Curs 7 30/03/2022

Valori proprii și vectori proprii a unui operator liniar

Fie $f: V \to V$ un operator liniar al spațiului vectorial V, finit generat peste corpul comutativ K, $\dim V = n$.

Fie o bază $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ o bază a lui V, operatorul f i se asociază matricea A în baza $\mathcal{B}$, a.î. avem relația:

$$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot A \quad 1^\circ$$

Dacă se schimbă baza în V, se schimbă și A. Astfel, dacă T este matricea de trecere de la baza inițială $\mathcal{B}$ la alta $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$, matricea operatorului liniar f se schimbă, în nouă bază $\mathcal{B}'$, conform relațiilor:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T \quad 2^\circ$$

Ne propunem să găsim o nouă bază $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ în care matricea B a operatorului f să fie o matrice diagonală:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad 3^\circ$$

$$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$$

Din relația de definiție a matricei B:

$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (v_1, \dots, v_n) \cdot B$, deducem

$$(f(v_1), \dots, f(v_n)) = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

de unde rezultă

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ f(v_n) &= \lambda_n v_n \end{aligned}\right\} \quad (4^\circ)$$

Def: Se numește vector propriu al operatorului f un vector $v \in V$ care îndeplinește condițiile:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ v \neq 0_V \\ &b)\ f(v) = \lambda v \end{aligned}\right\} \quad (5^\circ)$$

Prin urmare, problema găsirii unei noi baze în care matricea operatorului f să aibă formă diagonală se reduce la găsirea vectorilor proprii.

Calculul vectorilor proprii

Fie $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vector propriu exprimat în baza inițială $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Coordonatele lui v în această bază sunt unice și cum $v \neq 0_V$ nu sunt toate nule.

Dacă A este matricea asociată operatorului f în această bază, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, atunci relația:

$f(v) = \lambda v$ devine: $f(v) = A \cdot v$

$$(6^\circ) \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \cdot I_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_V$$

$$\iff (A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_V \iff \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (7^\circ) \begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

Sistem omogen de n ec. cu n necunoscute

Soluțiile sale sunt coordonatele $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ale vectorului propriu v, care nu sunt toate nule, $(\exists) x_i \neq 0$

Sistemul (7) admite și soluții ne nule $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$ (8)

Determinantul matricei $(A - \lambda I_n)$ este un polinom de gradul n în nedeterminata lambda și se numește polinomul caracteristic al matricei A. Se notează:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

TEOREMA HAMILTON-CAILEY: Orice matrice pătratică își verifică polinomul său caracteristic.

$$\Rightarrow P_A(A) = 0; \text{ Intradevăr, } P_A(A) = \det(A - A I_n) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

Rădăcinile polinomului caracteristic al matricei A sunt tocmai numerele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ și se numesc valorile proprii ale matricei A (sau valorile proprii ale endomorfismului f)

$$f: V \to V, \quad f(X) = A \cdot X; \quad X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Deci am stabilit:

- Scalarul λ, din def. vectorului propriu (5), nu este un scalar oarecare și este o rădăcină a polinomului caracteristic al matricei A
- Coordonatele vectorului corespunzător valorii proprii lambda λ sunt soluțiile sist. omogen:

$$(A - \lambda I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ și nu sunt toate nule}$$

Rezultă algoritmul de determinare a vectorilor proprii și a valorilor proprii al operatorului f (sau matricei A)

1°) Determinăm $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

2°) Se rezolvă $P_A(\lambda) = 0 \to$ obținem valorile proprii lui $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

3°) $\forall$ valoare proprie λ_i, se rezolvă $(A - \lambda_i I_n) \cdot \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (9)
soluția sa fiind vectorul propriu $v_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$

- pentru (∀) $i = \overline{1,n}$.

Subspațiul vectorilor proprii corespunzători unei valori proprii

Sistemul (9') este compatibil nedeterminat, deci are o infinitate de soluții.

Dacă α este un scalar oarecare atunci vectorul $(\alpha \cdot v_i)$ este un vector propriu corespunzător aceleiași valori proprii λ_i ($\alpha \cdot v_i$ este coliniar cu v_i)

Dacă V_{λ_i} este mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_i, la care adăugăm și vectorul nul atunci obținem subspațiul vectorilor proprii corespunzător valorii proprii λ_i.

Vectorii acestui subspațiu sunt definiți de relația $f(x) = \lambda x$.

Dacă valorile proprii sunt reale și distincte atunci în baza formată din vectorii proprii ai operatorului f matricea asociată lui f este o matrice diagonală.

Dacă T este matricea formată cu vectorii proprii pe coloanele sale, atunci între matricea A a lui f în baza inițială și matricea B a lui f în baza formată din vectorii proprii există relația următoare:

$$B = T^{-1}\cdot A\cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

În acest caz vom spune că matricea A este diagonalizabilă. Rezultatul are loc în virtutea teoremei următoare.

<u>Teoremă</u>

Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenți.

Deci, dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sunt liniar independenți și deci formează o bază în $\mathbb{R}^n$ în care matricea asociată lui f are forma diagonală.

<u>Definiție</u> Un operator liniar $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($V = \mathbb{R}^n$) se numește operator de structură simplă dacă admite o bază formată din vectori proprii.

Deci, dacă f are $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \Rightarrow$ acest operator este de structură simplă.

Pt un astfel de operator, matricea sa este diagonalizabilă și în baza formată din vectorii proprii matricea sa are forma diagonală.

<u>Aplicație</u> Pentru un astfel de operator se poate calcula ușor matricea A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Avem: $B = T^{-1}\cdot A\cdot T$, unde T este matricea care are pe coloanele sale vectorii proprii

$B = T^{-1}\cdot A\cdot T \Rightarrow T\cdot B\cdot T^{-1} = T\cdot T^{-1}\cdot A\cdot T\cdot T^{-1} = A$

$A = T\cdot B\cdot T^{-1} \Rightarrow A^2 = T\cdot B(T^{-1}\cdot T)B T^{-1} = T\cdot B^2\cdot T^{-1}$

$A^3 = A^2\cdot A = T\cdot B^2(T^{-1}\cdot T)B T^{-1} = T\cdot B^3\cdot T^{-1}$. <u>Ind.</u>

$A^n = T\cdot B^n T^{-1}$; $B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

Enunțăm și următoarele rezultate:

1° Orice matrice simetrică, reală, A, are valori proprii reale și distincte și vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt ortogonali (⟺ produsul lor scalar este nul).

2° În cazul unei matrice pentru care $\varphi_A(\lambda)$ are rădăcini multiple (⟺ are valori proprii multiple) atunci are loc rezultatul următor:

Matricea A este diagonalizabilă dacă ordinul de multiplicitate algebrică al fiecărei valori proprii multiple este egal cu ordinul de multiplicitate geometrică al acelei valori proprii (ord λ_i = dimensiunea subspațiului propriu corespunzător valorii proprii λ_i ⟺ ordinul de nedeterminare al sistemului 9°

$$(A-\lambda_i \cdot I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = O_n$$ ⟺ numărul necunoscutelor secundare ale sistemului

Aplicație Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, care în baza canonică $\{e_1, e_2, e_3\}$ are matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Să se determine:

a) polinomul caracteristic $\varphi_A(\lambda)$

b) valorile proprii

c) vectorii proprii corespunzători.

d) forma diagonală a lui A

e) A^n.

a) $$\varphi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\overset{L_1 = L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(5-\lambda)(4-\lambda)-2\right] = $$
$$=(2-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18).$$

$\varphi_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18)$ polinomul caracteristic

(b) Valorile proprii = răd. polinomului caracteristic

$\lambda^2-9\lambda+18=0$; $\Delta = 81-72=9$

$$\lambda_{2,3}=\frac{9\pm 3}{2} = \begin{cases}\lambda_1=6\\ \lambda_3=3\end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_1=2;\ \lambda_2=3;\ \lambda_3=6}$$

(c) vectorii proprii

$\lambda_1=2$: $\begin{vmatrix} 3-2 & -1 & +1 \\ -1 & 5-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) /:2 \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\simeq \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \uparrow x_1 \quad \uparrow x_2 \quad x_3 \end{array}$$

rang $S=2$; x_1, x_2 = nec. pr.
$x_3=\alpha$ = nec. sec.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\alpha \\ x_2=0 \\ x_3=\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$; $v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\alpha$; $\boxed{v_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda_2=3 \Rightarrow v_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 3-3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3-3 & 0 \end{array}\right) \\ \uparrow x_1 \quad \uparrow x_2 \quad \uparrow x_3 \end{array} \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

pivot nul

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \simeq \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|c|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \uparrow x_1 \quad \uparrow x_2 \quad \uparrow x_3 = \beta \end{array}$$

rg A = rg $\bar{A}$ = 2
N. pr: x_1, x_2
N. sec. $x_3=\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = \beta \\ x_2 = x_3 = \beta \\ x_3 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \beta .$$

$\Rightarrow \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ = vectorul propriu corespunzător lui $\lambda_2 = 3$

$\underline{\lambda_3 = 6}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3-6 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5-6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3-6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:2 \\ |:4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |:(-3)$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$$

rang $A = 2$, rang $\bar{A} = 2$; nec. pr.: x_1, x_2; nec. sec. $x_3 = \gamma$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = \gamma \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = -2\gamma \\ x_3 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma \Rightarrow \boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Fie T = matricea de trecere de la baza canonică la baza formată din vectorii proprii $\{v_1, v_2, v_3\}$, liniar independenți deoarece corespund la valori proprii distincte.

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea operatorului f în această bază va fi

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculăm T^{-1} tot prin metoda Gauss:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}}_{T} & \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & +1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:6 \\ |:(-6) \\ |:6 \end{array} \sim \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} & \underbrace{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}}_{T^{-1}} \end{array}\right)$$

Deci, $T^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ Exercițiu: verificați dacă $T^{-1}\cdot T = I_3$.

(d) Forma diagonală: se calculează $D = T^{-1}AT$

$$D=\frac{1}{6}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}}_{T^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{T}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 0 & 6\\ 6 & 6 & 6\\ 6 & -12 & 6\end{pmatrix}\cdot T=\frac{6}{6}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=D,$$ q.e.d.

(e) Calculul matricei A^n

$D=T^{-1}AT \Leftrightarrow A = TDT^{-1}$; $A^2=(TDT^{-1})\cdot(TDT^{-1}) = TD^2T^{-1}$....

prin inducție rezultă: $A^n = T\cdot D^n\cdot T^{-1}$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow D^n=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{T}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{pmatrix}}_{D^n}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}}_{T^{-1}}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-2^n & 3^n & 6^n\\ 0 & 3^n & -2\cdot 6^n\\ 2^n & 3^n & 6^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ +2 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3\cdot 2^n+2\cdot 3^n+6^n & 2\cdot 3^n-2\cdot 6^n & -3\cdot 2^n+2\cdot 3^n+6^n\\ 2\cdot 3^n-2\cdot 6^n & 2\cdot 3^n+4\cdot 6^n & 2\cdot 3^n-2\cdot 6^n\\ -3\cdot 2^n+2\cdot 3^n+6^n & 2\cdot 3^n-2\cdot 6^n & 3\cdot 2^n+2\cdot 3^n+6^n\end{pmatrix}}_{A^n}.$$