# Serii de numere și de puteri

# Serii de numere reale

24.10.2020

# Serii de numere reale

Fie un şir arbitrar de numere reale:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, căruia îi ataşăm şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}: S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Fiecărui şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ îi putem ataşa, în acest mod un şir $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Reciproc, fiecărui şir $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ îi putem asocia un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, prin relaţiile:
$a_1 = S_1;\ a_2 = S_2 - S_1, \dots, a_n = S_n - S_{n-1}, \dots$

**Definiţie** Prin serie de numere reale cu termenul general $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vom înţelege simbolul

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit anterior cu ajutorul şirului $(a_n)$ se numeşte şirul sumelor parţiale al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

**Definiţie** Vom spune că seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma $S$ dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ asociat seriei este convergent şi are limita $S$.

Vom scrie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S$.

Numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ se numesc termenii seriei iar $a_n$ s.n. termenul general.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$

Presupunem că seria este convergentă şi are suma $S$.

Deci, $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Putem scrie: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ şi
$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$,

deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n$. Seria fiind convergentă şi având suma $S$, rezultă: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

deci $S_n + R_n = S \Rightarrow R_n = S - S_n$ și $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n)$

$\lim_{n\to\infty} R_n = S - S = 0.$

Șirul $R_n \overset{def}{=} a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots$, se numește șirul resturilor de ordinul n al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Prin urmare, pentru o serie convergentă rezultă că șirul resturilor de ordinul n este și el convergent și are limita egală cu zero: $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

Pentru o serie numerică vom analiza două probleme:

- natura seriei (convergentă sau divergentă)
- calculul sumei seriei, în caz de convergență.

<u>Exemplu</u>. Seria geometrică de rație r:

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + \dots, \ r \neq 0.$

Șirul sumelor parțiale: $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} =$ = suma progresiei geometrice de rație r.

Avem: $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ sau $\frac{r^n - 1}{r-1}$

Dacă $|r| < 1$ $(r \in (-1,1)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$,

deci $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$.

Deci, dacă $|r| < 1$, seria geometrică de rație r este convergentă și are suma $S = \frac{1}{1-r}$.

Din proprietățile șirului exponențial, $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$, deducem că dacă $r > 1 \Rightarrow \lim r^n = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ este divergentă

$r = 1 \Rightarrow S_n = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} = n$ și $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Dacă $r = -1 \rightarrow S_n$ divergent

Dacă $r < -1 \Rightarrow S_n$ divergent

} în ambele cazuri conține 2 subșiruri cu limite diferite.

În concluzie seria geometrică de rație $r \in \mathbb{R}$ este convergentă și are suma $S = \frac{1}{1-r}$ numai dacă $r \in (-1, 1)$

Natura unei serii numerice se va stabili, de regulă, cu ajutorul criteriilor de convergență. Vom analiza câteva criterii de convergență, grupate astfel:

- criterii generale de convergență
- criterii pentru serii cu termeni pozitivi
- criterii pentru serii alternate sau oarecare

① <u>Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru serii numerice oarecare</u>

<u>Teoremă</u>. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\iff$ șirul sumelor parțiale asociat, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy $\iff$ $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n > n_0(\varepsilon)$ și pentru $(\forall) p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, să avem $|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Criteriul, fiind necesar și suficient pentru convergența unei serii, are un grad mare de generalitate și în practică se utilizează destul de rar. În aplicații se utilizează criterii care sunt numai necesare sau numai suficiente de convergență, dar mai ușor de aplicat.

<u>Exemplu</u>. Pentru $p = 1$ în teorema lui Cauchy obținem: $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists) n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n > n_0(\varepsilon)$, să avem $|a_{n+1}| < \varepsilon$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aceasta este o condiție <u>numai necesară</u> de convergență, nu și suficientă (am luat doar $p=1$). Deci, dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria este divergentă.

<u>Exemplu</u>. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ numită seria armonică. Avem: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, condiția necesară de convergență este realizată, dar ea nu este și suficientă

Divergența șirului $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ rezultă cu criteriul lui Cauchy pentru șiruri, mai exact prin negarea criteriului. Astfel, avem

$S_n$ nu este șir Cauchy, dacă $(\exists)\, \varepsilon_0 > 0$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $(\exists)\, p \in \mathbb{N}$ ai $|S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon_0$.

Avem: $|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Fie $p = n \Rightarrow |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{de } n \text{ ori}} =$

$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

Luând $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, avem că $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $(\exists)\, p = n$, $p \in \mathbb{N}$ a.î. $|S_{n+p} - S_n| = |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}$, deci $(S_n)$ nu este șir Cauchy, deci nu este convergent.

Fiind un șir strict crescător de numere pozitive, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$, deci seria armonică, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ are suma $+\infty$.

<u>Au loc următoarele proprietăți</u>:

1° Natura unei serii numerice nu se schimbă dacă se suprimă sau se adaugă un nr finit de termeni (numai suma dacă seria este convergentă)

2° Dacă $\sum u_n$ și $\sum v_n$ sunt convergente și au sumele $u$, respectiv $v$, atunci $\sum (u_n \pm v_n)$ și $\sum (\alpha \cdot u_n)$ sunt convergente și au sumele $u \pm v$, respectiv $\alpha \cdot u$

## Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

① Criteriul „majorării"

O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit.

Consecință: O serie cu termeni pozitivi este sau convergentă sau are suma $= +\infty$

② Criteriul comparației

(2.1) Criteriul comparației pentru termeni și pt rapoarte.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ două serii cu $u_n > 0$ și $v_n > 0$ (pt rapoarte)

Dacă a) $u_n \leq v_n$ $(\forall)$ $n \geq p \geq 1$, (pt termeni) sau b) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, atunci

- dacă seria $\sum v_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum u_n$ este convergentă
- dacă seria $\sum u_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum v_n$ este divergentă

(2.2) Criteriul comparației pentru limita rapoartelor.

c) Dacă $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty$, atunci cele două serii au aceeași natură.

Pentru a putea utiliza criteriul comparației este necesar să cunoaștem natura unor serii cu care să facem comparația.

Deocamdată cunoaștem seria geometrică, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + \dots$, cu $|r| < 1$ care este convergentă, și seria armonică, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, care este divergentă.

③ Criteriul condensării (Cauchy) Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi, astfel încât șirul $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător. Atunci seria dată și seria $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ sunt de aceeași natură.

Vom aplica acest rezultat la seria armonică generalizată:
$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}+\dots \text{ cu } \alpha\in\mathbb{R}$$
Dacă $\alpha\le 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\alpha}=\begin{cases}+\infty & \text{dacă } \alpha<0\\ 1 & \text{dacă } \alpha=0.\end{cases}$

condiția necesară de convergență nu este îndeplinită, ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\neq 0$) deci seria nu este convergentă.

Fie $\alpha>0$. Considerăm și seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\cdot u_{2^n}$;

$u_{2^n}=\frac{1}{(2^n)^\alpha}=\frac{1}{2^{n\alpha}} \Rightarrow V_n=2^n\cdot u_{2^n}=2^n\cdot\frac{1}{2^{n\alpha}}=\frac{1}{2^{n\alpha-n}}=$

$=\frac{1}{2^{n(\alpha-1)}}=\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n=V_n$; dar $V_n$ este termenul general al unei serii geometrice de rație $r=\frac{1}{2^{\alpha-1}}$

Dacă $r\in(0,1)$, deci $0<\frac{1}{2^{\alpha-1}}<1$, seria este convergentă $\Rightarrow 2^{\alpha-1}>1$; $2^{\alpha-1}>2^0$; $\alpha-1>0$; $\alpha>1$

Dacă $r\ge 1$, deci $\frac{1}{2^{\alpha-1}}\ge 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-1}\le 1=2^0 \Leftrightarrow$ $\alpha-1\le 0$, deci $\alpha\le 1$, seria este divergentă.

În concluzie seria armonică generalizată

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}\text{este convergentă dacă } \alpha>1\\ \text{divergentă dacă } \alpha\le 1.\end{cases}$$

## Criterii suficiente de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

### 1° Criteriul rădăcinii (Cauchy)

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$ pentru $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

a) Dacă există un număr $k$, $0<k<1$ astfel încât să avem $\sqrt[n]{u_n}\le k<1$ pentru o infinitate de termeni ai seriei (exceptând, eventual, un număr finit de termeni), atunci seria este convergentă;

b) Dacă $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pentru o infinitate de termeni ai seriei, atunci seria este divergentă.

Criteriul se aplică, într-o formă mai ușor de utilizat în aplicațiile practice sub forma numită „la limită":

a) dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, seria este convergentă

b) dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$, atunci seria este divergentă

Obs. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, nu se poate trage nici o concluzie privind convergența seriei.

Exemple

1° Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$

$u_n = \frac{1}{n^n} > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$

deci seria este convergentă.

2° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; $u_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$

$\Rightarrow$ seria este convergentă.

3° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot a\right)^n = 2a + \frac{3}{2} a^2 + \frac{4}{3} a^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{n} \cdot a\right)^n + \dots$; unde $a > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \cdot a\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot a = a$.

Deci, dacă $0 < a < 1 \Rightarrow$ serie convergentă

dacă $a > 1 \Rightarrow$ serie divergentă

dacă $a = 1 \Rightarrow$ incertitudine

Dar, pt $a = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, deci seria este divergentă, deoarece termenul general nu are limita egală cu 0 (nu este îndeplinită condiția necesară de convergență).

Criteriul raportului (d'Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există un număr $p \in \mathbb{N}$ și un număr $k \in (0,1)$ astfel încât pentru orice număr $n \geq p$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$, atunci seria este convergentă;

b) Dacă există un număr $p \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pentru orice $n \geq p$, atunci seria este divergentă.

Criteriul se aplică, într-o formă mai particulară cu ajutorul limitelor extreme (forma „la limită")

Consecință. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi

1°. Dacă $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ seria este convergentă.

2°. Dacă $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, atunci seria este divergentă.

Obs. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ nu putem trage nici o concluzie având o incertitudine, conform criteriului.

Ex. 1° Știm că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ este divergentă. Iar, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = 1$

2° Știm că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ este convergentă (seria armonică generalizată) Avem $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1$, pentru orice $\alpha \in (0,1)$ sau $\alpha = 1$ sau $\alpha > 1$.

Dacă $\alpha \in (0,1$ seria este nergentă, iar dacă $\alpha > 1$ seria este convergentă. Totuși $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ în toate cazurile, deci criteriul nu este aplicabil când această limită este egală cu 1.

3° $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$; $u_n = \frac{1}{n!}$

Avem: $\lim_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

Pe alte exemple se poate arăta că pentru unele serii criteriul raportului nu permite stabilirea naturii seriei, în timp ce criteriul rădăcinii permite acest lucru. Deducem că dacă se aplică „la limită” cele două criterii deducem următorul lucru: criteriul rădăcinii ne permite să determinăm natura unei serii cu termeni pozitivi întotdeauna când și criteriul raportului are această proprietate. Astfel spus, criteriul rădăcinii are o arie de aplicabilitate mai mare decât criteriul raportului.

Mai mult se demonstrează că are loc și relația $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, atunci când a doua limită există.

Într-adevăr, presupunem că $(\exists)\ l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Avem:

$$\lim_{\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{\infty} e^{\ln\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln u_n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\infty} \frac{\ln u_n}{n}} \overset{\text{crit.}}{\underset{\text{C-S}}{=}} e^{\lim\limits_{\infty} \frac{\ln u_{n+1} - \ln u_n}{n+1-n}} = e^{\lim\limits_{\infty} \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}} =$$

$$= e^{\ln \lim\limits_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}} = e^{\ln l} = l$$

Exemple

1° $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}}{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1 \Rightarrow$ Incertitudine, conform criteriului raportului.

Am arătat anterior că șirul $S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ este șir Cauchy, deci convergent, și i-am calculat și limita: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$, adică suma seriei este egală cu $1$ = limita șirului sumelor parțiale.

③ Criteriul lui Raabe - Duhamel.

Fie $\sum u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există un număr $k > 1$ și un număr natural $p \in N$ astfel încât să avem:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq k$$ pentru $(\forall) n \geq p$, seria este convergentă.

b) Dacă există un număr $p \in N$ a.î.

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$ pentru $(\forall) n \geq p$, atunci seria este div.

Criteriul se aplică de obicei sub forma „la limită".

Consecința. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi

și fie $l = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$. Atunci:

a) dacă $l > 1$ seria este convergentă;

b) dacă $l < 1$ seria este divergentă.

Dacă $l = 1$ avem, de asemenea incertitudine

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Criteriul raportului

a dat incertitudine: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{2n-1}{2n+3} = 1$

Aplicăm criteriul lui Raabe - Duhamel:

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim n\left(\frac{2n+3}{2n-1} - 1\right) = \lim_{\infty} n\cdot\frac{2n+3-2n+1}{2n-1} =$$

$$= \lim \frac{4n}{2n-1} = \lim \frac{4\cdot n}{n\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \frac{4}{2} = 2 > 1,$$ deci seria

este convergentă. Prin urmare putem afirma că acest criteriu este „mai puternic" decât criteriul raportului!

2) Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$, cu $\alpha > 0$.

Se cere natura seriei, cu discuție după $\alpha > 0$.

Aplicăm mai întâi criteriul raportului:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)}}{\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}} = \lim \frac{n+1}{\alpha+n} = 1$$

Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\alpha+n}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\alpha+n-n-1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\alpha-1)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\alpha-1.$$

Deci: $\begin{cases}\text{dacă } \alpha-1>1 \Leftrightarrow \alpha>2, \text{ seria este convergentă}\\ \text{dacă } \alpha-1<1 \Leftrightarrow 0<\alpha<2 \text{ seria este divergentă}\\ \text{dacă } \alpha=2 \to \text{incertitudine.}\end{cases}$

Pentru $\alpha=2$, termenul general al seriei devine:

$$u_n=\frac{n!}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}.$$ Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ este

comparabilă cu seria armonică, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, deci este divergentă. Comparația se poate face pe varianta 3, „la limită":

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\frac{n}{n+1}=1\in(0,+\infty)$$

deci cele două serii sunt de aceeași natură, deci și $\sum_{1}^{\infty} u_n$, pentru $\alpha=2$ este divergentă.

④ <u>Criteriul logaritmic (Cauchy)</u>

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

a) Dacă există un număr $p\in\mathbb{N}$ și un număr $k>1$ astfel încât, pentru $(\forall)\ n\geq p>1$ să avem:

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\geq k>1,$$ seria este convergentă.

b) Dacă există $p\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\geq p>1$ să avem

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\leq 1,$$ seria este divergentă.

În aplicații se utilizează tot forma „la limită"

<u>Consecință</u>. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi

și $l = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$,

dacă: $\begin{cases} l > 1, & \text{seria este convergentă} \\ l < 1, & \text{seria este divergentă} \\ l = 1, & \text{incertitudine} \end{cases}$

Exemplu ① Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$, $a > 0$. Să se stabilească natura seriei în funcție de valorile parametrului $a > 0$.

$u_n = n^{\ln a} > 0$, $(\forall)\, a > 0$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{\infty} \frac{-\ln u_n}{\ln n} = -\lim \frac{\ln(n^{\ln a})}{\ln n} = \lim_{\infty} \frac{-\ln a \cdot \ln n}{\ln n}$

$= -\ln a$

deci: ① dacă $-\ln a > 1 \Leftrightarrow \ln a < -1 = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{e}$, atunci seria este convergentă.

② dacă $-\ln a < 1 \Leftrightarrow \ln a > -1 = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow a > \frac{1}{e}$, seria este divergentă.

③ dacă $-\ln a = 1$ → incertitudine $\Leftrightarrow \ln a = -1 = \ln\frac{1}{e}$

pentru $a = \frac{1}{e}$ seria devine: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$; $u_n = n^{-1} = \frac{1}{n}$

dar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. (seria armonică)

· Exercițiu Să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, în funcție de valorile parametrului $a > 0$.

Între criteriile lui Raab-Duhamel și logaritmic al lui Cauchy se poate stabili următoarea legătură:

Dacă se aplică la limită criteriul lui Raabe-D și criteriul logaritmic, atunci criteriul logaritmic întotdeauna ajunge determinarea naturii seriei într-o proprietate când criteriul lui R-D are și el această proprietate deci criteriul logaritmic are o arie de aplicabilitate mai mare decât criteriul lui R-D.

În plus, are loc și relația:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right),$$ dacă a doua limită există.

Exemple de serii convergente

1° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \dots$

$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} > 0 \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

Criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}}{\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}} =$

$= \lim_{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \cdot \frac{(4n-3)(4n+1)}{1} = \lim_{\infty} \frac{4n-3}{4n+5} = \lim_{\infty} \frac{n(4-\frac{3}{n})}{n(4+\frac{5}{n})} = 1$

Criteriul lui Raabe

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{\infty} n\left(\frac{4n+5}{4n-3} - 1\right) = \lim_{\infty} n \cdot \frac{4n+5-4n+3}{4n-3}$

$= \lim \frac{8\cdot n}{n(4-\frac{3}{n})} = \frac{8}{4} = 2 > 1 \Rightarrow$ serie convergentă.

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$

$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1} = \frac{A(4n+1) + B(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)}$

$\Rightarrow A(4n+1) + B(4n-3) = 1, \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

$n(4A+4B) + A - 3B - 1 = 0 \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4(A+B) = 0 \quad |:4 \\ A - 3B - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow B = -A \\ A - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow A + 3A = 1$

$; 4A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4} \Rightarrow B = -\frac{1}{4}}$

$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

$n=1: \ u_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{5}}\right)$

$n=2: \ u_2 = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}}\right)$

$n=3: \ u_3 = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{13}\right)$

$\dots$

$n=n: \ u_n = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{4n-3}} - \frac{1}{4n+1}\right)$

$(+): u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)$

$\Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}$

$\boxed{S = \frac{1}{4}}$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; $u_n = \frac{1}{\ln n}$; $n \geq 2$

Fie seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$; $V_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 2$

$n > \ln n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$, $(\forall)\, n \geq 2$; Aplicăm comparația pt termeni. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ este div $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ este divergentă.

(3°) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}}$; $u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; $u_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$; este asigurată c.n. de convergență.

Aplicăm criteriul comparației, varianta „la limită" cu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ conv

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = 1 \cdot 1 = 1 \in (0, +\infty)$$ $\Rightarrow$ cele 2 serii au aceeași natură. Dar $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Calculul sumei: $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} =$

$$= \frac{\sin\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1} \cdot \cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}.$$

$u_n = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}$

$n=1$: $u_1 = tg\, 1 - \cancel{tg\frac{1}{2}}$

$n=2$: $u_2 = \cancel{tg\frac{1}{2}} - \cancel{tg\frac{1}{3}}$

$n=3$: $u_3 = \cancel{tg\frac{1}{3}} - \cancel{tg\frac{1}{4}}$

— — — — —

$n = n-1$: $u_{n-1} = \cancel{tg\frac{1}{n-1}} - \cancel{tg\frac{1}{n}}$

$n = n$: $u_n = \cancel{tg\frac{1}{n}} - tg\frac{1}{n+1}$

(+) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n = tg\, 1 - tg\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(tg\, 1 - tg\frac{1}{n+1}\right) =$

$= tg\, 1$

$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = tg\, 1}$

$360^\circ$ — $2\pi \simeq 6{,}28$ rad.
$x^\circ$ ... — 1 rad; $x = \frac{360}{2\pi} \simeq 57{,}32^\circ$

# Exemple de serii convergente

Exemple de serii convergente

1° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \dots$

$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} > 0 \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}}{\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}} =$

$= \lim_{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \cdot \frac{(4n-3)(4n+1)}{1} = \lim_{\infty} \frac{4n-3}{4n+5} = \lim_{\infty} \frac{\cancel{n}(4-\frac{3}{n})}{\cancel{n}(4+\frac{5}{n})} = 1$

Criteriul lui Raabe

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{\infty} n\left(\frac{4n+5}{4n-3} - 1\right) = \lim_{\infty} n \cdot \frac{\cancel{4n}+5-\cancel{4n}+3}{4n-3}$

$= \lim \frac{8 \cdot n}{n(4-\frac{3}{n})} = \frac{8}{4} = 2 > 1 \Rightarrow$ Seria convergentă.

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\right)$

$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1} = \frac{A(4n+1) + B(4n-3)}{(4n-3)(4n+1)}$

$\Rightarrow A(4n+1) + B(4n-3) = 1, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

$n(4A+4B) + A - 3B - 1 = 0 \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 4(A+B) = 0 & | :4 \\ A - 3B - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} A+B = 0 \Rightarrow B = -A \\ A - 3B = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow A + 3A = 1$

$; 4A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4} \Rightarrow B = -\frac{1}{4}}$

$u_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

$n=1: \ u_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{5}}\right)$

$n=2: \ u_2 = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}}\right)$

$n=3: \ u_3 = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{9}} - \frac{1}{13}\right)$

$\dots$

$n=n: \ u_n = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{4n-3}} - \frac{1}{4n+1}\right)$

$(+): u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)$

$\Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}$

$\boxed{S = \frac{1}{4}}$

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; $u_n = \frac{1}{\ln n}$; $n \geq 2$

Fie seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$; $v_n = \frac{1}{n}$; $n \geq 2$

$n > \ln n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$, $(\forall)\, n \geq 2$; Aplicăm comparația pt termeni. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ este div $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ este diverg.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}}$; $u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; $u_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$; este asigurată c.n. de convergență.

Aplicăm criteriul comparației, raportul „la limită" cu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ conv

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right) \cdot \frac{1}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = 1 \cdot 1 = 1 \in (0, +\infty) \Rightarrow$$

cele 2 serii au aceeași natură. Dar $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Calculul sumei: $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} =$

$$= \frac{\sin\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1} \cdot \cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}.$$

$u_n = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}$

$n=1$: $u_1 = tg\,1 - \cancel{tg\frac{1}{2}}$

$n=2$: $u_2 = \cancel{tg\frac{1}{2}} - \cancel{tg\frac{1}{3}}$

$n=3$: $u_3 = \cancel{tg\frac{1}{3}} - \cancel{tg\frac{1}{4}}$

- -

$n = n-1$: $u_{n-1} = \cancel{tg\frac{1}{n-1}} - \cancel{tg\frac{1}{n}}$

$n = n$: $u_n = \cancel{tg\frac{1}{n}} - tg\frac{1}{n+1}$

(+) $u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n = tg\,1 - tg\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(tg\,1 - tg\frac{1}{n+1}\right) = tg\,1$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = tg\,1}$$

$360^\circ$ — $2\pi \simeq 6{,}28$ rad.
$x^\circ$ — $1$ rad; $x = \frac{360}{2\pi} \simeq 57$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}$ ; $a, b > 0$.

$u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} > 0$

criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)(b+n)}}{\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}}$

$= \lim_{\infty} \frac{a+n}{b+n} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{a}{n})}{n(1+\frac{b}{n})} = 1$

criteriul Raabe – Duhamel:

$\lim_{\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n}{a+n} - 1\right) = \lim_{\infty} n \cdot \frac{b+n-a-n}{a+n} =$

$\lim_{\infty} \frac{n(b-a)}{n(1+\frac{a}{n})} = b-a$

dacă $b-a > 1 \iff b > a+1 \Rightarrow$ seria este convergentă

$b-a < 1$ ; $b < a+1 \Rightarrow$ seria este div.

$b-a = 1$ ; $b = a+1 \Rightarrow$ incertitudine

dacă $b = a+1 \Rightarrow u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n)} = \frac{a}{a+n}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a+n} = 0 \Rightarrow$ are loc condiția necesară de conv

criteriul comparației „la limită", cu seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{a+n}}{\frac{1}{n}} = a \cdot \lim \frac{n}{n+a} = a \cdot \lim \frac{n}{n(1+\frac{a}{n})} = a \in (0,$

$\Rightarrow$ cele 2 serii au aceeași natură $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{a}{a+n}$ = divergentă

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ ; $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} > 0$.

$0 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $\quad (4k^2-1 < 4k^2)$

$\Downarrow$

$0$ $\Rightarrow$ are loc cond. necesară de convergență

criteriul raportului ; $\lim_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)} \cdot$

$\cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \lim_{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1. \rightarrow$ incertitudine.

criteriul Raabe: $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)$

$= \lim n \cdot \frac{2n+2-2n-1}{2n+1} = \lim_{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$

seria este divergentă.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n, \ a>0.$

$u_n = a^n \cdot \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n > 0, \ (\forall) n \in \mathbb{N}.$ → criteriul rădăcinii

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2} = a$$

Dacă $\begin{cases} a \in (0,1) & \Rightarrow \text{ seria este convergentă} \\ a > 1 & \Rightarrow \text{ — " — divergentă} \\ a = 1 & \Rightarrow \text{ incertitudine} \end{cases}$

Dacă $a = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$

c.n. conv? : $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n =$

$$= \lim_{\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}}_{\to e}\Bigg]^{\frac{n+1}{n^2}\cdot n} = e^{\lim \frac{n+1}{n}} = e^1 = e \neq 0.$$

⇒ seria nu este convergentă

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot \ln n}{n}, \ a>0$

Aplicăm criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{a^{n+1} \cdot \ln(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n}{a^n \cdot \ln n} = a \cdot \lim \frac{n}{n+1} \cdot \lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = a$$

$$\lim_{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{\infty} \frac{\ln n(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = \lim_{\infty} \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} =$$

$$= \lim \frac{\ln n \left[1 + \frac{1}{\ln n} \cdot \ln(1+\frac{1}{n})\right]}{\ln n} = 1.$$

Deci: dacă $0 < a < 1 \Rightarrow$ seria este convergentă

dacă $a > 1 \Rightarrow$ — " — divergentă

dacă $a = 1$. $u_n = \frac{\ln n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1-n} = \lim \ln \frac{n+1}{n} = \ln 1 = 0$$

Condiția necesară de convergență este asigurată. Totuși seria este divergentă, deoarece, din criteriul comparației pentru termenii rezultă: $\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$, $(\forall)$ $n \geq 3$. și seria $\sum_3^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă (seria armonică) ⇒ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ este divergentă

8° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. $u_n > 0$. Aplicăm criteriul raportului:

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot (n+1)^2}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} =$

$= \lim_{\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \lim \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)\cdot 2(n+1)} = \frac{1}{2} \lim \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow$ seria este convergentă.

9° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$ ; $u_n > 0$. Aplicăm criteriul raportului: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(2n+1)}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}(2n+2)} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\cancel{2\cdot 4\cdots(2n)}}{\cancel{1\cdot 3\cdots(2n-1)}}$

$\cdot(2n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \lim \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6} = 1 \Rightarrow$ Incertitudine

Aplicăm criteriul Raabe-Duhamel:

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1} - 1\right) =$

$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\cancel{4n^2}+10n+6-\cancel{4n^2}-4n-1}{4n^2+4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n+5)}{4n^2+4n+1} = \frac{6}{4} > 1.$

$\Rightarrow$ seria este convergentă.

Putem aplica și criteriul comparației pentru termeni, astfel:

știm (vezi exercițiul nr 5°) că are loc inegalitatea:

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. Înmulțim în ambii membri cu $\frac{1}{2n+1} > 0 \Rightarrow$

$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$.

Dar serie cu termenul general $\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$ este convergentă, fiind comparabilă, la limită, cu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ = seria armonică $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

Rezultă atunci că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)(2+a)^2\cdots(n+a)^n}{1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n}$, $a > -1 \Rightarrow$ serie cu termeni pozitivi. $(a+1>0, \dots a+n>0)$

Aplicăm criteriul raportului: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$

$= \lim\limits_{\infty} \frac{(1+a)(2+a)^2 \cdots (n+a)^n \cdot (n+1+a)^{n+1}}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n}{(1+a)(2+a)^2 \cdots (n+a)^n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+a+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{\infty} \left(\frac{n+1+a}{n+1}\right)^{n+1} = \lim \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} =$

$= \lim \left[\underbrace{\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{a}}}_{e}\right]^{\frac{a}{n+1}\cdot(n+1)} = e^a$ Am folosit limita remarcabilă: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$,

dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $x_n = \frac{a}{n+1} \to 0$.

Dacă $e^a < 1 \to$ serie convergentă $\Leftrightarrow e^a < e^0 \Leftrightarrow a < 0 \Rightarrow a \in (-1,0) \Rightarrow$ conv.

$e^a > 1 \to$ serie divergentă $\Leftrightarrow e^a > e^0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ div.

$e^a = 1 \to$ incertitudine $\Leftrightarrow a = 0$.

pentru $a = 0$ seria devine: $u_n = \frac{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n}{1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n} = 1 \not\to 0$

Deci, pentru $a \in (-1,0) \Rightarrow$ serie convergentă

$a \geq 0 \to$ serie divergentă.

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$, $a > 0$, $b > 0$.

$u_n > 0 \to$ serie cu termeni pozitivi. Aplicăm criteriul raportului: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}[(n+1)a+1]}{\cancel{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}[(n+1)b+1]} \cdot$

$\cdot \frac{\cancel{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}}{\cancel{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a+\frac{1}{n+1}}{b+\frac{1}{n+1}} = \frac{a}{b}$

Deci: dacă $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < b$, seria este convergentă

$\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b > 0$, seria este divergentă

$\frac{a}{b} = 1$; $a = b \Rightarrow$ seria devine:

$u_n = \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)} = 1$, $(\forall) n$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $\neq 0$, condiția necesară de convergență nu este îndeplinită.

Deci seria este divergentă.

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a > 0$, $u_n > 0$. Aplicăm criteriul logaritmic:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim\limits_{\infty} \frac{-\ln(a^{\ln n})}{\ln n} = -\lim\limits_{\infty} \frac{\ln n \cdot \ln a}{\ln n} = -\ln a$

$= \ln \frac{1}{a}$. Deci: dacă $\ln \frac{1}{a} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{a} > \ln e \Leftrightarrow a < \frac{1}{e} \to$ conv.

Dacă $\ln \frac{1}{a} < 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{e} \Rightarrow$ divergentă. Dacă $a = \frac{1}{e} \Rightarrow u_n = \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}$ div.

(13) Arătați că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ este convergentă și calculați suma sa.

Pentru orice $n \geq 2 \Rightarrow 1-\frac{1}{n^2} < 1 \Rightarrow \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < 0$. Deci seria are toți termenii negativi. Considerăm seria $\sum_{n=2}^{\infty} -\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, care are toți termenii pozitivi. Aplicăm criteriul comparației „la limită", comparând-o cu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, care este convergentă (seria armonică generalizată cu $\alpha=2$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} + \lim_{n\to\infty} (-n^2)\cdot \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{-1}} = \ln e = 1 \in (0,+\infty)$$

$\Rightarrow$ cele două serii au aceeași natură. $\Rightarrow$ seria $\sum_{2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ este convergentă.

Pentru calculul sumei vom calcula $\lim_{n\to\infty} S_n$

$$S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \ln\frac{2^2-1}{2^2} + \ln\frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln \frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2} =$$

$$= \ln \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdots\frac{(n-1-1)(n-1+1)}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \ln \frac{1\cdot\cancel{3}}{2^2}\cdot\frac{\cancel{2\cdot 4}}{\cancel{3^2}}\cdot\frac{\cancel{3\cdot 5}}{\cancel{4^2}}\cdot\frac{\cancel{4\cdot 6}}{\cancel{5^2}}\cdots\frac{\cancel{(n-3)(n-1)}}{\cancel{(n-2)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n-2)(n)}}{\cancel{(n-1)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n-1)}(n+1)}{n^2} =$$

$$= \ln\frac{n+1}{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

(14) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$ este convergentă și calculați suma sa. Comparăm cu seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$, care este conv., fiind, la rândul său comparabilă cu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, conv.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}}{\frac{1}{n^2+n+1}} = 1 \Rightarrow \text{cele două serii sunt de aceeași natură.}$$

Pentru calculul sumei observăm că putem scrie:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n(n+1)+1} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1+\frac{1}{n(n+1)}} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}} =$$

$= \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$.

$n=1: \operatorname{arctg}\frac{1}{1^2+1+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} - \cancel{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}$

$n=2: \operatorname{arctg}\frac{1}{2^2+2+1} = \cancel{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} - \cancel{\operatorname{arctg}\frac{1}{3}}$

- - - - - - - - - - -

$n=n-1: \operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)^2+(n-1)+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$

$n=n: \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$

(+) $S_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

5) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}$, $k \geq 2$ este convergentă și să se calculeze suma sa.

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}}$, care este convergentă (seria armonică, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha = k+1 \geq 3$).

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}}{\frac{1}{n^{k+1}}} = 1 \in (0,\infty)$. $\Rightarrow$ seria dată este și ea convergentă.

Pentru calculul sumei vom constata că putem scrie:

$u_n = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right]\cdot\frac{1}{k}$

$= \frac{1}{k}\left(\varphi(n) - \varphi(n+1)\right)$ unde am notat cu $\varphi(n) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}$

Avem: $u_1 = \frac{1}{k}\left(\varphi(1) - \cancel{\varphi(2)}\right)$

$u_2 = \frac{1}{k}\left(\cancel{\varphi(2)} - \cancel{\varphi(3)}\right)$

$u_3 = \frac{1}{k}\left(\cancel{\varphi(3)} - \varphi(4)\right)$

- - -

$u_{n-1} = \frac{1}{k}\left(\varphi(n-1) - \cancel{\varphi(n)}\right)$

$u_n = \frac{1}{k}\left(\cancel{\varphi(n)} - \varphi(n+1)\right)$

(+) $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{k}\left[\varphi(1) - \varphi(n+1)\right] = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right]$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k!}$;

$\boxed{\text{Deci } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k\cdot k!}, \ (\forall)\, k \geq 2.}$

# Serii cu termeni oarecare

30.10.2020

## Serii cu termeni oarecare

O serie de numere reale se numește serie cu termeni oarecare dacă are o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi.

Criteriul general de convergență al lui Cauchy este, evident, aplicabil și seriilor cu termeni oarecare fiind un criteriu necesar și suficient de convergență. Acest criteriu este greu de aplicat din cauza generalității sale, motiv pentru care studiem criterii suficiente de convergență, mai ușor de aplicat în cazurile întâlnite frecvent.

### Criteriul lui Abel

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma: $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \cdot v_n)$ unde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere pozitive, descrescător și convergent la zero, iar $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este o serie care are șirul sumelor parțiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \cdot v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Exemplu: Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}$ cu $x \neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ este convergentă.

Fie $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n} > 0$; $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, conform criteriului Cesaro-Stolz.

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nx) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots$

$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ = termenul general al șirului sumelor parțiale al seriei

Fie și $T_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

Calculăm suma $T_n + iS_n = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \dots$
$\dots (\cos nx + i\sin nx) = z + z^2 + \dots + z^n = z(1+z+z^2+\dots+z^{n-1}) =$
$= z\cdot\dfrac{1-z^n}{1-z}$, unde am notat $z = \cos x + i\sin x$ și am folosit formula lui Moivre: $(\cos x + i\sin x)^m = \cos mx + i\sin mx$, $(\forall)\ m\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow T_n + iS_n = (\cos x + i\sin x)\cdot\dfrac{1-\cos nx - i\sin nx}{1-\cos x - i\sin x} =$

$= (\cos x + i \sin x) \cdot \dfrac{2\sin^2\frac{nx}{2} - 2i\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = (\cos x + i\sin x)\cdot$

$\cdot \dfrac{2\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}}\cdot(\cos x + i\sin x) =$

$= \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{nx}{2} + x - \frac{x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{nx}{2} + x - \frac{x}{2}\right)\right) =$

$= \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{(n+1)x}{2} + i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right) = T_n + i S_n$

$\Rightarrow S_n(x) = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \Rightarrow |S_n(x)| \le \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, $x \ne 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ are șirul sumelor parțiale mărginit. Rezultă că seria dată, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}\cdot\sin(nx)$ este convergentă.

## Serii alternate

O serie alternată este o serie de forma:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1}\cdot a_n + \dots,$$

unde $a_n > 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

## Criteriul lui Leibniz pentru serii alternate

Seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$, $a_n > 0$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ este convergentă dacă șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și convergent la zero.

Dem. Fie $v_n = (-1)^{n-1}$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Șirul sumelor parțiale al seriei este:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1}.$$

Avem: $S_1 = 1$; $S_2 = 1 - 1 = 0$; $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$; $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$\dots\ S_{2k-1} = 1$; $S_{2k} = 0$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$.

Deci șirul sumelor parțiale al seriei este mărginit. Deoarece șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și convergent la zero rezultă, conform criteriului lui Abel, că seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n$ este convergentă.

Exemple. Seria armonică alternată:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\dots$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Vom vedea că suma sa este egală cu $\ln 2$.

## Serii absolut convergente și semiconvergente

**Definiție** O serie cu termeni oarecare se numește absolut convergentă dacă seria modulelor sale este convergentă.

Dacă seria $\sum u_n$ are termeni oarecare $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ ~~este~~ e serie cu termeni pozitivi și pentru a-i stabili natura, avem la dispoziție toate criteriile studiate la acest paragraf. Teorema următoare precizează și care este natura seriei inițiale:

**Teorema.** O serie absolut convergentă este convergentă.

**Dem:** Fie seria (AC): $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$. Conform definiției seriei (AC), $\Rightarrow$ seria $|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots$ este convergentă. Conform criteriului general de convergență al lui Cauchy, rezultă că $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)$ un număr $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\,n>n_0(\varepsilon)$ și $(\forall)\,p\geq 1$, avem:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\dots+|u_{n+p}|<\varepsilon. \text{ Dar}$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}|\leq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\dots+|u_{n+p}|<\varepsilon;$$

deci seria inițială, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ verifică, de asemenea, criteriul lui Cauchy, deci este convergentă.

Reciproca teoremei nu este, în general, adevărată.

**Exemplu:** Seria armonică alternată:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\dots \text{ este}$$

convergentă, dar seria modulelor,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots, \text{ este, așa}$$

cum am constatat anterior, divergentă.

**Definiție** O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește serie semiconvergentă.

**Exemplu:** Seria armonică alternată este o serie semiconvergentă.

**Obs.** 1° Fie seria (A.C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ este convergentă, iar și $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ este convergentă.

Fie $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ şi $\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ şirurile sumelor parţiale ale seriei iniţiale şi seriei modulelor. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

Fie $a_n$ = suma termenilor strict pozitivi din $S_n$
şi $b_n$ = suma termenilor strict negativi, dar cu semn schimbat, din $S_n$. Avem relaţiile

$S_n = a_n - b_n$ şi $\sigma_n = a_n + b_n$, cu $a_n > 0$ şi $b_n > 0$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}(S_n + \sigma_n)$ şi $b_n = \frac{1}{2}(\sigma_n - S_n) \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}(S+\sigma)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}(\sigma - S)$

Deci, într-o serie absolut convergentă seriile formate cu termenii săi strict pozitivi şi cu termenii săi strict negativi, în valoare absolută, sunt ambele convergente şi între sumele lor există relaţiile de mai sus.

2° În cazul seriilor semiconvergente avem:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \neq \pm\infty$ (seria este convergentă)

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$ (seria modulelor este divergentă şi are toţi termenii pozitivi)

Notăm, ca mai sus: $a_n = \frac{1}{2}(\sigma_n + S_n)$ şi $b_n = \frac{1}{2}(\sigma_n - S_n)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Deci, într-o serie semiconvergentă, seriile formate cu termenii săi strict pozitivi şi cu termenii săi strict negativi, în valoare absolută, sunt ambele divergente. Această proprietate deosebeşte în mod clar seriile (AC) de seriile (SC).

3° Alte deosebiri sunt date de teoremele următoare:

3.1 <u>Teorema lui Dirichlet</u>. Într-o serie (AC) putem schimba ordinea termenilor într-un mod arbitrar, obţinând tot o serie (AC) şi care are aceeaşi sumă cu cea a seriei iniţiale.

Deci o serie (AC) are proprietăţile de asociativitate şi comutativitate a termenilor, deci se comportă în calcule ca sumele cu un număr finit de termeni.

3.2) <u>Teorema lui Riemann</u>: Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât seria obținută să fie tot convergentă și să aibă ca sumă un număr dat sau astfel încât seria să fie divergentă.

Teorema arată că o serie semiconvergentă nu admite proprietatea de comutativitate a termenilor spre deosebire de o serie AC, care admite această proprietate. Rezultă următoarea <u>consecință</u>:

O serie cu termeni oarecare convergentă a cărei sumă este independentă de ordinea termenilor este absolut convergentă.

<u>Operații cu serii convergente</u>

Fiind date seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, atunci seriile: $\sum_{1}^{\infty}(u_n+v_n)$; $\sum_{1}^{\infty}(u_n-v_n)$, $\sum_{1}^{\infty} a\cdot u_n$ și $\sum_{1}^{\infty}(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\dots+u_nv_1)$ se numesc, respectiv: suma și diferența seriilor date, produsul primei serii cu un număr și produsul (în sensul lui Cauchy) al celor două serii.

Se pot formula și demonstra următoarele rezultate:

<u>Teorema ①</u> Dacă seriile $\sum u_n$ și $\sum v_n$ sunt convergente și au sumele $s$ și $t$, atunci seria $\sum(\alpha\cdot u_n+\beta\cdot v_n)$, cu $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ este convergentă și are suma $\sigma=\alpha s+\beta t$.

<u>Teorema lui Mertens ②</u> produsul a două serii convergente de sume $s$ și $t$, dintre care cel puțin una este (AC), este o serie convergentă și are suma $\sigma=s\cdot t$.

Condiția ca cel puțin una din serii să fie (AC) este necesară pentru a asigura convergența seriei produs.

<u>Teorema lui Cauchy ③</u> produsul a două serii (AC) de sume $s$ și $t$, este o serie (AC), care are suma $\sigma=s\cdot t$.

Aplicatii

Stabiliti dacă seriile următoare sunt (AC) sau (SC).

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[p]{n}}$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$. este o serie alternată

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[p]{n}} = \frac{1}{\sqrt[p]{1}} - \frac{1}{\sqrt[p]{2}} + \frac{1}{\sqrt[p]{3}} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{n}} + \dots$

Seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[p]{n}} \right| = 1 + \frac{1}{\sqrt[p]{2}} + \frac{1}{\sqrt[p]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n}} + \dots$

Termenul general al acestei serii cu termeni pozitivi este $u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$, $p \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{p} < 1 \Rightarrow$ seria armonică cu $\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1)$ deci divergentă.

$\Rightarrow$ seria modulelor este divergentă.

Seria inițială este o serie alternată, cu $u_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ care este descrescător și convergent la zero.

$\Rightarrow$ seria este convergentă conform criteriului lui Leibniz, dar nu este A.C. $\Rightarrow$ seria este semiconvergentă

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, discuție după valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

- serie alternată; seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$, $(\forall)\ \alpha \in (0,1]$ și $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \downarrow 0$.

deci pt $\alpha \in (0,1]$ seria este semiconvergentă

dacă $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$, cu $\alpha > 1$, deci seria armonică generalizată cu $\alpha > 1 \Rightarrow$ seria modulelor este convergentă deci seria inițială este absolut convergentă.

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \dots$ deci

$\rightarrow$ seria geometrică de rație $r = -\frac{1}{2} \in (-1,1)$, deci convergentă.

$\rightarrow$ seria modulelor: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ = seria geometrică de rație $r = \frac{1}{2} \in (-1,1)$, deci convergentă $\rightarrow$ seria inițială este (A.C).

Suma seriei $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \lim S_n = 2/3$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}$ → serie alternată.

Seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$. $u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$. criteriul raportului la limită: $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} < 1$

→ seria modulelor este convergentă, deci seria inițială este absolut convergentă ⇒ este și convergentă.

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{(-1)^n}{\ln n} + \dots$

- serie alternată.
- seria modulelor: $\sum^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, care este divergentă, deoarece: conform criteriului comparației, $n > \ln n$, $\forall n \geq 2$ ⇒ $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$ și $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă ⇒ $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ este divergentă; conform criteriului lui Leibnitz; $u_n = \frac{1}{\ln n} \searrow 0$ seria inițială este convergentă.

⇒ seria inițială este semiconvergentă.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$;

- serie alternată
- seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ care este divergentă, conform criteriului lui Raabe-Duhamel

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}; \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}$$

$= \frac{2n+2}{2n+1}$. criteriul raportului ⇒ incertitudine

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1$.

crit. Raabe $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim \frac{n(2n+2-2n-1)}{2n+1} =$

$= \lim_{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$ ⇒ serie divergentă.

Iar, din $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ ⇒ $a_n \downarrow$ și deoarece:

$0 < a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ → $a_n \to 0$ (criteriul clEștelui) ⇒ seria inițială este semiconvergentă, cf. Leibniz.

# Serii de puteri

# Serii de puteri

Definiție. Numim serie de puteri o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ definite pe $\mathbb{R}$, unde $f_n(x) = a_n x^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ iar $a_n$ sînt numere reale.

Deci $\sum f_n = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ pentru $x \in \mathbb{R}$, iar $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ sînt numere

Toate rezultatele privind seriile de funcții sînt evident, valabile, și pentru seriile de puteri.

În studiul seriilor de puteri ne interesează în primul rînd mulțimea de convergentă a seriei. Această mulțime nu este niciodată vidă. Într-adevăr, pentru $x=0$ seria de puteri devine:

$$a_0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = a_0$$

și este, evident, convergentă, avînd suma $a_0$. Deci mulțimea de convergentă a unei serii de funcții conține întotdeauna punctul $x=0$ (serii de puteri). Există serii de puteri pentru care mulțimea de convergentă se reduce numai la punctul $0$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n\right)$ sau este toată dreapta reală $\longrightarrow$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$

Informații despre mulțimea de convergentă a unei serii de puteri ne dă teorema I lui Abel:

Teorema I a lui Abel. Pentru orice serie de puteri $\sum a_n x^n$ există un număr $\rho$ cu proprietatea $0 \le \rho \le +\infty$ și astfel încît

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\rho, \rho)$ ~~deschis~~

2) Pentru orice $x$ cu proprietatea $|x| > \rho$

seria este divergentă. -2-

Pentru orice număr $r$ cu proprietatea $0 < r < \rho$ seria este absolut și uniform convergentă pe intervalul închis $[-r, r]$.

Numărul $\rho$ despre care teoremei lui Abel afirmă că există se numește rază de convergență, iar intervalul $(-\rho, \rho)$ se numește intervalul de convergență al seriei de puteri.

Dem. - Dacă seria de puteri este convergentă numai pentru $x = 0$, atunci luând $\rho = 0$, teorema este demonstrată. Vom presupune că mulțimea de convergență conține și puncte diferite de zero. Fie, atunci, $x_0 \neq 0$ un punct de convergență al seriei. Atunci seria de numere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ este convergentă. Atunci, șirul cu termenul general $u_n = a_n x_0^n$ (termenul general al seriei) este convergent la zero, deci este mărginit. Deci există un număr pozitiv $M > 0$, astfel încât să avem:

$$|a_n x_0^n| < M, \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \dots$$

Fie $x$ un punct oarecare astfel încât $|x| < |x_0|$. Atunci avem:

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| =$$

$$= |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$ Deoarece $\left|\frac{x}{x_0}\right| <$ [illegible]

atunci seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ este convergentă și, deoarece $|a_n x^n| < M\left|\frac{x}{x_0}\right|$

conform criteriului comparației pentru termeni, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă deci convergentă.

Prin urmare, dacă $x_0$ este punct de convergență al seriei, atunci orice punct $x$ cu proprietatea $|x| < |x_0|$ este punct de convergență absolută a seriei. Rezultă că mulțimea de convergență a seriei conține întregul interval $[-|x_0|, |x_0|]$

De aici rezultă că dacă $x_1$ este punct de divergență al seriei, atunci orice punct $x$ cu proprietatea $|x| > |x_1|$ este punct de divergență al seriei. Într-adevăr, dacă ar exista un punct $x_0$ a.î. $|x_0| > |x_1|$ în care seria este convergentă atunci, conform celor demonstrate mai sus rezultă că seria ar fi convergentă în $x_1$, deoarece $|x_1| < |x_0|$, ceea ce contrazice faptul că seria este divergentă în $x_1$.

Să notăm $A$ = mulțimea de convergență a seriei de puteri. Evident, $A \neq \emptyset$ căci $0 \in A$.

Fie $\rho = \sup A$. Avem $\rho > 0$. Să arătăm că $\rho$ este raza de convergență a seriei, deci că $\rho$ îndeplinește condițiile 1) și 2) din enunț.

1) Fie $x \in (-\rho, \rho)$. Evident $|x| < \rho$ cum $\rho = \sup A$, rezultă că există $x_0 \in A$ astfel încât $|x| < x_0 < \rho$. Dar $x_0$ este punct de convergență al seriei ($x_0 \in A$) și rezultă că seria este absolut con-

vergentă în $x$, deoarece $|x| < r_0$ (comparare primei părți a demonstrației)
Cum $x$ a fost ales arbitrar în $(-\rho, \rho)$, urmează că seria este absolut convergentă pe intervalul deschis $(-\rho, \rho)$.
2) Să demonstrăm condiția 2) din enunț.
Dacă $\rho = +\infty$, atunci inegalitatea $|x| > +\infty$ nu are sens, deci condiția 2) din enunț este de prisos.
Să presupunem că $\rho < +\infty$. Fie $x$ un punct astfel încât $|x| > \rho$. Arătăm că $x$ este punct de divergență. Dacă $x$ ar fi punct de convergență, atunci orice punct $y$ pentru care $\rho < y < |x|$ ar fi punct de convergență, deci $y \in A$, deci $\rho$ nu este marginea superioară a mulțimii $A$. Contradicție cu alegerea lui $\rho = \sup A$. Deci, dacă $|x| > \rho$ seria este divergentă în punctul $x$.
Prin urmare, numărul $\rho$, definit mai sus, este raza de convergență a seriei.
Rămâne de demonstrat ultima parte a teoremei. Fie $r$ un număr astfel încât $0 < r < \rho$. Deci, $r$ este punct de convergență absolută a seriei, deci seria de numere pozitive $\sum |a_n r^n| = \sum |a_n| \cdot r^n$ este convergentă.
Pentru orice $x \in [-r, r]$ avem $|x| \leq r$, deci $|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x^n| < |a_n| \cdot r^n$. Conform unui criteriu de convergență uniformă a seriilor de funcții (Weierstrass), rezultă că seria $\sum a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.
<u>Obs</u> Dacă $0 < \rho < +\infty$, teorema lui Abel nu spune nimic cum se comportă seria de puteri în

punctele $-\rho$ și $\rho$ -, extremitățile intervalului de convergență: se poate întîmpla ca unul sau ambele puncte să fie puncte de divergență, sau unul sau ambele să fie puncte de convergență sau, în sfîrșit, seria să fie oscilantă în aceste puncte. Avem, totuși, următorul rezultat:
„Dacă seria este absolut convergentă în unul din punctele $-\rho$ sau $\rho$, atunci seria este absolut convergentă și-n celălalt punct."
Într-adevăr, pentru ambele serii, $\sum a_n(-\rho)^n$ și $\sum a_n \rho^n$, seria modulelor este convergentă, aceasta fiind $\sum |a_n| \cdot \rho^n$ deci dacă una este absolut convergentă atunci și cealaltă este absolut convergentă. Mai rezultă că dacă în unul din punctele $-\rho$ sau $\rho$ seria este divergentă, în celălalt punct seria nu este absolut convergentă (poate fi divergentă sau semiconvergentă).

Teorema lui Abel afirmă doar existența razei de convergență, dar nu dă o metodă de calcul a sa!

Teorema lui Cauchy-Hadamard.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\rho$ raza sa de convergență. Să notăm $\omega = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci $\rho = \frac{1}{\omega}$ dacă $0 < \omega < +\infty$ și $\rho = +\infty$ dacă $\omega = 0$.

Dem. Fie $x_0$ un punct oarecare și să considerăm seria de numere $\sum |a_n| \cdot |x_0|^n$. Termenii săi sînt $|a_n| \cdot |x_0|^n = u_n$. Să-i aplicăm criteriul lui Cauchy:

$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0|$, deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} =$

$= \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x_0| = \omega \cdot |x_0|$

Dacă $\omega = 0$, atunci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$, deci seria $\sum a_n x_0^n$ este absolut convergentă pentru

$(\forall)\, x_0 \in \mathbb{R}$, deci $\rho = +\infty$. Dacă $w = +\infty$ și $x_0 \neq 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty > 1$, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru orice $x_0 \neq 0$, deci $\rho = 0$. Dacă $0<w<\infty$, atunci: seria este ~~absolut~~ convergentă dacă $w \cdot |x_0| < 1 \Leftrightarrow |x_0| < \frac{1}{w}$. Dacă $w \cdot |x_0| > 1$ seria este divergentă, deci, dacă $|x_0| > \frac{1}{w}$. Fie $x_1$ a.î. $|x_1| > |x_0| > \frac{1}{w}$. Cum seria $\sum |a_n| \cdot |x_0|^n$ este divergentă conform criteriul comparației pentru termeni rezultă că seria $\sum |a_n| \cdot |x_1^n|$ este divergentă. Din demonstrația primei teoreme a lui Abel, rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ este divergentă.

Prin urmare, $\rho = \frac{1}{w}$.

În multe cazuri pentru calculul razei de convergență se poate folosi propoziția următoare, a cărei demonstrație folosește criteriul lui d'Alembert.

<u>Propoziție</u>. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri. Să presupunem că șirul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ are limită (finită sau infinită). Atunci:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

<u>Dem</u>. Fie $x_0 \neq 0$ un punct oarecare. Aplicăm criteriul lui d'Alembert seriei de numere $\sum |a_n| \cdot |x_0|^n$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}| \cdot |x_0|}{|a_n|}$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, atunci $(\forall)\, x_0 \neq 0$, seria este divergentă, deci $\rho = 0 \left( = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \right)$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = l > 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0|}{l}$

Dacă $|x_0| < \ell$, atunci $\frac{|x_0|}{\ell} < 1$, deci seria este convergentă, iar dacă $|x_0| > \ell$ atunci $\frac{|x_0|}{\ell} > 1$ deci seria este divergentă. Prin urmare $\ell$ este raza de convergență.

Obs. La criteriul lui d'Alembert se folosește raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ în timp ce pentru calculul razei de convergență se folosește raportul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Continuitatea sumei unei serii de puteri

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri, $\rho$ raza sa de convergență și $A$ = mulțimea sa de convergență. Știm că $(-\rho, \rho) \subseteq A \subseteq [-\rho, \rho]$. Pentru fiecare $x \in A$ să notăm:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Funcția $A \ni x \longmapsto S(x)$ este suma seriei de puteri pe mulțimea $A$.

Obs. Trebuie să ținem seama de faptul că suma $S(x)$ a seriei de puteri este o funcție definită numai pe mulțimea $A$ deși termenii seriei sînt definiți pe $\mathbb{R}$;

$S : A \to \mathbb{R}$; $a_n x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Fie seria de puteri:

$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ care este seria geometrică de rație $x$. Mulțimea sa de convergență este $A = (-1, 1)$. Avem: $S(x) = \frac{1}{1-x}$ și este definită pe $(-1,1)$. Deci, $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Putem scrie:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Totuși, egalitatea $\frac{1}{1-x}$ are sens pentru orice $x \neq 1$. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Funcțiile $f$ și $S$ sînt diferite, avînd domenii de definiție diferite. Avem:

$S(x) = f(x)|_{(-1,1)}$. De altfel, dacă $|x| > 1$

egalitatea $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ nu mai este adevărată, deoarece seria din membrul drept este divergentă.

Propoziție. Suma $S$ a unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul de convergență.

Dem. Fie $\rho$ = raza de convergență a seriei și $A$ = mulțimea de convergență a seriei. $S: A \to \mathbb{R}$, deci $S(x)$ are sens pentru orice $x \in (-\rho, \rho)$.

Fie $x_0 \in (-\rho, \rho)$, arbitrar. Vom arăta că $S$ este continuă în $x_0$. Avem: $-\rho < x_0 < \rho$ deci există un număr $r > 0$ astfel încât $-\rho < -r < x_0 < r < \rho$. Dar, pe intervalul $[-r, r]$ seria este uniform convergentă (teorema I a lui Abel) și, deoarece termenii seriei sunt funcții continue rezultă că suma sa $S$ este o funcție continuă pe $[-r, r]$, deci, în particular în $x_0$. Cum $x_0$ a fost ales arbitrar în $(-\rho, \rho)$ rezultă că funcția $S$ este continuă pe tot intervalul $(-\rho, \rho)$

Obs. Dacă seria este convergentă și în punctul $-\rho$ sau $\rho$, atunci ~~suma~~ $S$ este definită și în $-\rho$ sau în $\rho$. Propoziția anterioară nu afirmă nimic despre continuitatea lui $S$ în $-\rho$ sau $\rho$. Acest lucru reiese din

Teorema a-II-a a lui Abel

Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri și $\rho$ raza sa de convergență. Dacă seria este convergentă în punctul $\rho$ (sau în punctul $-\rho$) atunci suma $S$ a seriei este o funcție continuă în punctul $\rho$ (respectiv în punctul $-\rho$).

**Obs.** Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri, $\rho$ - raza sa de convergență și $S(x)$ suma sa. Dacă se știe că seria este convergentă în $x=\rho$ și dacă se cunoaște expresia lui $S(x)$ pe $(-\rho, \rho)$, atunci, funcția $S(x)$ fiind continuă în $x=\rho$, avem: $\lim\limits_{x \to \rho} S(x) = S(\rho)$. Astfel, putem afla suma seriei în punctul $\rho$ cunoscând suma sa în interiorul intervalului de convergență.

Exemplu. Fie seria $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots$

Avem: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$. Deci $\rho = 1$.

Pentru $x = 1$ se obține seria armonică alternată: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots$ care știm că este convergentă (Leibniz).

Pentru $x = -1$ se obține seria: $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$ care este $(-1)\cdot$ seria armonică, deci divergentă.

Atunci $A = (-1, 1]$ = mulțimea de convergență a seriei. Observăm că dacă $S(x)$ = suma seriei, atunci, derivând ambii membri, obținem:

$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots (-1)^{n+1}x^{n-1} + \dots$$

a cărei sumă, pe $(-1,1)$ este: $S'(x) = \frac{1}{1+x}$

Atunci, $S(x) = \ln(1+x) + C$. Pentru $x = 0$ rezultă $\ln 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$. Deci pe intervalul $(-1, 1)$ suma seriei este $S(x) = \ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \qquad \text{pentru } |x| < 1$$

Cum $S(x)$ este continuă în punctul $x = 1$, conform teoremei a -II-a a lui Abel, rezultă: $S(1) = \lim\limits_{x \to 1} S(x) = \lim\limits_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2$

Prin urmare, suma seriei armonice alternate este $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \dots$$

Derivarea seriilor de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Fie seria formată cu derivatele termenilor seriei inițiale:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Este tot o serie de puteri pe care o vom numi seria derivatelor.

Teorema următoare arată legătura dintre mulțimile de convergență ale celor două serii și dintre sumele lor.

Teoremă Dacă $\sum a_n x^n$ este o serie de puteri și $S(x)$ suma sa atunci:

a) seria derivatelor are aceeași rază de convergență

b) Funcția $S(x)$ este derivabilă pe intervalul de convergență și derivata $S'(x)$ este egală cu suma seriei derivatelor.

Dem: a) Fie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\rho$ raza sa de convergență. După cum știm, $\rho = \frac{1}{\omega}$ dacă $\omega \neq 0$ și $\rho = +\infty$ dacă $\omega = 0$, unde $\omega = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Să calculăm raza de convergență a seriei derivatelor, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Pentru orice $x \neq 0$, seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ este convergentă $\Leftrightarrow$ seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^n$ este convergentă, deoarece seria a-II-a se obține din prima prin înmulțire cu numărul $x$. Deci, seria $\sum n a_n x^{n-1}$ are aceeași rază de convergență cu seria de puteri $\sum n \cdot a_n \cdot x^n$. Pentru a-II-a serie, coeficientul lui $x^n$ este $n \cdot a_n$. Avem: $\sqrt[n]{|n \cdot a_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, rezultă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \omega$. Deci, seria $\sum n a_n x^n$, deci și seria $\sum n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, are aceeași rază de convergentă $\rho$ ca și seria $\sum a_n x^n$. 

b) Fie $x_0 \in (-\rho, \rho)$ și fie $r > 0$ astfel încât $-\rho < -r < x_0 < r < \rho$. Pe segmentul $[-r, r]$ seria derivatelor este uniform convergentă (teorema I a lui Abel) ~~și are~~ suma $\sigma(x)$. Cum seria $\sum a_n x_0^n$ este convergentă în $x_0$, ea este uniform convergentă pe $[-r, r]$, deci suma sa, $S(x)$ este derivabilă pe $[-r, r]$ și $S'(x) = \sigma(x)$. În particular, $S(x)$ este derivabilă în $x_0$ și $S'(x_0) = \sigma(x_0)$. Cum $x_0$ a fost ales arbitrar în $(-\rho, \rho)$, rezultă că $S(x)$ este derivabilă pe $(-\rho, \rho)$ și $S'(x) = \sigma(x)$.

Procedeul descris anterior se poate repeta pentru seria derivatelor de orice ordin, astfel că avem teorema:

<u>Teoremă</u> Dacă $\sum a_n x^n$ este o serie de puteri și $\rho$ raza sa de convergență, atunci:

a) seria derivatelor de ordinul $k$ are aceeași rază de convergență $\rho$.

b) Suma $S$ a seriei date este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență și derivata de ordin $k$ $S^{(k)}$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul $k$. $(\forall)\ k \geq 1$

Așadar, dacă se cunoaște suma unei serii de puteri, se obține prin derivare, suma seriei derivatelor.

<u>Exemple</u>. 1)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad \text{pt } |x| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad \text{pt } |x| < 1$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot x + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots \text{ pt } |x|<1$$

etc.

2) Fie seria de puteri:

$$x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \end{cases} \quad \rho, I, A, S(x)$$

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Deci $\rho = 1$, deci seria este convergentă pentru $|x|<1$.

Să notăm cu $f$ suma sa pt $|x|<1$:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Prin derivare obținem:

$$f'(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

pentru $|x|<1$.

Deoarece derivata funcției $g(x) = -\ln(1-x)$ este $g'(x) = \frac{1}{1-x}$, conform unei consecințe a teoremei lui Lagrange rezultă că $f(x) = g(x) + C$; deci:

$$f(x) = -\ln(1-x) + C.$$

Pentru $x=0$, avem $f(0) = 0 = g(0)$, deci $C = 0$.

Așadar,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \text{ pt } |x|<1$$

Obs. Pt. o serie „lacunară" $\Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^{\varphi(n)}$, unde $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ și $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), pentru calculul lui $\rho$ se va utiliza una din formulele:

1) $$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}}},$$

$$\begin{cases} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^{n^2}}; S? \\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)3^{n^2}}; \end{cases}$$

2) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}},$$

## Serii Taylor

Def. Fie $a \in \mathbb{R}$. Vom numi serie Taylor, o serie de puteri ale funcției $(x-a)$, de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$

Fie $y = x - a$. Atunci obținem seria de puteri: $\sum a_n y^n = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n + \dots$

Fie $\rho$ raza de convergență a acestei serii de puteri. Pentru $-\rho < y < \rho$ seria este convergentă, iar pentru $|y| > \rho$ seria este divergentă. Avem:

$-\rho < y < \rho \iff -\rho < x - a < \rho \iff a - \rho < x < \rho + a$

Prin urmare, seria inițială este convergentă pe intervalul $(a-\rho, a+\rho)$, cu centrul în $a$. Toate proprietățile seriilor de puteri se mențin pentru seriile Taylor:

1) Pentru orice serie Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ există un număr $\rho$, $(0 \le \rho \le +\infty)$, numit raza de convergență, astfel încât:

a) seria este absolut convergentă pe $(a-\rho, a+\rho)$

b) seria este divergentă pentru $|x-a| > \rho$

c) Pentru orice $r$, $0 < r < \rho$, seria este uniform convergentă pe intervalul închis $[a-r, a+r]$

2) Dacă $\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci $\rho = \frac{1}{\omega}$ dacă $0 < \omega \le +\infty$ și $\rho = +\infty$ dacă $\omega = 0$.

3) Suma seriei este o funcție continuă pe $(a-\rho, a+\rho)$.

4) O serie Taylor se poate deriva termen cu termen. Seria derivatelor are aceeași rază de convergență și suma ei este derivata sumei seriei Taylor inițiale.

5) Suma unei serii Taylor este o funcție indefinit derivabilă pe $(a-\rho, a+\rho)$

Exemple. Fie seria Taylor:

$$1 + (x-a) + (x-a)^2 + \dots + (x-a)^n + \dots$$

este seria geometrică de rația $x-a$, deci ea este convergentă dacă $|x-a| < 1$ și divergentă dacă $|x-a| > 1$. Raza de convergență este $\rho = 1$, iar intervalul de convergență este $(a-1, a+1)$. Pe acest interval, suma seriei este:

$$\frac{1}{1-(x-a)} = \frac{1}{1-x+a} = 1 + (x-a) + \dots + (x-a)^n + \dots$$

Prin derivare se obține:

$$\frac{1}{(1-x+a)^2} = 1 + 2(x-a) + 3(x-a)^2 + \dots + n(x-a)^{n-1} + \dots$$

pentru $a-1 < x < a+1$.

Analog ca la exemplul dat la seriile de puteri, avem:

$$\ln(1-x+a) = -(x-a) - \frac{(x-a)^2}{2} - \dots - \frac{(x-a)^n}{n} - \dots$$

pentru $|x-a| < 1$, adică $a-1 < x < a+1$.

## Dezvoltări în serie

Fie $I$ un interval și $a \in I$. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă în punctul $a$. Să considerăm seria Taylor următoare:

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Această serie se numește seria Taylor a funcției $f$ în punctul $a$. Ea are o rază de convergență $0 \le \rho \le +\infty$, o mulțime de convergență $A$, care conține cel puțin punctul $a$ și un interval de convergență $(a-\rho, a+\rho) \subset A$. Suma $T$ a acestei serii este o funcție definită pe $A$.

Fie $T_n(x)$ sumele parțiale ale acestei serii;

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$T_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T_n$ sunt polinoame definite pe toată axa. Șirul $(T_n)_n$ al acestor polinoame este convergent pe A către T.  $T_n \to T$

Mai observăm că $T_n$ sunt polinoamele lui Taylor din formula lui Taylor atașată funcției f în punctul a:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

pentru $x \in I$, unde $R_n$ este restul formulei lui Taylor al funcției f în punctul a; $R_n : I \to \mathbb{R}$. Avem, deci:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x), \ (\forall)\ x \in I$$

$R_n$ nu trebuie confundat cu restul de ordinul n al seriei Taylor. Vom nota cu $S_n$ restul de rang n al seriei Taylor; $S_n$ este o funcție definită pe mulțimea A de convergență a acestei serii.

Deci, $T(x) = T_n(x) + S_n(x)$ pt $(\forall) x \in A$.

Se pune întrebarea, dacă avem

$$f(x) = T(x) \quad \text{pentru } \underline{\underline{x \in A \cap I}}$$

adică dacă suma seriei Taylor a funcției f, pe mulțimea $A \cap I$, este chiar funcția f. Răspunsul este dat de:

<u>Teorema</u>. Seria Taylor a funcției f în punctul a este convergentă într-un punct $x \in A \cap I$ către ~~...~~ valoarea $f(x)$ a funcției f în x dacă și numai dacă resturile $R_n$ ale formulelor în x ale resturilor $R_n$ ale formulelor lui Taylor formează un șir $(R_n(x))$ convergent la zero. restul formulei lui Taylor.

<u>Dem</u>. Din $f(x) - T_n(x) = R_n(x)$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Dar, în acest caz, $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$

rezultă, deci $f(x) = T(x)$.

Prin urmare, dacă $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, putem scrie:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Corolar. Fie B o submulțime a mulțimii $A \cap I$. Avem:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

pentru orice $x \in B \iff$ șirul de funcții $(R_n)$ format cu resturile formulei lui Taylor este convergent pe B către zero.

Egalitatea de mai sus s.n. formula de dezvoltare a funcției f în serie Taylor în jurul punctului a.

Dacă $0 \in I$ și f este indefinit derivabilă în 0, atunci seria Taylor a funcției f în punctul 0 are forma:

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

și s.n. seria MacLaurin a funcției f.

Observație. Dacă $f(x) = T(x)$, atunci $\rho_n(x) = R_n(x)$, deoarece $\rho_n(x) = T(x) - T_n(x)$ și $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

## Exemple de dezvoltări în serie Mac-Laurin

1°. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ $f$ este indefinit derivabilă în orice punct.

Avem: $f^{(n)}(x)=e^x$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $f^{(n)}(0)=1$

Formula lui Mac Laurin cu restul sub forma lui Lagrange va fi:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}$$

unde $0<\theta<1$

Avem: $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\theta x}$ și

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left|e^{\theta x}\right| \le \frac{|x|^{n+1}\cdot e^{\theta|x|}}{(n+1)!}$$

Se arată că seria $\sum_{n=0}^{\infty}|R_n(x)|$ este convergentă

$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}\cdot e^{\theta|x|}}{(n+1)!}=0$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$, deci suma seriei Mac Laurin, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este $e^x$. Deci,

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

cum s-a făcut dezvoltarea în $\mathbb{R}$, rezultă că mulțimea $A$ de convergență a seriei este toată dreapta, și suma ei este $e^x$ pe toată dreapta.

2° Fie funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, definită prin $f(x)=\sin x$. Funcția este indefinit derivabilă pe toată dreapta și avem:

$f(x)=\sin x$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x$ $\qquad f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x$ $\qquad f'''(0)=-1$

$f^{(IV)}(x) = \sin x$ — 18 — ; $f^{(IV)}(0) = 0$.

Să considerăm formula lui Mac-Laurin cu restul în forma lui Lagrange:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$
$$+ (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos(\theta x), \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos(\theta x)$. Deoarece $|\cos \theta x)| \leq 1$, avem $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Dar $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Deci suma seriei Mac Laurin, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este $\sin x$. Deci;

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

3° Fie funcția $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definită prin $f(x) = \cos x$; are indefinit derivatele în orice punct din $\mathbb{R}$.

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{(IV)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{(IV)}(0) = 1$

Formula lui Mac Laurin cu restul lui Lagrange se va scrie:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos(\theta x), \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Deoarece $|\cos(\theta x)| \le 1$, avem $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$

deci $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Prin urmare,

suma seriei MacLaurin este $\cos x$,

seria fiind convergentă pe toată dreapta.

(4°) Fie $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin

$f(x) = \ln(1+x)$. Funcția este indefinit

derivabilă pentru orice $x \in (-1, +\infty)$

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad\qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad\qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad\qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3} \qquad\qquad f'''(0) = 2!$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{3!\,(-1)^{3-1}}{(1+x)^4} \qquad\qquad f^{(iv)}(0) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad\qquad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Fie formula lui MacLaurin cu restul lui Lagrange

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0<\theta<1, \quad x > -1.$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \;; \quad |R_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left|\frac{x}{1+\theta x}\right|^{n+1}$$

Dacă $0 < x \le 1 \Rightarrow 0 < \theta x \le \theta < 1$

$$1 < 1+\theta x < 2$$

$$1 > \frac{1}{1+\theta x} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{1+\theta x} < x \le 1$$

Deci, dacă $x \in [0, 1]$, atunci $\frac{x}{1+\theta x} \le 1$ și

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{n+1}\cdot\left|\frac{x}{1+\theta x}\right|^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0$$

deci $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Prin urmare, pentru $x \in [0, 1]$ avem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Egalitatea este adevărată pentru $x \in (-1, 1]$, aşa cum am văzut cu ajutorul teoremei de derivare termen cu termen a seriilor de puteri.

Prin urmare:

- mulţimea de definiţie a funcţiei este intervalul $(-1, +\infty) = I$
- mulţimea de convergenţă a seriei Mac Laurin este $A = (-1, 1]$ şi numai pentru $x \in A \cap I$ avem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

deci, $A \cap I = (-1, 1] \cap (-1, +\infty) = (-1, 1]$.

5° Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{pentru } -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pentru } x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

Funcţia este, evident, indefinit derivabilă în $x = 0$ şi derivatele sale în $x = 0$ sunt egale cu derivatele funcţiei $x \mapsto \ln(1+x)$, deci $f$ are aceeaşi dezvoltare în seria Mac Laurin. Avem:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

pentru $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ şi $f(x) = 0$ în rest.

Dar seria este convergentă pe $(-1, 1]$.

Avem: $I = \mathbb{R}$, $A = (-1, 1]$, $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \neq A \cap I$

6. În exemplul 4°, înlocuind $x$ cu $-x$ definim $f: (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x)$. Seria Mac-Laurin a acestei funcţii este:

$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$

Pe intervalul $[-1, 1)$ suma acestei serii este $\ln(1-x)$. Deci:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots,$$
$(\forall) x \in [-1, 1)$.

## Dezvoltări în serie Taylor

1° Fie $f(x) = e^x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și fie $a \in \mathbb{R}$.

Avem: $f(a) = e^a, \dots f^{(n)}(a) = e^a, \dots$

$$e^x = e^a + \frac{x-a}{1!} e^a + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot e^a + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot e^a + \dots,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2° Fie $f(x) = \sin x$, $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ și $a \in \mathbb{R}$.

$f(a) = \sin a$; $f'(a) = \cos a$; $f''(a) = -\sin a$; $f'''(a) = -\cos a$, $f^{(IV)}(a) = \sin a, \dots$ deci,

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!} \cdot \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a + \frac{(x-a)^4}{4!} \cdot \sin a - \dots, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

3° Fie $f(x) = \cos x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$.

$f(a) = \cos a$; $f'(a) = -\sin a$; $f''(a) = -\cos a$; $f'''(a) = \sin a$; $f^{(IV)}(a) = \cos a, \dots$

$$\cos x = \cos a - \frac{x-a}{1!} \sin a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cos a + \frac{(x-a)^3}{3!} \sin a + \frac{(x-a)^4}{4!} \cos a - \dots, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

4° Fie $f(x) = \ln(1+x)$, $f: (-1, +\infty)$, și fie $a > -1$. Avem:

$f(a) = \ln(1+a)$

$f'(a) = \frac{1}{1+a}$

$f''(a) = -\frac{1}{(1+a)^2}$

$f'''(a) = \frac{2}{(1+a)^3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(a) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+a)^n}$

Atunci,

$$\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{x-a}{1+a} - \frac{(x-a)^2}{2(1+a)^2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(x-a)^n}{n(1+a)^n} + \dots,$$ pentru orice $x$ din intervalul de convergență al seriei. Să calculăm raza de convergență a seriei:

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n(1+a)^n}} = \frac{1}{1+a}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

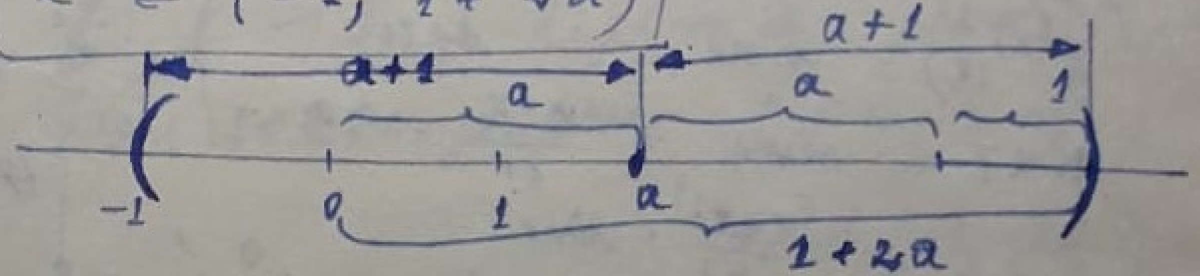
Deci $\rho = \frac{1}{\omega} = 1+a$.

Intervalul de convergență:

$$x-a \in (-\rho, \rho); \quad -1-a < x-a < 1+a$$

$$\Rightarrow \quad -1 < x < 1+2a.$$

Deci, $\boxed{x \in (-1,\ 1+2a)}$




Deci, pentru orice serie Taylor a funcției $f(x) = \ln(1+x)$, intervalul de convergență are extremitatea stângă în punctul $-1$. Deci cu cât $a$ este mai apropiat de $-1$, cu atât raza de convergență a seriei Taylor este mai mică.

5° Prin derivarea seriei anterioare termen cu termen se obține:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+a} - \frac{x-a}{(1+a)^2} + \dots + (-1)^n\frac{(x-a)^n}{(1+a)^{n+1}} + \dots,$$ pentru $-1 < x < 1+2a$.

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+a)^2} - \frac{2(x-a)}{(1+a)^3} + \dots (-1)^{n+1}\frac{n(x-a)^{n-1}}{(1+a)^{n+1}} + \dots$$

, de asemenea, pentru $-1 < x < 1+2a$.
Schimbând $x$ în $-x$, $f:(-\infty, 1)$, $f(x) = \ln(1-x)$, și $a$ în $-a$, se obține:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \dots + \frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}} + \dots$$

pentru $-1+2a < x < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{2(x-a)}{(1-a)^3} + \dots (-1)^n \frac{n(x-a)^{n-1}}{(1-a)^{n+1}},$$ pentru $-1+2a < x < 1$.

$\left( \varphi = \frac{1}{1-a} \right.$ ; $\rho = 1-a$ ; $-1+a < -x+a < 1-a$

$-1 < -x < 1-2a$

$\boxed{-1+2a < x < 1}$ $\left.\right)$

## 2.3 Serii de puteri. Exemple.

1° Seria geometrică

$1 + x + \dots + x^n + \dots$ pentru $|x| < 1$ și divergentă pentru $|x| > 1$. Raza de convergență este $\rho = 1$. Pentru $x = 1$ se obține seria de numere pozitive $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ care-i divergentă iar pentru $x = -1$ se obține seria de numere $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$ care este oscilantă, deci divergentă. Deci, mulțimea de convergență este $A = (-1, 1)$

2° Fie seria $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

- Raza de convergență:

$$a_n = \frac{1}{n};\ \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

pentru $x = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ – seria armonică, divergentă.

pentru $x = -1$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ → seria armonică alternată înmulțită cu $(-1)$, deci convergentă

Deci $A = [-1, 1)$. Observăm că $\forall x \in (-1, 1)$ seria este absolut convergentă iar în $x = -1$ este semiconvergentă.

(3°) Seria $-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$ are raza de convergență $\rho = 1$, mulțimea de convergență $A = (-1, 1]$, este absolut convergentă pe $(-1, 1)$ și semiconvergentă în $x = 1$. Se obține din seria de la exemplul 2 înlocuind pe $x$ cu $-x$.

(4°) Seria: $\frac{x}{1^\alpha} + \frac{x^2}{2^\alpha} + \dots + \frac{x^n}{n^\alpha} + \dots$ unde $\alpha > 1$ este absolut convergentă pe $[-1, 1]$. Raza de convergență este $\rho = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = 1$

Pentru $x = 1$: $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ → convergentă; fiind seria armonică generalizată cu $\alpha > 1$.

Pentru $x = -1$: $-\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} + \dots$ care este absolut convergentă, deoarece seria modulelor este seria armonică de mai sus.

(5°) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$

$|a_n| = \frac{1}{n}$; $\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

Pentru $x = -1$: $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$, care este divergentă.

Pentru $x = 1$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$, care este convergentă (seria armonică **alternată**).

Seria derivatelor:

$1 - x + x^2 + \dots (-1)^{n-1} \cdot x^n + \dots$; este seria geometrică de rație $-x$ și are aceeași rază de convergență ca și seria nederivată.

Suma seriei derivatelor este $S(x) = \frac{1}{1+x}$

Seria dată este uniform convergentă pentru orice $x \in (-1, 1)$. La fel și seria derivatelor. Deci, suma seriei date este derivabilă și derivata sa este suma seriei derivatelor.

**Fie** $f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$

Deci, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $(\forall)\, x \in (-1, 1)$

funcția $g(x) = \ln(1+x)$ este derivabilă și derivata sa, pe $(-1,1)$ este $g'(x) = \frac{1}{1+x}$. Deci, $f(x)$ și $g(x)$ diferă printr-o constantă. Deci: $f(x) = \ln(1+x) + c$

Dar: $f(0) = 0$; $\ln(1+0) = \ln 1 = 0 \Rightarrow c = 0$.

Deci: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots$

Conform teoremei a II-a a lui Abel, suma seriei de puteri (care este convergentă în $x=1$) este o funcție continuă în $x = 1$. Atunci vom avea:

$$S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \ln 2$$

Deci $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$

6° Fie seria geometrică de rație $x$. Pentru $|x| < 1$ avem:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Seria derivatelor are aceeași rază de convergență ca seria dată, deci:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Se analoga,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2x + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots \text{ pentru } |x|<1.$$

etc.

7° Să considerăm seria:

$$x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$$

pentru $|x| < 1$.

Notăm cu $f(x)$ suma sa pentru $|x|<1$.

Deci $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

Prin derivare vom obține:

$$f'(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x};\ |x|<1$$

Fie funcția $g(x) = -\ln(1-x)$. Avem: $g'(x) = \frac{1}{1-x}$

Atunci rezultă că $f(x) = g(x) + c$

pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$; $g(0) = -\ln 1 = 0 \Rightarrow c = 0$

Deci $f(x) = g(x)$. Prin urmare, avem:

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$ pentru $|x|<1$

Având în vedere că:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots$ pt. $|x|<1$

scăzând prima serie din a -II- a, obținem:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots\right)$$

pentru $|x|<1$, sau

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad \text{pt. } |x|<1.$$

Această serie ne permite să calculăm logaritmul natural al oricărui număr pozitiv, $y>0$. Într-adevăr, fie $\frac{1+x}{1-x} = y$, cu $|x|<1$. Avem: $1+x = (1-x)y \Rightarrow x(1+y) = y-1$ deci $x = \frac{y-1}{y+1}$; dacă $y>0$, rezultă $|x|<1$.

Atunci: $\ln y = 2\left(\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{(y-1)^3}{(y+1)^3} + \dots + \frac{1}{2n+1}\frac{(y-1)^{2n+1}}{(y+1)^{2n+1}} + \dots\right)$

seria din dreapta este foarte rapid convergentă.

8° Fie seria: $\boxed{\text{lacunară}} \rightarrow \boxed{\text{Vezi exemplul 12 pt. calculul lui } \rho}$

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Avem: $\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$. Notăm cu $f(x)$ suma seriei pe intervalul de convergență. Avem:

$$f(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \ |x|<1$$

Prin derivare, obținem:

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots, \ |x|<1$$

care este convergentă, fiind serie geometrică de rație $x^2$. Deci

$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Fie funcția $g(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Deci $f$ și $g$ diferă printr-o constantă:

$f(x) = g(x) + C$. Dar, pentru $x=0$

$f(0)=0$, $g(0)=0$ $\Rightarrow c=0$. Deci:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad |x|<1.$$

9° Fie seria geometrică de rație $x^2$:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \dots + (+1)^n \cdot (x^2)^n + \dots \quad \text{pentru } |x|<1$$

Înlocuind $x^2$ cu $-x^2$, pentru $|x|<1$, avem:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad |x|<1.$$

Fie și seria:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Raza de convergență va fi:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1, \text{ deci } |x|<1.$$

Fie $f(x)$ suma sa pentru $|x|<1$. $f(x)$ este o funcție derivabilă și avem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Într-adevăr: $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots$ pentru $|x|<1$

Dar, funcția $g(x)$ are aceeași derivată dacă $g(x) = \operatorname{arctg} x$; $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Deci: $f(x) = \operatorname{arctg} x + c$. Cum $f(0)=0$ și $g(0)=0$, $\Rightarrow c=0$. Deci, pentru $|x|<1$ avem:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Pentru $x=1$ seria devine:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

care este o serie alternată și conform criteriului lui Leibniz este convergentă. Conform teoremei a II-a a lui Abel rezultă că suma $f(x)$ a seriei pe $(-1,1)$, este ~~convergentă~~ o funcție continuă în $x=1$. Din

deci $S(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$.

Urmare:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots$$

9°. Fie seria:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad \text{pentru } |x|<1.$$

Pentru $x = 1$ și $x = -1$ se obțin serii numerice divergente:

$$x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots \quad \text{- div}$$

$$x = -1 \rightarrow -\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots\right) \quad \text{- div.}$$

10° Fie seria:

$$1 + k x + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\cdot x^n + \dots$$

unde $k$ este un număr real oarecare se numește seria binomială. Raza de convergență:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{k(k-1)\cdots(k-n)}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{k-n}\right| = 1.$$ Deci $x \in (-1, 1)$. Fie $f(x)$ suma seriei pe acest interval:

$$f(x) = 1 + k\cdot x + \frac{k(k-1)}{2}\cdot x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\cdot x^n + \dots \quad \text{pt. } |x|<1$$

Prin derivare obținem:

$$f'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1!}\cdot x + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1} + \dots \quad \text{pt. } |x|<1.$$

Înmulțim cu $x$ și rezultă:

$$x\cdot f'(x) = kx + \frac{k(k-1)}{1!}\cdot x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}\cdot x^n + \dots$$

Calculăm:

$$f'(x) + x\cdot f'(x) = k + \left(k + \frac{k(k-1)}{1!}\right)x + \left(\frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)}{1!}\right)x^2 + \dots$$

$$+ \dots \left(\frac{k(k-1)\cdots(k-n)}{n!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}\right)x^n + \dots \quad \text{pt } |x|<1$$

Avem:

$$\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)}{n!} + \frac{n\,k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!\,n} =$$

$$= \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\left(k - \cancel{n} + \cancel{n}\right) = k\,\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

Prin urmare:

$$(1+x)f'(x) = k + k^2x + k\cdot\frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + k\,\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

prin urmare, $(1+x)f'(x) = k \cdot f(x)$ pt $|x|<1$

Deci: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{1+x}$ pentru $|x|<1$.

Fie $g(x) = \ln f(x)$ și $h(x) = k \ln(1+x)$

Avem: $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ și $h'(x) = \frac{k}{1+x}$

Deci $g'(x) = h'(x)$ pentru $|x|<1$. Rezultă:

$g(x) = h(x) + C$

$\ln f(x) = k \ln(1+x) + \ln K$, unde $C = \ln K$.

$\ln f(x) = \ln (1+x)^k \cdot K \Leftrightarrow$

$f(x) = (1+x)^k \cdot K$. pentru

$x=0$ seria binomială devine: $f(0)=1$

Deci $f(0) = 1 = 1^k \cdot K \Rightarrow \boxed{K=1}$.

Așadar, $f(x) = (1+x)^k$, $|x|<1$. Prin urmare, avem:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Notând simbolic $C_k^n = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$, seria binomială se mai scrie:

$$(1+x)^k = 1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \dots + C_k^n x^n + \dots, \ |x|<1$$

11) Pentru diferite valori ale lui $k$ nam obține:

$k=\frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3 -$

$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4 + \dots (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + \dots; \ |x|<1$$

pentru $k = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot x^n + \dots, \ |x|<1.$$

De altfel, observând că $f(x) = \sqrt{1+x}$ este derivabilă pentru $|x|<1$ și că $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

deci, a-II-a serie se poate deduce din prima prin derivare.

În ultima serie schimbând pe $x$ cu $-x$ se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n + \dots$$

pentru $|x|<1$

Înlocuind acum $x$ cu $x^2$ se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \dots$$

pentru $|x|<1$.

12°. Să considerăm seria:

$$x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\,5}\cdot x^5 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}\cdot x^{2n+1} + \dots$$

O astfel de serie se numește lacunară. În general o serie de puteri se numește lacunară dacă este de forma:

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n\cdot x^{\varphi(n)}, \text{ unde } \varphi(n)$$

este o funcție definită pe $\mathbb{N}$ și are următoarele proprietăți:

$\varphi(n) \to$ întreg, pozitiv

$\varphi(n+1) > \varphi(n)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

În acest caz pentru calculul razei de convergență nu se mai poate folosi nici una din formulele cunoscute în general, ci se vor utiliza formulele:

a) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |u_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}}}$$ sau

b) $$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|^{\frac{1}{\varphi(n+1)-\varphi(n)}}$$

care sînt generalizări ale formulelor cunoscute, cu condiția ca ultimele limite să existe.

În cazul nostru, $\varphi(n) = 2n+1$

$\varphi(n+1) - \varphi(n) = 2n+3-2n-1 = 2$

deci $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}\cdot\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!\,(2n+3)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right|^{\frac{1}{2}}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)(2n+3)}{(2n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$. deci $x\in(-1,1)$. Fie $f(x)$ suma ei pt.

Prin derivarea seriei date se obține:

$f'(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \dots$ pt. $|x|<1$.

Iar această serie, pentru $|x|<1$, are suma $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. deci $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pt $|x|<1$.

Fie $g(x) = \arcsin x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pt $|x|<1$

deci $f(x) = \arcsin x + C$

pentru $x=0 \Rightarrow f(0)=0$, $\arcsin 0 = 0 \Rightarrow C=0$.

deci

$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}x^{2n+1} + \dots$

pentru $|x|<1$. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. deci:

pentru $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\,\frac{1}{5\cdot 2^5} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\,(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}} + \dots$

$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 5\cdot 2^6} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!\cdot(2n+1)\cdot 2^{3n}} + \dots\right)$

Această serie este rapid convergentă.