Teorema de derivabilitate.

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri și ρ = raza sa de convergență, atunci:

a) seria derivatelor de ordinul k are aceeași rază de convergență, ρ, $(\forall)\, k \geq 1$

b) suma $S(x)$ a seriei inițiale este infinit derivabilă pe intervalul de convergență și derivata sa de ordinul k, $(S(x))^{(k)}$ este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul k, $(\forall)\, k \geq 1$

12.11.2021
8 – 12 + 12 – 14

Exemple

1° $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

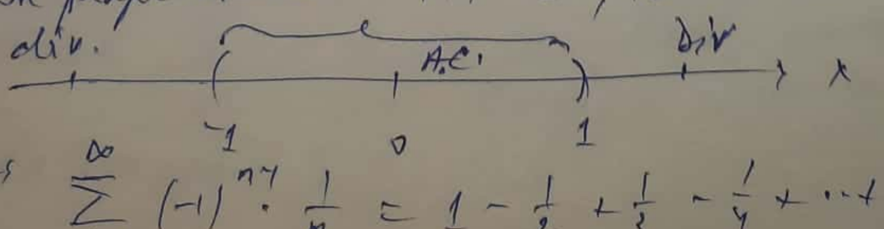
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$ Teorema Cauchy-Hadamard

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \rho = 1$$

J = intervalul de convergență: $J = (-1, 1)$

T1 Abel $(\forall)\, x \in (-1, 1) \Rightarrow$ seria este A.C.

$(\forall)\, x$ cu proprietatea $|x| > 1$, seria este div



Pt $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$

= serie numerică alternată. Este seria armonică alternată.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ → serie alternată.

Dacă $a_n = \frac{1}{n}$ este de numere pozitive, descrescător și convergent la zero, atunci seria este convergentă.

$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$; $a_n > 0$; $a_{n+1} < a_n$

$x = +1$ este punct de convergență.

pt $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) =$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right)$

seria armonică : $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ este divergentă. ⇒ $x = -1$ = punct de divergență.

⇒ $A = (-1, 1]$ = mulțimea de convergență a seriei de puteri.

verificăm dacă pentru $x = 1$, seria este absolut conv sau semiconvergentă.

seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

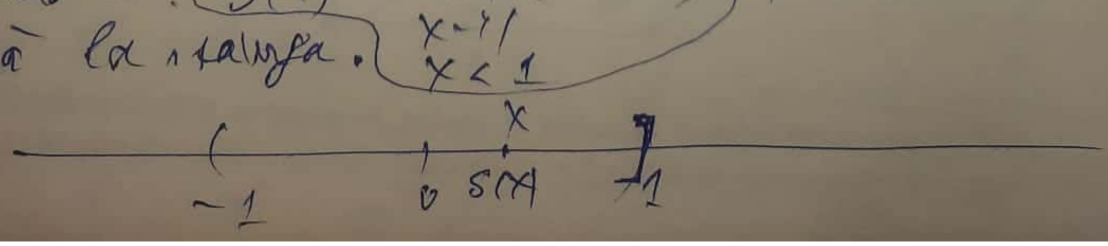
= seria armonică → divergentă. ⇒ seria mod. absolută pt $x = 1$ nu este A.C.

⇒ seria este semiconvergentă. pt $x = 1$.

Rămâne să calculăm suma seriei pt $x = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$

vom calcula suma $S(x)$ a seriei pe interiorul int de convergență ($x \in (-1, 1)$) și apoi cu teorema a II-a a lui Abel, vom calcula : $S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} S(x)$; $S(x)$ este continuă la stânga.



$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$, suma

conform teoremei de derivabilitate, suma $S(x)$ este o funcție derivabilă pe intervalul de convergență și suma seriei derivatelor este egală cu derivata sumei seriei inițiale, seria inițială și seria derivatelor au aceeași rază de convergență, $\rho = 1$.

$\Rightarrow S'(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots\right)'$

$S'(x) = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1} + \dots}_{\text{seria geometrică rație } r = -x}$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1}$; $b_n = (-1)^{n-1}$

$\rho_1 = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^n} \right| = 1$

$\rho_1 = 1$; $I = (-1, 1)$ și pt seria derivatelor.

pt $x = \pm 1 \to$ seria este divergentă.

$S'(x) = \lim_{n \to \infty} S_n'(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1}\right)$

$= \lim_{n \to \infty} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (-1)^n \cdot x^n}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}$

deoarece $x \in (-1, 1)$ și $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$. (șirul exponențial)

$\Rightarrow S'(x) = \frac{1}{1 + x}$, $(\forall)\ x \in (-1, 1)$

$\Rightarrow S(x) = \int \frac{1}{1+x} \cdot dx + C = \ln(1 + x) + C$

$(\forall)\ x \in (-1, 1)$

$\ln(1 + x) + C = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$

$\forall x \in (-1, 1)$. Pt $x = 0 \Rightarrow$

$\ln 1 + C = 0 \to \boxed{C = 0}$

$\Rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \dots = \ln(1 + x)$

Conform th. a-II-a a lui Abel, $\Rightarrow$

pt $x = 1$: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} S(x) = S(1) = \underline{\ln 2}$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \ln 2 =$$

Suma seriei armonice alternate!

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

Prin derivare se obține:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots$$

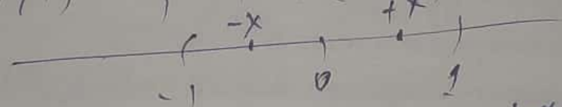
(seria geometrică de rație $r = -x$)

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots \Big| \cdot (-1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^{n} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots$$

(1) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^n}{n} + \dots$

$I = (-1, 1)$; $x \in (-1, 1) \Rightarrow (-x) \in (-1, 1)$



$\Rightarrow$ Înlocuind pe x cu $-x$ vom obține:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \Big| \cdot (-1)$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$-\ln(1-x) = \ln(1-x)^{-1} = \ln \frac{1}{1-x}$$

(2) $\ln \dfrac{1}{1-x} = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^n}{n} + \dots$

$x \in (-1, 1)$

$$\Rightarrow \ln(1+x) + \ln \frac{1}{1-x} = \ln \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots + 2 \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Serii Taylor și serii Mac-Laurin

Definiție. Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numește serie Taylor a seriei de puteri ale lui $(x-a)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

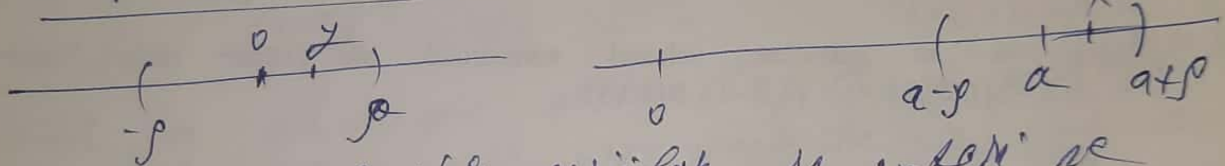
Cu substituția $y = x-a$ se obține seria de puteri ale lui y:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n = a_0 + a_1 y + a_2 \cdot y^2 + \dots + a_n \cdot y^n + \dots$$

Fie ρ = raza sa de convergență.

$-\rho < y < \rho \iff -\rho < x-a < \rho \;/+a \Rightarrow$

$a-\rho < x < a+\rho$; $x \in (a-\rho, a+\rho) = I$



Toate proprietățile seriilor de puteri se păstrează și pentru seriile Taylor:

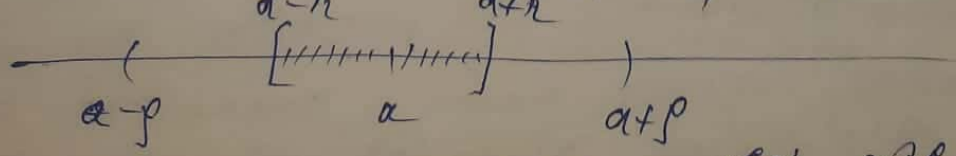
Pentru orice serie Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$:

① - există un număr ρ, $(0 \le \rho \le +\infty)$, numit rază de convergență cu proprietățile:

a) seria este AC pe intervalul $(a-\rho, a+\rho)$

b) seria este divergentă pentru $|x-a| > \rho$

c) pentru orice r, $0 < r < \rho$ seria este uniform convergentă pe intervalul închis $[a-r, a+r] \subset (a-\rho, a+\rho)$



② Raza de conv. a seriei Taylor este dată de teorema Cauchy-Hadamard $\rho = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

3) Suma seriei Taylor este o funcție continuă pe intervalul de convergență. $(a-\rho, a+\rho)$

4) Suma seriei Taylor este o funcție de k ori derivabilă pe intervalul de convergență și derivata sa de ordinul k este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul k, $(\forall) k \geq 1$

Obs. Pentru $a = 0$ se obține cazul particular al seriilor de puteri analizate anterior.

Dezvoltări în serie.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in I$. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție infinit derivabilă în punctul $a \in I$. Vom considera seria Taylor următoare:

$$f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + \dots$$

$$a_n = \frac{(x-a)^2}{n!}, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

Seria se numește seria Taylor a funcției f în punctul $a \in I$ care are proprietățile $1 \div 4$ din prezentarea anterioară.

Termenul general al șirului sumelor parțiale al acestei serii este $T_n(x)$, dat de expresia:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$$

$T_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește polinomul lui Taylor de gradul n asociat funcției f.

Șirul acestor polinoame, $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ care este șirul sumelor parțiale al seriei Taylor și este convergent pe mulțimea de convergență A, este un polinom T; $T_n \xrightarrow[n \to \infty]{x \in A} T$

Aceste polinoame sunt exact polinoamele lui Taylor din formula lui Taylor asociată funcției f în punctul $x = a$

Se demonstrează că formula lui Taylor asociată funcției f în punctul $x = a$ este:
$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + R_n(x)$$
și are loc pentru $x \in I$ pe care este definită f; R_n se numește restul formulei lui Taylor al funcției f în punctul $x = a$ și are diverse forme, cea mai cunoscută fiind dată de Lagrange: $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$, cu $\theta \in (0,1)$

Are loc următorul rezultat:

<u>Teoremă</u> Seria Taylor a lui f în punctul a este convergentă într-un punct $x \in A \cap I$ și are ca sumă valoarea $f(x)$ a funcției f în punctul x dacă și numai dacă valorile în punctul x ale resturilor $R_n(x)$ din formula lui Taylor formează un șir $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent la zero: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $x \in A \cap I$.

În acest caz vom scrie $f(x) = T(x)$ unde $T(x)$ este suma seriei Taylor asociată funcției f pe intervalul $A \cap I$.

Pentru $a = 0$ se obține seria Mac-Laurin asociată funcției f:
$$\begin{cases} f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(0) + \dots \\ x \in I \cap A. \end{cases}$$

Exemple de dezvoltări în serie Mac-Laurin

1°) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Formula lui Mac-Laurin cu restul lui Lagrange:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\theta x)$$

$\theta \in (0,1)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}}_{R_n(x)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x} = 0 \Rightarrow$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim (n+1) = +\infty$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

2°) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 0$

$f''(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ $\qquad f'''(0) = -1$

$\qquad f^{(4)}(0) = 0$

— — —

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

Formula lui Mac-Laurin

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \cos(\theta x) \quad \theta \in (0,1), \ x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

3°) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad f(0) = 1$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1$

— — —

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2} \cdot \cos \theta x}{(2n+2)!}$$

$x \in \mathbb{R}$. $\theta \in (0,1)$

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{2n+2} \cdot \cos(\theta x)}{(2n+2)!} \right| = 0.$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \ (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

4° $f(x) = \ln(1+x)$ }
5° $f(x) = \ln(1-x)$ } vezi exemplele anterioare!

6° $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$

$\ln(e^{ix}) = \ln(\cos x + i \sin x) \Leftrightarrow \ln(\cos x + i \sin x) = ix$

Dacă derivatele a două funcții sunt egale, atunci cele 2 funcții diferă printr-o constantă.

$u(x) = \ln(\cos x + i \sin x)$; $v(x) = ix$.

$$u'(x) = \frac{-\sin x + i \cos x}{\cos x + i \sin x} = \frac{(-\sin x + i \cos x)(\cos x - i \sin x)}{(\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)} =$$

$$= \frac{\cancel{-\sin x \cos x} + i \sin^2 x + i \cos^2 x - i^2 \cancel{\sin x \cos x}}{\cos^2 x - i^2 \sin^2 x} = \frac{i(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x + \sin^2 x} = i$$

$v'(x) = (ix)' = i$

$u'(x) = v'(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + C$

$\ln(\cos x + i \sin x) = ix + C \Leftrightarrow \cos x + i \sin x = e^{ix + C}$ $(\forall) x$.

$x = 0 \to 1 = e^C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow u(x) = v(x)$

$\ln(\cos x + i \sin x) = ix \Leftrightarrow \boxed{\cos x + i \sin x = e^{ix}}$

$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $sh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$ch^2 x - sh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1$$

$\boxed{ch^2 x - sh^2 x = 1}$

$th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\begin{cases} \cos x + i\sin x = e^{ix} \\ \cos x - i\sin x = e^{-ix} \end{cases}$$; înlocuim x cu $-x$; $\Rightarrow$

(+) $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

(−) $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \cos x &= ch(ix) \\ \sin x &= \frac{sh(ix)}{i} \end{aligned}}$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} e^{ix} = 1 + \dfrac{ix}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{i x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots \\ e^{-ix} = 1 - \dfrac{ix}{1!} - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{i x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots \end{cases}$$

$$e^{ix}+e^{-ix} = 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) \Big/ :2$$

7° $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

Analog, se poate calcula și dezvoltarea lui $\underline{\sin x}$

8° $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

9° $sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - finalizare

10° Fie dezvoltarea:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Să se calculeze ρ, $I = (-\rho, \rho)$; A și suma seriei pe intervalul de convergență.

$$S(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}} \right| = \lim \frac{2n+3}{2n+1} = 1$$

$\Rightarrow I = (-1, 1)$.

Convergența la capete:

$x=1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\dots$

$\rightarrow$ serie alternată cu $a_n = \frac{1}{2n+1} > 0$, $a_n \searrow 0$

$\Rightarrow$ serie convergentă (Leibniz)

seria modulelor este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \rightarrow$ divergentă, fiind comparabilă cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \in (0,+\infty) \Rightarrow$ cele 2 serii au aceeași natură. Cum $\sum \frac{1}{n}$ este div $\Rightarrow \sum \frac{1}{2n+1}$ este div. (Ex: cu Raabe $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \dots$ etc.

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \rightarrow$ seria anterioară, cu semn schimbat. $\Rightarrow$ convergentă

Deci, pt $x=\pm 1$ seria este semiconvergentă

Calculul sumei:

$S(x) = -\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\dots+(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$

$S'(x) = -x^2+x^4-x^6+x^8+\dots+(-1)^n \cdot x^{2n}+\dots$

$S'(x) = -x^2(1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-x^2)^n+\dots)$

$x \in (-1,1)$

$S'(x) = (-x^2)\frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{-x^2}{1+x^2} = \frac{-x^2-1+1}{1+x^2} = -1+\frac{1}{1+x^2}$

$S'(x) = -1+\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow S(x) = \int\left(-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$S(x) = -x+\operatorname{arctg} x + C = -\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\dots$

pt $x=0 \Rightarrow \boxed{C=0.}$

$\Rightarrow \boxed{S(x) = -x+\operatorname{arctg} x}$

(1) seria geometrică de rație $r=-x^2$; $r\in(-1,1)$

$1+r+r^2+\dots+r^{n-1}+\dots = \frac{1}{1-r}$

$1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}+(-1)^n \cdot x^{2n}+\dots$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right| = 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$$

Suma: $S(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots \quad x \in (-1,1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$x = \pm 1 \to$ seria este convergentă (ca serie alternată)

$$x = 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

(12) Fie seria de puteri: $\quad ; \; a_n = \frac{1}{n}$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow I = (-1,1)$$

se conv:

conv la capetele intervalului

$x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \to$ seria armonică divergentă.

$$x = -1 : -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots) = -\ln 2$$

$$(-1)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right.$$

seria armonică alternată, cu semn schimbat.

$$x \in [-1, 1)$$

Fie $S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$, cum $x \in (-1,1)$

$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow S'(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow S(x) = \int \frac{1}{1-x} \cdot dx = -\ln|1-x| = -\ln(1-x) \; ; \; |x| < 1$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \; ; \; x \in [-1,1)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \ln 2.$$

Dacă $x \in (-1,1) \Rightarrow -x \in (-1,1)$

Înlocuim pe x cu $-x$, $\Rightarrow$

$$-\ln(1+x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n} + \dots \quad /\cdot(-1)$$

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + \dots & x \in (-1,1] \\ -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + \dots \end{cases}$$

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad |x| < 1$$

Seria servește calculul logaritmului natural al oricărui număr pozitiv:

$$\frac{1+x}{1-x} = y \rightarrow 1 + x = y - xy \Rightarrow x(1+y) = y - 1 \quad \boxed{x = \frac{y-1}{y+1}}$$

Dacă $y > 0 \Rightarrow |x| < 1$

$$\ln y = 2\left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2n+1} + \dots\right]$$

Seria binomială

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n!} = \left(\frac{A_n^k}{P_n}\right); \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

Sunt n+1 termeni;

Serie de puteri ale lui x:

Fie seria de puteri ale lui x:

$$f(x) = 1 + k \cdot x + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

$k \in \mathbb{R}$, un nr real oarecare.

$$\rho = \lim_{n \to \infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty}\left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)}\right|$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left|\frac{n+1}{k-n}\right| = 1 \Rightarrow \boxed{x \in (-1,1) = I}$$

intervalul de convergență

Suma seriei pe I este funcția $f(x)$, pentru care se arată că verifică relația: $(1+x) \cdot f'(x) = k \cdot f(x)$, $|x| < 1$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{1+x}, \quad (\forall)\, |x| < 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \int \frac{k}{1+x} \cdot dx$$

$$\ln f(x) = k \cdot \ln(x+1) + K; \quad \ln f(x) = \ln(1+x)^k + K.$$

$$f(x) = e^{\ln(1+x)^k + K}; \quad f(x) = (1+x)^k \cdot e^K.$$

$$x = 0 \Rightarrow e^K = 1 \Rightarrow K = 0$$

$$\boxed{f(x) = (1+x)^k}$$

→ seria binomială

$$(1+x)^k = 1 + k \cdot x + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad |x| < 1.$$

rezultate o infinitate de termeni!

Notație simbolică: $C_k^n = \dfrac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$

∴ seria binomială se scrie astfel:

$$(1+x)^k = 1 + C_k^1 \cdot x + C_k^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^k \cdot x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

~~este~~ o generalizare a binomului lui Newton, valabilă pentru $(\forall)\, k \in \mathbb{R}$ și pentru $|x| < 1$.

Pentru diverse valori ale lui k avem:

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} \qquad f: [-1, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

$$C_{\frac{1}{2}}^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} \Rightarrow$$

$$k = \frac{1}{2}: \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n \cdot n!} \cdot x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$\text{Pt } k = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot x^n + \dots \quad |x| < 1$$

Fie dezvoltarea pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\cdot x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \dots + \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot x^n + \dots$$

valabilă („=") pentru $|x|<1$, putem înlocui x cu x^2

$|x|<1 \Rightarrow |x^2|<1 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow x\in(-1,1) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot x^6 + \dots + \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot x^{2n} + \dots$$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Integrând termen cu termen obținem dezv. în serie de puteri pentru această funcție:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,\quad |x|<1$$

În această dezvoltare înlocuim pe x cu $-x$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot x^n + \dots\quad |x|<1$$

În ultima dezvoltare înlocuim pe x cu x^2 $\Rightarrow x^2<1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot x^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot x^{2n} + \dots\quad |x|<1$$

$\Rightarrow \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \arcsin x$. Integrând termen cu termen $\Rightarrow$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^2\cdot n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\quad |x|<1$$

Dacă luăm $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2^5\cdot 5} + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}} + \dots$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln a}$, $a>0$. Să se stabilească natura seriei:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; se calculează $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln n}$, $u_n>0$.

$u_n = n^{\ln a}$; $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{n^{\ln a}} = n^{-\ln a}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^{-\ln a})}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln a \cdot \ln n}{\ln n} = -\ln a$

dacă $-\ln a > 1$ $/\cdot(-1)$ $\Rightarrow$ seria este convergentă $\Rightarrow$ serie conv

$\ln a < -1$; $\ln a < \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow a < \frac{1}{e}$

$\Rightarrow a \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \to$ serie convergentă.

dacă $-\ln a < 1 \to$ serie div $\Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

dacă $-\ln a = 1$ (incertitudine)

$\Rightarrow \ln a = -1$. Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = seria armonică $\to$ divergentă.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$, $a>0$. Arătați că este convergentă și calculați suma sa.

$\to$ serie cu termeni pozitivi.

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{1}{(n+a+1)(n+a+2)}}{\frac{1}{(n+a)(n+a+1)}} = \lim \frac{n+a}{n+a+2} = 1 \to$ Incert

criteriul lui Raabe:

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{\infty} n\cdot\left(\frac{n+a+2}{n+a} - 1\right) = \lim_{\infty} n\cdot\frac{\cancel{n}+\cancel{a}+2-\cancel{n}-\cancel{a}}{n+a}$

$= \lim \frac{2n}{n+a} = 2 > 1 \Rightarrow$ seria este conv.

calculul sumei:

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{(1+a)(2+a)} + \frac{1}{(2+a)(3+a)} + \dots + \frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$

$\frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \frac{A}{n+a} + \frac{B}{n+a+1} = \frac{A(n+a+1) + B(n+a)}{(n+a)(n+a+1)}$

$A(n+a+1) + B(n+a) = 1$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow A(n+a+1) + B\cdot a = 1$, $(\forall)\, n$

$n(A+B) + A(a+1) + B\cdot a = 1$, $\Rightarrow B = -A$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A(a+1)+Ba=1 \end{cases} \Rightarrow A(a+1-a) = 1 \to \boxed{A=1 \Rightarrow B=-1}$

verificare

$$\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n+a+1}=\frac{\cancel{n+a}+1-\cancel{n}-\cancel{a}}{(n+a)(n+a+1)}=\frac{1}{(n+a)(n+a+1)}$$

$n=1: \quad \frac{1}{(1+a)(2+a)}=\frac{1}{1+a}-\cancel{\frac{1}{2+a}}$

$n=2: \quad \frac{1}{(2+a)(3+a)}=\cancel{\frac{1}{2+a}}-\cancel{\frac{1}{3+a}}$

$n=3: \quad \frac{1}{(3+a)(4+a)}=\cancel{\frac{1}{3+a}}-\cancel{\frac{1}{4+a}}$

— — — — —

$n-1: \quad \frac{1}{(n-1+a)(n+a)}=\cancel{\frac{1}{(n-1+a)}}-\cancel{\frac{1}{n+a}}$

$n\ : \quad \frac{1}{(n+a)(n+a+1)}=\cancel{\frac{1}{n+a}}-\frac{1}{n+a+1}$

(+) $S_n=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+a+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{n+a+1}\right)=$

$=\frac{1}{1+a}$

Natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ – serie alternată

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\infty}=0$; $a_n=\frac{1}{\ln n}\searrow 0 \Rightarrow$ seria este convergentă.

Seria modulelor: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} \rightarrow \frac{1}{\ln n}>0$.

criteriul comparației

dacă $\begin{cases} a_n \le b_n \text{ și } \sum b_n \text{ conv} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv} \\ a_n \le b_n \text{ și } \sum a_n \text{ div} \Rightarrow \sum b_n \text{ div} \end{cases}$

$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n} \rightarrow$ divergentă.

$\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$; $\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$

și $\sum\frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum\frac{1}{\ln n}$ div. $\Rightarrow$ seria este conv (Leibniz) dar nu este A.C. $\Rightarrow$

seria este semiconvergentă!

(valentingarban@yahoo.com)