LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

CURS 3

ALGEBRE BOOLE

- O ***algebră Boole*** este o latice distributivă B cu element prim 0 şi cu element ultim 1, astfel încât orice element $x \in B$ are un complement $\neg x$.
- <u>**Exemplul1 :**</u>Mulţimea L_2 ={0, 1} este o agebră Boole pentru ordinea naturală:

  $0 \le 0,\ 0 \le 1,\ 1 \le 1.$

Operaţiile lui L_2 sunt date de:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

; $\neg 0 = 1$ şi $\neg 1 = 0$.

ALGEBRE BOOLE

- **Exemplul 2:** Mulţimea $\mathscr{P}(X)$ a părţilor unei mulţimi nevide X este o algebră Boole în care relaţia de ordine $\leq$ este incluziunea $\subseteq$. Operaţiile lui $\mathscr{P}(X)$ vor fi:

$$A \vee B = A \cup B$$

$$A \wedge B = A \cap B$$

$$\neg A = C_X(A).$$

pentru orice $A, B \in \mathscr{P}(X)$, $\varnothing$ este element prim şi X este elementul ultim al lui $\mathscr{P}(X)$.

ALGEBRE BOOLE

- Dacă B, B' sunt două algebre Boole, atunci un ***morfism de algebre Boole*** este o funcţie

  $f : B \to B'$ care satisface proprietăţile următoare, pentru orice $x, y \in B$:

  $$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

  $$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

  $$f(\neg x) = \neg f(x)$$

Obs: Orice morfism de algebre Boole $f : B \to B'$ verifică condiţiile:

$$f(0) = 0 \; ; \; f(1) = 1.$$

ALGEBRE BOOLE

- Se numeşte ***inel Boole*** orice inel unitar

  $(A, +, *, 0, 1)$ cu proprietatea că:

  $$x^2 = x \text{, pentru orice } x \in A.$$

- **Lema 2.2.1.** Pentru orice două elemente x, y ale unui inel Boole A, avem relaţiile:

  $x + x = 0$

  $xy = yx$ (comutativitate)

ALGEBRE BOOLE

- **Demonstraţie:** Din

  $x + y = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + y\,\mathrm{x} + y^2 = x + xy + yx + y$

  rezultă

  $xy + yx = 0.$

  Făcând $y = x$, se obţine $x^2 + x^2 = 0$, deci $x + x = 0$.

  Pentru orice $z \in A$, vom avea deci $z + z = 0$, adică $z = -z$. Luând $z = xy$, rezultă $xy + xy = 0$ deci $xy = -xy$. Din relaţia stabilită mai sus avem însă că $yx = -xy$ şi deci

$$xy = -xy = yx.$$

ALGEBRE BOOLE

- Dacă A, A' sunt două inele Boole, atunci un ***izomorfism de inele Boole*** $g : A \to A'$ este o funcţie $g : A \to A'$ cu proprietaţile următoare:

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

$$g(x\, y) = g(x)g(y)$$

$$g(1) = 1$$

pentru orice $x, y \in A$. Cu alte cuvinte, este un morfism de inele unitare.

ALGEBRE BOOLE

- **Propoziţia 2.2.1**:Dacă *A* este un inel Boole, atunci *A* poate fi organizat ca o algebră Boole *F*(*A*):

$$\begin{cases} x \vee y = x + y + xy \\ x \wedge y = xy \\ \neg x = x + 1 \\ 0 \text{ este element prim al lui } F(A) \\ 1 \text{ este elementul ultim al lui } F(A) \\ x \leq y \Leftrightarrow xy = x \end{cases}$$

ALGEBRE BOOLE

Demonstraţie: Operaţiile astfel definite verifică axiomele (L_1)-(L_4) din §2.1. Spre exemplu, să arătăm că $x \vee (x \wedge y) = x$, pentru orice $x \in A$.

$x \vee (x \wedge y) = x + xy + xxy = x + xy + x^2y = x + (xy + xy) = x + 0 = 0$, comform Lemei 2.2.1. Deci $F(A)$ este o latice. Printr-un calcul simplu se poate arăta că $F(A)$ este distributivă şi că:

$0 \leq x, x \leq 1$, pentru orice $x \in A$.

Să arătăm că $x + 1$ verifică proprietăţile complementului:

$x \vee (x + 1) = x + x + 1 + x(x + 1) = 2x + 1 + x + x = 0 + 1 + (x + x) = 1 + 0 = 1$

$x \wedge (x + 1) = x(x + 1) = x^2 + x = x + x = x.$

ALGEBRE BOOLE

- **Propoziţia 2.2.2**: Dacă B este o algebră Boole, atunci B poate fi organizată ca un inel Boole $G(B)$ punând:

$$x + y = (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$$

$$xy = x \wedge y$$

pentru orice $x, y \in B$. 0 şi 1 vor avea semnificaţia naturală.

ALGEBRE BOOLE

- **<u>Propoziţia 2.2.3</u>: (i)** Dacă $f : A \to A'$ este un morfism de inele Boole, atunci f este şi un morfism de algebre Boole $f : F(A) \to F(A')$.

(ii) Dacă $g : B \to B'$ este un morfism de inele Boole, atunci g este şi un morfism de algebre Boole $g : G(B) \to G(B')$.

- **<u>Propoziţia 2.2.4</u>:** Dacă A este un inel Boole şi B este algebră Boole, atunci:

(i) A şi $G(F(A))$ coincid ca inele Boole.

(ii) B şi $F(G(B))$ coincid ca algebre Boole

ALGEBRE BOOLE

Într-o algebră Boole B se defineşte operaţia de ***implicaţie booleană:***

$$x \to y = \neg x \vee y, \qquad x, y \in B$$

şi operaţia de ***echivalenţă booleana:***

$$x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x), \qquad x, y \in B.$$

Se poate arăta că $x \to y = 1$ dacă şi numai dacă $x \leq y$.

Aceste două operaţii au proprietăţile următoare:

$$x \to (y \to x) = 1$$

$$(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1$$

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z) = 1$$

$$(x \leftrightarrow y) \to (x \to y) = 1$$

$$(x \leftrightarrow y) \to (y \to x) = 1$$

$$(x \to y) \to ((y \to x) \to (x \leftrightarrow y)) = 1$$

$$(\neg y \to \neg x) \to (x \to y) = 1$$

$$(x \vee y) \leftrightarrow (\neg x \to y) = 1$$

$$(x \wedge y) \to (\neg x \vee \neg y) = 1$$

$$(x \leftrightarrow y) = 1 \Leftrightarrow x = y.$$

Să stabilim, de exemplu proprietatea a doua:

$$(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = \neg (x \to (x \to y)) \vee (x \to y)$$

$$= \neg(\neg x \vee \neg x \vee y) \vee (\neg x \vee y)$$

$$= \neg(\neg x \vee y) \vee (\neg x \vee y) = 1$$

ALGEBRE BOOLE

- O submulţime nevidă B' a unei algebre Boole B se numeşte ***subalgebră Boole*** a lui B dacă:

$$x, y \in B' \Rightarrow x \wedge y \in B' \text{ şi } x \vee y \in B'$$

$$x \in B' \Rightarrow \neg x \in B'.$$

Observaţie: Dacă B' este subalgebră Boole a lui B, atunci $0 \in B'$ şi $1 \in B'$:

Într-adevăr, cum $B' \neq \emptyset$, există $x \in B'$, deci:

$$0 = x \wedge \neg x \in B'; \; 1 = x \vee \neg x \in B'.$$

LOGICI CU MAI MULTE VALORI

- Logicile cu mai multe valori (polivalente) au fost introduse şi studiate de logicianul polonez **J. Lucasiewicz** în urma unor cercetări legate de studiul modalităţilor. Legate de aceste logici **Gr. C. Moisil** a studiat începând din 1940 o clasă de structuri algebrice (numite algebre Lucasiewicz în onoarea logicianului polonez) care sunt reflectarea pe plan algebric a logicilor lui Lucasiewicz.

LOGICI CU MAI MULTE VALORI

- Logica trivalentă a apărut ca urmare a studierii propoziţiilor de forma ***"este posibil ca.."*** sau ***"este necesar ca.."***. Pentru fixarea ideilor, să considerăm o propoziţie oarecare ***p***. Vom nota cu ***Mp*** propoziţia *"p este posibil"*(simbolul *M* derivă de la "möglich" = *posibil*).

Putem forma următoarele combinaţii de propoziţii:

1. ***" p este fals "*** $\neg p$
2. ***" p este posibil "*** Mp
3. ***" p nu este posibil "*** $\neg Mp$
4. ***" este posibil non - p "*** $M\neg p$
5. ***" nu este posibil non -p "*** $\neg M\neg p$

Propoziţia (5) este echivalentă cu ***" nu este posibil ca p să fie falsă "***, care este totuna cu ***" p este necesar adevărată "*** sau pe scurt ***" p este necesar"***. Vom nota această propoziţie cu ***Np***. Propoziţia (3) se va mai **citi** ***" p este imposibil "***.

LOGICI CU MAI MULTE VALORI

- Lucasiewicz consideră că următoarele propoziţii trebuiesc acceptate ca evidente:

I. $\neg Mp \rightarrow \neg p$

II. $\neg p \rightarrow \neg Mp$

III. $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

IV. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$

V. $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$

VI. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Prima propoziţie este " *dacă* p *este imposibil, atunci* p *este fals*", iar a doua este " *dacă* p *este fals, atunci* p *nu este posibil* ". Celelalte patru propoziţii nu fac să intervină conectorul M şi nu comportă nici o discuţie.

LOGICI CU MAI MULTE VALORI

- La aceste propoziţii, Lucasiewicz adaugă propoziţiile de forma:

" Pentru o anumită propoziţie p, este posibil p şi este posibil non - p".

Lucasiewicz dă următorul exemplu: *" Se poate ca acest bolnav să moară, dar se poate să şi nu moară "*.

Pentru formularea simbolică a acestei propoziţii este necesară introducerea unui ***cuantificator particular*** Σ: ***" Σp = pentru un anumit p"*.**

Propoziţia de mai sus ia următoarea formă simbolică:

VII. $\Sigma p\ (Mp \wedge M\neg p)$.

Din propoziţiile (I) – (VI) se pot deduce următoarele propoziţii:

a) $p \rightarrow Mp$

b) $Mp \rightarrow p$

În prezenţa propoziţiei (VII) se poate deduce următoarea propoziţie:

C) Mp.

LOGICI CU MAI MULTE VALORI

- Aceste constatări l-au condus pe Lucasiewicz la concluzia următoare: principiul *terţiului exclus*, după care orice propoziţie *p* este adevărată sau falsă, nu funcţionează pentru propoziţii de forma *" p este posibil "*.

De pildă, propoziţia " *Anul viitor, la* 1 *septembrie, este posibil să plouă la Bucureşti "* nu este nici adevărată, nici falsă.

În mod necesar se impune considerarea unei a treia valori de adevăr: ***" posibilul "***, obţinându-se astfel punctul de plecare pentru ceea ce se numeşte " ***logica trivalentă*** ".

ALGEBRE LUCASIEWICZ *n*-VALENTE

- O ***algebră Lucasiewicz n-valentă*** este o latice distributivă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ cu prim element 0 şi cu ultim element 1, astfel încât:

I. Există o operaţie unară $\neg : L \to L$ cu proprietăţile:

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$
$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$
$$\neg\neg x = x,$$

pentru orice $x, y \in L$.

II. Există $(n-1)$ aplicaţii $\sigma_i : L \to L$, $i = 1,\dots, n-1$ cu proprietăţile:

a) $\sigma_i(0) = 0; \sigma_i(1) = 1$, pentru orice $i = 1,\dots, n-1$.

b) $\sigma_i(x \vee y) = \sigma_i(x) \vee \sigma_i(y)$, $\sigma_i(x \wedge y) = \sigma_i(x) \wedge \sigma_i(y)$, pentru orice $i = 1,\dots, n-1$ şi $x, y \in L$.

c) $\sigma_i(x) \vee \neg\sigma_i(x) = 1$, $\sigma_i(x) \wedge \neg\sigma_i(x) = 0$, pentru orice $i = 1,\dots, n-1$ şi $x \in L$.

d) $\sigma_k \circ \sigma_k = \sigma_k$, pentru orice $k = 1,\dots, n-1$.

e) $\sigma_i(\neg x) = \neg\sigma_j(x)$, pentru $i + j = n$ şi pentru orice $x \in L$.

f) $\sigma_1(x) \le \sigma_2(x) \le \dots\dots \le \sigma_{n-1}(x)$, pentru orice $x \in L$.

g) Dacă $\sigma_i(x) = \sigma_j(x)$ pentru orice $i = 1,\dots., n-1$, atunci $x = y$.

Observaţie: Axioma (g) se numeşte *principiul determinării al lui Moisil*.

$\sigma_1,\dots, \sigma_{n-1}$ se numesc *endormorfisme chrysipiene*.

ALGEBRE LUCASIEWICZ *n*-VALENTE

- Dacă L, L' sunt două algebre Lucasiewicz *n*-valente, atunci o funcţie $f : L \to L'$ se numeşte morfism de algebre Lucasiewiecz *n*-valente dacă pentru orice $x, y \in L$ avem:

1) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$;

2) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$;

3) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$;

4) $f(\sigma_i(x)) = \sigma_i(f(x))$.

Lema 1. Dacă $f : L \to L'$ este un morfism de algebre Lucasiewicz *n*-valente atunci $f(\neg x) = \neg f(x)$, pentru orice $x \in L$.

ALGEBRE LUCASIEWICZ *n*-VALENTE

- **Exemplul 1.** Considerăm în mulţimea

$$L_n = \left\{0,\ \frac{1}{n-1},\ \frac{2}{n-1},\ \dots\ \frac{n-2}{n-1},\ 1\right\}$$

următoarele operaţii: $x \vee y = max(x, y)$, $x \wedge y = min(x, y)$, $\neg x = 1 - x$.

Definim funcţiile $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : L_n \to L_n$ prin următorul tablou:

x	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$	....	$\sigma_{n-2}(x)$	$\sigma_{n-1}(x)$
0	0	0	....	0	0
$\frac{1}{n-1}$	0	0	....	0	1
$\frac{2}{n-1}$	0	0	....	1	1
⋮	0	.....	....	1	1
$\frac{n-2}{n-1}$	0	1	....	1	1
1	1	1	....	1	1

Se poate verifica uşor că L_n este o algebră Lucasiewicz *n*-valentă.

LOGICA TRIVALENTĂ

- Se pleacă de la ideia că orice propoziţie *p* poate fi adevărată, falsă sau posibilă (îndoielnicul). Cu alte cuvinte, vom atribui fiecărei propoziţii *p* o valoare de adevăr $v(p)$ aparţinând mulţimii

$$L_3 = \{0,\ ½,\ 1\}$$

astfel încât:

$$v(p) = \begin{cases} 0, \text{ daca } p \text{ este falsa} \\ 1/2, \text{ daca } p \text{ este posibila} \\ 1, \text{ daca } p \text{ este adevarata} \end{cases}$$

LOGICA TRIVALENTĂ

- Valoarea de adevăr a <u>conjucţiei</u> $p \wedge q$ şi <u>disjuncţiei</u> $p \vee q$ a două propoziţii p şi q este definită prin tablourile următoare:

$v(q)$ \ $v(p)$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$v(p \wedge q)$

$v(q)$ \ $v(p)$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$v(p \vee q)$

- Valoarea de adevăr a negaţiei $\neg p$ este dată de:

$v(p)$	0	1/2	1
$v(\neg p)$	1	1/2	0

- Valorile de adevăr ale implicaţiei şi echivalenţei sunt date de:

$$v(p \to q) = min(1, 1 - v(p) + v(q))$$

$$v(p \leftrightarrow q) = v(p \to q) \wedge v(q \to p),$$

LOGICA TRIVALENTĂ

- Valoarea de adevăr a propoziţiei:

  Mp = *p* este *posibil*

este introdusă de tabloul:

$v(p)$	0	1/2	1
$v(Mp)$	0	0	1

- Valoarea de adevăr a propoziţiei:

  Np = *p* este *necesar*

este introdusă de tabloul:

$v(p)$	0	1/2	1
$v(Np)$	0	1	1

LOGICA TRIVALENTĂ

- **Propoziţia 1.** Funcţia de adevăr v verifică următoarele proprietăţi:

$$v(p \vee q) = v(p) \vee v(q)$$

$$v(p \wedge q) = v(p) \wedge v(q)$$

$$v(\neg p) = \neg v(p)$$

$$v(Mp) = \sigma_1(v(p))$$

$$v(Np) = \sigma_2(v(p))$$

BIBLIOGRAFIE

- G. Georgescu – *Elemente de logică matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1978
- G. Metakides, A. Nerode – *Principii de logică şi programare logică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1998
- D. Busneag, D. Piciu, Probleme de logica si teoria multimilor, Craiova, 2003.
- G. Georgescu, A. Iorgulescu, Logica matematica, Ed. ASE, Bucuresti, 2010
- Gr. C Moisil, Elemente de logica matematica si de teoria multimilor, Ed. Stiintifica, Bucuresti, 1968
- J.D. Monk, Mathematical Logic, Springer Verlag, 1976

MULŢUMESC!