

ELEMENTE DE CALCUL DIFERENȚIAL PE DREAPTA REALĂ

(rezumat, material publicat integral la editura
MatrixRom)

Paul GEORGESCU

Cuprins

1	NOȚIUNI GENERALE	1
1.1	Teoria mulțimilor	1
1.2	Construcția axiomatică a mulțimii numerelor reale	4
1.2.1	Minoranți, majoranți	5
1.2.2	Mulțimi mărginite	8
1.3	Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$	11
1.3.1	Intervale în \mathbb{R} și $\overline{\mathbb{R}}$	12
1.3.2	Vecinătăți în $\overline{\mathbb{R}}$	14
1.4	Inegalități între numere reale	16
1.5	Funcții	17
2	ȘIRURI DE NUMERE REALE	30
2.1	Proprietăți generale	30
2.1.1	Moduri de definire a unui sir	30
2.1.2	Subșiruri ale unui sir dat	33
2.1.3	Șiruri mărginite	34
2.1.4	Șiruri monotone	35
2.2	Șiruri cu limită	36
2.2.1	Șiruri convergente	38
2.2.2	Proprietăți ale șirurilor cu limită	45
2.2.3	Relații între convergență, monotonie și mărginire	46
2.2.4	Operații cu șiruri convergente	47
2.2.5	Operații cu șiruri cu limită infinită	51
2.2.6	Calculul unor limite fundamentale	53
2.2.7	Puncte limită ale unui sir	56
2.2.8	Șiruri fundamentale (Cauchy)	60

2.2.9	Criterii de convergență utilizând raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$	61
2.2.10	Teoremele Stolz-Césaro	63
2.2.11	Şiruri cu limita numărul e	65
3	SERII NUMERICE	77
3.1	Serii cu termeni pozitivi	89
3.1.1	Criteriul de condensare	90
3.1.2	Criterii de comparație	92
3.1.3	Criterii ale radicalului	98
3.1.4	Criterii ale raportului	100
3.1.5	Criteriul Raabe-Duhamel	104
3.2	Serii cu termeni oarecare	107
3.2.1	Criteriul lui Dirichlet	107
3.2.2	Criteriul lui Abel	108
3.2.3	Serii alternante. Criteriul Leibniz	109
3.2.4	Serii absolut convergente	111
3.2.5	Produsul după Cauchy a două serii	113
3.3	Estimarea restului de ordin p	115
4	PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ȘI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$	122
4.1	Proprietăți topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$	122
4.1.1	Puncte de acumulare	122
4.1.2	Puncte aderente	125
4.1.3	Puncte interioare	126
4.1.4	Puncte de frontieră	127
4.1.5	Mulțimi deschise, mulțimi închise, mulțimi compacte	128
4.2	Proprietăți de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$	133
4.2.1	Numere cardinale	133
4.2.2	Mulțimi numărabile	134
4.2.3	Mulțimi de puterea continuului	136
5	LIMITE DE FUNCȚII	139
5.1	Limita unei funcții într-un punct	139
5.1.1	Caracterizări analitice	141
5.1.2	Teorema de caracterizare cu şiruri	142

5.1.3	Limite laterale	143
5.1.4	Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct	146
5.1.5	Proprietăți ale funcțiilor cu limită	147
5.2	Proprietăți de calcul ale limitelor de funcții	150
5.2.1	Operații cu limite de funcții	150
5.2.2	Limitele funcțiilor elementare	153
5.2.3	Limite fundamentale	161
6	FUNCȚII CONTINUE	173
6.1	Continuitatea unei funcții într-un punct	173
6.1.1	Continuitate laterală	175
6.1.2	Funcții continue pe o mulțime	176
6.1.3	Puncte de discontinuitate	177
6.1.4	Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct	178
6.1.5	Caracterizarea cu șiruri a continuității unei funcții într-un punct	179
6.1.6	Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuității unei funcții într-un punct	179
6.1.7	Operații cu funcții continue	180
6.1.8	Proprietăți locale ale funcțiilor continue	182
6.2	Proprietăți ale funcțiilor continue pe o mulțime	182
6.2.1	Proprietatea lui Darboux	182
6.2.2	Funcții uniform continue	185
6.2.3	Funcții Lipschitz. Contrații	186
6.2.4	Funcții continue definite pe intervale închise și mărginite	187
7	DERIVATE. DIFERENȚIALE	193
7.1	Funcții derivabile. Funcții diferențiable	194
7.1.1	Operații cu funcții derivabile	199
7.1.2	Derivatele funcțiilor elementare	200
7.1.3	Derivata funcției compuse	202
7.1.4	$(fg)'$	204
7.1.5	Derivata unui determinant funcțional	204
7.1.6	Derivata funcției inverse	205
7.1.7	Diferențiala unei funcții	206

7.1.8	Operații cu funcții diferențiabile	209
7.1.9	Diferențiala funcției compuse	210
7.2	Derivate și diferențiale de ordin superior	211
7.2.1	Derivate de ordin superior	211
7.2.2	Formula lui Leibniz	213
7.2.3	Diferențiale de ordin superior	214
7.3	Teoremele fundamentale ale calculului diferențial	215
7.3.1	Teorema lui Fermat	218
7.3.2	Teorema lui Rolle	219
7.3.3	Teorema lui Lagrange	222
7.3.4	Teorema lui Cauchy	226
7.3.5	Regulile lui L'Hôpital	227
7.3.6	Formula lui Taylor	233
7.3.7	Puncte de extrem ale unei funcții. Condiții necesare și suficiente	240
7.4	Aspecte grafice în studiul variației funcțiilor	243
7.4.1	Asimptote	243
7.4.2	Convexitate. Concavitate	251
8	ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII	265
8.1	Șiruri de funcții	265
8.1.1	Punct de convergență. Mulțime de convergență. Limita unui șir de funcții	265
8.1.2	Convergență punctuală a unui șir de funcții	266
8.1.3	Convergență uniformă a unui șir de funcții	267
8.1.4	Criterii de convergență uniformă	268
8.1.5	Transmiterea unor proprietăți prin convergență uniformă	271
8.2	Serii de funcții	275
8.2.1	Punct de convergență. Mulțime de convergență. Suma unei serii de funcții	276
8.2.2	Convergență punctuală a unei serii de funcții	277
8.2.3	Convergență uniformă a unei serii de funcții	278
8.2.4	Criterii de convergență uniformă	278
8.2.5	Transmiterea unor proprietăți prin convergență uniformă	281
8.3	Serii de puteri	283

8.3.1	Mulțimea de convergență a unei serii de puteri	283
8.3.2	Seria binomială	294
8.3.3	Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor	297
8.3.4	Exemple de dezvoltări în serie Taylor	301

Capitolul 1

NOTIUNI GENERALE

1.1 Teoria mulțimilor

Dacă A este o mulțime, vom nota prin $x \in A$ faptul ca x este un element al mulțimii A (sau x aparține lui A), respectiv prin $x \notin A$ faptul că x nu este un element al mulțimii A (sau x nu aparține lui A). Mulțimea care nu conține niciun element se va numi *mulțimea vidă* și se va nota \emptyset .

Submulțimi, supramulțimi

Fiind date două mulțimi A și B , vom spune că A este o *submulțime* a lui B (și vom nota $A \subseteq B$), sau B este o *supramulțime* a lui A (și vom nota $B \supseteq A$) dacă orice element al lui A este și un element al lui B . Desigur, $\emptyset \subseteq A$ pentru orice mulțime A . Dacă A este o submulțime a lui B , dar $A \neq B$, atunci A se numește *submulțime proprie* a lui B , ceea ce se notează $A \subsetneq B$. Dată o mulțime A , se va nota cu $\mathcal{P}(A)$ *mulțimea submulțimilor (părților) sale*. Se observă că $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

Egalitatea a două mulțimi

Două mulțimi A, B vor fi numite *egale* dacă au aceleasi elemente, acest lucru fiind notat $A = B$. Se observă că $A = B$ dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, această caracterizare fiind utilă pentru demonstrarea practică a multor egalități de mulțimi. Dacă A și B nu sunt egale, acest lucru se notează $A \neq B$, ceea ce revine, conform observației anterioare, fie la $A \not\subseteq B$, fie la $B \not\subseteq A$.

Operații cu mulțimi

Fie X o mulțime și $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Definim mulțimile

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \wedge x \in B\},$$

numite *reuniunea*, respectiv *intersecția* lui A și B . Dacă $A \cap B = \emptyset$, A și B se numesc *disjuncte*.

Acste operații cu mulțimi au următoarele proprietăți

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, \quad A \cap A = A \\ A \cup B &= B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

(*idempotență, comutativitate, asociativitate*, respectiv *distributivitate*). Proprietățile de asociativitate asigură faptul ca scrierile $A \cup B \cup C$ și $A \cap B \cap C$ nu sunt ambiguе.

Operațiile de reuniune și intersecție se pot extinde la familii nu neapărat finite de mulțimi. În acest sens, dată o familie $(A_i)_{i \in I}$, unde I este o mulțime oarecare de indici, finită sau nu, iar $A_i \in \mathcal{P}(X)$ pentru orice $i \in I$, vom defini

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \in X; \text{există } i \in I \text{ astfel ca } x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \in X; x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}. \end{aligned}$$

Mulțimile

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\}, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

se numesc *diferența*, respectiv *diferența simetrică* a mulțimilor A și B . Mulțimea

$$c_X A = \{x \in X; x \notin A\}$$

se numește *complementara* lui A față de X ; dacă nu există pericol de confuzie, $c_X A$ se notează cA . Se observă atunci că

$$A \setminus B = A \cap cB$$

și au loc următoarele proprietăți, numite *formulele lui de Morgan*

$$\begin{aligned} c\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} cA_i \\ c\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \bigcup_{i \in I} cA_i. \end{aligned}$$

Vom numi *produs cartezian* al mulțimilor A și B (în această ordine) mulțimea tuturor perechilor ordonate (x, y) , cu $x \in A$, iar $y \in B$, adică

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}.$$

În general, $A \times B \neq B \times A$. Două elemente (x_1, y_1) și (x_2, y_2) ale produsului cartezian $A \times B$ sunt egale dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Date mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n , numim *produs cartezian* al acestora mulțimea tuturor perechilor ordonate cu n elemente (denumite și *n-uple*) (a_1, a_2, \dots, a_n) , cu $a_i \in A_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, adică

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A_i \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq n\}.$$

Dacă $A_i = A$ pentru $1 \leq i \leq n$, se utilizează notația prescurtată

$$A \times A \times \dots \times A = A^n.$$

Mulțimi de numere

În cele ce urmează, vom presupune cunoscute proprietățile următoarelor mulțimi de numere:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ - mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ - mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ - mulțimea numerelor raționale.

Între acestea au loc următoarele relații de incluziune

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Pentru $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, se notează cu $A^* = A \setminus \{0\}$ mulțimea numerelor nenule din A .

1.2 Construcția axiomatică a mulțimii numerelor reale

Intuitiv, mulțimea numerelor reale poate fi înțeleasă ca mulțimea tuturor fracțiilor zecimale infinite, sub forma

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\overline{r, r_1 r_2 \dots r_n \dots}; r \in \mathbb{Z}, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}\} \\ &= \left\{ r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \dots + \frac{r_n}{10^n} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Definiția de mai sus (îndeajuns de explicită, dar totuși pur algebrică) este însă greu de folosit în analiza matematică, necesitând unele completări. Din punctul de vedere al analizei matematice, mulțimea numerelor reale, notată \mathbb{R} , va fi un corp comutativ total ordonat, a cărui relație de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare și înmulțire și care în plus satisfac o anumită axiomă de completitudine. Aceste proprietăți, ce vor fi clarificate în cele de mai jos, sunt motivate de necesitatea de a efectua operațiile elementare cu numere (structura de corp), necesitatea de a putea compara numere și de a putea lucra convenabil cu inegalitățile rezultate (structura de ordine, împreună cu relațiile de compatibilitate cu operațiile), precum și de a diferenția mulțimea numerelor reale de mulțimea numerelor raționale (axioma de completitudine).

Vom numi mulțimea numerelor reale o mulțime \mathbb{R} înzestrată cu două operații algebrice „ $+$ ” (adunarea) și „ \cdot ” (înmulțirea) precum și cu o relație de ordine „ \leq ” care satisfac grupurile de axiome (I), (II) și (III) de mai jos.

Axiomele structurii algebrice

(I) \mathbb{R} este un corp comutativ, adică

(I.1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(asociativitatea adunării)

(I.2) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
(comutativitatea adunării)

(I.3) Există $0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $0 + x = x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(existența elementului neutru la adunare)

(I.4) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $-x \in \mathbb{R}$ astfel ca $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
(existența simetricului oricărui element în raport cu adunarea)

(I.5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(asociativitatea înmulțirii)

(I.6) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(comutativitatea înmulțirii)

(I.7) Există $1 \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(existența elementului neutru la înmulțire)

(I.8) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, există $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.

(existența simetricului (inversului) oricărui element nenul în raport cu înmulțirea)

(I.9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(distributivitatea înmulțirii față de adunare)

(II) \mathbb{R} este total ordonat, adică

(II.1) $x \leq x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(II.2) $x \leq y$ și $y \leq x \implies x = y$.

(II.3) $x \leq y$ și $y \leq z \implies x \leq z$.

(„ \leq ” este o relație de ordine pe \mathbb{R})

(II.4) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc fie $x \leq y$, fie $y \leq x$.

(relația de ordine este totală, adică oricare două elemente x, y se pot compara)

(II.5) Dacă $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.

(relația de ordine este compatibilă cu operația de adunare)

(II.6) Dacă $x \leq y$ iar $0 \leq z$, atunci $x \cdot z \leq y \cdot z$.

(relația de ordine este compatibilă cu operația de înmulțire)

Proprietățile de mai sus definesc structura algebraică a lui \mathbb{R} . Pentru a enunța cea de-a treia axiomă, care face posibilă demonstrarea rezultatelor specifice analizei matematice, vor fi făcute mai întâi câteva preparative suplimentare.

1.2.1 Minoranți, majoranți

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Spunem că A este minorată dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel că $m \leq x$ pentru orice $x \in A$. Un astfel de element m (care nu este unic determinat) se

va numi *minorant* al mulțimii A . Similar, spunem că A este *majorată* dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \leq M$ pentru orice $x \in A$, un astfel de element M (care de asemenea nu este unic determinat) numindu-se *majorant* al mulțimii A . Minoranții și majoranții unei mulțimi A nu aparțin neapărat acestei mulțimi.

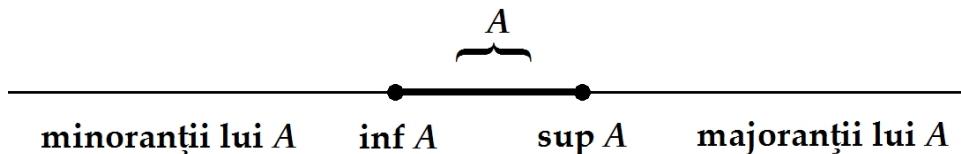


Figura 1.1: Majoranții și minoranții unei mulțimi A .

Exemplu. Fie $A = \{x = \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\}$. Atunci A este majorată, 1 fiind un majorant al lui A , deoarece $x \leq 1$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 1 nu este element al mulțimii A , întrucât toate elementele lui A sunt subunitare, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $1 \leq y$ este de asemenea un majorant al mulțimii A . În particular, $2, 3, \dots$ sunt majoranți ai mulțimii A .

Similar, A este minorată, 0 fiind un minorant al lui A , deoarece $0 \leq x$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 0 nu este element al mulțimii A , deoarece toate elementele lui A sunt strict pozitive, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $y \leq 0$ este de asemenea un minorant al lui A . În particular, $-1, -2, \dots$ sunt minoranți ai mulțimii A .

Margine inferioară, margine superioară

Se observă că dacă o mulțime A este minorată, nu există un cel mai mic minorant al lui A , deoarece se pot preciza minoranți oricără de mici. Similar, dacă o mulțime A este majorată, nu există un cel mai mare majorant, întrucât se pot preciza majoranți oricără de mari.

În schimb, dacă A este minorată și există un cel mai mare minorant al lui A , acesta se va numi *margine inferioară* a lui A , notată $\inf A$, iar dacă A este majorată și există un cel mai mic majorant al lui A , acesta se va numi *margine superioară* a lui A , notată $\sup A$. Dacă marginea inferioară, respectiv marginea superioară a unei mulțimi A există, atunci acestea sunt unice, unicitatea derivând din caracterul acestora de a fi „cea mai mare”, respectiv „cea mai mică”.

Axioma de completitudine

În aceste condiții, se poate enunța cea de-a treia axiomă, numită *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor-Dedekind*.

(III) Orice submulțime nevidă majorată A a lui \mathbb{R} admite o margine superioară în \mathbb{R} .

Se poate demonstra că proprietățile de mai sus definesc existența și unicitatea (până la un izomorfism de corpuri total ordonate) lui \mathbb{R} . Elementele mulțimii \mathbb{R} astfel definite se numesc *numere reale*. Elementele mulțimii $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se vor numi *numere iraționale*.

Notății

Vom preciza în cele ce urmează câteva notații utilizate în calculul cu numere reale. Mai întâi, este utilă introducerea notației „ $x < y$ ” (ordonarea strictă atașată relației de ordine „ \leq ”) dacă x, y satisfac $x \leq y$ și $x \neq y$. De asemenea, vom scrie relația $x \leq y$ și sub forma $y \geq x$, iar relația $x < y$ și sub forma $y > x$.

Numerele reale a pentru care $a \geq 0$ (respectiv $a \leq 0$) vor fi numite *numere pozitive* (respectiv *numere negative*), iar numerele reale a pentru care $a > 0$ (respectiv $a < 0$) vor fi numite *numere strict pozitive* (respectiv *strict negative*). În cele ce urmează, în loc de $x + (-y)$ vom nota $x - y$, în loc de $x \cdot y$ vom nota xy , iar în loc de $x \cdot \frac{1}{y}$ vom nota $\frac{x}{y}$.

Dreapta reală

Pentru ilustrarea geometrică a unor concepte ale analizei matematice, este util ca numerele reale să poată fi reprezentate pe o dreaptă.

Fie o dreaptă d , un punct $O \in d$ și un vector director \vec{u} al dreptei d . Perechea $\mathcal{R} = (O, \vec{u})$ se numește *reper cartezian* al dreptei d . Definim

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow d, \quad \Phi(x) = P, \text{ unde } \overrightarrow{OP} = x\vec{u}$$

(fiecarei $x \in \mathbb{R}$ i se asociază punctul P de pe dreaptă pentru care \overrightarrow{OP} are coordonata x în raport cu reperul \mathcal{R}). Se poate demonstra că funcția Φ este bine definită și stabilește o corespondență bijectivă între mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale și mulțimea punctelor dreptei d . Datorită acestei corespondențe (numită și *bijecția lui Descartes*), mulțimea \mathbb{R} va putea fi numită și *dreapta (axa) reală*, iar numerele reale vor fi numite și *puncte*.

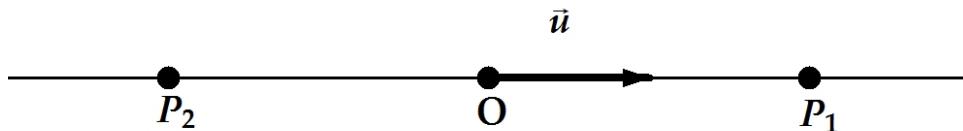


Figura 1.2: Bijecția lui Descartes. $\Phi(2) = P_1$, unde $\overrightarrow{OP_1} = 2\vec{u}$, $\Phi(-2) = P_2$, unde $\overrightarrow{OP_2} = -2\vec{u}$

1.2.2 Mulțimi mărginite

În aceste condiții, o mulțime nevidă A care este majorată se va numi *mărginită superior*, iar o mulțime nevidă A care este minorată se va numi *mărginită inferior*. Dacă A este atât mărginită superior cât și mărginită inferior, ea se va numi *mărginită*. Conform acestei definiții, o mulțime A este mărginită dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$m \leq x \leq M \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Caracterizări analitice pentru marginea superioară și marginea inferioară a unei mulțimi

Cu notațiile de mai sus, are loc următoarea *teoremă de caracterizare a marginii superioare a unei mulțimi*, care descrie caracteristica marginii superioare de a fi cel mai mic majorant prin intermediul a două inegalități, cea dintâi precizând faptul că marginea superioară este majorant, iar cea de-a doua precizând faptul că niciun număr mai mic decât marginea superioară nu este majorant.

Teorema 1.1. Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulțimii A dacă și numai dacă

1. $x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$.
2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

În mod absolut similar se obține următoarea *teoremă de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi*.

Teorema 1.2. Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulțimii A dacă și numai dacă

1. $\beta \leq x$ pentru orice $x \in A$.
2. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

Proprietatea lui Arhimede și consecințe ale sale

O consecință importantă a teoremei de caracterizare a marginii superioare este următorul rezultat, numit *proprietatea lui Arhimede*.

Teorema 1.3. Fie x, y numere reale fixate, cu $x > 0$. Există atunci $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $nx > y$.

Parte întreagă, parte fracționară

Prințre consecințele proprietății lui Arhimede menționăm urmatoarele rezultate utile.

Corolar 1.3.1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ unic determinat astfel ca

$$n \leq x < n + 1.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ dat, numărul întreg n definit mai sus se numește *partea întreagă* a lui x și se notează $[x]$. Notând cu $\{x\} = x - [x]$ *partea fracționară* a lui x , următoarele proprietăți sunt adevărate pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad [x] + \{x\} = x, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Corolar 1.3.2. Dacă a, b sunt numere reale fixate, $a < b$, există atunci un număr rațional r astfel ca $a < r < b$.

Teorema de mai sus afirmă faptul că mulțimea \mathbb{Q} este *densă* în \mathbb{R} , în sensul că între orice două numere reale se află măcar un număr rațional. Folosind noțiuni de așa-numita *teorie a numerelor cardinale* (vezi Capitolul 4), se poate demonstra că $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este de asemenea densă în \mathbb{R} , adică între orice două numere reale se află și un număr irațional.

Maxim, minim, signum

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, definim *maximul* elementelor x, y prin

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y \\ y, & \text{dacă } x < y, \end{cases}$$

respectiv *minimul* elementelor x, y prin

$$\min(x, y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } x \geq y \\ x, & \text{dacă } x < y. \end{cases}$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *semnul* său, notat $\operatorname{sgn} x$ prin

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Modulul unui număr real

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *modulul* sau *valoarea absolută* a lui x , notat $|x|$ prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Sunt atunci adevărate următoarele proprietăți de calcul:

M1 $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$.

M2 $||x|| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M3 $|xy| = |x||y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M4 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

M5 $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M6 $|x - y| \geq ||x| - |y||$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M7 $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M7' $|x| < M \Leftrightarrow -M < x < M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Are loc și egalitatea

$$|x| = x \operatorname{sgn} x \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Funcția modul astfel definită poate fi folosită pentru a caracteriza mărginirea unei mulțimi.

Teorema 1.4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Au loc următoarele afirmații:

1. A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$.
2. A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists x_M \in A$ astfel ca $|x_M| > M$.

Demonstrație. 1. „ \Rightarrow ” Dacă A este mărginită, există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, de unde $|x| \leq \max(|m|, |M|)$.

„ \Leftarrow ” Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$, atunci $-M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, deci A este mărginită.

2. Rezultă prin aplicarea operatorului de negare logică primei proprietăți. ■

1.3 Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

În analiza matematică, pe lângă numere reale, se utilizează și două simboluri cu sens aparte, $+\infty$ (plus infinit, notat prescurtat și ∞) și $-\infty$ (minus infinit), cu proprietatea că

$$-\infty < x < \infty \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vom nota

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

și vom numi această mulțime *dreapta reală încheiată*, observând că ea este de asemenea total ordonată.

Operațiile aritmetice se extind (parțial) la $\overline{\mathbb{R}}$ în următorul mod:

$$x + \infty = x - (-\infty) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x + (-\infty) = x - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

respectiv

$$\infty + \infty = \infty;$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty);$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Operațiilor $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, $-\infty - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nu li se atribuie niciun sens.

1.3.1 Intervale în \mathbb{R} și $\overline{\mathbb{R}}$

Intervale în \mathbb{R}

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Numim *intervale* în \mathbb{R} mulțimi de forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \text{ (interval închis);}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \text{ (interval deschis);}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}; \text{ (interval semideschis; interval închis la dreapta și deschis la stânga)}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \text{ (interval semideschis; interval deschis la dreapta și închis la stânga);}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\} \text{ (interval deschis nemărginit la dreapta; semi-dreaptă deschisă nemărginită la dreapta);}$$

- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\}$ (interval deschis nemărginit la stânga; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga);
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la stânga);
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (axa reală).

Intervale centrate

Numim *intervale centrate* intervalele simetrice față de un punct a de pe axa reală, de forma $[a - r, a + r]$ și $(a - r, a + r)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcției modul sub forma

$$\begin{aligned} [a - \varepsilon, a + \varepsilon] &= \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon\}; \\ (a - \varepsilon, a + \varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Intervale în $\overline{\mathbb{R}}$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, putem extinde notațiile pentru intervale definite mai sus și obține

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

păstrând denumirile de intervale închise, deschise, respectiv semideschise. De asemenea

$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} \quad (\text{dreapta reală încheiată}).$$

Conform proprietăților de densitate ale lui \mathbb{Q} și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se va observa că nici \mathbb{Q} nici $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu conțin intervale.

Supremumul și infimumul unei mulțimi în $\overline{\mathbb{R}}$

Fie $A \neq \emptyset$. Cu aceste notații, vom spune că

$$\sup A = +\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este majorată (este nemărginită superior)}$$

respectiv

$$\inf A = -\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este minorată (este nemărginită inferior).}$$

și vom observa că în $\overline{\mathbb{R}}$ orice mulțime nevidă admite un suprem și un infimum.

Exemplu. $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$;

$A = \{x; x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior, deci $\sup A = +\infty$.

$A = \{x; x = -n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită inferior, deci $\inf A = -\infty$.

1.3.2 Vecinătăți în $\overline{\mathbb{R}}$

1. Numim *vecinătate* a unui punct $x \in \mathbb{R}$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval deschis incluzându-l pe x , adică pentru care există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x \in (a, b) \subseteq V.$$

2. Numim *vecinătate* a lui $+\infty$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $(a, \infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.
3. Numim *vecinătate* a lui $-\infty$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $[-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

Exemplu. Mulțimile $(-2, 4]$, $(0, 6]$, $(-\infty, 2]$, $(-2, 5] \cup (6, \infty)$ sunt vecinătăți ale lui $x = 1$ deoarece conțin intervalul deschis $(0, 2)$ care-l include pe 1.

Mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece ea nu conține intervale.

Mulțimea $B = [1, 3]$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \in (a, b) \subseteq B$ (ar trebui ca $a < 1$ și atunci $(a, b) \not\subseteq B$).

Teorema 1.5. Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este o vecinătate a lui x dacă și numai dacă ea conține un interval deschis centrat în x , adică există $\varepsilon > 0$ astfel ca

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq V.$$

Demonstrație. „ \Leftarrow ” Se poate lua $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$.

„ \Rightarrow ” Se poate lua $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. ■

Dacă V este o vecinătate a lui $x \in \overline{\mathbb{R}}$, notăm acest lucru prin $V \in \mathcal{V}(x)$. Mulțimea $\mathcal{V}(x)$ se numește *mulțimea tuturor vecinătăților* punctului x . Această mulțime are următoarele proprietăți:

(V1) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $x \in V$.

(V2) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$ și $W \supset V$. Atunci $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V4) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Există atunci $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$.

Conform **(V1)**, dacă V este vecinătate a lui x , atunci V îl conține pe x . Datorită **(V2)**, orice mulțime care conține o vecinătate a lui x este de asemenea o vecinătate a lui x . Conform **(V3)**, intersecția a două vecinătăți ale lui x este de asemenea o vecinătate a lui x , **(V4)** reprezentând faptul că dacă V este o vecinătate a lui x , atunci V este de fapt o vecinătate nu doar pentru x , ci și pentru toate punctele dintr-o mulțime W , care la rândul ei este o vecinătate a lui x .

Proprietatea de separație Hausdorff

Orice două puncte $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ pot fi separate prin vecinătăți. În acest sens, are loc următoarea proprietate, numită *proprietatea de separație Hausdorff*.

Teorema 1.6. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Există atunci $V_a \in \mathcal{V}(a)$ și $V_b \in \mathcal{V}(b)$ astfel ca $V_a \cap V_b = \emptyset$.

A fost menționat anterior că axioma de completitudine deosebește \mathbb{R} de mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale. Acest lucru se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$. Evident, $A \neq \emptyset$, deoarece $0 \in A$. Ca submulțime a lui \mathbb{R} , ea este majorată (de exemplu de 2), având deci, conform axiomei de completitudine, un cel mai mic majorant sup A . În acest sens, se poate arăta că sup $A = \sqrt{2}$. Ca submulțime a lui \mathbb{Q} , A este de asemenea majorată, de exemplu de 2 și de oricare altă aproximare zecimală prin adăus a lui $\sqrt{2}$: 1.42, 1.415, 1.4143, s.a.m.d. Totuși, niciun număr rațional q mai mic decât $\sqrt{2}$ nu poate fi nici măcar majorant datorită definiției mul-

| ţimii A , care va conţine o aproximare zecimală prin lipsă a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q , iar niciun număr raţional mai mare decât $\sqrt{2}$ nu poate fi cel mai mic majorant, întrucât va exista o aproximare zecimală prin adăus a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q .

1.4 Inegalităţi între numere reale

Inegalitatea mediilor

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie a_1, a_2, \dots, a_n numere reale strict pozitive. Definim

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}, \end{aligned}$$

A_n, G_n, H_n numindu-se respectiv *media aritmetică*, *media geometrică* şi *media armonică* a numerelor a_1, a_2, \dots, a_n . Are loc atunci inegalitatea

$$A_n \geq G_n \geq H_n,$$

numită *inegalitatea mediilor*, egalităţile atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale. Atunci

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

egalitatea atingându-se doar dacă a_1, a_2, \dots, a_n şi b_1, b_2, \dots, b_n sunt proporţionale, adică există $k \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, \dots, a_n = kb_n$.

Pentru $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$, se obţine că

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2),$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Inegalitatea Bernoulli

Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

1.5 Funcții

Fie $X, Y \neq \emptyset$. Numim *funcție* definită pe mulțimea X cu valori în mulțimea Y o corespondență (notată de exemplu f) prin care oricărui element din mulțimea X î se asociază un singur element din mulțimea Y . În această situație, se notează $f : X \rightarrow Y$, X numindu-se *domeniul de definiție* al funcției f , notat și $\text{Dom } f$, iar Y *codomeniul* acesteia. Dacă lui $x \in X$ îi corespunde prin funcția f elementul $y \in Y$, acest lucru se va nota $y = f(x)$ sau $x \xrightarrow{f} y$. În acest caz, y se numește *imaginăea* lui x prin funcția f , sau *valoarea* lui f în x , iar x se numește *argumentul* funcției. Mulțimea tuturor funcțiilor definite pe X cu valori în Y se va nota $\mathcal{F}(X, Y)$.

Egalitatea a două funcții

O funcție f trebuie concepută ca un ansamblu format din domeniul de definiție X , codomeniul Y și corespondența propriu-zisă între argumente și imagini. În acest sens, două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ vor fi *egale* dacă $A = C$ și $B = D$ (domeniile, respectiv codomeniile funcțiilor sunt egale), iar $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$, adică oricărui x din domeniul comun de definiție î se asociază prin f și g un același element.

Grafic, funcție identică

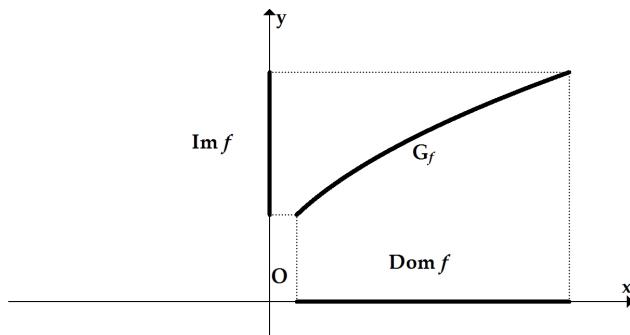


Figura 1.3: Imaginea, domeniul și graficul unei funcții f

Mulțimea

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

se va numi *graficul* funcției f . Fiind dată o mulțime A , funcția $1_A : A \rightarrow A$ definită prin $1_A(x) = x \forall x \in A$ se va numi *funcția identică* a mulțimii A .

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vom determina $\text{Im } f$. Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel ca $y = f(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$, adică $y = x^2 - 2x + 3$. Urmează că $x^2 - 2x + 3 - y = 0$. Conditia de existență a lui x este $\Delta = (-2)^2 - 4(3 - y) \geq 0$, de unde $y \geq 2$. Urmează că $\text{Im } f = [2, +\infty)$.

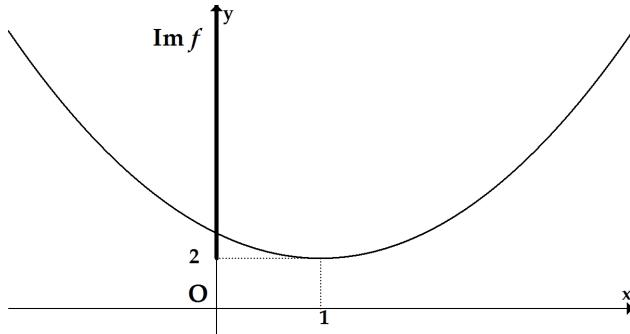


Figura 1.4: Imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Restricția și prelungirea unei funcții

Dacă $f : X \rightarrow Y$ este o funcție, iar $A \subseteq X$, numim *restricția* funcției f la mulțimea A funcția notată $f|_A$ cu domeniul A și codomeniul Y care păstrează pe A corespondența definită de f , adică $f|_A(x) = f(x) \forall x \in A$. Dacă $g : A \rightarrow Y$ este o funcție dată, iar $A \subseteq X$, orice funcție $f : X \rightarrow Y$ pentru care $f|_A = g$ se numește *prelungirea* lui g la X .

Exemplu. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Atunci g este o prelungire a lui f (respectiv f este o restricție a lui g), deoarece $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, iar $f(x) = g(x) = x$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Imagine și contrainagine

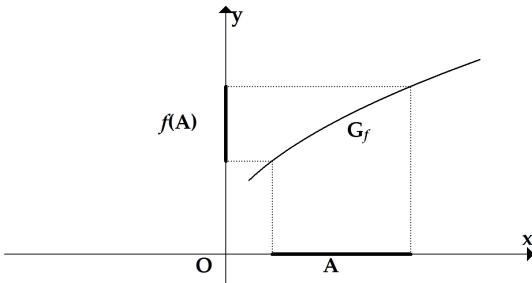
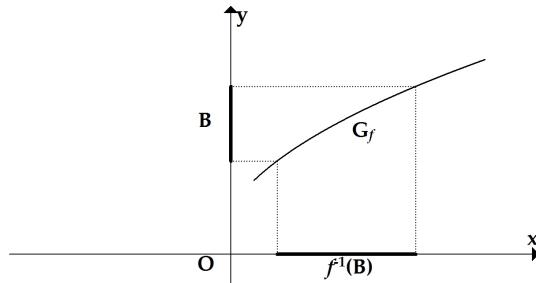
Fie funcția $f : X \rightarrow Y$. Dacă $A \subseteq X$, notăm

$$f(A) = \{y \in B; \exists x \in A \text{ astfel ca } f(x) = y\}$$

imaginea mulțimii A prin funcția f . Mulțimea $f(X)$ se va numi *imaginea funcției f* și se va nota $\text{Im } f$.

Dacă $B \subseteq Y$, notăm

$$f^{-1}(B) = \{x \in A; f(x) \in B\}$$

Figura 1.5: Imaginea $f(A)$ a unei mulțimi A Figura 1.6: Contraimagea $f^{-1}(B)$ a unei mulțimi B

contraimagea (imaginea inversă, preimagea) mulțimii B prin funcția f . Dacă $B = \{y\}$, se folosește notația $f^{-1}(y)$ în loc de $f^{-1}(\{y\})$. Cum mulțimea $f^{-1}(y)$ poate să fie mulțimea vidă sau să conțină mai mult de un element, simbolul f^{-1} nu definește în general o funcție.

Funcții injective, funcții surjective, funcții bijective

O funcție $f : X \rightarrow Y$ se numește *injectivă* dacă

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(la argumente diferite x, y corespund prin f imagini diferite), ceea ce este echivalent cu

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies x = y$$

(dacă imaginile $f(x)$ și $f(y)$ sunt egale, atunci sunt egale și argumentele corespunzătoare x și y). Aceasta conduce la faptul că f este injectivă dacă și numai dacă $f^{-1}(y)$ conține cel mult un element pentru orice $y \in B$.

O funcție $f : X \rightarrow Y$ se numește *surjectivă* dacă $f(X) = Y$, adică orice element y din codomeniul Y al funcției este imaginea cel puțin a unui argument x . Aceasta conduce la faptul că f este surjectivă dacă și numai dacă $f^{-1}(y)$ conține cel puțin un element pentru orice $y \in B$.

O funcție $f : X \rightarrow Y$ se numește *bijективă* dacă ea este atât injectivă cât și surjectivă. Din cele de mai sus, se observă că f este bijективă dacă și numai dacă $f^{-1}(y)$ conține exact un element pentru orice $y \in B$. În aceste condiții, simbolul f^{-1} definește o funcție $f^{-1} : Y \rightarrow X$ prin $f^{-1}(y) = x$, unde x, y sunt în așa fel încât $y = f(x)$. Funcția f^{-1} astfel definită se numește funcția *inversă* a funcției f , iar f se numește *inversabilă*.

Compunerea a două funcții

Fie funcțiile $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Funcția $g \circ f : X \rightarrow Z$ definită prin $g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in X$ se numește *compunerea* funcțiilor g și f , în această ordine. Se poate observa că operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă, dar este asociativă, în sensul că dacă $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow M$, atunci $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Funcții numerice

O funcție $f : E \rightarrow F$ se va numi *funcție numerică* (*funcție reală de variabilă reală*) dacă $E, F \subseteq \mathbb{R}$.

Funcții pare, funcții impare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime simetrică, adică o mulțime pentru care $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$.

O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric față de Oy .

O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow -b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, -b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric față de O .

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ este pară, deoarece $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$, în timp ce funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1}$ este impară, deoarece $g(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -g(x)$.

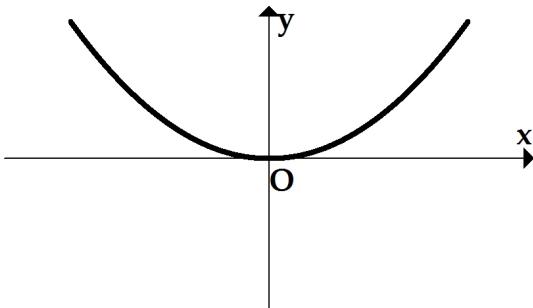


Figura 1.7: Graficul functiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$ (funcție pară, grafic simetric față de Oy)

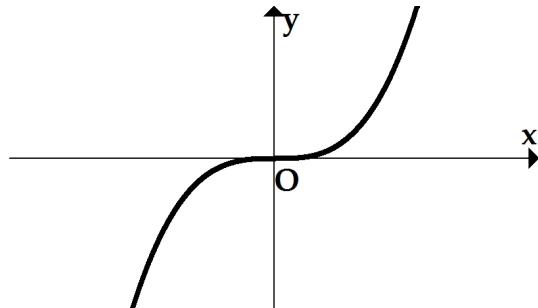


Figura 1.8: Graficul functiei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{2n+1}$ (funcție impară, grafic simetric față de O).

Funcții periodice

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$. O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *periodică* dacă există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel încât pentru orice $x \in D$ urmează că $x + T, x - T \in D$, iar $f(x + T) = f(x)$. Orice astfel de T se numește *perioadă* a funcției f . Se observă că dacă T este o perioadă a funcției f , atunci și nT , $n \in \mathbb{Z}^*$ (adică orice multiplu întreg al perioadei T) este de asemenea o perioadă a funcției f . Dacă există o cea mai mică perioadă pozitivă T_0 a funcției f , atunci aceasta se numește *perioadă principală* a funcției f . Pentru a studia comportarea unei funcții periodice de perioadă T , este suficient să se analizeze comportarea acestei funcții pe intervalul $[0, T]$.

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$, este periodică, de perioadă principală 1.

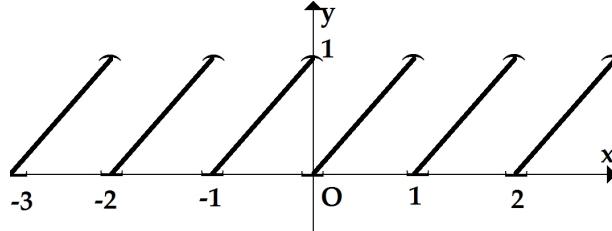


Figura 1.9: Graficul functiei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$

Funcții mărginite

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci

f se numește *mărginită superior* dacă $f(D)$ este majorată, adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$.

f se numește *mărginită inferior* dacă $f(D)$ este minorată, adică există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Dacă f este atât mărginită inferior cât și mărginită superior, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$, sau, echivalent $\text{Im } f$ este mărginită, atunci f se numește *mărginită*.

Conform caracterizării mulțimilor mărginite cu ajutorul funcției modul (Teorema 1.4), f este mărginită dacă și numai dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in D$.

Exemplu. $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ este mărginită, deoarece

$$3 \leq f(x) \leq 5 \quad \text{pentru orice } x \in [1, 2].$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 + 3 \sin x$ este mărginită, deoarece

$$|f(x)| \leq 2 + 3|\sin x| \leq 5 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Funcții monotone

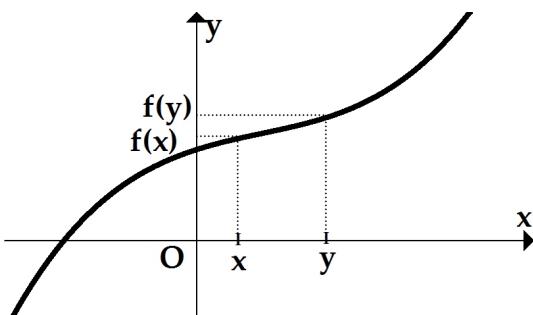


Figura 1.10: Graficul unei funcții crescătoare

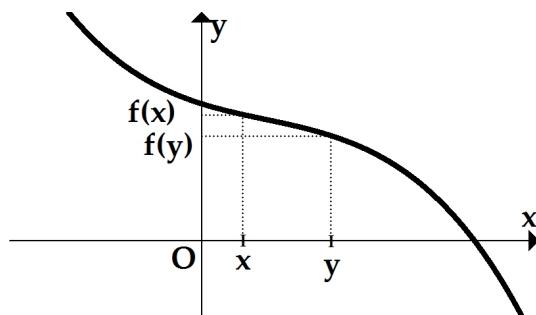


Figura 1.11: Graficul unei funcții descreșcătoare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci

f se numește *crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

f se numește *strict crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

f se numește *descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

f se numește *strict descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y).$$

Se observă că f este crescătoare dacă și numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \quad \text{pentru orice } x, y \in D,$$

respectiv strict crescătoare dacă și numai dacă

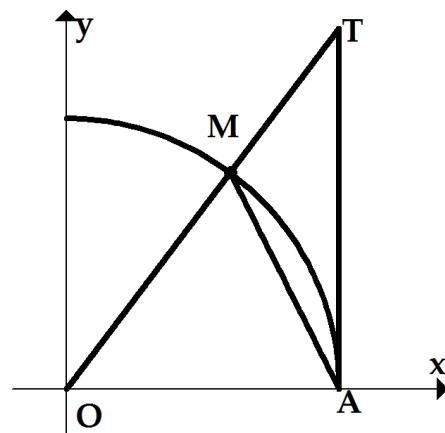
$$(f(x) - f(y))(x - y) > 0 \quad \text{pentru orice } x, y \in D, x \neq y,$$

proprietăți analoage având loc și pentru funcții descrescătoare, respectiv strict descrescătoare. De asemenea, se poate observa că dacă f este strict monotonă, atunci f este injectivă.

Vom demonstra acum o inegalitate care prezintă un interes de sine stătător, anume

$$\sin x < x < \tan x, \quad \text{pentru orice } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

În acest sens, fie un cerc cu centrul în origine și de rază 1 și fie un unghi la centru \widehat{AOM} de măsură în radiani x ca în figură. Fie de asemenea T intersecția dintre dreapta OM și tangentă în A la cerc. Atunci



$$\text{aria } \triangle AOM < \text{aria sector } AOM < \text{aria } \triangle AOT$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x < \tan x.$$

Graficele unor funcții elementare

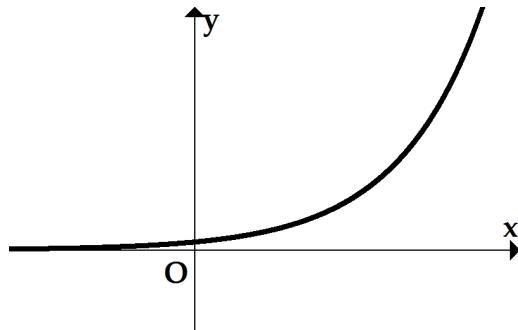


Figura 1.12: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 1$

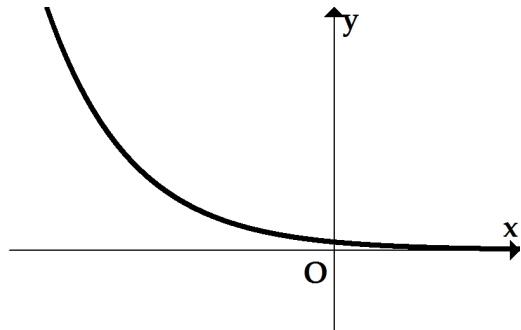


Figura 1.13: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1)$

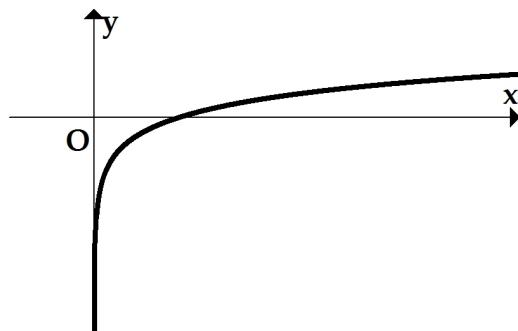


Figura 1.14: Graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 1$

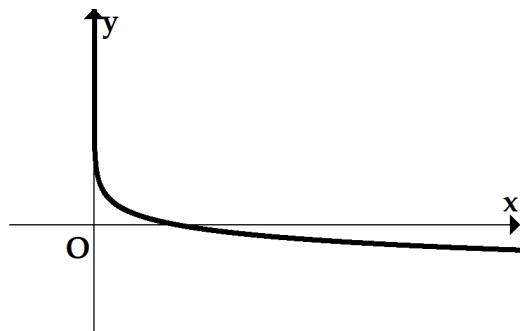


Figura 1.15: Graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1)$

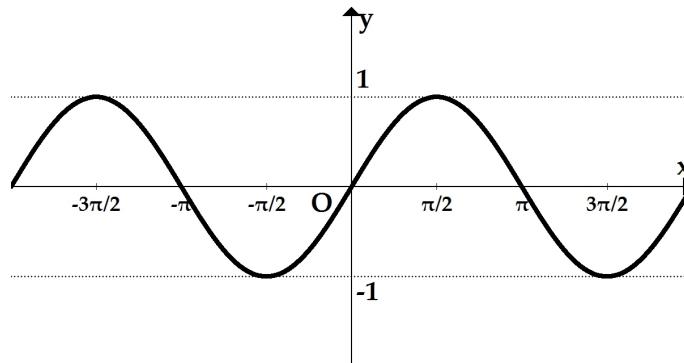


Figura 1.16: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

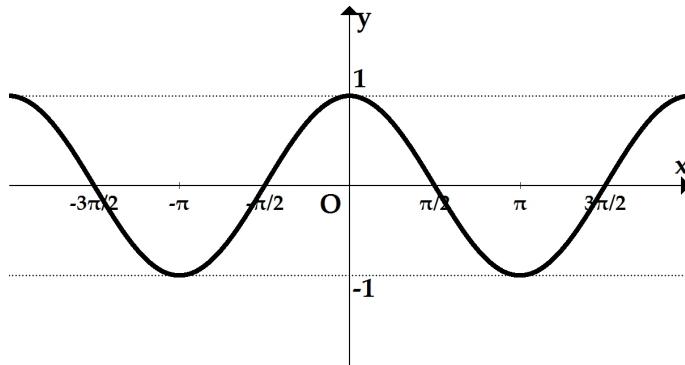


Figura 1.17: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$

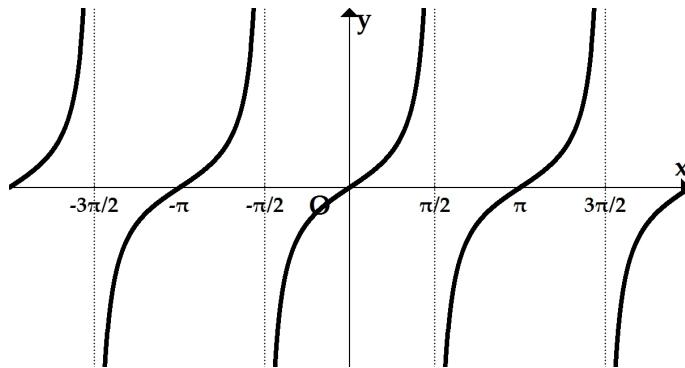


Figura 1.18: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

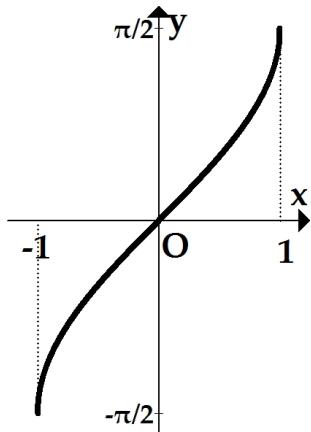


Figura 1.19: Graficul funcției $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$

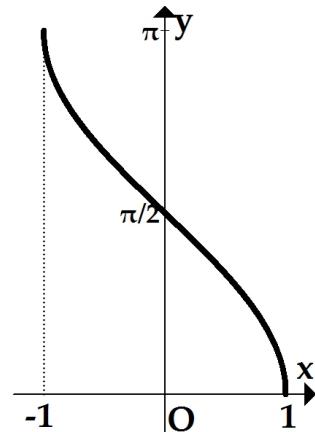


Figura 1.20: Graficul funcției $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$

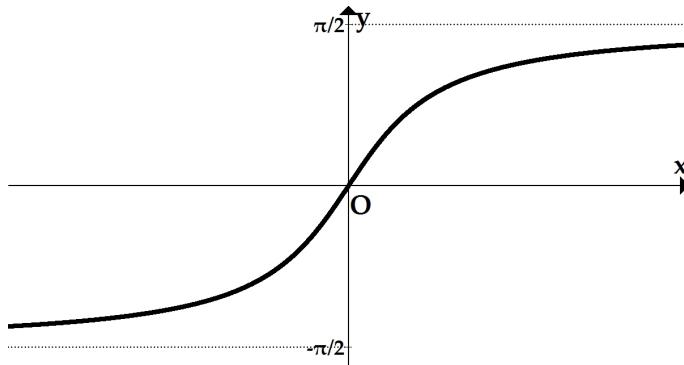


Figura 1.21: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \arctg x$

Aplicații

1.1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Arătați că $\max(a, -a) = |a|$.

1.2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, arătați că $\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$.

1.3. Demonstrați că $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este număr irațional.

1.4. Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, iar $a + b\sqrt{2} = 0$, atunci $a = b = 0$.

1.5. Dacă $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$, iar $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$, atunci $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

1.6. Rezolvați ecuația $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

1.7. Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} |x - 1| + |y + 2| = 6 \\ x = 1 + |y + 2| \end{cases}.$$

1.8. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ să aibă exact patru soluții.

1.9. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, atunci $x \leq y$.

1.10. Dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$.

1.11. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

1.12. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in (0, \infty)$, atunci

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}.$$

1.13. Fie $a, b \in (0, 1)$. Demonstrați că

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

1.14. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + m \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

1.15. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ este mărginită, arătați că orice submulțime a lui A este mărginită.

1.16. Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sunt mărginite, arătați că $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$ sunt mărginite.

1.17. Arătați că A este mărginită, unde:

1. $A = [0, 1) \cup (2, 5]$;
2. $A = \{x; x = 2 + u^2, u \in [-1, 3]\}$;
3. $A = \left\{x; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
4. $A = \left\{x; x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
5. $A = \{x; x = \sin u + \cos(2u), u \in \mathbb{R}\}$.

1.18. Fie $A = \{\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 2, \operatorname{tg} 3, \operatorname{tg} 4\}$. Precizați $\min A, \max A$.

1.19. Fie $A = \{\sin \frac{n\pi}{4}; n \in \mathbb{N}\}$. Precizați $\min A, \max A$.

1.20. Fie $A = \left\{ \frac{6+x^2}{6-x^2}; x \in [-2, 1] \right\}$. Determinați $\inf A, \sup A$.

1.21. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Arătați că d are următoarele proprietăți:

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.22. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Determinați $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

1.23. Determinați valorile minime ale următoarelor funcții:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^2+2x+3}$;
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-3}$;
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

1.24. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție oarecare.

1. Dacă f este simultan monoton crescătoare și monoton descrescătoare, atunci ea este constantă.
2. Dacă f este simultan pară și impară, atunci ea este funcția nulă.

1.25. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Dacă f, g sunt (strict) crescătoare, atunci $f + g$, $f \circ g$ sunt (strict) crescătoare.
2. Dacă f, g sunt (strict) descrescătoare, atunci $f + g$ este (strict) descrescătoare, iar $f \circ g$ este (strict) crescătoare.

1.26. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$.

1. Demonstrați că f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.
2. Determinați $f([-2, -1])$, $f([3, 4])$, $f([-1, 1])$.

1.27. Determinați care dintre următoarele funcții sunt pare sau impare:

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3$;
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + \cos x$;
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + |x| - \sqrt{x^2 + 1}$;
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin^2 x$;
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 2x + \cos x$.
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1.28. Determinați $f \circ g$ și $g \circ f$ pentru $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date prin:

1. $f(x) = x^2, g(x) = x + 2;$
2. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2 + 1.$

1.29. Determinați două funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca $h = f \circ g$, dacă

1. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sin(x^2 + 1);$
2. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}^3.$

1.30. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Arătați că orice număr rațional este perioadă a lui f , dar niciun număr irațional nu este perioadă a lui f . Are f perioadă principală?

1.31. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x^2)$. Demonstrați că f nu este periodică.

1.32. Fie $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$. Demonstrați că

1. f nu este injectivă pentru nicio valoare a lui $a \in \mathbb{Q}$.
2. f este injectivă pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.33. Demonstrați că următoarele funcții sunt bijective și precizați inversele acestora

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1};$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

1.34. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + a, & x < 2 \end{cases}$ să fie

- 1) injectivă;
- 2) surjectivă;
- 3) bijectivă.

1.35. Demonstrați că graficele funcțiilor $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = ax^2 + x + 2 - 4a, a \in \mathbb{R}$, trec printr-un punct care nu depinde de a .

1.36. Demonstrați că următoarele funcții sunt mărginite

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+|x|};$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$

1.37. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Demonstrați că f este strict crescătoare și surjectivă, iar inversa sa este $f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

Capitolul 2

ŞIRURI DE NUMERE REALE

2.1 Proprietăți generale

Fie $A \neq \emptyset$ o mulțime dată. Se numește *șir de elemente din A* o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Dacă $A = \mathbb{R}$, șirul respectiv se va numi *șir de numere reale*, *șir numeric* sau, mai simplu, *șir*. Fiind dat un șir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, se vor numi *termeni ai șirului* numerele $f(0), f(1), f(2), \dots$, notate de obicei cu ajutorul unui indice sub forma

$$f(0) = x_0, f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots,$$

x_n numindu-se *termenul general al șirului*, sau *termenul de rang n*. Un șir cu termenul general x_n se va nota și $(x_n)_{n \geq 0}$. Dacă primii k termeni x_0, x_1, \dots, x_{k-1} nu sunt definiți (ceea ce corespunde unei funcții $f : \{k, k+1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$), vom nota șirul sub forma $(x_n)_{n \geq k}$.

2.1.1 Moduri de definire a unui șir

Un șir poate fi definit precizând formula termenului general, prin intermediul unei recurențe sau în mod descriptiv.

Exemplu. *Şiruri definite prin formula termenului general:*

$$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = 3n + 1; \quad x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7, \dots$$

$$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}; \quad x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, \dots$$

Şiruri definite prin intermediul unei recurențe

Dacă pentru un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ se cunosc primii k termeni x_0, x_1, \dots, x_{k-1} , fiind dată de asemenea o relație prin care termenul general x_n se exprimă în funcție de $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}$ pentru orice $n \geq k$, se spune că $(x_n)_{n \geq 0}$ este definit printr-o *recurență de ordinul k* .

Şiruri definite în mod descriptiv.

Şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n =$ aproximarea prin lipsa cu n zecimale exacte a lui $\sqrt{2}$ este definit în mod descriptiv. Se obține că $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, $x_3 = 1.414$, și.a.m.d.

Progresii aritmetice

Şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin recurență de ordinul întâi dată de

$$x_0 = a \text{ și } x_{n+1} = x_n + r, \quad n \geq 0,$$

a și $r \in \mathbb{R}$ fiind date, se numește *progresie aritmetică*, r numindu-se *rația progresiei* (din orice termen al șirului se obține termenul care-l succede prin adăugirea rației). Se obține că formula termenului general este $x_n = a + nr$, $n \geq 0$, iar $x_m = x_n + (m - n)r$, $m, n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n + 1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ &= a + (a + r) + \dots + (a + nr) \\ &= (n + 1)a + (r + 2r + \dots + nr) \\ &= (n + 1)a + \frac{n(n + 1)}{2}r. \end{aligned}$$

Din cele de mai sus, se observă și că

$$S_n = \frac{n(a_0 + a_n)}{2}.$$

Progresii geometrice

Şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin recurență de ordinul întâi dată de

$$x_0 = b \text{ și } x_{n+1} = x_n q, \quad n \geq 0,$$

b și $q \in \mathbb{R}$ fiind date, se numește *progresie geometrică*, q numindu-se *rația progresiei* (din orice termen al șirului se obține termenul care-l succede prin înmulțirea cu

rația). Se obține că formula termenului general este $x_n = bq^n$, $n \geq 0$, iar $x_m = x_n q^{m-n}$, $m, n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \dots + x_n \\ &= b + bq + \dots + bq^n \\ &= b(1 + q + \dots + q^n) \\ &= b \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \text{ dacă } q \neq 1, \end{aligned}$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = (n+1)b$.

Exercițiu. Determinați termenul general al řirului $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin

$$1) x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0, x_0 = 2; \quad 2) x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n \geq 0, x_0 = 1.$$

Soluție. 1) Relația de recurență este asemănătoare celei care definește o progresie geometrică, diferența fiind dată de prezența termenului liber -1 . Acest termen liber va fi eliminat prin scăderea a două relații de recurență scrise pentru indici succesivi.

Punând $n = 0$ în relația de recurență se obține că $x_1 = 3$. Scriind relația de recurență pentru $n = k+1$, respectiv $n = k$, și scăzând cele două relații obținute se deduce că $x_{k+2} - x_{k+1} = 2(x_{k+1} - x_k)$. Notând $y_n = x_{n+1} - x_n$, observăm că $y_{k+1} = 2y_k$, deci $(y_k)_{k \geq 0}$ este o progresie geometrică cu rație 2. Deoarece $y_0 = x_1 - x_0 = 1$, se deduce că $y_n = y_0 2^n = 2^n$.

Cum $y_k = x_{k+1} - x_k$, urmează că $x_{k+1} - x_k = 2^k$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \dots, k = n-1$ și sumând relațiile obținute deducem că

$$x_n - x_0 = 1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

deci $x_n = x_0 + 2^n - 1 = 2^n + 1$.

Similar, putem determina $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x_n + c)_{n \geq 0}$ să fie progresie geometrică. În acest scop, adunăm mai întâi c în ambii membri ai relației de recurență. Obținem că

$$x_{n+1} + c = 2x_n - 1 + c = 2(x_n + \frac{c-1}{2}).$$

În concluzie, pentru $c = \frac{c-1}{2}$, adică pentru $c = -1$, urmează că $(x_n + c)_{n \geq 0}$ este progresie geometrică de rație 2. De aici,

$$x_n - 1 = 2^n(x_0 - 1) = 2^n,$$

de unde $x_n = 2^n + 1$.

2) Punând $n = 0$ în relația de recurență se obține că $x_1 = \sqrt{3}$. Prin logaritmarea relației de recurență se obține că

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln x_{n+1}.$$

Cu notația $z_n = \ln x_n$, se obține că $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2} \ln 3$, $z_1 = \ln x_1 = \frac{1}{2} \ln 3$, $z_0 = \ln x_0 = 0$.

Scriind relația de recurență pentru $n = k + 1$, respectiv $n = k$, și scăzând cele două relații obținute se deduce că $z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1}{2}(z_{k+1} - z_k)$. Notând $y_n = z_{n+1} - z_n$, observăm că $y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k$, deci $(y_k)_{k \geq 0}$ este o progresie geometrică cu rație $\frac{1}{2}$. Deoarece $y_0 = z_1 - z_0 = \frac{1}{2} \ln 3$, se deduce că $y_n = y_0 \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln 3$.

Cum $y_k = z_{k+1} - z_k$, urmează că $z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln 3$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \dots, k = n - 1$ și sumând relațiile obținute deducem că

$$\begin{aligned} z_n - z_0 &= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2^2} \ln 3 + \dots + \frac{1}{2^n} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3. \end{aligned}$$

deci $z_n = z_0 + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3 = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3$. Cum $z_n = \ln x_n$, urmează că

$$x_n = e^{z_n} = e^{\left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \ln 3} = e^{\ln 3^{\left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}} = 3^{1 - \frac{1}{2^n}}.$$

2.1.2 Subsiruri ale unui sir dat

Numim *subsir* al sirului $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ ai cărui termeni sunt elemente ale mulțimii termenilor sirului $(x_n)_{n \geq 0}$, $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, cu $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n \dots$

Cum un subsir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ nu conține neapărat toți termenii sirului inițial $(x_n)_{n \geq 0}$, urmează că $k_n \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$. Atunci subsirul $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots$ se numește *subsirul termenilor de rang par ai sirului*. Subsirul $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}, \dots$ se numește *subsirul termenilor de rang impar ai sirului*. Un alt subsir este $(x_{n+3})_{n \geq 0}$: x_3, x_4, x_5, \dots , obținut prin eliminarea primilor trei termeni ai sirului.

Cum pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ putem construi sirul $(x_{kn})_{n \geq 0}$: $x_0, x_k, x_{2k}, \dots, x_{kn}, \dots$

al termenilor de rang divizibil cu k , urmează că orice şir are o infinitate de subşiruri.

2.1.3 Şiruri mărginite

Fie un şir $(x_n)_{n \geq 0}$ de numere reale și $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ mulțimea termenilor săi. Vom spune că $(x_n)_{n \geq 0}$ se numește *mărginit* dacă A este mărginită, respectiv că $(x_n)_{n \geq 0}$ este *mărginit superior* (respectiv *mărginit inferior*) dacă A este majorată (respectiv minorată). Un şir care nu este mărginit (respectiv nu este mărginit superior sau nu este mărginit inferior) se numește *nemărginit* (respectiv *nemărginit superior* sau *nemărginit inferior*).

Conform caracterizării mulțimilor mărginite, aplicată mulțimii A a termenilor şirului, se obțin următoarele proprietăți.

Teorema 2.1. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$.

1. $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior dacă și numai dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior dacă și numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
3. $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \geq 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că există $M > 0$ astfel ca $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemplu. 1. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
3. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = \frac{n}{3^n}$ este mărginit, deoarece conform inegalității lui Bernoulli, $3^n = (1+2)^n \geq 1+2n$, deci $\frac{n}{3^n} < \frac{1}{2}$. Se obține că $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
4. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = (-1)^n n$ nu este mărginit, nefiind nici mărginit inferior,

| nici mărginit superior.

Aplicând operatorul de negație logică afirmatiilor din teorema de mai sus obținem următoarea teoremă de caracterizare a sirurilor nemărginite.

Teorema 2.2. Fie sirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$.

1. $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit superior dacă și numai dacă pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există un rang $n_b \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_{n_b} > b$.
2. $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit inferior dacă și numai dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un rang $n_a \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_{n_a} < a$.

2.1.4 Siruri monotone

Fie un sir de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este *crescător* (respectiv *strict crescător*) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al sirului este mai mic (respectiv strict mai mic) decât termenul care-i succede.

De asemenea, spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este *descrescător* (respectiv *strict descrescător*) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al sirului este mai mare (respectiv strict mai mare) decât termenul care-i succede.

Un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ crescător sau descrescător se va numi *sir monoton*, iar un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ strict crescător sau strict descrescător se va numi *sir strict monoton*. Desigur, orice sir strict monoton este și monoton; nu și reciproc.

Pentru a preciza monotonia unui sir $(x_n)_{n \geq 0}$ se pot folosi următoarele metode.

Studierea semnului diferenței $x_{n+1} - x_n$.

- Dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.
- Dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător.

Compararea raportului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un sir cu termeni strict pozitivi.

- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.
- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător.

Folosind inegalități stricte în locul inegalităților nestricte se obțin criteriile corespunzătoare de monotonie strictă.

Legătura între monotonia și mărginirea unui sir

Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un sir crescător, atunci

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots,$$

deci $x_0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior de primul termen x_0 .

Similar, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un sir descrescător, atunci

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots,$$

deci $x_0 \geq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior de primul termen x_0 . Au loc atunci următoarele proprietăți.

Teorema 2.3. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir.

1. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător, atunci el este mărginit inferior.
2. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător, atunci el este mărginit superior.

2.2 Siruri cu limită

Noțiunea de limită a unui sir este unul dintre cele mai importante concepte ale analizei matematice, precizând tendința termenilor unui sir de a se apropiă de un anumit număr (cazul sirurilor cu limită finită), sau de a deveni oricât de mari, respectiv oricât de mici (cazul sirurilor cu limită infinită).

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai sirului, adică există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ (altfel spus, vecinătatea V conține toți termenii sirului de la rangul n_V încolo). În acest caz, vom nota $x_n \rightarrow l$ pentru $n \rightarrow \infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, spunându-se și că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ (sau termenul său general x_n) tinde la l .

Se poate observa că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai sirului nu-i schimbă acestuia natura de a avea sau nu limită și nici limita, dacă

aceasta există, putându-se modifica doar rangul începând cu care termenii şirului aparțin unei vecinătăți date.

- Exemplu.**
1. Un şir constant $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, este convergent la c , întrucât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(c)$ conține toți termenii şirului.
 2. Şirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = n$ are limita $+\infty$. Pentru a demonstra acest lucru, observăm că orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ conține un interval de forma $(M_V, +\infty]$. Fie $n_V = [M_V] + 1$. Atunci $n_V > M$, deci $x_{n_V} \in (M, +\infty] \subseteq V$. Analog, $x_n \in V$ pentru orice $n > n_V$, deci $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$.
 3. În mod asemănător se poate demonstra că şirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = -n$ are limita $-\infty$.

Unicitatea limitei unui şir

În cele ce urmează, se va observa mai întâi că limita unui şir, dacă există, este unică.

Teorema 2.4. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $l_1 = l_2$.

Subşiruri ale unui şir cu limită

Este ușor de observat că proprietățile de monotonie și mărginire se transmit de la un şir către subşirurile sale. Astfel, dacă un şir este monoton, orice subşir al său este de asemenea monoton, cu același sens de monotonie, iar dacă un şir este mărginit, orice subşir al său este de asemenea mărginit, mulțimea termenilor subşirului fiind inclusă în mulțimea (mărginită) a termenilor şirului. Pe aceeași linie de gândire, proprietatea unui şir de a avea limită se transmite de asemenea către subşirurile sale.

Teorema 2.5. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subşir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ al său are aceeași limită.

Condiție suficientă ca un şir să nu aibă limită

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă un şir $(x_n)_{n \geq 0}$ are două subşiruri care tind la limite diferite, atunci el nu are limită, deoarece dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ ar avea limita l , atunci și cele două subşiruri ar avea aceeași limită l .

Exemplu. Sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu are limită, deoarece subșirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_{2n} = 1$ și subșirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$.

2.2.1 Șiruri convergente

Un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ cu limită finită l se numește *șir convergent*, spunându-se și că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent către l . Orice sir care nu este convergent se numește *divergent*.

În acest sens, şirurile divergente pot fi deci şiruri cu limită infinită sau şiruri fără limită. În plus, orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită ca şi şirul iniţial, conform Teoremei 2.5. De aici, dacă un şir $(x_n)_{n \geq 0}$ conține un subşir cu limită infinită, sau două subşiruri cu limite diferite, atunci el este divergent.

Exemplu. Sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}n$ este divergent, deoarece subșirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_{2n} = 2n$ are limita $+\infty$.

Caracterizarea analitică a limitei unui şir

Definiția cu vecinătăți a limitei unui şir, deși utilă teoretic, este greu de verificat sau folosit în aplicații. Vom prezenta în cele ce urmează câteva caracterizări echivalente cu un pronunțat aspect numeric, utile pentru demonstrarea unor proprietăți verificabile practic. Mai întâi, este abordată situația şirurilor convergente.

Teorema 2.6. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent către l dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

De fapt, proprietatea din enunțul Teoremei 2.6 este echivalentă cu proprietatea de definiție a şirurilor convergente, putând fi folosită în locul acesteia pentru definirea noțiunii de şir convergent.

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{2n+5}{n+2}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Soluție. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Au loc relațiile

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$$

cu condiția ca

$$\frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Atunci

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] - 1,$$

iar pentru $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - 2| < \varepsilon$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir convergent de numere întregi. Arătați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este constantă de la un rang încolo.

Soluție. Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{4}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - l| < \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $x_n \in (l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Cum intervalul $(l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ are lungime $\frac{1}{2}$, el nu poate conține decât un singur număr întreg, deci $(x_n)_{n \geq 0}$ este constantă începând cu rangul n_ε , termenii săi fiind egali cu numărul întreg respectiv.

Șiruri cu limită infinită (1)

În continuare, este abordată situația șirurilor cu limită infinită, observându-se că șirurile cu limită $+\infty$ au termeni „oricât de mari” de la un rang încolo, respectiv șirurile cu limită $-\infty$ au termeni „oricât de mici” de la un rang încolo.

Teorema 2.7. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale. Atunci

1. $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită $+\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$.
2. $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită $-\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n < -M$ pentru orice $n \geq n_M$.

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Soluție. Fie $M > 0$ arbitrar. Au loc relațiile

$$x_n = n + 1 + \frac{2}{n + 1} > M$$

cu condiția ca

$$n + 1 > M \Leftrightarrow n > M - 1.$$

Atunci $n_M = [M - 1] + 1 = [M]$, iar pentru $n \geq n_M$, $x_n > M$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Širuri cu limita 0

În aceste condiții, studiul řirurilor convergente cărora le este cunoscută limita poate fi redus la studiul unor řiruri convergente la 0, observându-se că un řir $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă diferența dintre řir și limita sa tinde la 0; acesta este doar un alt fel de a spune că termenii unui řir convergent devin „apropiați” de limita řirului de la un rang încolo.

Teorema 2.8. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir de numere reale și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0$.

Demonstrație. Conform teoremei de caracterizare a řirurilor convergente (Teorema 2.6),

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |(x_n - l) - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0.\end{aligned}$$

■

Proprietatea de păstrare a semnului

Se poate observa că termenii unui řir cu limită au, cu excepția eventuală a unui număr finit dintre ei, același semn cu limita řirului.

Teorema 2.9. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir de numere reale cu limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Dacă $l > 0$, atunci toți termenii řirului sunt strict pozitivi de la un rang încolo.
2. Dacă $l < 0$, atunci toți termenii řirului sunt strict negativi de la un rang încolo.
3. Dacă $l \neq 0$, atunci toți termenii řirului sunt nenuli de la un rang încolo.

Şiruri cu limită infinită (2)

Teorema 2.10. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, iar $x_n > 0$ (respectiv $x_n < 0$) de la un rang încolo, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ (respectiv $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$).

Rezultatele teoremei de mai sus pot fi prezentate sub forma prescurtată

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \quad \frac{1}{-\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Cu ajutorul Teoremei 2.6, se poate acum obține următorul rezultat frecvent folosit în aplicații.

Teorema 2.11. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir monoton crescător de numere reale care este nemărginit superior. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Cu un raționament asemănător, se poate demonstra și următoarea teoremă complementară celei de mai sus.

Teorema 2.12. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir monoton descrescător de numere reale care este nemărginit inferior. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Exemplu. Pentru $k \in (0, \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$. De exemplu, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Pentru $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} = 0$. De exemplu, $\lim_{n \rightarrow \infty} 5^n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Pentru $q \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (deoarece $p = \frac{1}{q} > 1$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p^n} (= \lim_{n \rightarrow \infty} q^n) = 0$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = 0.$$

Criterii de majorare-minorare

Conform teoremei anterioare, pentru a arăta că limita unui ſir $(x_n)_{n \geq 0}$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferența dintre termenii ſirului și limita acestuia. Teorema următoare afirma faptul că dacă această diferență poate fi estimată potrivit, cu valori din ce în ce mai mici (α_n de mai jos poate fi înțeles ca o eroare de aproximare), atunci într-adevăr ſirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita l .

Teorema 2.13. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un ſir de numere reale și $l \in \mathbb{R}$. Dacă există un ſir $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de numere reale pozitive și un rang oarecare $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|x_n - l| \leq \alpha_n \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

$$\text{atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ este convergent la 0, urmează că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. De aici, $|x_n - l| \leq \alpha_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq \max(n_0, n_\varepsilon)$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. ■

Exercițiu. Fie ſirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Soluție. Are loc relația

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+1}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

deoarece $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = n + 1$ este un ſir crescător și nemărginit superior. De aici, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Exercițiu. Fie ſirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție. Au loc relațiile

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Se va observa acum că dacă termenii unui şir $(x_n)_{n \geq 0}$ pot fi minorați cu termeni „oricât de mari” ai unui şir $(a_n)_{n \geq 0}$ (i.e. $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mari” (i.e. $(x_n)_{n \geq 0}$ are tot limita $+\infty$). De asemenea, dacă termenii unui şir $(x_n)_{n \geq 0}$ pot fi majorați cu termeni „oricât de mici” ai unui şir $(b_n)_{n \geq 0}$ (i.e. $(b_n)_{n \geq 0}$ are limita $-\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mici” (i.e. $(x_n)_{n \geq 0}$ are tot limita $-\infty$).

Teorema 2.14. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale.

1. Dacă există un şir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ și un rang $n_a \in N$ astfel ca $a_n \leq x_n$ pentru orice $n \geq n_a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
2. Dacă există un şir de numere reale $(b_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ și un rang $n_b \in N$ astfel ca $x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq n_b$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Demonstrație. 1. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ și fie $M > 0$ arbitrar. Există atunci un rang n_M astfel ca $a_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$. De aici, $x_n \geq a_n > M$ pentru orice $n \geq \max(n_a, n_M)$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Demonstrația celei de-a două proprietăți este asemănătoare. ■

Exercițiu. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = n + (-1)^n$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Soluție. Are loc inegalitatea $x_n \geq n - 1$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1) = \infty$, de unde concluzia.

Exercițiu. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Soluție. Mai întâi, să observăm că

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \text{ pentru orice } k \geq 1,$$

deci, prin sumare după k de la 1 la n ,

$$x_n > 2(\sqrt{n+1} - 1) \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$, urmează concluzia.

Şiruri conţinând funcţia modul

Prezentăm în continuare câteva consecinţe ale Teoremei 2.13, exprimând faptul că funcţia modul păstrează convergenţa şirurilor.

Teorema 2.15. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, iar $l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.
3. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Se va observa că reciproca primei afirmaţii nu este adevărată. În acest sens, fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $|x_n| \rightarrow 1$ pentru $n \rightarrow \infty$, dar $(x_n)_{n \geq 0}$ nu are limită. În plus, afirmaţiile 2. şi 3. pot fi cumulate sub forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0.$$

De asemenea, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un şir de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$, cu un raţionament asemănător celui de mai sus.

Limita şirului $(q^n)_{n \geq 0}$

Din cele de mai sus, se obţine că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

Acest lucru a fost observat deja pentru $q \in (0, 1)$, conform Teoremei 2.11. Pentru $q \in (-1, 0)$, $|q^n| = |q|^n$, iar $|q| \in (0, 1)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, conform celei de-a treia proprietăţi de mai sus. În fine, proprietatea este evidentă pentru $q = 0$.

Fie acum $q \in (-\infty, -1)$. Cum $q^{2n} \rightarrow \infty$ iar $q^{2n+1} \rightarrow -\infty$, urmează că nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$. Se observă în mod analog ca nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ nici pentru $q = -1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}.$$

2.2.2 Proprietăți ale sirurilor cu limită

Teorema ce urmează, numită și *teorema de trecere la limită în inegalități* exprimă faptul că inegalitățile (nestricte) dintre termenii a două siruri se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 2.16. Fie două siruri $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ cu proprietățile

1. Există un rang n_0 astfel ca $x_n \leq y_n$ pentru $n \geq n_0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $x \leq y$.

Inegalitățile nestricte dintre termenii a două siruri nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând sirurile $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{1}{n+2}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+1}$, pentru care $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq 0$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Teorema de mai jos, numită și *teorema cleștelui*, ne permite să calculăm limita unui sir care poate fi încadrat între alte două siruri având aceeași limită.

Teorema 2.17. Fie trei siruri de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$, $(x_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ cu proprietățile

1. Există un rang n_0 astfel ca $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru $n \geq n_0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Exercițiu. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție. Observăm că dintre cei n termeni conținuți în suma care definește x_n , $\frac{1}{n^2+n}$ este cel mai mic, iar $\frac{1}{n^2+1}$ este cel mai mare. Urmează că $n \cdot \frac{1}{n^2+n} \leq x_n \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1}$, deci

$$\frac{1}{n+1} \leq x_n \leq \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

iar deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, urmează că de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $(x_n)_{n \geq 1}$ fiind încadrat între řirurile $(\frac{1}{n+1})_{n \geq 1}$, $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ cu limita 0.

2.2.3 Relařii între convergenřă, monotonie și mărginire

În cele ce urmează, vom studia relařiiile dintre proprietăřile de monotonie, mărginire și convergenřă.

Teorema 2.18. *Orice řir convergent este mărginit.*

Demonstrařie. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Punând $\varepsilon = 1$ în Teorema 2.6, obținem că există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < 1$ pentru orice $n \geq n_1$, sau $l - 1 < x_n < l + 1$ pentru orice $n \geq n_1$. Pentru a obține inegalităři valabile și pentru $x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}$, observăm că, pentru orice $n \geq 0$,

$$\min(x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, l - 1) \leq x_n \leq \max(x_0, x_1, \dots, x_{n_1-1}, l + 1)$$

deci $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. ■

Teorema 2.19. *Orice řir nemărginit este divergent.*

Demonstrařie. Se aplică operatorul de negařie logică propoziřiei de mai sus. ■

Exemplu. 1. Nu orice řir mărginit este convergent.

Širul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu este convergent, deoarece subširul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_{2n} = 1$ și subširul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$.

În schimb, $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$.

2. Nu orice řir convergent este monoton.

Širul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este convergent la 0, deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dar nu este monoton, luând alternativ atâr valori pozitive, cât și negative.

3. Nu orice řir monoton este mărginit.

Širul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = 2n + 1$ este monoton, dar nu este mărginit, fiind nemărginit superior.

4. Nu orice sir mărginit este monoton.

Şirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât și negative.

Teorema 2.20. Orice sir monoton și mărginit este convergent.

Din cele de mai sus, se observă de asemenea că toți termenii unui sir monoton crescător și mărginit superior $(x_n)_{n \geq 0}$ sunt mai mici sau egali cu valoarea l a limitei sirului. Similar, toți termenii unui sir monoton descrescător și mărginit inferior $(x_n)_{n \geq 0}$ sunt mai mari sau egali cu valoarea limitei sirului.

Exercițiu. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Arătați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Soluție. Vom arăta că $(x_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit. În acest scop, să observăm că, deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, sirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, deci și mărginit inferior. De asemenea, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$, deci

$$x_n < \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2,$$

iar $(x_n)_{n \geq 1}$ este și mărginit superior. Fiind monoton și mărginit, $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Combinând Teorema 2.11, Teorema 2.12 și Teorema 2.20, obținem următorul rezultat, care precizează existența limitei unui sir monoton.

Teorema 2.21. Orice sir monoton $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită, finită sau nu.

2.2.4 Operații cu siruri convergente

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor siruri de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență, produs cu o constantă, produs termen cu termen, iar în anumite condiții se păstrează și după efectuarea inverselor sau a raportului termen cu termen.

Teorema 2.22. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două řiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Atunci řirul sumă $(x_n + y_n)_{n \geq 0}$, řirul produs cu o constantă $(cx_n)_{n \geq 0}$, $c \in \mathbb{R}$, și řirul produs $(x_n y_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente, iar dacă $x \neq 0$ și $x_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci și řirul inverselor $(\frac{1}{x_n})_{n \geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relațiiile

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x + y$
(limita sumei este egală cu suma limitelor).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = cx$
(operația de înmulțire cu o constantă comută cu operația de calculare a limitei).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = xy$
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x}$, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

Exercițiu. Fie řirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

Soluție. Mai întâi, se observă că $x_1 = -\frac{1}{2} < x_0$. În plus,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n - 1 - \frac{1}{2}x_{n-1} + 1 = \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}),$$

deci

$$\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}(x_n - x_{n-1}) = \dots = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0).$$

Cum $x_1 < x_0$, urmează că řirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător, deci și mărginit superior de $x_0 = 1$.

Deoarece $x_{n+1} < x_n$, urmează că $x_n > \frac{1}{2}x_n - 1$, deci $x_n > -2$, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este și mărginit inferior. Cum $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit, el este convergent. Fie l limita sa; atunci řirul $(\frac{1}{2}x_n)_{n \geq 0}$ are limita $\frac{1}{2}l$, iar řirul $(x_{n+1})_{n \geq 0}$ are tot limita l . Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $l = \frac{1}{2}l - 1$, deci $l = -2$.

Proprietățile de mai sus se pot extinde în mod asemănător la operații cu un număr mai mare (dar constant) de řiruri. De exemplu, dacă $(x_n^1)_{n \geq 0}$, $(x_n^2)_{n \geq 0}, \dots$,

$(x_n^k)_{n \geq 0}$ sunt şiruri convergente, cu limitele respectiv l_1, l_2, \dots, l_k , atunci şirul sumă $(x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^k)_{n \geq 0}$ este convergent, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k.$$

Cazul operaţiilor cu un număr variabil de şiruri trebuie tratat cu atenţie, aşa cum se observă din următorul exemplu

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

diferenţa provenind din faptul că paranteza $(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n})$ conține un număr de n şiruri, n fiind variabil.

Teorema 2.23. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Atunci şirul diferenţă $(x_n - y_n)_{n \geq 0}$ este convergent, iar dacă $y \neq 0$ și $y_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci și şirul raport $(\frac{x_n}{y_n})_{n \geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relațiile

$$1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x - y \\ (\text{limita diferenței este egală cu diferența limitelor}).$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{x}{y}, \text{ dacă } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \\ (\text{limita raportului este egală cu raportul limitelor}).$$

Demonstrație. 1. Deoarece $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$, iar $((-1)y_n)_{n \geq 0}$ este convergent cu limita $-y$ (din Teorema 2.22), urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2. Ca mai sus, şirul $(\frac{x_n}{y_n})$ este bine definit, cu excepția eventuală a unui număr finit de termeni. Deoarece $(\frac{1}{y_n})_{n \geq 0}$ este convergent cu limita $\frac{1}{y}$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

■

Se poate demonstra de asemenea următorul rezultat.

Teorema 2.24. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două řiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$, $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Atunci řirul putere $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$ este convergent. În plus, are loc relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \text{ (limita puterii se distribuie atât bazei și exponentului).}$$

Alegând řirurile constante $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, respectiv $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, se obține următoarea consecință a teoremei de mai sus.

Corolar 2.24.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir convergent de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x > 0$, $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Atunci

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^k = x^k \text{ (limita puterii este egală cu puterea limitei).}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \sqrt[p]{x} \text{ (limita radicalului este egală cu radicalul limitei).}$$

Analizăm acum cazul în care $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita 0.

Teorema 2.25. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir convergent de numere reale strict pozitive astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ și fie $(y_n)_{n \geq 0}$ un řir convergent de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0$. Atunci

$$1. \text{ Dacă } y > 0, \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = 0.$$

$$2. \text{ Dacă } y < 0, \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{y_n}) = +\infty.$$

Considerații asemănătoare se pot formula în cazul în care $(x_n)_{n \geq 0}$ este un řir convergent de numere reale strict negative cu limita 0, sau măcar conține termeni negativi, cu rezerva ca $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$ trebuie mai întâi să fie bine definit. De exemplu, pentru $x_n = -\frac{1}{n}$ și $y_n = \frac{1}{2n}$, $x_n^{y_n} = \sqrt[2n]{-\frac{1}{n}}$ nu este definit pentru nicio valoare a lui n .

Totuși, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ au ambele limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența řirului $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$, spunându-se că 0^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \rightarrow +\infty$.
- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = -\frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

2.2.5 Operații cu siruri cu limită infinită

Teorema 2.26. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două siruri de numere reale.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$.

Rezultatul Teoremei 2.26 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\begin{aligned}\infty + c &= \infty, & \infty + \infty &= \infty, \\ -\infty + c &= -\infty, & -\infty + (-\infty) &= -\infty, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Teorema 2.27. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două siruri de numere reale.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty$.
3. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty$.
4. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty$.

Rezultatul Teoremei 2.27 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\begin{aligned}c.p. \cdot +\infty &= +\infty, & c.n. \cdot +\infty &= -\infty, \\ c.p. \cdot -\infty &= -\infty, & c.n. \cdot -\infty &= +\infty,\end{aligned}$$

unde prin c.p. și c.p. înțelegem „constantă reală strict pozitivă” și respectiv „constantă reală strict negativă”.

Teorema 2.28. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două řiruri de numere reale.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y > 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
3. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y > 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
4. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \mathbb{R}, y < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Rezutatul Teoremei 2.28 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\begin{aligned}\frac{\infty}{\text{c.p.}} &= \infty, & \frac{\infty}{\text{c.n.}} &= -\infty, \\ \frac{-\infty}{\text{c.p.}} &= -\infty, & \frac{-\infty}{\text{c.n.}} &= \infty.\end{aligned}$$

Teorema 2.29. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două řiruri de numere reale.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \{-\infty, +\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.29 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\frac{c}{\infty} = 0, \quad \frac{c}{-\infty} = 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.30. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două řiruri de numere reale.

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y > 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = +\infty$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}, y < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.30 poate fi prezentat și sub forma prescurtată

$$\infty^{\text{c.p.}} = \infty, \quad \infty^{\text{c.n.}} = 0.$$

Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita ∞ iar $(y_n)_{n \geq 0}$ are limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența řirului $(x_n^{y_n})_{n \geq 0}$, spunându-se că ∞^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2 \rightarrow 2$.
- Dacă $x_n = 2^{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \rightarrow +\infty$.
- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$, atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

În general, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența produsului dintre un sir convergent și un alt sir care nu are neapărat limită. Totuși, sub ipoteze adiționale, are loc următorul rezultat.

Teorema 2.31. *Produsul dintre un sir mărginit $(x_n)_{n \geq 0}$ și un sir $(y_n)_{n \geq 0}$ convergent la 0 este un sir convergent la 0.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit, există $M > 0$ astfel că $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $(y_n)_{n \geq 0}$ este un sir convergent la 0, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| |y_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n y_n)_{n \geq 0}$ este convergent la 0. ■

Exemplu. Dacă $(y_n)_{n \geq 0}$ este convergent la 0, atunci $((-1)^n y_n)_{n \geq 0}$ este de asemenea convergent la 0.

Demonstrație. Este suficient să alegem $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$, care este mărginit. ■

2.2.6 Calculul unor limite fundamentale

Limitele funcțiilor polinomiale

Fie P o funcție polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Considerăm řirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = P(n)$. Pentru calculul limitei řirului $(x_n)_{n \geq 0}$ se va scoate factor comun forțat n^k ($k = \text{grad } P$). Se obține că

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \\ &= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

de unde se poate remarcă faptul că *limita lui $P(n)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P* .

- | | |
|-----------------|--|
| Exemplu. | 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 2n^2 + n - 1) = +\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^3 este pozitiv.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^4 + 3n^3 - \sqrt{2}n + 5) = -\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^4 este negativ |
|-----------------|--|

Limitele funcțiilor raționale

Fie P, Q două funcții polinomiale de grad k , respectiv l , unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) &= a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0, \\Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) &= b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.\end{aligned}$$

Considerăm řirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, presupunând că $Q(n) \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$. Pentru calculul limitei řirului $(x_n)_{n \geq 0}$ se va scoate factor comun forțat n^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv n^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obține că

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1} \frac{1}{n} + \dots + b_1 \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \frac{1}{n^l} \right)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b_l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b_l},$$

de unde se poate remarcă faptul că *limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P și Q.*

De asemenea, dacă $\text{grad } P < \text{grad } Q$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$, deci *dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este 0.*

Dacă $\text{grad } P = \text{grad } Q$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este raportul coeficienților termenilor dominanți.*

Dacă $\text{grad } P > \text{grad } Q$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este $+\infty$ dacă coeficienții termenilor dominanți au același semn, respectiv $-\infty$ dacă coeficienții termenilor dominanți au semne opuse.*

Exemplu. 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 6n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2})}{n^2(3 + 6\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n + 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 + 4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^2})} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 6}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(5 + 3\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2})}{n^3(1 + 4\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Subșiruri ale șirurilor mărginite și nemărginite

A fost deja observat că nu orice șir monoton este convergent. Totuși, cu ajutorul teoremei de convergență a șirurilor monotone, putem arăta că din orice șir

mărginit se poate extrage un subşir convergent, acest lucru reprezentând obiectul următorului rezultat, numit și *Lema lui Césaro*.

Teorema 2.32. *Orice řir mărginit $(x_n)_{n \geq 0}$ conține un subşir convergent.*

În mod asemănător, putem observa că řurile nemărginite conțin subşiruri cu limită infinită.

Teorema 2.33. *Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit superior, atunci el conține un subşir cu limită $+\infty$.*
2. *Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci el conține un subşir cu limită $-\infty$.*

2.2.7 Puncte limită ale unui řir

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir dat. Vom numi *mulțimea punctelor limită* ale řirului $(x_n)_{n \geq 0}$, notată $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, mulțimea tuturor limitelor de subşiruri ale lui $(x_n)_{n \geq 0}$.

Mai întâi se observă că mulțimea punctelor limită ale unui řir $(x_n)_{n \geq 0}$ dat este totdeauna nevidă. Mai precis, dacă řirul este mărginit, atunci el conține un subşir convergent (Teorema 2.32), cu o limită oarecare l , iar în această situație $l \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dacă řirul este nemărginit superior (respectiv superior), atunci $+\infty \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (respectiv $-\infty \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), conform Teoremei 2.33.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \{-1, 1\}$. În acest scop, se observă că orice subşir cu limită (care este în mod necesar finită, deoarece $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit) $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ al lui $(x_n)_{n \geq 0}$ este constant de la un rang încolo, fiind un řir convergent de numere întregi. Fiind constant de la un rang încolo, termenii săi sunt toți egali cu 1 sau -1 începând cu acel rang, iar $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ poate avea fie limita 1, fie limita -1.

Conform definiției, se pot observa următoarele proprietăți.

1. Dacă o infinitate de termeni ai unui řir $(x_n)_{n \geq 0}$ sunt egali cu un același număr real x , atunci putem construi un subşir convergent la x cu termenii în cauză, deci $x \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2. Dacă un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita l , finită sau nu, atunci $l \in \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, pe post de subşir convergent la l putând lua chiar sirul $(x_n)_{n \geq 0}$.
3. Există siruri care au o infinitate de puncte limită. De exemplu, pentru

$$(x_n)_{n \geq 0} : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, 1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

orice număr natural este punct limită, întrucât $(x_n)_{n \geq 0}$ conține toate numerele naturale, repetate de o infinitate de ori.

4. Dacă $l \in \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, atunci orice vecinătate V a lui l conține o infinitate de termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 0}$, deoarece există un subşir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ al lui $(x_n)_{n \geq 0}$ care este convergent la l și deci V conține toti termenii subşirului $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ de la un rang încolo.

Teorema 2.34. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ se reduce la un singur element.

Limita superioară și limita inferioară a unui sir

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale și fie sirurile $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$$\begin{aligned} a_n &= \inf_{k \geq n} x_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\} \\ b_n &= \sup_{k \geq n} x_k = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}. \end{aligned}$$

Cum $\{x_{n+1}, \dots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, urmează că $a_n \leq a_{n+1}$ și $b_n \geq b_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$, deci $(a_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător, iar $(b_n)_{n \geq 0}$ este monoton descrescător. Cum $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ sunt monotone, ele admit limite. De asemenea, se observă că $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$.

Vom numi atunci *limită superioară* a sirului $(x_n)_{n \geq 0}$, notată $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, limita sirului $(b_n)_{n \geq 0}$. Similar, vom numi *limită inferioară* a sirului $(x_n)_{n \geq 0}$, notată $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, limita sirului $(a_n)_{n \geq 0}$. Deoarece $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Exemplu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = 2 \sin \frac{n\pi}{3} + (-1)^n$. Pentru $n = 6k$, $k \geq 0$, urmează că $x_{6k} = \sin(2k\pi) + 1 = 1$. Similar, $x_{6k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, $x_{6k+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+3} = -1$, $x_{6k+4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+5} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Cum fiecare dintre aceste subširuri este convergent, fiind constant, urmează că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$. Urmează că de asemenea $b_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$, deci $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n (= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$ este finită. Similar, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior, atunci $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ este finită. De asemenea, conform Teoremei 2.33, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit superior, atunci $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, iar dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Fie acum $l \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$. Există atunci un subšir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = l$. Cum

$$\inf_{l \geq k_n} x_l \leq x_{k_n} \leq \sup_{l \geq k_n} x_l \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

urmează că

$$a_{k_n} \leq x_{k_n} \leq b_{k_n} \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

iar trecând la limită în aceste inegalități obținem că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq l \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Mai mult, se poate demonstra că $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ este cel mai mare punct limită al řirului $(x_n)_{n \geq 0}$. Similar, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ este cel mai mic punct limită al řirului $(x_n)_{n \geq 0}$. În plus, deoarece

$$a_n = \inf_{k \geq n} x_k \geq \inf_{k \geq 0} x_k, \quad b_n = \sup_{k \geq n} x_k \leq \sup_{k \geq 0} x_k,$$

urmează că

$$\inf_{k \geq 0} x_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup_{k \geq 0} x_k,$$

deci $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ este cuprinsă între marginea inferioară și marginea superioară a termenilor řirului. Teorema 2.34 se poate reformula atunci sub forma următoare.

Teorema 2.35. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită dacă și numai dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. În această situație,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Exemplul următor indică faptul că, dat fiind un sir $(x_n)_{n \geq 0}$, nu trebuie confundată $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ cu $\sup_{n \geq 0} x_n$ și nici $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ cu $\inf_{n \geq 0} x_n$. Acest lucru este de altfel evident din faptul că $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, fiind puncte limită, nu sunt influențate de valorile primilor termeni ai sirului $(x_n)_{n \geq 0}$, pe când $\sup_{n \geq 0} x_n$ și $\inf_{n \geq 0} x_n$ sunt.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$. Atunci $x_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1}$, care este strict descrescător cu limită 1, iar $x_{2n+1} = -\frac{2n+4}{2n+3}$, care este strict crescător, cu limită -1. Atunci

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1, \quad \sup_{n \geq 0} x_n = x_0 = 2, \quad \inf_{n \geq 0} x_n = x_1 = -\frac{3}{2}.$$

Totuși, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ rețin unele proprietăți de mărginire caracteristice $\sup_{n \geq 0} x_n$ și $\inf_{n \geq 0} x_n$, chiar dacă într-o formă mai slabă. Aceste proprietăți sunt cuprinse în următorul rezultat. Reamintim că

$$x_n \leq \sup_{n \geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \quad x_n \geq \inf_{n \geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

Teorema 2.36. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir mărginit și fie $\varepsilon > 0$. Atunci

1. Există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$.
2. Există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n > \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$.

Cu un raționament asemănător, folosind teoremele de caracterizare analitică a marginii superioare și marginii inferioare a unei mulțimi, se poate demonstra că marginea superioară și marginea inferioară a unei mulțimi mărginite se pot obține ca limite de siruri cu elemente din acea mulțime.

Teorema 2.37. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime mărginită. Există atunci două șiruri $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ de elemente din A astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf A$.

2.2.8 Șiruri fundamentale (Cauchy)

În cazurile în care limita unui șir este deficit de intuit sau determinat numeric, poate fi util un criteriu de convergență care să nu facă apel la determinarea limitei șirului. Considerațiile de mai jos permit demonstrarea convergenței unui șir fără determinarea limitei acestuia.

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este *șir fundamental*, sau *șir Cauchy*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$.

Echivalent, $(x_n)_{n \geq 0}$ este *șir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \geq 0$. Intuitiv, într-un șir Cauchy toți termenii sunt apropiati unul de celălalt de la un rang încolo.

Teorema 2.38. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir Cauchy. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.

În particular, fiind mărginit, orice șir Cauchy $(x_n)_{n \geq 0}$ admite un subșir convergent.

Teorema 2.39. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este șir Cauchy dacă și numai dacă este convergent.

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este convergent.

Soluție. Vom arăta că $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este șir Cauchy. Să presupunem prin reducere la absurd că $(x_n)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy. Conform definiției șirului Cauchy, aplicată pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{3}$ pentru orice $m, n \geq n_1$. În particular, pentru $m = 2n$, urmează că

$$|x_n - x_{2n}| \leq \frac{1}{3} \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

De asemenea,

$$|x_n - x_{2n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicție. Urmează că $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este sir Cauchy, deci nu este nici convergent.

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}$. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Soluție. Vom arăta că $(x_n)_{n \geq 1}$ este sir Cauchy. Mai întâi, observăm că au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. De aici,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0.$$

Urmează că $(x_n)_{n \geq 1}$ este sir Cauchy, deci este convergent.

2.2.9 Criterii de convergență utilizând raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$

Prezentăm mai întâi o inegalitate între limitele unor siruri de radicali, respectiv rapoarte, asociate unui sir cu termeni strict pozitivi.

Teorema 2.40. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir cu termeni strict pozitivi. Are loc inegalitatea

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Conform Teoremei 2.35, din rezultatul de mai sus se poate deduce imediat următorul criteriu de existență a limitei radicalului de ordin n al unui sir dat. În acest mod se poate reduce calculul unor limite care conțin radicali de ordin n la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

Teorema 2.41. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

Exercițiu. Demonstrați că

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, unde $a > 0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Soluție. 1. Fie $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = a$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{a} = 1$, deci de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Fie $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = n$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, deci de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Convergența și divergența sirului $(a_n)_{n \geq 0}$: $a_n = l^n$, pentru care raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ are valoarea constantă $l \in [0, \infty)$, a fost discutată anterior. În cele ce urmează, vom observa că un sir cu termeni strict pozitivi $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ are limita l , fără a fi neapărat constant, are aceeași convergență sau divergență cu $(a_n)_{n \geq 0}$, cu excepția eventuală a cazului în care $l = 1$.

Teorema 2.42. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci

1. Dacă $l \in [0, 1)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
2. Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
3. Dacă $l = 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).

Exercițiu. Demonstrați că

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, unde $a > 0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, unde $a > 1, k > 0$.

Soluție. 1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

deci de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{n^k}{a^n}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \in (0, 1),$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Cea de-a doua proprietate poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcția exponențială crește mai rapid către $+\infty$ decât funcția putere.

Exercițiu. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}.$$

Soluție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2) \cdot (2n+4)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1) \cdot (3n+4)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0, 1),$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2.2.10 Teoremele Stolz-Césaro

Teoremele următoare, numite și *Teoremele Stolz-Césaro*, sunt aplicabile limitelor de rapoarte de siruri de forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, care pot fi reduse la calculul unor limite de rapoarte de siruri de forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, posibil mai simple, mai ales dacă $(a_n)_{n \geq 0}$

și $(b_n)_{n \geq 0}$ sunt definite cu ajutorul unor sume. Ele sunt denumite respectiv *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$* și *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$* pentru a indica situațiile uzuale de aplicabilitate, deși pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ numai limita numitorului este cerută în mod explicit a fi $+\infty$.

Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 2.43. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două řiruri de numere reale astfel încât

1. $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

2. Există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Exercițiu. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}.$$

Soluție. Fie

$$(a_n)_{n \geq 0} : a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}$$

$$(b_n)_{n \geq 0} : b_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$$

Deoarece $b_{n+1} - b_n = \sqrt{n} > 0$, urmează că $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Urmează că de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunț este 0.

Exercițiu. Fie $q \in (0, 1)$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

Soluție. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}.$$

Fie $(a_n)_{n \geq 0}$: $a_n = n$, $(b_n)_{n \geq 0}$: $b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n$. Deoarece $\frac{1}{q} > 1$ iar $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right) > 0$, urmează că $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right)} = 0.$$

Urmează că de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunț este 0.

Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

Teorema 2.44. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două siruri de numere reale astfel încât

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
3. Există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

2.2.11 Siruri cu limita numărul e

Vom considera în continuare sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, căruia îi vom demonstra convergența.

Teorema 2.45. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător și mărginit.

Demonstrație. Monotonie

Folosind formula binomială, observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Cu același raționament,

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!}.$$

Comparând factor cu factor, obținem că

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

pentru orice $1 \leq k \leq n$, deci $x_n < x_{n+1}$, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.

Mărginire

Observăm că

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!},$$

iar cum

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1} \text{ pentru } k \geq 2,$$

obținem că

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Cum $(x_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător, $x_n \geq x_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie

$$2 \leq x_n < 3 \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

deci $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.

Fiind monoton și mărginit, $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent. Prin convenție, se notează cu e limita sa, unde $e = 2.71828\dots$ ■

Din teorema de mai sus se obține următoarea egalitate importantă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De asemenea, se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}}$$

$$= e,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Teorema 2.46. Sirul $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este strict descrescător și convergent la e .

Demonstrație. Monotonie

Pentru a demonstra că $(y_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător, observăm că

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică și media armonică numerelor $1, 1, \dots, 1, \frac{n+1}{n+2}$, obținem că

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+1}{1 + 1 + \dots + 1 + \frac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2 + 2n + 2}.$$

Rămâne deci să demonstrăm că

$$\frac{(n+1)^2}{n^2 + 2n + 2} \geq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

ceea ce este imediat, deoarece

$$(n^2 + 2n + 2)n(n+2) = [(n+1)^2 + 1][(n+1)^2 - 1] = (n+1)^4 - 1 < (n+1)^4.$$

Deoarece $(y_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător, el este mărginit superior de y_1 . Conform inegalității lui Bernoulli,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\frac{1}{n} > 2,$$

deci $(y_n)_{n \geq 1}$ este și mărginit inferior. Cum $(y_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, el este convergent. În plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e,$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$. ■

Cum termenii unui řir strict crescător sunt strict mai mici decât valoarea limitei, respectiv termenii unui řir strict descrescător sunt strict mai mari decât valoarea limitei, obtinem din cele de mai sus că

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde, prin logaritmare

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Câteva consecin e importante ale convergenței řirurilor de mai sus, motivate de egalit ile deja obtinute, sunt indicate în cele ce urmează.

Teorema 2.47. *Au loc următoarele proprietăti.*

1. Fie $(p_n)_{n \geq 0}$ un řir de numere reale strict pozitive cu $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$.
2. Fie $(m_n)_{n \geq 0}$ un řir de numere reale strict negative cu $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = -\infty$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$.
3. Fie $(z_n)_{n \geq 0}$ un řir de numere reale nenule cu $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e$.

Exemplu.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n-1}} = e. \end{aligned}$$

Aici,

$$(z_n)_{n \geq 1} : z_n = \frac{2}{2n-1} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1} \right)^{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{n+2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}} \right]^{\frac{-2n}{2n^2+n+1}(n+2)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2-4n}{2n^2+n+1}} \\
&= e^{-1} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Aici,

$$(z_n)_{n \geq 1} : z_n = \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

Din Teorema 2.47 se pot deduce de asemenea și următoarele proprietăți.

Teorema 2.48. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale nenule cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Atunci

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \ln a$ pentru orice $a > 0$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + x_n)^k - 1}{x_n} = k$ pentru orice $k \in \mathbb{R}$.

Exercițiu. Demonstrați că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \quad k > 0.$$

Soluție. Deoarece $k > 0$, sirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = n^k$, este strict crescător cu limita $+\infty$.

Aplicând atunci Teorema 2.43 obținem

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^k - n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1} \frac{\frac{1}{n}}{n^k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1}{\frac{1}{n}}} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n^k} = 1 \cdot \frac{1}{k} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Proprietatea poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcția putere crește mai rapid către $+\infty$ decât funcția logaritmică.

Exemplu. 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}} \right]^{\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} \right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}} \right] \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{2}-1) + (\sqrt[n]{3}-1)}{2} n \\ &= e^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \right) \frac{1}{2}} = e^{(\ln 2 + \ln 3) \frac{1}{2}} = e^{\ln \sqrt{2 \cdot 3}} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Un alt řir cu limita e

Fie acum řirul $(e_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Teorema 2.49. řirul $(e_n)_{n \geq 0}$ este convergent cu limita e .

Demonstrație. Cum $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $(e_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător, deci $e_n \geq e_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$, iar conform inegalităților obținute în Teorema 2.45, $e_n < 3$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie, $(e_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. Fiind și monoton, $(e_n)_{n \geq 0}$ este convergent; să notăm cu e' limita sa. Să notăm de asemenea $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Deoarece $x_n < e_n$, obținem prin trecere la limită pentru $n \rightarrow \infty$ că $e \leq e'$.

Fie acum $1 \leq m < n$ fixat. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $n \rightarrow \infty$ în relația de mai sus, obținem că

$$e \leq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!},$$

adică $e \leq e_m$. Cum această egalitate este valabilă în fapt pentru orice m (restricția $m < n$ se elimină prin alegerea de la început a unui n suficient de mare), prin trecere la limită se obține că $e \leq e'$. Cum și $e' \leq e$, urmează că $e = e'$, iar $(e_n)_{n \geq 0}$ este convergent tot la e . ■

Din cele de mai sus, se obține următoarea egalitate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Iraționalitatea lui e

Teorema 2.50. Numărul e este irațional.

Constanta lui Euler

Fie acum sirul $(c_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Teorema 2.51. Sirul $(c_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

Demonstrație. Vom demonstra că $(c_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit.

Monotonie

Observăm că

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

deci $(c_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.

Mărginire

Cum $(c_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător, el este mărginit superior. Observăm că

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k+1}, \text{ pentru } k \geq 1.$$

Sumând inegalitățile obținute pentru $k = 1, k = 2, \dots, k = n - 1$ obținem că

$$\ln n > \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_n < 1 \text{ pentru } n \geq 2,$$

Cum $(c_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit, el este convergent. Prin convenție, se notează cu γ limita sa, unde $\gamma = 0.57721\dots$. Numărul γ astfel definit se numește *constanta lui Euler*. ■

Exercițiu. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

Soluție. Au loc relațiile

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln(2n) \right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2n - \ln n \\ &= c_{2n} - c_n + \ln 2. \end{aligned}$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \gamma$, urmează că limita din enunț este $\ln 2$.

Aplicații

2.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{n+2}{2n+5}$. Precizați valorile lui n pentru care $|x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{9}$.

2.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_0 = \frac{4}{3}$.

1. Demonstrați că $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$.

2. Determinați expresia termenului general x_n .

3. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.3. Determinați valorile următoarelor limite de siruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + n^3 + 3n^2 - n + 5}{3n^3 - 2n^2 + n - 6};$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n^2 + 2n + 3) - \ln(3n^2 + n - 6));$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 + n + 1)}{\ln(n^6 + 2n + 3)}.$

2.4. Determinați valorile următoarelor limite de siruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+3} \right);$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{5 \cdot 2^{n+1} + 3^{n+2}};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + n - 1}{3n^2 + 2n + 1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n;$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 0.5 + 0.5^2 + \dots + 0.5^n}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}};$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^{n+1} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^{n+1}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^n - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^n}.$

2.5. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un sir cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, determinați

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 2}{2x_n + 3};$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 2}{3x_n + 1};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + 3}{x_n^3 + 2}.$

2.6. Determinați valorile următoarelor limite de siruri:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}});$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + (-1)^n}{2n + 3};$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}};$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n} - n).$

2.7. Folosind eventual un criteriu de majorare-minorare, demonstrați că

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1 + 2 \sin 2 + \dots + n \sin n}{n^3} = 0;$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + n \sin \frac{n}{2}) = +\infty;$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + [n] \cos \frac{n\pi}{3}) = -\infty.$

2.8. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$. Demonstrați că $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ pentru orice $n \geq 1$ și determinați de aici $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.9. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$. Demonstrați că $3 < x_n < 3\sqrt[n]{2}$ pentru orice $n \geq 2$ și determinați de aici $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.10. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = \sqrt[n]{n}$. Se notează $x_n = 1 + \alpha_n$, $n \geq 2$. Demonstrați că $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$ și determinați de aici $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.11. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}$. Demonstrați că $1 < x_n < \sqrt[n]{n^2}$ pentru orice $n \geq 2$ și determinați de aici $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.12. Determinați

1. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{3n+2}, \frac{2n+5}{3n+1} \right], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2n+1}{3n+2}, \frac{2n+5}{3n+1} \right];$

2. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3n+4}{4n+5}, \frac{3n+8}{4n+9} \right], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3n+4}{4n+5}, \frac{3n+8}{4n+9} \right].$

2.13. Determinați valorile următoarelor limite de řiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1} \right)^{n+\sqrt{n}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n+3}{2^n+1} \right)^{n+\ln n}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3\sqrt{n}+5}{2n+5} \right)^{\sqrt{n}}.$$

2.14. Determinați valorile următoarelor limite de řiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}.$$

2.15. Determinați valorile următoarelor limite de řiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}.$$

2.16. Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinați valorile următoarelor limite de řiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{n^2(n+1)^2}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right); \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

2.17. Determinați $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ în următoarele situații:

$$1. (x_n)_{n \geq 0}: x_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n^2}}{n^2+1};$$

$$2. (x_n)_{n \geq 0}: x_n = \frac{\sin n^2}{n+1};$$

$$3. (x_n)_{n \geq 0}: x_n = \arcsin(-1)^n + \arccos(-1)^{n+1} + \operatorname{arctg}(-1)^{n+2};$$

$$4. (x_n)_{n \geq 0}: x_n = \left(\frac{n+3}{n} \right)^{n \sin \frac{n\pi}{3}} + \left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n + 3} \right)^n.$$

2.18. Fie $(x_n)_{n \geq 0}: x_n = 2 + \frac{n}{n+2} \cos \frac{n\pi}{2}$. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.19. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două řiruri de numere pozitive astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \neq 0$. Atunci $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = l \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$.

2.20. Determinați valoarea limitei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^1 \cdot e^2 \cdot \dots \cdot e^n}{n}.$$

2.21. Fie řirul $(x_n)_{n \geq 0}: x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n}$, $n \geq 0$ și $x_0 = 1$.

1. Studiați monotonia și mărginirea řirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

2. Demonstrați că řirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și precizați-i limita.

3. Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

2.22. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, $n \geq 0$ și $x_0 \in (1, 2)$.

1. Demonstrați că $1 < x_n < 2$ pentru orice $n \geq 0$.
2. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.
3. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și precizați-i limita.

2.23. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$.

1. Determinați o relație de recurență verificată de termenii sirului $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. Demonstrați că $0 < x_n < 2$ pentru orice $n \geq 1$.
3. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.
4. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și precizați-i limita.

2.24. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$, $n \geq 0$ și $x_0 \in (0, 1)$.

1. Demonstrați că $0 < x_n < 1$ pentru orice $n \geq 0$.
2. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.
3. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și precizați-i limita.

2.25. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$, $n \geq 0$ și $x_0 > 0$.

1. Demonstrați că $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$.
2. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.
3. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

2.26. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

2.27. Dacă un sir monoton $(x_n)_{n \geq 0}$ are un subșir convergent, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este de asemenea convergent.

2.28. Dacă un řir $(x_n)_{n \geq 0}$ are o infinitate de subřiruri convergente, rezultă că acesta este convergent?

2.29. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un řir și $l \in \mathbb{R}$. Dacă orice vecinătate V a lui l conține o infinitate de termeni ai řirului $(x_n)_{n \geq 0}$, rezultă că řirul are limita l ?

2.30. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 4n + 3} - an - b \right) = 2.$$

Capitolul 3

SERII NUMERICE

Date fiind numerele reale x_0, x_1, \dots, x_n , în număr finit, suma lor $x_0 + x_1 + \dots + x_n$ se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noțiunii de sumă pentru mulțimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 și -1). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + \dots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots + ((-1) + 1) + \dots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeași sumă de numere reale reprezintă o situație inaceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietății de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

vom determina

$$\begin{aligned} S_0 &= x_0, \quad S_1 = x_0 + x_1, \quad S_2 = x_0 + x_1 + x_2, \dots, \\ S_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots \end{aligned}$$

și vom încerca să extragem informații despre comportarea sirului $(S_n)_{n \geq 0}$, utilizând aceste informații pentru determinarea sumei.

Numim atunci *serie numerică de termen general* x_n (sau, mai simplu, *serie de termen general* x_n) cuplul $((x_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$ format din sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ al termenilor seriei și sirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

În această situație, x_n se va numi și *termenul de rang n sau indice n* al seriei. Vom nota o serie de termen general x_n prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii k termeni x_0, x_1, \dots, x_{k-1} nu sunt definiți, vom nota seria de termen general x_n prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n + \dots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notațiile de mai sus sugerează și denumirea de „sumă infinită” pentru o serie, deși, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleași proprietăți ca și sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *convergentă* dacă sirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent, respectiv că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este *divergentă* dacă sirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este divergent. Dacă sirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ are limită, atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *suma* seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Serilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care sirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Termenul general al acestei serii este $x_n = \frac{1}{2^n}$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, iar suma sa este 2.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = n$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$ este divergentă, iar suma sa este $+\infty$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Termenul general al acestei serii este $x_n =$

$(-1)^n$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

Deoarece

$$S_{2n} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + 1 = 1,$$

iar

$$S_{2n+1} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) = 0,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 0,$$

deci nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă, suma sa neputând fi definită.

În cele ce urmează, vom preciza condiții pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit și suma seriei.

Sume calculabile exact

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$. Dacă $q \neq 1$, atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = n + 1$.

Urmează atunci că seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ pentru $q \in (-1, 1)$. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru $q = 1$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) = \infty$.

$+\infty$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă $q \in (1, +\infty)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty$ pentru $q \in (1, \infty)$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nu există, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}$ nu există pentru $q \in (-\infty, -1]$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}.$$

Exemplu. Fie suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left(\frac{(-1)2^3}{9} \right)^n = \left(-\frac{8}{9} \right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9} \right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{8}{9} \right)} = \frac{9}{17}.$$

Serii telescopicе

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie telescopică* dacă există sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, astfel ca

$$x_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un sir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferența a doi termeni consecutivi ai acestui sir, primul cu același indice ca și indicele termenului general al seriei. În această situație,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent.

În această ultimă situație,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$. Atunci termenul general al sumei

este $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$. Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - 1, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 1) = +\infty.$$

Proprietăți generale ale seriilor

Eliminarea termenilor

În Capitolul 2, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui şir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergența unei serii este definită prin intermediul şirului sumelor parțiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură” înțelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeași natură” înțelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Teorema 3.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este $+\infty$ sau $-\infty$, aceasta nu se modifică.

Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor)

Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeași după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu

anumite precauții (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă și pentru serii.

Teorema 3.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obținută are aceeași natură cu seria inițială și aceeași sumă.

Proprietăți generale ale seriilor convergente

Asociativitate

S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuși, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu ajutorul parantezelor se obține tot o serie convergentă, cu aceeași sumă ca și seria inițială.

Teorema 3.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeași sumă ca și seria inițială.

Restul de ordin p

Dată fiind seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, vom numi *rest de ordin p* al acesteia seria

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = x_{p+1} + x_{p+2} + \dots,$$

obținută din seria inițială prin eliminarea termenilor x_0, x_1, \dots, x_p , cu indici mai mici sau egali cu p . Se observă atunci că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_p + R_p, \quad \text{pentru orice } p \geq 0,$$

unde $(S_n)_{n \geq 0}$ este sirul sumelor parțiale asociat seriei date. Din acest motiv, dacă seria dată este convergentă, atunci sirul sumelor parțiale tinde la suma seriei, iar sirul resturilor tinde la 0, conform formulei de mai sus. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.4. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă R_p , restul de ordin p , este o serie convergentă pentru orice $p \in \mathbb{N}$. În plus, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{p \rightarrow \infty} R_p = 0$.

Criteriul de convergență Cauchy

A fost deja demonstrat în Capitolul 2 că un sir este convergent dacă și numai dacă este sir fundamental (Cauchy). De aici, o serie dată este convergentă dacă și numai dacă sirul sumelor sale parțiale este sir Cauchy. Acest lucru se reflectă în următorul rezultat.

Teorema 3.5. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_{\varepsilon} \text{ și orice } p \geq 0.$$

Demonstrație. Fie $(S_n)_{n \geq 0}$ sirul sumelor parțiale asociate seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Atunci

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}|, \quad \text{pentru orice } n, p \geq 0.$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este sir fundamental, adică dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_{\varepsilon} \text{ și orice } p \geq 0,$$

rezultă concluzia. ■

Divergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că sirul

$$(S_n)_{n \geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

nu este sir Cauchy. Cum acesta este sirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Seria de mai sus se numește și *seria armonică*, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}$ pentru orice $n > 1$.

Limita termenului general

Teorema 3.6. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Demonstrație. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă, cu suma l . Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obține deci următorul rezultat.

Corolar 3.6.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată este divergentă.

Exercițiu. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

Soluție. Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri.

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n+\frac{1}{n}}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} \neq 0,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}$ este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n (\frac{2^n}{5} + 1)}{5^{n+1} (\frac{2^{n+1}}{5} + 1)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă.

Se poate observa de asemenea faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nu este o condiție suficientă pentru convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dar totuși seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Mărginirea sirului sumelor parțiale

Teorema 3.7. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Atunci sirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale asociate seriei este mărginit.

Demonstrație. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă și fie $(S_n)_{n \geq 0}$ sirul sumelor parțiale asociate seriei. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent, iar cum orice sir convergent este mărginit, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. ■

Reciproc, dacă sirul sumelor parțiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obține deci următorul rezultat.

Corolar 3.7.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată și fie $(S_n)_{n \geq 0}$ sirul sumelor parțiale asociate seriei. Dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Soluție. Are loc estimarea

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit, și atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Operații cu serii convergente

Întrucât, aşa cum s-a menționat anterior, convergența unei serii se definește prin intermediul convergenței sirului sumelor sale parțiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență și produs cu o constantă.

Teorema 3.8. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii convergente de numere reale astfel ca $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$. Atunci seria sumă $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ și seria produs cu o constantă $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n$, $c \in \mathbb{R}$, sunt convergente. În plus, au loc relațiile

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$$

Demonstrația este imediată, utilizând proprietățile operațiilor cu siruri convergente.

Serii cu termeni pozitivi, serii cu termeni negativi, serii alternante, serii cu termeni oarecare

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni pozitivi* dacă toți termenii săi de la un indice încolo sunt pozitivi, adică există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq N_1$. Similar, spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni negativi* dacă toți termenii săi de la un indice încolo sunt negativi, adică există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq N_2$.

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *serie cu termeni oarecare* dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât și o infinitate de termeni negativi. Un caz particular de serii

cu termeni oarecare sunt *seriile alternante*. O serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *alternantă* dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi și negativi de la un rang încolo, adică există $N_3 \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n \geq 0}$ este un sir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, fie $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, fie $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n \geq 0}$ este un sir cu termeni strict pozitivi.

În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acesteia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de pozitivitate (respectiv negativitate, alternanță) are loc începând cu primul termen al seriei. De asemenea, întrucât înmulțirea cu un număr negativ nu modifică natura unei serii, seriile cu termeni negativi nu vor fi tratate separat, rezultate privind convergența acestora putând fi deduse cu ușurință din rezultatele corespunzătoare privind convergența seriilor cu termeni pozitivi.

3.1 Serii cu termeni pozitivi

Monotonia sirului sumelor parțiale

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Deoarece

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0,$$

urmează că sirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător. Acest lucru are consecințe importante asupra convergenței unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este monoton, o condiție necesară și suficientă pentru convergență sa este ca el să fie mărginit superior. Obținem deci următorul criteriu de convergență pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 3.9. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă sirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale asociate seriei este mărginit superior.

În plus, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, atunci, deoarece $(S_n)_{n \geq 0}$ tinde monoton crescător către limita sa A , urmează că $S_n \leq A$ pentru orice $n \geq 0$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pentru orice } n \geq 2,$$

urmează că

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

iar sirul $(S_n)_{n \geq 1}$ al sumelor parțiale este mărginit superior, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

De asemenea, se poate observa că pentru serii cu termeni pozitivi are loc proprietatea de comutativitate, în care de această dată se pot schimba locurile unui număr infinit de termeni.

Teorema 3.10. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă se schimbă ordinea unor termeni din serie (chiar în număr infinit), seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ astfel obținută este convergentă și are aceeași sumă.

3.1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenței așa-numitei serii armonice generalizate, care va fi folosită ca termen de comparație pentru alte serii, este următorul rezultat, numit *criteriul de condensare*.

Teorema 3.11. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un sir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci

seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Soluție. Deoarece $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = \left(\frac{1}{n \ln n} \right)_{n \geq 2}$ este un sir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeași natură. Cum $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă.

Convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Dacă $p < 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. Similar, pentru $p = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este de asemenea divergentă.

Fie acum $p > 0$. Conform criteriului de condensare, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ au aceeași natură. Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n,$$

iar $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ pentru $p \in (0, 1]$, respectiv $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ pentru $p > 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă pentru $p \in (0, 1]$, respectiv convergentă pentru $p > 1$.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

Reprezentând o formă mai generală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se mai numește și *seria armonică generalizată*.

3.1.2 Criterii de comparație

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenței sau divergenței unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relații între termenii seriei și termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergența acestora este echivalentă cu nemărginirea sirului sumelor parțiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite” (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită” (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite” (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită” (i.e., convergentă).

Teorema 3.12. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Date fiind $c \in (0, \infty)$ și o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, se observă că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ au aceeași natură. În aceste condiții, se poate obține ușor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit *criteriu de comparație cu inegalități*.

Corolar 3.12.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi și fie $c \in (0, \infty)$. Dacă

există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n \leq cy_n \text{ pentru orice } n \geq N, \quad (3.1)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Exercițiu. Studiați convergența următoarelor serii:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Soluție. 1) Deoarece $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ este de asemenea convergentă.

2) Deoarece $\frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ este de asemenea convergentă.

3) Deoarece $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^4}} = \frac{1}{n+1}$, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ este divergentă (este același lucru cu seria divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ este divergentă.

4) Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $\sqrt[n]{n} \leq 2$ pentru orice $n \geq 2$, deci $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$. Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, urmează că și seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

Informații despre îndeplinirea relației (3.1), necesară pentru utilizarea criteriului de comparație, se pot obține studiind comportarea raportului $\frac{x_n}{y_n}$.

În acest sens, să presupunem că $y_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\varepsilon > 0$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel

că $\frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$. Se obține că

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

Similar, dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\varepsilon \in (0, l)$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} > l - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$. De aici,

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Putem atunci obține următorul rezultat, numit *criteriul de comparație cu limite extreme*.

Corolar 3.12.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ o serie cu termeni strict pozitivi.

1. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1) Concluzia se obține deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă și există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n < (L + \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

2) Concluzia se obține deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă și există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n > (l - \varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

În situația în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$. În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul de comparație cu limită*.

Corolar 3.12.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < \infty$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 0$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură.

În multe situații, un bun termen de comparație este seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{n^p}$ precizând comportarea „aproximativă” a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ este utilă comparația cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, întrucât $\frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ are comportarea „aproximativă” a lui $\frac{1}{n^3}$ pentru $n \rightarrow \infty$, iar în studiul convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ este utilă comparația cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, întrucât $\frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ are comportarea „aproximativă” a lui $\frac{1}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exemplu. Studiați convergența seriilor:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$.

Soluție. 1) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{3}{2} > 1$, urmează că și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+6n+11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{n^2+6n+11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ este divergentă.

3) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ este divergentă.

4) Este deja cunoscut că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = c \in (0, 1)$. De aici,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} = 0,$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ au aceeași natură. Deoarece $(x_n)_{n \geq 0}$: $(\frac{1}{\ln n})_{n \geq 2}$ este un sir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează

conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeași natură. Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $2^n \frac{1}{n \ln 2} \geq \frac{1}{\ln 2}$, deci termenul general al seriei $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{n \ln 2}$ nu tinde la 0, aceasta fiind în concluzie divergentă. Urmează că și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ este divergentă.

Vom preciza în cele ce urmează un alt criteriu, numit și *criteriul de comparație cu rapoarte*, prin care convergența sau divergența unei serii se poate stabili prin intermediul comparației cu o serie a cărei natură este cunoscută, ce poate fi dedus cu ajutorul Corolarului 3.12.1.

Teorema 3.13. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni strict pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N, \quad (3.2)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Demonstrație. Cu ajutorul (3.2) se deduce că

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{x_N}{y_N} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cu notația $\frac{x_N}{y_N} = c$, urmează că

$$\frac{x_n}{y_n} \leq c \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

de unde concluzia urmează conform Corolarului 3.12.1. ■

3.1.3 Criterii ale radicalului

Un dezavantaj al criteriilor de comparație este că utilizarea acestora necesită construcția unor serii ajutătoare, alegerea acestora din urmă nefiind totdeauna imediată. Următorul criteriu, numit și *criteriul radicalului cu inegalități*, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenței unor serii pentru care termenul general conține puterea de ordin n a unui alt sir și nu necesită construcția unei serii ajutătoare.

Teorema 3.14. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă există $q < 1$ și $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1. Dacă

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$x_n \leq q^n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă se obține că și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

se obține că $x_n \geq 1$ pentru o infinitate de valori ale lui n , deci sirul termenilor generali $(x_n)_{n \geq 0}$ nu este convergent la 0, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu al radicalului cu limite extreme.

Teorema 3.15. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limite extreme (spunem că este un caz de dubiu).

În situația în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$, iar

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

Teorema de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și criteriul radicalului cu limită.

Corolar 3.15.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$.

Soluție. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \frac{3}{2} > 1 \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ este divergentă.

Exercițiu. Discutați natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$, unde $a > 0$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(a + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = a.$$

De aici, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$ este convergentă dacă $a \in (0, 1)$, respectiv divergentă dacă $a > 1$.

Dacă $a = 1$, urmează că $x_n = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{-n-2} \right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Urmează că $(x_n)_{n \geq 0}$ nu este convergent la 0, iar $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$ este divergentă.

3.1.4 Criterii ale raportului

Un alt criteriu util pentru studiul convergenței unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelora pentru care termenul general conține produse, este *criteriul raportului cu inegalități*, indicat mai jos. De asemenea, acesta nu necesită construcția unei serii ajutătoare.

Teorema 3.16. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă există $q < 1$ și $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstrație. 1. Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar deoarece $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă, se obține cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul

de comparație cu rapoarte) că și seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Se observă că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ este divergentă, se obține cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul

de comparație cu rapoarte) că și seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obține atunci următorul criteriu al raportului cu limite extreme.

Teorema 3.17. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limite extreme.

În situația în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și *criteriul raportului cu limită*.

Corolar 3.17.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriilor

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

Soluție. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ este convergentă.

2) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1, \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ este divergentă.

În ceea ce privește relația între domeniile de aplicabilitate ale criteriilor raportului și radicalului, să notăm că dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un sir cu termeni strict pozitivi atunci, aşa cum reiese din Teorema 2.40, are loc inegalitatea

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Se observă de aici că dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci și $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, iar dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci și $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$. De aici, dacă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limite extreme, atunci sunt îndeplinite și condițiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limite extreme, obținându-se același rezultate. De asemenea, dacă există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci

există și limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ există și are aceeași valoare, deci dacă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limită, atunci sunt îndeplinite și condițiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limită, obținându-se același rezultat.

În plus, există situații în care criteriile raportului nu sunt aplicabile, fiind aplicabile în schimb criterii ale radicalului. Un exemplu în acest sens este seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$. Deoarece termenul general este $x_n = \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$, urmează că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} \cdot \frac{1}{2}$, de unde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{2} > 1; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{6} < 1,$$

deci criteriul raportului cu limite extreme nu este aplicabil. Totuși, $\frac{1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{3}{2^n}$, de unde $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, conform criteriului cleștelui. De aici, criteriul radicalului cu limită (și de fapt și cel cu limite extreme) este aplicabil, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^n}$ este convergentă. Se poate deci concluziona faptul că sus-menționatele criterii ale radicalului au o arie de aplicabilitate mai largă decât criteriile corespunzătoare ale raportului.

3.1.5 Criteriul Raabe-Duhamel

Diversele variante ale criteriului Raabe-Duhamel, menționate în cele ce urmează, sunt în general utilizate atunci când aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Vom prezenta mai întâi *criteriul Raabe-Duhamel cu inegalități*; a se remarcă faptul că utilizarea raportului inversat ($\frac{x_n}{x_{n+1}}$, în contrast cu raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obținerea unor situații inverse de convergență față de cele obținute în criteriul raportului, respectiv „ $\geq q > 1$ ” pentru convergență (în loc de „ $\leq q < 1$ ” pentru criteriul raportului) și „ ≤ 1 ” pentru divergență (în loc de „ ≥ 1 ” pentru criteriul raportului).

Teorema 3.18. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă există $q > 1$ și $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Se poate obține atunci următorul criteriu Raabe-Duhamel cu limite extreme.

Teorema 3.19. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăți:

1. Dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3. Dacă $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) \geq 1 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limite extreme.

În situația în care există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există și limitele $\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right)$. În plus, au loc egalitățile

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită și criteriu Raabe-Duhamel cu limită.

Corolar 3.19.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exercițiu. Demonstrați că seria armonică generalizată $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, respectiv divergentă pentru $p < 1$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^p}$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Concluzia urmează atunci conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$, de unde

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, deci aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă.

3.2 Serii cu termeni oarecare

Comparativ cu situația seriilor cu termenii pozitivi, pentru care studiul convergenței se reduce la studiul mărginirii sirului sumelor parțiale, deoarece monotonia acestuia este asigurată *a priori*, situația seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, sirul sumelor parțiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergență obținute anterior (criteriile de comparație, ale raportului și radicalului, s. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

Principala strategie de demonstrare a convergenței seriilor cu termeni oarecare va fi acum scrierea termenului general ca un produs de doi factori, construirea seriei care are ca termen general unul din factori și a sirului care are ca termen general pe cel de-al doilea factor și determinarea unor proprietăți de convergență, monotonie și mărginire pentru acestea care vor conduce la convergența seriei inițiale. În situația în care seria care are ca termen general modulul termenului general al seriei inițiale este convergentă, convergența seriei inițiale se va obține din convergența acesteia din urmă; desigur, convergența celei de-a doua serii este mult mai simplu de obținut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine, pentru cazul particular al seriilor alternante, convergența acestora se poate obține demonstrând monotonia sirului obținut prin eliminarea factorului alternant.

3.2.1 Criteriul lui Dirichlet

În situația în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie nu neapărat convergentă, dar cu sirul sumelor parțiale mărginit, înmulțirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui sir cu valori „mici” (monoton descrescător și convergent la 0) „îmbunătățește” convergența seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Dirichlet*.

Teorema 3.20. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu şirul sumelor parțiale mărginit, iar $(y_n)_{n \geq 0}$ este un şir monoton descrescător și convergent la 0, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Mai întâi, fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Fie $(S_n)_{n \geq 1}$ şirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

$$S_n = \sin 0x + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

Să observăm că

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2 |\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

dacă $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ (adică $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$), respectiv

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| = |0 + 0 + \dots + 0| = 0,$$

dacă $\sin \frac{x}{2} = 0$ (adică $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$), deci în orice caz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ are şirul sumelor parțiale mărginit. Cum $(y_n)_{n \geq 1} = (\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ este monoton descrescător și convergent la 0, urmează concluzia.

3.2.2 Criteriul lui Abel

Dacă se pornește de această dată de la o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, înmulțirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu proprietăți suficiente de

bune (i.e. monoton și mărginit) păstrează convergența seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este de asemenea convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Abel*.

Teorema 3.21. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie convergentă, iar $(y_n)_{n \geq 0}$ este un sir monoton și mărginit, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.*

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$ este convergentă.

Soluție. Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{n}).$$

A fost deja demonstrat că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$, deci, pentru $x = 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ este convergentă. Cum sirul $(y_n)_{n \geq 1}$: $y_n = \frac{1}{n}$ este monoton descrescător și convergent la 0, luând valori între 0 și 1, iar funcția cosinus este descrescătoare pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $(y_n)_{n \geq 1}$ este monoton crescător. În plus, $(y_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, deoarece funcția cosinus este mărginită. Urmează că seria din enunț este convergentă, conform criteriului lui Abel.

3.2.3 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa cu ajutorul criteriului lui Dirichlet că pornindu-se de la seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, cu sirul sumelor partiale mărginit, prin înmulțirea termenului general $(-1)^n$ cu termenul general y_n al unui sir cu valori monoton descrescător și convergent la 0 se obține o serie convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *criteriul lui Leibniz*.

Teorema 3.22. Dacă $(y_n)_{n \geq 0}$ este un sir monoton descrescător și convergent la 0, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Fie $(S_n)_{n \geq 0}$ sirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Deoarece $S_{2k} = 1$, $S_{2k+1} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, urmează că $(S_n)_{n \geq 0}$ este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este convergentă. ■

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă.

Soluție. Se observă că

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deoarece $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este monoton descrescător și convergent la 0, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

Atunci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, fiind obținută prin înmulțirea seriei convergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ cu constanta -1 .

Monotonia unor subșiruri ale sirului sumelor parțiale

Să presupunem acum că $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este o serie alternantă, în condițiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz, adică $(y_n)_{n \geq 0}$ este un sir monoton descrescător și convergent la 0. Fie deasemenea $(S_n)_{n \geq 0}$ sirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$. Se observă atunci că $(S_{2k})_{k \geq 0}$ este monoton descrescător iar $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ este monoton crescător. În plus, are loc relația

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Într-adevăr,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

deci $(S_{2k})_{k \geq 0}$ este monoton descrescător. Similar,

$$S_{2(k+1)+1} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0,$$

deci $(S_{2k+1})_{k \geq 0}$ este monoton crescător. Deoarece orice termen al unui sir crescător este mai mic sau egal cu limita sirului, respectiv orice termen al unui sir descrescător este mai mare sau egal cu limita sirului, urmează că

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

3.2.4 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Totuși, seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

În același timp, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă, iar seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă.

În acest sens, o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă se va numi *absolut convergentă*, în vreme ce o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă se va numi *condiționat convergentă* sau *semiconvergentă*.

Din cele de mai sus, se observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este absolut convergentă, în vreme ce seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este convergentă (este condiționat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noțiunile de convergență și absolută convergență coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergența nu implică absolută convergență, după cum se poate deduce din exemplul seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de mai sus. Totuși, are loc implicația inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 3.23. Dacă o serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci ea este și convergentă.

Deoarece seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenței acesteia se pot utiliza criteriile de convergență pentru serii cu termeni pozitivi stabilite anterior. Acest lucru sugerează faptul că se poate obține convergența unei serii cu termeni oarecare demonstrând mai întâi convergența seriei modulelor cu ajutorul unui criteriu oarecare de convergență, convergența seriei date fiind atunci o consecință a absolutei ei convergențe.

Exercițiu. Studiați absoluta convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Cum

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$, urmărează că și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right|$ este convergentă, conform criteriului de comparație cu inegalități. De aici, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este absolut convergentă.

Exercițiu. Studiați absoluta convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Soluție. Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{1}{2} < 1$, urmărează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nu este absolut convergentă. Ea este doar convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

3.2.5 Produsul după Cauchy a două serii

Fie seriile cu termeni oarecare $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Vom numi *seria produs după Cauchy* a celor două serii seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definită prin

$$c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0 = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k},$$

pentru care c_n , termenul de ordin n , conține suma tuturor produselor de forma $x_k y_l$ în care suma indicilor celor doi factori x_k și y_l este n .

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ conține într-adevăr toate produsele de forma $x_k y_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, câte o singură dată, un astfel de produs fiind un termen al sumei prin care este definit c_{k+l} și numai al acesteia.

Totuși, acest procedeu de sumare nu asigură proprietatea de păstrare a convergenței a două serii. Mai precis, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nu este neapărat convergentă. În acest sens, să considerăm exemplul seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad \text{cu } x_n = y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

În primul rând, se observă cu ajutorul criteriului lui Leibniz că aceste serii sunt convergente. În plus,

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Cum

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1,$$

urmează că

$$|c_n| = \left| (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \right| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă, întrucât termenul general c_n nu tinde la 0.

Totuși, convergența seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă. În acest sens, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Mertens*.

Teorema 3.24. Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, măcar una dintre ele fiind și absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este și ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

În situația în care se îmbunătățește convergența seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, în sensul că ambele serii sunt asumate a fi absolut convergente, se îmbunătățește și convergența seriei produs după Cauchy, în sensul că seria produs devine și ea absolut convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Cauchy*.

Teorema 3.25. Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este și ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.

Cum pentru cazul seriilor cu termeni pozitivi proprietățile de convergență și absolută convergență coincid, are loc următoarea consecință.

Corolar 3.25.1. Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, atunci și seria produs după Cauchy a celor două serii este convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.

În fine, în situația în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ și seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sunt toate convergente, acest lucru este suficient pentru a arăta că suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Abel*.

Teorema 3.26. *Dacă seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$, iar seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ este de asemenea convergentă, cu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$, atunci $C = AB$.*

3.3 Estimarea restului de ordin p

Din punct de vedere practic, pentru calculul aproximativ al sumei unei serii convergente, este important să se cunoască o estimare a restului de ordin p al seriei, această estimare reprezentând de fapt o estimare a erorii cu care S_p , suma parțială de ordin p , aproximează suma S a seriei.

Pentru serii cu termeni pozitivi, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condițiile de aplicare ale criteriului radicalului, respectiv criteriului raportului.

Teorema 3.27. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq \frac{q^{p+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Demonstrație. Se observă că

$$R_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \geq 0 \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Deoarece $\sqrt[n]{x_n} \leq q$ pentru orice $n \geq N$, urmează că $x_n \leq q^n$ pentru orice $n \geq N$. Atunci

$$\begin{aligned} R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \\ &\leq q^{p+1} + q^{p+2} + \dots \\ &\leq q^{p+1}(1 + q + q^2 + \dots) \\ &\leq \frac{q^{p+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.28. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Pentru serii alternante, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condițiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz.

Teorema 3.29. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ o serie alternantă, unde $(y_n)_{n \geq 0}$ este un sir monoton descrescător și convergent la 0. Atunci

$$|R_p| \leq y_{p+1} \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Aplicații

3.1. Determinați sumele următoarelor serii folosind formula de sumare a progresiei geometrice

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{7^n};$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}};$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}};$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{3^{2n}};$
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3^{2n+1}};$
- 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{[3 + (-1)^n]^n}.$

3.2. *Tinând seama de relația*

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!}, \quad n \geq 0,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

3.3. *Tinând seama de relația*

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n+1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

3.4. *Tinând seama de relația*

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3.5. *Tinând seama de relația*

$$\frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}, \quad n \geq 1,$$

determinați suma seriei telescopice $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$.

3.6. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{1 + 3^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{5} - 1)$;
- 5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n + 2)}{n}$; 7) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n)$.

3.7. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $x_0 \in (0, 1)$.

1. Demonstrați că $x_n \in (0, 1)$ pentru orice $n \geq 0$.

2. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.

3. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

4. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă.

3.8. Demonstrați că nu există siruri $(x_n)_{n \geq 0}$ astfel ca seria $\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n - 2| + |3 - x_n|)$ să fie convergentă.

3.9. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi.

1. Demonstrați, folosind eventual criteriul de convergență Cauchy, că dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă.

2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă, rezultă neapărat că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă?

3.10. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. Demonstrați că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}}$ sunt de asemenea convergente.

3.11. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului de condensare

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^2}.$$

3.12. Demonstrați cu ajutorul criteriului de condensare că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ este convergentă dacă $p > 1$, respectiv divergentă dacă $p \leq 1$.

3.13. 1. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

2. Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}$, folosind eventual un criteriu de comparație.

3.14. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparație

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + (-1)^n}{n^2};$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin n}{n};$
- 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n};$
- 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};$
- 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n + (-1)^n)^2};$
- 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3};$
- 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 3n + 4};$
- 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^3 + n + 2};$
- 9) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1} \right)^2;$
- 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + \sqrt{n^2 + 1}}}{n^2};$
- 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{n}}};$
- 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1);$
- 13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{2^{2n} + 1};$
- 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right);$
- 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$

3.15. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al raportului

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!};$
- 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!};$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n};$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n};$
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)};$
- 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)};$
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}) \dots (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\sqrt[3]{\dots \sqrt[3]{3}}}).$

3.16. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al radicalului

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2} \right)^n;$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^{n+2};$
- 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n};$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^{n \ln n};$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5} \right)^{n^2};$
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2};$
- 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n^2};$
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2};$
- 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$
- 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3 + \frac{1}{n})^n};$
- 12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3n+5)^n};$
- 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n+1}}{(2n+3)^n};$
- 14) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^n;$
- 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n \right)^n.$

3.17. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{4 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 4n} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{(3 + \sqrt{1})(3 + \sqrt{2}) \dots (3 + \sqrt{n})};$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{3n+2}{3n+1};$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1};$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 6n}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)} \cdot \frac{1}{2^n + 1}.$

3.18. Discutați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrilor $a > 0$ și $p \in \mathbb{R}$

- $$\begin{aligned}
 1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a \frac{n^2 - n + 2}{n^2} \right)^n; \\
 4) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + a + a^2 + \dots + a^n)}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n)}; \\
 6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)}{n^n}; \quad 7) \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}.
 \end{aligned}$$

3.19. Discutați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrilor $a, b > 0$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+(n-1))}{b(b+1)(b+2)\dots(b+(n-1))}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n}.$$

3.20. Discutați convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d} \right)^n$ în funcție de valorile parametrilor $a, b, c, d > 0$.

3.21. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Dirichlet

- $$\begin{aligned}
 1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\ln(n+1)}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\ln(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1) \sin 2n; \\
 5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos x}{n}; \\
 9) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n^3}; \quad 10) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \sin n^2}{\sqrt[4]{n}}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}; \\
 13) & \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \sin nx \cos nx, n \in \mathbb{R}; \\
 14) & \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sin(n + \frac{1}{2}).
 \end{aligned}$$

3.22. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Abel

- $$\begin{aligned}
 1) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin \frac{1}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \sqrt[n]{n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n; \\
 5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \\
 8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{n}.
 \end{aligned}$$

3.23. Studiați convergența următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n + \ln n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{3}-1); \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n};$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{6^n}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+3)}}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + \ln^2 n};$$

$$9) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+3} \left(\frac{3n+2}{6n+1} \right)^n.$$

3.24. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 + \cos n}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(2^n + 3)}{\ln(3^n + 2)}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+4)};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{2 + (-1)^n}.$$

3.25. Studiați convergența absolută a următoarelor serii

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + n + 1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{n \sqrt{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n \ln^2 n}; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n^2 + \sin n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(-1)^n}}{n^2 + (-1)^n}.$$

3.26. Discutați convergența următoarelor serii în funcție de valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{a+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + 2^n}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n} + 1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + 1} - an); \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+3}{2a+1} \right)^n; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n + \sqrt{n}}.$$

3.27. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$, unde

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}$$

este divergentă.

Capitolul 4

PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ȘI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$

În cele ce urmează, vom studia unele proprietăți ale mulțimilor din $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, vom caracteriza „locul” unui punct în cadrul unei mulțimi (în limba greacă, „topos” înseamnă „loc”) sau „apropierea” unui punct de o mulțime dată, clasificând de asemenea submulțimile lui \mathbb{R} cu un număr infinit de elemente după cum aceste elemente pot fi numărate sau nu.

4.1 Proprietăți topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.1.1 Puncte de acumulare

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct de acumulare* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte ale lui A diferite de a , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

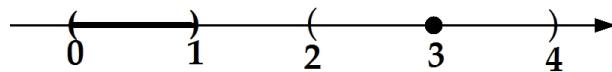
Exemplu. 1. $a = 0$ este punct de acumulare al mulțimii $A = (0, 1)$ deoarece orice vecinătate V a lui 0 conține un interval $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, deci și puncte ale lui $(0, 1)$ diferite de 0. Altfel spus,

$$(V \setminus \{0\}) \cap A \supset (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$



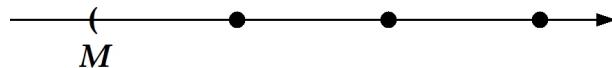
2. $a = 3$ nu este punct de acumulare al mulțimii $A = (0, 1) \cup \{3\}$ deoarece vecinătatea $V = (2, 4)$ a lui 3 nu conține puncte ale lui A diferite de 3. Altfel spus,

$$(V \setminus \{3\}) \cap A = \emptyset.$$



3. $a = +\infty$ este punct de acumulare al mulțimii $A = \mathbb{N}$ deoarece orice vecinătate V a lui $+\infty$ conține un interval $I = (M, +\infty]$, $M > 0$, deci și puncte ale lui \mathbb{N} diferite de $+\infty$. Altfel spus,

$$(V \setminus \{+\infty\}) \cap A = \{[M] + 1, [M] + 2, \dots\} \neq \emptyset.$$



Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecințe privind localizarea punctelor de acumulare. Mai întâi, un punct de acumulare al unei mulțimi A poate să nu fie element al acelei mulțimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulțimi A este neapărat punct de acumulare al acelei mulțimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulțimi pot fi și la infinit.

Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii A se numește atunci *mulțimea derivată* a lui A și se notează A' , în vreme ce un element al unei mulțimi A care nu este punct de acumulare al acelei mulțimi se numește *punct izolat* al lui A . De aici se poate observa că $a \in A$ este punct izolat al lui A dacă există o vecinătate V a lui A care nu conține puncte din A .

Exemplu. 1. Dacă $A = (0, 3) \cup \{5\}$, atunci $A' = [0, 3]$, iar 5 este punct izolat al lui A .

- 2. Dacă $A = \{0, 1, 2\}$, atunci $A' = \emptyset$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.
- 3. Dacă $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, atunci $A' = \{0\}$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiția unui punct de acumulare vecinătăți V din ce în ce mai mici se obțin puncte ale lui A diferite de a care sunt din ce în ce mai aproape de a . În acest mod se poate obține următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul sirurilor, exprimând faptul că o mulțime care are un punct de acumulare a conține elemente „oricât de apropiate” de a și diferite de a .

Teorema 4.1. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al lui A dacă și numai dacă există un sir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A , diferite de a , cu limita a .

Din cele de mai sus, observând că sirul $\{a_n\}_{n \geq 0}$ poate fi ales cu termenii diferenți între ei, deducem că o mulțime A care are un punct de acumulare a este în mod necesar infinită. În particular, o mulțime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeași observație se obține în mod imediat următorul rezultat.

Corolar 4.1.1. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al unei mulțimi $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ dacă și numai dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ conține o infinitate de elemente ale lui A .

Pot fi demonstrează cu ajutorul celor de mai sus următoarele proprietăți de calcul.

Teorema 4.2. Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $A \subseteq B$, atunci $A' \subseteq B'$.
2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
3. $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$.

Faptul că $(A \cap B)'$ și $A' \cap B'$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ și $B = (1, 2)$. Atunci $A' = [0, 1]$ și $B' = [1, 2]$, deci $A' \cap B' = \{1\}$. Totuși, $A \cap B = \emptyset$, deci $(A \cap B)' = \emptyset$, iar $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

4.1.2 Puncte aderente

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct aderent* al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte ale lui A , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiția unui punct aderent este mai puțin restrictivă decât definiția unui punct de acumulare (este necesar ca $V \cap A \neq \emptyset$, în loc de $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$, când cea din urmă relație este satisfăcută, fiind satisfăcută în mod evident și cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulțimi A este în același timp și punct aderent al acelei mulțimi.

De asemenea, deoarece $a \in V$ pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \in V \cap A$ pentru orice $a \in A$ și orice $V \in \mathcal{V}(a)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, orice $a \in A$ este punct aderent al lui A .

Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii A se numește atunci *aderența* sau *închiderea* mulțimii A și se notează \overline{A} . Din cele de mai sus se observă că $A \subseteq \overline{A}$ și $A' \subseteq \overline{A}$.

În mod analog Teoremei 4.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că A conține, pe lângă elementele din A , și limitele de siruri cu termeni din A .

Teorema 4.3. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct aderent al lui A dacă și numai dacă există un sir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A , cu limita a .

Exemplu. 1. Dacă $A = \{0, 1, \dots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$.

2. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece orice număr real este limita unui sir de numere raționale, $+\infty$ este limita sirului $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = n \in \mathbb{Q}$, iar $-\infty$ este limita sirului $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = -n \in \mathbb{Q}$.

Cu ajutorul celor de mai sus se pot demonstra următoarele proprietăți de calcul.

Teorema 4.4. Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți.

1. $\overline{A} = A \cup A'$.
2. Dacă $A \subseteq B$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Faptul că $\overline{A \cap B}$ și $\overline{A} \cap \overline{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ și $B = (1, 2)$. Atunci $\overline{A} = [0, 1]$, $\overline{B} = [1, 2]$, deci $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Totuși, $A \cap B = \emptyset$, deci $\overline{A \cap B} = \emptyset$, iar $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4.1.3 Puncte interioare

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct interior* al mulțimii A dacă A este vecinătate pentru a . Deoarece A este vecinătate pentru a , rezultă că $a \in A$, adică un punct interior al unei mulțimi aparține în mod necesar acelei mulțimi.

Conform definiției vecinătății unui punct, urmează că $a \in \mathbb{R}$ este punct interior al lui A dacă există (c, d) astfel ca $a \in (c, d) \subseteq A$, respectiv $+\infty$ este punct interior lui A dacă există $(c, \infty]$ astfel ca $+\infty \in (c, \infty] \subseteq A$, iar $-\infty$ este punct interior lui A dacă există $[-\infty, d)$ astfel ca $-\infty \in [-\infty, d) \subseteq A$. De asemenea, dacă A nu conține intervale, atunci A nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis I ” vom înțelege un interval de tip (c, d) , $(c, \infty]$ sau $[-\infty, d)$, potrivit cu situația în care este utilizat.

Exemplu. 1. $a = \frac{1}{2}$ este punct interior al mulțimii $A = [0, 1] \cup 2$ deoarece $a \in (0, 1) \subseteq A$, dar $a = 0$ și $a = 2$ nu sunt puncte interioare ale lui A , întrucât A nu conține intervale deschise în care se află 0 și 2, neconținând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.

2. $A = \mathbb{Q}$ nu are puncte interioare deoarece nu conține intervale.

Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii A se numește atunci *interiorul* mulțimii A și se notează $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.5. Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți.

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
2. Dacă $A \subseteq B$, atunci $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.
3. $\widehat{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\widehat{A \cup B} \supseteq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Faptul că $\widehat{A \cup B}$ și $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ și $B = [1, 2)$. Atunci $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, $\overset{\circ}{B} = (1, 2)$, deci $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (0, 1) \cup (1, 2)$. Totuși, $A \cup B = (0, 2)$, deci $A \overset{\circ}{\cup} B = (0, 2)$, iar $\widehat{A \cup B} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Un alt tip de legătură între aderența și interiorul unei mulțimi, exprimat cu ajutorul mulțimilor complementare, este precizat în teorema următoare. În cele ce urmează, pentru o mulțime M dată, prin cM se va înțelege complementara mulțimii M în raport cu $\overline{\mathbb{R}}$, adică mulțimea $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$. De asemenea, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *punct exterior* al mulțimii M dacă cM este vecinătate pentru a .

Teorema 4.6. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalitățile

1. $c\overline{A} = \widehat{cA}$;
2. $c\overset{\circ}{A} = \overline{cA}$.

Corolar 4.6.1. Fie $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalitățile

1. $\overline{B} = c(\widehat{cB})$;
2. $\overset{\circ}{B} = c(\overline{cB})$.

Demonstrație. Demonstrațiile celor două egalități se obțin în mod imediat punând $B = cA$ în Teorema 4.6, ținând seama că $c(cB) = B$. ■

4.1.4 Puncte de frontieră

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește *punct de frontieră* al lui A dacă $a \in \overline{A} \cap \overline{cA}$.

Din definiția de mai sus se observă că un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de frontieră al lui A dacă este limita atât a unui sir de elemente din A cât și a unui sir de elemente din cA , adică există două siruri $(a_n)_{n \geq 0} \subseteq A$ și $(b_n)_{n \geq 0} \subseteq cA$ astfel ca $a_n \rightarrow a$ și $b_n \rightarrow a$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Mulțimea tuturor punctelor de frontieră ale lui A se numește atunci *frontiera* lui A și se notează $\text{Fr } A$ sau ∂A .

Are loc de asemenea următoarea proprietate de calcul, utilă în determinarea frontierei unei mulțimi.

Teorema 4.7. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstrație. Au loc relațiile

$$\text{Fr } A = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{A} \cap \overset{\circ}{cA} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

de unde concluzia. ■

- Exemplu.**
1. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$, $\overset{\circ}{A} = (0, 1)$, deci $\text{Fr } A = \{0, 1\}$.
 2. Dacă $A = \{1, 2, \dots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (deoarece A nu conține intervale), deci $\text{Fr } A = A$.
 3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $\text{Fr } A = \overline{\mathbb{R}}$.

4.1.5 Mulțimi deschise, mulțimi închise, mulțimi compacte

Mulțimi deschise

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *deschisă* dacă este mulțimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său.

- Exemplu.**
1. Dacă $A = (0, 1)$, atunci ea este deschisă, fiind vecinătate pentru orice $a \in (0, 1)$.
 2. Dacă $A = [0, 2)$, atunci A nu este deschisă, încărcând că nu este vecinătate pentru $a = 0$.

- 3. Dacă $A = \mathbb{N}$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru niciun punct al său, neconținând intervale.
- 4. Dacă $A = \emptyset$, ea este deschisă prin definiție. Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \in (a-1, a+1) \subseteq \mathbb{R}$, deci \mathbb{R} este vecinătate pentru a . Cum a este arbitrar, \mathbb{R} este deschisă. Dacă $A = \bar{\mathbb{R}}$, la observația anterioară se adaugă faptul că $+\infty \in (0, \infty] \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, iar $-\infty \in [-\infty, 0) \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, deci $\bar{\mathbb{R}}$ este de asemenea deschisă.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulțimilor deschise prin intermediul interiorului acestora.

Teorema 4.8. *Fie $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Atunci A este deschisă dacă și numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$.*

În particular, din rezultatul de mai sus se obține ușor faptul că $I_1 = (c, d)$, $I_2 = (c, +\infty)$, $I_3 = (c, +\infty]$, $I_4 = [-\infty, d]$ și $I_5 = (-\infty, d)$ sunt mulțimi deschise pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$.

Se va observa în cele ce urmează că interiorul unei mulțimi A este mulțime deschisă și este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A , în sensul că oricare altă mulțime deschisă inclusă în A este conținută în $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.9. *Fie $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Atunci $\overset{\circ}{A}$ este o mulțime deschisă, iar $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$. Mai mult, dacă $B \subseteq A$ este o altă mulțime deschisă, atunci $B \subseteq \overset{\circ}{A}$.*

Operații cu mulțimi deschise

Teorema 4.10. *Au loc următoarele proprietăți.*

1. *Orice reuniune de mulțimi deschise este mulțime deschisă.*
2. *Orice intersecție finită de mulțimi deschise este mulțime deschisă.*

Se poate observa că o intersecție infinită de mulțimi deschise nu este neapărat mulțime deschisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i \geq 1} : A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$. Atunci A_i este deschisă pentru orice $i \geq 1$, dar $\bigcap_{i \geq 1} A_i = \{0\}$, care nu este mulțime deschisă.

Exemplu. $A = (0, 1) \cup (2, 4)$ este deschisă, ca reuniune a mulțimilor deschise $(0, 1)$ și $(2, 4)$.

Mulțimi închise

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *închisă* dacă cA este deschisă.

Se poate observa imediat că are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulțimilor închise prin intermediul aderenței acestora.

Teorema 4.11. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este închisă dacă și numai dacă $A = \overline{A}$.

Demonstrație. Au loc următoarele echivalențe

$$A \text{ închisă} \Leftrightarrow cA \text{ deschisă} \Leftrightarrow \overset{\circ}{cA} \Leftrightarrow cA = c\overline{A} \Leftrightarrow A = \overline{A}. \quad \blacksquare$$

Din teorema de mai sus și din teorema de caracterizare a mulțimilor închise cu ajutorul limitelor de siruri (Teorema 4.3) se poate observa că $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este închisă dacă și numai dacă ea conține limitele tuturor sirurilor cu elemente din A .

Exemple.

1. $A = [0, 1]$ este mulțime închisă, deoarece $\overline{A} = A$. Altfel, $cA = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$, care este mulțime deschisă, fiind reuniunea mulțimilor deschise $[-\infty, 0)$ și $(0, \infty]$.
2. $A = \mathbb{R}$ nu este mulțime închisă, deoarece $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}} \neq A$. Altfel, A nu conține $+\infty$, care este limita sirului $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = n$ cu elemente din A .
3. $A = (-\infty, 0]$ nu este mulțime închisă, deoarece $cA = \{-\infty\} \cup (0, \infty]$, care nu este mulțime deschisă, întrucât nu este vecinătate a lui $+\infty$. Altfel, $\overline{A} = [-\infty, 0] \neq A$, sau A nu conține $-\infty$, care este limita sirului $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = -n$ cu elemente din A .
4. \emptyset este mulțime închisă deoarece $c\emptyset = \overline{\mathbb{R}}$, care este mulțime deschisă. De asemenea, $\overline{\mathbb{R}}$ este mulțime închisă, deoarece $c\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$, care este mulțime deschisă.

Din exemplele de mai sus se poate observa că \emptyset și $\overline{\mathbb{R}}$ sunt atât mulțimi deschise, cât și închise. Se poate demonstra că aceste mulțimi sunt singurele care au simultan cele două proprietăți.

Prin analogie cu Teorema 4.9, se va observa că aderența unei mulțimi date A este mulțime închisă și este cea mai mică mulțime închisă care include pe A , în sensul că oricare altă mulțime închisă care include pe A , conține și \overline{A} .

Teorema 4.12. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci \overline{A} este o mulțime închisă, iar $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Mai mult, dacă $B \supset A$ este o altă mulțime închisă, atunci $B \supset \overline{A}$.

Operații cu mulțimi închise

Teorema 4.13. Au loc următoarele proprietăți.

1. Orice reuniune finită de mulțimi închise este mulțime închisă.
2. Orice intersecție de mulțimi închise este mulțime închisă.

Se poate observa că o reuniune infinită de mulțimi închise nu este neapărat mulțime închisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i \geq 0} : A_i = [-i, i]$. Atunci A_i este închisă pentru orice $i \geq 0$, dar $\bigcup_{i \geq 0} A_i = \mathbb{R}$, care nu este mulțime închisă.

Exemplu. $A = [-1, 2] \cup [4, 5]$ este închisă, ca reuniune a mulțimilor închise $[-1, 2]$ și $[4, 5]$.

Mulțimi compacte

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *compactă* dacă este închisă și mărginită.

Exemplu. 1. $A = [0, 1]$ este compactă, fiind închisă și mărginită.

2. $A = [0, 2] \cup [4, 6]$ este compactă, fiind închisă (ca reuniune finită de mulțimi închise) și mărginită.
3. $A = [0, \infty]$ nu este compactă, nefiind mărginită.
4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ nu este compactă, nefiind închisă, deoarece limita sirului $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ este 0, element neconținut în mulțimea A .

Operații cu mulțimi compacte

Teorema 4.14. Au loc următoarele proprietăți.

1. Orice reuniune finită de mulțimi compacte este mulțime compactă.
2. Orice intersecție de mulțimi compacte este mulțime compactă.

Teorema 4.15. Fie $A \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Atunci A este compactă dacă și numai dacă din orice sir de elemente din A se poate extrage un subșir convergent la un element din A .

Mulțimi dense

Fie $A, B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *densă* în B dacă orice element al lui B este limita unui sir cu elemente din A , adică $B \subseteq \bar{A}$. Dacă $B = \bar{\mathbb{R}}$, adică orice element al lui $\bar{\mathbb{R}}$ este limita unui sir cu elemente din A , atunci A se numește *densă*.

Din definiția de mai sus, se observă că dacă A este densă, atunci $\bar{A} = \bar{\mathbb{R}}$. Într-adevăr, conform definiției, $\bar{\mathbb{R}} \subseteq \bar{A}$, iar cum $\bar{A} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$, urmează că $\bar{A} = \bar{\mathbb{R}}$. De asemenea, pentru a se demonstrează că A este densă este suficient să se arate că $\bar{A} \supset \mathbb{R}$. În acest sens, dacă $\bar{A} \supset \mathbb{R}$, atunci $\bar{\bar{A}} \supset \bar{\mathbb{R}}$, iar cum $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, urmează că $\bar{A} \supset \bar{\mathbb{R}}$.

- Exemplu.**
1. \mathbb{Q} este densă, deoarece orice număr real este limita unui sir de numere raționale.
 2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este de asemenea densă, deoarece orice număr real este limita unui sir de numere iraționale. Altfel,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} &= \overline{\bar{\mathbb{R}} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})} = \overline{c(\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\})} \\ &= c\mathbb{Q} \cup \overset{\circ}{\overline{\{-\infty, +\infty\}}} = c\emptyset = \bar{\mathbb{R}},\end{aligned}$$

deci $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este densă. S-a folosit faptul că $\mathbb{Q} \cup \overset{\circ}{\overline{\{-\infty, +\infty\}}} = \emptyset$, deoarece $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nu conține intervale.

3. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ este densă în $[0, 1]$, deoarece $\overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} = \bar{\mathbb{Q}} \cap \bar{[0, 1]} = \bar{\mathbb{R}} \cap [0, 1] = [0, 1]$.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ nu este densă în $[0, 1]$, deoarece $\overline{A} = A \cup \{0\} \neq [0, 1]$.

Denumirea de mulțime densă este justificată de următoarea teoremă, care afirmă faptul că pentru oricare două numere reale date, o mulțime densă conține măcar un element situat între acestea.

Teorema 4.16. Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este densă dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, există $a \in A$ astfel ca $x < a < y$.

- Exemple.**
1. \mathbb{Z} nu este densă, deoarece nu conține niciun punct situat între 0 și 1.
 2. $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$ nu este densă, deoarece nu conține niciun punct situat între -1 și 1.

4.2 Proprietăți de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.2.1 Numere cardinale

Fie $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A, B au același cardinal și vom nota $A \sim B$ dacă există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow B$. Se observă că relația „~” astfel definită între mulțimi este relație de echivalență, întrucât este

1. reflexivă, deoarece $A \sim A$, cu $f : A \rightarrow A$, $f(x) = x$.
2. simetrică, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \rightarrow B$ bijectivă, atunci și $B \sim A$, cu $f^{-1} : B \rightarrow A$ bijectivă.
3. tranzitivă, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \rightarrow B$ bijectivă, iar $B \sim C$, cu $g : B \rightarrow C$ bijectivă, atunci $A \sim C$, cu $g \circ f : A \rightarrow C$ bijectivă.

Mulțimi finite

O mulțime A va fi numită *finită* dacă este mulțimea vidă (și atunci are cardinal 0, sau are 0 elemente) sau are același cardinal cu $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$ oarecare (și atunci se spune că are cardinal n , sau are n elemente).

4.2.2 Mulțimi numărabile

Fie $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *numărabilă* dacă există o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. În această situație, cardinalul mulțimii A se va nota cu \aleph_0 (alef zero). O mulțime care nu este numărabilă se va numi *nenumărabilă*.

Dacă notăm $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se observă că A este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui sir cu termeni distincți, anume

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

O mulțime A se va numi *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă. Se observă atunci că A este cel mult numărabilă dacă și numai dacă există o funcție injectivă $f : A \rightarrow \mathbb{N}$.

- Exemplu.**
1. $A = \mathbb{N}$ este numărabilă. În acest caz, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n$ este funcția căutată. Altfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui sir cu termeni distincți.
 2. $A = \mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui sir cu termeni distincți. Altfel,

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

este bijectivă.

Din Exemplul 2, în care s-a construit o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, se observă că o mulțime infinită poate avea același cardinal ca și o submulțime proprie a sa. De asemenea,

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad f_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sunt bijective, deci \mathbb{R} , $(0, \infty)$ și $(-1, 1)$ au același cardinal. De fapt, toate intervalele deschise (a, b) au același cardinal, întrucât au același cardinal cu $(-1, 1)$, acest lucru observându-se din faptul că

$$f_3 : (a, b) \rightarrow (-1, 1), \quad f_3(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

este bijectivă. Similar, intervalele (a, ∞) au același cardinal cu $(0, \infty)$ întrucât

$$f_4 : (a, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f_4(x) = x - a$$

este bijectivă, iar intervalele $(-\infty, b)$ au același cardinal cu $(-\infty, 0)$ întrucât

$$f_5 : (-\infty, b) \rightarrow (-\infty, 0), \quad f_5(x) = x - b$$

este bijectivă. Cum $(0, \infty)$ și $(-\infty, 0)$ au același cardinal, întrucât

$$f_6 : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0), \quad f_6(x) = -x$$

este bijectivă, urmează că mulțimile \mathbb{R} , (a, ∞) , $(-\infty, b)$, (a, b) au același cardinal pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$. Vom demonstra ulterior că aceste mulțimi nu sunt numărabile.

Operații cu mulțimi numărabile

Se poate observa că o reuniune finită de mulțimi numărabile este numărabilă. În acest sens, fie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ o familie finită de mulțimi numărabile. Atunci A_i poate fi pusă sub forma unui sir cu termeni distincți, $A_i = \{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \dots\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. De aici,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{a_0^1, a_0^2, \dots, a_0^n, a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n, \dots\}.$$

Eliminând eventualele repetări, elementele mulțimii $\bigcup_{i=1}^n A_i$ pot fi scrise sub forma unui sir cu termeni distincți, iar $\bigcup_{i=1}^n A_i$ este numărabilă. Cu un raționament asemănător, se poate demonstra că dacă F este finită iar A este numărabilă, atunci $A \cup F$ este numărabilă. De asemenea, dacă A este numărabilă, atunci orice submulțime a sa este finită sau numărabilă.

Vom studia acum situația în care se face reuniunea unei familii numărabile de mulțimi numărabile.

Teorema 4.17. *Fie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ o familie de mulțimi numărabile. Atunci $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ este numărabilă.*

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra că mulțimea numerelor raționale este numărabilă.

Teorema 4.18. \mathbb{Q} este numărabilă.

4.2.3 Mulțimi de puterea continuului

Vom demonstra în cele ce urmează că intervalul $[0, 1]$ „are mai multe elemente” decât \mathbb{Q} , proprietate care nu este evidentă intuitiv, în sensul că elementele lui \mathbb{Q} se pot număra, iar elementele lui $[0, 1]$ nu, deși este evident că ambele mulțimi au un număr infinit de elemente.

Teorema 4.19. Intervalul $[0, 1]$ nu este o mulțime numărabilă.

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că $[0, 1]$ este o mulțime numărabilă. Atunci

$$[0, 1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

intervalul $[0, 1]$ putându-se pune sub forma unui sir cu termeni distincți.

Notăm $I_0 = [0, 1]$ și împărțim acest interval în subintervalele $[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$ de lungimi egale; fie I_1 un interval dintre acestea care nu-l conține pe x_0 . Împărțim acum I_1 în trei subintervale de lungimi egale și fie I_2 un interval dintre acestea care nu-l conține pe x_1 . Procedând în mod inductiv, obținem un sir de intervale $(I_n)_{n \geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$, astfel ca

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots$$

și I_n nu conține x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Sirul de intervale $(I_n)_{n \geq 0}$ este descrescător, cu lungimea tinzând la 0, intersecția tuturor intervalelor fiind un punct.

Urmează că $\bigcap_{n \geq 0} I_n = \{x\}$, iar cum $x \in [0, 1]$, $x = x_{n_0}$ pentru $n_0 \in \mathbb{N}$ oarecare, ceea ce este o contradicție, deoarece atunci $x \notin I_{n_0+1}$, deci $x \notin \bigcap_{n \geq 0} I_n$. ■

Vom nota cardinalul intervalului $[0, 1]$ cu c (puterea continuului), înțelegând că o mulțime cu cardinal c „are mai multe elemente” decât o mulțime numărabilă, de cardinal \aleph_0 . Cum

$$f : [0, 1] \rightarrow (0, 1), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ x, & \text{în rest} \end{cases}$$

este bijectivă, urmează că $[0, 1]$ și $(0, 1)$ au același cardinal. Cu ajutorul unei construcții similare se poate demonstra că $[0, 1]$ și $[0, 1)$ au același cardinal. Din considerațiile enunțate anterior se deduce că atât mulțimea \mathbb{R} cât și toate intervalele $[a, b]$, (a, b) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) au același cardinal c .

Din cele ce urmează se va observa că numerele iraționale, fiind în număr mai mare decât cele raționale, sunt „responsabile” pentru faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

Corolar 4.19.1. *Mulțimea I a numerelor iraționale nu este numărabilă.*

Demonstrație. Presupunem prin reducere la absurd că I este numărabilă. Atunci, deoarece $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, urmează că \mathbb{R} este numărabilă, ca reuniunea unui număr finit de mulțimi numărabile, contradicție. ■

Aplicații

4.1. Precizați interiorul următoarelor mulțimi:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 1) \cup [2, 3]; & A_2 &= [0, 2) \cup (4, 5] \cup \{6\}; & A_3 &= [2, \infty); & A_4 &= [-\infty, 5]; \\ A_5 &= \mathbb{Q} \cap [1, 2]; & A_6 &= (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [2, 3]; & A_7 &= \{x \in \mathbb{R}; 4 \leq x < 8\}; & A_8 &= \mathbb{R}^*; \\ A_9 &= \{0, 1, 2, \dots, 10\}. \end{aligned}$$

4.2. Precizați mulțimea derivată și aderența următoarelor mulțimi:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0, 1) \cup (1, 2); & A_2 &= (1, 2) \cup (3, 4) \cup \{7\}; & A_3 &= \mathbb{N}; & A_4 &= (2, \infty); \\ A_5 &= \mathbb{Q} \cap (-1, 1); & A_6 &= (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, 2); & A_7 &= \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\}; & A_8 &= \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots\right\}. \end{aligned}$$

4.3. Fie $A = [0, 1) \cup (1, 2] \cup \{6\}$. Determinați A' , \overline{A} , $\overset{\circ}{A}$, $\text{Fr } A$. Este A deschisă? Dar închisă sau compactă?

4.4. Demonstrați că $A = \bigcup_{i \geq 0} \left(\frac{2i+1}{i+1}, \frac{2i+3}{i+1} \right)$ este mulțime deschisă.

4.5. Demonstrați că $A = \bigcap_{i=1}^{10} \left[\frac{2n+1}{n+1}, \frac{3n+5}{n+2} \right]$ este mulțime închisă.

4.6. Precizați dacă următoarele mulțimi sunt dense în mulțimile precizate:

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{Z} \text{ în } B_1 = \mathbb{R}; & A_2 &= \mathbb{N} \text{ în } B_2 = \mathbb{Z}; & A_3 &= [0, 1] \text{ în } B_3 = [-1, 2]; & A_4 &= \mathbb{Q}^* \text{ în } B_4 = \mathbb{R}; \\ A_5 &= \{0, 1, 2, \dots, 10\} \text{ în } B_5 = [0, 10]; & A_6 &= \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right\} \text{ în } B_6 = [0, 1]. \end{aligned}$$

4.7. Precizați care dintre următoarele mulțimi sunt numărabile:

$$A_1 = [0, 1) \cup (2, 3]; \quad A_2 = 2\mathbb{Z} = \{x; x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}; \quad A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \quad A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}; \quad A_5 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}; \quad A_6 = \mathbb{R}^n; \quad A_7 = \mathbb{Q}^n.$$

Capitolul 5

LIMITE DE FUNCȚII

5.1 Limita unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropie și ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări și restricții. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcției f pentru argumente apropiate de x_0 și nu valoarea $f(x_0)$ însăși. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0 , adică nu este necesar ca x_0 să aparțină lui D . Totuși, este necesar ca D să conțină valori x ale argumentului oricără de apropiate de x_0 , adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D . Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcția f are limită $l \in \bar{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota $f(x) \rightarrow l$ pentru $x \rightarrow x_0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, spunându-se și că $f(x)$ tinde la l pentru x tinzând la x_0 .

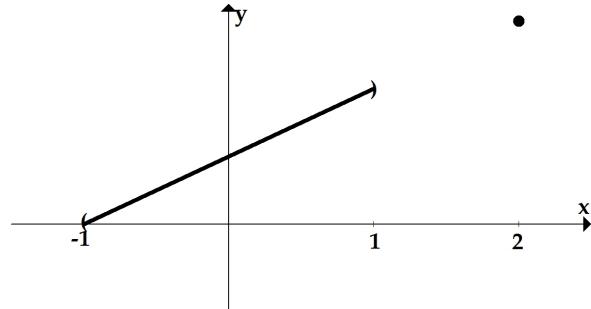
Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D , adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D , atunci problema existenței limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conține valori ale argumentului x oricără de apropiate de x_0 .

De asemenea, într-un mod similar demonstrației rezultatului corespunzător privind limite de siruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcții există, atunci aceasta este unică.

Exemplu. 1. Fie $f : (-1, 1) \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

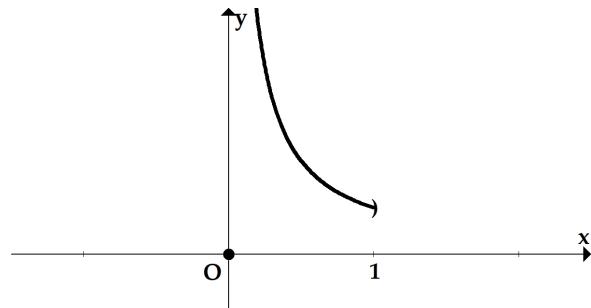
Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, iar

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiție, chiar dacă nu aparține acestuia. În același timp, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiție. În mod similar, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiție.



2. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcție poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcției în acel punct. În general, dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla ca $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică valoarea limitei unei funcții într-un punct poate fi diferită de valoarea funcției în acel punct. Funcțiile care verifică egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc *funcții continue* în x_0 și vor fi studiate în capitolul următor.



5.1.1 Caracterizări analitice

Să presupunem pentru moment că $x_0 \in \mathbb{R}$ și să considerăm vecinătăți V ale lui l de tipul $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ dacă l este finit, respectiv $(M, +\infty]$ dacă $l = +\infty$ și $[-\infty, -M]$ dacă $l = -\infty$. Conform definiției de mai sus, obținem următoarea *teoremă de caracterizare analitică* a limitei unei funcții într-un punct, numită și *teorema de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$* .

Teorema 5.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmații.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) > M$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_M$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) < -M$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_M$.

Pentru $x_0 = +\infty$, se obține în mod similar următoarea caracterizare a funcțiilor cu limită la $+\infty$, un rezultat asemănător având loc și pentru $x_0 = -\infty$.

Teorema 5.2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $+\infty \in D'$. Atunci au loc următoarele afirmații.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$, $x > \delta_\varepsilon$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) > M$ pentru orice $x \in D$, $x > \delta_M$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) < -M$ pentru orice $x \in D$, $x > \delta_M$.

5.1.2 Teorema de caracterizare cu șiruri

Teorema următoare, denumită și *teorema de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct* sau *teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcții într-un punct*, permite transferul unor proprietăți și reguli de calcul ale limitelor de șiruri la limite de funcții.

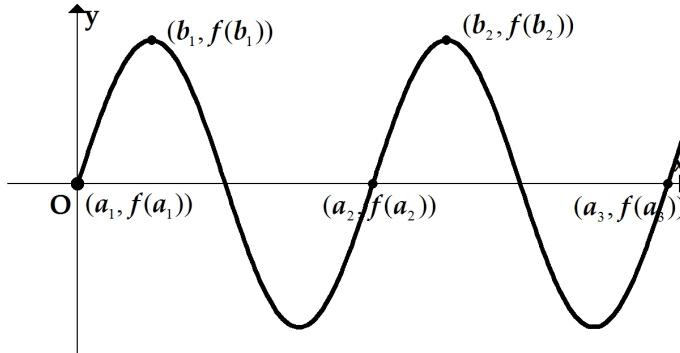
Teorema 5.3. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Atunci f are limită l în x_0 (finită sau infinită) dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limită x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limită l .

Condiții suficiente ca o funcție să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condițiile următoare, atunci funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu are limită în $x_0 \in D'$.

- Există două șiruri $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n, b_n \in D$, $a_n, b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar șirurile de valori $(f(a_n))_{n \geq 0}$, $(f(b_n))_{n \geq 0}$ au limite diferite l_1 și l_2 .
- Există un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ nu are limită.

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$. În acest sens, să observăm că pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(f(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1.



De fapt, cu un raționament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

Teorema 5.4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodică și neconstantă. Atunci f nu are limită la $+\infty$ sau $-\infty$.

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcțiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la $\pm\infty$.

5.1.3 Limite laterale

În situația în care argumentul x se apropie de punctul x_0 dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât x_0 , se obține conceptul de limită laterală.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la stânga al mulțimii D), vom spune că funcția f are limită la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_s)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x < x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcția f are limită la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la dreapta al mulțimii D) dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_d)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x > x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga și la dreapta ale unei funcții într-un punct x_0 se mai numesc și *limite laterale* în x_0 .

Caracterizarea cu şiruri a limitelor laterale într-un punct

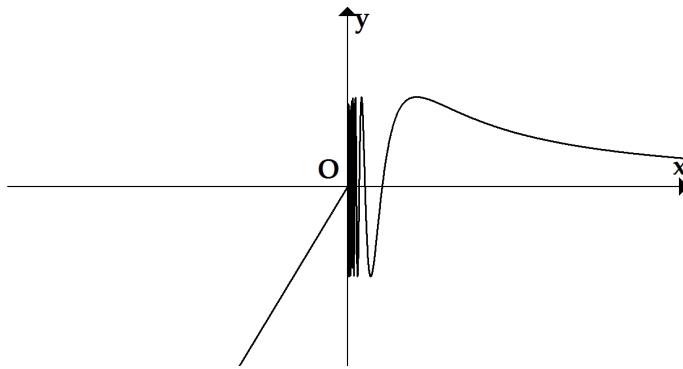
În mod analog teoremei de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcții într-un punct se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 5.5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Au loc următoarele afirmații.

1. Funcția f are limita la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă și numai dacă pentru orice sir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n < x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că sirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l_s .
2. Funcția f are limita la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ dacă și numai dacă pentru orice sir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n > x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că sirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l_d .

Se poate observa că existența uneia dintre limitele laterale într-un punct nu antrenează automat și existența celeilalte. În anumite situații, se poate întâmpla ca una dintre limitele laterale să existe, în timp ce problema existenței celeilalte nici măcar să nu aibă sens.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Se observă că, pentru $x_0 = 0$, $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x = 0$. Totuși, l_d nu există, deoarece pentru $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $a_n \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, $a_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, deci $f(a_n) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, în vreme ce pentru $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $b_n \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, $b_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, deci $f(b_n) \rightarrow 1$ pentru $n \rightarrow \infty$.



2. Fie $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Se observă că pentru $x_0 = 0$, $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$,

în vreme ce problema existenței lui l_s nu are sens, deoarece 0 nu este punct de acumulare la stânga al lui $[0, 2]$.

Caracterizarea limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate observa că definiția limitei într-un punct conține condiții mai restrictive decât definițiile limitelor laterale, fiind necesar ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, nu doar pentru $x \in U \cap D$, $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$). Urmează că dacă x_0 este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al unei mulțimi D , iar funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita l în x_0 , atunci are în mod necesar și limite laterale în x_0 și acestea sunt egale tot cu l . Reciproca nu este neapărat adevărată, în sensul că o funcție poate avea limite laterale într-un punct fără să aibă neapărat limită în acel punct.

Totuși, se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcția are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

Teorema 5.6. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică x_0 este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al mulțimii D). Atunci f are limită în x_0 dacă și numai dacă f are limite laterale în x_0 și

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ este egală cu valoarea comună a limitelor.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca f să aibă limită în $x_0 = 2$.

Soluție. Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax + 1) = 2a + 1; \quad l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5,$$

pentru existența limitei funcției f în $x_0 = 2$ este necesar și suficient ca $2a + 1 = 5$, deci $a = 2$.

5.1.4 Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct

Criteriu de existență a unei limite finite

Ca și în cazul limitelor de siruri, pentru a arăta că limita unei funcții $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ în $x_0 \in D'$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferența dintre valorile $f(x)$ ale funcției pentru x apropiat de x_0 și limita l . În situația în care modulul acestei diferențe este „mic”, în sensul că poate fi majorat cu o funcție cu limita 0 în x_0 , atunci funcția f are limita l în x_0 , fapt observat în următorul rezultat, numit și *criteriul majorării*.

Teorema 5.7. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ și $l \in \mathbb{R}$. Dacă există o funcție $\alpha : D \rightarrow [0, \infty)$ și o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$|f(x) - l| \leq \alpha(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap D, x \neq x_0,$$

$$\text{iar } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \text{ atunci } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Exercițiu. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Soluție. Cum $|f(x) - l| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$ pentru orice $x \neq 0$, iar $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, urmează conform celor de mai sus că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Criteriu de existență a unei limite infinite

De asemenea, pentru a arăta că o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ în $x_0 \in D'$, este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt minorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcții g , cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$. Similar, pentru a arăta că o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ în $x_0 \in D'$ este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt majorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcții g , cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$.

Teorema 5.8. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in D'$.

1. Dacă există $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
2. Dacă există $g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Exercițiu. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

Soluție. Cum $-x + \sin x \leq -x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + 1) = -\infty$, urmează conform celor de mai sus că $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

A se nota că, în exemplul de mai sus, $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + \sin x)$ există, deși funcția sinus, ca funcție de sine stătătoare, nu are limită la $+\infty$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

În cazul sirurilor de numere reale, se putea demonstra că un sir $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent fără a-i cunoaște limita, arătând că acesta este sir Cauchy. În cazul funcțiilor, se poate obține un criteriu analog de existență a unei limite finite într-un punct, numit *criteriul Cauchy-Bolzano*.

Teorema 5.9. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. Atunci f are limită finită în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, astfel ca $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$.

5.1.5 Proprietăți ale funcțiilor cu limită

În situația în care o funcție are limită finită într-un punct x_0 , valorile sale $f(x)$ sunt apropriate de valoarea (finită) a limitei pentru valori x ale argumentului suficient de apropiate de x_0 , neputând deveni arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici, pentru aceste valori ale argumentului. Acest lucru este exprimat în următoarea teoremă.

Mărginirea funcțiilor cu limită

Teorema 5.10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită finită în x_0 . Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.

Demonstrație. Fie $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ și fie $V = (l - 1, l + 1)$ o vecinătate a lui l . Conform definiției limitei, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$. Atunci $|f(x)| < |l| + 1$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, deci f este mărginită pe U . ■

Proprietatea de păstrare a semnului

Teorema 5.11. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită nenulă în x_0 . Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul limitei.

Trecerea la limită în inegalități

Teorema ce urmează, numită și *teorema de trecere la limită în inegalități* exprimă faptul că inegalitățile (nestricte) dintre două funcții se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 5.12. Fie două funcții $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ cu proprietățile

1. Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $l_1 \leq l_2$.

Inegalitățile nestricte dintre termenii a două funcții nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ pentru care $f(x) < g(x)$ pentru orice $x > 0$, dar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, inegalitatea strictă dintre valorile lui f și g transformându-se în egalitate.

Teorema cleștelui

Teorema de mai jos, numită și *teorema cleștelui* (pentru funcții), ne permite să calculăm limita într-un punct a unei funcții care, pe o vecinătate a aceluia punct,

poate fi încadrată între alte două funcții având aceeași limită.

Teorema 5.13. Fie trei funcții $a, f, b : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ cu proprietățile

1. Există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$a(x) \leq f(x) \leq b(x) \quad \text{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Limita funcției compuse

Următoarea teoremă de calcul a *limitei funcției compuse* stă la baza calculului limitelor cu ajutorul schimbărilor de variabilă.

Teorema 5.14. Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ și $u(x) \neq u_0$ pentru $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0 , iar $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l$. Atunci funcția compusă $f \circ u : D \rightarrow \mathbb{R}$ are limită în x_0 , iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = \lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = l.$$

Corolar 5.14.1. Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, iar $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = f(u_0)$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

Corolar 5.14.2. Dacă $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$, iar $\lim_{y \rightarrow u_0} f(y) = f(u_0)$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(u(x))) = f(u(x_0)).$$

Limitele funcțiilor monotone

Pentru cazul sirurilor, s-a demonstrat că orice sir monoton are limită, finită sau nu. Acest lucru va rămâne adevărat și în cazul funcțiilor monotone, cu precizarea că de această dată este asigurată doar existența limitelor laterale. În acest sens,

teorema următoare precizează faptul că funcțiile monotone au limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului lor de definiție.

Teorema 5.15. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f monotonă, și $x_0 \in D'$. Atunci există limitele laterale $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, finite sau nu.

Cum limita într-un punct a unei funcții este influențată doar de valorile funcției pentru argumente dintr-o vecinătate a acelui punct, se poate observa că în teorema de mai sus este de fapt suficient ca funcția să fie monotonă doar pe o vecinătate a acelui punct.

Produsul dintre o funcție cu limită 0 și o funcție mărginită

Teorema 5.16. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Dacă f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca f să aibă limită în x_0 .

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin^2 \frac{1}{x})$.

Soluție. Deoarece $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ (de fapt, f este mărginită pe întreg domeniul de definiție, deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$), iar $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ are limita 0 în $x_0 = 0$, urmează că $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin^2 \frac{1}{x}) = 0$, conform celor de mai sus.

5.2 Proprietăți de calcul ale limitelor de funcții

5.2.1 Operații cu limite de funcții

Cu ajutorul teoremei de caracterizare cu siruri a limitelor de funcții, se pot deduce următoarele proprietăți ale operațiilor cu limite de funcții cu ajutorul proprietăților corespunzătoare ale operațiilor cu limite de siruri.

Teorema 5.17. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$.

- Dacă suma $l_1 + l_2$ a limitelor are sens, atunci funcția sumă $f + g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) + (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este $+\infty$ iar cealaltă $-\infty$).

- Dacă produsul $l_1 l_2$ al limitelor are sens, atunci funcția produs fg are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este 0 iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

- αf are limită în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)), \text{ pentru } \alpha \neq 0,$$

iar $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = 0$, pentru $\alpha = 0$.

- Dacă raportul $\frac{l_1}{l_2}$ al limitelor are sens, iar $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate a lui x_0 , atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)}{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

(cazuri exceptate: l_2 este 0, sau ambele limite l_1, l_2 sunt infinite).

- Dacă $l_1^{l_2}$ are sens, iar f^g este bine definită pe o vecinătate a lui x_0 atunci f^g are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)}$$

(cazuri exceptate: $(l_1, l_2) = (0, 0)$, $(l_1, l_2) = (+\infty, 0)$, $(l_1, l_2) = (1, +\infty)$).

Pentru studiul limitei raportului a două funcții, se poate observa că are loc și următorul rezultat care completează (parțial) teorema de mai sus pentru cazul în

care $l_2 = 0$.

Teorema 5.18. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

- Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) > 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

- Dacă $\frac{f}{g}$ este bine definită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $g(x) < 0$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, atunci $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = -\infty \cdot \operatorname{sgn}(l_1)$$

Cazurile exceptate din teoremele de mai sus, numite, pe scurt, și *cazuri de nedeterminare*, pot fi exprimate pe scurt sub forma $\infty - \infty$ (pentru sumă), $0 \cdot \infty$ (pentru produs), $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$ (pentru raport), 0^0 , ∞^0 , 1^∞ (pentru exponențiere).

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 5.17 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

Teorema 5.19. Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l_2, \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n$.

- Dacă suma $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ a limitelor are sens, atunci funcția sumă $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ are limită în x_0 și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x). \end{aligned}$$

- Dacă produsul $l_1 l_2 \dots l_n$ al limitelor are sens, atunci funcția produs $f_1 f_2 \dots f_n$

are limită în x_0 și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)) \\ = (\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)) \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)) \cdot \dots \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)). \end{aligned}$$

În particular,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x)^n) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x))^n.$$

5.2.2 Limitele funcțiilor elementare

Limitele funcțiilor polinomiale

Fie P o funcție polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, se observă că, pentru orice $l \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_l x^l) = a_l (\lim_{x \rightarrow x_0} x^l) = a_l (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^l = a_l x_0^l.$$

Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_k x^k) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{k-1} x^{k-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + a_0 \\ &= a_k x_0^k + a_{k-1} x_0^{k-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= P(x_0). \end{aligned}$$

De aici, valoarea limitei funcției polinomiale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.

Exemplu. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4x + 5) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 2x^2 + 6) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 = 8$.

La fel ca și în cazul sirurilor, pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$ se va scoate factor comun forțat x^k ($k = \text{grad } P$). Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} \right) \\
&= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_k x^k = \infty \cdot a_k = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x),$$

de unde se poate remarcă faptul că *limita la $+\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .*

Cu un raționament similar, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = (-\infty)^k \cdot a_k$$

decic și *limita la $-\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .*

Exemplu. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 3x^2 - 2x + 1) = (+\infty)^5 = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty$.

Limitele funcțiilor raționale

Fie P, Q două funcții polinomiale de grad k , respectiv l , unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}
P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) &= a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0, \\
Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) &= b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.
\end{aligned}$$

Pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$ într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care numitorul nu se anulează ($Q(x_0) \neq 0$), se observă că, datorită proprietăților operațiilor cu limite de funcții și celor demonstreate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

De aici, valoarea limitei funcției raționale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care nu se anulează numitorul se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.

Dacă x_0 este rădăcină a lui Q ($Q(x_0) = 0$), atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p, q sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_0 pentru funcțiile polinomiale P , respectiv Q , iar $P_1(x_0) \neq 0, Q_1(x_0) \neq 0$. Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există}, & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

Exemplu. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)(x+2)}.$$

Atunci $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$ nu există, deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+) \cdot 3} = -\infty$, iar $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-) \cdot 3} = +\infty$.

Considerăm limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$. La fel ca și în cazul sirurilor, pentru calculul acesteaia se va scoate factor comun forțat x^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv x^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k (a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k})}{x^l (b_l + b_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{l-1}} + b_0 \frac{1}{x^l})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b_l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}.
\end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b_l},$$

de unde se poate remarcă faptul că *limita lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P și Q*, pentru $x \rightarrow +\infty$. Cu un raționament similar, se poate obține că același lucru se întâmplă și pentru $x \rightarrow -\infty$.

Exemplu. 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 + 4\frac{1}{x} + 2\frac{2}{x^2})}{x^2(2 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 3x^2 + x - 1}{3x^2 + 4x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(-2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^2(3 + 4\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2})} \\
&= (-\infty) \cdot \frac{-2}{3} = +\infty.
\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 + 4\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^3(4 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})} = 0 \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

Limitele radicalilor

Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ și n este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\frac{1}{n}}) = (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu același raționament,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă $x_0 > 0$ și n este un număr natural par, $n \geq 2$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exercițiu. Determinați valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x).$$

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x^2 + 1) = +\infty$, urmează, conform teoremei limitei funcției compuse și celor de mai sus, că $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = +\infty$, ceea ce înseamnă că limita de mai sus prezintă o nedeterminare de forma $\infty - \infty$. Pentru înlăturarea acesteia se amplifică cu expresia conjugată celei din enunț. Urmează că

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x)(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Limitele funcțiilor exponențiale

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru $a > 1$, se observă că f este strict crescătoare, iar

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a - 1))^{[x]} \geq 1 + (a - 1)[x],$$

conform inegalității lui Bernoulli, de unde urmează conform criteriului majorării că $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$. De asemenea,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notația $u = -x$, conform teoremei limitei funcției compuse.

Dacă $a \in (0, 1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raționament asemănător obținându-se că $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Adăugând și cazul $a = 1$, în cazul în care f este identic egală cu 1, discuția de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

Limitele funcțiilor logaritmice

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Mai întâi, se observă că f este strict crescătoare pentru $a > 1$, respectiv strict descrescătoare pentru $a \in (0, 1)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci, cum f este strict monotonă, ea are limite laterale în x_0 . Mai mult, deoarece $a^{\log_a x} = x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{\log_a x}) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (a^{\log_a x}) = \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} a \right)^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)},$$

urmează că $a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = x_0$, deci $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$. În mod similar se demonstrează că $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$, deci există $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a x) = \log_a x_0$, deoarece limitele laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raționament analog celui realizat pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, obținem că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

Limitele unor funcții trigonometrice

Mai întâi, reamintim inegalitatea

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Tinând seama că $\sin(-x) = -\sin x$ și $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|, \quad \text{pentru } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

De asemenea,

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

deci

$$|\sin x| \leq |x|, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R}.$$

Funcția sinus

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ și fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

de unde, conform criteriului majorării,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcția sinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, sirul valorilor $(\sin(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru sirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, de asemenea cu limita $+\infty$, sirul valorilor $(\sin(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția sinus nu are limită la $+\infty$, în mod analog demonstrează că funcția sinus nu are limită nici la $-\infty$.

Funcția cosinus

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcția cosinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcția tangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Conform inegalităților

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \right| = \left| \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0} \right|,$$

valabile pentru $x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}$, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$

ținând seama de teorema limitei funcției compuse și de faptul că funcția tangentă este periodică de perioadă π . În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ x > \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcția tangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru sirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = n\pi$, cu limita $+\infty$, sirul valorilor $(\operatorname{tg}(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru sirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, sirul valorilor $(\operatorname{tg}(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția tangentă nu are limită la $+\infty$, în mod analog raționându-se pentru $x \rightarrow -\infty$.

Funcția cotangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ca mai sus, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n\pi^+ \\ x > n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n\pi^- \\ x < n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcția cotangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcția arcsinus

Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) = \arcsin x$. Folosind un raționament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcției logaritmice, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

Funcția arccosinus

Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], f(x) = \arccos x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

Funcția arctangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Funcția arc cotangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), f(x) = \operatorname{arcctg} x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

5.2.3 Limite fundamentale

Au loc relațiile:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$6) \lim_{y \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{y})^y = e,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p, p \in \mathbb{R}^*.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Deoarece $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleștelui, urmează că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$. Cu un raționament asemănător, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$, de unde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin x = u$, urmează că $x = \sin u$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Deoarece $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleștelui, urmează că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Cu un raționament asemănător, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, de unde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{arctg} x = u$, urmează că $x = \operatorname{tg} u$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Fie $x > 0$. Să notăm $n = [\frac{1}{x}]$. Cum $[\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x} < [\frac{1}{x}] + 1$, urmează că $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$, deci $\frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$. În concluzie,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adică

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cum $n \rightarrow \infty$ pentru $x \rightarrow 0$, $x > 0$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, urmează conform criteriului cleștelui că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. În mod asemănător se demonstrează că $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, ambele limite laterale fiind egale cu e .

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e, \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$$

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, cu notația $\frac{1}{x} = y$ urmează că $\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$.

Deoarece și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, tot cu notația $\frac{1}{x} = y$, urmează că și $\lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Conform proprietăților operațiilor cu limite de funcții, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\log_a (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \log_a e.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Cu schimbarea de variabilă $a^x - 1 = u$, urmează că $x = \log_a(1+u)$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{u}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$$

Cu schimbarea de variabilă $x = e^u - 1$, urmează că $u = \ln(1+x)$, iar $u \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Conform teoremei limitei funcției compuse, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(e^u)^p - 1}{e^u - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{pu}-1}{u}}{\frac{e^u-1}{u}} = \frac{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{pu}-1}{pu} \cdot p}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u}} = \frac{\ln e \cdot p}{\ln e} = p.$$

Compararea creșterii funcțiilor $\ln x$, x^p ($p > 0$) și e^x

În cele ce urmează vom studia diferențele între vitezele de creștere spre $+\infty$ ale funcției exponențiale, funcției putere și funcției logaritmice, observând că funcția exponențială are cea mai mare viteză de creștere spre $+\infty$, urmată de funcția putere și funcția logaritmică.

Vom demonstra mai întâi că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$. În acest sens, s-a demonstrat deja că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$ pentru orice $p > 0$. Notând $[x] = n$, observăm că $n \leq x < n + 1$ și atunci

$$\frac{\ln n}{(n+1)^p} < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{n^p},$$

adică

$$\frac{\ln n}{n^p} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^p} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p,$$

de unde, ținând seama de cele de mai sus, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$.

Arătăm acum că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = \ln u$, urmează că $u = e^x$ și $u \rightarrow \infty$ pentru $x \rightarrow \infty$. Ținând seama de teorema funcției compuse, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(\ln u)^p}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 0^p = 0.$$

Pentru o altă demonstrație a acestor relații, să arătăm mai întâi că

$$\ln x < x < e^x, \quad \text{pentru } x > 0,$$

inegalitate care prezintă un interes de sine stătător.

În acest sens, să observăm că

$$e^x \geq e^{[x]} = (1 + (e - 1))^{[x]} \geq 1 + (e - 1)[x],$$

conform inegalității lui Bernoulli. În plus,

$$1 + (e - 1)[x] > \{x\} + [x] = x,$$

de unde $e^x > x$, pentru orice $x > 0$. Prin logaritmarea acestei inegalități, se obține că $x > \ln x$, pentru orice $x > 0$, de unde concluzia.

De aici, $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, pentru orice $x > 0$, iar cum $\ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln x$, urmează că $\frac{\frac{1}{2} \ln x}{\sqrt{x}} < 1$, deci $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, pentru $x > 0$. Atunci

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x > 1,$$

de unde urmează conform criteriului cleștelui că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Arătăm acum că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, pentru $p > 0$. Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $u = x^p$

și ținând seama că $u \rightarrow \infty$ când $x \rightarrow \infty$, obținem cu ajutorul teoremei limitei funcției compuse că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(u^{\frac{1}{p}})}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{p} \ln u}{u} = \frac{1}{p} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Faptul că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ se obține ca mai sus.

În fine, să precizăm câteva considerații asupra tratării cazurilor de nedeterminare. Cazurile $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se tratează cu ajutorul limitelor fundamentale menționate mai sus, pentru cazul de nedeterminare $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ putându-se da și factor comun forțat. Cazul $0 \cdot \infty$ se tratează transformând produsul în raport cu ajutorul formulei $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$. Cazul $\infty - \infty$ se tratează prin reducere la o nedeterminare de tip $0 \cdot \infty$ dând factor comun forțat, sau, în unele situații în care apar radicali, prin amplificare cu expresii conjugate. Cazurile 0^0 , ∞^0 , 1^∞ se tratează prin reducerea nedeterminării la una de tip produs, cu ajutorul formulei $f^g = e^{g \ln f}$, pentru cazul de nedeterminare 1^∞ putându-se utiliza și limita $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, numită în continuare și *limita standard ce definește numărul e*.

Exemplu. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{\sqrt[3]{1+2x} - 1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{\sqrt[3]{1+2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1}{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1}{3x} \cdot 3x}{\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x} \cdot 2x}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}.$$

Exemplu. 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$, vom transforma mai întâi nedeterminarea într-o formă de tip raport. Observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Cu notația $u = \frac{1}{x}$, ținând seama că $u \rightarrow \infty$ pentru $x \rightarrow 0$, $x > 0$, se obține că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-\ln u}{u} = 0,$$

de unde limita căutată este 0.

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare 0^0 , transformăm mai întâi nedeterminarea într-o formă de tip produs. Atunci

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{x \ln x} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x} = e^0 = 1,$$

conform exemplului precedent.

Exemplu. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{2}{n} \right)^n$

Vom determina valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x$, valoarea limitei din enunț obținându-se ca un caz particular. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare 1^∞ , se va folosi limita standard ce definește numărul

e. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}} \right]^{x(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} x(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}}} .
 \end{aligned}$$

Cu notația $u = \frac{1}{x}$, ținând seama că $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow \infty$, urmează că

$$\begin{aligned}
 e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} - 1}{\frac{1}{x}}} &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u + \sin^2 2u - 1}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2} + \sin^2 2u}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{u}} \\
 &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2}}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u}{u}} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{u}{2} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^2}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2u \cdot (2u)^2}{(2u)^2}} \\
 &= e^{\lim_{u \rightarrow 0} -\left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 \cdot \frac{u}{2} + \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2 \cdot 4u} \\
 &= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2} + \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} 4u} = e^0 = 1.
 \end{aligned}$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x} \right)^x = 1,$$

de unde limita din enunț este 1.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1}$

O limită calculată pentru x tinzând la un număr nenul poate transformată într-o limită în care variabila tinde la zero alegând ca nouă variabilă diferența dintre x și acel număr. Cu notația $u = x - 1$, ținând seama că $u \rightarrow 0$ când $x \rightarrow 1$, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+u} + \sqrt[3]{1+u} - 2}{u}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{2}} - 1}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{3}} - 1}{u} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Aplicații

5.1. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(3^x - 1)}{x^2};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)^3}{x^3};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2 + x - 1}{x};$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{\tg x + \tg 2x + \dots + \tg nx};$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arctg x)}{\tg(\arcsin x)};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[(1+3x)^2]}{x};$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x \arcsin x};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{4x};$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 5^x - 2}{3^x + 4^x - 2};$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \sin 2x};$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \sin x}{x^2};$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{4x};$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \tg(\frac{\pi}{4} + x)}{x};$
- 15) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sin(2 \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}};$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2},$
 $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 2;$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - 1}{x};$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x}{x^3};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg(\tg x) - \sin(\sin x)}{\tg x - \sin x}.$

5.2. Fie $p, q > 0$. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p - 2^x}{q - 3^x};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{px})}{\ln(1 + e^{qx})};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^p + e^x)}{\ln(x^q + e^x)};$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + p \arctg x}{x + q \operatorname{arcctg} x};$
- 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin px}{\ln \sin qx}.$

5.3. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2\tg^2 x)^{\frac{4}{\sin^2 x}};$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1+x) + \ln(1+2x) + \dots + \ln(1+nx))^{\frac{1}{x}};$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0;$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\arcsin x} + b^{\arctg x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, a, b > 0;$
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right)^x;$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}} \right)^x;$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x;$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos nx} \right)^{\frac{1}{x^2}};$
- 9) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x}}, a \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$

5.4. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{3^{\operatorname{tg} x} - 3}{x - \frac{\pi}{4}}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x+24} - 3}{x-3}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[3]{x-1} - 1}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[p]{x} - 1}{\sqrt[q]{x} - 1}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p, q \geq 2$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \dots + \sqrt[n]{x} - (n-1)}{x-1}$.

5.5. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+2) - \ln x]$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x+1) \right)$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x+2} - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \right)$.

5.6. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sin \frac{1}{x}}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\sin x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (-\ln x)^{2x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

5.7. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x^2} + \ln x \right)$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + e^{-x}) - x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \sqrt[n]{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \right)$, $n \in \mathbb{N}^*$; 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x)$.

5.8. Determinați valorile următoarelor limite

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsin} x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} |x|)^{|\operatorname{arctg} x|}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + x \cos x)^x$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right]^{\frac{\ln x}{x}}$.

5.9. Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$.

5.10. Fie $a > 0$. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a} = a^a (1 + \ln a); \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x \ln a - a \ln x}{x - a} = \ln a - 1.$$

5.11. Fie $p \in (0, 1)$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x+1)^p - x^p + a) = p$.

5.12. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Determinați punctele $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care f are limită în x_0 .

5.13. 1. Demonstrați că $\sin(\arccos u) = \sqrt{1-u^2}$ pentru $u \in [-1, 1]$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos \frac{2x}{1+x^2}}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Demonstrați că f nu are limită în $x = 1$.

5.14. Fie $L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\cos x \cos 2x \dots \cos nx}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Determinați L_0, L_1 .

2. Demonstrați că $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstrați că $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

5.15. Fie $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\ln(e+x) \ln(e+2x) \dots \ln(e+nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Determinați L_1 .

2. Demonstrați că $L_{n+1} = L_n - \frac{n+1}{e}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstrați că $L_n = -\frac{n(n+1)}{2}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

5.16. Fie $L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x) \dots (1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Determinați L_1 .

2. Demonstrați că $L_{n+1} = \frac{n+1}{2} L_n$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

3. Demonstrați că $L_n = \frac{n!}{2^n}$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

5.17. Determinați valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2})$ în funcție de valoarea parametrului real a , $a > 0$.

5.18. Determinați valorile parametrilor reali a, b astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 1.$$

5.19. Determinați valorile parametrilor reali a, b astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - ax - b}{x^2} \in \mathbb{R}.$$

5.20. Determinați valorile parametrilor reali a, b , $a > 0$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a \cos x + b \sin x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

5.21. Fie $f, g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel ca $f(x) > \frac{1}{x^2+x} > g(x)$ pentru $x > 0$. Demonstrați că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

5.22. Fie $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Arătați că există $\delta_1 > 0$ astfel ca $a \sin x + \cos(bx) > 0$ pentru $x \in (-\delta_1, \delta_1)$.
2. Arătați că există $\delta_2 > 0$ astfel ca $e^{ax} - bx > 0$ pentru $x \in (\delta_2, +\infty)$.
3. Arătați că există $\delta_3 > 0$ astfel ca $\frac{1}{2} < \frac{\sin x}{x} < \frac{3}{2}$ pentru $x \in (-\delta_3, \delta_3)$.

5.23. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x} = 1; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \left(\left[\frac{1}{x} \right] + \left[\frac{2}{x} \right] + \dots + \left[\frac{n}{x} \right] \right) = 1.$$

5.24. Demonstrați că

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-1} \cos x = 0; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} \cos \frac{1}{x} = 0; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

5.25. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow (0, \infty)$ astfel ca $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

5.26. Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Cu ajutorul acestei limite, justificați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

5.27. Calculați următoarele limite de siruri

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} \ln \left(1 + \frac{n}{n^2+2} \right); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\sin \frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right); \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{n+1}{n}} - e \right).$$

Capitolul 6

FUNCȚII CONTINUE

6.1 Continuitatea unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. În capitolul precedent s-a studiat comportarea lui f în vecinătatea unui punct dat $x_0 \in D'$, observându-se dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropiu și ele (sau nu) de o valoare fixă, numită limită funcției în x_0 .

În acest capitol vom pune problema particulară a apropiierii acestor valori de valoarea $f(x_0)$ a funcției în x_0 ; desigur, pentru a putea vorbi despre $f(x_0)$ va fi necesar ca x_0 să aparțină domeniului de definiție D . În plus, față de studiul limitei funcției în x_0 , se va avea în vedere și cazul în care x_0 este punct izolat al lui D .

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcția f este continuă în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ urmează că $f(x) \in V$.

Întrucât se pune în fapt o problemă înrudită cu existența limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, definiția de mai sus se obține din definiția limitei unei funcții în x_0 înlocuind l cu $f(x_0)$, fiind totuși necesară înlocuirea condiției $x_0 \in D'$ cu condiția $x_0 \in D$.

Continuitatea într-un punct de acumulare

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare al lui D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

adică operația de aplicare a funcției f comută cu operația de calculare a limitei în x_0 .

Intuitiv, cum valorile $f(x)$ ale funcției sunt apropiate de valoarea limitei (egală acum cu $f(x_0)$) pentru x apropiat de x_0 , funcțiile continue într-un punct x_0 sunt acele funcții pentru care o schimbare minoră a argumentului de la x_0 la x va produce o schimbare minoră a valorii funcției de la $f(x_0)$ la $f(x)$.

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există ambele limite laterale $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Continuitatea într-un punct izolat

Presupunem acum că x_0 este punct izolat al lui D și fie $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ o vecinătate a lui $f(x_0)$. Cum x_0 este punct izolat al lui D , există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$, și cum $f(x_0) \in V$, urmează că definiția funcției continue în x_0 este satisfăcută pentru acest U . Rezultă de aici că o funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

Studiul continuității unei funcții $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ în $x_0 \in D$ ne conduce deci la una dintre următoarele situații

1. $x_0 \in D'$

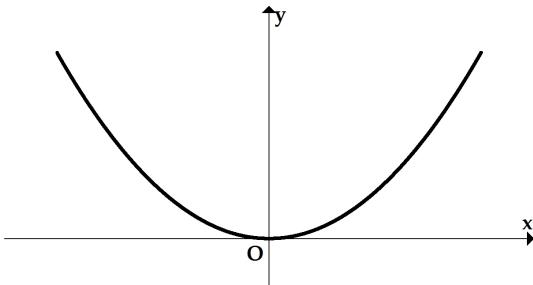
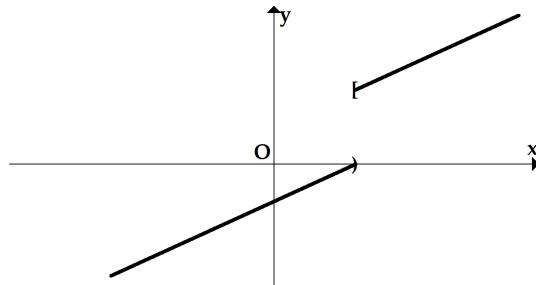
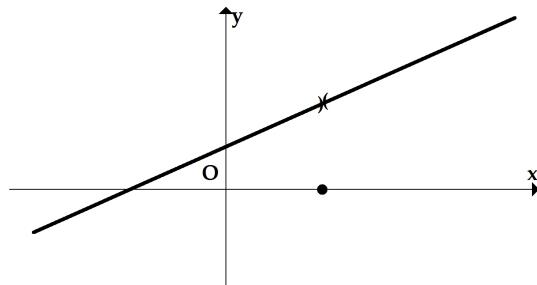
- (a) f are limită în x_0 , cu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Atunci f este continuă în x_0 .
- (b) f are limită în x_0 , cu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Atunci f nu este continuă în x_0 .
- (c) f nu are limită în x_0 . Atunci f nu este continuă în x_0 .

2. $x_0 \notin D'$. Atunci f este continuă în x_0 .

Aspecte grafice ale noțiunii de continuitate

În fapt, conceptul de continuitate își are originea în considerații privind reprezentarea grafică a funcțiilor. Astfel, din punct de vedere intuitiv, o funcție este continuă în x_0 dacă graficul său „nu se întrerupe” în x_0 . În acest sens, să considerăm exemplele funcțiilor $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ x - 1, & x < 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Figura 6.1: Graficul funcției f_1 Figura 6.2: Graficul funcției f_2 Figura 6.3: Graficul funcției f_3

Se observă că f_1 are limită în $x_0 = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 1$, iar cum $f_1(1) = 1$, urmează că $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$, deci f_1 este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, egalitatea $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$ revine la faptul că graficul lui f_1 „nu se întrerupe” în $x_0 = 1$.

De asemenea, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = 0 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_2(x) = 2$, deci f_2 nu este continuă în $x_0 = 1$, încrucătă f_2 nu are limită în acest punct. Geometric, graficul lui f_2 „se întrerupe” la stânga lui $x_0 = 1$ (dar nu și la dreapta lui $x_0 = 1$).

În plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_3(x) = 2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x)$, deci f_3 are limită în $x_0 = 1$. Totuși, deoarece $f_3(1) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f_3(x)$, urmează că f_3 nu este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, graficul lui f_3 „se întrerupe” atât la stânga cât și la dreapta lui $x_0 = 1$.

6.1.1 Continuitate laterală

Exemplul funcției f_2 de mai sus, pentru care graficul „se întrerupe” doar de o parte a lui $x_0 = 1$, cât și existența noțiunii de limită laterală sugerează introducerea conceptului de *continuitate laterală*.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcția f este continuă la stânga în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \leq x_0$, urmează că $f(x) \in V$.

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare la stânga al lui D , atunci f este continuă la stânga în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0),$$

adică limita la stânga a lui f în x_0 este egală cu $f(x_0)$.

În mod similar se definește noțiunea de continuitate la dreapta într-un punct x_0 , obținându-se că dacă x_0 este punct de acumulare la dreapta al lui D , atunci f este continuă la dreapta în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Conform celor de mai sus, are loc următoarea proprietate.

Teorema 6.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă x_0 este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga al lui D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă este continuă atât la dreapta cât și la stânga lui x_0 .

6.1.2 Funcții continue pe o mulțime

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă în fiecare punct al unei mulțimi $A \subseteq D$, spunem că f este continuă pe A . Dacă f este continuă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că f este continuă. Din ceea ce s-a observat în capitolul anterior, funcțiile elementare sunt continue.

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă. Într-adevăr, pentru $x_0 < 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} (-x) = -x_0 = |x_0|$, deci f este continuă în x_0 . Similar, pentru $x_0 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = |x_0|$. În fine, pentru $x_0 = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| =$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$, iar $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$, deci $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |x| = |0|$, iar f este continuă în $x_0 = 0$.

6.1.3 Puncte de discontinuitate

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă f nu este continuă în x_0 , se spune că f este discontinuă în D , sau că x_0 este *punct de discontinuitate* pentru f .

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru f . Dacă ambele limite laterale $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ale lui f în x_0 există și sunt finite, atunci x_0 se numește *punct de discontinuitate de specia (speța) întâi*. În orice altă situație (adică dacă măcar una din limitele laterale nu există, sau există, dar nu este finită), x_0 se numește *punct de discontinuitate de specia (speța) a doua*.

Dacă există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, diferită de $f(x_0)$, atunci x_0 (care este punct de discontinuitate de specia întâi) se mai numește și *discontinuitate înlăturabilă*, întrucât redefinind $f(x_0)$ ca fiind egală cu valoarea limitei în x_0 , x_0 se transformă într-un punct de continuitate.

Exemplu. 1. Fie $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_1(x) = -1$,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = 1$, ambele fiind finite (dar diferite, 0 nefiind deci punct de continuitate), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța întâi.

2. Fie $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 1$, iar $f_2(0) = 0 \neq 1$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de specia întâi, fiind în fapt o discontinuitate înlăturabilă.

3. Fie $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) = +\infty$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

4. Fie $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_4(x)$ nu există (deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, iar funcția sinus nu are limită la $+\infty$), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speță a doua.

5. Fie $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_5(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ și fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Există atunci două siruri $(a_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$, $(b_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cu $a_n < x_0$, $b_n < x_0$ pentru $n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f_5(a_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_5(b_n) = 0$, deci nu există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f_5(x)$, iar x_0 este punct de discontinuitate de speță a doua.

Ținând cont de faptul că funcțiile monotone au limite laterale în fiecare punct al domeniului de definiție, ele nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură. Mai mult, aceste puncte de discontinuitate nu pot fi arbitrar de multe.

Corolar 6.1.1. *Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă pe intervalul I . Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia întâi pe I , mulțimea tuturor acestor puncte fiind cel mult numărabilă.*

6.1.4 Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f nu este definită în x_0 (deci $x_0 \notin D$), dar x_0 este punct de acumulare al domeniului D , iar f are limită finită l în x_0 , atunci funcția

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

obținută prin definirea valorii în x_0 ca fiind egală cu valoarea limitei în același punct, celealte valori rămânând neschimbate, se numește *prelungirea prin continuitate a lui f în x_0* . Desigur, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0),$$

\tilde{f} este continuă în x_0 , ceea ce justifică denumirea de prelungire prin continuitate.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, prelungirea prin continuitate a lui f în 0 este

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

6.1.5 Caracterizarea cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct

Teorema următoare, denumită şi *teorema de caracterizare cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct* permite studiul continuităţii unei funcţii cu ajutorul limitelor de şiruri.

Teorema 6.2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita $f(x_0)$.

Demonstraţia este imediată, cu ajutorul rezultatului corespunzător pentru limite de funcţii, Teorema 5.3. Să observăm şi că teorema de mai sus (ca şi definiţia continuităţii, de fapt) nu mai exclude valori ale argumentului diferite de x_0 ; dacă $a_n = x_0$, atunci $f(a_n) = f(x_0)$, valoare egală cu valoarea limitei.

Teorema de mai sus se poate exprima prin faptul că *funcţiile continue se pot aplica relaţiilor de convergenţă* (adică dacă f este continuă în x_0 , iar $a_n \rightarrow x_0$ pentru $n \rightarrow \infty$, în condiţiile de mai sus, atunci $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ pentru $n \rightarrow \infty$.)

6.1.6 Caracterizarea cu $\varepsilon - \delta$ a continuităţii unei funcţii într-un punct

Următoarea *teoremă de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$* se poate obţine în mod imediat din rezultatul similar pentru limite de funcţii, Teorema 5.1.

Teorema 6.3. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0}$.

In teorema de mai sus, $\delta_{\varepsilon,x_0} > 0$ depinde (implicit) și de punctul x_0 în care se studiază continuitatea funcției, pe lângă dependența de ε .

6.1.7 Operații cu funcții continue

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat funcții continue, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 6.4. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Atunci

1. $f + g, f - g$ sunt continue în x_0 .
2. αf este continuă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. fg este continuă în x_0 .
4. $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$.
5. f^g este continuă în x_0 dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ este bine definită.

Demonstrația este imediată, obținându-se cu ajutorul proprietăților operațiilor cu limite de funcții. O proprietate asemănătoare se poate formula în mod similar pentru funcții continue pe întreg domeniul de definiție.

Exemplu. 1. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$ este continuă, fiind suma a două funcții elementare.

2. $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^x$ este continuă, întrucât $f_1 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x+2$, $f_2 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$ sunt continue, iar $f_1^{f_2}$ este bine definită.

Continuitatea funcției compuse

S-a observat anterior că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat tot funcții continue. Teorema de mai jos exprimă faptul că prin compunerea a două funcții continue se obține tot o funcție continuă.

Teorema 6.5. Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât u este continuă în x_0 , iar f este continuă în $u(x_0)$. Atunci funcția compusă $f \circ u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în x_0 .

Demonstrație. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un sir astfel ca $a_n \in D$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$. Deoarece funcția u este continuă în x_0 , urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n) = u(x_0)$, conform teoremei de caracterizare cu siruri. Deoarece și funcția f este continuă, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u(a_n)) = f(u(x_0))$, de unde concluzia. Cum $(a_n)_{n \geq 0}$ era arbitrar, urmează conform teoremei de caracterizare cu siruri că $f \circ u$ este continuă în x_0 . ■

Exemplu. Funcția $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$ este continuă, deoarece $f = f_1 \circ f_2$, unde $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2 : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f_2(x) = x^3 - 1$, sunt continue.

Cum funcția modul este continuă, se poate demonstra că modulul unei funcții continue este tot o funcție continuă, iar maximul, respectiv minimul, a două funcții sunt de asemenea funcții continue.

Teorema 6.6. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Atunci

1. $|f|$ este continuă în x_0 .
2. $\min(f, g)$ și $\max(f, g)$ sunt continue în x_0 .

Demonstrație. 1. Cum $|f|$ reprezintă compunerea funcțiilor continue $|\cdot|$ și f , $|f| = |\cdot| \circ f$, ea este continuă în x_0 .

2. Este cunoscut că

$$\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \quad \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}.$$

Cum $f + g$, $f - g$ sunt continue, reprezentând operații uzuale cu funcții continue, iar $|f - g|$ este de asemenea continuă, conform celor de mai sus, urmează că $\max(f, g)$ și $\min(f, g)$ sunt continue, fiind obținute prin operații uzuale cu funcții continue. ■

6.1.8 Proprietăți locale ale funcțiilor continue

Conform unei proprietăți anterioare, continuitatea unei funcții într-un punct presupune egalitatea între valoarea limitei și valoarea funcției în punct, funcțiile continue moștenind pe această cale proprietățile funcțiilor cu limită.

Mărinirea funcțiilor continue

Teorema 6.7. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0 . Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.

Proprietatea de păstrare a semnului

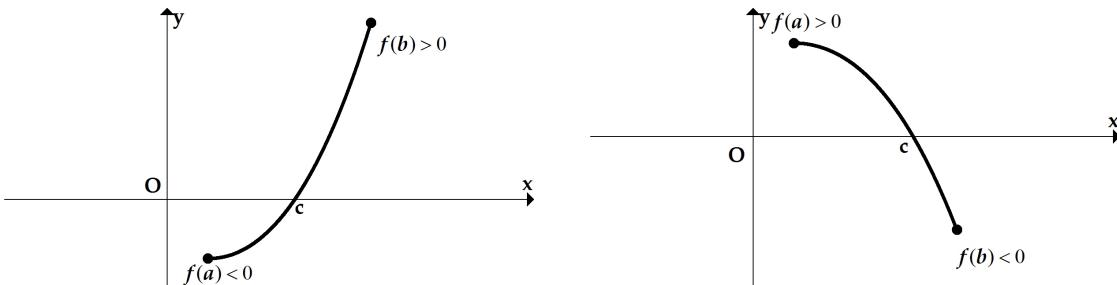
Teorema 6.8. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât f este continuă în x_0 , iar $f(x_0) \neq 0$. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f păstrează semnul lui $f(x_0)$.

6.2 Proprietăți ale funcțiilor continue pe o mulțime

6.2.1 Proprietatea lui Darboux

În cele ce urmează vom demonstra că o proprietate caracteristică a funcțiilor continue este aceea de a nu omite valori. Începem mai întâi prin a demonstra următoarea proprietate, numită *lema lui Bolzano*, ce exprimă faptul că dacă o funcție continuă are valori de semne opuse la capetele unui interval, atunci ea are o rădăcină în interiorul acestui interval.

Teorema 6.9. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, cu proprietatea că $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = 0$.



Lema lui Bolzano, demonstrată mai sus, este instrumentală în determinarea aproximativă a radacinilor unor ecuații care nu pot fi rezolvate explicit, un exemplu fiind indicat mai jos.

Exercițiu. Demonstrați că ecuația $e^x = 2 \cos x$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{3})$.

Soluție. Ecuația $e^x = 2 \cos x$ poate fi pusă sub forma $e^x - 2 \cos x = 0$. Fie atunci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2 \cos x$. Atunci f este continuă pe \mathbb{R} , iar $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - 1 > 0$. Cum f ia valori de semne opuse în capetele intervalului $[0, \frac{\pi}{3}]$, există cel puțin o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval, ceea ce trebuia demonstrat.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$ o funcție polinomială de grad impar. Atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

Soluție. Deoarece f este o funcție polinomială de grad impar, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, de unde, conform definiției limitei, există $x_1 < 0$ astfel ca $f(x_1) < 0$, deoarece într-o vecinătate a lui $-\infty$ valorile funcției f păstrează semnul limitei. Similar, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, de unde există $x_2 > 0$ astfel ca $f(x_2) > 0$. Cum f este continuă, fiind funcție elementară, iar valorile lui f în capetele intervalului $[x_1, x_2]$ au semne opuse, există măcar o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval.

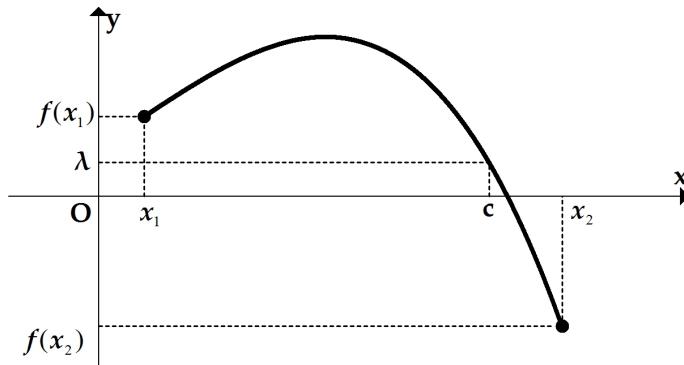
Existența rădacinilor unor ecuații

Din cele de mai sus se desprinde următorul procedeu general de localizare a rădacinilor unei ecuații.

Fie o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe un interval I . Se determină mai întâi două puncte $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel încât $f(x_1)$ și $f(x_2)$ au semne opuse, adică $f(x_1)f(x_2) < 0$. Deoarece f este continuă pe I , rezultă atunci conform lemei lui Bolzano că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = 0$, adică ecuația $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul (x_1, x_2) . Dacă $f(x_1)f(x_2) \leq 0$, ecuația $f(x) = 0$ are măcar rădăcina c în intervalul $[x_1, x_2]$. În plus, dacă f este strict monotonă pe intervalul $[x_1, x_2]$ (fiind deci și injectivă pe acest interval), atunci această rădăcină este unică.

Dacă ecuația de rezolvat este prezentată sub forma $f(x) = g(x)$, unde $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continuă pe I , atunci această ecuație se pune mai întâi sub forma $f(x) - g(x) = 0$, aplicându-se apoi considerațiile de mai sus.

Dat un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, vom spune că f are proprietatea lui Darboux pe I , sau a valorii intermediare pe I dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$ și orice număr real λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = \lambda$.



Altfel spus, o funcție f are proprietatea lui Darboux dacă odată cu două valori arbitrară $f(x_1)$ și $f(x_2)$ aceasta ia pe intervalul (x_1, x_2) și orice valori intermediare situate între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ (adică toate valorile din intervalul deschis determinat de $f(x_1)$ și $f(x_2)$). Conform acestei observații, rezultă imediat că funcțiile cu proprietatea lui Darboux transformă intervalele în intervale.

Teorema 6.10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Atunci $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, dar f nu ia pe intervalul $(0, 1)$ și valoarea intermediară $\frac{1}{2}$, deci f nu are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} . Alternativ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$, deci f nu transformă intervalul deschis $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui Darboux.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Atunci $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, deci f nu transformă \mathbb{R} tot într-un interval, neavând în concluzie proprietatea lui

| Darboux.

Restrângând în mod potrivit intervalul I de mai sus în jurul unui punct x_0 în care o funcție cu proprietatea lui Darboux are o limită laterală, se obține imediat următorul rezultat.

Teorema 6.11. *Fie $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, I_1 fiind un interval pe care f are proprietatea lui Darboux, și fie $x_0 \in I_1$ astfel încât există o limită laterală a lui f în x_0 . Atunci această limită este egală cu $f(x_0)$.*

Conform acestei proprietăți, funcțiile cu proprietatea Darboux sunt „aproape continue”, în sensul că nu pot avea decât puncte de discontinuitate de o anumită natură.

Corolar 6.11.1. *Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea lui Darboux pe intervalul I . Atunci f nu poate avea decât puncte de discontinuitate de specia a două pe I .*

Vom demonstra în cele ce urmează că funcțiile continue pe un interval au proprietatea lui Darboux pe acel interval.

Teorema 6.12. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe I .*

Demonstrație. Fie $x_1, x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$ și fie λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$. Fie deasemenea $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$.

Atunci g este continuă pe I , iar $g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - \lambda)(f(x_2) - \lambda) < 0$. Conform teoremei Cauchy-Bolzano, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $g(c) = 0$, de unde $f(c) = \lambda$, iar f are proprietatea lui Darboux pe I . ■

Corolar 6.12.1. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $I \subseteq D$. Atunci $f(I)$ este un interval.*

6.2.2 Funcții uniform continue

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă f este continuă în x_0 atunci, conform teoremei de caracterizare cu $\varepsilon - \delta$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon, x_0} > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon, x_0}$. Așa cum s-a afirmat, $\delta_{\varepsilon, x_0}$ depinde atât de ε , cât și de x_0 , valoarea sa putând să se schimbe după substituirea

lui x_0 cu un alt argument x_1 . Când această valoare nu se schimbă indiferent de valoarea argumentului considerat, f se numește *uniform continuă*.

În acest sens, vom spune că f este *uniform continuă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$ cu proprietatea că $|x - y| < \delta_\varepsilon$.

Definiția de mai sus exprimă faptul că, pentru o funcție uniform continuă, dacă diferența între două argumente x și y este suficient de mică, atunci diferența dintre valorile $f(x)$ și $f(y)$ este de asemenea mică indiferent de locul argumentelor x și y în domeniul de definiție. Din punct de vedere geometric, imaginea oricărui interval cu o lungime mai mică decât δ_ε este tot un interval, cu lungime mai mică decât ε . Desigur, orice funcție uniform continuă pe o mulțime este și continuă pe acea mulțime, definiția uniformei continuități fiind mai restrictivă.

Exemplu. 1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[0, 2]$.

Într-adevăr,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 4|x - y|,$$

de unde f este uniform continuă, cu $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$.

2. $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este uniform continuă pe $(0, 1]$. Să presupunem prin reducere la absurd că g este uniform continuă pe $(0, 1]$. Fie atunci $\varepsilon = 1$ și fie δ_1 , $0 < \delta_1 < 1$, astfel ca $|g(x) - g(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in (0, 1]$, $|x - y| < \delta_1$. Pentru $x = \delta_1$, $y = \frac{\delta_1}{2}$, urmează că

$$|x - y| = \frac{\delta_1}{2} < \delta_1, \quad |g(x) - g(y)| = \frac{1}{\delta_1} > 1,$$

contradicție. Urmează că g nu este uniform continuă pe $(0, 1]$

6.2.3 Funcții Lipschitz. Contrații

Vom preciza în cele ce urmează o categorie specială de funcții uniform continue.

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există $L > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ pentru orice $x, y \in D$, atunci f se numește *funcție Lipschitz* (sau *funcție lipschitziană*) pe D , L numindu-se *constantă Lipschitz* a funcției f .

Teorema 6.13. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f lipschitziană pe D . Atunci f este uniform continuă pe D .

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și fie $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{L}$, unde L este o constantă Lipschitz a funcției f . Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

pentru orice $x, y \in D$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon$, deci f este uniform continuă pe D . ■

Teorema de punct fix a lui Banach

Fie $T : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $x_0 \in D$ este un *punct fix* al lui T dacă $T(x_0) = x_0$. De asemenea, vom numi *contracție* o funcție Lipschitz care admite o constantă Lipschitz $L < 1$. În cele ce urmează vom folosi notația simplificată $T(x) = Tx$, iar $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ ori } T}$.

Următoarea teoremă, numită *teorema de punct fix a lui Banach* precizează existența și unicitatea punctului fix al unei contracții a unei mulțimi închise D în ea însăși, precizând și o metodă de obținere a acestui punct fix, lucru care o face utilă în determinarea aproximativă a soluțiilor unor clase largi de ecuații.

Teorema 6.14. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ închisă, iar $T : D \rightarrow D$ o contracție a lui D în ea însăși. Există atunci un unic punct fix al lui T , iar sirul $(T^n x_0)_{n \geq 0}$ este convergent la acest punct fix pentru orice punct initial $x_0 \in D$.

6.2.4 Funcții continue definite pe intervale închise și mărginite

A fost demonstrat deja că funcțiile continue transformă intervalele în intervale. O precizare ce se poate aduce este că funcțiile continue transformă intervalele închise și mărginite tot în intervale închise și mărginite. Acest lucru este exprimat în următorul rezultat, numit *teorema lui Weierstrass*.

Teorema 6.15. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este mărginită și își atinge marginile pe $[a, b]$.

Deși s-a observat mai sus că funcțiile continue nu sunt necesar uniform continue, acestea devin totuși uniform continue atunci când domeniul lor este un interval închis și mărginit.

Teorema 6.16. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$. Atunci f este uniform continuă pe $[a, b]$.

Aplicații

6.1. Precizați un exemplu de funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $|f|$ este continuă fără ca f să fie continuă.

6.2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x^2}-a}{x^2}, & x > 0 \\ 2x^3 - 4x + b, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.

6.3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ ax, & x = 2 \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 2$.

6.4. Demonstrați că funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x_0 = 0$.

6.5. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinați $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.

6.6. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^p \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, & x \in (0, \infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Determinați $p \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă în $x_0 = 0$.

6.7. Precizați punctele de discontinuitate ale funcției $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x^2]$ și natura acestora.

6.8. 1. Precizați punctele de discontinuitate ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$ și natura acestora.

2. Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, este continuă pe \mathbb{R} .

6.9. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$. Prelungiți f prin continuitate în $x_0 = 0$.

6.10. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2 \sin \frac{1}{x+2}$. Prelungiți f prin continuitate în $x_0 = -2$.

6.11. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 3}{x-1}, & x < 1 \\ \ln(x-1), & x > 1 \end{cases}$. Demonstrați că f nu poate fi prelungită prin continuitate în $x_0 = 1$.

6.12. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|f(x) - x| \leq x^2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

1. Determinați $f(0)$.
2. Demonstrați că f este continuă în 0.

6.13. 1. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue în $x = 0$ pentru care $f(x) = f(2x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Determinați funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continue în $x = 1$ pentru care $f(x) = f(x^2)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

6.14. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
3. Dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

6.15. Fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f_1, f_2 continue și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Atunci f este continuă în $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f_1(x_0) = f_2(x_0)$.

6.16. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$.

1. Dacă f este continuă în x_0 , iar g este discontinuă în x_0 , atunci $f + g$ este discontinuă în x_0 .
2. Dacă f, g discontinue în x_0 , rezultă că $f + g$ este discontinuă în x_0 ?

6.17. 1. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Dacă $f(x_0) < g(x_0)$, arătați că există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in U \cap D$.

2. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$, f continuă în x_0 . Dacă $m, M \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât $m < f(x_0) < M$, arătați că există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că $m < f(x) < M$ pentru orice $x \in U \cap D$.

6.18. Demonstrați că ecuația $3^x(x^3 + 1) - 2 = 0$ are o unică rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

6.19. Demonstrați că ecuația $x^5 - 3x^4 - 2x + 1 = 0$ admite cel puțin o rădăcină reală.

6.20. Demonstrați că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ecuația $x \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}$ are măcar o rădăcină în intervalul $(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{2n\pi})$.

6.21. 1. Demonstrați că ecuația $x^3 + 2x = 3 + \frac{1}{n}$ are o unică soluție reală x_n pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

6.22. Fie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, f continuă. Demonstrați că există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.

6.23. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Demonstrați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c}$.

6.24. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă și fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Demonstrați că există $c \in [a, b]$ astfel ca $f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$.

6.25. Fie $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x \in [-2, -1) \\ x + a, & x \in [-1, 2] \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă proprietatea lui Darboux pe $[-2, 2]$.

6.26. Demonstrați că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$, este bijectivă.

6.27. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \cup [2, 3]$, f continuă. Demonstrați că f nu este surjectivă.

6.28. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ este finită. Atunci f este mărginită.

6.29. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f crescătoare. Demonstrați că $\text{Im } f = [f(a), f(b)]$.

6.30. 1. Folosind eventual inegalitatea $\sin x < x$ pentru $x > 0$, demonstrați că $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$ este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

2. Folosind eventual inegalitatea $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pentru $x, y \geq 0$, demonstrați că $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

6.31. 1. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este uniform continuă pe D , $D_1 \subseteq D$, iar $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ este o restricție a lui f la D_1 , atunci f_1 este uniform continuă pe D_1

2. Demonstrați că $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$, este uniform continuă pe $(0, 1]$.

6.32. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Dacă există limitele $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ și sunt finite, atunci f este uniform continuă pe \mathbb{R} .

2. Demonstrați că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg x$, este uniform continuă pe \mathbb{R} .

3. Demonstrați că $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, este uniform continuă pe \mathbb{R} .

6.33. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și periodică. Atunci f este uniform continuă.

6.34. 1. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Dacă există $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0} \subseteq D$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, atunci f nu este uniform continuă pe D .

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă. Dacă există $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0} \subseteq (a, b)$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, atunci f nu este uniform continuă pe (a, b) .

3. Demonstrați că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.

4. Demonstrați că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.

5. Demonstrați că $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$, nu este uniform continuă pe $[0, \infty)$.

6.35. 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f uniform continuă. Folosind eventual criteriul Cauchy-Bolzano, arătați că există limitele $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x)$ și sunt finite.

2. Demonstrați că $f : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, nu este uniform continuă pe $(0, \frac{\pi}{2})$.
3. Demonstrați că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, nu este uniform continuă pe $(0, \infty)$.

Capitolul 7

DERIVATE. DIFERENȚIALE

Noțiunea de *derivată*, elementul fundamental al calculului diferențial, are o deosebită importanță în studiul matematic al mărimilor variabile. Problemele principale care au condus la introducerea noțiunii de derivată sunt problema tangentei, respectiv determinarea tangentei la o curbă într-un punct dat, fiind cunoscută ecuația curbei, și problema vitezei, respectiv determinarea vitezei unui punct mobil, fiind cunoscută legea de mișcare a acestuia. În cele ce urmează, vom formula aceste probleme în termeni matematici, cu ajutorul noțiunii de limită.

Problema tangentei

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I , fie G_f graficul funcției f și fie $A(a, f(a))$ un punct pe G_f . Dorim să determinăm ecuația tangentei în A la G_f .

Se poate observa că această tangentă poate intersecta G_f și într-un alt punct decât A , iar dreptele care intersectează G_f doar în A nu sunt neapărat tangente la G_f . Nu putem deci defini această tangentă ca dreapta care are în comun cu G_f doar pe A , aşa cum s-a întâmplat pentru tangentă într-un punct la un cerc.

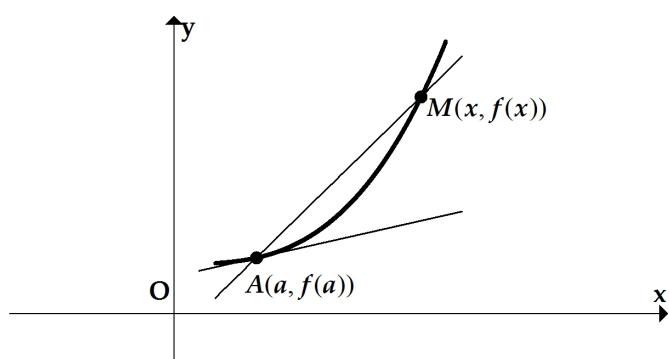


Figura 7.1: Tangenta în A la graficul funcției, respectiv secanta AM

Fie $M(x, f(x))$ un alt punct pe G_f . Dreapta AM care intersectează G_f cel puțin în A și M , se va numi dreaptă secantă; intuitiv, vom defini tangenta în A la G_f ca poziția limită a secantei AM atunci când M tinde la A .

Cum panta dreptei AM este $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (presupunem că AM nu este verticală, deci $x \neq a$), urmează că panta tangentei în A la G_f este $m_{tg} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. În aceste condiții, ecuația tangentei în A la G_f este

$$y - f(a) = m_{tg}(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + m_{tg}(x - a),$$

rămânând a fi interpretate ulterior situațiile în care m_{tg} (definită ca o limită) nu există, sau există, dar este infinită.

Problema vitezei



Figura 7.2: Pozițiile punctului M la momentele t_0 , respectiv t

Considerăm un punct mobil M în mișcare rectilinie de-a lungul axei Ox , a cărui lege de mișcare este $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul inițial, iar x este abscisa punctului M .

Fie $[t_0, t]$ un interval de timp, $t > t_0$. În acest interval, M parurge distanța $x(t) - x(t_0)$, deci viteza sa medie (viteza pe care ar trebui să-o aibă M pentru a parurge distanța $x(t) - x(t_0)$ în timpul $t - t_0$, dacă s-ar mișca uniform) este $v_{[t_0, t]} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$. Totuși, cu cât intervalul de timp $[t_0, t]$ este mai mare, cu atât această viteză oferă mai puține informații despre viteza lui M la momentul t_0 . Intuitiv, intervalul $[t_0, t]$ trebuie să fie cât mai mic, iar viteza instantanea a lui M la momentul t_0 este atunci $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$.

7.1 Funcții derivabile. Funcții diferențiabile

Derivata unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in D \cap D'$. Vom spune că f are derivată în x_0 dacă există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, numită derivata funcției f în punctul x_0 și

notată $f'(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția f este derivabilă în x_0 .

Raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se numește *raport incremental* și măsoară viteza de variație a funcției pe intervalul $[x_0, x]$; prin analogie cu problema vitezei indicată mai sus, putem spune că $f'(x_0)$ reprezintă *viteza de variație instantanee a funcției f în punctul x_0* .

De asemenea, cu notația $x = x_0 + h$, obținem că

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să studiem derivabilitatea funcției f în $x_0 = 2$. Observăm că

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4, \end{aligned}$$

deci f este derivabilă în $x_0 = 2$, iar $f'(2) = 4$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Să studiem derivabilitatea funcției f în $x_0 = 0$. Observăm că

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

deci f nu este derivabilă în $x_0 = 0$, dar are derivată în acest punct, iar $f'(0) = +\infty$.

Cu ajutorul noțiunii de derivată într-un punct, putem studia rezolvarea problemelor menționate anterior.

Ecuația tangentei într-un punct la graficul unei funcții

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $a \in D \cap D'$. Conform considerațiilor de mai sus, obținem următoarele

1. Dacă f este derivabilă în a , atunci ecuația tangentei în $A(a, f(a))$ la G_f este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

observându-se că panta tangentei în $A(a, f(a))$ este valoarea derivatei $f'(a)$.

2. Dacă $f'(a) = +\infty$, sau $f'(a) = -\infty$, atunci tangenta în $A(a, f(a))$ la G_f este verticală, având ecuația $x = a$.

Viteza unui punct material în mișcare

Fie un punct mobil M în mișcare rectilinie de-a lungul axei Ox , a cărui abscisă x este dată prin $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul inițial. Atunci viteza instantanee a lui M la momentul t este $v(t) = x'(t)$.

Derivate laterale

Substituind în definiția derivatei noțiunea de limită cu noțiunea de limită laterală, obținem noțiunea de *derivată laterală*.

Astfel, dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare la stânga pentru D , vom spune că $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ are derivată la stânga în x_0 dacă există limita $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, numită *derivata la stânga a funcției f în punctul x_0* și notată $f'_s(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția f este *derivabilă la stânga* în x_0 . Analog definim noțiunile de *derivată la dreapta*, respectiv *derivabilitate la dreapta*. Cu notația $x = x_0 + h$, obținem că

$$\begin{aligned} f'_s(x_0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \\ f'_d(x_0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru D , atunci f are derivată în x_0 dacă și numai dacă există ambele derive laterale $f'_s(x_0)$ și $f'_d(x_0)$, iar $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. În aceste condiții,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Să studiem derivabilitatea funcției f în $x_0 = 0$. Observăm că

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, f nu are derivată în $x_0 = 0$, neputând fi deci derivabilă în acest punct.

Semitangente

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in D$ punct de acumulare la stânga al lui D . Dacă există $f'_s(a)$, spunem că G_f admite *semitangentă la stânga* în $A(a, f(a))$, înțelegând că există o dreaptă tangentă în A la partea din grafic aflată în stânga lui A . Ca mai sus, ecuația acestei semitangente este $y - f(a) = f'_s(a)(x - a)$, dacă $f'_s(a)$ este finită, respectiv $x = a$ dacă $f'_s(a) = +\infty$ sau $f'_s(a) = -\infty$. În mod analog se definește noțiunea de semitangentă la dreapta.

Puncte unghiulare, puncte de întoarcere

Fie acum $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval deschis, și fie $a \in I$ un punct în care f este continuă.

Dacă $f'_s(a), f'_d(a)$ există și sunt infinite, dar diferite, semitangentele în A la G_f sunt în prelungire, spunându-se că $A(a, f(a))$ este un *punct de întoarcere*.

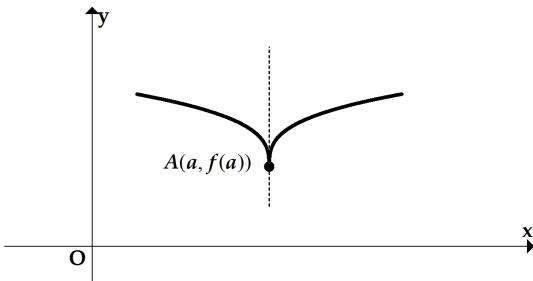


Figura 7.3: $A(a, f(a))$ punct de întoarcere, $f'_s(x_0) = -\infty, f'_d(x_0) = +\infty$

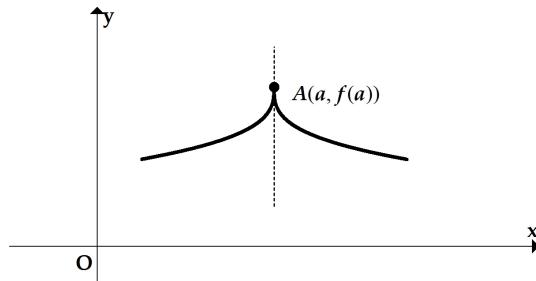


Figura 7.4: $A(a, f(a))$ punct de întoarcere, $f'_s(x_0) = +\infty, f'_d(x_0) = -\infty$

Dacă $f'_s(a), f'_d(a)$ există, sunt diferite, și măcar una dintre ele este finită, semitangentele în A la G_f nu sunt în prelungire, formând un unghi $\alpha \in (0, \pi)$. Se spune atunci că $A(a, f(a))$ este un *punct unghiular*.

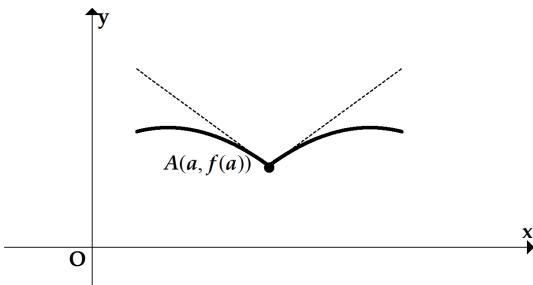


Figura 7.5: $A(a, f(a))$ punct unghiular, $f'_s(x_0), f'_d(x_0)$ finite și diferite

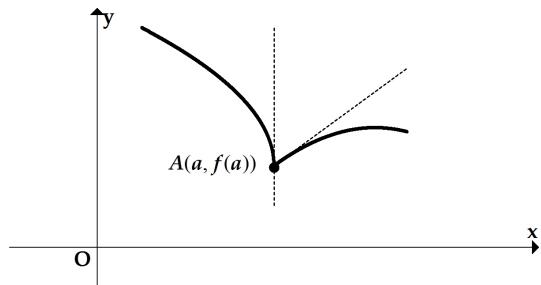


Figura 7.6: $A(a, f(a))$ punct unghiular, $f'_s(x_0) = -\infty, f'_d(x_0)$ finită

Din cele de mai sus, se observă că dacă $A(a, f(a))$ este un punct de întoarcere sau un punct unghiular, atunci f nu este derivabilă în a .

Funcții derivabile pe o mulțime

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă în fiecare punct al unei mulțimi $A \subseteq D$, spunem că f este derivabilă pe A . Dacă f este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că f este derivabilă.

Legătura între derivabilitate și continuitate

În cele ce urmează, vom demonstra că o funcție derivabilă într-un punct este neapărat continuă în acel punct.

Teorema 7.1. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $a \in D \cap D'$ astfel încât f este derivabilă în a . Atunci f este continuă în a .

Demonstrație. Deoarece

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a), \quad \text{pentru } x \neq a,$$

urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \right) \\ &= f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 \\ &= f(a), \end{aligned}$$

deci f este continuă în a . ■

În mod similar, se poate arăta că derivabilitatea la stânga (dreapta) a funcției f în a antrenează continuitatea la stânga (dreapta) a funcției în a .

7.1.1 Operații cu funcții derivabile

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții derivabile au ca rezultat funcții derivabile, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 7.2. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$, f, g derivabile în x_0 . Atunci

1. $f + g, f - g$ sunt derivabile în x_0 , iar

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata sumei este egală cu suma derivatelor), respectiv

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(derivata diferenței este egală cu diferența derivatelor).

2. αf este derivabilă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

(constanta cu care se înmulțește trece înaintea derivatei).

3. fg este derivabilă în x_0 , iar

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$, iar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Demonstrație. Vom demonstra doar 4), celelalte formule obținându-se asemănă-

tor. Se observă că

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
 &= \frac{1}{g(x_0)^2} (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)),
 \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 7.3 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

Teorema 7.3. Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D' \cap D$ astfel încât f_1, f_2, \dots, f_n sunt derivabile în x_0 . Atunci

1. Funcția sumă $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ este derivabilă în x_0 și

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f'_1(x_0) + f'_2(x_0) + \dots + f'_n(x_0).$$

2. Funcția produs $f_1 f_2 \dots f_n$ este derivabilă în x_0 și

$$\begin{aligned}
 (f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) &= f'_1(x_0)f_2(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0)f'_2(x_0) \cdots f_n(x_0) \\
 &\quad + \dots + f_1(x_0)f_2(x_0) \cdots f'_n(x_0).
 \end{aligned}$$

7.1.2 Derivatele funcțiilor elementare

Vom calcula în cele ce urmeză derivele unor funcții uzuale.

Funcția constantă

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$

deci

$$c' = 0.$$

Funcția putere

Fie $n \in N^*$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

deci

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Caz particular

$$(x)' = 1.$$

Cu ajutorul unor raționamente asemănătoare, se pot deduce formulele corespunzătoare de derivarea unor alte funcții elementare, după cum urmează.

Funcția radical

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x \neq 0, \text{ dacă } n \text{ este impar,} \\ (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0, \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{aligned}$$

Caz particular

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Funcția exponențială cu bază e

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funcția exponențială cu bază oarecare

Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Atunci

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funcția sinus

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funcția cosinus

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funcția logaritmică cu bază e

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Funcția logaritmică cu bază oarecare

Fie $a > 0, a \neq 1$. Atunci

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$$

deci

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

Funcția tangentă

Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$. Atunci

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

deci

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funcția cotangentă

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7.1.3 Derivata funcției compuse

Teorema 7.4. Fie I_1, I_2 două intervale din \mathbb{R} , $u : I_1 \rightarrow I_2$, $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$ astfel încât u este derivabilă în x_0 , iar f este derivabilă în $u(x_0)$. Atunci $f \circ u$ este derivabilă în x_0 , iar

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$$

Egalitatea menționată în enunțul teoremei de mai sus se mai poate pune și sub forma prescurtată

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u',$$

fiind deosebit de utilă pentru calculul derivatelor unor funcții care, fără a fi elementare, se pot obține prin compunerea unor funcții elementare. În aceste situații, u se definește adesea cu ajutorul **tuturor** termenilor dintr-o paranteză, de la exponent, de sub radical, de la numitor, și.a.m.d.. După această înlocuire se identifică apoi f , ținând cont că funcția de plecare se scrie ca $f(u)$.

Exemplu. 1. $(\sin(x^2 + x + 2))'$.

Putem defini $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + x + 2$ (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sin u$. Atunci

$$\begin{aligned} (\sin(x^2 + x + 2))' &= \sin'(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

Echivalent,

$$\begin{aligned} (\sin(x^2 + x + 2))' &= (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

2. $((3x + 2)^5)'$

Putem defini $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = 3x + 2$ (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, deoarece după înlocuire $f(u) = u^5$. Atunci

$$((3x + 2)^5)' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u' = 5(3x + 2)^4(3x + 2)' = 15(3x + 2)^4.$$

$$3. (\sqrt{x^2 + 1})'$$

Putem defini $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 1$ (folosim toți termenii de sub radical), iar în acest caz f este dată de $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sqrt{u}$. Atunci

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 + 1)' = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

7.1.4 $(f^g)'$

Formula de derivare a funcției compuse se poate aplica cu succes și pentru derivarea funcțiilor exponentiale în care atât baza cât și exponentul conțin variabila. În acest sens, fie I un interval și fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Putem defini atunci funcția $f^g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f^g(x) = (f(x))^{g(x)}$.

Deoarece $f(x)^{g(x)} > 0$ pentru orice $x \in D$, au loc relațiile

$$f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f},$$

de unde, ținând seama că $(e^u)' = e^u \cdot u'$, obținem că

$$\begin{aligned} (f^g)' &= (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f} \cdot (g \ln f)' = e^{g \ln f} (g' \ln f + g (\ln f)') \\ &= f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right), \end{aligned}$$

formulă care se poate scrie și sub forma

$$(f^g)' = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'.$$

Se poate observa că $(f^g)'$ este suma a doi termeni, primul reprezentând valoarea derivatei atunci când f este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecință o funcție exponentială), iar al doilea reprezentând valoarea derivatei atunci când g este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecință o funcție putere).

7.1.5 Derivata unui determinant funcțional

Fie $f_{ij} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, funcții derivabile pe D . Atunci determinantul funcțional definit cu ajutorul acestor funcții,

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix},$$

este la rândul său o funcție derivabilă pe D și

$$\begin{aligned} F' &= \begin{vmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{vmatrix}, \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n, \end{aligned}$$

în determinantul Δ_i din membrul drept, $1 \leq i \leq n$, fiind derivate doar funcțiile de pe linia i . Demonstrația se poate realiza cu ajutorul formulei de dezvoltare a unui determinant.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Conform formulei de mai sus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \right)' \\ &= \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ -\sin(x+a) & -\sin(x+b) & -\sin(x+c) \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

deoarece atât determinanții în care două linii sunt proporționale cât și determinanții în care toate elementele de pe o linie sunt egale cu 0 sunt nuli.

7.1.6 Derivata funcției inverse

Fie I, J intervale din \mathbb{R} și fie $f : I \rightarrow J$ o funcție continuă și bijectivă. Atunci f este inversabilă, având loc relația

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

respectiv

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pentru orice } y \in J,$$

iar f^{-1} este de asemenea continuă.

Ne propunem să determinăm transmiterea derivabilității de la f la f^{-1} . Derivând (formal, pentru moment) relația $f^{-1}(f(x)) = x$ cu ajutorul formulei de derivare a funcției compuse, obținem că $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$, deci

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Rămâne acum să dăm acestei formule un sens mai riguros.

Teorema 7.5. Fie I, J intervale din \mathbb{R} și fie $f : I \rightarrow J$ o funcție continuă și bijectivă. Dacă f este derivabilă în x_0 , iar $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1} : J \rightarrow I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, iar

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Demonstrați că f este bijectivă și calculați $(f^{-1})'(3)$.

Soluție. Mai întâi, să observăm faptul că f este continuă și strict crescătoare, fiind suma a două funcții continue și strict crescătoare. Fiind strict monotonă, f este injectivă. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, iar f transformă un interval într-un interval, fiind continuă, urmează că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă. Cum f este atât injectivă cât și surjectivă, urmează că ea este bijectivă, deci și inversabilă.

Deoarece $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, urmează că f^{-1} este derivabilă în orice $y = f(x) \in \mathbb{R}$, iar $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Pentru $y = 3$, urmează că $x^3 + 2x = 3$, deci $x = 1$ (cum f este injectivă, soluția ecuației $f(x) = 3$ este unică). Urmează că $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$.

7.1.7 Diferențiala unei funcții

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval, și fie $x \in I$. Să presupunem că f este derivabilă în x_0 . În acest caz, conform definiției derivatei unei funcții într-un

punct, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

Să considerăm atunci funcția $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0,$$

deci α este continuă în x_0 . În plus, pentru $x \neq x_0$, avem că

$$\begin{aligned} & f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \alpha(x)(x - x_0) \\ &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) (x - x_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

această egalitate fiind valabilă și pentru $x = x_0$. Aceste considerații motivează introducerea definiției următoare.

Funcții diferențiabile într-un punct

Vom spune că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este *diferențiabilă* în $x_0 \in I$ dacă există numărul $A \in \mathbb{R}$ și funcția $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și nulă în x_0 , astfel ca

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Conform celor de mai sus, dacă f este derivabilă în x_0 , atunci f este diferențiabilă în x_0 , iar $A = f'(x_0)$. Reciproc, să presupunem că f este diferențiabilă în x_0 . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A,$$

deci f este derivabilă în x_0 , iar $f'(x_0) = A$. Se obține de aici următorul rezultat.

Teorema 7.6. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este derivabilă în $x_0 \in I$ dacă și numai dacă este diferențială în $x_0 \in I$.

Conform celor de mai sus, o funcție derivabilă într-un punct x_0 admite în acel punct următoarea dezvoltare de ordinul întâi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \text{ cu } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

(de fapt, vom vedea ulterior că această dezvoltare reprezintă formula lui Taylor de ordinul întâi asociată funcției f în punctul x_0). Cum $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, termenul $\alpha(x)(x - x_0)$ este de ordin mai mic decât $f'(x_0)(x - x_0)$ pentru x apropiat de x_0 . Ignorînd acest termen, obținem următoarea formulă de aproximare

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0,$$

exprimabilă și sub forma

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x - x_0 \approx 0,$$

sau, cu notația $x - x_0 = h$,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în care diferența $f(x_0 + h) - f(x_0)$ reprezintă variația funcției atunci când argumentul variază de la x_0 la $x_0 + h$. Suntem atunci conduși de considerentele de aproximare de mai sus la a defini următorul concept de diferențială a unei funcții.

Diferențiala unei funcții într-un punct

Fiind dată o funcție $f : I \rightarrow R$ derivabilă în $x_0 \in I$, vom numi *diferențială a funcției f în x_0* funcția liniară $df(x_0)$ definită prin

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Urmează atunci că

$$f(x) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în loc de $df(x_0)(h)$ folosindu-se și notația $df(x_0; h)$.

Pentru funcția identică $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$, urmează că

$$dx(x_0)(h) = h, \quad \text{pentru orice } x_0 \in \mathbb{R},$$

iar întrucât $dx(x_0)$ este independent de x_0 , se va folosi în cele ce urmează notația simplificată dx . Cu notațiile de mai sus,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)dx(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R},$$

de unde obținem următoarea egalitate de funcții liniare

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei unei funcții într-un punct

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru un punct arbitrar x , obținem deci

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{respectiv} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (7.1)$$

7.1.8 Operații cu funcții diferențiabile

Datorită relației (7.1), regulile de calcul ale derivatelor unor funcții se transmit și la diferențiale.

Teorema 7.7. Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in I$, f, g derivabile în x . Atunci

1. $f + g, f - g$ sunt diferențiabile în x , iar

$$d(f + g)(x) = (f + g)'(x)dx = df(x) + dg(x),$$

respectiv

$$d(f - g)(x) = (f - g)'(x)dx = df(x) - dg(x).$$

2. αf este diferențiabilă în x pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar

$$d(\alpha f)'(x) = (\alpha f)'(x)dx = \alpha df(x).$$

3. fg este diferențiabilă în x_0 , iar

$$d(fg)(x) = (fg)'(x)dx = df(x)g(x) + f(x)dg(x).$$

4. $\frac{f}{g}$ este diferențiabilă în x dacă $g(x) \neq 0$, iar

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)dx = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Regulile de calcul de mai sus se mai pot scrie și sub următoarele forme prescurtate, prin omiterea punctului curent

$$\begin{aligned} d(f+g) &= df + dg, & d(f-g) &= df - dg, & d(\alpha f) &= \alpha df, \\ d(fg) &= df \cdot g + f \cdot dg, & d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}. \end{aligned}$$

Exemplu. 1. $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$.

$$2. d(\cos^3 x) = (\cos^3 x)'dx = 3\cos^2 x(\cos x)'dx = -3\cos^2 x \sin x dx$$

$$3. d(x^2 e^x) = (x^2 e^x)'dx = (2xe^x + x^2 e^x)dx.$$

$$4. d(x^2 e^x) = d(x^2) \cdot e^x + x^2 \cdot d(e^x) = 2xe^x dx + x^2 e^x dx = (2x + x^2)e^x dx.$$

7.1.9 Diferențiala funcției compuse

Are de asemenea loc și o formulă de diferențiere a funcției compuse similară celei de derivare.

Teorema 7.8. Fie I_1, I_2 două intervale din \mathbb{R} , $u : I_1 \rightarrow I_2$, $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x \in I_1$ astfel încât u este diferențiabilă în x , iar f este diferențiabilă în $u(x)$. Atunci $f \circ u$ este diferențiabilă în x , iar

$$d(f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x)dx = f'(u(x))du(x).$$

Prin omiterea punctului curent, regula de mai sus se poate scrie sub următoarea formă prescurtată

$$d(f \circ u) = f'(u)du.$$

De remarcat faptul că diferențiala funcției compuse se calculează ca și cum u ar fi variabilă independentă.

- Exemplu.**
1. $d(\cos^3 x) = d(u^3) = 3u^2 du = 3 \cos^2 x d(\cos x) = -3 \cos^2 x \sin x dx.$
 2. $d(e^{\sin x}) = d(e^u) = e^u du = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x dx.$

7.2 Derivate și diferențiale de ordin superior

7.2.1 Derivate de ordin superior

Fie I un interval și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe o vecinătate a lui $x_0 \in I$. Dacă f' este la rândul său derivabilă în x_0 , vom spune că f este *de două ori derivabilă* în x_0 iar derivata lui f' în x_0 se va numi *derivata a doua a lui* f sau *derivata de ordinul al doilea a lui* f , fiind notată $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Conform definiției,

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă f este de două ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numește *de două ori derivabilă* pe I .

În mod inductiv, dacă f este derivabilă de $n - 1$ ori pe o vecinătate a lui x_0 , iar derivata de ordinul $n - 1$ este la rândul său derivabilă în x_0 , vom spune că f este de n ori derivabilă în x_0 . Derivata de ordinul n a lui f în x_0 , notată prin $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$, este definită ca derivată a derivatei de ordinul $n - 1$, în sensul că

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Similar, dacă f este de n ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numește *de n ori derivabilă* pe I .

- Exemplu.** Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2+3x}$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 3)e^{x^2+3x}, \\ f''(x) &= ((2x + 3)e^{x^2+3x})' = (4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = ((4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x})' = (8x^3 + 36x^2 + 66x + 45)e^{x^2+3x}.$$

Funcții de clasă C^k . Difeomorfisme

Vom nota

$$C^n(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ de } n \text{ ori derivabilă pe } I, f^{(n)} \text{ continuă pe } I\}$$

$$C^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ derivabilă de orice ordin pe } I\}.$$

Dacă $f \in C^n(I)$ (respectiv $f \in C^\infty(I)$), atunci f se va numi *de clasă C^n pe I* (respectiv *de clasă C^∞ pe I* , sau *indefinit derivabilă pe I*). Dacă $f : I \rightarrow J$, f inversabilă este în aşa fel încât atât f cât și f^{-1} sunt derivabile pe domeniile lor (respectiv sunt de clasă C^n pe domeniile lor), f se va numi *difeomorfism* (respectiv C^n -*difeomorfism* sau *difeomorfism de clasă C^n*) pe I .

- Exemplu.**
1. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ (funcția polinomială de gradul al doilea) este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$, $f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m \geq 3$.
 2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n-1$, $a_n \in \mathbb{R}^*$ (funcția polinomială de gradul n) este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f^{(n)}(x) = n! a_n$, $f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m > n$.
 3. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, putându-se demonstra prin inducție că $f^{(n)}(x) = e^x$ pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \geq 1$.
 4. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \sin^{(4k)}(x) &= \sin x, & \sin^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ \sin^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & \sin^{(4k+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \geq 0$.

5. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned}\cos^{(4k)}(x) &= \cos x, & \cos^{(4k+1)}(x) &= -\sin x \\ \cos^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, & \cos^{(4k+3)}(x) &= \sin x\end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \geq 0$.

6. Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $f(x) = \frac{1}{x+a}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, iar $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ și } n \geq 1.$$

7.2.2 Formula lui Leibniz

Fiind date $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I , ne propunem să determinăm o formulă pentru derivata de ordinul n a produsului fg al acestora.

Teorema 7.9. Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I , $n \in N^*$. Atunci fg este de clasă C^n pe I , iar

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \dots + C_n^n fg^{(n)}.$$

Formula de calcul a derivatei de ordinul n a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de *formula lui Leibniz*. Remarcăm asemănarea între această formulă și formula binomială

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

În aplicații, formula se utilizează în special pentru funcții produs în care unul dintre factori este o funcție polinomială (și deci pentru care derivatele de la un

anumit ordin încolo sunt nule, micșorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior ușor de determinat.

| Exercițiu. Determinați $(x^2 e^{2x})^{(50)}$.

Soluție. Considerând $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{2x}$, observăm că $f^{(k)}(x) = 0$ pentru orice $k \geq 3$, iar $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ pentru orice $k \geq 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(x^2 e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48}(x^2)''(e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49}(x^2)'(e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50}x^2(e^{2x})^{(50)} \\ &= C_{50}^{48}2 \cdot 2^{48}e^{2x} + C_{50}^{49}2x \cdot 2^{49}e^{2x} + C_{50}^{50}x^2 \cdot 2^{50}e^{2x} \\ &= 2^{49}e^{2x}(1225 + 100x + 2x^2).\end{aligned}$$

7.2.3 Diferențiale de ordin superior

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$. Vom spune că f este *de două ori diferențială în x_0* dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 , iar f' este diferențială în x_0 . În aceste condiții, vom numi *diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în x_0* , notată $d^2f(x_0)$, funcția de gradul al doilea definită prin

$$d^2f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul al doilea

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcții într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin dx^2 se va înțelege $dx \cdot dx$. Inductiv, vom spune că f este *de n ori diferențială în x_0* dacă f este derivabilă de $n - 1$ ori într-o vecinătate a lui x_0 , iar $f^{(n-1)}$ este diferențială în x_0 . În aceste condiții, vom numi *diferențiala de ordinul n a funcției f în x_0* , notată $d^n f(x_0)$, funcția de gradul n definită prin

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul n

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul n a unei funcții într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar x , obținem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Exemplu. 1. $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)}dx^n = a^n e^{ax}dx^n$, pentru $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

2. $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)}dx^n = \frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}dx^n$, pentru $a, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, ax+b > 0$.

7.3 Teoremele fundamentale ale calculului diferențial

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți importante ale funcțiilor derivabile și unele aplicații ale acestora în studiul monotoniei și aproximării funcțiilor. Începem prin a defini noțiunea de punct de extrem.

Puncte de minim local. Valori minime locale

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că $x_0 \in I$ este un *punct de minim local* dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mică valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui x_0 . În aceste condiții $f(x_0)$ se numește *valoare minimă locală*.

Puncte de maxim local. Valori maxime locale

Similar, vom spune că $x_0 \in I$ este un *punct de maxim local* dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mare valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui x_0 . În aceste condiții $f(x_0)$ se numește *valoare maximă locală*.

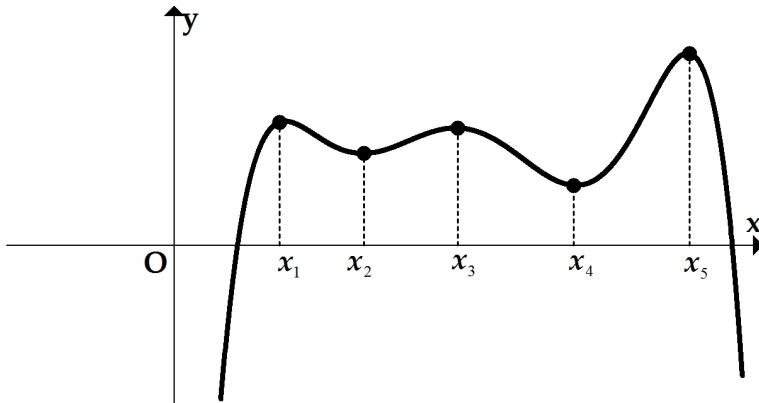


Figura 7.7: x_2, x_4 puncte de minim local, x_1, x_3, x_5 puncte de maxim local

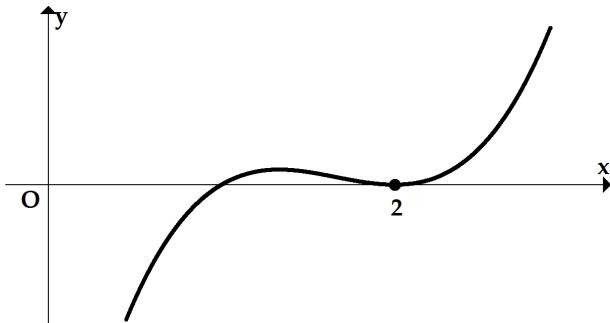
Puncte de extrem local. Valori extreme locale

Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim local al funcției f , se spune atunci că x_0 este un *punct de extrem local* al funcției f , valorile funcției f în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme locale* ale funcției f . De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) local al funcției f , punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcției f se numește *punct de minim (maxim) local al graficului*.

Puncte de extrem global. Valori extreme globale

Dacă x_0 este în așa fel încât $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este *punct de minim global* al lui f , iar dacă $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este *punct de maxim global* al lui f . Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim global al funcției f , se spune atunci că x_0 este un *punct de extrem global* al funcției f , valorile funcției f în punctele de extrem local numindu-se *valori extreme globale* ale funcției f . De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) global al funcției f , punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcției f se numește *punct de minim (maxim) global al graficului*.

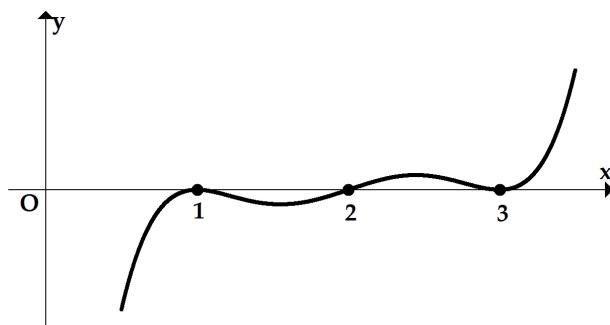
Se observă că orice punct de extrem global este și punct de extrem local, nu însă și reciproc. De exemplu 2 este punct de minim local al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$, deoarece $f(2) = 0$, iar pe o vecinătate suficient de mică a sa f ia doar valori pozitive, dar nu este punct de minim global, deoarece f ia și valori negative (de exemplu, $f(0) = -4$).

Figura 7.8: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$

Se poate observa că o funcție f poate admite mai multe puncte de minim sau maxim local, putând exista deasemenea valori minime locale mai mari decât valori maxime locale.

Exemplu. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are 0 ca punct de minim global, deoarece $f(0) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie, 0 este și punct de minim local. Se observă de asemenea că $f'(0) = 0$.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^2$ are 1 ca punct de maxim local, deoarece $f(1) = 0$, iar $f(x) \leq 0$ pentru x apropiat de 1 și pe 3 ca punct de minim local, deoarece $f(3) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru x apropiat de 3. Totuși, acestea nu sunt puncte de extrem global, deoarece f ia atât valori strict negative (de exemplu $f(0) = -18$), cât și valori strict pozitive (de exemplu $f(4) = 18$).

Figura 7.9: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x - 3)^2$

7.3.1 Teorema lui Fermat

Vom preciza în cele ce urmează un principiu de localizare a punctelor de extrem ale unei funcții date, cunoscut sub numele de *teorema lui Fermat*

Teorema 7.10. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie x_0 un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă. Atunci $f'(x_0) = 0$.

Se poate observa că dacă x_0 este un punct de extrem care nu este interior intervalului I , atunci $f'(x_0)$ poate să nu fie 0. În acest sens, fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Atunci 0 și 1 sunt puncte de minim global, respectiv de maxim global, deoarece f este strict crescătoare pe $[0, 1]$, deci sunt și puncte de extrem local. Totuși, $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

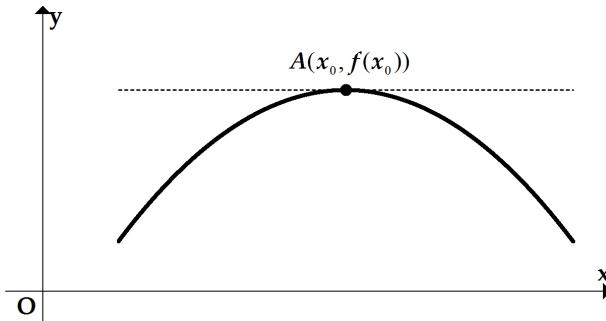
De asemenea, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată, în sensul că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci x_0 nu este neapărat punct de extrem, chiar dacă este interior intervalului I . În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Atunci f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 3x^2$, pentru $x \in \mathbb{R}$, deci $f'(0) = 0$. Totuși, 0 nu este punct de extrem, deoarece $f(0) = 0$, iar f ia în orice vecinătate a lui 0 atât valori strict negative (pentru $x < 0$), cât și valori strict pozitive (pentru $x > 0$).

În fine, să observăm și că o funcție poate avea puncte de extrem în care nu este derivabilă. În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Atunci $0 = f(0) \leq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$, deci 0 este punct de minim global, dar $f'_s(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$, deci f nu este derivabilă în 0.

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Fermat.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 este un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă, atunci tangenta la grafic în punctul de extrem corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ al graficului, de pantă $f'(x_0) = 0$, este paralelă cu Ox .



Puncte critice

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că x_0 este un *punct critic* al lui f dacă f este derivabilă în x_0 , iar $f'(x_0) = 0$.

Altfel spus, punctele critice ale lui f sunt rădăcinile lui f' . Cu această precizare, teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcții situate în interiorul domeniului de definiție și în care acea funcție este derivabilă se găsesc printre punctele critice. Totuși, s-a observat anterior că nu orice punct critic este punct de extrem.

Cu ajutorul teoremei lui Fermat, se poate demonstra și următorul rezultat.

Teorema 7.11. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I . Atunci f' are proprietatea lui Darboux pe I .

7.3.2 Teorema lui Rolle

Funcție Rolle pe un interval

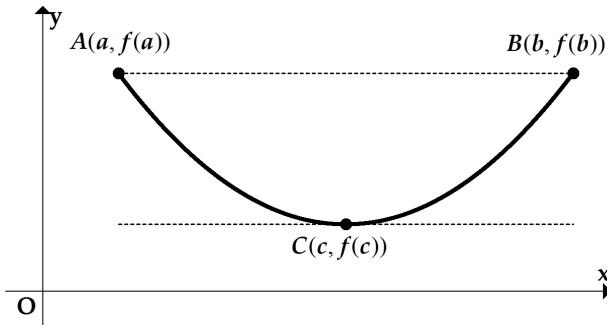
Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că f este *funcție Rolle* pe $[a, b]$ dacă f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) . Următorul rezultat poartă numele de *teorema lui Rolle*.

Teorema 7.12. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f funcție Rolle pe $[a, b]$, pentru care $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Rolle.

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Rolle pe $[a, b]$ pentru care $f(a) = f(b)$, atunci există pe graficul funcției f un punct $C(c, f(c))$ în care tangenta la grafic este paralelă cu Ox .



Teorema lui Rolle admite două consecințe importante privind localizarea unor rădăcini ale derivatei, respectiv ale funcției.

Corolar 7.12.1. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I . Între două rădăcini ale lui f se află cel puțin o rădăcină a lui f' .

Demonstrație. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, astfel că $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Atunci f este funcție Rolle pe $[x_1, x_2]$ și aplicând teorema lui Rolle pe acest interval obținem că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = 0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Corolar 7.12.2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, f derivabilă pe I . Între două rădăcini consecutive ale lui f' se află cel mult o rădăcină a lui f .

Demonstrație. Fie $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ rădăcini consecutive ale lui f' . Presupunem prin reducere la absurd că există două rădăcini a, b ale lui f , $a < b$, situate între x_1 și x_2 , deci $x_1 < a < b < x_2$. Conform Corolarului 7.12.1, există cel puțin încă o rădăcină x_3 a lui f' situată între a și b , ceea ce înseamnă că x_1, x_2 nu sunt rădăcini consecutive, contradicție. ■

Cu ajutorul acestor corolarii se va preciza un algoritm de determinare a numărului rădăcinilor unei ecuații situate într-un interval dat.

Şirul lui Rolle

Fiind dată funcția derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, dorim să determinăm numărul rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$. În acest scop, procedăm în următoarele etape.

1. Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ și determinăm rădăcinile c_1, c_2, \dots, c_n ale lui f' .
2. Determinăm $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$ și limitele l_1 și l_2 în capătul inferior, respectiv superior al lui I .
3. Construim sirul $R_0 = \operatorname{sgn}(l_1), R_1 = \operatorname{sgn} f(c_1), R_2 = \operatorname{sgn} f(c_2), \dots, R_n = \operatorname{sgn} f(c_n), R_{n+1} = \operatorname{sgn} f(l_2)$, numit *sirul lui Rolle*, cu convenția că $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1, \operatorname{sgn}(-\infty) = -1$, întrucât limitele l_1 și l_2 pot fi și infinite. De asemenea, în acest sir se pot trece $+$ și $-$ în loc de $+1$ și respectiv -1 . Dacă doi termeni consecutivi R_i și R_{i+1} sunt identici, atunci între abscisele care le corespund nu se află nicio rădăcină a lui f . Dacă R_i și R_{i+1} sunt diferenți, dar nenuli, atunci între abscisele care le corespund se află exact o rădăcină a lui f . În fine, dacă un termen R_i este nul, aceasta înseamnă că abscisa care-i corespunde este rădăcină de ordinul cel puțin 2 a lui f , pentru determinarea exactă a ordinului de multiplicitate fiind necesară determinarea valorilor derivatelor de ordin superior în acest punct.

Exercițiu. Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației $2x^3 - 12x^2 + 18x + 3 = 0$.

Soluție. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 2$. Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x + 18 = 0$, de unde $x_1 = 1, x_2 = 3$, iar $f(x_1) = 11, f(x_2) = 3$. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, urmează că sirul lui Rolle este $- + +$, schimbarea de semn petrecându-se între R_0 (corespunzător lui $x = -\infty$) și R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$). Atunci ecuația dată are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(-\infty, 1)$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	+	+	+	

Exercițiu. Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuației $x^2 - 2 \ln x + m = 0$ în funcție de valorile parametrului real m .

Soluție. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$. Atunci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{2}{x} = 0$, de unde $x_1 = 1$ (rădăcina $x_2 = -1$ nu convine, întrucât nu aparține domeniului de definiție al logaritmului natural), iar $f(x_1) = 1 + m$. De asemenea, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	+	$1+m$	+

Dacă $m < -1$, şirul lui Rolle este $+ - +$, schimbările de semn petrecându-se între R_0 (corespunzător lui $x = 0$) și R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$), respectiv între R_1 (corespunzător lui $x_1 = 1$) și R_2 (corespunzător lui $x = +\infty$). Atunci ecuația dată are două rădăcini reale, situată în intervalele $(0, 1)$ și respectiv $(1, \infty)$.

Dacă $m = 1$, şirul lui Rolle este $+ 0 +$, $x_1 = 1$ fiind rădăcină de ordinul cel puțin 2. Cum $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$, urmează că $f''(1) \neq 0$, iar $x_1 = 1$ este rădăcină dublă a ecuației date, aceasta neavând alte rădăcini reale.

Dacă $m > -1$, şirul lui Rolle este $+++$, fără schimbări de semn. Urmează că ecuația dată nu are rădăcini reale.

7.3.3 Teorema lui Lagrange

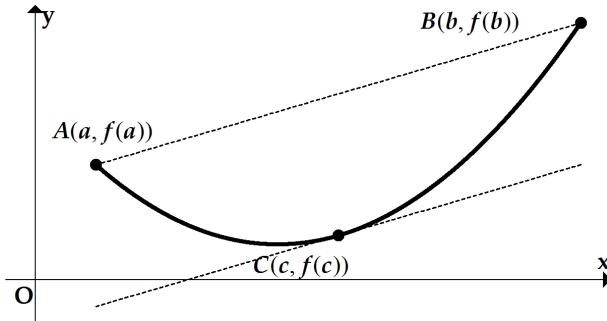
Teorema lui Rolle este un caz particular al următorului rezultat, numit *teorema lui Lagrange sau teorema creșterilor finite*.

Teorema 7.13. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f funcție Rolle pe $[a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

Să remarcăm următoarea *interpretare geometrică* a teoremei lui Lagrange.

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Rolle pe $[a, b]$, atunci există pe graficul funcției f un punct $C(c, f(c))$ în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda AB , unde $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ sunt capetele graficului lui f .



Teorema lui Lagrange are consecințe importante în studiul monotoniei funcțiilor, enunțate în următorul rezultat.

- Corolar 7.13.1.**
1. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I , iar derivata sa este identic nulă pe I , atunci f este constantă pe I .
 2. Dacă $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, sunt derivabile pe I , iar derivatele lor sunt egale pe I , atunci f și g diferă printr-o constantă pe I .
 3. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I , iar derivata sa este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe I , atunci f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe I . Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I , iar derivata sa este negativă (respectiv strict negativă) pe I , atunci f este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe I .

Exemplu. Prima parte a Corolarului 7.13.1 se poate folosi pentru demonstrarea unor identități. În acest sens, să demonstrăm că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{pentru } x \in (-1, 1).$$

Fie $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$. Atunci f este derivabilă pe $(-1, 1)$, iar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \end{aligned}$$

de unde f este constantă pe $(-1, 1)$. Pentru a determina valoarea acestei constante, dăm lui x o valoare din intervalul $(-1, 1)$, de exemplu $x = 0$. Cum

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

urmează concluzia.

Exemplu. Cea de-a treia parte a Corolarului 7.13.1 este instrumentală în de-

monstrarea multor inegalități. În acest sens, să demonstrăm că

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Urmează că f este derivabilă pe $(0, \infty)$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \quad \text{pentru } x > 0,$$

deci f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Cum f este și continuă în $x = 0$, urmează că $f(x) > f(0) = 0$ pentru $x > 0$, de unde rezultă prima parte a inegalității, cea de-a două parte demonstrează analog.

Exercițiu. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ pe un interval $[a, b]$, $0 < a < b$, demonstrați că

$$\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}.$$

Soluție. Cum f este funcție Rolle pe $[a, b]$, urmează conform teoremei lui Lagrange că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, deci $\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$, sau $\ln b - \ln a = \frac{1}{c}(b-a)$. Cum $c \in (a, b)$, iar $a, b > 0$, urmează că $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$, de unde concluzia.

Existența derivatelor laterale într-un punct

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange se poate determina de asemenea existența derivatei laterale a unei funcții într-un punct, obținută ca limită a unor alte deriveate.

Corolar 7.13.2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq I$, f este derivabilă pe $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ și continuă la stânga în x_0 . Dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lambda$, atunci f are derivată la stânga în x_0 , iar $f'_s(x_0) = \lambda$.

Un rezultat asemănător se poate formula în ceea ce privește existența derivatei la dreapta într-un punct.

Corolar 7.13.3. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că există $\varepsilon > 0$ astfel ca $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$, f este derivabilă pe $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ și continuă la dreapta în x_0 . Dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = \lambda$, atunci f are derivată la dreapta în x_0 , iar $f'_d(x_0) = \lambda$.

Prin combinarea acestor corolarii se obține următorul rezultat.

Corolar 7.13.4. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie $x_0 \in I$ cu proprietatea că f este derivabilă pe $V \setminus \{x_0\}$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$, continuă în x_0 și există $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lambda$. Atunci f este derivabilă în x_0 , iar $f'(x_0) = \lambda$.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x|x^3 - a|$, $a \in \mathbb{R}$. Să determinăm a astfel încât f să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

Se observă că f este continuă pe \mathbb{R} , $f(x) = \begin{cases} x(x^3 - a), & x \geq \sqrt[3]{a} \\ x(a - x^3), & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$, deci $f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - a, & x > \sqrt[3]{a} \\ a - 4x^3, & x < \sqrt[3]{a} \end{cases}$. Atunci $\lim_{\substack{x \rightarrow \sqrt[3]{a} \\ x < \sqrt[3]{a}}} f'(x) = -3a$, deci, conform Corolarului 7.13.2, $f'_s(\sqrt[3]{a}) = -3a$. Similar, conform Corolarului 7.13.3, $f'_d(\sqrt[3]{a}) = 3a$. Ca f să fie derivabilă în $\sqrt[3]{a}$, este necesar și suficient ca valorile acestor derivate laterale să fie egale, deci $-3a = 3a$, iar $a = 0$. Se observă atunci că $f(x) = \begin{cases} x^4, & x \geq 0 \\ -x^4, & x < 0 \end{cases}$, fiind derivabilă și pentru orice $x \neq 0$.

Funcții Lipschitz. Contrații

Cu ajutorul teoremei lui Lagrange, se poate demonstra că orice funcție derivabilă cu derivata mărginită este o funcție Lipschitz. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Corolar 7.13.5. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f funcție Rolle pe $[a, b]$. Dacă există $L \geq 0$ astfel încât $|f'(c)| \leq L$ pentru orice $c \in (a, b)$, atunci f este funcție Lipschitz pe $[a, b]$. Dacă, în plus, $L < 1$, atunci f este o contrație pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Conform teoremei lui Lagrange, aplicate pe intervalul $[x, y] \subseteq [a, b]$, pe care f este de asemenea funcție Rolle, urmează că există $c \in (x, y)$ astfel ca $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Atunci

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq L|x - y|,$$

deci f este funcție Lipschitz pe $[a, b]$. Dacă $L < 1$, conform definiției, f este o contracție pe $[a, b]$. ■

În particular, acest corolar poate fi utilizat pentru a stabili convergența unor siruri recurente.

Exemplu. Fie sirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{2x_n^2 + 1}{3x_n}$, $x_0 = 2$. Să demonstrăm că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să-i determinăm limita.

Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x}$. Mai întâi, se observă că $x_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$, iar recurența dată se poate scrie sub forma $x_{n+1} = f(x_n)$. Totuși, $(0, \infty)$ nu este o mulțime închisă, neputându-se aplica direct teorema de punct fix a lui Banach, deși f transformă mulțimea $(0, \infty)$ în ea însăși. Conform inegalității mediilor,

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{pentru } x > 0.$$

Deoarece

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3x} \leq \frac{2}{3}x + \frac{1}{3\frac{2\sqrt{2}}{3}} < \frac{2}{3}x + 1, \quad \text{pentru orice } x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

se poate observa că $f(x) \leq 3$ pentru orice $x \in \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$, deci f transformă intervalul $D = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}, 3\right]$ în el însuși. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{3}(2 - \frac{1}{x^2})$, urmează că $\frac{7}{21} \leq f'(x) \leq \frac{17}{27}$ pentru orice $x \in D$, deci f este o contracție pe acest interval. Cum și $x_0 \in D$, urmează conform teoremei de punct fix a lui Banach (teorema 6.14) că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la punctul fix l al lui f pe D . Din condiția de punct fix, $l = \frac{2l^2 + 1}{3l}$, deci $l^2 = 1$, iar $l = 1$, deoarece $l_1 = -1 \notin D$. Atunci sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent, iar limita sa este 1.

7.3.4 Teorema lui Cauchy

Următorul rezultat, atribuit lui Cauchy, constituie o generalizare a teoremei lui Lagrange.

Teorema 7.14. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g funcții Rolle pe $[a, b]$. Dacă $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci $g(b) \neq g(a)$ și există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}.$$

7.3.5 Regulile lui L'Hôpital

În unele dintre situațiile în care calculul limitelor unor funcții conduce la cazuri de nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, pot fi utilizate cu succes aşa-numitele *reguli ale lui L'Hôpital*.

Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

Teorema 7.15. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I și fie f, g două funcții definite pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.
2. f, g sunt derivabile pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 .
3. $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I, x \neq x_0$.
4. Există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.

Atunci $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I, x \neq x_0$, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3,$$

sunt în aşa fel încât $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{arctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, f, g sunt derivabile pe \mathbb{R}

iar $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3},$$

de unde obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}$.

Uneori, este necesar să se aplique de mai multe ori succesiv regula lui L'Hôpital, întrucât noua limită $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este tot de tip $\frac{0}{0}$.

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \sin x,$$

sunt în aşa fel încât $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$, f, g sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Funcțiile

$$f_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = 1 - \cos x$$

sunt în aşa fel încât $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$, f_1, g_1 sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g_1'(x) = \sin x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 7.16. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I și fie f, g două funcții definite pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.
2. f, g sunt derivabile pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 .
3. $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I, x \neq x_0$.
4. Există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.

Atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să calculăm limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$, $a, b \in (0, \infty)$. În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin(ax)), \quad g : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(\sin(bx))$$

sunt în așa fel încât $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(\sin(bx)) = -\infty$, f, g sunt derivabile pe $(0, \varepsilon)$ iar

$g'(x) = \frac{b \cos bx}{\sin bx} \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$. În plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(\sin(ax)))'}{(\ln(\sin(bx)))'} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx}{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1.$$

Alte cazuri de nedeterminare

Regulile lui L'Hôpital sunt destinate în mod explicit calculului limitelor unor rapoarte de funcții ce conduc la cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Totuși, după rearanjarea unor termeni sau executarea unor operații de logaritmare, și alte cazuri de nedeterminare pot fi tratate prin intermediul acestor reguli.

Cazul $0 \cdot \infty$

În situația în care calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ conduce la cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$ (adică $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$), atunci se încearcă scrierea produsului ca un raport. Folosind formula $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ se obține cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, iar folosind formula $fg = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ se obține cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercițiu. Determinați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x$.

Soluție. Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, limita se încadrează în cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \stackrel{[\infty]}{\equiv} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{-3} = 0.$$

Cazul $\infty - \infty$

În situația în care calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ conduce la cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ (adică $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$), atunci se încearcă obținerea unui factor comun. Folosind formulele $f - g = f(\frac{g}{f} - 1)$ sau $f - g = g(\frac{f}{g} - 1)$, limita dată se transformă într-un

produs, iar folosind formula $f - g = \frac{f-g}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}{\frac{1}{fg}}$ se obține cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$.

| Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x)$.

Soluție. Se va da factor comun e^x , deoarece acesta crește mai rapid decât x pentru $x \rightarrow \infty$. Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

De asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{[\infty]}{\longrightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty(1 - 0) = \infty.$$

| Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

Soluție. Mai întâi, se observă că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2},$$

limita inițială fiind transformată într-o limită în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Totuși, în locul aplicării directe a regulii lui L'Hôpital, se recomandă simplificarea preliminară prin aplicarea limitelor fundamentale. Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \operatorname{tg} x)(x - \operatorname{tg} x)}{x \cdot x \operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg}^2 x \cdot x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\frac{\operatorname{tg} x}{x})^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} \\ &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\cos^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \\ &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{2x} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Cazurile $1^\infty, 0^0, \infty^0$

În situația în care calculul limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)^{g(x)})$ conduce la unul dintre aceste cazuri de nedeterminare, iar $f(x) > 0$ pe o vecinătate a lui x_0 , se folosește formula $f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f}$. Pentru cazul de nedeterminare 1^∞ , se poate ține seama și de faptul că $\lim_{f \rightarrow 1} \frac{\ln f}{f - 1} = 1$.

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, limita dată este în cazul de nedeterminare 1^∞ . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \cos 2x}{x^2}} \stackrel{[0]}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x}{2x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(-\frac{\operatorname{tg} x}{x} + 2 \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \cdot 2 \right)} = e^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = \infty$, limita dată este în cazul de nedeterminare 1^∞ . Atunci

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x + e^x - 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{e^x - 1}{x} \right)} = e^2.$$

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x}$.

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right) = \infty$, iar $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$, limita dată este în cazul de nedeterminare ∞^0 . Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)^{\sin^2 x} &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \ln \left(\frac{2 - \cos x}{1 - \cos x} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (\ln(2 - \cos x) - \ln(1 - \cos x))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(2 - \cos x)) - \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(1 - \cos x))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln(1 - \cos x))} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{x^2}}} \\
&\stackrel{[\infty]}{=} e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{-\cos x}}{\frac{-2}{x^3}}} = e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{1 - \cos x}} \stackrel{[0]}{=} e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}{\sin x}} \\
&= e^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + \frac{x}{\sin x} \cdot x^2 \cos x)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}}$.

Soluție. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, limita dată este în cazul de nedeterminare 0^0 . Atunci

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{x - \frac{\pi}{2}} &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ln(1 - \sin x)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} u \ln(1 - \sin(u + \frac{\pi}{2}))} \\
&= e^{\lim_{u \rightarrow 0} u \ln(1 - \cos u)} = e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos u)}{\frac{1}{u}}} \stackrel{[\infty]}{=} e^{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin u}{-\cos u}}{-\frac{1}{u^2}}} \\
&= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2 \sin u}{1 - \cos u}} \stackrel{[0]}{=} e^{-\lim_{u \rightarrow 0} \frac{2u \sin u + u^2 \cos u}{\sin u}} \\
&= e^{-\lim_{u \rightarrow 0} (2u + \frac{u}{\sin u} \cdot u \cos u)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

7.3.6 Formula lui Taylor

Conform definiției diferențiabilității, a fost observat anterior că dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci există $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, astfel ca

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

iar în concluzie

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0.$$

Polinomul lui Taylor de ordinul n

În cele ce urmează, dorim să extindem această formulă de aproximare la una cu acuratețe superioară. Să presupunem că $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă de ordinul n în $x_0 \in I$, $n \geq 1$. Atunci derivatele de ordin până la $n - 1$ inclusiv există pe o

vecinătate a lui x_0 ; pentru simplitatea expunerii, să presupunem că acestea există pe întreg I . Funcția polinomială $T_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *polinomul lui Taylor de grad n* atașat funcției f în punctul x_0 .

Restul formulei lui Taylor de ordinul n

Fie acum $R_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Atunci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

sau

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\quad + R_n(x), \end{aligned}$$

relație numită *formula lui Taylor de ordinul n* corespunzătoare funcției f în punctul x_0 . Funcția R_n astfel definită poartă numele de *restul formulei lui Taylor de ordinul n* și măsoară eroarea cu care polinomul T_n aproximează funcția f .

În ceea ce urmează, vom încerca să obținem forme ale restului R_n care să preciseze mai multe informații despre precizia aproximării. Să observăm mai întâi că, în definiția diferențiabilității într-un punct x_0 ,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

funcția polinomială de gradul 1

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

reprezentă de fapt polinomul Taylor T_1 . Cum $R_1 = \alpha(x)(x - x_0)$, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Vom demonstra o proprietate similară pentru restul de ordin n . În acest scop, să calculăm mai întâi derivatele polinomului Taylor T_n . Se obține că

$$T'_n(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} \\
T_n''(x) & = f''(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\
& + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} (x - x_0)^{n-2} \\
& \dots \dots \\
T_n^{(n-1)}(x) & = f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!} (x - x_0), \quad T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \\
T_n^{(m)}(x) & = 0, \quad \text{pentru } m > n.
\end{aligned}$$

Putem obține de aici următoarele evaluări ale restului de ordin n și ale derivatelor sale în x_0

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \dots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Să notăm $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x - x_0)^n$. Analog relațiilor de mai sus, se observă că

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad g^{(n)}(x_0) = n!.$$

Fie $x \in I$ arbitrar. Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor R_n și g pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$), obținem că există c_1 între x_0 și x astfel ca $\frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)}$, iar cum $R_n(x_0) = g(x_0) = 0$, urmează că

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Aplicând încă o dată teorema lui Cauchy funcțiilor R'_n și g' pe intervalul $[x_0, c_1]$ (sau $[c_1, x_0]$), obținem că în mod similar că există c_2 între x_0 și c_1 astfel ca

$$\frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R''_n(c_2)}{g''(c_2)},$$

deci

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R''_n(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicând în mod iterativ teorema lui Cauchy, obținem că există c_{n-1} între x_0 și x astfel încât

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{n-1})}{g^{(n-1)}(c_{n-1})}.$$

Fie acum $(\bar{x}_k)_{k \geq 0}$ un sir convergent la x_0 , $\bar{x}_k \neq x_0$. Conform celor de mai sus, există $c_{k,n-1}$ între x_0 și \bar{x}_k astfel încât

$$\frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1})}{g^{(n-1)}(c_{k,n-1})} = \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}.$$

Prin trecere la limită, obținem că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}{\frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0}}$$

Cum $c_{k,n-1}$ se află între x_0 și \bar{x}_k , urmează că $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{k,n-1} = x_0$, de unde

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} &= R_n^{(n)}(x_0) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g^{(n-1)}(c_{k,n-1}) - g^{(n-1)}(x_0)}{c_{k,n-1} - x_0} &= g^{(n)}(x_0) = n!, \end{aligned}$$

iar

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_n(\bar{x}_k)}{g(\bar{x}_k)} = 0.$$

Deoarece $(\bar{x}_k)_{k \geq 0}$ era un sir arbitrar convergent la x_0 , urmează conform definiției limitei că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Considerațiile de mai sus conduc la următorul rezultat.

Teorema 7.17. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. Dacă f este derivabilă de n ori în $x_0 \in I$, atunci există o funcție $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$ și

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\quad + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Demonstrație. Să considerăm atunci funcția $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n! \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

și să observăm că $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$, conform celor de mai sus. În plus, $R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$, pentru orice $x \in I$ (chiar și pentru $x = x_0$, deoarece ambii membri sunt 0), de unde concluzia. ■

Restul de ordin n din formula de mai sus,

$$R_n(x) = \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește *restul lui Peano*.

În teorema precedentă s-a presupus că f este derivabilă de n ori în punctul x_0 , obținându-se cu acest prilej o estimare a restului formulei lui Taylor. Vom presupune în cele ce urmează că f este derivabilă de $n + 1$ ori pe întreg intervalul I , lucru care ne va ajuta să obținem exprimări mai precise ale restului.

Fie $x_0, x \in I$. Fie deasemenea $p \in \mathbb{N}^*$ și fie $C \in \mathbb{R}$ definit prin

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\quad + C(x - x_0)^p. \end{aligned}$$

Definim $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + C(x - t)^p.$$

Atunci

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x),$$

și aplicând teorema lui Rolle funcției φ pe intervalul $[x_0, x]$ (sau $[x, x_0]$) obținem existența lui c situat între x_0 și x (dependent de x_0, x, n și p) astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Însă

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'(t)}{1!} \right) + \left(\frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} \right) - pC(x - t)^{p-1} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - pC(x - t)^{p-1} \end{aligned}$$

și atunci

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n - pC(x - c)^{p-1} = 0,$$

de unde

$$C = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p} (x - c)^{n-p+1}$$

Se obține atunci că restul R_n al formulei Taylor de ordinul n are forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p} (x - x_0)^p (x - c)^{n-p+1}.$$

Pus sub această formă generală, restul R_n al formulei Taylor de ordinul n se numește *restul lui Schlömilch-Roche*. Prin particularizarea lui p în expresia de mai sus obținem alte forme importante ale restului de ordin n . Astfel, pentru $p = 1$ obținem *restul lui Cauchy*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - x_0) (x - c)^n,$$

în vreme ce pentru $p = n + 1$ obținem *restul lui Lagrange*, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Deoarece c se află între x_0 și x , există $\theta \in (0, 1)$ (dependent de x_0 , x și n) astfel încât

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

iar cu notația $h = x - x_0$, formula lui Taylor se poate scrie astfel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + R_n,$$

unde R_n se poate pune sub una dintre următoarele forme

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!p} h^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1} && \text{(Schlömilch-Roche)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{n!} h^{n+1} (1 - \theta)^n && \text{(Cauchy)} \\ R_n &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1} && \text{(Lagrange).} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Formula lui MacLaurin

Dacă în formula lui Taylor punem $x_0 = 0$, obținem *formula lui MacLaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

R_n obținându-se din formulele (7.2) pentru $x_0 = 0$. De asemenea, pentru $n = 0$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange reprezintă chiar teorema lui Lagrange.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k)} = 0$, iar $f^{(2k+1)} = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k+1)} = 0$, iar $f^{(2k)} = (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

De aici,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \cos(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0, 1).$$

Exemplu. 1. Fie $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

avem că $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$. De aici,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^n}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2. $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^p$. Cum

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)\dots(p-n+1)(1+x)^{p-n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = p(p-1)\dots(p-n+1)$. De aici,

$$(1+x)^p = 1 + \frac{px}{1!} + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)x^n}{n!} + R_n$$

unde

$$R_n = \frac{p(p-1)\dots(p-n)(1+\theta x)^{p-n-1}}{(n+1)!}, \quad \theta \in (0, 1).$$

7.3.7 Puncte de extrem ale unei funcții. Condiții necesare și suficiente

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. S-a observat anterior că punctele de extrem care sunt interioare lui I și în care f este derivabilă se găsesc printre punctele critice ale

funcției f , dar nu orice punct critic al unei funcții este neapărat punct de extrem. De exemplu, fie $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. Atunci $f'_1(x) = 3x^2$, deci $x = 0$ este punct critic al lui f_1 . Totuși, acesta nu este punct de extrem, deoarece $f_1(0) = 0$, iar în orice vecinătate a lui 0 funcția f ia atât valori negative cât și valori pozitive. În cele ce urmează, vom obține condiții de extrem cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

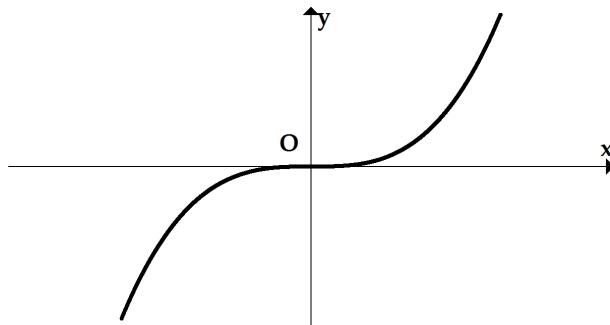


Figura 7.10: Graficul funcției $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. $x = 0$ este punct critic, dar nu este punct de extrem

Teorema 7.18. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$ astfel încât

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. Dacă $n = 2k$, atunci x_0 este punct de extrem local.
 - (a) Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.
 - (b) Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.
2. Dacă $n = 2k + 1$, iar x_0 este punct interior lui I , atunci x_0 nu este punct de extrem local.

Demonstrație. Conform formulei lui Taylor cu restul lui Peano, în care primele $n - 1$ deriveate în x_0 se anulează conform ipotezei, obținem că

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x - x_0)^n,$$

cu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0$. Atunci

$$f(x) - f(x_0) = (f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

cu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)) = f^{(n)}(x_0).$$

Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece $(x - x_0)^{2k} \geq 0$ pentru orice $x \in V$, urmează că

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar x_0 este punct de minim local.

Similar, dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar x_0 este punct de maxim local.

Fie acum $n = 2k + 1$ și fie x interior lui I . Dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, există $V \in \mathcal{V}(x_0)$ o vecinătate a lui x_0 astfel ca

$$f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0, \quad \text{pentru orice } x \in V,$$

iar deoarece $(x - x_0)^{2k+1} < 0$ pentru orice $x \in V, x < x_0$, respectiv $(x - x_0)^{2k+1} > 0$ pentru orice $x \in V, x > x_0$, urmează că

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0$$

deci

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x < x_0,$$

iar

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

deci

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{pentru orice } x \in V, \quad x > x_0,$$

iar x_0 nu este punct de extrem local. Cazul în care $f^{(n)}(x_0) < 0$ se tratează analog.



Pentru $n = 2$, se obține următorul corolar foarte util în studiul variației funcțiilor.

Corolar 7.18.1. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă de două ori în $x_0 \in I$ astfel încât $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) \neq 0$.

1. Dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.
2. Dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.

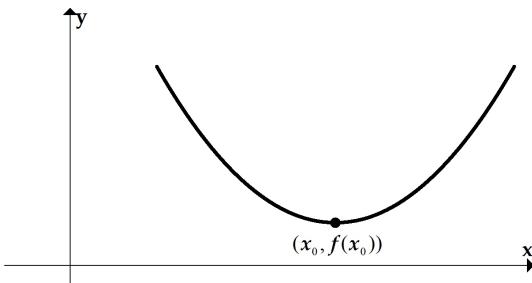


Figura 7.11: $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) > 0$.
 x_0 este punct de minim local

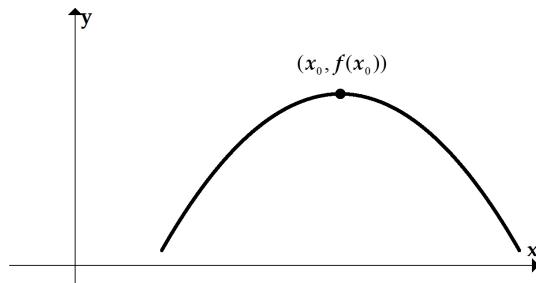


Figura 7.12: $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) < 0$.
 x_0 este punct de maxim local

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Determinați punctele de extrem ale lui f .

Soluție. Cum f este derivabilă pe întreg \mathbb{R} , iar toate punctele domeniului sunt puncte interioare acestuia, urmează conform teoremei lui Fermat că punctele de extrem sunt printre punctele critice. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 3$, f' se anulează pentru $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$. Cum $f''(x) = 6x$, urmează că $f''(-1) = -6 < 0$, iar $f''(1) = 6 > 0$, deci -1 este un punct de maxim local, iar 1 este un punct de minim local.

7.4 Aspecte grafice în studiul variației funcțiilor

7.4.1 Asimptote

În situația în care este necesar să se studieze aspectul graficului unei funcții sau viteza ei de creștere, devine adesea important să se determine dacă acest grafic

are o formă apropiată de cea a unei linii drepte, respectiv dacă funcția are o creștere de un anumit tip precizat, de exemplu echivalentă cu cea a unei funcții de gradul întâi. Dreapta de care se „apropie” graficul funcției se va numi *asimptotă*, iar în funcție de poziția acesteia se vor obține, respectiv, noțiunile de asimptotă orizontală, verticală sau oblică.

Asimptote orizontale

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $+\infty$ (respectiv $-\infty$) fiind punct de acumulare al mulțimii D . Vom spune că dreapta $y = l$, $l \in \mathbb{R}$, este *asimptotă orizontală* la graficul funcției f spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcției f dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

Altfel spus, graficul unei funcții f are asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) dacă f are o limită finită l la $+\infty$ (respectiv la $-\infty$). În această situație, graficul funcției se apropie foarte mult de dreapta orizontală $y = l$ spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$), această dreaptă fiind asimptotă orizontală la graficul funcției spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$).

Desigur, dacă o funcție nu are limită la $+\infty$, atunci graficul acesteia nu are asimptotă orizontală către $+\infty$. Mai departe, dacă $+\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției (de exemplu, dacă acesta este un interval de tip $(-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$), atunci de asemenea nu putem vorbi despre asimptotă orizontală la graficul acesteia spre $+\infty$, afirmații similare putându-se face și despre asimptotele orizontale spre $-\infty$.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2}$. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{2},$$

deci dreapta $y = \frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f spre $+\infty$. Prin calcul similar, se obține că această dreaptă este asimptotă orizontală la graficul funcției f și spre $-\infty$.

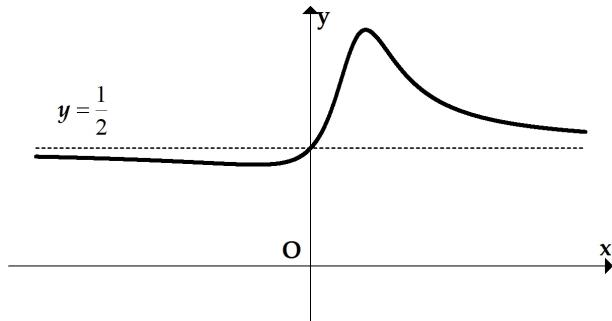


Figura 7.13: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 3x + 2}$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Deoarece

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1,\end{aligned}$$

urmează că dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f spre $-\infty$. Prințr-un calcul similar, se obține că dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f spre $+\infty$, cele două asimptote orizontale, către $-\infty$ respectiv către $+\infty$, fiind diferite între ele.

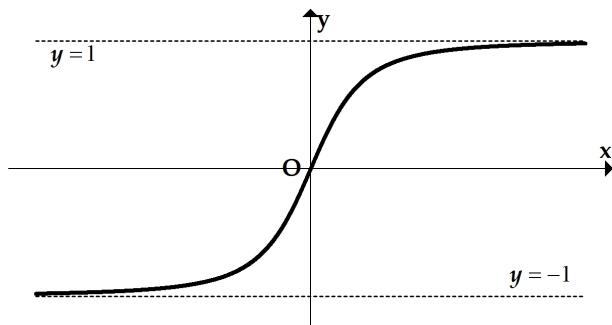


Figura 7.14: Graficul funcției $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nu există, graficul funcției f nu are asimptotă orizontală către $+\infty$. Nu putem

vorbi despre asimptotă orizontală către $-\infty$, deoarece $-\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției.

Asimptote oblice

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $+\infty$ fiind punct de acumulare al mulțimii D . Vom spune că dreapta $y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, este *asimptotă oblică* la graficul funcției f spre $+\infty$ dacă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n.$$

Similar, fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty$ fiind punct de acumulare al mulțimii D . Vom spune că dreapta $y = mx + n$, $m \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{R}$, este *asimptotă oblică* la graficul funcției f spre $-\infty$ la graficul funcției f dacă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \quad \text{iar} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = n.$$

În aceste situații, graficul funcției se apropie foarte mult de dreapta oblică $y = mx + n$ spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$.

Să notăm că, deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, o condiție necesară (dar nu și suficientă) ca graficul unei funcții să aibă asimptotă oblică spre $+\infty$ este ca acea funcție să aibă limită infinită la $+\infty$. În concluzie, existența unei asimptote oblice spre $+\infty$ exclude existența unei asimptote orizontale spre $+\infty$ și reciproc, un raționament similar putând fi efectuat relativ la existența asimptotelor orizontale sau oblice spre $-\infty$.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$. Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 1}{x(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^3(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = 1,$$

iar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 1}{x^2 + x + 1} = -1.$$

De aici, dreapta $y = x - 1$ este asimptotă oblică la graficul funcției f spre $+\infty$. Prinț-un calcul similar, se obține că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcției f și spre $-\infty$.

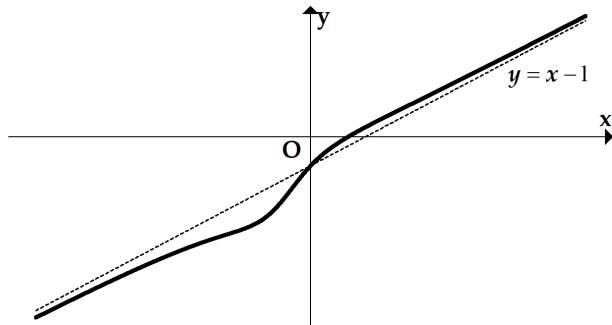


Figura 7.15: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x+1}$

2. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Atunci

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

iar

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty \cdot 1 = +\infty. \end{aligned}$$

Cum $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = +\infty$, urmează că graficul lui f nu are asimptote oblice spre $+\infty$. Nu putem vorbi despre asimptote oblice spre $-\infty$ deoarece $-\infty$ nu este punct de acumulare pentru domeniul funcției.

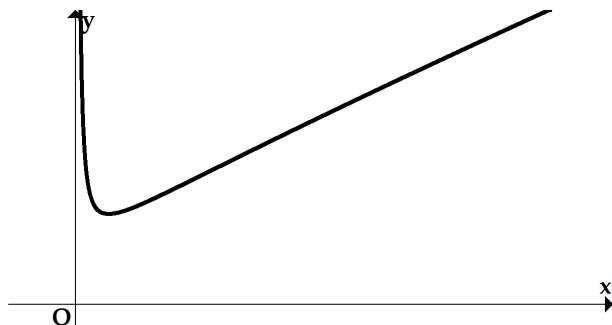


Figura 7.16: Graficul funcției $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Asimptote verticale

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ fiind punct de acumulare la stânga al mulțimii D . Vom spune că dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la stânga spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcției f dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty).$$

Similar, fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ fiind punct de acumulare la dreapta al mulțimii D . Vom spune că dreapta dreapta $x = a$ este *asimptotă verticală* la dreapta spre $+\infty$ (respectiv spre $-\infty$) la graficul funcției f dacă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty, \quad (\text{respectiv } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty).$$

În aceste situații, graficul funcției f se apropie foarte mult de dreapta verticală $x = a$, în circumstanțele precizate. Să notăm că existența asimptotelor verticale nu exclude nici existența asimptotelor orizontale, nici a celor oblice, deoarece acestea din urmă sunt determinate cu ajutorul unor limite pentru $x \rightarrow +\infty$ sau $x \rightarrow -\infty$, nu pentru x tinzând la valori finite, aşa cum este cazul asimptotelor verticale. De asemenea, întrucât existența asimptotelor verticale presupune existența unor limite infinite, graficele funcțiile mărginite pe domeniile de definiție nu au asimptote verticale, iar asimptotele verticale ale funcțiilor nemărginite se caută în punctele "patologice" ale domeniului de definiție sau funcției, de exemplu zerouri ale unor numitori sau ale unor argumente de funcții logaritmice.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x+1}{x-1} = \infty,$$

iar dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției f spre $-\infty$, respectiv la dreapta spre $+\infty$.

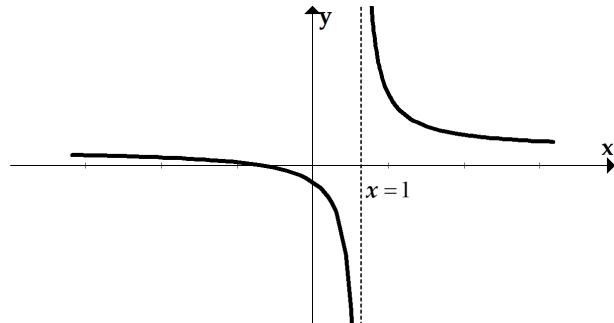


Figura 7.17: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty,$$

iar dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției f spre $-\infty$. Să notăm că 0 nu este punct de acumulare la stânga pentru domeniul lui f (de fapt, f nici măcar nu este definită pentru $x < 0$), dreapta $x = 0$ nefiind și asimptotă verticală la stânga la graficul funcției f .

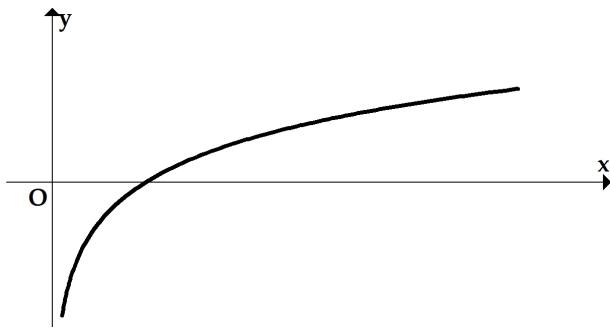


Figura 7.18: Graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$

Exercițiu. Determinați asimptotele funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$.

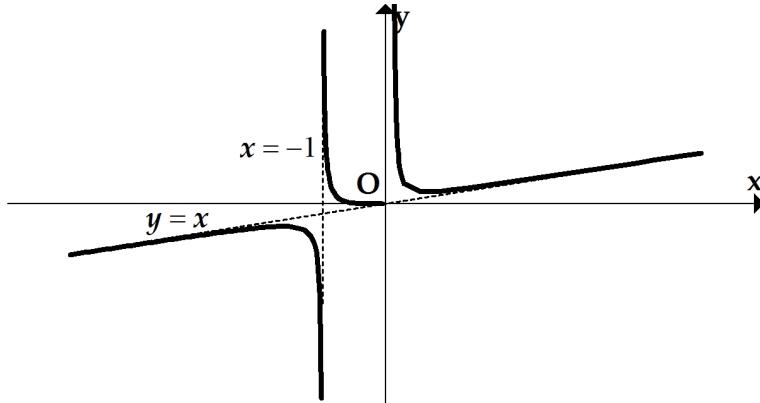


Figura 7.19: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}$

Soluție. Deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot 1 = -\infty,$$

graficul funcției nu are asimptote orizontale.

Studiem acum existența asimptotelor oblice, începând cu cea spre $+\infty$. Se observă că

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot 1 = 1, \\ n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

deci dreapta $y = x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f spre $+\infty$. Un calcul similar arată că această dreaptă este asimptotă oblică la graficul funcției f și spre $-\infty$.

În ceea ce privește existența asimptotelor verticale, observăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^-} e^{-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0+} e^{-1} = +\infty,$$

deci dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală la stânga la graficul funcției f spre $-\infty$, respectiv asimptotă verticală la dreapta la graficul funcției f spre $+\infty$. Similar,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} \cdot e^{0-} = 0 \cdot 0 = 0,$$

în vreme ce

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x+1} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} \stackrel{[\infty]}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{1} = \infty,$$

deci dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta (nu însă și la stânga) la graficul funcției f spre $+\infty$.

7.4.2 Convexitate. Concavitate

Adesea, informațiile oferite de prima derivată a unei funcții nu sunt suficiente pentru descrierea precisă a modului de variație a acelei funcții. În special, aceste informații pot fi insuficiente pentru determinarea formei graficului funcției. În cele ce urmează, vom studia rolul derivatei a două a unei funcții în precizarea formei graficului acelei funcții.

Funcții convexe și strict convexe

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că f este *convexă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ și oricare ar fi $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

De asemenea, vom spune că f este *strict convexă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ și oricare ar fi $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Interpretarea geometrică a convexității

Deoarece $M(tx + (1 - t)y, f(tx + (1 - t)y))$ este punctul de pe graficul funcției corespunzător abscisei $tx + (1 - t)y$, iar $N(tx + (1 - t)y, tf(x) + (1 - t)f(y))$ este punctul cu aceeași abscisă de pe segmentul determinat de $A(x, f(x))$ și $B(y, f(y))$, observăm că f este convexă dacă și numai dacă pentru orice două puncte A, B de pe graficul funcției, porțiunea de grafic dintre A și B se află sub segmentul AB determinat de acestea.

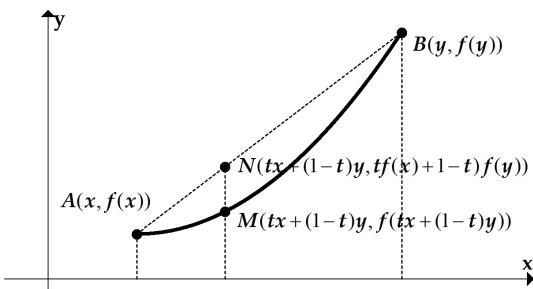


Figura 7.20: Graficul unei funcții convexe

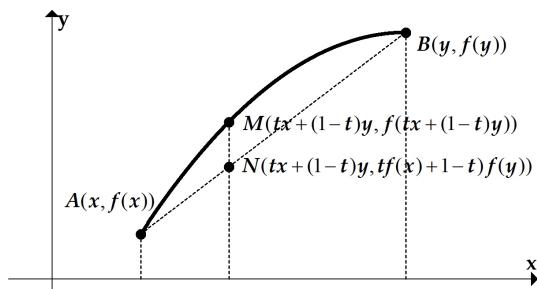


Figura 7.21: Graficul unei funcții concave

Funcții concave și strict concave

Similar, vom spune că f este *concavă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ și oricare ar fi $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

respectiv că f este *strict concavă* pe I dacă oricare ar fi $x, y \in I$ și oricare ar fi $t \in (0, 1)$ are loc inegalitatea

$$f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Se observă că f este (strict) concavă dacă și numai dacă $-f$ este (strict) convexă.

Interpretarea geometrică a concavității

Prin analogie cu interpretarea geometrică a convexității unei funcții, se observă că f este concavă dacă și numai dacă pentru orice două puncte A, B de pe graficul funcției, porțiunea de grafic dintre A și B se află deasupra segmentului AB determinat de acestea.

O proprietate de monotonie

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unei funcții de a fi convexă implică monotonia unui anumit raport incremental.

Teorema 7.19. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f convexă pe I . Fie deasemenea $a \in \mathbb{R}$. Atunci funcția $g_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, este crescătoare.

Continuitatea funcțiilor convexe

Cu ajutorul proprietății de mai sus, putem deduce că o funcție convexă este continuă pe interiorul domeniului ei de definiție.

Teorema 7.20. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f convexă pe I . Fie deasemenea $a \in \overset{\circ}{I}$. Atunci f este continuă în a .

O altă interpretare grafică a noțiunii de convexitate

Tot cu ajutorul Teoremei 7.19, putem demonstra următorul rezultat.

Teorema 7.21. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f convexă pe I . Fie deasemenea $a \in I$ un punct în care f este derivabilă lateral. Atunci

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'_s(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \quad \text{pentru } x < a < y \in I.$$

În particular, dacă f este derivabilă în a , urmează că

$$f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a), \quad \text{pentru } x \in I,$$

deci

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \quad \text{pentru } x \in I. \tag{7.3}$$

Cum $B(x, f(a) + f'(a)(x - a))$ este punctul de pe tangenta la graficul funcției f în $A(a, f(a))$ corespunzător abscisei x , urmează că o funcție derivabilă f este convexă pe I dacă și numai dacă pentru orice punct $A(a, f(a))$ de pe grafic, graficul funcției este situat deasupra tangentei în A la grafic.

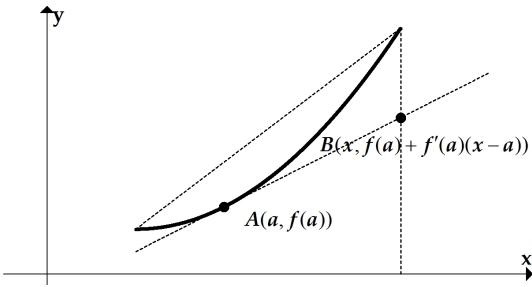


Figura 7.22: Graficul unei funcții convexe

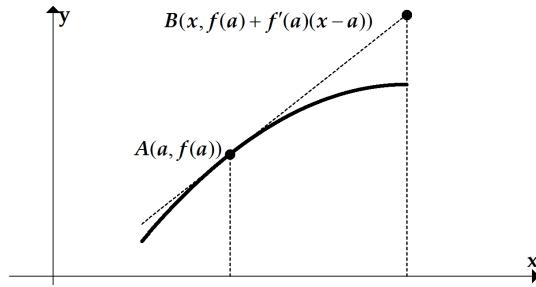


Figura 7.23: Graficul unei funcții concave

Studiul convexității și concavității cu ajutorul derivatei de ordinul al doilea

În cele ce urmează, vom vedea că se poate preciza convexitatea sau concavitatea unei funcții cunoscând semnul derivatei de ordinul al doilea.

Teorema 7.22. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe I . Atunci au loc următoarele afirmații.

1. $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$ dacă și numai dacă f este convexă pe I .
2. $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in I$ dacă și numai dacă f este concavă pe I .

Se poate observa că dacă $f'' > 0$ pe I , atunci f este strict convexă pe I .

Exemplu. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este convexă pe \mathbb{R} , deoarece $f''(x) = 2 > 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$.

2. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este concavă pe $(0, \infty)$, întrucât $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pentru $x \in (0, \infty)$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{6}$, este convexă pe $[0, \infty)$ și concavă pe $(-\infty, 0]$, întrucât $f''(x) = x$, $f''(x) \geq 0$ pentru $x \in [0, \infty)$, $f''(x) \leq 0$ pentru $x \in (-\infty, 0]$.

Inegalitatea lui Jensen

Pornind de la definiția convexității, se poate demonstra prin inducție matematică faptul că dacă f este convexă pe I , atunci

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n)$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ și orice $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ cu $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, inegalitate cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Jensen*, pentru funcții concave având loc inegalitatea inversă.

În particular, pentru $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$, se obține că

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n},$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, pentru funcții concave având loc inegalitatea inversă.

Exemplu. 1. Deoarece $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este concavă pe $[0, \pi]$, urmează că dacă A, B, C sunt unghiuri ale unui triunghi, atunci

$$\sin \frac{A + B + C}{3} \geq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3},$$

de unde, ținând seama că $A + B + C = \pi$, obținem că

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Deoarece $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este concavă pe $(0, \infty)$, urmează că

$$\begin{aligned} \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &\geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} \\ &= \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \end{aligned}$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$ ceea ce înseamnă că

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$, ceea ce, împreună cu observația că inegalitatea rămâne adevărată și atunci când unul sau mai mulți x_i sunt nuli, demonstrează validitatea inegalității mediilor.

Puncte de inflexiune

Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Observăm că, deoarece $g''(x) = 6x$, g este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, \infty)$, în $x_0 = 0$ schimbându-se convexitatea funcției. Graficul funcției f are tangentă în punctul corespunzător $(x_0, g(x_0)) = (0, 0)$,

porțiunea din graficul lui g corespunzătoare lui $x \geq 0$ aflându-se deasupra acestei tangente, iar porțiunea din graficul lui g corespunzătoare lui $x \leq 0$ aflându-se dedesubtul acesteia. În cele ce urmează, vom încadra această situație tipică într-un cadru mai general.

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$. Atunci x_0 se numește *punct de inflexiune al funcției* f dacă

1. f este continuă în x_0 ;
2. f are derivată în x_0 , finită sau infinită;
3. Există $a, b \in I$, $a < x_0 < b$ astfel încât

f este convexă pe (a, x_0) și concavă pe (x_0, b) , sau

f este concavă pe (a, x_0) și convexă pe (x_0, b) .

În această situație, se spune că punctul corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ este *punct de inflexiune al graficului funcției* f .

Din punct de vedere geometric, faptul că x_0 este punct de inflexiune al funcției f înseamnă că graficul funcției f are tangentă în $A(x_0, f(x_0))$, iar tangentă în A „traversează” graficul funcției f , în sensul că de o parte a lui A tangentă se află sub grafic, iar de cealaltă parte se află deasupra graficului.

Având în vedere caracterizarea convexității unei funcții cu ajutorul semnului derivatei de ordinul al doilea, se obține următorul rezultat.

Teorema 7.23. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I^\circ$. Dacă sunt îndeplinite condițiile

1. f este continuă în x_0 ;
2. f are derivată în x_0 , finită sau infinită;
3. Există $a, b \in I$, $a < x_0 < b$ astfel încât

$f''(x) \geq 0$ pe (a, x_0) și $f''(x) \leq 0$ pe (x_0, b) , sau

$f''(x) \leq 0$ pe (a, x_0) și $f''(x) \geq 0$ pe (x_0, b) ,
atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f .

În condițiile acestei teoreme, putem spune că x_0 este punct de inflexiune numai dacă f'' își schimbă semnul la trecerea de la stânga lui x_0 la dreapta lui x_0 . De asemenea, are loc următorul rezultat.

Teorema 7.24. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă de două ori pe I , iar $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ un punct de inflexiune al lui f . Atunci $f''(x_0) = 0$.

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Atunci f este de două ori derivabilă pe \mathbb{R} , iar $f''(x) = 6x$. Atunci f este concavă pe $(-\infty, 0]$, respectiv convexă pe $[0, \infty)$. Cum f este continuă în 0, iar f are derivată în 0, $f'(0) = -3$, urmează că 0 este punct de inflexiune.

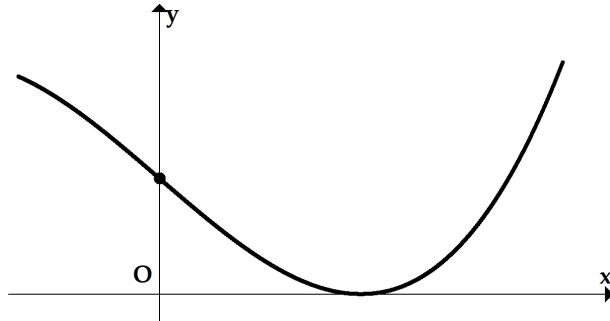


Figura 7.24: 0 este punct de inflexiune pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Atunci f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă de două ori pe $\mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, iar

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}.$$

Cum f are derivată în 2, $f'(2) = +\infty$, iar f este convexă pe $(-\infty, 2)$ respectiv concavă pe $(2, \infty)$, 2 este punct de inflexiune.

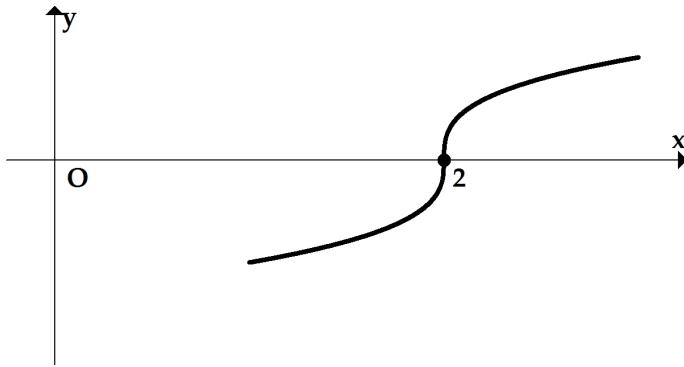


Figura 7.25: 2 este punct de inflexiune pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

Aplicații

7.1. Cu ajutorul formulei de derivare $(x^k)' = kx^{k-1}$, determinați valoarea sumei $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

7.2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a^2 + x + 1, & x > 0 \\ a \sin x + b \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă în $x_0 = 0$.

7.3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 0 \\ e^x + 2, & x \leq 0 \end{cases}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă în $x_0 = 0$.

7.4. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + |x|$, $g(x) = 1 - |x|$. Demonstrați că f, g nu sunt derivabile în $x_0 = 0$, dar $f + g$ este derivabilă în $x_0 = 0$.

7.5. Fie $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, f pară și derivabilă în $x_0 = 0$. Demonstrați că $f'(0) = 0$.

7.6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabilă în $x_0 \in \mathbb{R}$. Determinați

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0))$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(f(x_0 + \frac{1}{n^2}) - f(x_0 - \frac{1}{n^2}))$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x_0 + \frac{1}{n}) + f(x_0 + \frac{2}{n}) + f(x_0 + \frac{3}{n}) - 3f(x_0))$.

7.7. Determinați (dacă există) punctele de pe graficul funcțiilor f următoare, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, în care tangenta este paralelă cu axa Ox

- 1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$;
- 2) $f(x) = x^5 + 2x + 1$;
- 3) $f(x) = 4x + 2$.

7.8. Fie $f : (\frac{2}{3}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(3x - 2)$. Determinați punctele de pe graficul funcției f în care tangenta este paralelă cu dreapta $y = 3x + 4$.

7.9. Determinați ecuațiile tangentelor la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ în punctele de abscise respectiv $0, \frac{1}{2}, 1$ și precizați unghiurile pe care aceste tangente le fac cu axa Ox .

7.10. Să se arate că dreapta $y = 7x - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$.

7.11. Determinați cea mai mică pantă posibilă a tangentei la curba $y = x^3 - 3x^2 + 7x$.

7.12. Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, este continuă în $x_0 = 0$, dar graficul său nu are tangentă în $A(0, 0)$.

7.13. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât graficele celor două funcții să aibă tangentă comună într-un punct de abscisă 1.

7.14. Precizați dacă graficele funcțiilor $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = |1 - x^2|$, $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$, $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = \max(x^2 + 5x, 4x + 2)$, au puncte unghiulare sau de întoarcere.

7.15. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 4}$. Demonstrați că f verifică relația

$$f(x)f'(x) = x\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

7.16. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}$. Demonstrați că f verifică relația

$$xf''(x) + f'(x) - f(x) = 0, \quad \text{pentru } x \in (0, \infty).$$

7.17. Demonstrați că

$$(\ln(ax + b))^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-1)!a^n}{(ax + b)^n}, \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

7.18. Folosind eventual o descompunere în fracții simple, demonstrați că

$$\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2n!} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right], \quad \text{pentru } n \geq 1.$$

7.19. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$. Demonstrați că $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$, unde P_n este un polinom de gradul n și determinați o formulă de recurență pentru calculul lui P_n .

7.20. Determinați

$$1) (x \ln(3x - 1))^{(n)}; \quad 2) (x^2 \cos x)^{(n)}; \quad 3) ((x^2 + x + 3)e^{2x})^{(n)}; n \in \mathbb{N}^*.$$

7.21. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$. Demonstrați că $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{f(x)}{x^{2n}}$.

7.22. Fie $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$. Demonstrați că f este strict crescătoare și precizați mulțimea valorilor funcției.

7.23. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + x^2 + 3x$. Demonstrați că f este strict crescătoare, bijectivă și calculați $(f^{-1})'(e^2 + 10)$.

7.24. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$. Demonstrați că f este strict descrescătoare, bijectivă și calculați $(f^{-1})'(2)$.

7.25. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem.

7.26. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Dacă $a^x + b^x + c^x \geq 3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, demonstrați folosind teorema lui Fermat că $abc = 1$.

7.27. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul n , $n \geq 2$, cu n rădăcini reale distințe. Demonstrați că ecuația $f'(x) = 0$ are exact $n - 1$ rădăcini reale distințe.

7.28. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că ecuația

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-(n+1)} = 0,$$

are exact n rădăcini reale.

7.29. Determinați numărul de rădăcini reale ale ecuațiilor

- 1) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$;
- 2) $x^4 - 14x^2 + 24x - 6 = 0$;
- 3) $x^5 - 5x + 1 = 0$;
- 4) $3x \ln x + 2 = 0$;
- 5) $xe^x - 2 = 0$

7.30. Demonstrați că ecuația $2x^3 + 3x + m = 0$ are o unică rădăcină reală indiferent de valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$.

7.31. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Rolle pe $[a, b]$ cu proprietatea că $f(a)^2 + b^2 = f(b)^2 + a^2$. Să se demonstreze că ecuația $f(x)f'(x) = x$ are măcar o rădăcină în intervalul (a, b) .

7.32. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție Rolle pe $[a, b]$.

1. Demonstrați că $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x - a)(x - b)f(x)$, este de asemenea o funcție Rolle pe $[a, b]$.
2. Demonstrați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}$.

7.33. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Determinați punctele în care funcția nu este derivabilă.

7.34. 1. Demonstrați că $e^x \geq 1 + x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Folosind această inegalitate, demonstrați că

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ (inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a n numere pozitive).

7.35. Folosind teorema lui Lagrange, demonstrați inegalitățile

1. $na^{n-1}(b - a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b - a)$, $0 \leq a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, $0 \leq a < b < \frac{\pi}{2}$.
3. $3^p + 6^p > 4^p + 5^p$, $p > 1$.
4. $(x+1) \cos \frac{\pi}{x+1} - x \cos \frac{\pi}{x}$, pentru $x \geq 2$.

7.36. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^6 + 5}$. Demonstrați cu ajutorul teoremei lui Lagrange că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

7.37. Folosind teorema lui Lagrange, demonstrați că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x - \sin x} = 1$.

7.38. Folosind teorema lui Lagrange, arătați că ecuația $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$, $x \in \mathbb{R}$, are doar soluțiile $x = 0$ și $x = 1$.

7.39. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ două funcții derivabile cu proprietățile că $f(2012) = g(2012)$ și $f' \cdot g^2 = g' \cdot f^2$. Demonstrați că $f = g$.

7.40. Demonstrați că pe intervalele indicate funcțiile următoare diferă printr-o constantă, a cărei valoare se cere

1. $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ pe \mathbb{R} .

2. $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2)$, $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$ pe \mathbb{R} .

7.41. Fie $f, g : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Demonstrați că f și g au aceeași derivată pe $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, dar $(f-g)(\sqrt{3}) = \pi$, $(f-g)(-\sqrt{3}) = -\pi$, deci f și g nu diferă printr-o constantă. Cum explicați?

7.42. Demonstrați inegalitățile

1. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, pentru orice $x > 0$.

2. $e^x + e^{-x} \geq 2 + x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

7.43. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Determinați valoarea maximă a lui f și deduceți de aici că $e^x \geq x^e$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

7.44. Determinați valorile limitelor

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x}{\sin(\operatorname{tg} x)}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(4 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{4x})}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{\sin x}}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{x} \right)$;
- 8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$; 10) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln \frac{1}{x-2}$; 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 13) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\frac{2}{3+4 \ln x}}$.

7.45. Dezvoltați funcția polinomială $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile lui $x - 2$.

7.46. Determinați polinomul lui Taylor de ordinul n asociat următoarelor funcții în punctele date

- 1) $f(x) = e^{-3x}$; $x_0 = -\frac{1}{3}$;
- 2) $f(x) = \ln(1 + 3x)$; $x_0 = \frac{1}{3}$;
- 3) $f(x) = \sqrt{4x - 3}$;
 $x_0 = 1$;
- 4) $f(x) = \cos^2 x$; $x = \frac{\pi}{6}$;
- 5) $f(x) = \operatorname{sh} x$; $x_0 = 1$.

7.47. Determinați asimptotele funcțiilor

1. $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$;

2. $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(1 + x)$;

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \\ 0, & x = 1 \text{ sau } x = 2 \end{cases}$;

4. $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\left| \frac{x^3 - x}{x+2} \right|}$;

5. $f : (-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\frac{3-x}{3+x})$;

6. $f : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2 - 1}$;

7. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x + 2 \cos 3x$;

8. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2|^{\frac{1}{x-1}}$.

7.48. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ să aibă dreapta $y = 1$ ca asimptotă orizontală.

7.49. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + ax + a}$, să aibă o unică asimptotă verticală.

7.50. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x+2}$ să aibă dreapta $y = x + 2$ ca asimptotă oblică spre $+\infty$.

7.51. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^2 + bx}$ să aibă dreapta $y = 2x + 1$ ca asimptotă oblică spre $+\infty$.

7.52. Demonstrați că graficul unei funcții polinomiale de grad n , $n \geq 2$, nu are asimptote.

7.53. Determinați o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ care să aibă ca asimptote verticale toate dreptele $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

7.54. Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, două funcții convexe. Demonstrați că $f + g$ este o funcție convexă. Se poate spune același lucru și despre $f - g$?

7.55. Determinați intervalele de convexitate și concavitate pentru funcțiile

1. $f : (-\infty, -1) \cup [1, +\infty), f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$
2. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \ln x;$
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x};$
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2 \cos x;$
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}.$

Au aceste funcții puncte de inflexiune?

7.56. Studiind eventual convexitatea funcției $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$, demonstrați că $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$, pentru orice $x, y \geq 0$ și orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

7.57. Studiind eventual convexitatea funcției $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\sin x}$, demonstrați că în orice triunghi ABC există relația $\sqrt{\sin \frac{A}{2}} + \sqrt{\sin \frac{B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{C}{2}} \leq 3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.58. Studiind eventual convexitatea funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$, demonstrați că $\ln \frac{x+y}{2} < \frac{x}{x+y} \ln x + \frac{y}{x+y} \ln y$, pentru orice $x, y > 0$.

Capitolul 8

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCȚII

8.1 Şiruri de funcții

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ și fie f_0, f_1, f_2, \dots funcții reale definite pe mulțimea D . Sirul f_0, f_1, f_2, \dots se numește *șir de funcții* și se notează cu $(f_n)_{n \geq 0}$. La fel ca și în cazul sirurilor numerice, dorim să studiem proprietățile de convergență ale sirurilor de funcții, investigând posibilele moduri în care se poate defini noțiunea de convergență, și să cercetăm dacă tipurile de convergență astfel definite realizează sau nu transmiterea unor proprietăți uzuale ale funcțiilor de la termenii unui șir de funcții la funcția limită.

8.1.1 Punct de convergență. Mulțime de convergență. Limita unui șir de funcții

Mărginire uniformă

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Vom spune că $(f_n)_{n \geq 0}$ este *uniform mărginit* dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n(x)| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in D$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin nx$. Atunci $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, deci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform mărginit.

Punct de convergen . Mulțime de de convergen 

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D . Vom spune că $a \in D$ este un *punct de convergen * al  irului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ dacă  irul numeric $(f_n(a))_{n \geq 0}$ al valorilor funcțiilor în a este convergent. Mulțimea tuturor punctelor de convergen  ale  irului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ se va numi atunci *mulțimea de convergen * a acestui  ir.

Funcția limită a unui  ir de funcții

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D  i fie $E \subseteq D$ mulțimea de convergen  a  irului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$. Funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

se numește *funcția limită* a  irului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{nx}} = 1, \text{ pentru } x \in (0, 1],$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \text{ pentru } x = 0.$$

Urmează că mulțimea de convergen  a  irului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$ este $[0, 1]$, iar funcția limită este

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

8.1.2 Convergen  punctuală a unui  ir de funcții

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D  i fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n \geq 0}$ converge punctual sau simplu la f  i vom nota $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$ dacă pentru orice $x \in D$  irul numeric $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este convergent la $f(x)$. În aceste condiții, pentru orice $x \in D$  i orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_{\varepsilon, x}. \quad (8.1)$$

Din exemplul anterior se observă însă că acest tip de convergență nu asigură transferul unor proprietăți cum ar fi continuitatea și derivabilitatea de la termenii sirului de funcții către funcția limită. În acest sens, deși toți termenii sirului $(f_n)_{n \geq 0}$ sunt funcții derivabile pe $[0, 1]$, funcția limită f nu este nici măcar continuă pe acest interval, fiind discontinuă în $x_0 = 0$. Este naturală atunci introducerea unui concept mai puternic de convergență.

8.1.3 Convergența uniformă a unui sir de funcții

Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un sir de funcții definite pe mulțimea D și fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform la f și vom nota $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in D,$$

adică rangul $n_{\varepsilon,x}$ introdus în (8.1) nu mai depinde de x , iar diferența $|f_n(x) - f(x)|$ poate fi făcută suficient de mică de la un rang n_ε încolo indiferent de valoarea lui $x \in D$.

Conform definiției, se observă atunci că dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, atunci și $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Implicația inversă nu este însă adevărată, în acest sens putându-se considera următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$. Atunci, deoarece

$$0 \leq x^n(1 - x^n) \leq x^n,$$

iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ pentru $x \in [0, 1)$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1)$. Deoarece $f_n(1) = 0$ pentru $n \geq 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 0$, deci $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ și să presupunem că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Atunci există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|f_n(x)| < \frac{1}{4}, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in [0, 1].$$

Însă $f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq 1$, ceea ce contrazice inegalitatea de mai sus. În concluzie, $f_n \not\xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.1.4 Criterii de convergen  uniformă

Se poate ob ine în mod imediat următorul criteriu de convergen  uniformă, util atunci când limita  irului este cunoscută de la bun început, sau poate fi ușor determinată.

Teorema 8.1. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D  i fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$ dacă  i numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0,$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$. Să arătăm că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. În acest sens, conform celor de mai sus, este suficient să demonstrăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \right) = 0.$$

Deoarece f_n este impară pentru orice $n \geq 0$, iar $f_n(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$, urmează că

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x \geq 0} f_n(x).$$

Întruc t 

$$f'_n(x) = \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2},$$

urmează că $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este unicul punct de maxim local al lui f_n pe $[0, \infty)$, iar cum $f_n(x_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, urmează că

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } x \geq 0,$$

iar

$$\sup_{x \geq 0} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty,$$

deci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Vom preciza în cele ce urmează un criteriu care constituie o adaptare a criteriului de convergen  Cauchy pentru  iri, men ion nd în esen  faptul că dacă

șirurile numerice $(f_n(x))_{n \geq 0}$ sunt fundamentale în mod uniform, în sensul că rangul indicat în condiția Cauchy depinde doar de ε , nu și de x , atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent. La fel ca și în cazul șirurilor numerice, nu este necesar să fie cunoscută limita șirului de funcții, aşa cum s-a întâmplat în cazul criteriului anterior.

Teorema 8.2. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } m, n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } x \in D.$$

Rezultatul se poate exprima și sub următoarea formă echivalentă.

Teorema 8.3. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un șir de funcții definite pe mulțimea D . Atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ și orice } x \in D.$$

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. Să arătăm că $(f_n)_{n \geq 1}$ este uniform convergent.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left| \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Deoarece

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n \geq n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$, urmează că

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, \text{ orice } p \geq 0 \text{ și orice } x \in D.$$

Conform teoremei de mai sus, urmează că $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent.

Următorul rezultat poartă numele de *criteriul majorării* și indică faptul că o condiție suficientă pentru convergența uniformă a unui șir de funcții către o func-

tie dată este ca modulul diferen ei dintre termenii  irului  i acea funcție să poată fi majorat, indiferent de valoarea argumentului, de termenii unui  ir cu limita 0.

Teorema 8.4. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D  i fie de asemenea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ un  ir de numere reale pozitive astfel  nc t $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  i

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{  i } x \in D,$$

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Demonstra ie. Deoarece

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

concluzia urmează în mod imediat cu ajutorul Teoremei 8.1. ■

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$. Atunci

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{\cos nx}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{  i } x \in [0, 1],$$

iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0,$$

deci $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniform  tre funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pentru $x \in [0, 1]$.

Pentru studierea convergenței uniforme a unui  ir de funcții a cărei limită nu este cunoscută de la început, este utilă mai întâi determinarea funcției limită „punct cu punct”, ținând seama de faptul că orice  ir de funcții uniform convergent este în mod necesar  i convergent punctual, după care diferen a dintre termenii  irului  i funcția limită astfel obținută se estimează în mod uniform.

Exercițiu. Studiați convergența  irului de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx^2 + 2}{nx}$.

Soluție. Mai  nt i, se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2 + 2}{nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{2}{nx} \right) = x, \quad \text{pentru orice } x \in [1, 2],$$

deci $(f_n)_{n \geq 0}$ converge, deocamdată punctual, către funcția

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Să arătăm că această convergență este uniformă. Observăm că

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in [1, 2],$$

iar deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

În fine, în prezența proprietății de monotonie, convergența punctuală se poate transforma în convergență uniformă, aşa cum va fi observat din rezultatul următor, numit *teorema lui Dini*.

Teorema 8.5. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un sir de funcții continue definite pe mulțimea compactă D și de asemenea o funcție constantă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. $f_n \xrightarrow{s} f$ pentru $n \rightarrow \infty$,
2. $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$,

atunci $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.1.5 Transmiterea unor proprietăți prin convergență uniformă

S-a observat anterior că prin convergență punctuală proprietățile de continuitate și derivabilitate nu se transmit neapărat de la termenii sirului către funcția limită. Vom observa în cele ce urmează că vehiculul potrivit de transmitere a proprietăților uzuale este convergența uniformă.

Mărinire

Teorema 8.6. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un sir de funcții definite pe mulțimea D și mărginită pe D , astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea mărginită pe D .

Continuitate

Teorema 8.7. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D  i continue în $a \in D$, astfel  nc t $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea continuă în a .

Conform definiției continu ii pe o mulțime, teorema de mai sus conduce la următorul corolar.

Corolar 8.7.1. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe mulțimea D  i continue pe D , $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Atunci f este de asemenea continuă în D .

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Atunci

$$f_n \xrightarrow{s} f \text{ pentru } n \rightarrow \infty, \text{ unde } f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Totuși, f_n nu converge  i uniform la această funcție, deoarece în caz contrar ar trebui ca f să fie continuă, fiind limita uniformă a unui  ir de funcții continue, iar f este discontinuă în $x_0 = 1$.

Derivabilitate

Prin analogie cu transmiterea propriet ilor de m arginire  i continuitate de la termenii unui  ir uniform convergent  tre funcția limită, s ar putea crede că  i proprietatea de derivabilitate se transmite prin convergen  uniformă. Acest lucru nu este însă adeverat,  sa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2n}, & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ x + \frac{1}{2n}, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Atunci

$$f'_n(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{1}{n} \\ nx, & x \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}.$$

În plus,

$$\begin{aligned} (f'_n)_s\left(-\frac{1}{n}\right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x < -\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x < -\frac{1}{n}}} \frac{-x - \frac{1}{n}}{x + \frac{1}{n}} = -1 \\ (f'_n)_d\left(-\frac{1}{n}\right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x > -\frac{1}{n}}} \frac{f_n(x) - f_n\left(-\frac{1}{n}\right)}{x - \left(-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{n} \\ x > -\frac{1}{n}}} \frac{\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{2n}}{x + \frac{1}{n}} = -1, \end{aligned}$$

deci f_n este derivabilă în $x_1 = -\frac{1}{n}$, iar $f'_n(-\frac{1}{n}) = -1$. Similar, f_n este derivabilă în $x_2 = \frac{1}{n}$, iar $f'_n(\frac{1}{n}) = 1$. În concluzie, f_n este derivabilă pe \mathbb{R} pentru orice $n \geq 1$.

Fie acum $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Vom estima $|f_n(x) - f(x)|$, pentru $x \in \mathbb{R}$, cu scopul de a demonstra că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Avem că

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| -\frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n}, & \text{pentru } x \leq -\frac{1}{n} \\ |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{n}{2}x^2 - |x| \right| \leq \frac{n}{2}|x|^2 + |x| \leq \frac{3}{2n}, & \text{pentru } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n}, & \text{pentru } x \geq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{3}{2n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

iar conform criteriului majorării urmează că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$. Totuși, funcția limită f nu este derivabilă în $x = 0$, deci proprietatea de derivabilitate nu se transmite neapărat prin convergență uniformă.

Exemplul, totuși, nu este surprinzător. Convergența uniformă a unui sir de funcții este o proprietate globală, măsurând, într-un anumit sens, cât de „aproape”

sunt termenii acestui  ir de funcția limită, în vreme ce derivabilitatea unei funcții este o proprietate locală, m sur nd viteza de varia ie a acelei funcții.  n acest sens, două funcții pot avea valori „apropiate”, dar valorile uneia dintre ele pot varia cu mult mai repede dec t valorile celeilalte, fie  i doar local, caz în care derivatele celor două funcții nu vor fi „apropiate” una de alta.

O altă intrebare naturală este dacă uniforma convergența a unui  ir $(f_n)_{n \geq 0}$ atrage uniforma convergența a  irului derivatelor sale $(f'_n)_{n \geq 0}$. Răspunsul la această intrebare este de asemenea negativ, din acele i motive enunțate mai sus,  sa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$. Deoarece

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

urmează conform criteriului majorării că $f_n \xrightarrow{u} f$, unde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Totuși, deoarece $f'_n(x) = \cos nx$, iar $f'_n(\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$, urmează că $(f'_n(\frac{\pi}{2}))_{n \geq 0}$ nu este convergent, iar $(f'_n)_{n \geq 0}$ nu poate fi uniform convergent pe \mathbb{R} ,  ntru t mulțimea sa de convergența nu este întreg \mathbb{R} .

Se va observa însă că transferul de derivabilitate se produce în condi ile în care sunt asigurate atât convegen a uniformă a  irului funcțiilor, c t  i convegen a uniformă a  irului derivatelor.

Teorema 8.8. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții derivabile definite pe un interval I  i fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel  nc t

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.
2. $(f'_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, $f'_n \xrightarrow{u} g$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune  i sub forma

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n),$$

spunându-se că, în condi ile teoremei, *limita derivatelor este derivata limitei*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $(f_n)_{n \geq 0}$ să fie convergent într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergența uniformă a acestui sir.

Teorema 8.9. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un sir de funcții derivabile definite pe un interval mărginit I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent într-un punct $a \in I$.
2. $(f'_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, $f'_n \xrightarrow{u} g$ pentru $n \rightarrow \infty$.

Atunci $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent către o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Integrabilitate

Pentru conformitate, menționăm aici că și proprietatea unei funcții de a fi integrabilă Riemann, care va fi studiată ulterior, se transmite la rândul ei de la termenii unui sir uniform convergent către funcția limită.

Teorema 8.10. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$ un sir de funcții integrabile Riemann definite pe un interval $[a, b]$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, unde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, iar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Observăm atunci că, în condițiile teoremei, limita integralelor este integrala limitei.

8.2 Serii de funcții

Fiind dat un sir de funcții $(f_n)_{n \geq 0}$, vom numi serie de funcții de termen general f_n cuplul $((f_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$ format din sirul $(f_n)_{n \geq 0}$ al termenilor seriei și sirul de funcții $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale, definit după regula

$$S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

În această situație, f_n se va numi și termenul de rang n sau indice n al seriei. Vom nota o serie de funcții de termen general f_n prin

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Dacă primii k termeni f_0, f_1, \dots, f_{k-1} nu sunt definiți, vom nota seria de funcții de termen general f_n prin

$$f_k + f_{k+1} + f_{k+2} + \dots + f_n + \dots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} f_n.$$

8.2.1 Punct de convergență. Mulțime de convergență. Suma unei serii de funcții

Pentru a studia convergența seriilor de funcții, vom utiliza noțiunile și rezultatele menționate anterior pentru řiruri de funcții și serii numerice.

Punct de convergență. Mulțimea de convergență

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Vom spune că $a \in D$ este un punct de convergență al seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dacă řirul numeric $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergent, adică a este punct de convergență pentru řirul de funcții $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale. Mulțimea tuturor punctelor de convergență ale seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi atunci mulțimea de convergență a acestei serii.

Exemplu. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ și fie $x \in \mathbb{R}$ fixat. Studiem absoluta convergență a seriei numerice obținute. Urmează că

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right|} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{1+x^{2n}}.$$

Pentru $x \in (-1, 1)$, $L = |x| < 1$, deci seria obținută pentru acest x este absolut convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x \in (-\infty, -1) \cup$

$(1, +\infty)$,

$$L = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1}} = \frac{1}{|x|} < 1,$$

deci seria obținută pentru acest x este absolut convergentă, conform criteriului radicalului. Pentru $x = -1$, seria inițială devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = 1$, seria inițială devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Suma unei serii de funcții

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D și fie $E \subseteq D$ mulțimea sa de convergență. Funcția $S : E \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$S : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

se va numi *suma* seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

8.2.2 Convergența punctuală a unei serii de funcții

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă punctual* sau *simplu* către $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă sirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către f , adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă către $f(a)$.

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă absolut* dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este convergentă punctual, adică pentru orice $a \in D$ seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este convergentă.

Să remarcăm că, la fel ca și în cazul seriilor numerice, dacă o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă, atunci ea este și convergentă. În plus, deoarece

rece pentru seriile numerice cu termeni pozitivi convergen  este echivalentă cu m arginirea, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergentă dacă  i numai dacă $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(a)|$ este m arginit  pentru orice $a \in D$.

8.2.3 Convergen  uniformă a unei serii de funcții

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se va numi *convergentă uniform* către $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ dacă  irul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform către f .

Exemplu. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$. Să demonstrăm că seria este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

Într-adevăr,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x}, \quad \text{pentru orice } x \in (0, \infty),$$

deci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă, deocamdată punctual, la $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Deoarece

$$|S_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1},$$

urmează conform criteriului majorării că $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform la f , deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este convergentă uniform pe $(0, \infty)$.

8.2.4 Criterii de convergen  uniformă

Conform Teoremei 8.3  i definiției convergenței uniforme, se ob ine următorul criteriu de convergen  uniformă.

Teorema 8.11. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq n_{\varepsilon}$, orice $p \geq 0$ și orice $x \in D$.

De asemenea, prin analogie cu Teorema 8.4, se poate enunța și demonstra următorul criteriu de convergență uniformă și absolută pentru serii de funcții, numit *criteriul lui Weierstrass*.

Teorema 8.12. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D . Dacă există $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ un sir de numere reale pozitive astfel încât $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ este convergentă și

$$|f_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și } x \in D,$$

atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut și uniform convergentă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$. Deoarece

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ și orice } x \in \mathbb{R},$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ este convergentă, fapt care poate fi demonstrat, de exemplu, cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel sau comparând seria dată cu seria convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ cu ajutorul criteriului de comparație cu limită, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2 + 1}$ este absolut și uniform convergentă pe \mathbb{R} .

Criteriul lui Dirichlet

La fel ca și în cazul seriilor numerice, înmulțirea termenului general al unei serii de funcții nu neapărat convergente, dar cu  irul sumelor parțiale uniform m arginit cu termenul general al unui  ir de funcții cu valori „mici” (monoton descrescător pentru orice valoare fixată a argumentului și uniform convergent la 0) „ mbun t te te” convergența seriei, în sensul c ă seria de funcții ce are ca termen general rezultatul acestui produs este uniform convergentă.

Teorema 8.13. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D care are  irul sumelor parțiale uniform m arginit. Fie $(g_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe D cu propriet ile urm atoare.

1. $g_n \xrightarrow{u} 0$ pentru $n \rightarrow \infty$.
2.  irul numeric $(g_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton descrescător pentru orice $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă.

Criteriul lui Abel

Similar, înmulțirea termenului general al unei serii de funcții uniform convergente cu termenul general al unui  ir de funcții cu propriet i suficient de bune (uniform m arginit și monoton pentru valoare fixată a argumentului) p astrează uniforma convergența a seriei.

Teorema 8.14. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D care este uniform convergentă. Fie $(g_n)_{n \geq 0}$ un  ir de funcții definite pe D cu propriet ile urm atoare:

1. $(g_n)_{n \geq 0}$ este uniform m arginit.
2.  irul numeric $(g_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton pentru orice $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe D .

Criteriul lui Leibniz

Teorema 8.15. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D cu proprietățile următoare:

1. $f_n \xrightarrow{u} 0$ pentru $n \rightarrow \infty$.
2. Sirul numeric $(f_n(x))_{n \geq 0}$ este monoton descrescător pentru orice $x \in D$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$ este uniform convergentă pe D .

8.2.5 Transmiterea unor proprietăți prin convergență uniformă

Prin analogie cu rezultatele corespunzătoare pentru siruri de funcții, se pot discuta continuitatea, derivabilitatea și integrabilitatea sumelor seriilor uniform convergente.

Continuitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.16. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții definite pe mulțimea D care este uniform convergentă către o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă toate funcțiile f_n sunt continue în $a \in D$ (respectiv pe D), atunci f este de asemenea continuă în a (respectiv pe D).

Derivabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.17. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții derivabile definite pe un interval I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xrightarrow{u} f$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă, $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n \xrightarrow{u} g$.

Atunci f este derivabilă, iar $f' = g$.

Egalitatea $f' = g$ de mai sus se poate pune și sub forma

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (f'_n),$$

spunându-se că, în condițiile teoremei, seriile de funcții convergente uniform se pot *deriva termen cu termen*.

Dacă intervalul I este mărginit, atunci este suficient ca $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ să fie convergentă într-un singur punct, restul ipotezelor implicând convergența uniformă a acestei serii.

Teorema 8.18. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții derivabile definite pe un interval mărginit I și fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este convergentă într-un punct $a \in I$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă, $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n \xrightarrow{u} g$.

Atunci $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă către o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f este derivabilă, iar $f' = g$.

Pentru conformitate, menționăm aici și un rezultat privitor la integrarea seriilor uniform convergente.

Integrabilitatea seriilor uniform convergente

Teorema 8.19. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o serie de funcții integrabile Riemann definite pe un interval mărginit $[a, b]$, uniform convergentă către o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a, b]$, seria integralelor $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$

este convergentă, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

8.3 Serii de puteri

Vom numi *serie de puteri centrată în x_0* o serie de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ pentru care funcțiile f_n , $n \geq 0$, au forma particulară $f_n = a_n(x - x_0)^n$, unde a_n , $n \geq 0$, și x_0 sunt numere reale. O serie de puteri centrată în x_0 are deci forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (8.2)$$

fiind unic determinată de numărul $x_0 \in \mathbb{R}$ și de sirul $(a_n)_{n \geq 0}$. Dacă $x_0 = 0$, se obține cazul particular al seriei de puteri centrată în origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (8.3)$$

Întrucât după schimbarea de variabilă $x - x_0 = y$ seria (8.2) de mai sus se scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n,$$

similară cu (8.3), se va considera în cele ce urmează doar cazul în care $x_0 = 0$, iar seria de puteri se scrie sub forma (8.3), adaptarea rezultatelor pentru cazul $x_0 \neq 0$ putându-se face cu ușurință.

8.3.1 Mulțimea de convergență a unei serii de puteri

Pentru o serie de funcții oarecare, mulțimea de convergență poate avea o structură complexă. Totuși, pentru serii de puteri situația este cu mult mai simplă. Se poate observa că seria (8.3) este convergentă pentru $x = 0$, având suma a_0 . Mai departe, se va demonstra că (8.3) poate converge doar în $x = 0$, poate converge pe întreaga axă reală sau poate converge pe un interval deschis simetric față de origine, o întrebare adițională fiind dacă seria (8.3) converge și în capetele acestui interval.

Mai întâi, vom exemplifica aceste situații.

Convergen  doar în 0

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$  i fie $x \neq 0$ fixat. Atunci not nd $b_n = n!x^n$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty,$$

ceea  nseam  că $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty$, iar, pentru acest x fixat, seria dată nu poate fi convergentă,  ntru t termenul ei general nu tinde la 0.  n concluzie, seria dată converge doar pentru $x = 0$.

Convergen  pentru orice $x \in \mathbb{R}$

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  i fie $x \neq 0$ fixat. Atunci not nd $b_n = \frac{x^n}{n!}$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

iar, conform criteriului raportului pentru serii numerice, seria dată este absolut convergentă pentru acest x fixat, deci  i convergentă.  n concluzie, seria dată converge pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Convergen  pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. S-a observat deja că pentru $x \in (-1, 1)$ fixat, seria dată este convergentă, cu suma $\frac{1}{1-x}$, iar pentru $x \in (-\infty - 1] \cup [1, \infty)$ fixat, seria dată este divergentă,  ntru t termenul sau general nu tinde la 0.  n concluzie, mulțimea de convergen  a seriei date este $(-1, 1)$.

Convergen  pe un interval deschis centrat în 0

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  i fie $x \neq 0$ fixat. Atunci, not nd $b_n = \frac{x^n}{n}$, urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|x|}{n+1} = |x|.$$

Pentru $x \in (-1, 1)$, urmează, conform criteriului raportului pentru serii numerice, că seria dată este absolut convergentă, deci  i convergentă. Pentru $|x| > 1$,

urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \infty$, iar seria dată este divergentă, întrucât termenul general nu tinde la 0.

Rămâne deci să studiem convergența seriei în capetele intervalului menționat anterior, anume în $x = -1$ și $x = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă. Pentru $x = -1$, seria dată devine seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz pentru serii numerice. În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $[-1, 1]$.

Cu un raționament similar celui de mai sus, se poate observa că mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ este $(-1, 1]$, în vreme ce mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ este $[-1, 1]$, nicio afirmație generală neputând fi făcută *a priori* relativ la convergența sau divergența seriei la extremitățile mulțimii de convergență.

Rezultatul următor, cunoscut sub numele de *teorema lui Abel*, furnizează informații adiționale despre conținutul mulțimii de convergență.

Teorema 8.20. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Fie de asemenea $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ este convergentă, respectiv seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ este divergentă. Au loc atunci următoarele proprietăți.

1. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge în orice punct x cu $|x| < |x_1|$, respectiv diverge în orice punct x cu $|x| > |x_2|$.
2. Pentru orice $r \in (0, |x_1|)$, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

Determinarea razei de convergență a unei serii de puteri

S-a observat deja că seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = 0$, iar teorema lui Abel ne asigură de următoarele lucruri.

1. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x = x_1$, atunci este convergentă și pentru $|x| < |x_1|$.
2. Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este divergentă pentru $x = x_2$, atunci este divergentă și pentru $|x| > |x_2|$.

Fie E mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și fie

$$R = \sup E,$$

numit și *raza de convergență* a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Conform celor de mai sus, $0 \in E$, deci $R \geq 0$. Sunt posibile următoarele situații.

1. $R = 0$

Dacă $x \neq 0 \in E$, atunci $(-|x|, |x|) \subseteq E$, deci $R \geq |x|$, contradicție. Atunci $E = \{0\}$.

2. $0 < R < \infty$

Conform caracterizării analitice a marginii superioare a unei mulțimi și teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe $(-R, R)$, divergentă pe $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ și absolut convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r < R$. Relativ la comportarea seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ în cele două capete ale intervalului $(-R, R)$, aceasta poate fi convergentă în ambele, într-unul singur, sau în niciunul, în acest sens putând fi studiate exemplele menționate anterior.

3. $R = +\infty$

Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pe \mathbb{R} și uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, cu $r \in \mathbb{R}$.

În toate aceste cazuri, dacă E este mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, iar R este raza sa de convergență, atunci

$$(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R].$$

Intervalul $(-R, R)$ poartă numele de *intervalul de convergență* al seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (a nu se confunda cu mulțimea de convergență a acestei serii, care mai poate conține eventual și capetele $-R$ și R ale acestui interval).

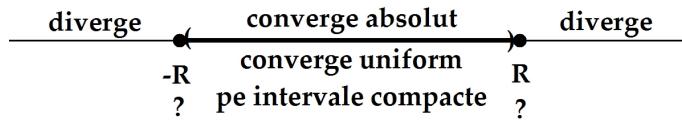


Figura 8.1: Convergența unei serii de puteri

Formulele Cauchy-Hadamard

Având în vedere faptul că pe intervalul de convergență $(-R, R)$ seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă, pentru determinarea razei de convergență vom folosi criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi, aplicate seriei modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Mai întâi, vom preciza o modalitate de determinare a razei de convergență a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui raport.

Teorema 8.21. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu coeficienți nenuli. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $x \in \mathbb{R}^*$. Aplicând criteriul raportului seriei numerice cu termeni strict pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ și divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$.

De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Exemplu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1,$$

iar raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului Raabe-Duhamel, sau conform criteriului de comparație cu limită, folosind ca termen de comparație seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că multimea de convergență a seriei de puteri date este $[-1, 1]$.

Vom preciza acum o modalitate de determinare a razei de convergență a seriei de puteri cu ajutorul limitei unui radical.

Teorema 8.22. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $x \in \mathbb{R}$. Aplicând criteriul radicalului cu limite extreme seriei cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, observăm că

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| = \lambda |x|,$$

iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $|x| < \frac{1}{\lambda}$ și divergentă pentru $|x| > \frac{1}{\lambda}$.

De aici rezultă în mod imediat teorema de mai sus. ■

Teorema de mai sus se poate particulariza sub următoarea formă.

Teorema 8.23. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}, & \text{dacă } \lambda \in (0, \infty), \\ \infty, & \text{dacă } \lambda = 0, \\ 0, & \text{dacă } \lambda = +\infty. \end{cases}$$

Formulele cuprinse în Teoremele 8.21 și 8.22 poartă numele de *formulele Cauchy-Hadamard*.

Exemplu. 1. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5^n} x^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}} = \frac{1}{5},$$

iar raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 5$. Pentru $x = 5$, seria dată devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n}$, care este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = 1$, iar limita termenului său general nu este

0. Pentru $x = -5$, seria dată devine $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n}{2^n + 5^n}$, care este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n}{2^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}$ nu există, întrucât numărătorul nu are limită pentru $n \rightarrow \infty$, iar limita numitorului este 1. Urmează că mulțimea de convergență a seriei de puteri date este $(-5, 5)$.

2. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$. Cu notația $x+1 = y$, obținem

nem seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

iar raza de convergen ă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} y^n$ este $R = \frac{1}{3}$. Pentru $y = \frac{1}{3}$, aceast ă serie devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$, fiind serie cu termeni pozitivi, iar cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{3^n} \frac{1}{n}$ are aceea i natur ă cu seria armonic ă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, deci este divergent ă. Pentru $y = -\frac{1}{3}$, seria de puteri în y devine $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$, care este convergent ă, conform criteriului lui Leibniz. Urmează că mulțimea de convergen ă a seriei în y este $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, iar  nând seama că $y = x + 1$, deci $x = y - 1$, mulțimea de convergen ă seriei de puteri în x este $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$.

Suma unei serii de puteri

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergen ă $R > 0$  i fie E mulțimea sa de convergen ă. S-a observat deja că $(-R, R) \subseteq E \subseteq [-R, R]$. Ca  i în cazul general al seriilor de funcții, se poate defini funcția $S : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$S : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

numit a *suma* seriei de puteri, unde

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

reprezintă suma par ial  de ordinul n a seriei de puteri.

Teorema 8.24. Suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este funcție continuă pe $(-R, R)$.

Demonstrație. Fie $r \in (0, R)$. Conform teoremei lui Abel, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este uniform convergentă pe $[-r, r]$, iar cum sumele parțiale S_n ale seriei sunt funcții continue pe $[-r, r]$, urmează că S este funcție continuă pe $[-r, r]$, întrucât proprietatea de continuitate a sumelor parțiale se transmite prin convergență uniformă. Cum $r \in (0, R)$ era arbitrar, urmează că S este funcție continuă pe $(-R, R)$. ■

Comportarea funcției sumă în capetele intervalului de convergență

Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă și în R sau $-R$, atunci funcția sumă S este bine definită și în aceste puncte, continuitatea sa neputându-se însă decide cu ajutorul teoremei de mai sus. Teorema de mai jos, numită și *teorema a doua a lui Abel*, furnizează un răspuns în această direcție.

Teorema 8.25. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, cu raza de convergență $R > 0$. Dacă seria de puteri este convergentă în $x = R$ (respectiv în $x = -R$), atunci suma sa S este funcție continuă în $x = R$ (respectiv în $x = -R$).

Combinând teorema a doua a lui Abel cu proprietatea de continuitate pe $(-R, R)$ obținută anterior, observăm că suma unei serii de puteri este continuă în toate punctele în care este bine definită, lucru afirmat în următorul rezultat.

Corolar 8.25.1. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Atunci suma sa este o funcție continuă pe mulțimea de convergență a seriei de puteri.

Derivarea unei serii de puteri

Fie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

o serie de puteri și fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

seria de puteri obținută prin derivarea termen cu termen a seriei ini iale, numită *seria derivatelor*. Vom preciza în cele ce urmează legăturile dintre razele de convergen  ale celor două serii  i dintre sumele acestora.

Teorema 8.26. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri  i fie R raza sa de convergen , iar S funcția sa sumă. Atunci seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are aceea i rază de convergen  R , S este derivabilă pe $(-R, R)$, iar

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Să notăm  c  relația de derivare din teorema de mai sus se poate scrie sub forma

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

iar derivarea unei serii de puteri se poate face termen cu termen pe intervalul de convergen ua. Repet nd ra ionamentul în mod inductiv, se poate deduce următorul rezultat.

Teorema 8.27. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri  i fie R raza sa de convergen , iar S funcția sa sumă. Atunci seria derivatelor de ordinul k ,

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad k \geq 1,$$

are aceea i rază de convergen , S este indefinit derivabilă pe $(-R, R)$, iar

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}, \quad \text{pentru } x \in (-R, R).$$

Exercițiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

1. Determinați raza de convergen  a acestei serii de puteri, studiați-i con-

vergență și precizați suma sa.

$$2. \text{ Calculați } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Soluție. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

urmează că raza de convergență a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Pentru $x = -1$ seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă, fiind seria armonică înmulțită cu constanta -1 . În concluzie, mulțimea de convergență a seriei date este $(-1, 1]$.

Pentru $x \in (-1, 1)$, să notăm $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. Atunci

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Cum $S'(x) = \frac{1}{1+x}$, urmează că $S(x) = \ln(1+x) + C$, conform unui corolar al teoremei lui Lagrange. Deoarece $S(0) = 0$, se obține că $C = 0$, iar $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Deoarece seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ este convergentă și în $x = 1$, urmează conform celei de-a doua teoreme a lui Abel că suma sa S este funcție continuă în $x = 1$, și deci

$$S(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1+x) = \ln 2,$$

deci $S(x) = \ln(1+x)$ pentru orice $x \in (-1, 1]$.

2. În particular, din cele de mai sus se obține că

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots = \ln 2.$$

8.3.2 Seria binomială

Fie seria de puteri

$$1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (8.4)$$

numită în cele ce urmează *seria binomială*. Observăm că pentru $k = n$, $n \in \mathbb{N}$, seria se transformă într-o sumă finită, având ca rezultat o funcție polinomială de gradul n . Vom presupune acum că $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)|}{(n+1)!}}{\frac{|k(k-1)\cdots(k-n+1)|}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k-n|}{n+1} = 1,$$

urmează că seria binomială (8.4) are raza de convergență $R = 1$. Fie $S : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ suma sa. Atunci, conform teoremei de derivare a seriilor de puteri,

$$S'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1!}x + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

de unde

$$xS'(x) = kx + \frac{k(k-1)}{1!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

iar

$$(1+x)S'(x) = kS(x), \quad x \in (-1, 1).$$

De aici, înmulțind ambii membri cu $(1+x)^{k-1}$, obținem că

$$(1+x)^k S'(x) - k(1+x)^{k-1} S(x) = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

deci

$$\left(\frac{S(x)}{(1+x)^k} \right)' = 0, \quad x \in (-1, 1),$$

iar $S(x) = C(1+x)^k$, $C \in \mathbb{R}$. Deoarece $S(0) = 1$, urmează că $C = 1$, de unde $S(x) = (1+x)^k$. Obținem deci că, pentru orice $x \in (-1, 1)$,

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k}{1!}x + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

formulă care generalizează formula binomială a lui Newton, valabilă pentru $k \in \mathbb{N}$. Pentru diverse valori particulare ale lui k se obțin sumele unor serii uzuale de puteri.

Astfel, pentru $k = -1$ obținem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

de unde, substituind x cu $-x$ obținem

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar substituind x cu x^2 obținem

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Pentru $k = \frac{1}{2}$ obținem

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

iar pentru $k = -\frac{1}{2}$ obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \dots + \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Reamintim aici că $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot (2n-1)$, $(2n)!! = 2 \cdot 4 \dots \cdot 2n$. Substituind x cu $-x^2$ obținem că

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Integrarea unei serii de puteri

Teorema 8.28. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și fie R raza sa de convergență, iar S

funcția sa sumă. Atunci seria obținută prin integrare termen cu termen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ are aceeași rază de convergență R , S este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subseteq (-R, R)$,

iar

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-R, R).$$

Exercițiu. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$.

1. Determinați raza de convergența  i mulțimea de convergența a seriei de puteri.
2. Determinați suma seriei de puteri.

Soluție. 1. Deoarece

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1)^2|}{|n(n+2)|} = 1,$$

urmează că raza de convergența a seriei de puteri date este $R = 1$. Pentru $x = 1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $x = -1$, seria dată devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, care este divergentă, deoarece termenul general nu tinde la 0. În concluzie, mulțimea de convergența a seriei date este $(-1, 1)$.

2. Observăm mai întâi că

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

R m ne deci să calculăm suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = S(x)$. Cum

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

obținem prin integrare termen cu termen în condi ile Teoremei 8.28 că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \quad x \in (-1, 1),$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Alternativ, putem observa că

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1),$$

deci $S(x) = -\ln(1-x) + C$. Deoarece $S(0) = 0$, urmează că $C = 0$, iar $S(x) = -\ln(1-x)$.

8.3.3 Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor

În situația în care o funcție se poate reprezenta ca suma unei serii de puteri centrate în x_0 , $x_0 \in \mathbb{R}$, ea se poate deriva ușor termen cu termen pe intervalul de convergență al seriei, derivatele sale exprimându-se tot ca serii de puteri cu aceeași rază de convergență. Astfel, dacă

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \\ x &\in (x_0 - R, x_0 + R), \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n + \cdots, \\ x &\in (x_0 - R, x_0 + R) \end{aligned}$$

și, în general,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k!a_k + (k+1)k \cdots 2a_{k+1}(x - x_0) + \cdots \\ &\quad + (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1)(x - x_0)^n + \cdots, \\ x &\in (x_0 - R, x_0 + R), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Să notăm faptul că, înlocuind $x = x_0$ în formulele de mai sus, obținem că

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Cunoscându-se deci faptul că o funcție f se poate exprima ca o serie de puteri centrală într-un punct oarecare și cu raza de convergență nenulă (fiind deci infinit derivabilă pe intervalul de convergență), se poate determina o formulă de calcul pentru derivatele sale de orice ordin în acel punct.

Teorema 8.29. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ o serie de puteri centrată în x_0 cu raza de convergență $R > 0$, mulțimea de convergență E și suma $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este indefinit derivabilă pe intervalul $(x_0 - R, x_0 + R)$, iar

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k \quad \text{pentru orice } k \geq 0. \quad (8.5)$$

O întrebare naturală este dacă se poate refa drumul și în sens invers, adică dată fiind o funcție indefinit derivabilă, aceasta se poate scrie ca suma unei serii de puteri centrate într-un punct dat, coeficienții seriei de puteri fiind calculați cu ajutorul formulei (8.5). În absența unor condiții suplimentare asupra funcției f , răspunsul este negativ, așa cum se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Să observăm că pentru orice polinom $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{P(u)}{e^{u^2}} = 0,$$

egalități demonstrabile ușor cu ajutorul regulii lui l'Hôpital, și deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Se poate observa că

$$\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)^{(n)} = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

unde $(P_n)_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{R}[X]$ este un sir de polinoame care verifică relația de recurență

$$P_{n+1}(X) = 2P_n(X)X^3 - X^2P'_n(X),$$

de unde, conform celor de mai sus, f admite deriveate de orice ordin în $x = 0$, iar $f^{(k)}(0) = 0$ pentru $k \geq 0$. Atunci, conform formulei (8.5), ar trebui ca $a_k = 0$ pentru $k \geq 0$. Cum $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq 0$, f nu poate fi suma seriei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, cu $a_k, k \geq 0$, precizați de (8.5) pe niciun subinterval al lui \mathbb{R} .

Vom preciza în continuare condiții suplimentare cu ajutorul cărora se poate asocia unei funcții f o serie de puteri centrată în x_0 și convergentă la f prin intermediul formulelor (8.5).

Seria Taylor asociată unei funcții într-un punct. Seria MacLaurin

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie $x_0 \in I$ astfel încât f este indefinit derivabilă în x_0 . Vom numi *serie Taylor centrată în x_0 asociată lui f* seria de puteri T_f definită prin

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (8.6)$$

Pentru $x_0 = 0$, vom numi *seria MacLaurin asociată lui f* seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Să notăm că T_f este o serie de funcții definite pe întreg \mathbb{R} , nu doar pe I , iar sumele parțiale de ordinul k , S_k , ale seriei Taylor centrate în x_0 asociate lui f sunt polinoamele Taylor definite în Capitolul 7, anume

$$\begin{aligned} T_k &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Totuși, în acest moment, această asociere este pur formală, încrucât chiar dacă seria Taylor T_f definită mai sus converge în mod obligatoriu pentru $x = x_0$, ea poate să nu mai conveargă în niciun alt punct, având raza de convergență 0. Mai mult, chiar dacă seria Taylor T_f este convergentă, ea poate converge la o altă funcție decât funcția f inițială, în acest sens putându-se observa exemplul de mai sus, în care T_f este funcția identic nulă, fără ca f să aibă aceeași proprietate.

Vom spune atunci că $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f indefinit derivabilă în $x_0 \in I$, este *dezvoltată în serie Taylor în jurul lui x_0* dacă seria Taylor centrată în x_0 asociată lui f are raza de convergență $R > 0$ și converge la f pe $(x_0 - R, x_0 + R) \cap I$, adică

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - R, x_0 + R) \cap I.$$

Convergența seriei Taylor

Să ne reamintim că

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

unde R_n este restul formulei lui Taylor de ordinul n , iar T_n reprezintă polinomul Taylor de ordinul n , egal cu suma par ial  de ordinul n a seriei de funcții T_f . Intruc t dorim ca T_f să coincidă cu f cel pu in pentru funcții f cu regularitate ridicată, intuim că diferen a $R_n(x)$ între  nctia  int  f(x) si suma par ial  $T_n(x)$ trebuie să tindă la 0. Se poate ob ine atunci următorul rezultat.

Teorema 8.30. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, si fie $x_0 \in I$ astfel  nc t f este indefinit derivabilă în x_0 . Fie de asemenea $a \in I$. Atunci seria Taylor T_f este convergentă în a la $f(a)$ dacă si numai dacă  irul $(R_n(a))_{n \geq 0}$ al resturilor formulei lui Taylor calculate pentru $x = a$ este convergent la 0.

Demonstra ie. Fie $a \in I$. Atunci

$$f(a) = T_n(a) + R_n(a) = S_n(a) + R_n(a),$$

unde S_n reprezintă sumele parțiale ale lui T_f , egale cu polinoamele Taylor de ordinul n , T_n . Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(a) = 0 \Leftrightarrow (S_n(a))_{n \geq 0}$ este convergent, cu limita $f(a) \Leftrightarrow T_f$ este convergentă în $x = a$, iar $T_f(a) = f(a)$. ■

Estim nd restul de ordinul n sub forma lui Lagrange, obținem cu ajutorul teoremei de mai sus următoarele condiții suficiente de convergența.

Teorema 8.31. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ si $\delta > 0$ cu proprietatea că

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M}{\delta^n} n! \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ si } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 , iar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \text{pentru } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Teorema 8.32. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, $f \in C^\infty(I)$, astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea că

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și } x \in I.$$

Atunci f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 , iar

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \text{pentru } x \in I.$$

Demonstrație. Ca mai sus,

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notând $a_n = \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, observăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_0|}{n+2} = 0.$$

De aici, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, de unde concluzia. ■

Vom spune atunci că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f indefinitely derivabilă pe I , I interval, este *analitică* pe I dacă pentru orice $x_0 \in I$ f este dezvoltabilă în serie Taylor în jurul lui x_0 .

8.3.4 Exemple de dezvoltări în serie Taylor

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. S-a observat deja că

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_x x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1},$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Substituind x cu $-x$, obținem  i că

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplu. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. S-a observat deja că

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \sin(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. S-a observat deja că

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos(\theta_x x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta_x \in (0, 1).$$

Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

iar cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alte dezvoltări remarcabile în serie MacLaurin sunt

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\arcsin x = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Operații cu serii de puteri

Fie seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, cu razele de convergență R_1 , respectiv R_2 , și fie $c \in \mathbb{R}^*$.

Suma a două serii de puteri

Suma celor două serii de puteri este seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$, cu raza de convergență $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Seria produs cu o constantă

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n$ are raza de convergență R_1 . În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R_1, R_1).$$

Seria produs după Cauchy

Seria produs după Cauchy a celor două serii de puteri este seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

cu raza de convergență $R \geq \min(R_1, R_2)$. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right), \quad x \in (-R, R).$$

Exercițiu. Să se dezvolte în serie MacLaurin func ile

$$1) f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-7}{x^2-4x+3}; \quad 2) g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 e^{-2x}.$$

Soluție. 1) Se observă că f se poate descompune în frac ii simple sub forma

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\},$$

fiind de asemenea cunoscut că

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n, \quad y \in (-1, 1).$$

Atunci

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-1} &= -2 \frac{1}{1-x} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{x-3} &= -\frac{1}{3-x} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad x \in (-3, 3). \end{aligned}$$

De aici

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(2 + \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

2) Este cunoscut că

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

de unde

$$x^3 e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-2)^{n-3}}{(n-3)!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aplicații

8.1. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$.

1. Demonstrați că $x_n = \frac{n}{n+1}$ este punct de maxim pentru f_n , iar

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in [0, 1].$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform către funcția nulă pe $[0, 1]$.

8.2. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

1. Demonstrați că

$$|f_n(x) - |x|| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent uniform către funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

8.3. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+x}{n+1}$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția constantă 1 pe $[1, \infty)$.

2. Calculați $f_n(n+2)$. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform către funcția constantă 1 pe $[1, \infty)$?

8.4. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția nulă pe $[0, 1]$.

2. Calculați $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform către funcția nulă pe $[0, 1]$?

8.5. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

1. Demonstrați că (f_n)_{n   0} este convergent punctual către funcția nulă pe [0, 1].
2. Calcula i $f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$. Este (f_n)_{n   0} convergent  i uniform către funcția nulă pe [0, 1]?

8.6. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{n(x-1)}$.

1. Demonstrați că (f_n)_{n   0} este convergent punctual către funcția nulă pe (0, 1).
2. Calcula i $f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Este (f_n)_{n   0} convergent  i uniform către funcția nulă pe (0, 1)?

8.7. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.

1. Folosind eventual inegalitatea $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pentru orice $a, b \geq 0$, demonstrați că

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{  i orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că (f_n)_{n   0} este uniform convergent către funcția nulă pe \mathbb{R} .

8.8. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx+2)+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

1. Demonstrați că

$$|f_n(x) - 1| < \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{  i orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că (f_n)_{n   0} converge uniform către funcția constantă 1 pe \mathbb{R} .

8.9. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n+1}$.

1. Demonstrați că

$$|f_n(x) - \sin x| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{  i orice } x \in \mathbb{R}.$$

2. Demonstrați că (f_n)_{n   0} converge uniform către funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

8.10. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin^n x$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

2. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform la f ?

8.11. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1, & \text{în rest} \end{cases}$.

1. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este convergent punctual către funcția constantă 1 pe \mathbb{R} .

2. Este $(f_n)_{n \geq 0}$ convergent și uniform la această funcție?

8.12. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{n+x}, & x \in [0, \frac{n-1}{n}] \\ x, & x \in (\frac{n-1}{n}, 1] \end{cases}$. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 1}$ este uniform convergent.

8.13. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție uniform continuă și fie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. Demonstrați că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.14. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Demonstrați că $f_n \xrightarrow{u} f$ pentru $n \rightarrow \infty$, dar $f_n^2 \not\xrightarrow{u} f^2$ pentru $n \rightarrow \infty$.

8.15. Fie $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$. Determinați funcția limită a sirului $(f_n)_{n \geq 1}$ și demonstrați că $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniform la această funcție.

8.16. Fie $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+\cos nx}{n+1}$. Demonstrați că $(f_n)_{n \geq 0}$ este uniform convergent, dar $(f'_n)_{n \geq 0}$ nu este uniform convergent.

8.17. Determinați suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

8.18. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$.

1. Determinați suma parțială de ordinul n , S_n , a seriei.

2. Demonstrați că seria de funcții dată este uniform convergentă.

8.19. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$, $x \in [1, \infty)$.

1. Determinați suma parcială de ordinul n , S_n , a seriei.
2. Demonstrați c a seria de funcții dată este uniform convergentă.

8.20. Folosind eventual criteriul lui Weierstrass, demonstrați c a următoarele serii de funcții sunt absolut  i uniform convergente pe \mathbb{R} .

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^4 + x^2}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}.$$

8.21. Folosind eventual inegalitatea $|\sin y| \leq |y|$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, demonstrați c a seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ este absolut  i uniform convergentă pe \mathbb{R} .

8.22. Folosind eventual inegalitatea $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, demonstrați c a seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n^4}$ este absolut convergentă pe \mathbb{R} .

8.23. Folosind criteriul lui Dirichlet, demonstrați convergența uniformă a următoarelor serii de funcții.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\cos nx}{n}, x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

8.24. Fie seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$.

1. Demonstrați c a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă pe \mathbb{R} .
2. Demonstrați c a $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ este uniform convergentă pe \mathbb{R} .
3. Folosind teorema de derivare termen cu termen, respectiv proprietatea de transfer de continuitate în condiții de convergen  uniformă, demonstrați c a suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este o funcție derivabilă, cu derivata continuă.

8.25. Demonstrați c a suma seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$ este o funcție continuă pe \mathbb{R} .

8.26. Demonstrați c a suma seriei de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ este o funcție derivabilă pe \mathbb{R}  i cu derivata continuă.

8.27. Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri.

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}; & \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+2n} x^n; \quad 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n + 3}; \\ 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n; & \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+2}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{n+2} x^n. \end{aligned}$$

8.28. Precizați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de funcții reductibile la serii de puteri prin schimbări de variabilă.

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2} \left(\frac{x}{3}\right)^n; & \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+2}{4n^3+2n+1} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}; \\ 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{(n^3+2)x^{2n}}; & \quad 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2+3n+2}; \quad 6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2+\frac{1}{4})^n}{(n+1)(n+2)x^n}. \end{aligned}$$

8.29. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

1. Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență a seriei de puteri.

2. Notând cu S suma seriei de puteri, demonstrați că

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad x \in (-1, 1).$$

3. Demonstrați că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

8.30. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$.

1. Determinați raza de convergență și mulțimea de convergență a seriei de puteri.

2. Folosind eventual egalitatea

$$(n+1)^2 x^n = (n+2)(n+1)x^n - (n+1)x^n$$

precum și teorema de derivare termen cu termen aplicată seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, determinați suma seriei date.

8.31. Fie seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$.

1. Determinați mulțimea de convergența a seriei de funcții.

2. Notând cu S funcția sa sumă, demonstrați că

$$S'(x) = S(x) - \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x > 0.$$

8.32. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$.

1. Determinați mulțimea de convergența a seriei de puteri.

2. Notând cu S funcția sa sumă, demonstrați că

$$\int_0^x S(t)dt = \frac{x}{1+x^2}.$$

3. Determinați S .

8.33. Folosind eventual egalitatea

$$\frac{x+5}{x^2+4x+3} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\},$$

dezvolta i în serie MacLaurin funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+5}{x^2+4x+3}$.

8.34. Folosind eventual egalitate ile

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1}{1-x^3} - x \frac{1}{1-x^3}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

dezvolta i în serie MacLaurin funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

8.35. Folosind eventual egalitatea

$$\ln \frac{1+x}{1+x^2} = \ln(1+x) - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, \infty),$$

dezvolta i în serie MacLaurin funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{1+x}{1+x^2}$.

8.36. Folosind eventual egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in (-2, 2)$$

dezvolta i în serie MacLaurin funcția $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Glosar

- Asimptotă
oblică, 246
orizontală, 244
verticală, 248
- Axioma
de completitudine (Cantor-Dedekind), 7
- Constanta lui Euler, 72
- Continuitate
într-un punct, 173
caracterizări analitice
cu $\varepsilon - \delta$, 179
cu şiruri, 179
laterală, 176
pe o mulțime, 176
prelungirea prin continuitate, 178
punkte de discontinuitate, 177
de specia (speța) întâi, 177
de specia (speța) a doua, 177
uniformă, 186
- Contraction, 187
- Criterii de convergență a seriilor
Abel, 109
al radicalului
cu inegalități, 98
cu limită, 99
cu limite extreme, 99
al raportului
- cu inegalități, 101
cu limită, 102
cu limite extreme, 102
- Cauchy, 85
de comparație
cu inegalități, 92
cu limită, 94
cu limite extreme, 94
cu rapoarte, 97
- de condensare, 90
- Dirichlet, 108
- Leibniz, 110
- Raabe-Duhamel
cu inegalități, 104
cu limită, 106
cu limite extreme, 105
- Criterii de convergență uniformă a seriilor de funcții
Abel, 280
Dirichlet, 280
fundamental, 279
Leibniz, 281
Weierstrass, 279
- Criterii de existență a limitei unei funcții
Cauchy-Bolzano, 147
cleștelui, 149
majorării, 146

- Criterii de existență a limitei unui sir
cleștelui, 45
majorării, 42
- Derivate
într-un punct, 195
ale functiilor elementare, 200
de ordin superior, 211
laterale, 196
pe o multime, 198
- Difeomorfism
de clasă C^k , 212
- Diferențiala unei funcții
într-un punct, 208
de ordin superior, 214
- Formula
Cauchy-Hadamard, 289
Leibniz, 213
- Formula lui Taylor
formula lui MacLaurin, 239
polinomul lui Taylor, 234
restul lui Cauchy, 238
restul lui Lagrange, 238
restul lui Peano, 237
restul lui Schlömilch-Roche, 238
- Funcție
analitică, 301
bijectivă, 19
concavă, 252
convexă, 251
impară, 20
injectivă, 19
Lipschitz, 186
mărginită, 22
- monotonă, 22
pară, 20
periodică, 21
Rolle, 219
surjectivă, 19
- Inegalitatea
Bernoulli, 16
Cauchy-Buniakowski-Schwarz, 16
mediilor, 16
- Lema
Bolzano, 182
- Limita unei funcții
într-un punct, 139
caracterizări analitice
cu $\varepsilon - \delta$, 141
cu siruri (Heine), 142
laterală, 143
limite fundamentale, 161
limitele functiilor elementare, 153
- Majorant, 6
- Margine a unei multimi
caracterizări analitice, 8
inferioară, 6
superioară, 6
- Minorant, 6
- Multime
închisă, 130
a punctelor interioare, 126
aderentă, 125
compactă, 131
de puterea continuului, 136
densă, 132
derivată, 123

- deschisă, 128
- frontieră, 128
- mărginită, 8
- majorată, 6
- minorată, 5
- numărabilă, 134

- Produs după Cauchy a două serii, 113
- Progresie
 - aritmetică, 31
 - geometrică, 31
- Proprietatea
 - Arhimede, 9
 - Darboux, 184
 - de separație Hausdorff, 15
- Punct
 - aderent, 125
 - critic, 219
 - de întoarcere, 197
 - de acumulare, 122
 - de extrem global, 216
 - de frontieră, 127
 - de inflexiune, 256
 - de maxim local, 215
 - de minim local, 215
 - exterior, 127
 - interior, 126
 - izolat, 123
 - unghiular, 197

- Regula lui L'Hôpital
 - cazul $\frac{0}{0}$, 227
 - cazul $\frac{\infty}{\infty}$, 229

- Seria Taylor
 - funcție dezvoltabilă în serie Taylor, 299
 - seria MacLaurin, 299
 - seria Taylor, 299

- Serie
 - șirul sumelor parțiale, 78
 - absolut convergentă, 111
 - alternantă, 89
 - armonică, 86
 - armonică generalizată, 92
 - condiționat convergentă (semiconvergentă), 111
 - convergentă, 78
 - divergentă, 78
 - rest de ordin p , 84
 - telescopică, 81

- Serie de funcții
 - funcție sumă, 277
 - multime de convergență, 276
 - punct de convergență, 276

- Serie de puteri
 - centrată în x_0 , 283
 - interval de convergență, 287
 - rază de convergență, 286
 - seria binomială, 294

- Șir
 - convergent, 38
 - caracterizare analitică, 38
 - definit recurrent, 30
 - fundamental (Cauchy), 60
 - limita unui, 36
 - limită inferioară, 57
 - limită superioară, 57
 - puncte limită, 56

- mărginit, 34
- monoton
 - crescător, 35
 - descrescător, 35
- Rolle, 220
- subşir al unui, 33
- Şir de funcţii
 - convergenţă punctuală, 266
 - convergenţă uniformă, 267
 - funcţie limită, 266
 - mărinire uniformă, 265
 - mulţime de convergenţă, 266
 - punct de convergenţă, 266
- Teorema
 - a doua a lui Abel, 291
 - Abel, 285
 - Cauchy, 226
 - de punct fix a lui Banach, 187
 - Dini, 271
 - Fermat, 218
 - Lagrange (a creşterilor finite), 222
 - Rolle, 219
 - Stolz-Césaro, 64
 - Weierstrass, 187
- Vecinătate, 14