I Gramatici

$G=(N,T,S,P)$ gramatică, unde
$N=\{A,B,C\}$ - o mulț. de simboluri neterminale
$T=\{a,b,c\}$ - o mulț. de simboluri terminale
$S\in N$ simbolul de start
P - mulț. de producții

Folosim cele trei definiții P determină diferite tipuri de gramatici:

Construit fiecare gramatica CFG? $P\subseteq N\times(N\cup T)^*$

Exercițiu:

Să se scrie CFG care generează:

1) $L_1=\{a^n b^n \mid n\geq 0\}$
cel mai mic cuvânt: λ $(n=0)$
$S\to aSb\mid\lambda$ sau $S\to aAb\mid\lambda$, $A\to aAb\mid\lambda$

2) $L_2=\{a^n b^{2n} \mid n\geq 1\}$
cel mai mic cuvânt: abb $(n=1)$
$S\to aSbb\mid abb$

3) $L_3=\{a^m b^k c^{2m} \mid m\geq 0, k\geq 1\}$
b $(m=0,\ k=1)$
$S\to aaSccc\mid bA$
$A\to bA\mid\lambda$

4) $L_4=\{a^n b^k c^k d^n \mid n\geq 1, k\geq 0\}=\{a^n d^n, a^n b c^n d, a^n b^2 c^2 d, a^n b^3 c^3 d, \dots a^n b^k c^k d\}$
abd $a^n d^n$ -- 1
$S\to aSd\mid aAd$
$A\to bAcc\mid\lambda$

5) $L_5=\{a^m b^{2m} c^{3k} d^k \mid m\geq 0, k\geq 1\}=\{a^m b^{2m} c^3 d, a^m b^{2m} c^6 d^2, \dots a^m b^{2m} c^{3k} d^k\}$
$S\to AB$
$A\to aAbb\mid\lambda$
$B\to cccBd\mid ccd$

Temă: Scrieți CFG care generează:
$L_1=\{a^n b^k c^{2k} d^n \mid n\geq 0, k\geq 1\}$
$L_2=\{a^m b^{2m} c^k d^{m+2k} \mid m,k,m\geq 0\}$
3) Ce limbaj generează gramatica $G=(N,T,S,P)$
unde: $N=\{S,A\}$, $T=\{a,b,c\}$, P este mulț. P este:
$S\to abSccA\mid\lambda$
$A\to bA\mid b$

II Transformarea unei gramatici independente de context în forma normală Chomsky (FNC)

O gram. este în FNC dacă are producții care au în membrul stâng un neterminal și în membrul drept fie un terminal fie doi neterminali: $A\to a$, $B\to CD$

Ex: Se dă gram. C.F.

(1) $S\to aBcD\mid F\mid HF$
(2) $B\to b\mid\lambda$
(3) $D\to d\mid\lambda$
(4) $F\to G$
(5) $G\to f\mid g$
(6) $H\to c$

G are 11 producții
$T=\{a,b,c,d,e,f,g\}$
$N=\{B,D,F,G,H\}$

Pasul 1 Eliminarea λ-producțiilor (nu se elimină producții care în membrul drept au cuvântul vid λ)

În general, $\exists$ 2 situații:

(1) Dacă neterminalul care are λ-producție nu au și alte producții, atunci:
- vor fi eliminate producțiile
- toate producțiile care au ca membru drept un cuvânt de lungime minim 2 în care apare acest neterminal vor fi înlocuite prin eliminarea neterminalului din cuvânt
- dacă membrul drept are lung. 1 (adică este acest neterminal), atunci se înlătuiește cu λ (dar și aceste producții vor fi eliminate la acest pas)

Din exemplu:
(1): $H\to\lambda$ (va fi eliminată)
Neterminalul H apare în producțiile: (6) $S\to HF$, (4) $S\to HBc$
(2) devine: $S\to F$ (12)
(3) — " — : $S\to Bc$ (13)

Gramatica devine:
(1) $S\to aBcDcF\mid F\mid Bc$
(2) $B\to b\mid\lambda$
(3) $D\to d\mid\lambda$
(4) $F\to G$
(5) $G\to f\mid g$

(2) Dacă neterminalul care are λ-producții are și alte producții, atunci:
- vor fi eliminate doar λ-producțiile
- toate producțiile care au la membru drept un cuvânt de lungime minim 2 în care apare acest neterminal vor fi înlocuite atât de variante în care neterminalul neterminalul este de variante în care neterminalul este eliminat din cuvânt
- dacă membrul drept are lung. 1 $\Rightarrow$ producția este de fapt o redenumire și va fi eliminată la pasul următor

(3) $B\to\lambda$ } vor fi eliminate
(7) $D\to\lambda$
$S\to Bc$ (14)
$S\to c$ (15)
Producția (1) devine: $S\to aBcDcF$ (16), $S\to acDcF$ (17), $S\to aBcF$ (18), $S\to acF$ (19)

Deci CFG devine:
(1) $S\to aBcDcF\mid acDcF\mid aBcF\mid acF\mid F\mid Bc\mid c$
(2) $B\to b$
(3) $D\to d$
(4) $F\to G$
(5) $G\to f\mid g$

Pasul 2 Eliminarea neterminalilor

Trăim să eliminăm producțiile care au ca membru drept un neterminal. Nu și pe cei neterminali care sunt membru drept în producțiile lor.

Verificăm dacă acest neterminal din dreapta nu apare în cadrul altor producții:
- dacă nu, eliminăm toate producțiile în care le avea
- dacă mai apare în cuvânt de lungime minimă 2, atunci generăm producțiile sugerate
- dacă apare în cuv. de lung. 1, acest producții vor fi de fapt eliminate tot la acest pas.

În cazul nostru:
(5) $F\to G\to f\mid g$ (20) (21)
(8) va fi înlocuită cu $F\to f\mid g$
Neterminalul G nu mai apare în dreapta niciunei producții $\Rightarrow$ vom elimina prod. (5) și (19)
(20) (21)
$S\to F\to f\mid g$
Prod. (11) va fi înlocuită cu $S\to f\mid g$ (22) (23)
Nt. F nu mai apare în alte producții $\Rightarrow$ nu putem elimina producțiile lui F (20 și 21)

Deci după pasul 2, gram. devine:
(1) $S\to aBcDcF\mid acDcF\mid aBcF\mid acF\mid F\mid f\mid g$ (16) (17) (18) (19) (20) (22) (23)
$\mid Bc\mid c$
(2) $B\to b$
(3) $D\to d$ (24)
(4) $F\to f\mid g$

Pasul 3 Adăugăm noi neterminali noi pentru terminalii din cuvinte

Ne uităm la producțiile care au în membru drept cuvinte de lungime ≥ 2 și conțin terminali.
Pentru aceste terminali vom adăuga noi neterminali.

De ex: (16): $S\to aBcDcF$ devine:
$S\to X_aBX_cDX_cF$ și $X_a\to a$, $X_c\to c$, $X_e\to e$

deci am adăugat neterminalii X_a, X_c, X_e pentru terminalii a, c, e

După pasul (3), gramatica devine:
(1) $S\to X_aBX_cDX_cF\mid X_aX_cDX_cF\mid X_aBX_cF\mid X_aX_cF\mid f\mid g\mid Bc\mid c$ (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31)
(2) $B\to b$
(3) $D\to d$ (24)
(4) $F\to f\mid g$
(5) $X_a\to a$
(6) $X_c\to c$
(7) $X_e\to e$

Pasul 4 Adăugăm noi neterminali pentru a sparge cuvintele de lungime (>2) din membrul drept

(24) $S\to X_aBX_cDX_eF$

Vom adăuga neterminalul nou Y_1 care va hrăni în simultan BX_cDX_eF

$S\to X_aY_1$ (32)

Acum Y_1 simulează BX_cDX_eF care are lung ≥ 2 deci introducem și Y_2 care îl va hrăni pe X_cDX_eF

$Y_1\to BY_2$ (33)
X_cDX_eF are lung $=2$ $\Rightarrow$ introducem Y_3 care îl simulează DX_eF

$S\to X_aY_1$ (32)
$Y_1\to BY_2$ (33)
$Y_2\to X_cY_3$ (34)
$Y_3\to DY_4$ (35)
$Y_4\to X_eF$ (36)

După eliminarea, gram. în FNC este:
(1) $S\to X_aY_1\mid X_aY_2\mid X_aY_6\mid F\mid f\mid g\mid BX_c\mid c$ (32) (37) (38) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31)
(2) $B\to b$
(3) $D\to d$ (24)
(4) $F\to f\mid g$
(5) $X_a\to a$
(6) $X_c\to c$
(7) $X_e\to e$

(33) $Y_1\to BY_2$
(34) $Y_2\to X_cY_3$
(35) $Y_3\to DY_4$
(36) $Y_4\to X_eF$

(39) $Y_5\to BY_6$
(40) $Y_6\to X_cY_4$