort*, cazul unui pendul. Ecuaţia modelului este:

$$l \cdot x''(t) + g \cdot \sin x(t) = 0$$

unde $x(t)$ este unghiul dintre braţul pendului de lungime *l* și verticala la momentul *t*, *g* este accelerația gravitaţiei, iar $x''(t)$ este derivata de ordinul doi a funcţiei $x(t)$ în raport cu variabila *t*.

2. *Modelarea relaţiei cerere şi ofertă în economia de piaţă*. Ecuaţia modelului, cu anumite ipoteze, este:

$$a \cdot \left(p(t) + c \cdot p'(t)\right) + b - \alpha - \beta \cdot p(t) = 0,$$

unde $p(t)$ este preţul unui produs la momentul *t*, $p'(t)$ este derivata funcţiei $p(t)$ în raport cu

variabila *t*, iar *a, b, c,* α și β sunt constante.

Definiția 1 (D1). Se numeşte **ecuaţie diferenţială de ordinul întâi** o ecuaţie având *forma generală*:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

unde *F* este o funcţie reală definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^3$, având drept argumente: variabila independentă $x \in I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, funcţia necunoscută $y = y(x)$ şi derivata sa de ordinul întâi $y' = y'(x)$, care stabileşte ordinul unu/ întâi al ecuaţiei.

Relaţia (1) este forma *implicită* a ecuaţiei diferenţiale. Dacă ecuaţia (1) se poate scrie:

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

atunci relaţia (2) este forma *explicită* sau forma *normală* a ecuaţiei diferenţiale, unde funcţia *f* este o funcţie reală de două variabile reale, definită pe o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$.

De reținut. O ecuație diferențială de ordinul I are forma generală sau forma explicită.

Întrebare. Care din cele 2 exemple de mai sus conține o ecuație diferențială de ordinul I și sub ce formă?

Ca la orice ecuaţie, scopul rezolvării unei ecuaţii diferenţiale constă în determinarea soluţiilor ei. Dar ce înseamnă soluţie a unei ecuaţii diferenţiale? Răspunsul este dat de următoarele definiţii din care se observă că o ecuație diferențială poate avea mai multe tipuri de soluții față de soluțiile unei ecuații algebrice cunoscute din liceu.

D2. Se numeşte *soluţie* sau *integrală* a ecuaţiei diferenţiale (1), respectiv (2), o funcţie $y = \varphi(x)$ definită şi derivabilă pe *I*, astfel încât

$$F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big) = 0, \forall x \in I,$$

respectiv

$$\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big), \forall x \in I.$$

Graficul unei soluţii se numeşte *curbă integrală* a ecuaţiei diferenţiale.

Exemplu.

Ecuația y'= y + x, $x \epsilon \mathbb{R}$, este o ecuație diferențială de ordinul I sub forma explicită, unde

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = y + x.$$

Forma implicită a sa este y'- y - x = 0, $x \epsilon \mathbb{R}$, unde

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F(x, y, y') = y' - y - x.$$

O soluție a sa este $y = e^x - x - 1, x \epsilon \mathbb{R}$.
Funcția $y(x) = Ce^x - x - 1$, unde C este o constantă reală arbitrară, reprezintă o familie de soluții a ecuației date.

O ecuaţie diferenţială poate avea una sau mai multe soluţii, care să se poată deduce din aşa numita *soluţie generală*, în anumite condiţii. În acest caz, soluţiile obţinute din soluţia generală se numesc soluţii *particulare*. Astfel, soluţia generală a ecuaţiei (1), respectiv ecuaţiei (2), dacă există, are forma *y* = $\varphi(x, C)$, unde *C* este o constantă reală, având proprietatea:

$$F\big(x, \varphi(x, C), \varphi'(x, C)\big) = 0, \forall x \in I, \forall C \in \mathbb{R}, \text{ respectiv}$$

$$\varphi'(x, C) = f\big(x, \varphi(x, C)\big), \forall x \in I, \forall C \in \mathbb{R}.$$

Pentru o valoare particulară C_0 a constantei *C* se obţine din soluţia generală soluţia particulară y_0=$\varphi(x, C_0)$.

Nu orice ecuaţie diferenţială admite o soluţie generală. Chiar dacă o ecuaţie diferenţială are o soluţie generală, pot exista şi soluţii ale ei care nu se pot obţine din soluţia generală prin particularizarea constantei şi care se numesc soluţii *singulare*.

Exemplu.

Ecuația $y = xy' + {y'}^2$ are ca soluție generală familia dreptelor $y = Cx + C^2, x \in \mathbb{R}$ și $C = constant$ă $real$ă.
Verificare y' = C, $y = Cx + C^2$, soluția generală e dată de familia de drepte.

Ecuația admite și soluția $y = -\frac{1}{4}x^2, x \epsilon \mathbb{R}$, care reprezintă o parabolă și nu se obține din soluția generală pentru nicio valoare a lui C, fiind, deci o soluție singulară a ecuației.

Verificare $y' = -\frac{1}{2}x$

y = x y'+ y'2 = $x\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{-2x^2+x^2}{4} = -\frac{x^2}{4} = y.$

$\breve{\mathscr{C}} + \mathscr{C} = \mathscr{C};\ \lambda\mathscr{C} = \mathscr{C}$, pentru $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Deci, din cele de mai sus, o ecuație diferențială poate avea 3 tipuri de soluții:

1. *Soluție generală* (implică constanta C reală);
2. *Soluție particulară* (implică o condiție inițială și se deduce din soluția generală folosind această condiție);
3. *Soluție singulară* (soluție intuită matematic, care nu are nicio legătură cu celelalte tipuri).

Problema Cauchy

Fie ecuaţia diferenţială de forma (1) sau forma (2) şi *condiţia iniţială* $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in \mathbb{R}$. În aceste condiţii, problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială constă în a determina o soluţie particulară a ecuaţiei care să verifice condiţia iniţială.

Din punctul de vedere geometric, problema Cauchy constă în determinarea acelei soluţii a ecuaţiei diferenţiale, de forma (1) sau forma (2), a cărei curbă integrală trece prin punctul $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Pentru o ecuaţie diferenţială oarecare există cel puţin o soluţie?

Răspunsul a fost dat pentru prima dată de matematicianul francez Cauchy (1820), care a demonstrat existenţa soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale, în anumite condiţii date de următoarea teoremă.

Teorema de existenţă şi unicitate

Fie ecuaţia diferenţială $y' = f(x,y)$ şi condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde:

F : $A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, a > 0, b > 0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}\}$.

Dacă:

i) f este continuă pe A,

ii) f îndeplineşte condiţia lui Lipschitz în raport cu variabila y, (adică există o constantă $L>0$ astfel încât pentru $\forall(x, y_1) \in A$ şi $\forall(x, y_2) \in A$ rezultă $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$)

atunci ecuaţia diferenţială are o soluţie unică, $y = y(x)$ care verifică condiţia iniţială şi $x \in [x_0 - h, x_0 + h], h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = sup\{f(x,y) | (x,y) \in A\}$.

Exemplu
Să se găsească soluția ecuației diferențiale $y' = \cos x + x$, care trece prin punctul (0,2).
Rezolvare.
Vrem să obținem soluția generală care conține o constantă reală C.
Avem: $y = \int_0^x (\cos t + t)dt + C = \sin t|_0^x + \frac{1}{2}t^2\Big|_0^x + C = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$ (soluția generală).
Pentru $x = 0 \Longrightarrow y(0) = 2$, adică C = 2.
Deci soluția particulară căutată este $y = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + 2, x \in \mathbb{R}$.

OBS.
Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale de ordinul I depinde de o constantă reală arbitrară. Se poate arăta și invers, că orice familie de curbe plane continuă și derivabilă parțial pe A în raport cu x și y, verifică o ecuație diferențială de ordinul I.

În continuare sunt prezentate principalele **tipuri de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi** şi **metodele de rezolvare sau integrare**, în ipoteza că sunt îndeplinite condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate, care asigură existenţa soluţiilor.

1.2. Ecuații care provin din anularea unei diferențiale totale

Fie $F: I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, I *mulțime deschisă*, F(x, y) funcție reală de 2 variabile reale.

Dacă F este o funcție diferențiabilă, atunci *diferențiala ei de ordinul întâi* sau *diferențiala totală* este o expresie de forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x,y),$$

unde $\frac{\partial F}{\partial x}$ *și* $\frac{\partial F}{\partial y}$ sunt derivate parțiale de ordinul întâi ale lui F.

Ecuația diferențială de ordinul întâi care provine din **anularea diferențialei totale** are forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3}$$

unde P și Q sunt continue și au derivate parțiale de ordinul întâi continue într-un domeniu I din $\mathbb{R}^2$.

Pentru a rezolva ecuația (3) obținută prin **anularea diferențialei totale,** trebuie determinată funcția F = F(x, y), diferențiabilă și a cărei diferențială este

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = dF(x,y)\ .$$

Folosind notațiile $P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ *și* $Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, rezultă că $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dF(x,y)$ și conform (3) se obține d F(x, y) = 0.

Ce condiție se impune pentru ca $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ să fie o diferențială totală a unei funcții?

Răspunsul este dat de condiția necesară și suficientă :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

numită *condiția de integrabilitate completă*.

Într-adevăr,

$$P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \text{ și } Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

și

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Conform criteriului lui Schwarz (dacă funcția F are derivate parțiale mixte de ordinul 2 continue atunci acestea sunt și egale), deoarece $\frac{\partial P}{\partial y}$ *și* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue pe I, rezultă

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Rezultă că funcția F = F(x, y) se obține din relația (conform unor proprietăți ale integralei curbilinii de tipul 2):

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \quad (x_0\,,y_0) \in I.$$

Deci, soluția ecuației (3) se exprimă prin $F(x,y) = C, C\ constant$ă $real$ă, sub forma implicită sau dacă se poate rezolva în raport cu y, se obține forma explicită a soluției $y = \varphi(x,C)$.

Din cele de mai sus, rezultă că algoritmul pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi, care provine din **anularea unei diferențiale totale** (3) cuprinde următorii paşi:

Pasul 1. Se identifică funcţiile *P* şi *Q* din expresia ecuaţiei diferenţiale;

Pasul 2. Se verifică dacă are loc *condiția de integrabilitate completă*:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y);$$

Pasul 3. Se calculează F = F(x, y) din relația

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt, \quad (x_0\,,y_0) \in I;$$

Pasul 4. Se scrie $F(x,y) = C, C\ constant\breve{a}\ real\breve{a}$, care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (3) de ordinul întâi.

Exemplu.

Să se determine soluția generală a ecuației:

$$\left(\sin y - \frac{2y}{x^3}\right) dx + \left(x\ \cos y + \frac{1}{x^2}\right) dy = 0.$$

Rezolvare.

Pasul 1. Se identifică funcţiile *P* şi *Q* din expresia ecuaţiei diferenţiale:

$$P(x,y) = \sin y - \frac{2y}{x^3} \quad \text{și} \quad Q(x,y) = \ x\ \cos y + \frac{1}{x^2};$$

Pasul 2. Verificăm *condiția de integrabilitate completă:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \cos y - \frac{2}{x^3} \ \text{ și } \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \cos y - \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y);$$

Pasul 3. Calculăm:

$$\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sin y_0 - \frac{2y_0}{t^3}\right) dt + \int_{y_0}^{y} \left(x\ \cos t + \frac{1}{x^2}\right) dt =$$

$$= \sin y_0 \cdot t\Big|_{x_0}^{x} - 2 \cdot y_0 \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot t^2}\right)\Big|_{x_0}^{x} + x \cdot \sin t\Big|_{y_0}^{y} + \frac{1}{x^2} \cdot t\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= (x - x_0) \cdot \sin y_0 - y_0 \cdot \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{{x_0}^2}\right] + x \cdot [\sin y - \sin y_0] + \frac{1}{x^2} \cdot [y - y_0] =$$

$$= x \cdot \sin y_0 - x_0 \cdot \sin y_0 + \frac{y_0}{x^2} - \frac{y_0}{{x_0}^2} + x \cdot \sin y - x \cdot \sin y_0 + \frac{y}{x^2} - \frac{y_0}{x^2} =$$

$$= \left(x \cdot \sin y + \frac{y}{x^2}\right) - \left(x_0 \cdot \sin y_0 + \frac{y_0}{{x_0}^2}\right) = F(x,y) - F(x_0,y_0);$$

Rezultă, prin identificare: $\qquad F(x,y) = x \cdot \sin y + \frac{y}{x^2}$.

Pasul 4. Soluția ecuației este:

$$x \cdot \sin y + \frac{y}{x^2} = C \Leftrightarrow \ F(x,y) = C \Rightarrow \mathrm{d\ F(x,y)} = \ \mathrm{d\ C} = 0.$$

Verificare.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin y - \frac{2y}{x^3}\,; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\ \cos y + \frac{1}{x^2};$$

$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \Leftrightarrow \left(\sin y - \frac{2y}{x^3}\right) dx + \left(x\ \cos y + \frac{1}{x^2}\right) dy = 0$ adică ecuația inițială.

1.3. Ecuații cu variabile separate

O ecuație diferențială de ordinul întâi este **cu variabile separate**, dacă în ecuația (3)

P(x, y) = P(x) și Q(x, y) = Q(y) având forma generală:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \qquad (4)$$

unde $P: [a, b] \to \mathbb{R}, Q: [c, d] \to \mathbb{R}$, continue.

Din cele de mai sus, rezultă că algoritmul pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul întâi **cu variabile separate** (4) cuprinde următorii pași:

Pasul 1. Se identifică funcțiile *P* și *Q* din expresia ecuației diferențiale;

Pasul 2. C*ondiția de integrabilitate completă* este îndeplinită automat deoarece*:*

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(P(x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(Q(y)\big) = 0.$$

Pasul 3. Se calculează F = F(x, y) din relația:

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt, \quad (x_0\,, y_0) \in I;$$

Pasul 4. Se scrie $F(x, y) = C, C\ constant\check{a}\ real\check{a}$, care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (4) de ordinul întâi.

Exemplu. Să se rezolve ecuația diferențială cu variabile separate:

$$\frac{dy}{1 + y^2} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0.$$

Rezolvare.

Pasul 1. Se identifică funcţiile *P* şi *Q* din expresia ecuaţiei diferenţiale:

$$P(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{și} \quad Q(y) = \frac{1}{1+y^2};$$

Pasul 2. C*ondiția de integrabilitate completă* este îndeplinită automat deoarece*:*

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(P(x)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(Q(y)\big) = 0.$$

Pasul 3. Calculăm:

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{1 + t^2}dt + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{1 + t^2}dt = arctg\, t\Big|_{x_0}^{x} + arctg\, t\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= arctg\, x - arctg\, x_0 + arctg\, y - arctg\, y_0 =$$

$$= (arctg\ x + arctg\ y) - (arctg\ x_0 + arctg\ y_0) = F(x,y) - F(x_0,y_0)$$

Pasul 4. Se scrie $F(x,y) = C, C\ constantă\ reală$, care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi.

Prin identificare, soluția $F(x,y) = C, C\ constantă\ reală \Leftrightarrow arctg\ x + arctg\ y = C$, forma *generală* a soluției.

$$arctg\ y = C - arctg\ x \Leftrightarrow tg\ (arctg\ y) = tg(C - arctg\ x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = tg(C - arctg\ x) \Leftrightarrow y = \frac{tg\ C - tg(arctg\ x)}{1 + tg(arctg\ x) \cdot tg\ C} \Leftrightarrow y = \frac{tg\ C - x}{1 + x \cdot tg\ C},$$

o formă *explicită* a soluției.

1.4. Ecuații cu variabile separabile

O ecuație diferențială de ordinul întâi este **cu variabile separabile**, dacă, prin prelucrare, poate fi adusă la forma:

$$y' = f(x) \cdot g(y), \qquad (1)$$

unde *f* este o funcție reală continuă pe intervalul deschis (a,b), *g* este o funcție reală continuă și nenulă pe intervalul deschis (c,d), iar y = y(x).

Știind că $y' = \frac{dy}{dx}$ și înlocuind în (1) se obţine următoarea formă a ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \text{ sau } \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

de unde prin integrare:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

se obține soluția generală *y* = $\phi(x, C)$, *C* ∈ ℝ.

Exemplu.

Să se determine soluția generală și soluția particulară, care trece prin punctul $(0,0)$, ale ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi:

$$y' = \frac{y^2+1}{x^2+1}, \text{ x, } y \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Deoarece ecuația se mai poate scrie $y' = (y^2 + 1) \cdot \frac{1}{x^2+1}$, reuşindu-se separarea variabilelor, ecuaţia dată este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile, care se rezolvă astfel:

$\frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}$, de unde $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1}$ și rezultă arctg *y*=arctg *x* + *C*,

adică soluția generală este:

$$y = tg\,(\operatorname{arctg} x + C), C \in \mathbb{R}.$$

Din condiția inițială $y(0) = 0$ se obține relația 0 = $tg\,(0 + C)$, de unde rezultă *C* = 0, deci soluția particulară care trece prin punctul inițial este *y* = *x*.

1.5. Ecuaţii omogene

O ecuație diferențială de ordinul întâi este **omogenă** dacă poate fi adusă la forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),\ x\neq 0, \qquad (2)$$

unde *f* și *y* sunt funcții reale continue pe domeniul de definiție, în plus *y = y(x)* este și derivabilă.

Atributul de *omogenă* al ecuației diferențiale provine din faptul că funcția de două variabile $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ este o funcţie omogenă de gradul zero, îndeplinind relaţia:

$$g(kx, ky) = k^0 \cdot g(x, y) = g(x, y),\ \ \forall k \in \mathbb{R}^*.$$

Într-adevăr:

$$g(kx, ky) = f\left(\frac{ky}{kx}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) = k^0 \cdot g(x, y) = g(x, y).$$

Ideea rezolvării este să se transforme printr-o procedură ecuaţia diferenţială iniţială într-o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Procedura constă într-o schimbare de funcție, adică funcția y va fi înlocuită prin funcția t = t(x) astfel:

$$t = \frac{y}{x} \text{ sau } t\,(x) = \frac{y(x)}{x},$$

de unde rezultă $y = x \cdot t$ şi prin derivare în raport cu *x*, se obține $y' = t + x \cdot t'$. Înlocuind funcţia *y* prin funcţia *t* în ecuaţia (2) devine:

$$t' \cdot x + t = f(t),$$

de unde se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile şi funcţia necunoscută *t*:

$$t' = (f(t) - t) \cdot \frac{1}{x},$$

care este o ecuație cu variabile separabile.

După ce se determină soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale, se revine la determinarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi omogene cu ajutorul schimbării de funcţie.

Exemplu. Să se determine soluţia generală şi soluţia particulară, care trece prin punctul $(1,1)$, ale ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi:

$$y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2},\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Rezolvare. Verificăm mai întâi dacă ecuaţia diferenţială este omogenă, considerând funcţia $f(x,y) = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$ şi îi probăm omogenitatea de gradul zero.

Deoarece:

$$f(kx,ky) = \frac{(ky)^2+kx\cdot ky-(kx)^2}{(ky)^2+2(kx)(ky)-(kx)^2} = \frac{k^2(y^2-2xy-x^2)}{k^2(y^2+2xy-x^2)} = k^0 f(x,y),$$

f este omogenă de gradul zero şi deci ecuaţia diferenţială este omogenă.

Cu schimbarea de funcţie $t = \frac{y}{x}$ se obţine ecuaţia cu variabile separabile:

$$t'x + t = \frac{x^2t^2-2x^2t-x^2}{x^2t^2+2x^2t-x^2} \text{ sau } t'x + t = \frac{t^2-2t-1}{t^2+2t-1},$$

de unde

$$t'x = \frac{t^2-2t-1}{t^2+2t-1} - t \text{ sau } t' = \frac{1}{x}\cdot\frac{-t^3-t^2-t-1}{t^2+2t-1},$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile, a cărei soluţie generală se obţine astfel:

$$\int \frac{t^2+2t-1}{-t^3-t^2-t-1}dt = \int \frac{dx}{x},$$

de unde descompunând în fracţii simple se obţine:

$$\int \left(\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\int \frac{dx}{x}$$

şi după integrare se obţine:

$$\ln(t^2+1) - \ln|t+1| = -\ln|x| + \ln|C|,\ C \in \mathbb{R}$$

sau

$$\ln\left|\frac{t^2+1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

de unde soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale cu funcţia necunoscută *t* este:

$$t^2 + 1 = \frac{C}{x}(t+1).$$

Revenind la ecuaţia diferenţială omogenă cu funcţia necunoscută *y*, pentru a se obţine soluţia generală se foloseşte relaţia $t = \frac{y}{x}$ în relaţia de mai sus, obţinându-se:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right)$$

sau

$$x^2 + y^2 = C(x + y),$$

care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi omogenă.

Condiţia iniţială se poate scrie $y\,(1) = 1$, care implică 1+1 = 2 *C*, deci *C* = 1. Rezultă că soluţia particulară se obţine, înlocuind constanta *C* cu 1 în soluţia generală, adică:

$$x^2 + y^2 = x + y.$$

Soluţia particulară se mai poate scrie:

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, care este ecuația cercului cu centrul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ și raza $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.6. Ecuaţii liniare

O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este **liniară** dacă se poate aduce la forma:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x), \qquad (3)$$

unde *P* şi *Q* sunt funcţii continue pe $[a, b]$. Dacă *Q* nu este funcţia nulă pe $[a, b]$, atunci ecuaţia (3) se numeşte *ecuaţia liniară neomogenă.*

Pentru a se determina soluţia generală a ecuaţiei se consideră, mai întâi, cazul particular în care *Q* este funcţia nulă pe $[a, b]$, obţinându-se ecuaţia diferenţială de ordinul întâi:

$$y' + P(x) \cdot y = 0, \qquad (4)$$

numită *ecuaţia liniară omogenă*, ataşată ecuaţiei liniare.

Se observă că ecuaţia (4) este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile deoarece se poate scrie sub forma:

$$y' = -P(x) \cdot y,$$

a cărei soluţie generală se determină astfel:

$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$, de unde integrând $\ln|y| = -F(x) + \ln C$, cu $C > 0$

sau

$$y = C \cdot e^{-F(x)}, \text{ cu } C > 0. \qquad (5)$$

F fiind o primitivă a funcţiei *P* pe $[a, b]$.

Pentru a se obţine soluţia generală a ecuaţiei liniare neomogene se aplică metoda **variaţiei constantei** relaţiei (5) şi care presupune înlocuirea constantei printr-o funcţie de variabila *x*, notată prin $C(x)$, derivabilă. Astfel se obţine funcţia *y* de forma:

$$y = C(x) \cdot e^{-F(x)},$$

a cărei derivată este:

$$y' = C'(x) \cdot e^{-F(x)} - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-F(x)},$$

deoarece $F'(x) = P(x)$, *F* fiind o primitivă a funcției *P*.

Conform metodei, funcţia *y* trebuie să verifice ecuaţia liniară neomogenă, de unde se obţine ecuaţia:

$$C'(x) = Q(x) \cdot e^{F(x)},$$

din care prin integrare în raport cu *x* se obţine funcţia $C(x)$:

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind în relaţia (5) constanta *C* prin $C(x)$, de mai sus, se obţine:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx + k\right],\ k \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene.

Din cele de mai sus, rezultă că algoritmul pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi *liniare* (3) cuprinde următorii paşi:

Pasul 1. Se identifică funcţiile *P* şi *Q* din expresia ecuaţiei diferenţiale;

Pasul 2. Se determină o primitivă *F* a funcţiei *P*;

Pasul 3. Se calculează integrala:

$$\int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx;$$

Pasul 4. Se determină soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi liniare neomogene, în locuind în formula (*) rezultatele de la paşii 2 şi 3.

Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi:

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

Rezolvare. Se aplică algoritmul de mai sus.

Pasul 1. Se observă că funcţiile *P* şi *Q* sunt respectiv:

$$P(x) = 2x \text{ și } Q(x) = e^{-x^2};$$

Pasul 2. O primitivă a lui $P(x)$ este:

$$F(x) = \int 2x dx = x^2;$$

Pasul 3. Se calculează integrala:

$$\int Q(x) \cdot e^{F(x)} dx = \int e^{-x^2} \cdot e^{x^2} dx = \int dx = x;$$

Pasul 4. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este:

$$y = e^{-x^2} \cdot [x + k],\ k \in \mathbb{R}.$$

1.7. Ecuaţii Bernoulli

O ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este de tip **Bernoulli** dacă se poate aduce la forma:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{\propto}, \propto \in \mathbb{R} - \{0,1\}, \qquad (1)$$

unde P şi Q sunt funcţii continue pe $[a, b]$. Dacă parametrul α ia valoare 0 sau 1 ecuaţia diferenţială se transformă într-o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară.

Pentru a se afla soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1) se foloseşte schimbarea de funcţie $u(x) = \left(y(x)\right)^{1-\propto}$ ce are ca efect transformarea ecuaţiei diferenţiale (1) într-o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară cunoscută deja.

Într-adevăr, din schimbarea de funcţie se obţine:

$$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\propto}},$$

iar prin derivare se obţine:

$$y'(x) = \frac{1}{1-\propto} \cdot u'(x) \cdot u(x)^{\frac{\propto}{1-\propto}},$$

şi înlocuind în (1) se deduce ecuaţia diferenţială de ordinul întâi:

$$\frac{1}{1-\propto} \cdot u'(x) \cdot u(x)^{\frac{\propto}{1-\propto}} + P(x) \cdot u(x)^{\frac{1}{1-\propto}} = Q(x) \cdot u(x)^{\frac{\propto}{1-\propto}}$$

şi presupunând $u(x)^{\frac{\propto}{1-\propto}} \neq 0$ pe $[a, b]$, prin împărţire cu $u(x)^{\frac{\propto}{1-\propto}}$ se obţine:

$$u'(x) + (1-\propto) \cdot P(x) \cdot u(x) = (1-\propto) \cdot Q(x),$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară de forma:

$$u'(x) + P_1(x) \cdot u(x) = Q_1(x), \qquad (*)$$

unde:

$$P_1(x) = (1-\propto) \cdot P(x) \text{ şi } Q_1(x) = (1-\propto) \cdot Q(x).$$

Din cele de mai sus rezultă că algoritmul pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi de tip Bernoulli (1) cuprinde următorii paşi:

Pasul 1. Se identifică parametrul α, funcţiile P, P_1, Q şi Q_1;

Pasul 2. Se determină soluţia generală u a ecuaţiei diferenţiale de ordinul întâi liniare (*);

Pasul 3. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1) se obţine prin înlocuirea rezultatului de la pasul 2 în schimbarea de funcţie $u(x) = \left(y(x)\right)^{1-\propto}$, de unde $y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-\propto}}$.

În continuare se va folosi sintagma *să se integreze ecuaţia diferenţială* al cărei sens coincide cu cel al sintagmei *să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale*.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$\sqrt{x^3} \cdot y' - \sqrt{x} \cdot y + y^2 = 0, x > 0.$$

Rezolvare. Se aplică algoritmul de mai sus.

Pasul 1. Ecuaţia diferenţială dată se mai poate scrie:

$$\sqrt{x^3} \cdot y' + \left(-\sqrt{x}\right) \cdot y = -y^2 \text{ sau } y' + (-x^{-1}) \cdot y = -x^{-\frac{3}{2}} \cdot y^2$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi de tip Bernoulli cu α = 2 şi funcţiile:

$$P(x) = -\frac{1}{x}, \text{ de unde } P_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$Q(x) = -x^{-\frac{3}{2}}, \text{ de unde } Q_1(x) = x^{-\frac{3}{2}}.$$

Pasul 2. Ecuaţia diferenţială (*) în acest caz este:

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = x^{-\frac{3}{2}},$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară, a cărei integrare este următoarea:

Pasul 2.1 $F(x) = \int P_1(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$;

Pasul 2.2 $\int Q_1(x) \cdot e^{F(x)}dx = \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\ln x}\, dx = \int x^{-\frac{3}{2}} \cdot x\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2\sqrt{x}$;

Pasul 2.3 $u(x) = e^{-F(x)} \cdot \left[\int Q_1(x) \cdot e^{F(x)}dx + k\right] = \frac{1}{x} \cdot \left[2\sqrt{x} + k\right]$.

Pasul 3. Înlocuind în $y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-\propto}}$ rezultatul de la pasul 2.3 se obţine:

$$y(x) = [u(x)]^{-1} = \frac{x}{2\sqrt{x}+k}, \ k \text{ real astfel încât } 2\sqrt{x} + k \neq 0,$$

care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale din enunţ.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$xy' - y = x^2y^2, \text{ cu } x \neq 0.$$

Rezolvare. Se aplică algoritmul de mai sus.

Pasul 1. Ecuaţia diferenţială dată se mai scrie:

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = xy^2, x \neq 0,$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi Bernoulli cu α = 2 şi funcţiile:

$$P(x) = -\frac{1}{x} \text{ , de unde } P_1(x) = \frac{1}{x}$$

$Q(x) = x$, de unde $Q_1(x) = -x$.

Pasul 2. Ecuaţia diferenţială (*) în acest caz este:

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = -x,$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară, a cărei integrare este următoarea:

Pasul 2.1 $F(x) = \int P_1(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x$;

Pasul 2.2 $\int Q_1(x) \cdot e^{F(x)}dx = -\int x \cdot e^{\ln x}\, dx = -\frac{1}{3}x^3$;

Pasul 2.3 $u(x) = e^{-F(x)} \cdot \left[\int Q_1(x) \cdot e^{F(x)}dx + k\right] = \frac{1}{x} \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + k\right]$.

Pasul 3. Înlocuind în $y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ rezultatul de la pasul 2.3 se obţine:

$$y(x) = [u(x)]^{-1} = \frac{3x}{3k-x^3}, k \text{ real astfel încât } 3k - x^3 \neq 0,$$

care este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale din enunţ.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia diferenţială de ordinul întâi

$$y' \cos x - 2y \sin x = \cos x, \qquad \cos x \neq 0$$

şi să se determine soluţia particulară care trece prin punctul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare. Se împarte cu $\cos x \neq 0$ şi ecuaţia devine:

$$y' - 2y \operatorname{tg} x = 1,$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi se poate aplica algoritmul corespunzător.

Pasul 1. Se observă că funcţiile *P* şi *Q* sunt respectiv:

$$P(x) = -2\,\mathrm{tg}\,x \text{ şi } Q(x) = 1;$$

Pasul 2. O primitivă a lui $P(x)$ este:

$$F(x) = -2\int \mathrm{tg}\,x\,dx = 2\ln\cos x = \ln\cos^2 x;$$

Pasul 3. Se calculează integrala:

$$\int Q(x)\cdot e^{F(x)}dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x;$$

Pasul 4. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este:

$$y = e^{-\ln cos^2 x}\cdot\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + k\right] = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + k\right],\ k \in \mathbb{R}.$$

Condiţia iniţială se scrie $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. De aici se obţine condiţia pentru constanta *k*:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + k\right],$$

din care rezultă *k*=0. Deci soluţia particulară cerută este:

$$y = \frac{1}{\cos^2 x}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right].$$

1.8. Ecuaţii Riccati

O ecuație diferențială de ordinul întâi este de tip **Riccati** dacă se poate aduce la forma:

$$y' + P(x) + Q(x)\cdot y + R(x)\cdot y^2 = 0 \qquad (1)$$

unde *P,Q,R* sunt funcții continue pe $[a,b]$, P și R fiind diferite de funcția nulă.

Pentru a se afla soluția generală a ecuației diferențiale (1) este esențial de știut o soluție particulară a ei. Fie $y_p : I \subset [a,b] \to \mathbb{R}$ o soluție particulară a ecuației:

$$y'_p + P(x) + Q(x)\cdot y_p + R(x)\cdot {y_p}^2 = 0 \Rightarrow y'_p = -P(x) - Q(x)\cdot y_p - R(x)\cdot {y_p}^2.$$

Facem schimbarea de funcție $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}$ cu z(x) noua funcție necunoscută, care depinde tot de x.

Prin derivarea în raport cu x a schimbării de funcție se obține:

$$y'(x) = y_p'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)},$$

și înlocuind în (1) se deduce ecuația diferențială:

$$\left(y_p'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}\right) + P(x) + Q(x)\cdot\left(y_p(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + R(x)\cdot\left(y_p(x) + \frac{1}{z(x)}\right)^2 = 0.$$

$$-\frac{z'(x)}{z^2(x)} + Q(x) \cdot \frac{1}{z(x)} + R(x) \cdot \left(2 \cdot y_p(x) \cdot \frac{1}{z(x)} + \left(\frac{1}{z(x)}\right)^2\right) = 0.$$

Înmulțind cu $-z^2(x)$ egalitatea precedentă, rezultă

$$z'(x) + \left(-Q(x) - 2 \cdot y_p(x) \cdot R(x)\right) \cdot z(x) = R(x), \qquad (*)$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă de forma:

$$z'(x) + P_1(x) \cdot z(x) = Q_1(x), \qquad (**)$$

unde:

$$P_1(x) = -Q(x) - 2 \cdot y_p(x) \cdot R(x) \text{ şi } Q_1(x) = R(x).$$

Din cele de mai sus rezultă că algoritmul pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul întâi de tip Riccati (1), dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației, cuprinde următorii pași:

Pasul 1. Se identifică funcțiile *P, Q* și *R.*

Pasul 2. Dacă $y_p : I \subset [a, b] \to \mathbb{R}$, este o soluție particulară a ecuației (1), se efectuează schimbarea de funcție $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}$, urmărind determinarea funcției z(x) din ecuația diferențială (*).

Pasul 3. Se identifică funcțiile P_1 şi Q_1 din (*);

Pasul 4. Se determină soluția generală de forma $z(x) = K \cdot f(x) + g(x), K \in \mathbb{R}$ a ecuației diferențiale de ordinul întâi liniare (**);

Pasul 5. Soluția generală a ecuației diferențiale (1) se obține prin înlocuirea lui z(x) determinat la pasul 4 în schimbarea de funcție $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)}$, de unde $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{K \cdot f(x) + g(x)}, K \in \mathbb{R}$.

Exemplu. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y' - \frac{x-1}{x^2} - y + 2xy^2 = 0, \qquad (2)$$

știind că $y_p : (0, \infty) \to \mathbb{R}, y_p = \frac{1}{x}$ este o soluție particulară.

Rezolvare. Se aplică algoritmul de mai sus astfel:

Pasul 1. Ecuația diferențială dată este o ecuație diferențială de ordinul întâi de tip Riccati cu funcțiile:

$$P(x) = -\frac{x-1}{x^2}, Q(x) = -1 \text{ și } R(x) = 2x.$$

Pasul 2. Se efectuează schimbarea de funcție $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{z(x)}$, urmărind determinarea funcției z(x) din ecuația diferențială (*):

$$z'(x)+\left(-(-1)-2\cdot\frac{1}{x}\cdot 2x\right)\cdot z(x)=2x\,.$$

Ecuația diferențială (**) în acest caz este:

$$z'(x)-3\cdot z(x)=2x.$$

Pasul 3. Se identifică funcțiile $P_1=-3$ și $Q_1=2x$ ale ecuației $z'(x)-3\cdot z(x)=2x$,

care este o ecuație diferențială de ordinul întâi liniară, a cărei integrare este următoarea:

Pasul 3.1 $F(x)=\int P_1(x)dx=\int(-3)dx=-3x$;

Pasul 3.2 $\int Q_1(x)\cdot e^{F(x)}dx=\int 2x\cdot e^{-3x}\,dx=-\frac{2}{3}\int(-3)\cdot e^{-3x}\cdot x\,dx=-\frac{2}{3}\cdot e^{-3x}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot\int e^{-3x}\,dx=-\frac{2}{3}\cdot e^{-3x}\cdot x-\frac{2}{9}\int(-3)\cdot e^{-3x}dx=-\frac{2}{3}\cdot e^{-3x}\cdot x-\frac{2}{9}\int(e^{-3x})'\,dx=-\frac{2}{3}\cdot e^{-3x}\cdot x-\frac{2}{9}e^{-3x}=-\frac{2}{9}\cdot e^{-3x}(3x+1)$.

Pasul 3.3 $z(x)=e^{-F(x)}\cdot\left[\int Q_1(x)\cdot e^{F(x)}dx+K\right]=e^{-(-3x)}\cdot\left[-\frac{2}{9}\cdot e^{-3x}(3x+1)+K\right]=$

$=e^{3x}\cdot\left[-\frac{2}{9}\cdot e^{-3x}(3x+1)+K\right]=K\cdot e^{3x}-\frac{2}{9}\cdot(3x+1)$.

Pasul 4. Înlocuind în $y(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{z(x)}$ rezultatul de la pasul 3.3 se obține:

$$y(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{K\cdot e^{3x}-\frac{2}{9}\cdot(3x+1)}\ ,\ K \text{ real astfel încât } K\cdot e^{3x}-\frac{2}{9}\cdot(3x+1)\neq 0,$$

care este soluția generală a ecuației diferențiale din enunț.

Observații.

1. Dacă ecuația diferențială poate fi scrisă de forma $y'+c+b\cdot y+a\cdot y^2=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0$, atunci se determină soluțiile ecuației $at^2+bt+c=0$. Dacă t_1 este o soluție, se verifică că $y_p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y_p=t_1$ verifică ecuația dată. Deci, ecuația diferențială de ordinul întâi este o ecuație Riccati căreia i se cunoaște o soluție particulară. Aplicând algoritmul de mai sus se obține soluția generală a ecuației.

2. Dacă ecuația diferențială poate fi scrisă de forma $y'+\frac{1}{x^2}\cdot c+\frac{1}{x}\cdot b\cdot y+a\cdot y^2=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $(b-1)^2-4\cdot a\cdot c\geq 0$, atunci se determină soluțiile ecuației $at^2+(b-1)t+c=0$. Dacă t_1 este o soluție, se verifică că $y_p:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $y_p=\frac{t_1}{x}$ verifică ecuația dată. Deci, ecuația diferențială de ordinul întâi este o ecuație Riccati căreia i se cunoaște o soluție particulară. Aplicând algoritmul de mai sus se obține soluția generală a ecuației.

Recapitulare formule:

Astfel, dacă $u: I \to J$ este funcție derivabilă pe intervalul I, se obține următorul tabel de integrale nedefinite.

Nr. crt.	Integrala nedefinită
1.	$\int u^n(x)\cdot u'(x)dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + \mathscr{C},\ n \in \mathbb{N}$
2.	$\int u^r(x)\cdot u'(x)dx = \frac{u^{r+1}(x)}{r+1} + \mathscr{C},\ r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ u(I) \subset (0, +\infty)$
3.	$\int a^{u(x)}\cdot u'(x)dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + \mathscr{C},\ a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$
4.	$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\|u(x)\| + \mathscr{C},\ u(x) \neq 0,\ x \in I$
5.	$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u(x)-a}{u(x)+a}\right\| + \mathscr{C},\ u(x) \neq \pm a,\ \forall\ x \in I,\ a \neq 0$
6.	$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u(x)}{a} + \mathscr{C},\ a \neq 0$
7.	$\int \sin u(x)\cdot u'(x)dx = -\cos u(x) + \mathscr{C}$
8.	$\int \cos u(x)\cdot u'(x)dx = \sin u(x) + \mathscr{C}$
9.	$\int \operatorname{tg} u(x)\cdot u'(x)dx = -\ln\|\cos u(x)\| + \mathscr{C},\ u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
10.	$\int \operatorname{ctg} u(x)\cdot u'(x)dx = \ln\|\sin u(x)\| + \mathscr{C},\ u(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
11.	$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}dx = \operatorname{tg} u(x) + \mathscr{C},\ u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
12.	$\int \frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}dx = -\operatorname{ctg} u(x) + \mathscr{C},\ u(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
13.	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{a^2-u^2(x)}}dx = \arcsin\frac{u(x)}{a} + \mathscr{C},\ a > 0,\ u(I) \subset (-a, a)$
14.	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-a^2}}dx = \ln\left\|u(x)+\sqrt{u^2(x)-a^2}\right\| + \mathscr{C},\ a > 0,\ u(I) \subset (-\infty, -a)$ sau $u(I) \subset (a, +\infty)$
15.	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)+a^2}}dx = \ln\left[u(x)+\sqrt{u^2(x)+a^2}\right] + \mathscr{C},\ a \neq 0$