Rezolvarea ecuatiilor neliniare

Partea I

Rezolvarea ecuatiilor neliniare

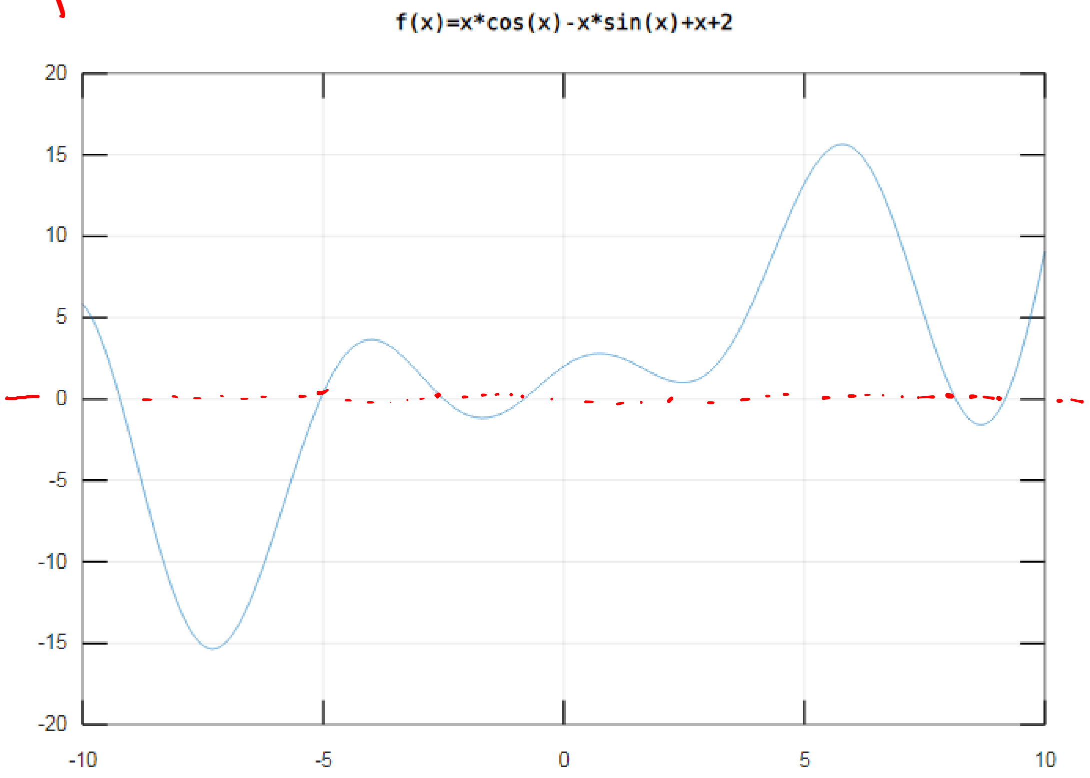
Fie f o functie continua de o variabila reala x.

Sa se determine radacinile ecuatiei f(x)=0.

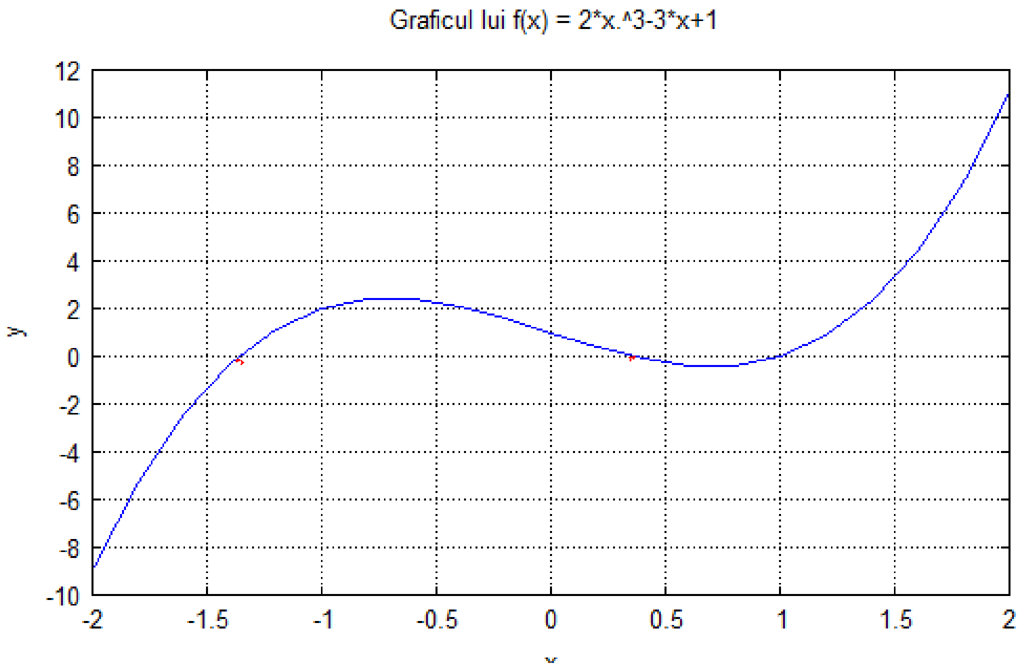
Metode numerice		
Bisectiei	Tangentei	Secantei

Metoda grafica

$f(x)=0$



$f(x)=0$ $2x^3-3x+1=0$



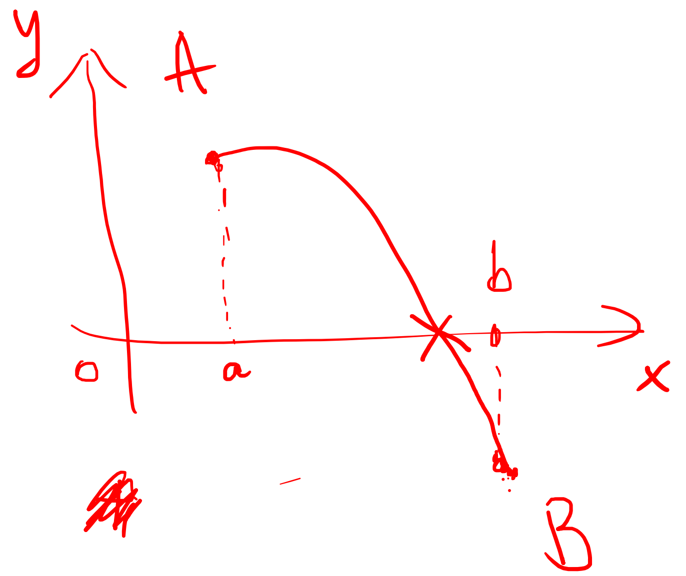
Metoda bisectiei
(metoda injumatatirii intervalului)

- Fie f o functie continua de o variabila reala x.
- Vrem sa determinam radacinile ecuatiei f(x)=0.
- Gasim doua valori a si b numere reale astfel incat

$$f(a)f(b)<0$$

- Adica f are semne contrare in cele doua puncte.

$\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f(c)=0$



- Deoarece f este continua pe [a, b] inseamna ca

$$\exists c \in (a,b) \text{ astfel incat } f(c) = 0$$

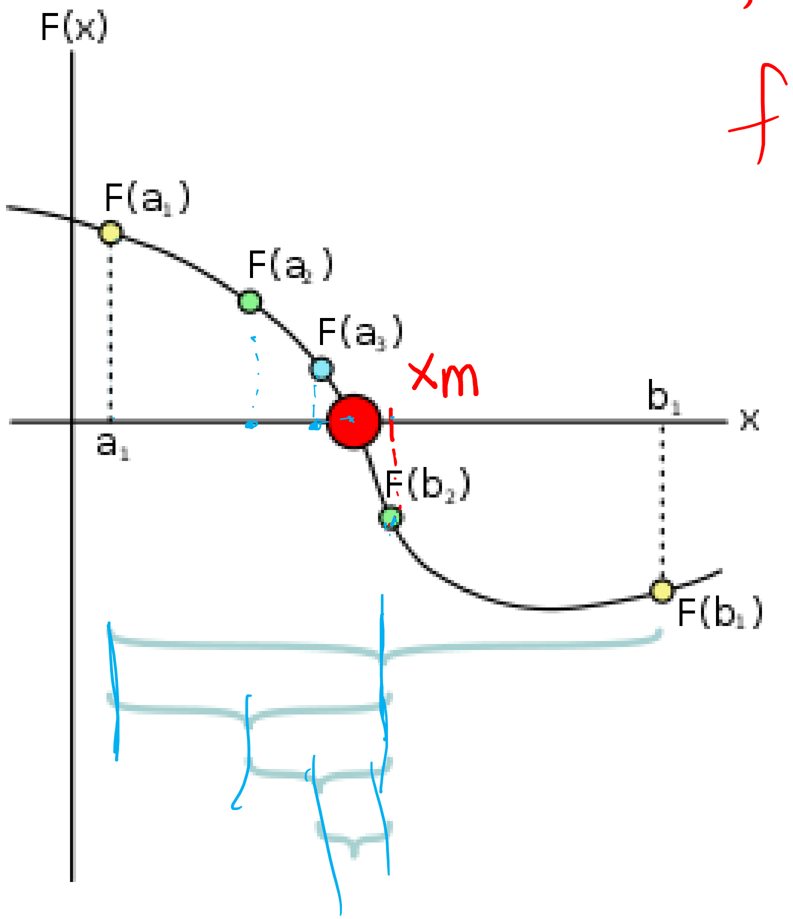
- Deci exista o radacina a lui f in (a,b).
- Vrem sa gasim aceasta solutie.

x_m = mijlocul lui $[a,b]$

$f(x_m) = 0$. gata

$f(x_m) > 0$ sau $f(x_m) < 0$

$f(a) > 0$ $\Rightarrow$



$\exists\, c \in (a, x_m)$ a.î. $f(c) = 0$.

$\Rightarrow$ soluția căutată va fi în (a, x_m)

Sursa: Wikimedia Commons

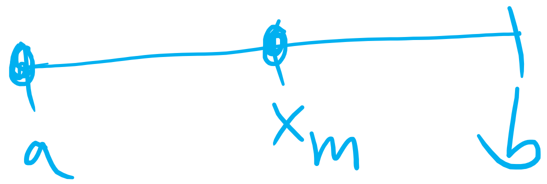
- Micsoram intervalul de cautare prin considerarea mijlocului intervalului

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

- Daca $f(x_m) = 0$ atunci am gasit solutia.
- Daca nu, atunci $f(x_m) > 0 \; sau < 0$
- deci

$$f(x_m)f(a) < 0 \;\; sau \; f(x_m)f(b) < 0$$

- Daca $f(x_m)f(a) < 0$

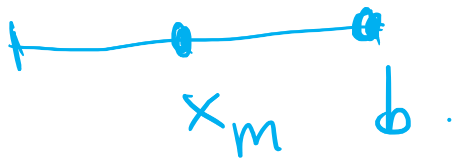


Inseamna ca radacina se afla in (a, x_m)

Daca

$$f(x_m)f(b) < 0$$

Inseamna ca radacina se afla in (x_m, b)



- Procedeul se repeta pana cand se obtine o valoare care aproximeaza bine solutia.
- Criteriu de oprire:

$$f(x_m)$$

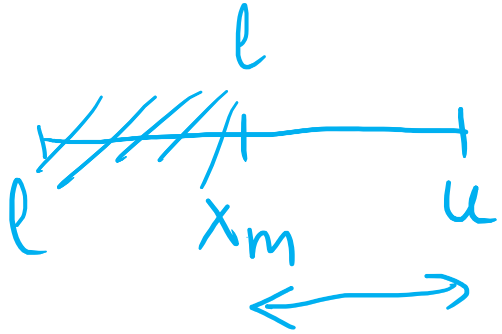
sa fie suficient de mic (suficient de aproape de 0).

$$|f(x_m)| \leq \varepsilon$$

unde ε este precizat inainte de rularea algoritmului

Algoritm

- Notam (l,u) intervalul in care se cauta solutia
- Pas 1. l=a, u=b
- Pas 2. xm=(l+u)/2
- Pas 3. Daca |f(xm)|<=ε atunci solutia este xm si stop. Altfel mergi la Pas 4.
- Pas 4. Daca f(xm)f(l) <0 atunci u=xm
- altfel l=xm
- Pas 5. Mergi la Pas 2.



Algoritm -pseudocod

se alege

- Notam (l,u) intervalul in care se cauta solutia. f(l)*f(u)<0 . ~~Fie~~ $\varepsilon > 0$.
- l=a, u=b, i=1
- xm=(l+u)/2
- while abs(f(xm))>ε
- if f(xm)*f(l) <0 then u=xm // solutia se gaseste in intervalul [l, xm]
- else l=xm // solutia se gaseste in intervalul [xm, u]
- endif
- i=i+1
- xm=(l+u)/2
- endwhile
- Solutia este xm.
- Numarul de iteratii este i.

Exercitiu

- Sa se determine o radacina a functiei $f(x)=0$

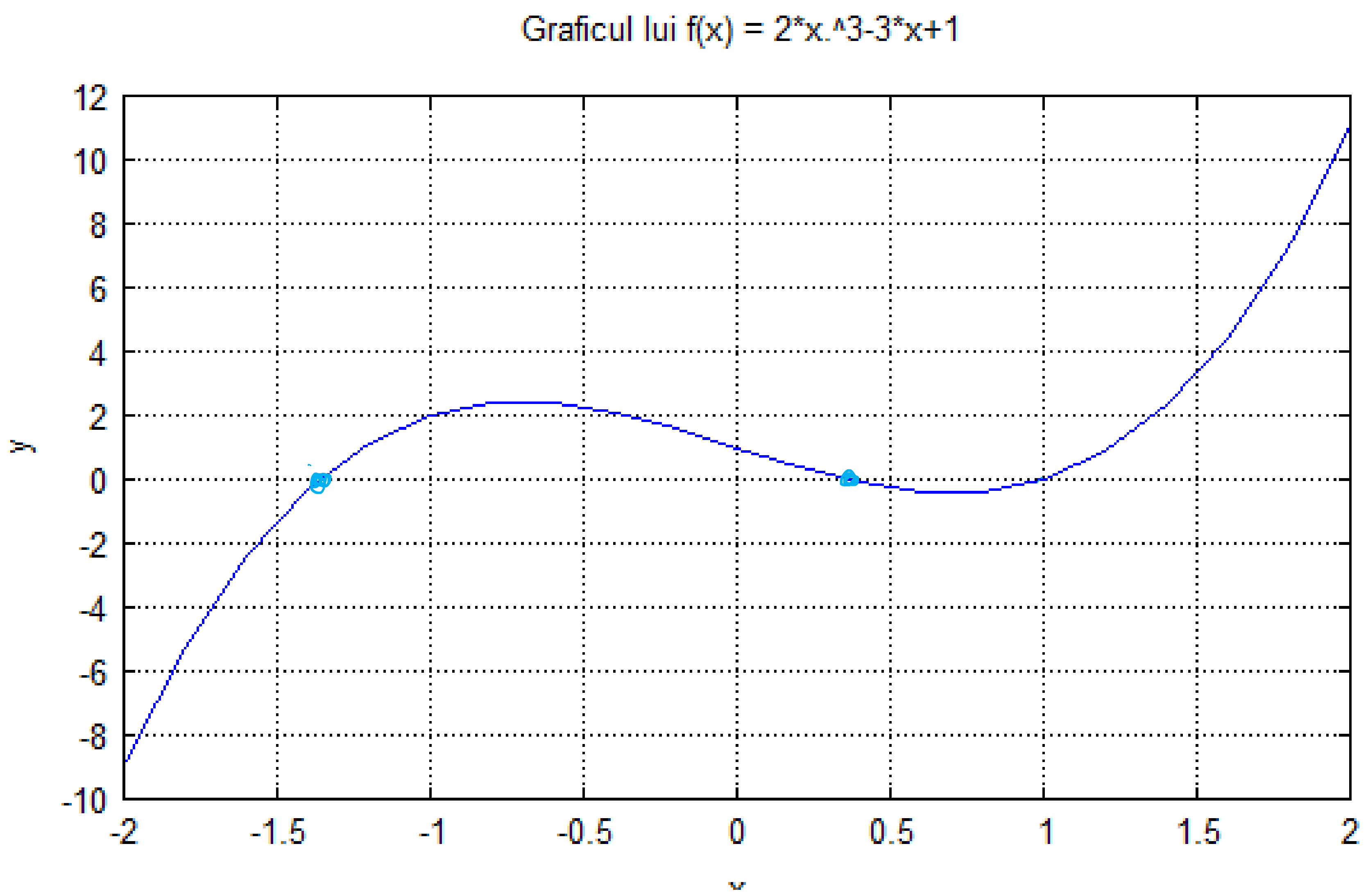
pentru

$$f(x)=2x^3-3x+1$$

si ε=0.005.

Trebuie sa gasim a si b astfel incat f(a) si f(b) sa aiba semne contrare.

Apelam la metoda grafica.


Graficul lui f(x) = 2*x.^3-3*x+1
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
y
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

Toate radacinile sunt in (-2, 2)

- una in (-1.5, -1)

-una in (0, 0.5)

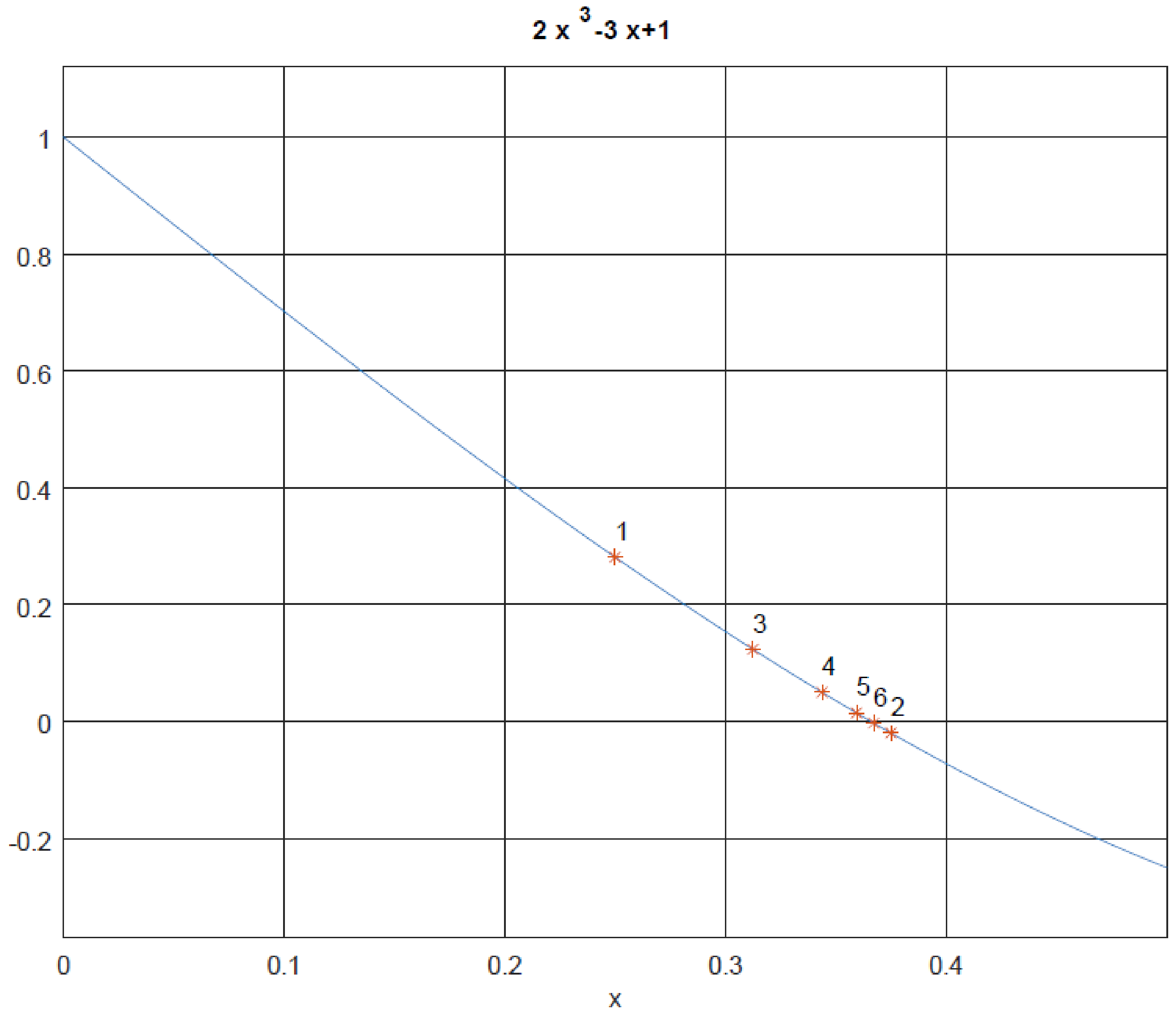
-o rad este 1.

Vrem sa gasim radacina din intervalul (0, 0.5).

- a=0, b=0.5, ε=0.005
- f(a)=1, f(b) = -0.25
-

i	l f(l) >0 (+)	u f(u)<0 (-)	xm	f(xm)	|f(xm)| <=ε
0	0	0.5	0.25	0.2812	nu
1	0.25	0.5	0.375	-0.0195	nu
2	0.25	0.375	0.3125	0.1235	nu
3	0.3125	0.375	0.3438	0.05	nu
4	0.3438	0.375	0.3594	0.0147	nu
5	0.3594	0.375	**0.3672**	-0.0025	da

- x=[0.25000;
-   0.37500;
-   0.31250;
-   0.34380;
-   0.35940;
-   0.36720]
- f=@(x) 2*x.^3-3*x+1;
- ezplot(f,[0,0.5])
- grid on
- hold on
- labels=cellstr(num2str([1:6]'))
- plot(x,f(x),'*')
- text(x,f(x)+0.05,labels)



Convergenta metodei

- Fie h_i lungimea intervalului in care se face cautarea dupa iteratia i.

$$h_0 = b - a$$

- Atunci h_i' pt orice i
- Deci $h_{i+1} = \frac{h_i'}{2}$
- $$h_{i+1} = \frac{h_i}{2} = \frac{h_{i-1}}{2^2} = \ldots = \frac{h_0}{2^{i+1}}$$
- $h_i \to 0$ cand $i \to \infty$

Observatii

- Metoda nu gaseste solutii multiple.
- Metoda gaseste o singura radacina
- Se aplica numai pentru radacini reale.
- In algoritm este bine ca semnele f(a) si f(b) sa se pastreze in niste variabile.
- Pentru a fi siguri ca algoritmul se opreste, este bine sa punem conditia ca nr de iteratii sa fie limitat de un nr maxim.

- Se poate modifica algoritmul,
- if f(xm)f(l) <0 then u=xm
- else l=xm
- endif
- in
- if sign(f(xm))≠sign(f(l)) then u=xm
- else l=xm
- endif

Algoritm

- l=a, u=b, i=0. MAX = nr maxim de iteratii
- xm=(l+u)/2
- while i<=MAX and abs(f(xm))>ε
- if f(xm)f(l)<0 then u=xm
- else l=xm
- endif
- i=i+1
- xm=(l+u)/2
- endwhile
- if abs(f(xm))<=ε then solutia este xm
- else write ' nr maxim de iteratii depasit'
- solutia gasita este xm
- endif

Se dă ε.

$|f(x_m)|$.