Suplimentar V. Gârban

18/03/2022

Suplimentar 3

Tema 2 | Curs 5 {Go There}

Determinarea matricei de trecere de la o bază la alta

Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n și $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ două baze ale sale

$\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$

Relația între vectorii celor două baze, prin matricea de trecere printre ele T este:

$$\underbrace{(v_1, \ldots v_n)}_{\mathcal{B}_2} = (u_1, \ldots, u_n) \cdot T \quad (1)$$

matricea T este inversabilă și $T^{-1} = S$

matricea T se determină prin urmare a n sisteme, de n ecuații cu n necunoscute cu aceeași matrice a coeficienților, care are pe coloane vectorii bazei $\mathcal{B}_1$ și ca termeni liberi o altă matrice, tot pătratică, având pe coloane vectorii bazei $\mathcal{B}_2$

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n \mid v_1, v_2, \ldots, v_n) \simeq$$

$\simeq (I_n, T)$ După n pași aplicând Gauss-Montante

Matricea T va fi utilizată pentru calculul coordonatelor unui vector când se trece de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_2$

Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ în $\mathcal{B}_1$; în baza $\mathcal{B}_2$ are coordonatele $x = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Relația dintre coordonatele lui x când se trece de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_2$ este următoarea

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ex. Fie $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ și $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ unde:

$u_1 = (1, 0, 1)$ $u_2 = (0, 1, 1)$ $u_3 = (1, 1, 1)$

$v_1 = (1, 1, 0)$ $v_2 = (-1, 0, 0)$ $v_3 = (0, 0, 1)$

Fie și vectorul $w = (1, 1, 0)$. Să se afle coordonatele lui w în fiecare dintre cele 2 baze, matricea de trecere de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_2$ și să se verifice relația dintre coordonatele lui w ~~cu formula~~ în cele 2 baze (2°).

① Găsim T

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{u_1 \quad u_2 \quad u_3}_{\mathcal{B}_1} \qquad \underbrace{v_1 \quad v_2 \quad v_3}_{\mathcal{B}_2}$$

$\xrightarrow{\text{Gauss}}$ $T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2$

Relația ①

$(I_n \mid T)$

② Se exprimă w în $\mathcal{B}_1$: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w$

$\underset{x_1}{\alpha_1} = -1$ $\underset{x_2}{\alpha_2} = -1$ $\underset{x_3}{\alpha_3} = 2$

" " w și în $\mathcal{B}_2$: $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = w$

$\underset{y_1}{\beta_1} = 1$ $\underset{y_2}{\beta_2} = 0$ $\underset{y_3}{\beta_3} = 0$

$(x_1, x_2, x_3) = (-1, -1, 2)$

③ Se calculează T^{-1}

$$T^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

④ Relația 2°

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ w în } \mathcal{B}_2$$