UNIVERSITATEA **TITU MAIORESCU**
Facultatea de INFORMATICĂ

Conf. univ. dr.
VALENTIN GÂRBAN

CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL

Curs pentru învăţământul la distanţă

editura universităţii Titu Maiorescu

BUCUREŞTI – 2017

CUPRINS 2

UNIVERSITATEA TITU MAIORESCU, BUCUREŞTI
FACULTATEA DE INFORMATICĂ
ÎNVĂŢĂMÂNT LA DISTANŢĂ

CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL

Calcul diferenţial şi integral este una din disciplinele de fundamentale care, pentru profilul INFORMATICĂ, este impusă de către Agenţia Naţională pentru Asigurarea Calităţii în Învăţământul Superior (ARACIS) ca fiind esenţială pentru pregătirea studenţilor şi pentru depăşirea procedurilor de evaluare şi acreditare. Modul de prezentare a acestui material are în vedere particularităţile învăţământului la distanţă, la care studiul individual este determinant. Pentru orice nelămuriri faţă de acest material vă rugăm să contactaţi tutorele de disciplină care are datoria să vă ajute oferindu-vă toate explicaţiile necesare.

Disciplina ***Calcul diferenţial şi integral*** îşi propune următoarele obiective specifice:

- Însuşirea noţiunilor fundamentale şi a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor privind şiruri şi serii numerice şi de funcţii, limită, continuitate, calcul diferenţial (una sau mai multe variabile), calcul integral;
- Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
- Formarea şi dezvoltarea aptitudinilor şi deprinderilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată, în rezolvarea problemelor tehnico-economice şi de specialitate;
- Formarea şi dezvoltarea capacităţilor de abstractizare, generalizare şi sinteză;
- Identificarea corectă a tuturor dimensiunilor unei probleme matematice precum şi a procedurilor ce pot fi utilizate pentru rezolvarea acesteia;
- O comparaţie critică a metodelor de rezolvare evidenţiind, eventual, calea optimă de soluţionare.

Vă precizăm de asemenea că, din punct de vedere al verificărilor şi al notării, cu adevărat importantă este capacitatea pe care trebuie să o dobândiţi şi să o probaţi de a rezolva toată tipologia de probleme aplicative aferente materialului teoretic prezentat în continuare. De aceea vă recomandăm să parcurgeţi cu atenţie toate problemele rezolvate şi să rezolvaţi problemele propuse prin testele de autoevaluare si temele de control; fiţi convinşi că examenul final apelează la tipurile de probleme prezente în secţiunile menţionate anterior.

SUCCES!

Coordonator disciplină: Conf. univ. dr. Valentin Gârban
Tutori: Asist. univ. drd. Zanfir Veronica

UNITATEA DE ÎNVĂŢARE Nr. 1 –

ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE ŞI DE FUNCŢII

Obiective urmărite:

1. Însusirea noţiunilor fundamentale din domeniul şirurilor şi seriilor de numere şi de funcţii.
2. Formarea si dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale si de specialitate din anii superiori;
3. Formarea deprinderilor de modelare matematică a unor probleme de natură informatică, tehnică sau economică, cu utilizarea cunostinţelor însuşite.

Rezumat:

În această unitate de învăţare sunt prezentate, pe parcursul primelor două lecţii, principalele noţiuni cu caracter teoretic referitoare la şirurile şi seriile de numere reale ($\mathbb{R}, \mathbb{R}^k$) şi de numere complexe ($\mathbb{C}, \mathbb{C}^k$) şi algoritmii specifici de rezolvare a problemelor care se referă la şiruri şi serii de numere:

- noţiunile de convergenţă şi limită a unui şir de numere (reale sau complexe) şi de convergenţă şi sumă a unei serii de numere;
- criterii de convergenţă pentru şiruri şi serii de numere (reale, complexe din $\mathbb{R}^k$);
- algoritmi pentru calculul limitelor de şiruri, în corelaţie cu criteriile de convergenţă studiate;
- metode de calcul pentru determinarea sumei a numeroase clase de serii numerice convergente.

În următoarele două lecţii sunt prezentate principalele noţiuni teoretice referitoare la convergenţa şirurilor şi seriilor de funcţii, a seriilor Taylor şi de puteri, precum şi algoritmii cei mai des întâlniţi pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestor lecţii:

- convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii, asemănările şi deosebirile dintre aceste noţiuni;
- transferul proprietăţilor de continuitate, derivabilitate, integrabilitate, existenţă a primitivelor termenilor şirurilor şi seriilor de funcţii uniform convergente asupra funcţiei limită, respectiva sumei seriei;
- criterii, metode şi algoritmi de rezolvare a problemelor de convergenţă simplă şi uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii şi aplicaţii ale lor;
- un studiu dezvoltat al seriilor de puteri şi al seriilor Taylor şi Mac-Laurin, cuprinzând rezultatele fundamentale referitoare la raza, intervalul şi multimea lor de convergenţă şi natura convergenţei lor pe mulţimea de convergenţă, proprietăţile sumei unei serii

de puteri pe intervalul de convergenţă, (continuitate, derivabilitate, mărginire, integrabilitate Riemann, existenţa primitivelor), aplicarea acestor proprietăţi la calculul sumei unei serii de puteri şi la dezvoltarea a numeroase funcţii uzuale în serie de puteri.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecţii sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule şi algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noţiunilor teoretice şi algoritmilor de rezolvare prezentaţi anterior;
- în finalul fiecărei lecţii este propus un test de autoevaluare şi la sfârşitul unităţii de învăţare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate şi ordonate după gradul lor de dificultate şi acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învăţare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unităţii de învăţare, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

Convergenţă şi limită a unui şir de numere (reale sau complexe) sau de funcţii, convergenţă şi sumă a unei serii de numere sau de funcţii, convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor şi seriilor de funcţii; serii de puteri, serii Taylor, serii Mac-Laurin, rază, interval şi multime de convergenţă, transferul proprietăţilor termenilor asupra limitei sau sumei.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor anunţate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare si a Temelor de control.

LECŢIA 1 - ŞIRURI DE NUMERE REALE. PUNCTE LIMITĂ. CONVERGENŢĂ

1. Siruri de numere reale

Definiţia 1.1.1. Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale. Un număr real a se numeşte ***punct limită*** al şirului considerat, dacă în orice vecinătate a sa se află o infinitate de termeni ai şirului.

Notându-se cu L mulţimea punctelor limită pentru şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, marginea superioară a mulţimii L se va numi ***limita superioară*** a şirului, iar marginea inferioară a mulţimii L se va numi ***limita inferioară*** a şirului considerat.

Se va scrie: $\sup(L)=\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)$ şi $\inf(L)=\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)$.

Exemple

1) Şirul cu termenul general $x_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, are ca puncte limită pe $-1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1$.

2) Şirul cu termenul general $x_n=\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, va avea $L=\{0\}$, deci $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n)=\liminf\limits_{n\to\infty}(x_n)=0$, şirul fiind convergent.

Definiţia 1.1.2. Şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte ***convergent***, dacă există un număr x, astfel încât pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall)\ n\ge n(\varepsilon)$ să se verifice $|x_n-x|<\varepsilon$.

Numărul real x cu proprietatea de mai sus se numeşte ***limita şirului*** $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şi se va scrie $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=x$.

Dacă un şir $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, limitele sale superioară şi inferioară sunt egale.

Definiţia 1.1.3. Un şir care are limita infinită sau un şir pentru care cele două limite, inferioară şi superioară, sunt diferite se numeşte ***şir divergent***.

Teorema lui Weierstrass. Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Teorema Cesaro-Stolz. Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oarecare şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton crescător de numere pozitive, cu $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Atunci, dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell$, va exista şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ şi cele două limite vor avea aceeaşi valoare.

Consecinţa 2. Dacă $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

1) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \infty,\ b_n \in \mathbb{R}_+^*,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$;

2) $(\exists)\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Atunci $(\exists)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\cdot b_1 + \ldots + a_n\cdot b_n}{b_1+\ldots+b_n} = a$.

Criteriul radicalului

Dacă şirul $(a_n)_n$ este convergent şi are termenii pozitivi, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Indicaţie de rezolvare:

Se aplică teorema Cesaro-Stolz pentru şirurile $(\lg a_n)_n$ şi $b_n = n$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg a_1 + \lg a_2 + \ldots + \lg a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \lg a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \lg \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} \lg a_n,$$

de unde rezultă $\lg\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\right) = \lg\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ şi de aici cerinţa problemei.

Criteriul raportului

Dacă şirul $(a_n)_n$ are termenii pozitivi, atunci $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dacă ultima limită există.

Criteriul majorării

Dacă $|a_n - a| \le b_n$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

O reciprocă a teoremei Cesaro-Stolz

Dacă $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sunt două şiruri de numere reale cu proprietăţile:

1) $b_n \in \mathbb{R}^*,\ b_n \ne b_{n+1},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$;

2) $(\exists)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$;

3) $(\exists)\ \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Atunci $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\ell$.

Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy. Condiţia necesară şi suficientă ca un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să fie convergent este ca pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall)\ n\ge n(\varepsilon)$ şi pentru $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$ să se verifice $\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$.

2. Şiruri în $\mathbb{R}^k$

Fie $\mathbb{R}^k=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_k)\,\middle|\,x_i\in\mathbb{R},\ (\forall)\ i=\overline{1,k}\right\}$. Elementele lui $\mathbb{R}^k$ se numesc ***puncte*** sau ***vectori***.

Observaţie. Pe mulţimea $\mathbb{R}^k$ se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire cu numere reale prin:

1) $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_k+y_k),\ (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}^k$;

2) $\alpha\cdot x=(\alpha\cdot x_1,\alpha\cdot x_2,...,\alpha\cdot x_k),\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}^k,\ (\forall)\ \alpha\in\mathbb{R}$.

$\left(\mathbb{R}^k,+,\cdot\right)$ are o structură de spaţiu vectorial peste corpul *K*.

Definiţia 1.3.1. Fie $X\subset\mathbb{R}^k$. O aplicaţie $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to K$, $(K=\mathbb{R},\mathbb{C})$ se numeşte ***produs scalar*** pe mulţimea *X*, dacă:

1) $\langle x,x\rangle\ge 0,\ (\forall)\ x\in X,\ \langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=(0,0,...,0)\in\mathbb{R}^k$;

2) $\langle\lambda\cdot x,y\rangle=\langle x,\lambda\cdot y\rangle=\lambda\cdot\langle x,y\rangle,\ (\forall)\ x,y\in X,\ (\forall)\ \lambda\in K$;

3) $\langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle,\ (\forall)\ x_1,x_2,y\in X$;

4) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle},\ (\forall)\ x,y\in X$, unde $\overline{\langle y,x\rangle}$ este conjugatul numărului complex $\langle y,x\rangle$.

Pentru $K=\mathbb{R}$ condiţia 4) din definiţia produsului scalar devine $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle,\ (\forall)\ x,y\in X$.

Observaţie. Pe spaţiul vectorial $\left(\mathbb{R}^k,+,\cdot\right)$ se introduce produsul scalar de forma $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\cdot y_i$.

Definiţia 1.3.2. Fie $X \subset \mathbb{R}^k$. O aplicaţie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte ***normă*** pe *X*, dacă:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,...,0) \in \mathbb{R}^k$;

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $(\forall)$ $x \in X$, $(\forall)$ $\alpha \in K$;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $(\forall)$ $x, y \in X$.

Observaţie. Pe $\left(\mathbb{R}^k, +, \cdot\right)$ se introduce norma $\|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+$ definită cu ajutorul produsului scalar prin $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}^k$.

Rezultă că $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}$.

Definiţia 1.3.3. Fie $a \in \mathbb{R}^k$ şi $r \in \mathbb{R}_+$. Mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}^k$ pentru care $\|x - a\|_2 < r$ se numeşte ***sfera deschisă*** cu centrul în *a* şi de rază *r*.

Definiţia 1.3.4. Fie $a \in \mathbb{R}^k$ şi $r \in \mathbb{R}_+$. Mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}^k$ pentru care $\|x - a\|_2 \le r$ se numeşte ***sfera închisă*** cu centrul în *a* şi de rază *r*.

Observaţie. În cazul în care $a \in \mathbb{R}$ sfera deschisă devine mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x - a| < r \Leftrightarrow x \in (a - r, a + r)$.

Notaţie. Vom nota cu $B_r(a)$ sfera cu centrul în *a* şi raza *r*.

Definiţia 1.3.5. Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte ***deschisă***, dacă pentru $(\forall)$ $a \in A$ există o sferă deschisă $B_r(a) \subset A$.

Exemplu

Intervalele $I_k = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_k) \middle| \; a_i < x_i < b_i, \; i = \overline{1,k} \right\}$ sunt mulţimi deschise în $\left(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_2\right)$.

Definiţia 1.3.6. Fie $a \in \mathbb{R}^k$. O mulţime $V \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte ***vecinătate*** a punctului *a*, dacă există o mulţime deschisă inclusă în *V* şi care-l conţine pe *a*.

Notaţie. Vom nota cu $V(a)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui *a*.

Definiţia 1.3.7. Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct *a* se numeşte ***punct de acumulare*** pentru *A*, dacă $(\forall)$ $V \in V(a)$ verifică $\left(V \setminus \{a\}\right) \cap A \ne \varnothing$.

Definiţia 1.3.8. Se numeşte ***şir*** în $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, o aplicaţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, definită prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, unde $a_n = \left(a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}\right) \in \mathbb{R}^k$.

Notaţie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplu

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \left(\sin\frac{n\pi}{2}, \frac{(-1)^n}{n} \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este din $\mathbb{R}^2$.

Definiţia 1.3.9. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este ***convergent***, dacă există $a_0\in\mathbb{R}^k$, astfel încât $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n(\varepsilon)$ pentru care $\|a_n-a_0\|_2<\varepsilon,\ (\forall)\ n>n(\varepsilon)$.

Observaţie. Pentru $a_n, a_0\in\mathbb{R}^k$ avem:

$$\left|a_{n_i}-a_{0_i}\right|<\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(a_{n_i}-a_{0_i}\right)^2}=\|a_n-a_0\|_2<\sum_{i=1}^{k}\left|a_{n_i}-a_{0_i}\right|.$$

Din aceste inegalităţi rezultă că un şir din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile componente $\left(a_{n_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $i=1,2,...,k$, sunt convergente în $\mathbb{R}$.

Definiţia 1.3.10. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ se numeşte ***şir Cauchy*** dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât pentru $(\forall)\ n>n(\varepsilon)$ şi pentru $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$ să avem $\|a_{n+p}-a_n\|_2<\varepsilon$.

Teorema 1.3.11. Condiţia necesară şi suficientă ca un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ să fie convergent este ca el să fie şir Cauchy în $\mathbb{R}^k$.

3. Probleme rezolvate

1.4.1 Să se determine punctele limită pentru următoarele şiruri:

a) $u_n=a^{(-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{n}$; **b)** $u_n=\left(1+\dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$; **c)** $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$;

d) $u_n=(-1)^n\cdot\sqrt[n]{n}$; **e)** $u_n=(1+\cos n\pi)\cdot\dfrac{n}{n+1}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) pentru *n* număr par, $u_n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{n}\to\dfrac{1}{a}$; pentru *n* număr impar $u_n=a+\dfrac{1}{n}\to a$; deci, punctele limită sunt *a* şi $\dfrac{1}{a}$;

b) e şi $\dfrac{1}{\text{e}}$;

c) $-1,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1$;

d) $-1,\ 1$;

e) pentru $n=2k$ avem $u_{2k}=2\cdot\dfrac{2k}{2k+1}$, deci $\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=2$. Pentru $n=2k+1$ avem $u_{2k+1}=0$, deci $\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k+1}=0$. Se obţin punctele limită 2 şi 0.

1.4.2 Să se determine limitele inferioară şi superioară pentru următoarele şiruri:

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \dfrac{n}{2n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin^2 n\dfrac{\pi}{4}$;

c) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \left[\dfrac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n\dfrac{\pi}{2}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se determină punctele limită ale şirului; pentru n număr par $a_n = 1 + \dfrac{n}{2n+2} \to \dfrac{3}{2}$, iar pentru n număr impar $a_n = -\dfrac{n}{2n+1} \to -\dfrac{1}{2}$; deci, mulţimea punctelor limită este $L = \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$, de unde rezultă că $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2}$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{1}{2}$;

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$;

c) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{e} + 1$ şi $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

$\boxed{\textbf{1.4.3}}$ Folosind teorema lui Weierstrass să se studieze convergenţa următoarelor şiruri:

a) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$; **b)** $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}},\ a > 0,\ a_0 = 0$;

c) $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{a}{a_{n-1}}\right),\ a > 0,\ a_0 > 0$; **d)** $a_n = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a_{n-1}^2}{2}$, $a_0 = 0, 0 < a < 1$;

e) $a_{n+1} = a_n(1 - a_n), 0 < a_0 < 1$; **f)** $a_n = 1 + \dfrac{2}{a_{n-1}},\ a_0 = 1$;

g) $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ b_n = \dfrac{a_{n-1} + 2 \cdot b_{n-1}}{3},\ 0 < a_0 < b_0$.

Indicaţie de rezolvare:

a) şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este cu termeni pozitivi, iar raportul

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n+1} \cdot \mathrm{e} < 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde rezultă că şirul este monoton descrescător. Cum toţi termenii sunt pozitivi, şirul va fi mărginit inferior de 0, deci este convergent.

Pentru calculul limitei, dacă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, introducând limita în relaţia de recurenţă $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{1}{n+1} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, se va obţine $\ell = \ell \cdot 0 \cdot \mathrm{e}$, de unde $\ell = 0$;

b) şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere pozitive şi monoton crescător, demonstraţie ce se poate realiza prin inducţie matematică după *n*. Presupunând că ar exista $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, aceasta va trebui să verifice relaţia de recurenţă, adică $\ell = \sqrt{a+\ell}$, de unde $\ell^2 - \ell - a = 0$ şi se obţin $\ell_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $\ell_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Cum $\ell_2 < 0$ nu convine, termenii şirului fiind pozitivi, rezultă ca limită posibilă ℓ_1. Cum şirul este crescător, adică $a_{n-1} < a_n$ şi $a_1 = \sqrt{a} < a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, rezultă $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} < 1$, $\dfrac{a_1}{a_n} = \dfrac{\sqrt{a}}{a_n} < 1$, de unde $\dfrac{a}{a_n} < \sqrt{a}$.

Din relaţia de recurenţă ridicată la pătrat se va obţine $a_n^2 = a + a_{n-1}$, adică $a_n = \dfrac{a}{a_n} + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} < \sqrt{a} + 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, adică şirul este mărginit superior, deci este convergent, iar ℓ_1 este limita sa;

c) convergent;
d) convergent;
e) convergent;

f) cum $a_0 > 0$ rezultă că $a_n > 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ şi $a_n = 1 + \dfrac{2}{a_{n-1}} < 1 + 2 = 3$, deci şirul este mărginit.

Pentru studiul monotoniei, se consideră

$$a_{n+2} - a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) = \frac{4}{a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \cdot (a_n - a_{n-2}),$$

deci $(a_{n+2} - a_n)$ are acelaşi semn cu $(a_n - a_{n-2})$.

Deoarece $a_2 - a_0 > 0$, rezultă că subşirul $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ este monoton crescător. Similar, deoarece $a_3 - a_1 < 0$, subşirul $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

Cum ambele subşiruri sunt şi mărginite rezultă că există limitele lor, de forma $\ell_1 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$, $\ell_2 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$.

În acelaşi timp $a_{2k+1} = 1 + \dfrac{2}{a_{2k}}$, $a_{2k+2} = 1 + \dfrac{2}{a_{2k+1}}$. Trecând la limită în cele două relaţii de recurenţă, obţinem $\ell_2 = 1 + \dfrac{2}{\ell_1}$, $\ell_1 = 1 + \dfrac{2}{\ell_2}$, echivalent cu

$(\ell_2-\ell_1)\cdot(\ell_1\cdot\ell_2-2)=0$. Dacă $\ell_1\neq\ell_2$, rezultă că $\ell_1\cdot\ell_2=2$, adică $\ell_1=0$, ceea ce este fals. Rezultă $\ell_1=\ell_2$, deci şirul este convergent;

g) $a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}>a_0$, $b_1=\dfrac{a_0+2\cdot b_0}{3}<b_0$, $a_1<b_1$. În continuare se demonstrează prin inducţie matematică $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, deci putem scrie $a_0<a_1<\ldots<a_n<\ldots<b_n<b_{n-1}<\ldots<b_1<b_0$. Rezultă că există $\ell_1=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\ell_2=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ şi trecând la limită în relaţiile de recurenţă, obţinem $\ell_1=\ell_2$.

1.4.4 Folosind teorema Cesaro-Stolz, să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, $p+1>0$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}$; **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a+b}{c+d}+\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}+\ldots+\dfrac{a\sqrt{n}+b}{c\sqrt{n}+d}\right)$.

Indicaţie de rezolvare:

a) Cu notaţiile din teorema Cesaro-Stolz se consideră $a_n=n, b_n=2^n$, de unde rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

b) $\dfrac{1}{p+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2$;

f) 0;

g) $\dfrac{a}{c}$.

1.4.5 Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

Indicaţie de rezolvare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}=1$;

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

$\boxed{\textbf{1.4.7}}$ Utilizând criteriul general de convergenţă al lui Cauchy, să se demonstreze convergenţa şirurilor:

a) $u_n=\dfrac{\sin a_1}{2}+\dfrac{\sin a_2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin a_n}{2^n}$;

b) $u_n=\dfrac{\cos a_1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos a_2}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{\cos a_n}{n(n+1)}$;

c) $u_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$;

d) $u_n=\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{[1+3(n-1)]\cdot(1+3n)}$;

e) $u_n=\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$;

f) $u_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$;

g) $u_n=\dfrac{\cos x}{3}+\dfrac{\cos 2x}{3^2}+\ldots+\dfrac{\cos nx}{3^n}$;

h) $u_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) fiind dat $\varepsilon>0$ arbitrar fixat, se va căuta un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru $(\forall)\ n\ge n(\varepsilon)$ şi pentru $(\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$ să se verifice $\left|u_{n+p}-u_n\right|<\varepsilon$

$$\left|u_{n+p}-u_n\right|=\left|\frac{\sin a_{n+1}}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin a_{n+p}}{2^{n+p}}\right|<\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$ se poate găsi un rang, de exemplu $n(\varepsilon)=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]+1$, pentru care $\left|u_{n+p}-u_n\right|<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq n(\varepsilon),\ (\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este convergent;

c) $\left|u_{n+p}-u_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+(-1)^{p-1}\cdot\frac{1}{n+p}\right|$; dacă p este număr par, atunci

$$\left|u_{n+p}-u_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right|=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+4}-\ldots-\frac{1}{n+p-2}+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p}=$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

Dacă p este impar, atunci

$$\left|u_{n+p}-u_n\right|=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ldots+\frac{1}{n+p}<$$

$$<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p-1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, se poate găsi un rang $n(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, pentru care $\left|u_{n+p}-u_n\right|<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq n(\varepsilon),\ (\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$, deci şirul este convergent;

d) $u_n=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{1+3(n-1)}-\frac{1}{1+3n}\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{1+3n}\right)$, de unde $\left|u_{n+p}-u_n\right|=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3n}-\frac{1}{1+3n+3p}\right)<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$;

e)

$$u_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right).$$

Rezultă $\left|u_{n+p}-u_n\right|<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right)<\frac{1}{n}<\varepsilon$, deci şirul este convergent.

$\boxed{\textbf{1.4.12}}$ Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ şi $B_n=b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots+b_{2n}$ cu $b_n>0$ are limita egală cu *b*, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot b_{n+1}+a_{n+2}\cdot b_{n+2}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{2n}\right)=a\cdot b.$$

Indicaţie de rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\ (\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N},$$

astfel încât pentru $(\forall)\ n\geq n_1(\varepsilon)$ să rezulte $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$.

De asemenea, din $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=b$ rezultă că $\left|B_n-b\right|<\varepsilon,\ (\forall)\ n\geq n_2(\varepsilon)$.

Cum şirurile $(a_n)_n$ şi $(B_n)_n$ sunt convergente, ele sunt mărginite, adică $(\exists)\ M_1\geq 0$, astfel încât $\left|a_n\right|\leq M_1,\ (\forall)\ n\geq n_3$ şi $(\exists)\ M_2\geq 0$, astfel încât $\left|B_n\right|\leq M_2,\ (\forall)\ n\geq n_4$.

Se notează $a_n-a=\alpha_n$ şi $B_n-b=\beta_n$ şi se consideră

$$n(\varepsilon)=\max\left(n_1(\varepsilon),n_2(\varepsilon),n_3,n_4\right).$$

Atunci

$$\left|a_{n+1}\cdot b_{n+1}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{2n}-a\cdot b\right|=\left|(\alpha_{n+1}+a)\cdot b_{n+1}+\ldots+(\alpha_{2n}+a)\cdot b_{2n}-a\cdot b\right|=$$
$$=\left|(\alpha_{n+1}\cdot b_{n+1}+\ldots+\alpha_{2n}\cdot b_{2n})+a\cdot B_n-a\cdot b\right|\leq$$
$$\leq\left|\alpha_{n+1}\right|\cdot\left|b_{n+1}\right|+\ldots+\left|\alpha_{2n}\right|\cdot\left|b_{2n}\right|+\left|a\right|\cdot\left|B_n-b\right|<\varepsilon\cdot\left(M+\left|a\right|\right),$$

unde $M=\max(M_1,M_2)$.

Rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}\cdot b_{n+1}+a_{n+2}\cdot b_{n+2}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{2n}\right)=a\cdot b.$$

4. TEST DE AUTOEVALUARE

$\boxed{1}$ Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze divergenţa şirurilor:

a) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$;

b) $u_n = \sin n$; **c)** $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$\boxed{2}$ Să se studieze convergenţa şirurilor:

a) $x_{n+1} = \frac{2 \cdot a \cdot x_n}{a + x_n}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, cu $x_0 > 0$;

b) $x_{n+1} = x_n^2 - 2 \cdot x_n + 2$, $n \geq 1$, $x_1 \in [1, 2]$;

c) $x_{n+1}^2 = 3 \cdot x_n - 2$, $n \geq 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$;

d) $x_{n+1} = 3 + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 0$, $x_0 = 3$.

$\boxed{3}$ Să se arate că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

este convergent şi să se calculeze limita sa.

$\boxed{4}$ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este convergent şi să se deducă inegalitatea $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$.

$\boxed{5}$ Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$;

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}}$, $a > -1$.

LECŢIA 2 - SERII DE NUMERE REALE ŞI COMPLEXE. CRITERII DE CONVERGENŢĂ. PROPRIETĂŢI

1. Serii de numere reale

Definiţia 1.5.1. Fie $(a_n)_n$ un şir de numere reale şi $(s_n)_n$ un şir definit prin: $s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Se numeşte serie de numere reale asociată şirului $(a_n)_n$, simbolul $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, iar $(s_n)_n$ se numeşte şirul sumelor sale parţiale.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numeşte ***convergentă*** şi are suma *s*, dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ este convergent şi are limita *s*; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de numere reale se numeşte ***divergentă***, dacă şirul sumelor parţiale este divergent.

Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$\left| a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \ge n(\varepsilon),\ (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $p = 1$ se obţine:

Criteriu necesar de convergenţă. Condiţia necesară, dar nu şi suficientă, ca o serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, cu toate că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

Criteriul I al comparaţiei

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $a_n \le b_n$, $(\forall)\ n \ge n_0$.

Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul II al comparaţiei

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $(\forall)\ n \ge n_0$.

Atunci:

a) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

b) dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul la limită

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii cu termeni pozitivi, astfel ca $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$.

Atunci:

a) dacă $0 < K < +\infty$, cele două serii au aceeaşi natură;

b) dacă $K = 0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va fi convergentă;

c) dacă $K = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ va fi divergentă.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $q \in (0,1)$, astfel încât pentru $(\forall)\ n > N$ să avem $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\sqrt[n]{a_n} \ge 1,\ (\forall)\ n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Atunci:

a) dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă;
b) dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul raportului (al lui d'Alembert)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $q \in (0,1)$, astfel încât pentru $(\forall)\ n > N$ să avem $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, seria este convergentă, iar dacă $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,\ (\forall)\ n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$. Atunci:

a) dacă $\lambda < 1$, seria este convergentă;
b) dacă $\lambda > 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Exemple

1) Se consideră seria $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$. Să se arate că ea este convergentă şi că $\limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, iar $\liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Indicaţie de rezolvare:

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$.

Cum $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, din criteriul I de comparaţie rezultă convergenţa seriei.

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3^n} & \text{pentru} \quad n \text{ par}\\ \dfrac{1}{2^n} & \text{pentru} \quad n \text{ impar}\end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\cdot\dfrac{1}{2} & \text{pentru} \quad n \text{ par}\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\cdot\dfrac{1}{3} & \text{pentru} \quad n \text{ impar}\end{cases}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1, \quad \text{iar} \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1.$$

2) Să se arate că seria $\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2^2}+2^2+\ldots+\frac{1}{2^n}+2^n+\ldots$ este divergentă şi $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, iar $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

Indicaţie de rezolvare:

Seria are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+2^n\right)$, care este divergentă, deoarece $\frac{1}{2^n}+2^n>2^n$, $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$.

$$u_n=\begin{cases}2^n & \text{pentru} \quad n \text{ par}\\ \dfrac{1}{2^n} & \text{pentru} \quad n \text{ impar}\end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2n+1}} & \text{pentru} \quad n \text{ par}\\ 2^{2n+1} & \text{pentru} \quad n \text{ impar}\end{cases}$$

Rezultă că $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1$, iar $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$.

Observaţie. Criteriul raportului dă numai condiţii suficiente de convergenţă şi divergenţă, aşa după cum rezultă din exemplele anterioare.

Criteriul logaritmic

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $q>1$, astfel încât pentru $(\forall)$ $n>N$ să avem $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geq q>1$, seria este convergentă, iar dacă $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$, $(\forall)$ $n>N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda$. Atunci:

a) pentru $\lambda > 1$, seria este convergentă;
b) pentru $\lambda < 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Kummer

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un şir de numere $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ şi un număr natural N şi un număr $\lambda > 0$, astfel încât $\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) \geq \lambda > 0,\ (\forall)\ n > N$, seria este convergentă.

Dacă $\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) \leq 0,\ (\forall)\ n > N$, şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Corolar

Fie şirul $(c_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$, astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă. Atunci seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este:

a) convergentă, dacă $\lim_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) > 0$;

b) divergentă, dacă $\lim_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) \leq 0$.

Exemplu

Se consideră seria $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n,\ a > 0$. În acest caz, $c_n = n$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ este divergentă; $\lim_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1-a) - 2an - a}{a(n+1)} = \begin{cases} \infty, & a < 1; \\ -\infty, & a > 1; \\ -2, & a = 1, \end{cases}$

de unde rezultă că seria este convergentă pentru $a \in (0,1)$.

Criteriul Raabe-Duhamel

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există un număr natural N şi un număr $\lambda > 1$, astfel încât pentru $(\forall)\ n > N$ să avem $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq \lambda > 1$, seria este convergentă, iar dacă $n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, $(\forall)\ n > N$, seria este divergentă.

Corolar

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda$. Atunci:

a) pentru $\lambda > 1$, seria este convergentă;
b) pentru $\lambda < 1$, seria este divergentă;
c) pentru $\lambda = 1$, criteriul nu se aplică.

Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi şi descrescători, iar $(a_n)_n$ un şir divergent de numere naturale, astfel încât şirul cu termenul general $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}}$ să fie mărginit. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \cdot u_{a_n}$ au aceeaşi natură.

Observaţie. Şirul $(a_n)_n$ se alege cel mai frecvent ca fiind $a_n = 2^n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, care satisface condiţiile criteriului de condensare.

3. Serii cu termeni oarecare. Serii absolut convergente, serii alternate, serii semiconvergente

Definiţia 1.7.1. O serie cu termenii oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numeşte ***absolut convergentă***, dacă seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este convergentă.

Definiţia 1.7.2. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dar seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este divergentă, seria se numeşte ***semiconvergentă***.

Teorema 1.7.3. O serie cu termeni oarecare absolut convergentă este convergentă.

Observaţie. Reciproca teoremei nu este adevărată, deoarece există serii convergente, dar care nu sunt absolut convergente.

Exemplu: Seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$, pentru $\alpha > 1$ este absolut convergentă, iar pentru $\alpha \le 1$ este semiconvergentă.

Observaţie. Seriile cu termeni pozitivi sunt absolut convergente. Criteriile de convergenţă stabilite la seriile cu termeni pozitivi sunt valabile şi pentru seriile absolut convergente.

Teorema 1.7.4. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor în mod arbitrar, obţinem o nouă serie absolut convergentă cu aceeaşi sumă.

Observaţie. Teorema este valabilă şi pentru seriile cu termeni pozitivi care sunt absolut convergente.

Teorema lui Riemann. Într-o serie de numere reale, semiconvergentă, se poate schimba ordinea factorilor, astfel încât seria obţinută să aibă ca sumă un număr dat.

Exemplu

Fie seria semiconvergentă $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \ldots$.

Se pot schimba termenii în ordinea

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \ldots,$$

iar noua serie are suma $\frac{1}{2} \cdot S$.

4. Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare

Criteriul lui Dirichlet

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde şirul $(u_n)_n$ este monoton şi mărginit, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Criteriul lui Abel

Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se poate scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$, unde $(u_n)_n$ este un şir de numere pozitive descrescător şi convergent la zero, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Exemplu

Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin nx}{n}$ este convergentă pentru $x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Indicaţie de rezolvare:

Şirul cu termenul general $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la zero (utilizând teorema Cesaro-Stolz), iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ are şirul sumelor parţiale mărginit, deoarece $\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x}{2\cdot\sin\frac{x}{2}}$, de unde

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Definiţia 1.7.5. Se numeşte ***serie alternată*** o serie de forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n$, unde $u_k \geq 0,\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$.

Criteriul lui Leibniz

Dacă într-o serie alternată $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n$ şirul $(u_n)_n$ este monoton descrescător şi are limita zero, atunci seria este convergentă.

5. Operaţii cu serii numerice

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ două serii. Atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, unde $c_n = a_1 \cdot b_n + a_2 \cdot b_{n-1} + ... + a_n \cdot b_1$ se numesc, respectiv, ***suma***, ***diferenţa*** şi ***produsul seriilor*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi au sumele *A* şi *B*, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ este convergentă şi are suma $A \pm B$.

Teorema lui Abel

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ şi seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sunt convergente şi dacă *A, B, C* sunt, respectiv, sumele lor, atunci $A \cdot B = C$.

Teorema lui Mertens

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi cel puţin una dintre ele este absolut convergentă, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă şi $A \cdot B = C$.

Teorema lui Cauchy

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă.

6. Serii în $\mathbb{R}^k$. Serii de numere complexe

Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R}^k$ şi

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

...

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

...

Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte ***şirul sumelor parţiale*** pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definiţia 1.9.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este ***convergentă***, dacă şirul sumelor parţiale este convergent.

Suma seriei este limita şirului sumelor parţiale.

Criteriul general al lui Cauchy

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $\mathbb{R}^k$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right\|_2 < \varepsilon,\ (\forall)\ n > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$.

Consecinţă. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elemente din $\mathbb{R}^k$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_2 = 0$, iar aceasta reprezintă o condiţie necesară, dar nu suficientă de convergenţă a unei serii.

Definiţia 1.9.2. Se numeşte ***şirul sumelor parţiale*** pentru seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin:

$$s_1 = z_1; \quad s_2 = z_1 + z_2$$

....

$$s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$$

....

Definiţia 1.9.3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ de numere complexe este ***convergentă***, dacă şirul sumelor parţiale este convergent.

Teorema 1.9.4. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, unde $z_n = a_n + \mathrm{i} \cdot b_n$, pentru $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, este convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă şi are suma $s = a + \mathrm{i} \cdot b$, atunci $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Criteriul lui Cauchy

Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât $\left| z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p} \right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n > n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$.

Definiţia 1.9.5. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o serie de numere complexe. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ este convergentă, spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ este ***absolut convergentă***.

Teorema 1.9.6. O serie de numere complexe absolut convergentă este convergentă.

Definiţia 1.9.7. Seriile de numere complexe convergente, pentru care seria modulelor nu este convergentă se numesc serii de numere complexe ***semiconvergente***.

Teorema 1.9.8. Seria de numere complexe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, unde $z_n = a_n + \mathrm{i} \cdot b_n$ este absolut convergentă dacă şi numai dacă seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt absolut convergente.

7. Probleme rezolvate

$\boxed{\textbf{1.10.1}}$ Să se arate că următoarele serii sunt convergente şi să se determine sumele lor:

a) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots$; **b)** $\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\ldots+\frac{n}{a^n}+\ldots,\ |a|>1$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a+1}-2\cdot\sqrt{n+a}+\sqrt{n+a-1}\right),\ a>0$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)\cdot(a+n+1)},\ a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; **e)** $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) Şirul sumelor parţiale are termenul general

$$s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{4},$$

deci seria este convergentă şi are suma $s=\frac{1}{4}$;

b) $s_n=\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\ldots+\frac{n}{a^n}$. Pentru calculul limitei şirului sumelor parţiale se consideră funcţia $f(x)=\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^n,\ x\in\mathbb{R}$. Atunci $s_n=f'(1)$.

În acelaşi timp,

$$f(x)=\frac{x}{a}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{a}\right)^n}{1-\frac{x}{a}}=\frac{x^{n+1}-a^n\cdot x}{x-a}\cdot\frac{1}{a^n}\Rightarrow s_n=\frac{n-(n+1)a+a^{n+1}}{(1-a)^2\cdot a^n}.$$

Deoarece $|a|>1$, rezultă $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{(1-a)^2}$ şi astfel seria este convergentă şi are suma $s=\frac{a}{(1-a)^2}$;

c) $s=\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{a+n} - \dfrac{1}{a+n+1} \Rightarrow s_n = \dfrac{1}{a+1} - \dfrac{1}{a+n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{a+1}$, deci seria este convergentă şi are suma $s = \dfrac{1}{a+1}$;

e) $s = \ln\dfrac{1}{2}$;

f) $s = 1$.

$\boxed{\textbf{1.10.2}}$ Să se însumeze seriile următoare date prin termenii generali:

a) $u_n = \varphi(n) - \varphi(n-1)$; **b)** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}$, $k \in \mathbb{N}$;

c) $u_n = \dfrac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$; **d)** $u_n = \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$;

e) $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1}$; **f)** $u_n = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{n^2}$;

g) $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)}$, $n > 1$; **h)** $u_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $s_n = \varphi(n) - \varphi(0)$, deci pentru $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = \ell \Rightarrow s = \ell - \varphi(0)$;

b) $u_n = \dfrac{1}{k}\left[\dfrac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)} - \dfrac{1}{(n+1)\ldots(n+k)}\right] \Rightarrow s = \dfrac{1}{k\cdot k!}$;

c) $n^4 + 2n^2 + 9 = \left[(n-1)^2 + 2\right]\cdot\left[(n+1)^2 + 2\right]$;

rezultă

$$u_n = \frac{an+b}{(n-1)^2+2} + \frac{cn+d}{(n+1)^2+2} = \frac{1}{(n-1)^2+2} - \frac{1}{(n+1)^2+2} \Rightarrow s = \frac{5}{6};$$

d) $s = \dfrac{1}{x-1}$;

e) $$\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{1}{n(n+1)}}{1+\dfrac{1}{n(n+1)}} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n+1}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$$

$$s_n = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1} \Rightarrow s = \lim_{n\to\infty} s_n = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4};$$

f) $u_n = \operatorname{arctg}\frac{2}{\left(n^2-1\right)+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1} \Rightarrow s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi}{4}$;

g) $u_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow s_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \Rightarrow s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{\ln 2}$;

h) $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 27 \cdot \mathrm{e}$.

$\boxed{\textbf{1.10.3}}$ Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \geq 2$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\left|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\right| = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^{\alpha}} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

deci seria este convergentă.

$\boxed{\textbf{1.10.4}}$ Utilizând criterii de comparaţie, să se stabilească natura următoarelor serii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+a+\ldots+a^n\right)}$, $a \geq 0$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n+n}$, $a \geq -1$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{a}{3^n}$, $0 \leq a \leq 3\pi$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se consideră $u_n = \dfrac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ şi $v_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \sqrt{7} \in (0,\infty)$, rezultă că cele două serii au aceeaşi natură şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

b) $u_n = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n}{n} < \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n} = 2\cdot\dfrac{1}{n^2} = v_n$,

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

c) divergentă;

d) convergentă;

e) $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} \geq \dfrac{1}{n} = v_n$ şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă;

f) pentru $a=1$, seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ care este convergentă; pentru $a>1 \Rightarrow u_n \leq \dfrac{1}{a^n} = v_n$ şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; pentru

$$a \in (0,1) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n\left(\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)} = \frac{1-a}{n\left(1-a^{n+1}\right)} \geq \frac{1-a}{n} = v_n$$

şi cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă; pentru $a=0$, seria este divergentă, ea fiind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$;

g) $u_n = \dfrac{1}{a^n + n} \le \dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = v_n \Rightarrow$ pentru $a > 1$ seria este convergentă; pentru $a \in (-1,1)$ se compară cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n + n} = 1 \in (0,\infty)$ rezultă că seria va fi divergentă; pentru $a = 1$, seria este divergentă, ea fiind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$;

h) divergentă;

i) convergentă.

$\boxed{\textbf{1.10.5}}$ Să se stabilească natura următoarelor serii de numere pozitive:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n,\ a > 0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n^n},\ a \ge 0$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n,\ a \ge 0$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+a)} - n\right)^n,\ a > 0$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^n \left(a + \dfrac{\alpha}{n}\right),\ a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{an+b}{cn+d}\right)^n,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}_+$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n^p},\ a > 0,\ p \in \mathbb{R}$;

j) $a + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(2 - \sqrt{\mathrm{e}}\right)\left(2 - \sqrt[3]{\mathrm{e}}\right) \ldots \left(2 - \sqrt[n]{\mathrm{e}}\right) \cdot a^n,\ a > 0$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; **l)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(n^3 + 1\right) \cdot a^n}{(n+1)!},\ a \ge 0$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!},\ a \ge 0$; **n)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{\sqrt{n!}},\ a \ge 0$; **o)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln x},\ x > 0$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\ln(an+1) - \ln n}},\ a > 0$; **r)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$. **s)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$;

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$; **u)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} \cdot \dfrac{1}{n^{\alpha}},\ a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$;

v) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a(a+r)\dots(a+nr-r)}{b(b+r)\dots(b+nr-r)}\right]^{\alpha}$, $a,\ b,\ r>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$;

w) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^{a}$, $a\in\mathbb{R}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) convergentă;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=a\mathrm{e}$, de unde rezultă că pentru $a<\frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este convergentă, iar pentru $a>\frac{1}{\mathrm{e}}$ seria este divergentă; pentru $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$, $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n}$;

c) convergentă;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=a$, de unde rezultă că pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$ se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ care este divergentă;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{a+1}{2}$, de unde rezultă că pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$, $u_n=1$, deci seria este divergentă;

f) convergentă;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}\left(a+\frac{\alpha}{n}\right)=\mathrm{tg}\,a$, deci pentru $a\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ seria este convergentă, pentru $a\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ seria este divergentă, iar pentru $a=\frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\mathrm{e}^{2a}\neq 0$, deci seria este divergentă;

h) pentru $a<c$ seria este convergentă, pentru $a\geq c$ este divergentă;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=a$, deci pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$ se obţine seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, care este convergentă pentru $p>1$ şi divergentă pentru $p\leq 1$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=a$, deci pentru $a<1$ seria este convergentă, pentru $a>1$ seria este divergentă, iar pentru $a=1$ avem $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=2-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}$; deoarece $\mathrm{e}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă că $\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}<1+\dfrac{1}{n}\Rightarrow\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$ şi din criteriul III de comparaţie, seria este divergentă;

k) convergentă;

l) convergentă;

m) convergentă;

n) convergentă;

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=-\ln x$, de unde rezultă că pentru $x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ seria este convergentă, iar pentru $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ seria este divergentă; pentru $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, se obţine seria armonică divergentă;

p) pentru $a>\mathrm{e}$ seria este convergentă, iar pentru $a<\mathrm{e}$ seria este divergentă;

r) divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=0$;

s) divergentă;

t) $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\dfrac{\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}$;

se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to R$, definită prin $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$ şi se determină limita acesteia în punctul $x=0$, se va obţine:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{\mathrm{e}}{2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1,$$

deci seria este divergentă;

u) pentru $\alpha<a$ seria este divergentă, pentru $\alpha>a$ seria este convergentă;

v) pentru $r<\alpha(b-a)$ seria este convergentă, pentru $r>\alpha(b-a)$ seria este divergentă;

w) pentru $a<2$ seria este divergentă, pentru $a>2$ seria este convergentă.

Pentru $a = 2$, se utilizează inegalitatea $\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, de unde rezultă că $\left[\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right]^2 \geq \frac{1}{4n}$, deci seria este divergentă.

1.10.6 Să se studieze natura seriei armonice generalizate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Indicaţie de rezolvare:

Pentru $\alpha \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \neq 0$, deci seria este divergentă.

Pentru $\alpha > 0 \Rightarrow a_n = n^{-\alpha} > 0$ este şir descrescător, deci seria armonică generalizată are aceeaşi natură cu seria $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(2^k\right)^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$, care este seria geometrică cu raţia $2^{1-\alpha}$. Deci, pentru $2^{1-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ seria este divergentă, iar pentru $2^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ seria este convergentă.

1.10.7 Să se stabilească natura seriilor alternate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{10^{n-1} \cdot a + 10^{n-2} \cdot a + \ldots + 10 \cdot a + a}{10^n}$, $a > 0$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{3^n}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots$

Indicaţie de rezolvare:

a) şirul cu termenul general $u_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+2}}$ este un şir descrescător, deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+2} < 1$, $\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = 0$, deci conform criteriului lui Leibniz, seria este convergentă;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a\cdot\dfrac{10^n-1}{9\cdot 10^n} = \dfrac{a}{9} \neq 0$, deci seria este divergentă;

c) convergentă;

d) $u_n = (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2}{n}$, şir descrescător şi convergent la zero, deci seria este convergentă.

1.10.8 Să se studieze convergenţa absolută şi semiconvergenţa seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{3^n}$, $x\in\mathbb{R}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n^2$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{(n+a)^{\alpha}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1-a^n}$, $a\neq\pm 1$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a\in\mathbb{R}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n\left(n+\sqrt{3}\right)}$ unde $(a_n)_n$ este un şir mărginit;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^n\cdot\sin^{2n}x}{n+1}$, $x\in\mathbb{R}$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $|u_n|\leq\dfrac{1}{3^n}$ şi utilizând criteriul I de comparaţie, seria este absolut convergentă;

b) divergentă;

c) absolut convergentă;

d) pentru $\alpha>1$ seria este absolut convergentă, pentru $\alpha\leq 0$ seria este divergentă, deoarece nu se verifică condiţia necesară de convergenţă a unei serii, iar pentru $\alpha\in(0,1]$, seria este semiconvergentă, utilizând criteriul lui Leibniz;

e) pentru $|a|<1$ seria este absolut convergentă, iar pentru $|a|>1$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$;

f) pentru $a=\pm 1$ seria este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, iar pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ seria este absolut convergentă;

g) seria este absolut convergentă, deoarece $u_n = \frac{|a_n|}{n\left(n+\sqrt{3}\right)} \le \frac{M}{n^2}$;

h) se utilizează criteriul raportului pentru seria modulelor şi obţinem că pentru $x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, seria este convergentă şi pentru $x \in \left(k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, este divergentă; pentru $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ se obţine seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$;

i) semiconvergentă;

j) pentru seria modulelor se aplică Raabe-Duhamel şi obţinem că pentru $a \ge 0$ seria este absolut convergentă, iar pentru $a < 0$ seria modulelor este divergentă.

Pentru $a < 0$ avem

$$\frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!} = (-1)^n \cdot \frac{(-a)(1-a)\cdot \ldots \cdot (n-a-1)}{n!} \overset{\text{not}}{=} (-1)^n \cdot b_n,$$

unde $b_n > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Am obţinut seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, pentru care $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n-a}{n+1} \ge 1$, pentru $a \le -1$; deci, în acest caz şirul $(b_n)_n$ este crescător şi limita este nenulă, deci seria este divergentă.

Pentru $a \in (-1, 0)$ şirul $(b_n)_n$ este descrescător şi se demonstrează că are limita zero.

Pentru aceasta, fie $b_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$, $b_{n-1} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}}{n-1}$.

Rezultă că $u_n = n \cdot b_n - (n-1) \cdot b_{n-1}$ şi înlocuind pe b_n şi pe b_{n-1} vom obţine $u_n = (-a) \cdot b_{n-1},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Cum şirul $(b_n)_n$ este descrescător şi mărginit inferior, el este convergent, deci şirul $(u_n)_n$ este convergent.

Fie $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n$, $\ell_1 = \lim_{n\to\infty} u_n$ şi trecând la limită în cele două relaţii de recurenţă obţinute anterior, rezultă că $\ell = 0$. Utilizând criteriul Leibniz, seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ este convergentă.

1.10.9 Să se arate că:

a) suma dintre o serie convergentă şi una divergentă este o serie divergentă;

b) există serii divergente a căror sumă este o serie convergentă.

Indicaţie de rezolvare:

a) fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ o serie divergentă; dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ar fi convergentă, atunci diferenţa dintre aceasta şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ar fi o serie convergentă, dar diferenţa este seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, care este o serie divergentă; rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este divergentă;

b) seriile $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ sunt divergente, dar suma lor este seria cu suma egală cu zero, deci este o serie convergentă.

$\boxed{\textbf{1.10.10}}$ Să se efectueze produsul seriilor absolut convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$ şi să se deducă de aici suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$.

Indicaţie de rezolvare:

Seria valorilor absolute este $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ pentru ambele serii. Pentru aceasta, şirul sumelor parţiale este $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ convergent către e, de unde rezultă că ambele serii sunt absolut convergente. Din Teorema lui Cauchy seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este absolut convergentă şi suma ei verifică $C = A \cdot B$.

Dar $c_n = \frac{1}{n!} \cdot (1-1)^n = 0 \Rightarrow C = 0$. Cum $A = e \Rightarrow B = 0$.

Deci, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$=0.

$\boxed{\textbf{1.10.11}}$ Se dau şirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ definite prin formulele de recurenţă:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n \cdot b_n}{a_n + b_n},\ n \in \mathbb{N},\ a_0 = a > b = b_0 > 0.$$

a) Să se demonstreze că cele două şiruri sunt convergente şi că au aceeaşi limită ℓ.

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(\ell - b_n)$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se demonstrează că şirul $(a_n)_n$ este monoton descrescător de termeni pozitivi, iar $(b_n)_n$ este monoton crescător, prin inducţie matematică; notând $\ell_1 = \lim_{n\to\infty} a_n$ şi $\ell_2 = \lim_{n\to\infty} b_n$ şi trecând la limită în relaţiile de recurenţă, rezultă că $\ell_1 = \ell_2 = \ell$;

b) seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty}(\ell - b_n)$ este cu termenii pozitivi şi aplicându-se criteriul raportului, rezultă că este convergentă.

1.10.12 Să se studieze natura seriilor complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta + \mathrm{i}\cdot\sin n\theta}{n^2},\ \theta\in[0, 2\pi]$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta p + \mathrm{i}\cdot\sin n\theta p}{n},\ \theta \neq \frac{2k\pi}{p},\ k = 0,1,\ldots, p-1.$

Indicaţie de rezolvare:

a) seriile de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2}$ sunt absolut convergente, de unde rezultă şi convergenţa seriei complexe;

b) pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta p}{n}$ se aplică criteriul Dirichlet, considerându-se şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător la zero şi seria $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta p$ având şirul sumelor parţiale mărginit. Rezultă seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta p}{n}$ convergentă. Similar se arată convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta p}{n}$, deci seria de numere complexe va fi convergentă.

8. TEST DE AUTOEVALUARE

$\boxed{1}$ Să se stabilească natura seriilor cu termenii oarecare:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \cos n^2}{n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin nx}{n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\ln\left(2+\mathrm{e}^{3n}\right)}{\ln\left(3+\mathrm{e}^{2n}\right)}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha+\frac{1}{n}}},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă, pentru orice x real. Dacă $s(x)$ este suma seriei, să se stabilească relaţia $s(x+y) = s(x) \cdot s(y),\ (\forall)\ x,\ y \in \mathbb{R}$.

9. TEMĂ DE CONTROL

$\boxed{1}$ Să se arate că şirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent.

$\boxed{2}$ Să se studieze convergenţa şirurilor definite prin:

a) $x_n > 0,\ x_{n+1} \le \frac{x_n}{1+x_n},\ (\forall)\ n \ge 0,\ x_0 = 1;$

b) $x_n + x_{n+1} > 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}^2 < x_n^2,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N};$

c) $0 < x_n < 2,\ (2 - x_n) \cdot x_{n+1} > 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$

$\boxed{3}$ Să se arate că şirul definit prin termenul general $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$ este convergent şi să i se calculeze limita.

$\boxed{4}$ Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin\frac{\pi}{2n}\right).$

$\boxed{5}$ Să se calculeze limitele şirurilor următoare din $\mathbb{R}^2$:

a) $\left(\sqrt[n]{\ln n}, \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}};$

b) $\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}, \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$

$\boxed{6}$ Să se demonstreze convergenţa şirului cu termenul general:
$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1},\quad n \ge 1$ şi să se arate că limita sa aparţine intervalului $(-2, -1)$.

$\boxed{7}$ Ştiind că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2}$.

$\boxed{8}$ Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot (2n)}\right]^{p}\cdot\frac{1}{n^{q}}$, ştiind că $\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot (2n)}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

$\boxed{9}$ Fie şirul definit prin $\begin{cases} a_1=\sqrt{\alpha} \\ a_n=\sqrt{\alpha+a_{n-1}},\ \alpha>0,\ n\geq 2 \end{cases}$.

a) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_n$ este convergent şi să se calculeze $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(\ell-a_n)$.

$\boxed{10}$ **a)** Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_n$ cu $x_0>0$ şi definit prin $x_{n+1}=\frac{2\cdot a\cdot x_n}{a+x_n},\ a\in\mathbb{R},\ a>0$.

b) Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-a)$.

$\boxed{11}$ Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},\frac{1}{n}\right)$ din $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{12}$ Să se calculeze sumele următoarelor serii de numere complexe:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3^n}+\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}\right)$.

LECŢIA 3 - ŞIRURI DE FUNCŢII. SERII DE FUNCŢII

1. Şiruri de funcţii

Fie familia de funcţii $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ definite pe aceeaşi mulţime *X* şi cu valori reale. Dacă mulţimea indicilor *I* este mulţimea numerelor naturale, atunci avem un şir de funcţii.

Notaţie: $(f_n)_n$. Un şir de funcţii este echivalent cu o familie de şiruri de numere.

Definiţia 2.1.1. Un punct $a\in X$ este ***punct de convergenţă al şirului de funcţii*** $(f_n)_n$ dacă şirul numeric $(f_n(a))_n$ este convergent.

Mulţimea punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii $(f_n)_n$ se numeşte ***mulţimea de convergenţă*** a şirului $(f_n)_n$.

Exemple

1) Şirul de funcţii $f_n(x)=x^n,\ n\in\mathbb{N}$, are mulţimea de convergenţă intervalul $[-1,1]$.

2) Şirul de funcţii $f_n(x)=\dfrac{x}{n^2},\ n\in\mathbb{N}^*$, are mulţimea de convergenţă $\mathbb{R}$.

Definiţia 2.1.2. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii definite pe mulţimea *X* şi având mulţimea de convergenţă *A*. Dacă $f(x)$ este limita şirului numeric $(f_n(x))_n$, $(\forall)\ x\in A$, atunci s-a stabilit o corespondenţă $x\to f(x)$ a mulţimii *A* în mulţimea numerelor reale. Funcţia $f(x)$ definită prin $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x\in A$, se numeşte ***funcţia limită*** pe mulţimea *A* a şirului de funcţii considerat.

Exemple

1) Şirul de funcţii $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$ are mulţimea de convergenţă $\mathbb{R}$ şi pentru orice *x* real $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow f(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

2) Şirul de funcţii $f_n(x)=a^{\frac{nx+1}{n+2}},\ n\in\mathbb{N},\ a>0$, este convergent pentru orice *x* real şi are funcţia limită $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=a^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Definiţia 2.1.3. Se spune că şirul de funcţii $(f_n)_n$ este ***simplu convergent*** pe *X* către funcţia *f*, dacă pentru $(\forall)\ x\in X$ şi pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$ există un număr $n(\varepsilon,x)$, astfel încât $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ (\forall)\ n>n(\varepsilon,x)$.

Exemplu

Şirul de funcţii $f_n(x)=\frac{x^4}{n^2}$ definit pe $\mathbb{R}$ este convergent pe $\mathbb{R}$ către funcţia $f(x)=0$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. Se caută un număr $n(\varepsilon,x)$, astfel încât $\frac{x^4}{n^2}<\varepsilon$, $(\forall)\ n>n(\varepsilon,x)$.

Rezultă $n^2>\frac{x^4}{\varepsilon}\Rightarrow n(\varepsilon,x)=\frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Definiţia 2.1.4. Se spune că şirul de funcţii $(f_n)_n$ este ***uniform convergent*** pe *X* către funcţia *f*, dacă pentru $(\forall)\varepsilon>0$ există un număr $n(\varepsilon)$, astfel încât $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, $(\forall)\ n>n(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ x\in X$.

Observaţie. Un şir de funcţii uniform convergent este şi simplu convergent. Reciproca nu este adevărată.

Propoziţia 2.1.5. Dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$, definit pe mulţimea *X,* satisface condiţiile $|f_n(x)|\le a_n$, $(\forall)\ x\in X$, $n\in\mathbb{N}$, unde $(a_n)_n$ este un şir de numere pozitive cu limita zero, atunci şirul $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia constantă zero.

Corolar

Dacă pentru un şir de funcţii $(f_n)_n$ definite pe o mulţime *X*, există o funcţie $f:X\to R$ şi un şir de numere reale $(a_n)_n$, $a_n>0$, pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, astfel încât $|f_n(x)-f(x)|<a_n$, $(\forall)\ x\in X$, atunci şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge uniform către funcţia *f*.

Criteriul lui Cauchy

Şirul $(f_n)_n$ de funcţii $f_n:X\to\mathbb{R}$ converge uniform pe *X* către funcţia $f:X\to\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă: $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$ pentru care

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\ (\forall)\ n,m>n(\varepsilon) \text{ şi } (\forall)\ x\in I.$$

Teorema 2.1.6. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii uniform convergent pe *X* către funcţia *f*. Dacă toate funcţiile f_n sunt continue în punctul $a\in X$, atunci şi funcţia limită va fi continuă în punctul *a*.

Observaţii:

1) În cazul în care $a\in X\cap X'$, teorema 2.1.6 este valabilă sub forma mai generală: dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$ este uniform convergent pe $X\setminus\{a\}$, unde $a\in X\cap X'$ şi dacă toate funcţiile f_n sunt continue în punctul *a*, atunci şirul de funcţii $(f_n)_n$ este uniform convergent pe *X* şi limita sa este continuă în *a*.

2) Teorema 2.1.6 rămâne valabilă dacă funcţiile f_n sunt continue la stânga (la dreapta) în punctul *a* şi atunci funcţia *f* va fi continuă la stânga (la dreapta) în punctul *a*.

3) Condiţia ca şirul de funcţii $(f_n)_n$ să fie uniform convergent pe mulţimea *X* este numai suficientă, nu şi necesară, pentru ca funcţia *f* să fie continuă într-un punct *a*.

Exemplu

Fie şirul de funcţii $(f_n)_n$ definite prin $f_n(x)=x^n$, $x\in(0,1)$. Pentru acesta, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$, $(\forall)\ x\in(0,1)$. Funcţia f şi funcţiile f_n sunt continue, dar şirul de funcţii considerat nu este uniform convergent.

Corolar

Un şir $(f_n)_n$ de funcţii continue pe *X*, uniform convergent pe *X*, are limita o funcţie continuă pe *X*.

Teorema Dini. Dacă şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$, este simplu convergent către funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde *I* este un interval compact şi dacă $(f_n)_n$ este monoton în fiecare punct al lui *I*, iar funcţiile f_n şi *f* sunt continue pe *I*, atunci convergenţa şirului este uniformă.

Teorema 2.1.7. Fie *I* un interval mărginit şi $(f_n)_n$ un şir de funcţii derivabile, definite pe *I*. Dacă $(f_n)_n$ converge uniform către *f* şi şirul derivatelor $(f_n')_n$ converge uniform pe *I* către o funcţie *g*, atunci funcţia *f* este derivabilă pe *I* şi $f'(x)=g(x)$, $(\forall)\ x\in I$.

Observaţie

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată. Un şir de funcţii $(f_n)_n$ poate fi uniform convergent către funcţia *f*, cu f_n derivabile şi *f* derivabilă, fără ca şirul derivatelor $(f_n')_n$ să fie uniform convergent.

Exemplu

Şirul $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in[0,2\pi]$ este uniform convergent pe $[0,2\pi]$ către funcţia $f(x)\equiv 0$, termenii şirului şi funcţia limită sunt derivabili pe $[0,2\pi]$, dar şirul derivatelor $f_n'(x)=\cos nx$ nu este convergent pe $[0,2\pi]$.

Teorema 2.1.8. Dacă $(f_n)_n$ este un şir de funcţii continue, uniform convergent pe un interval $[a,b]$ către funcţia *f*, atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

Exemplu

Şirul de funcţii $f_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$ definit pe $[0,\pi]$ este uniform convergent pe $[0,\pi]$ către funcţia $f(x)\equiv 0$.

Avem $\frac{1}{n}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2}\cdot\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}\to 0$, când $n\to\infty$.

2. Serii de funcţii

Definiţia 2.2.1. Seria $f_1+f_2+\ldots+f_n+\ldots$, unde $f_1,\ f_2,\ldots,f_n,\ldots$ este un şir de funcţii definite pe aceeaşi mulţime *X*, se numeşte ***serie de funcţii***.

Notaţie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Pentru orice $x_0\in X$ avem seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, serie care poate fi convergentă sau divergentă.

Definiţia 2.2.2. Mulţimea punctelor $x\in X$ pentru care seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numeşte ***mulţimea de convergentă a seriei*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exemplu

Cu şirul de funcţii $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$, $n=0,1,2,\ldots$ se formează seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, care are mulţimea de convergenţă $(-\infty,\infty)$.

Definiţia 2.2.3. Seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***simplu convergentă*** pe *X* către o funcţie *f*, dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$, $s_n=f_1+f_2+\ldots+f_n$ este simplu convergent pe *X* către *f*, pentru orice *x*.

Funcţia *f* definită pe *X* se numeşte suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definiţia 2.2.4. Seria de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***simplu convergentă*** pe *X* către o funcţie *f*, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$ şi pentru $(\forall)\ x\in X$ există un număr $n(\varepsilon,x)$, astfel încât pentru orice $n>n(\varepsilon,x)$ să avem

$$|f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Exemplu

Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},\ x \in \mathbb{R}$, este simplu convergentă pentru orice *x* real.

Pentru a demonstra aceasta, fie şirul sumelor parţiale:

$$s_n(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} \Rightarrow |s_n(x)| \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = u_n,$$

unde şirul cu termenul general u_n este convergent.

Definiţia 2.2.5. Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***uniform convergentă*** pe $B \subseteq A \subseteq X$, unde *A* este mulţimea de convergenţă simplă, dacă şirul sumelor parţiale $(s_n)_n$ este uniform convergent pe *B*.

Definiţia 2.2.6. Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este ***uniform convergentă*** pe *X* către o funcţie *f*, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n(\varepsilon)$, astfel încât pentru orice $n > n(\varepsilon)$ să avem

$$|f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (\forall)\ x \in X .$$

Exemplu

Fie seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pentru aceasta, şirul sumelor parţiale $s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}$ converge uniform către funcţia $f(x) \equiv \frac{1}{1-x}$, deci seria este uniform convergentă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Criteriul general de convergenţă uniformă

Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $X \subset \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\ n > n_\varepsilon,\ (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*,\ (\forall)\ x \in A$.

Criteriul lui Weierstrass

Fie şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale strict pozitive. Dacă $|f_n(x)| \leq a_n,\ (\forall)\ x \in X,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$, şi dacă seria de numere

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ este convergentă, atunci seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe *X*.

Exemplu

Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},\ x \in (1,\infty)$. Aceasta este uniform convergentă pentru orice $x \in (1,\infty)$, deoarece pentru $(\forall)\ x \in (1,\infty)$, $(\exists)\ a \in (1,\infty)$, cu $a < x$; deci, $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a}$, iar seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este convergentă.

Teorema 2.2.7. Fie şirul de funcţii continue $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe *X* către *f*, atunci funcţia *f* este continuă pe *X*.

Teorema 2.2.8. Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe *X* către funcţia *f*. Dacă funcţiile f_n sunt derivabile pe *X* şi seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ este uniform convergentă pe *X* către funcţia *g*, atunci funcţia *f* este derivabilă pe *X* şi $f' = g$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, $x \in [0,2\pi]$, este uniform convergentă pe $[0,2\pi]$, deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$. Seria derivatelor este $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, care este uniform convergentă pe $[0,2\pi]$, deoarece $\left|-\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Notând cu $f(x)$ suma seriei considerate vom avea

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},\ x \in [0,2\pi].$$

Teorema 2.2.9. Fie seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform convergentă pe $[a,b]$ către funcţia *f*. Dacă funcţiile f_n sunt integrabile pe $[a,b]$, atunci funcţia *f* este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Observaţie. Teorema serveşte nu numai pentru calculul integralei definite a unei serii de funcţii, ci şi a primitivelor pe orice interval conţinut în mulţimea de convergenţă uniformă a seriei considerată.

Exemple

1) Seria trigonometrică $f(x)=1+\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$ este uniform convergentă pentru orice x real.

Rezultă că $\int f(x)\mathrm{d}x=C+x+\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 2x}{2^3}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^3}+\ldots$.

2) Seria de funcţii $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ este uniform convergentă pentru orice $x\in(-1,1)$ şi are suma $\frac{1}{1-x}$. Deci, pentru $x\in(-1,1)$ avem

$$\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=C+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=-\ln(1-x)+C'.$$

Pentru $x=0,\ C=C'\Rightarrow\ln(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots,\ |x|<1.$

3. Probleme rezolvate

$\boxed{\textbf{2.3.1}}$ Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n,\ f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n(1-x^n)$ este convergent, dar nu este uniform convergent pe $[0,1]$.

Indicaţie de rezolvare:

Pentru $x\in[0,1]\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, deci şirul de funcţii este simplu convergent către funcţia constantă $f(x)=0,\ (\forall)\ x\in[0,1]$.

Pentru a arăta că nu este uniform convergent către *f*, se consideră $x_n=2^{-1/n}\in[0,1]$, pentru care $f_n(x_n)=\frac{1}{4},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{2.3.2}}$ Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n,\ f_n:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, definite prin: $f_n(x)=\sqrt{(n^2+1)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}+nx}-\sqrt{nx}$ este uniform convergent.

Indicaţie de rezolvare:

$$0\le f_n(x)=\frac{(n^2+1)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}+nx}+\sqrt{nx}}<\frac{(n^2+1)\cdot\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}}<\frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}}=\frac{\pi^2}{\sqrt{n}}.$$

Utilizând teorema anterioară pentru $a_n = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} \to 0$, rezultă că şirul de funcţii converge uniform către funcţia constantă $f(x) = 0$.

2.3.3 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{-nx}$ converge uniform către funcţia $f(x) = 0,\ x \in [0,\infty)$.

2.3.4 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$ este uniform convergent pe intervalul indicat, pentru:

a) $f_n(x) = \frac{x^2}{\left(n^2 + x^4\right)},\ x \in [1,\infty)$; **b)** $f_n(x) = \frac{x}{x+n},\ x \in [3,4]$;

c) $f_n(x) = \frac{x^n}{\left(1 + x^{2n}\right)^n},\ x \in [1,\infty)$; **d)** $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1},\ x \in [0,\pi]$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $0 \le \frac{x^2}{n^2 + x^4} \le \frac{1}{2n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2n} \to 0$, de unde şirul de funcţii converge uniform către funcţia constantă zero;

b) $f(x) = 0$;

c) $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{2^n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n} \to 0 \Rightarrow f(x) = 0$;

d) $f(x) = 0$.

2.3.5 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$ converge simplu, dar nu converge uniform:

a) $f_n(x) = \frac{x}{x+n},\ x \in (0,\infty)$;

b) $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}},\ x \in [0,1]$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, deci şirul de funcţii converge simplu către $f(x) = 0$; pentru $x = n \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$, deci şirul nu converge uniform;

b) $f(x)=0,\ x\in[0,1)$ şi $f(1)=\frac{1}{2}$. Se alege $x_n=1-\frac{1}{n}\in[0,1]$, pentru care $f_n(x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]^{-1}\to\frac{e}{e+1}$, deci şirul nu converge uniform.

2.3.6 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definite prin $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot\sin\frac{1}{3^k\cdot x}$ nu este uniform convergent.

Indicaţie de rezolvare:

Se arată că nu se verifică criteriul lui Cauchy, adică $(\exists)\ \varepsilon>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ n\in\mathbb{N},\ (\exists)\ x_n\in(0,\infty)$ şi $(\exists)\ p_n\in\mathbb{N}^*$ cu $\left|f_{n+p}(x_n)-f_n(x_n)\right|>\varepsilon$

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|2^{n+1}\cdot\sin\frac{1}{3^{n+1}x}+\ldots+2^{n+p}\cdot\sin\frac{1}{3^{n+p}x}\right|$$

şi pentru $x=x_n=\frac{2}{3^{2n+1}\pi}$

$$\sin\frac{1}{3^{n+1}x_n}=\sin 3^n\cdot\frac{\pi}{2}=(-1)^n,\ldots,\ \sin\frac{1}{3^{n+p}x_n}=\sin 3^{p-n-1}\cdot\frac{\pi}{2}=(-1)^{p-n-1}$$

şi luând $p=n\Rightarrow$

$$\left|f_{2n}(x)-f_n(x)\right|=\left|2^{n+1}(-1)^n+\ldots+2^{2n}(-1)\right|=$$

$$=2^{n+1}\left|1-2+4+\ldots+(-1)^{n-1}2^{n-1}\right|>\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

2.3.7 Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{k(k+1)}$ este uniform convergent şi limita sa este o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

Indicaţie de rezolvare:

Se aplică criteriul lui Cauchy.

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|=\left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}+\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right|<$$

$$<\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}<$$

$$< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Deci, şirul de funcţii este uniform convergent, iar funcţiile f_n fiind continue pe $\mathbb{R}$, rezultă că limita şirului va fi o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

2.3.8 Să se studieze convergenţa şirului de funcţii $(f_n)_n$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definite prin $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Indicaţie de rezolvare:

Funcţiile f_n sunt continue pe intervalul compact $[0,1]$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n} = 0$, deci şirul este simplu convergent către funcţia constantă $f \equiv 0$ continuă. De asemenea, şirul de funcţii considerat este monoton descrescător în fiecare punct $x \in [0,1]$, deci conform Teoremei Dini, şirul este uniform convergent.

2.3.9 Să se determine mulţimea de convergenţă, *A*, pentru următoarele serii de funcţii:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\};$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n,\ x \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2-x)\left(2-x^{1/2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(2-x^{1/n}\right),\ x > 0;$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \cdot \ln\left(1+a^n\right),\ a \geq 0,\ x \in \mathbb{R};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n,\ x \neq \frac{1}{2};$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 \cdot x^{2n}},\ x \neq 0;$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n},\ x \in \mathbb{R};$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{\mathrm{e}^{nx}},\ x \in \mathbb{R}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n},\ x \neq 0$.

Indicaţie de rezolvare:

a) pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ arbitrar fixat, se consideră seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, unde $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$. Pentru aceasta se studiază convergenţa absolută, utilizând criteriul rădăcinii.

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$, de unde seria este absolut convergentă pentru $\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$. Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiţia necesară de convergenţă a unei serii;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|1-x^2|}{1+x^2} < 1$, pentru $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pentru $x = 0$, se obţine seria alternată $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln n}$, care este convergentă. Rezultă că mulţimea *A* de convergenţă a seriei de funcţii este $\mathbb{R}$;

c) deoarece $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ şi $x > 0$, rezultă că de la un anumit rang n_0, termenii seriei de funcţii vor avea acelaşi semn, căci $2 - \sqrt[n]{x} > 0,\ (\forall)\ n \geq n_0$. Se va obţine, astfel, o serie cu termenii pozitivi, pentru care se aplică criteriul Raabe-Duhamel.

$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} - 1\right] = \ln x$, de unde rezultă că pentru $x > \mathrm{e}$ seria este convergentă, pentru $x < \mathrm{e}$ este divergentă, iar pentru $x = \mathrm{e}$ seria este divergentă, utilizând criteriul al doilea de comparaţie cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

De asemenea, pentru $x = 2$ seria este convergentă, deoarece $f_n(2) = 0$.

Rezultă mulţimea de convergenţă *A*=$\{2\} \cup (\mathrm{e}, \infty)$;

d) pentru $a \in [0,1) \Rightarrow A = \mathbb{R}$. Pentru $a = 1 \Rightarrow A = (1, \infty)$.

Pentru $a \in (1, \infty) \Rightarrow A = (2, \infty)$;

e) $A=(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$;

f) $A=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$;

g) $A=\mathbb{R}$;

h) $A=(0,\infty)$;

i) $A=\varnothing$.

2.3.10 Fie funcţia $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ 2-x, & x\in(1,2] \end{cases}$ şi având proprietatea $f(x)=f(x+2)$. Fie $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}\cdot f\left(4^n\cdot x\right)$. Să se arate că:

a) *F* este continuă pe $\mathbb{R}$;

b) *F* nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) *f* este continuă pe intervalul compact $[0,2]$ şi subunitară. Cum ea este periodică de perioadă 2, rezultă că este subunitară pe $\mathbb{R}$, deci mărginită.

Se demonstrează că seria de funcţii $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}\cdot f\left(4^n\cdot x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ este uniform convergentă

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)=f(x)+\left(\frac{3}{4}\right)\cdot f(4\cdot x)+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot f\left(4^2\cdot x\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot f\left(4^n\cdot x\right)$$

Aplicând criteriul de convergenţă al lui Cauchy, se obţine:

$$\left|s_{n+p}(x)-s_n(x)\right|=\left|\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot f\left(4^{n+1}\cdot x\right)+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+p}\cdot f\left(4^{n+p}\cdot x\right)\right|\le$$
$$\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot\left[1+\frac{3}{4}+\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{p-1}\right]=\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot 4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^p\right)\le$$
$$\le\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot 4\to 0,\ \text{pentru}\ n\to\infty;$$

rezultă că şirul sumelor parţiale este uniform convergent, deci seria este uniform convergentă şi *F* este continuă;

b) fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat şi $m \in \mathbb{N}$ fixat. Atunci $\left(4^m \cdot x\right) \in \mathbb{R}$ şi deci există $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $k \le 4^m \cdot x \le k+1 \Rightarrow \frac{k}{4^m} \le x \le \frac{k+1}{4^m}$.

Notăm $\alpha_m = \frac{k}{4^m}$, $\beta_m = \frac{k+1}{4^m} \Rightarrow \alpha_m \le x \le \beta_m$.

Fie numerele reale $\left(4^n \cdot \alpha_m\right)$, $\left(4^n \cdot \beta_m\right)$.

Pentru $m = n \Rightarrow \left(4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m\right) = 4^{n-m}(k+1-k) = 4^{n-m} = 1.$

Pentru $n > m \Rightarrow \left(4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m\right) = 4^{n-m} = \text{nr. par}$.

Pentru $n < m \Rightarrow \left(4^n \cdot \beta_m - 4^n \cdot \alpha_m\right) = 4^{n-m} = \frac{1}{4^{m-n}}$, de unde rezultă că, în acest caz, nu există nici un număr întreg cuprins între ele.

Din acestea rezultă $\left| f\left(4^n \cdot \beta_m\right) - f\left(4^n \cdot \alpha_m\right) \right| = \begin{cases} 4^{n-m}, \; n \le m \\ 0, \; n > m \end{cases}$ şi deci:

$$\left|F\left(\beta_m\right) - F\left(\alpha_m\right)\right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f\left(4^n \cdot \beta_m\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot f\left(4^n \cdot \alpha_m\right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left[f\left(4^n \cdot \beta_m\right) - f\left(4^n \cdot \alpha_m\right) \right] \right| = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{4^m} + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4^{m-1}} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4^{m-2}} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^m \ge$$

$$\ge 1 + \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^m = 4\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\right] \to 4.$$

Cum $\lim_{m\to\infty} \left(\beta_m - \alpha_m\right) = 0$, rezultă că $\lim_{m\to\infty} \frac{F\left(\beta_m\right) - F\left(\alpha_m\right)}{\beta_m - \alpha_m} = +\infty$, deci F nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

4. TEST DE AUTOEVALUARE

$\boxed{1}$ Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, definite prin $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}\cdot\sin kx,\ x\in\mathbb{R}$, este convergent pe $\mathbb{R}$, iar limita sa este o funcţie continuă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Să se arate că şirul de funcţii $f_n:[0,1]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=n\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-nx^2}$ converge, dar $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

$\boxed{3}$ Să se arate că şirul de funcţii $(f_n)_n$, definite prin

$f_n(x)=\dfrac{nx}{\left(1+n^2x^2\right)},\ x\in[0,1]$ converge neuniform pe $[0,1]$, dar

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

$\boxed{4}$ Să se determine mulţimea de convergenţă şi uniform convergenţă a seriei $x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x}{1+nx}-\frac{x}{1+(n-1)x}\right],\ 0\le x\le 1$. Să se determine suma seriei.

$\boxed{5}$ Utilizând criteriul lui Weierstrass, să se studieze convergenţa seriilor de funcţii:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^3}{1+n^3\cdot x^4},\ x\in\mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]\cdot\dfrac{\cos nx}{n+1},\ x\in\mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+2^n},\ x\in\mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cdot\sin\dfrac{1}{3^n\cdot x^2},\ x\neq 0,\ |a|<3$.

LECŢIA 4 - SERII DE PUTERI

1. Serii de puteri

Definiţia 2.4.1. O serie de forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R}$, se numeşte ***serie de puteri***.

Observaţie. Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri conţine cel puţin un punct şi anume punctul $x = 0$, pentru care seria de puteri este convergentă şi are suma a_0.

Există serii de puteri care au mulţimea de convergenţă formată dintr-un singur punct şi există serii de puteri convergente pentru price *x* real.

Exemple

1) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ este convergentă numai în punctul $x = 0$, deoarece pentru orice $x_0 \neq 0$ există un rang *n* pentru care $|n \cdot x_0| > 1$ şi deci $\lim_{n\to\infty} |n! \cdot x_0| = \infty$.

2) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este convergentă pe $\mathbb{R}$, deoarece pentru orice $x_0 \in R \Rightarrow \left| \frac{u_{n-1}}{u_n} \right| = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0$ pentru $n \to \infty$.

Teorema I a lui Abel

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R}$, există un număr $\rho \geq 0$, finit sau infinit, pentru care :

a) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-\rho, \rho)$;

b) seria este divergentă pentru $|x| > \rho$;

c) pentru orice $r \in (0, \rho)$ seria de puteri este uniform convergentă pe $[-r, r]$.

Numărul ρ se numeşte raza de convergenţă a seriei, iar $(-\rho, \rho)$ intervalul de convergenţă.

Observaţie. Teorema lui Abel nu spune nimic în legătură cu convergenţa sau divergenţa seriei de puteri în punctele din capetele intervalului de convergenţă.

Teorema 2.4.2 (d'Alembert)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergenţă a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty; \\ 0, & \lambda = +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Teorema 2.4.3 (Cauchy-Hadamard)

Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ finită sau infinită, atunci raza de convergenţă a seriei de puteri va fi:

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < \infty; \\ 0, & \lambda = +\infty; \\ +\infty, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Corolar 2.4.4. Suma unei serii de puteri este o funcţie continuă pe intervalul de convergenţă.

Corolar 2.4.5. Suma unei serii de puteri este uniform continuă pe orice interval compact conţinut în intervalul de convergenţă.

Teorema 2.4.6. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ convergentă în intervalul $(-\rho, \rho)$. Seria formată cu derivatele termenilor săi, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ va avea acelaşi interval de convergenţă.

Corolar 2.4.7

Dacă $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ şi $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$, atunci $s'(x) = \varphi(x)$, $(\forall)\ x \in (-\rho, \rho)$.

Corolar 2.4.8. Suma seriei formată cu derivatele termenilor unei serii de puteri este o funcţie continuă şi derivabilă pe intervalul de convergenţă.

Corolar 2.4.9. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergenţă ρ, atunci:

a) seria formată cu derivatele de ordinul *n* ale termenilor seriei are aceeaşi rază de convergenţă;

b) suma *s* a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este indefinit derivabilă pe intervalul de convergenţă şi derivata de ordinul *n* este egală cu suma seriei derivatelor de ordinul *n* pentru orice $x \in (-\rho, \rho)$.

Teorema 2.4.10. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri cu raza de convergenţă ρ, atunci pentru orice interval închis $[a,b] \subset (-\rho,\rho)$ seria de puteri poate fi integrată termen cu termen şi $\int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n \cdot x^n \,\mathrm{d}\, x$, unde $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Exemplu

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ are raza de convergenţă $\rho = 1$.

Seria derivatelor $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$ are aceeaşi rază de convergenţă şi are suma $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, deci suma seriei iniţiale este $s(x) = C + \mathrm{arctg}\, x$. Pentru $x = 0$, $C = 0 \Rightarrow s(x) = \mathrm{arctg}(x)$.

2. Operaţii cu serii de puteri

Fie două serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$ cu razele de convergenţă ρ_1 şi ρ_2. Atunci:

a) suma celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$, care are raza de convergenţă $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$. Dacă $A(x), B(x)$ sunt sumele celor două serii de puteri şi $S(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) \cdot x^n$, atunci $S(x) = A(x) + B(x),\ (\forall)\ x \in (-\rho,\rho)$;

b) diferenţa celor două serii de puteri este tot o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n$, care are raza de convergenţă $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$; dacă $D(x)$ este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) \cdot x^n$, atunci $D(x) = A(x) - B(x),\ (\forall)\ x \in (-\rho,\rho)$;

c) produsul celor două serii de puteri este tot o serie de puteri:

$$a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + \ldots + (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0) \cdot x^n + \ldots,$$

care are raza de convergenţă $\rho \geq \min(\rho_1, \rho_2)$; dacă $P(x)$ este suma seriei produs, atunci $T(x) = A(x) \cdot B(x),\ (\forall)\ x \in (-\rho, \rho)$;

d) câtul a două serii de puteri $A(x)$ şi $B(x)$, $b_0 \neq 0$, este o serie de puteri $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$, cu coeficienţii definiţi de egalitatea $A(x) = B(x) \cdot C(x)$.

3. Serii Taylor şi Mac-Laurin

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe intervalul *I* şi fie un punct x_0 interior lui *I*. ***Formula lui Taylor*** pentru funcţia *f* ***în punctul*** x_0 este:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + R_n(x),\ x \in I\ .$$

Dacă şirul $(R_n(x))_n$, pentru $x \in X \subset I$ este convergent către zero, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$ numită ***seria Taylor a funcţiei*** *f* ***în punctul*** x_0 este convergentă pentru $x \in X \subset I$ către funcţia *f*.

Formula $f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0) + \ldots$ se numeşte ***formula de dezvoltare*** a funcţiei *f* ***în serie Taylor*** în jurul punctului x_0.

Teorema 2.4.11. Seria Taylor a funcţiei *f* în jurul punctului x_0 este convergentă într-o vecinătate *V* a lui x_0, dacă derivatele de orice ordin $f^{(n)}$ sunt egal mărginite pe *V*, adică $\left| f^{(n)}(x) \right| < M,\ \ (\forall)\, x \in V$.

Observaţie. Dacă $x_0 = 0$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n$ se numeşte ***serie Mac Laurin*** pentru funcţia *f*.

4. Probleme rezolvate

$\boxed{2.5.1}$ Să se determine mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - (-2)^n\right] \cdot x^n$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \cdot x^n$; **e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} \cdot x^n,\ a > 0$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n$; **g)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot (x - 1)^n$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot (x+3)^n$; **i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot (x+3)^n$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

b) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho = 3$ şi intervalul de convergenţă este $(-3,3)$; pentru $x = 3$ şi pentru $x = -3$ seria este divergentă, deoarece nu este verificată condiţia necesară de convergenţă a unei serii, deci mulţimea de convergenţă este $(-3,3)$;

c) $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$ şi deci mulţimea de convergenţă este $\mathbb{R}$;

d) $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$;

e) $\mathbb{R}$;

f) $(-1,1)$;

g) se consideră seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n$, $y = x - 1$, şi se obţine mulţimea de convergenţă $(0,2]$;

h) –3;

i) $(-\mathrm{e}-3, \mathrm{e}-3)$.

2.5.2 Să se determine raza de convergenţă pentru seriile de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, unde $a_{2n} = \frac{1}{n}$, $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot x^n$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ şi $\rho = \frac{1}{\lambda}$; avem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = \max\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 1 \Rightarrow \rho = 1;$$

b) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}.$

2.5.3 Dacă raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ este $\rho\in(0,\infty)$, să se găsească raza de convergenţă a seriilor de puteri următoare:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^m\cdot x^n,\ m\in\mathbb{N}^*$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{nm},\ m\in\mathbb{N}^*$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+|a_n|}\cdot x^n$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow\rho_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n^m}{a_{n+1}^m}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|^m=\rho^m$;

b) se notează $y=x^m$, rezultă că seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ny^n$ are raza de convergenţă ρ, deci seria este absolut convergentă pentru $|y|<\rho\Rightarrow\left|x^m\right|<\rho\Rightarrow|x|^m<\rho\Rightarrow|x|<\sqrt[m]{\rho}$, deci raza de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{nm},\ m\in\mathbb{N}^*$ este $\rho_1=\sqrt[m]{\rho}$;

c) $\rho_1=\max(\rho,1)$.

2.5.4 Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$; **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$;

Indicaţie de rezolvare:

a) se calculează raza de convergenţă a seriei de puteri.

$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\Rightarrow\rho=\dfrac{1}{\lambda}=1$. Intervalul de convergenţă este $(-1,1)$.

Se studiază convergenţa în capetele intervalului.

Pentru $x=1$, se obţine seria numerică alternată $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$, care este convergentă, iar pentru $x=-1$ se obţine seria $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, care este divergentă.

Deci, mulţimea de convergenţă a seriei este $(-1,1]$.

Fie $f(x)$ suma seriei de puteri.

Atunci $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}=\frac{1}{1+x},\ |x|<1.$

Prin integrare, se obţine $f(x)=\ln(1+x)+C,\ x\in(-1,1)$. Pentru determinarea constantei de integrare *C*, se consideră $x=0$, de unde se obţine $C=0$. Prin urmare, $f(x)=\ln(1+x),\ x\in(-1,1)$.

Deoarece seria de puteri este convergentă şi în punctul $x=1$, rezultă că funcţia $f(x)$ este continuă în acest punct şi $f(1)=\lim_{x\to 1}\ln(1+x)=\ln 2$;

b) mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$. Fie $f(x)$ suma seriei de puteri. Atunci $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\ |x|<1$. Deci, $f(x)=\operatorname{arctg}x+C$ şi pentru $x=0$ se va obţine $C=0$, deci suma seriei de puteri este $f(x)=\operatorname{arctg}x,\ x\in(-1,1)$. Cum seria de puteri este convergentă şi în capetele intervalului de convergenţă, rezultă $f(-1)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ şi $f(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$;

c) mulţimea de convergenţă este $(-1,1]$. Notând cu $f(x)$ suma seriei de puteri, rezultă $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n}=\frac{1}{1+x^3}$, de unde

$$f(x)=\int\frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}};$$

d) mulţimea de convergenţă este $(-1,1)$. Pentru calculul sumei seriei de puteri se pleacă de la seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$, care are suma

$$g(x)=\frac{x}{1-x}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

rezultă că suma seriei de puteri este $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$;

$\boxed{2.5.5}$ Să se demonstreze că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este convergentă pentru orice $x \in [-1,1]$, iar suma ei f verifică ecuaţia

$$(1-x) \cdot f'(1-x) - x \cdot f'(x) = \ln \frac{1-x}{x}, \ x \in (0,1).$$

Indicaţie de rezolvare:

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow \rho = 1$, deci intervalul de convergenţă este $(-1,1)$.

Pentru $x = 1$, se obţine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, care este convergentă.

Pentru $x = -1$, se obţine seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, convergentă, cu Leibniz.

Deci, mulţimea de convergenţă este $[-1,1]$.

Se consideră $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \Rightarrow x \cdot f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Fie $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Rightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

Rezultă că $g(x) = -\ln(1-x)$.

$x \cdot f'(x) = -\ln(1-x) \Rightarrow (1-x) \cdot f'(1-x) = -\ln x$ şi se verifică ecuaţia dată.

$\boxed{2.5.6}$ Să se arate că seria de puteri $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n)}$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi că suma ei verifică ecuaţia

$$f''(x) + x \cdot f(x) = 0, \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

Indicaţie de rezolvare:

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Rightarrow \rho = \infty$, deci seria de puteri este convergentă pe $\mathbb{R}$.

Notându-se cu $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n)}$, rezultă

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{3n-1}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-1)}=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 5}-\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=-x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n-2}}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(3n-3)}$$

şi prin înlocuire se verifică ecuaţia dată.

$\boxed{\textbf{2.5.8}}$ Să se determine o serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$ şi astfel încât suma f a ei să verifice ecuaţia

$$x\cdot f''(x)+f'(x)+x\cdot f(x)=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Indicaţie de rezolvare:

Se caută f de forma $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$. Derivând de două ori termen cu termen, obţinem:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}\quad\text{şi}\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n\cdot x^{n-2},$$

pe care înlocuindu-le în ecuaţia ce trebuie verificată, rezultă identitatea

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2a_n+a_{n-2}\right)\cdot x^{n-1}=0,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

De aici rezultă că $a_1=0,\ n^2\cdot a_n+a_{n-2}=0,\ n=2,3,\ldots$, adică

$$a_{2k-1}=0\ \text{şi}\ a_{2k}=(-1)^k\cdot\frac{a_0}{4^k\cdot(k!)^2},\ k\in\mathbb{N}.$$

Pentru $a_0=1\Rightarrow 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{4^k\cdot(k!)^2}$, care este o serie de puteri convergentă pe $\mathbb{R}$.

5. TEST DE AUTOEVALUARE

$\boxed{1}$ Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot x^{2n-2}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)\cdot x^n$;

d) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}\cdot x^n,\ a\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ Fie un polinom $P\in\mathbb{R}[X]$. Să se calculeze suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\cdot\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Să se arate că funcţiile:

a) $f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $g(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $h(x)=\mathrm{e}^x,\ x\in\mathbb{R}$, se pot dezvolta în serie de puteri pe $\mathbb{R}$ şi să se determine seriile Mac Laurin corespunzătoare.

$\boxed{4}$ Să se arate că funcţiile următoare se pot dezvolta în serie de puteri şi să se găsească dezvoltarea, precizându-se intervalul în care aceasta este adevărată:

a) $f(x)=(1+x)^a,\ x>-1,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2,...\}$;

b) $f(x)=\arcsin x,\ x\in[-1,1]$.

$\boxed{5}$ Să se demonstreze inegalitatea $\mathrm{e}^x>\frac{(n+1)^n}{n!},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{6}$ Să se calculeze, utilizând formula lui Taylor, limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

6. TEMĂ DE CONTROL

$\boxed{1}$ Să se demonstreze că seriile următoare sunt convergente pe mulţimile indicate, iar sumele lor sunt funcţii continue pe aceste mulţimi:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4 + x^2}},\ x \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ x \in \mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x},\ 0 \le x < \infty$, unde seria numerică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă.

$\boxed{2}$ Este posibil ca o serie de funcţii continue pe o mulţime X să conveargă neuniform pe această mulţime către o funcţie continuă?

$\boxed{3}$ Este posibilă derivarea termen cu termen a seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{e}^{-nx^2} - \mathrm{e}^{-(n-1)x^2} \right],\ x \in [0,1]$;

b) $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^4x^2\right) - \frac{1}{2(n-1)}\ln\left(1+(n-1)^4x^2\right) \right],\ x \in [0,1]$?

$\boxed{4}$ Este posibilă integrarea termen cu termen a seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2\,\mathrm{e}^{-n^2x^2} - (n-1)^2\,\mathrm{e}^{-(n-1)^2x^2} \right],\ x \in [0,1]?$$

$\boxed{5}$ Să se arate că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2} \right)$ converge neuniform pe $[0,1]$ şi totuşi

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2} \right) \right] \mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2} \right) \mathrm{d}\,x .$$

$\boxed{6}$ Fie seria de puteri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

a) Să se determine mulţimea de convergenţă şi să se calculeze suma ei.

b) Să se arate că suma seriei de puteri, S, verifică ecuaţia diferenţială $x \cdot S'(x) + S(x) = \frac{1}{1-x^2}$ şi ecuaţia funcţională $S\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2) \cdot S(x)$.

$\boxed{7}$ Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii:

a) $f(x) = \frac{8-2x}{x^2-8x+15}$;

b) $f(x) = \frac{2-x-x^2}{(1-x)(1-x^2)}$;

c) $f(x) = \ln(2-3x+x^2)$;

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

e) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

f) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

g) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$;

h) $f(x) = \frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$;

i) $f(x) = \frac{1-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

$\boxed{8}$ Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiilor de sub integrale, să se demonstreze:

a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$;

b) $\lim_{\alpha \searrow 0} \int_0^{1-\alpha} \frac{\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$.

7. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE INVĂŢARE Nr. 1

1. **D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bătineţu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciţii şi probleme*, Editura Militară, Bucureşti, 1992
2. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
4. **M. Craiu, M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978, 1979, Editura ALL, 1993, 1994
6. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferenţial, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1976
7. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecţii de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
8. **..** *Analiză matematică*, vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
9. **E. Popescu**, *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1998
10. **M. Roşculeţ**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
11. **M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
12. **I. Sprinţu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
13. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
14. **I. Sprinţu**, **V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferenţial şi integral,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2003