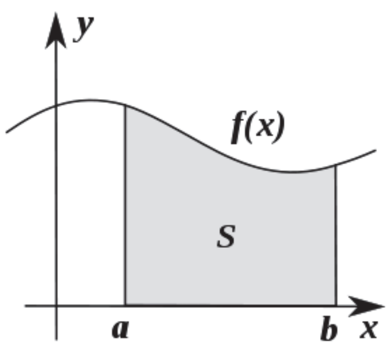
Problema

Calculul integralei $\int_a^b f(x)dx$.

- Daca functia f este o functie simpla, ca de exemplu: un polinom, o exponentiala simpla, o functie trigonometrica pentru care exista fie o formula care se poate aplica, fie se poate calcula integrala prin metode precum integrare prin parti, substitutie etc. atunci o calculam exact folosind metodele descrise.
- Daca functia f este mai complicata si calculul prin metodele descrise nu se poate face atunci se apeleaza la metode numerice care vor determina valori aproximative ale integralei.

Semnificatia integralei

$\int_a^b f(x)dx$= aria de sub graficul functiei $f(x)$ cuprinsa intre dreptele $x = a$ si $x = b$.

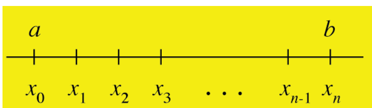


Semnificatia integralei

Pentru calculul aproximativ al integralei, functia $f(x)$ se va aproxima pe intervalul $[a, b]$ sau pe subintervale mai mici ale lui.

- Daca functia $f(x) \approx$ constanta $\longrightarrow$ metoda dreptunghiului
- Daca functia $f(x) \approx$ polinom de grad 1 $\longrightarrow$ metoda trapezului
- Daca functia $f(x) \approx$ polinom de grad 2 $\longrightarrow$ metoda Simpson 1/3

- Pentru toate metodele de mai sus, pentru a obtine o buna aproximare, se imparte intervalul $[a, b]$ in n intervale de lungime egala si se aproximeaza functia pe fiecare interval sau pe doua intervale adiacente.
- Lungimea fiecarui subinterval o notam $h = \frac{b-a}{n}$.
- Notam x_0, x_1, ..., x_n capetele subintervalelor care rezulta.
- $x_0 = a$, $x_n = b$ si $x_i = a + ih$ pentru orice $i = 0, 1, ..., n$.



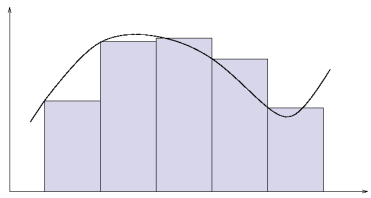
- Notam $f_i = f(x_i)$ pentru orice $i = 0, 1, ..., n$.

Metoda dreptunghiului

Pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ functia se aproximeaza functia $f(x) \approx f_{i-1}$ (sau $f(x) \approx f_i$) (valoarea functiei intr-unul din capetele intervalului) deci
$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx$ aria dreptunghiului cu baza $[x_{i-1}, x_i]$ si inaltimea f_{i-1}

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h * f_{i-1}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h * f_{i-1} = h * \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} = h * \sum_{i=0}^{n-1} f_i$$



Metoda trapezului

Pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ functia se aproximeaza $f(x) \approx$ polinomul de grad I care trece prin punctele (x_{i-1}, f_{i-1}) si (x_i, f_i), deci cu dreapta care trece prin aceste puncte.
$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx$ aria trapezului dreptunghic cu baza $[x_{i-1}, x_i]$ si laturi f_{i-1} si f_i deci

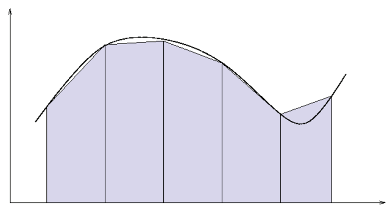
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$$

.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}*(f_{i-1}+f_i) = \frac{h}{2}*(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}+\sum_{i=1}^{n} f_i) = \frac{h}{2}*(\sum_{i=0}^{n-1} f_i+\sum_{i=1}^{n} f_i)$$

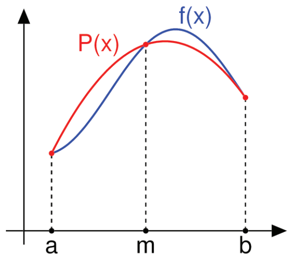
Metoda trapezului

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} * (f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$



Metoda Simpson 1/3

Pe fiecare doua intervale adiacente, $[x_{i-1}, x_i]$ si $[x_i, x_{i+1}]$ functia se aproximeaza $f(x) \approx P(x)$ polinomul de grad II care trece prin punctele (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i) si (x_{i+1}, f_{i+1}) deci cu parabola care trece prin toate aceste puncte.
Pentru a putea aplica metoda trebuie ca n sa fie numar par.



$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P(x)dx$. $P(x)$ se determina din conditiile ca P sa treaca prin punctele mentionate mai sus. Apoi se calculeaza integrala.
Se gaseste ca

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1,3,5...}^{n-1} \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

Metoda Simpson 1/3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} * (f_0 + 4 \sum_{i=1,3,5,...}^{n-1} f_i + 2 \sum_{i=2,4,6,...}^{n-1} f_i + f_n)$$