Seminar V. Cornaciu | 05/04/2022

Seminar 8

Valori și vectori proprii | Forma diagonală

Ex 1 Fie operatorul liniar $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit în baza canonică al lui $\mathbb{R}^3$ prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3,\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3)$$

Se cere:

a) Matricea asociată lui f în baza canonică în $\mathbb{R}^3$, $A_f^{B_c}$

b) Polinomul caracteristic, valorile și vectorii proprii ai matricii de la punctul A)

c) Să se arate că această matrice este diagonalizabilă și să se determine forma sa diagonală și baza în care $A_f^{B_c}$ are forma diagonală

d) Să se calculeze $(A_f^{B_c})^n$

---

a) $B_c = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$

$$\left.\begin{aligned} f(e_1) &= (5, 6, 4) \\ f(e_2) &= (-3, -4, -4) \\ f(e_3) &= (2, 4, 5) \end{aligned}\right\} A_f^{B_c} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

---

b) $$\varphi(\lambda) = \det(A_f^{B_c} - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

$$\varphi(\lambda) = 0 \to -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \iff \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$\underbrace{\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3}_{\text{Valorii Proprii}}$$

	1	-6	11	-6
1	1	-5	6	$\boxed{0}$
2	1	-3	$\boxed{0}$	
3	1	$\boxed{0}$		

$(A - \lambda I_n) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ relația de obținere a vectorilor proprii

---

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = 1Y$

$\alpha_2 = 2Y$

$\alpha_3 = Y$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 2Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot Y \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$V_{\lambda_1} = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,1), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$S_p = ((v_1))$

$\lambda_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = Y$

$\alpha_2 = Y$

$\alpha_3 = 0$

$$v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot Y \to v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{\lambda_2} = \{(\alpha, 0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,0,1), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$S_p = ((v_2))$

$\lambda_3 = 3$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & -7 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = (1/2)Y$

$\alpha_2 = Y$

$\alpha_3 = Y$

$$v_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y/2 \\ Y \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot Y \to v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S_p = ((v_3))$

---

c) A diagonalizabilă $\Leftrightarrow R_i = n_i$

R_i = ordin de multiplicitate

n_i = dim V_{λ_i}

$$\left.\begin{matrix} R_1 = 1 & n_1 = 1 \\ R_2 = 1 & n_2 = 1 \\ R_3 = 1 & n_3 = 1 \end{matrix}\right\} A_P^{B_c} \text{ este diagonalizabilă}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

d) $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$ $\qquad B_c \xrightarrow{C} B$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$
$$\downarrow$$
$$A^n = C \cdot D^n \cdot C^{-1}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ +2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 + 2^{n+1} + 3^n & 2 - 2^n - 3^n & -1 + 3^n \\ -4 + 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & 4 - 2^n - 2 \cdot 3^n & -2 + 2 \cdot 3^n \\ -2 + 2 \cdot 3^n & 2 - 2 \cdot 3^n & -1 + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

Ex 2. Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care în Baza $B_c^{\mathbb{R}^3}$ are matricea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $T(x) = ?$

b) val + vect proprii

c) Este A diagonală? dacă da, D.

a) $T(x_1, x_2, x_3) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-x_1 + 3x_2 - x_3,\ -3x_1 + 5x_2 - x_3,\ -3x_1 + 3x_2 + x_3)$

b) $P(\lambda) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 2$

$\lambda = 1 \to \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} \alpha_1 = \mu \\ \alpha_2 = \mu \\ \alpha_3 = \mu \end{array}$

$V_{\lambda_1} = \{\mu(1,1,1), \mu \in \mathbb{R}\}$

$V_1 = ((v_1))$

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mu \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_{2,3} = 2 \to \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} \alpha_1 = \mu + \gamma/3 \\ \alpha_2 = \mu \\ \alpha_3 = \gamma \end{array}$

$v_{2,3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + \gamma/3 \\ \mu \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mu + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$V_{\lambda_{2,3}} = \{\alpha(1,1,0) + \frac{\beta}{3}(1,0,3),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$S_p = ((v_2, v_3))$

---

c) $r_1 = 1 \quad m_1 = 1$

$r_2 = 2 \quad m_2 = 2$

A este diagonolă

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ în baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$