-1- An. I zi; 10.12.2021

Aplicații recapitulative pentru lucrarea de control

1) Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$x_n = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Criteriul Cesaro - Stolz

Dacă $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător și nemărginit, și

($\exists$) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$,

atunci ($\exists$) și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

$b_n = n\sqrt{n} \nearrow +\infty$

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim \frac{\cancel{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}+\sqrt{n+1}-\cancel{(1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n})}}{(n+1)\cdot\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} \underset{(\infty-\infty)}{\overset{\infty}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{\left((n+1)\sqrt{n+1}\right)^2-(n\sqrt{n})^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+n\cdot\sqrt{n(n+1)}}{(n+1)^3-n^3} = \lim_{\infty} \frac{n^2\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]}{3n^2+3n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}}$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 8^n}} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dacă a doua limită există

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 8^n}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!\cdot 8^{n+1}}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot 8^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n!)^2}(n+1)^2\cdot\cancel{(2n)!}\cdot\cancel{8^n}}{\cancel{(2n)!}\cdot(2n+1)(2n+2)\cancel{8^n}\cdot 8\cdot\cancel{(n!)^2}}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{(n+1)^2}{8(2n+1)\cdot 2(n+1)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \frac{1}{16}\cdot\lim_{\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{32}$$

(2°) Fie seria de numere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}$. Precizați natura seriei.

- serie cu termeni pozitivi; $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{32} < 1 \Rightarrow$ seria este convergentă

(3°) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$; $a_n > 0$; Arătați care este natura de convergență și să se calculeze suma seriei și în caz de convergență să se calculeze suma.

seria ... este conv și are suma $S \Leftrightarrow$

Def Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este conv și are suma S dacă șirul sumelor parțiale este convergent și are limita S; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{A}{4n-3} + \frac{B}{4n+1} = \frac{A(4n+1) + B(4n-3)}{(4n+1)(4n-3)} \Leftrightarrow$$

$A(4n+1) + B(4n-3) = 1$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

$A(4n+1) + B(4n-3) = 1$

$n(4A + 4B) + A - 3B = 1 \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(A+B) = 0 \\ A - 3B = 1 \end{cases}$

$A = -B \Rightarrow A + 3A = 1$; $4A = 1$; $\boxed{A = \frac{1}{4};\ B = -\frac{1}{4}}$

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right); \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{\cancel{4n}+1-\cancel{4n}+3}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

$n=1$: $\frac{1}{1\cdot 5} = \frac{1}{4}\left(1 - \cancel{\frac{1}{5}}\right)$

$n=2$: $\frac{1}{5\cdot 9} = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}}\right)$

$n=3$: $\frac{1}{9\cdot 13} = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{13}}\right)$

. . . .

$n-1$: $\frac{1}{(4n-7)(4n-3)} = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{4n-7}} - \cancel{\frac{1}{4n-3}}\right)$

n: $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{4n-3}} - \frac{1}{4n+1}\right)$

(+) $S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} = S$

(4) Dem. că șirul $S_n = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ este șir Cauchy. $\iff$ $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\exists)$ $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq n_0(\varepsilon)$ și $(\forall)$ $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, să avem $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Criteriul general de conv al lui Cauchy: Șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent $\iff$ (a_n) este șir Cauchy.

Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar.

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \iff \left| \cancel{\frac{1}{1\cdot 5}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}} + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} + \dots + \frac{1}{(4n+4p-3)(4n+4p+1)} - \cancel{\frac{1}{1\cdot 5}} - \cancel{\dots} - \cancel{\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}} \right| =$$

$$= \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} + \dots + \frac{1}{(4n+4p-3)(4n+4p+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1} - \cancel{\frac{1}{4n+5}} + \cancel{\frac{1}{4n+5}} - \cancel{\frac{1}{4n+9}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{4n+4p-3}} - \frac{1}{4n+4p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+4p+1}\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+1} - \cancel{\frac{1}{4n+4p+1}} + \cancel{\frac{1}{4n+4p+1}}\right) =$$

$(\forall) p \in \mathbb{N}$

$$= \frac{1}{4(4n+1)} < \varepsilon \Rightarrow 4(4n+1) > \frac{1}{\varepsilon}; \quad 4n+1 > \frac{1}{4\varepsilon}$$

$$4n > \frac{1}{4\varepsilon} - 1; \quad n > \left[\left(\frac{1}{4\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{4}\right] + 1$$

Notez $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4\varepsilon} - 1\right)\right] + 1$. $\rightarrow$ dacă $n > n_0(\varepsilon)$ cu atât mai mult vom avea: $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, $(\forall) \varepsilon > 0$, $(\forall) p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$

deci $(\exists)$ $n_0(\varepsilon)$ a.î. are loc definiția șirului Cauchy pt S_n $\rightarrow$ (S_n) conv $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este conv.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \dots$

$\rightarrow$ serie alternată = seria geometrică de rație

$r = -\frac{4}{5} \in (-1, 1)$

$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + \dots$ = seria geom de rație x

Fie seria de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n \quad ; \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (C-H)$$

$a_n = 1$; $\rho = \lim_{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{\infty} 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\rho = 1}$

$\mathring{I} = (-\rho, \rho) = (-1, 1)$ = intervalul de conv

$A = \mathring{I} \cup$ punctele $(\{-\rho\}, \{\rho\}$ sau amândouă$)$ dacă seria este conv în aceste puncte.

$x = 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$

$S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$; $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow$

seria este div.

$x = -1$ $\quad S_1 = 1$; $S_2 = 1 - 1 = 0$; $S_3 = S_2 + 1 = 1$; $S_4 = 0, \dots$

$S_{2k} = 0$; $S_{2k-1} = 1 \Rightarrow (S_n)$ div.

$\Rightarrow$ mulțimea de conv a seriei geometrice este $A = (-1, 1)$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1; \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$x = -\frac{4}{5} \in (-1, 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{5}{9}$

Convergența (met 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \dots$$

$\Rightarrow$ serie alternată; Criteriul lui Leibniz: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$; dacă $a_n \searrow 0 \Rightarrow$ seria este conv

$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$; $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 0$, $a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \searrow 0$

$\Rightarrow$ seria este convergentă.

6° Stabiliți dacă seriile următoare sunt A.C sau S.C

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s.n. AC dacă $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este conv.

O serie AC este convergentă.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s.n. S.C dacă este convergentă, dar seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă

Ex: Seria armonică alternată:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$

→ este conv și suma este egală cu ln 2

Seria modulelor este $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ = seria armonică

→ divergentă.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$; seria armonică generalizată

dacă $\alpha > 1$ ⇒ seria este conv

dacă $0 \le \alpha \le 1$ ⇒ seria este div.

dacă $\alpha < 0$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{\infty} n^{-\alpha} = +\infty$, nu
$-\alpha > 0$

este îndeplinită condiția necesară (dar nu și suficientă) de convergență ⇒ serie diverg.

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[p]{n}}$, $p \ge 2$, $p \in N$.

→ serie alternată ; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$

conf crit. lui Leibniz pt serii alternate,

⇒ seria este conv.

Seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$

$p \ge 2 \Rightarrow \frac{1}{p} < \frac{1}{2} < 1$ ⇒ seria modulelor este divergentă ⇒ Seria inițială este S.C.

Ex $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ ⇒ conv $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$

prin crit. Leibniz

Seria modulelor: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$; ⇒ conv, fiind seria arm. generalizată cu $\alpha > 1$ ⇒ Seria inițială este A.C.