LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 2

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- Conceptul de ***mulţime*** are semnificaţia uzuală de colecţie, grămadă etc.
- Vom nota mulţimile prin literele *A, B, C, ...X, Y, Z* etc. Obiectele din care este formată o mulţime se vor numi ***elemente***. Elementele unei mulţimi vor fi notate *a, b, c,.. x, y, z* etc.
- Faptul că elementul x face parte din mulţimea A va fi notat $x \in A$ şi se va citi: “x aparţine mulţimii A”.
- Vom extinde conceptul de mulţime prin considerarea ***mulţimii vide*** $\emptyset$, care este “mulţimea fără nici un element”.

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- Mulţimea A este ***inclusă*** în mulţimea B, dacă orice element al lui A este şi element al lui B. Scriem aceasta prescurtat $A \subset B$. Definiţia *incluziunii* $A \subset B$ poate fi dată şi astfel:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

- ***Reuniunea*** a două mulţimi A şi B este mulţimea $A \cup B$ definită de

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow [x \in A] \vee [x \in B]$$

Un alt mod de a scrie această definiţie este:

$$A \cup B = \{x \,/\, (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

În cele ce urmează vom omite parantezele, scriind astfel:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}.$$

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- ***Intersecţia*** a două mulţimi A şi B este mulţimea $A \cap B$ definită de:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow [x \in A] \wedge [x \in B]$$

Această definiţie poate fi dată sub forma:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}.$$

- ***Diferenţa*** a două mulţimi A şi B este definită astfel:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}.$$

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- Dacă $A \subset B$ se spune că A este o ***parte*** (sau o ***submulţime***) a lui B. Prin convenţie, este submulţime a oricărei mulţimi. Pentru orice mulţime A, vom nota cu mulţimea tuturor părţilor lui A.

$$\mathcal{P}(A) = \{B \,/\, B \subseteq A\}$$

- Fiind dată o mulţime A şi o parte a sa B, definim "***complementara $C_A(B)$ a lui B în raport cu A***" prin

$$C_A(B) = A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}.$$

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

<u>Propoziţia 1.2.2</u>: Pentru orice mulţimi *A*, *B*, *C* sunt verificate următoarele relaţii:

(1) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(3) $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(4) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

(5) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$;

(6) $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

(7) $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$;

(8) $A \subseteq A$;

(9) $[A \subset B] \wedge [B \subset C] \Rightarrow A \subset C$;

(10) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$; $A - B \subset A$;

(11) $[A \subset B] \wedge [C \subset D] \Rightarrow [(A \cup C) \subset (B \cup D)] \wedge [(A \cap C) \subset (B \cap D)]$;

(12) $[A \subset B] \Leftrightarrow [A \cup B = B] \Leftrightarrow [A \cap B = A]$;

(13) $A \cap B = A - (A - B)$;

(14) $A \cup (B - A) = A \cup B$;

(15) $A - (A \cap B) = A - B$;

(16) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$;

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- **<u>Propoziţia 1.2.3</u>:** Dacă *B*, *C* sunt mulţimi ale lui *A*, atunci avem relaţiile:

(17) $B \subset C \Rightarrow \complement_A(C) \subset \complement_A(B)$;

(18) $\complement_A(B \cup C) = \complement_A(B) \cap \complement_A(C)$;

(19) $\complement_A(B \cap C) = \complement_A(B) \cup \complement_A(C)$;

(20) $\complement_A(A) = \varnothing$; $\complement_A(\varnothing) = A$;

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- Dacă sunt date mulţimile $A_1, A_2,\ldots, A_n$ atunci definim ***intersecţia*** şi ***reuniunea*** lor astfel:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid (x \in A_1) \wedge (x \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid (x \in A_1) \vee (x \in A_2) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}$$

se mai folosesc şi notaţiile:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n; \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

Menţionăm următoarele proprietăţi:

(21) $[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} [A_i \cup B];$

(22) $[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} [A_i \cap B];$

(23) $C_A [\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \bigcap_{i=1}^{n} C_A(A_i);$

(24) $C_A [\bigcap_{i=1}^{n} A_i] = \bigcup_{i=1}^{n} C_A(A_i);$

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- Fie A, B două mulţimi oarecare. ***Produsul cartezian*** al mulţimilor A şi B este mulţimea

  $A \times B$ definită astfel :

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$

In general, produsul cartezian a n mulţimi A_1, A_2,..., A_n este:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in A_n)\}.$$

Se folosesc notaţiile: $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \ldots \times A_n$

sau dacă $A_1 = A_2 = = A_n = A$ atunci $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

MULŢIMI. OPERAŢII CU MULŢIMI

- Produsul cartezian are următoarele proprietăţi:

(25) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$;

(26) $(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$;

(27) $(A_1 - A_2) \times B = (A_1 \times B) - (A_2 \times B)$;

(28) Dacă A_1, A_2, B_1, B_2 sunt nevide, atunci

$[A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2] \Rightarrow [A_1 = A_2] \wedge [B_1 = B_2]$;

(29) $A \times B = \varnothing$, dacă $A = \varnothing$ sau $B = \varnothing$.

CALCULUL PREDICATELOR

- Considerând propoziţia

  "Socrate este muritor"

  observăm în alcătuirea lui un individ, ***"Socrate"*** şi o proprietate ***"muritor"*.**

- Propoziţiile

  "Platon este muritor" şi ***"Aristotel este muritor"***

  au aceeaşi formă şi diferă doar individul despre care se afirmă că este muritor.

Toate aceste propoziţii au forma ***"x este muritor"*.** În general, vom considera expresii de forma ***"x are proprietatea P"***, pe care le vom nota ***P*(*x*).**

CALCULUL PREDICATELOR

- Aceste expresii le vom numi ***predicate*** (Hilbert şi Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol.1, 1934) sau ***funcţii propoziţionale*** (Russel şi Whitehead, Principia Mathematica, vol.1, 1910). În Principia Mathematica, acest concept este definit astfel: **”printr-o funcţie propoziţională înţelegem ceva care conţine o variabilă *x* şi exprimă o propoziţie de îndată ce lui *x* i se atribuie o valoare”**.
- Cu alte cuvinte, un predicat $P(x)$ devine o propoziţie $P(a)$ dacă i se atribuie lui x o valoare determinată a. Propoziţia $P(a)$ poate fi adevărată sau falsă.

CALCULUL PREDICATELOR

- Fie $P(x)$ un predicat oarecare. Din predicatul $P(x)$ putem forma următoarele propoziţii:

-$(\exists x)P(x)$: există x care are proprietatea P.

- $(\forall x)P(x)$: pentru orice x are loc proprietatea P.

- $\forall$ se numeşte ***cuantificator universal***, iar $\exists$ se numeşte ***cuantificator existenţial***.

CALCULUL PREDICATELOR

- Vom spune că propoziţia $(\exists x)P(x)$ este <u>adevărată în mulţimea</u> A, dacă există $a \in A$, astfel încât $P(a)$ este o propoziţie adevărată.
- Propoziţia $(\forall x)P(x)$ este <u>adevărată în mulţimea</u> A, dacă pentru orice $a \in A$, propoziţia $P(a)$ este adevărată

CALCULUL PREDICATELOR

- În mod analog, pot fi considerate predicate $P(x_1,\ldots,x_n)$ care depind de n variabile. Aceste predicate se numesc ***predicate n-are***; $x_1,\ldots,x_n$ se vor numi ***variabile***.
- Dacă $P(x, y)$ este un predicat binar, atunci $(\forall x)P(x, y)$ şi $(\exists x)P(x, y)$ sunt predicate unare în variabila y. Vom spune că în aceste predicate variabila x este ***legată***, iar variabila y este ***liberă***.

CALCULUL PREDICATELOR

- Pentru orice predicate $P(x)$, $Q(x)$ şi pentru orice mulţime A, în A sunt adevărate următoarele enunţuri:

(a) $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$

(b) $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$

(c) $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$

(d) $[\ (\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)Q(x)]$

(e) $[(\exists x)P(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)] \Rightarrow [\ (\exists x)(P(x) \Rightarrow Q(x))]$

(f) $(\forall x)[(P(x) \wedge Q(x))] \Leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall y)Q(y)]$

(g) $(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$

Dacă $P(x, y)$ este un predicat binar, atunci în A sunt adevărate enunţurile:

(h) $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$

(i) $(\exists x)(\exists y)P(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

(j) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

RELAŢII ŞI FUNCŢII

- Fie A o mulţime. O relaţie n-ară este o submulţime R a lui A^n.

Fie A, B două mulţimi oarecare. O ***funcţie definită pe A cu valori în B*** este o relaţie unară pe $A \times B$ (adică $\Gamma \subset A \times B$) cu proprietatea că pentru orice $x \in A$ există un element $y \in B$ şi numai unul, astfel încât $(x, y) \in \Gamma$.

Vom nota o funcţie $\Gamma \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ prin $f : A \to B$, simbolul f având semnificaţia următoare: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ astfel încât $(x, f(x)) \in$ AxB.

A se numeşte ***domeniul de definiţie*** al funcţiei

$f : A \to B$ şi B se numeste ***domeniul valorilor*** lui f.

RELAŢII ŞI FUNCŢII

- Date funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$, prin ***compunerea*** lor se înţelege funcţia $g \circ f : A \to C$, definită de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in A$.

  Compunerea funcţiilor este <u>asociativă</u>: pentru funcţiile $f : \mathrm{A} \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, avem relaţia $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Pentru orice mulţime A, funcţia ***identică***

$1_A : A \to A$ este definită de $1_A(x) = x$, pentru orice $x \in A$.

RELAŢII ŞI FUNCŢII

- Funcţia $f : A \to B$ este ***injectivă*** dacă pentru orice x, $y \in A$, avem:

  $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

  Evident această relaţie este echivalentă cu

  $$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- Funcţia $f : A \to B$ este ***surjectivă*** dacă pentru orice $y \in B$, există $x \in A$, astfel încât

  $$f(x) = y.$$

- O funcţie injectivă şi surjectivă se numeşte ***bijectivă***. Pentru aceste trei categorii de funcţii se folosesc şi denumirile: ***injecţie, surjecţie şi bijecţie***.
- O funcţie $f : A \to B$ este ***inversabilă***, dacă există o funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

RELAŢII ŞI FUNCŢII

- Fie acum R o relaţie binară pe mulţimea A ($R \subset A^2$). R se numeşte ***relaţie de echivalenţă pe A*** dacă pentru orice $x, y, z \in A$ sunt satisfăcute proprietăţile:

$(x, x) \in R$ (reflexivitate)

$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (simetrie)

$(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (tranzitivitate)

Vom folosi următoarea notaţie: $x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in R$. Proprietăţile de mai sus se transcriu astfel:

$x \sim x$

$x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

RELAŢII ŞI FUNCŢII

- Pentru orice $x \in A$ vom nota $x = \{ y \in A / x \sim y \}$

  x se numeşte ***clasa de echivalenţă a lui x***.

  Sunt imediate proprietăţile:

  $$x \sim y \Leftrightarrow x = y$$

  $$x \sim y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$$

RELAŢII DE ORDINE

- O relaţie binară R pe o mulţime nevidă A se numeşte ***relaţie de preordine*** dacă pentru orice x, y, z $\in$ A avem:

  (*P*1) $x \, R \, x$ (reflexivitate)

  (*P*2) $x \, R y, \; y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$ (tranzitivitate)

  Mulţimea A înzestrată cu o relaţie de preordine R se numeşte ***mulţime preordonată.***

- Relaţia de preordine R se numeşte ***relaţie de ordine*** dacă verifică relaţia

  (*P*3) $x \, R \, y; \; y \, R \, x \Rightarrow x = y$ (antisimetrie)

  pentru orice $x, y \in A$.

RELAŢII DE ORDINE

- O relaţie de ordine se notează în mod uzual cu $\leq$, deci cele trei relaţii ce o definesc se descriu astfel:

  $$x \leq x$$

  $$x \leq y,\, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

  $$x \leq y,\, y \leq x \Rightarrow x = y$$

  O ***mulţime ordonată*** este o mulţime A înzestrată cu o relaţie de ordine $\leq$.

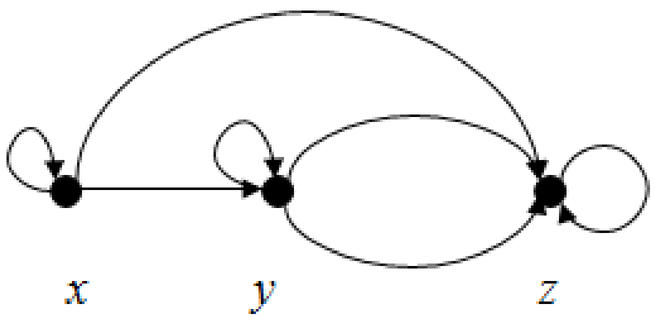
Vom nota

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ şi } x \neq y.$$

RELAŢII DE ORDINE

<u>Exemplu de relatie de preordine care nu este o relaţie de ordine.</u>

Considerăm o mulţime A={x, y, z} în care relaţia R este definită prin graful următor:



şi anume: $x\ R\ x$, $y\ R\ y$, $z\ R\ z$

$x\ R\ y$, $y\ R\ z$, $z\ R\ y$, $x\ R\ z$.

Se observă că R este reflexivă şi tranzitivă, dar nu este antisimetrică:

$y\ R\ z$, $z\ R\ y$ dar nu şi $y = z$.

RELAŢII DE ORDINE

- O mulţime parţial ordonată (A, $\leq$) se numeşte ***mulţime total ordonată*** dacă

  ($P4$) pentru orice x, $y \in A$, avem $x\ R\ y$ sau $y\ R\ x$.

  <u>Exemplu de mulţime parţial ordonată care nu este total ordonată.</u>

În mulţimea N a numerelor naturale considerăm relaţia:

$$x\ R\ y \Leftrightarrow x \text{ divide pe } y$$

Este evident că R este o relaţie de ordine care nu este totală.

Mulţimea R a numerelor reale înzestrată cu relaţia de ordine naturală este o mulţime total ordonată.

RELAŢII DE ORDINE

- Fie $(x_i)_{i\in I}$ o familie oarecare a unei mulţimi parţial ordonate $(A, \leq)$.

  Un element $y\in A$ este un ***majorant*** al familiei $(x_i)_{i\in I}$ dacă $x_i \leq y$ pentru orice $i\in I$.

  $y\in A$ este ***supremumul*** familiei $(x_i)_{i\in I}$ dacă pentru orice majorant z al familiei $(x_i)_{i\in I}$ avem $y \leq z$. Supremumul familiei $(x_i)_{i\in I}$ va fi notat: $\bigvee_{i\in I} x_i$.

  Deci elementul $\bigvee_{i\in I} x_i$ al lui A este caracterizat de următoarele două relaţii:

  (i) $x_i \leq \bigvee_{i\in I} x_i$, pentru orice $i\in I$.

  (ii) Dacă $x_i \leq y$ pentru orice $i\in I$, atunci $\bigvee_{i\in I} x_i \leq y$.

RELAŢII DE ORDINE

- Un element $y \in A$ este un ***minorant*** al familiei $(x_i)_{i\in I}$ dacă $y \le x_i$ pentru orice $i \in I$.

  $y \in A$ este ***infimimul*** familiei $(x_i)_{i\in I}$ dacă pentru orice minorant z al familiei $(x_i)_{i\in I}$ avem $z \le y$. Infimimul familiei $(x_i)_{i\in I}$ va fi notat: $\bigwedge_{i\in I} x_i$ şi este caracterizat de

  (a) $\bigwedge_{i\in I} x_i \le x_i$, pentru orice $i \in I$.

  (b) Dacă $y \le x_i$ pentru orice $i \in I$, atunci $y \le \bigwedge_{i\in I} x_i$.

RELAŢII DE ORDINE

Supremumul (respectiv infimimul) familiei $\{x_1,\ldots,,x_n\}$ se va nota $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ (respectiv $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$).

Pentru mulţimea $\{x, y\}$ notăm:

$x \vee y$ supremumul mulţimii $\{x, y\}$.

$x \wedge y$ infimumul mulţimii $\{x, y\}$.

LECŢIA 2

ALGEBRE BOOLE

TEORIA ALGEBRELOR BOOLE

- Teoria algebrelor Boole s-a născut ca urmare a descoperirii că între legile logicii şi anumite legi ale calculului algebric există o perfectă analogie. Această descoperire este unanim atribuită lui ***George Boole*** (*An investigation into the laws of thought,* 1854)
- Dintre matematicienii care au adus contribuţii mari la dezvoltarea teoriei algebrelor Boole trebuie menţionat în primul rând ***M.H. Stone*** pentru celebra sa teoremă de reprezentare (*The theory of representation for Boolean algebras*, Trans. A.M.S., 40 , 1936, p. 37-111) şi pentru teoria dualităţii a algebrelor Boole. (*Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. A.M.S., 41, 1937, p. 375-481). De asemenea ***A. Tarski*** a obtinut rezultate remarcabile atât pe linia algebrică a acestui domeniu, cât mai ales pe linia legăturilor sale cu logica.

LATICI

- O mulţime preordonată (A, $\leq$) se numeşte ***latice*** dacă pentru orice x, $y \in A$ există $x \vee y$ şi $x \wedge y$.

- (A, $\leq$) se numeşte ***latice completă*** dacă pentru orice familie $(x_i)_{i \in I}$ de elemente ale lui A, există $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ şi $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$.

LATICI

- **<u>Propoziţia 2.1.1:</u>** Într-o latice oarecare L sunt verificate următoarele proprietăţi:

  (L_1) $a \wedge a = a, \quad a \vee a = a$ (idempotenţa)

  (L_2) $a \wedge b = b \wedge a, \; a \vee b = b \vee a$ (comutativitatea)

  (L_3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (asociativitatea)

  $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

  (L_4) $a \wedge (a \vee b) = a, \; a \vee (a \wedge b) = a$ (absorbţie)

LATICI

Demonstraţie:

Spre exemplu, să arătăm că $a \wedge (a \vee b) = a$.

Conform definiţiei infimumului, va trebui să demonstrăm că:

$$a \leq a,\ a \leq a \vee b$$

$$z \leq a,\ z \leq a \vee b \Rightarrow z \leq a \wedge (a \vee b)$$

Se observă însă că aceste relaţii sunt evidente.

LATICI

- **Propoziţia 2.1.2:** Fie L o mulţime nevidă oarecare înzestrată cu două operaţii binare $\vee$, $\wedge$ astfel încât orice elemente $a,b,c \in L$ verifică egalităţile (L_1)-(L_4). Atunci pe mulţimea L se poate defini o relaţie de ordine parţială $\leq$ prin

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a,$$

astfel încât $a \wedge b$ (respectiv $a \vee b$) este infimumul (respectiv supremumul) mulţimii $\{a, b\}$ în sensul ordinii astfel definite.

LATICI

Demonstratie: Verificăm întâi că $\le$ este o relaţie de ordine parţială:

$a \le a$ rezultă din $a \wedge a = a$

$a \le b,\ b \le a \quad \Rightarrow a = a \wedge b,\ b = b \wedge a \Rightarrow a = b$

$a \le b,\ b \le c \quad \Rightarrow a = a \wedge b,\ b = b \wedge c$

$\Rightarrow a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$

$\Rightarrow a \le c$

Pentru a arăta că $a \wedge b$ este infimumul mulţimii $\{a, b\}$ va trebui să stabilim relaţiile:

$a \wedge b \le a,\ a \wedge b \le b$

$x \le a,\ x \le b \Rightarrow x \le a \wedge b.$

Primele două relaţii rezultă din

$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$

$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b.$

Cealaltă relaţie rezultă conform implicaţiei

$x \wedge a = x,\ x \wedge b = x \Rightarrow x \wedge (a \wedge b) = (x \wedge a) \wedge b = x \wedge b = x$

Vom arăta arăta acum că $a \vee b$ este supremumul mulţimii $\{a, b\}$.

$a \le a \vee b$ rezultă din(L_4): $a \wedge (a \vee b) = a$ şi analog se deduce că şi $b \le a \vee b$.

Restul rezultă conform implicaţiilor:

$a \le x,\ b \le x \quad \Rightarrow a \wedge x = a,\ b \wedge x = b$

$\Rightarrow a \vee x = (a \wedge x) \vee x = x, \qquad b \vee x = (b \wedge x) \vee x = x$

$\Rightarrow (a \vee b) \wedge x = (a \vee b) \wedge (a \vee x) = (a \vee b) \wedge [a \vee (b \vee x)] =$

$\Rightarrow (a \vee b) \wedge [(a \vee b) \vee x] = a \vee b \Rightarrow a \vee b \le x.$

Cu aceasta, demonstraţia este terminată.

LATICI

Operaţiile unei latici finite pot fi descrise prin tabele.

Spre exemplu, în mulţimea $L = \{0, a, b, 1\}$ putem defini două operaţii de latice în felul următor:

$\wedge$	**0**	***a***	***b***	**1**
0	0	0	0	0
a	0	*a*	0	*a*
b	0	0	*b*	*b*
1	0	*a*	*b*	1

$\vee$	**0**	***a***	***b***	**1**
0	0	*a*	*b*	1
a	*a*	*a*	1	1
b	*b*	1	*b*	1
1	1	1	1	1

LATICI

- Fie L_1, L_2 două latici. O funcţie $f : L_1 \to L_2$ se numeşte ***morfism de latici*** dacă pentru orice x, y L_1, avem

  $$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

  $$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

  Un morfism bijectiv de latici $f : L_1 \to L_2$ se numeste ***izomorfism de latici***. Se mai spune în acest caz că laticile L_1, L_2 sunt izomorfe.

  Un element 0 al unei latici L se numeşte ***element prim*** dacă $0 \leq x$, pentru orice $x \in L$. Dual, un ***element ultim*** al lui L este definit de: $x \leq 1$, pentru orice $x \in L$.

LATICI

<u>Propoziţia 2.1.3:</u> Într-o latice L sunt echivalente următoarele relaţii:

(i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$ pentru orice $x, y, z \in L$.

(ii) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$ pentru orice $x, y, z \in L$.

(iii) $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$ pentru orice $x, y, z \in L$.

LATICI

Demonstratie:

(i) $\Rightarrow$ (ii). Vom arăta că orice elemente $a, b, c \in L$ verifică (ii).

În (i) vom pune $x = a \vee b$, $y = a$, $z = c$:

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c]$

$= a \vee [(a \vee b) \wedge c]$ (conform L_4)

$= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)]$ (conform (i))

$= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c)$

$= a \vee (b \wedge c)$ (conform L_4)

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Din $z \leq x \vee z$ rezultă:

$(x \vee y) \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Fie $a, b, c \in L$ oarecare. În **(iii)** facem $x = a$, $y = b$, $z = a \vee c$:

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee [b \wedge (a \vee c)] = a \vee [(a \vee c) \wedge b]$

Punând în **(iii)** $x = a$, $y = c$, $z = c$ rezultă:

$(a \vee c) \wedge b \leq a \vee (c \wedge b)$

deci

$a \vee [(a \vee c) \wedge b] \leq a \vee [a \vee (c \wedge b)] = (a \vee a) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$

Din inegalităţile stabilite mai sus se obţine

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$

Va fi suficient să stabilim inegalitatea inversă, care este valabilă în orice latice:

$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Din $a \leq a \vee b$, $a \leq a \vee c$ rezultă:

$a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

De asemenea, din $b \leq a \vee b$, $c \leq a \vee c$, rezultă:

$b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Din aceste două inegalităţi se obţine, conform definiţiei supremumului, exact inegalitatea căutată. Demonstraţia este terminată.

LATICI

- O latice L care satisface una din condiţiile echivalente **(i)** – **(iii)** se numeşte ***latice distributivă.***
- Fie L o latice cu element prim 0 şi cu element ultim 1. Un element $a \in L$ este un ***complement*** al lui $b \in L$ dacă:

$$a \wedge b = 0 \quad \text{şi} \quad a \vee b = 1.$$

LATICI

Propoziţia 2.1.4. Într-o latice distributivă L orice element poate avea cel mult un complement.

Demonstraţie. Presupunem că b, c sunt două elemente ale lui L care sunt complemente ale lui a atunci ele verifică egalităţile:

$$a \wedge b = 0 \quad a \vee b = 1$$

$$a \wedge c = 0 \quad a \vee c = 1$$

Atunci avem

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c\,.$$

Analog se arată că $c = (b \wedge c)$, deci $b = c$.

LATICI

Într-o latice distributivă L(cu element prim 0 şi cu element ultim 1) vom nota cu $\neg a$ complementul unui element a L.

<u>Propoziţia 2.1.5</u>. Presupunem că în laticea distributivă L, pentru elementele a şi b există $\neg a$ şi $\neg b$. Atunci există şi $\neg(a \wedge b)$, $\neg(a \vee b)$ şi care sunt daţi de:

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b; \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b .$$

<u>Demonstraţie</u>**:** Conform Propoziţiei 2.1.4, pentru verficarea primei relaţii este suficient să arătăm că:

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = 0$$

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1.$$

Aceste relaţii se obţin astfel:

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = (a \wedge b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge \neg b) = 0 \vee 0 = 0$$

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = (a \vee \neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg a \vee \neg b) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Egalitatea a doua a propoziţiei se obţine în mod dual.

LATICI

Pentru cunoaşterea în adâncime a problemelor fundamentale ale teoriei laticilor, indicăm următoarele cărţi de referinţă:

- **G.Birkhoff, *Lattice theory***, American Math. Soc., 1967, (ediţia a 3-a) şi
- **Grätzer, *Lattice theory* (*First concepts and distributive lattice*),** San Francisco, 1971.

MULŢUMESC!