Curs 4 - Temă | Ex 1.

$y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{x} \to y' + \frac{(-4)}{x}\cdot y = x\sqrt{x}$ NEOMOGENĂ $\to$ $P(x) = \frac{-4}{x}$ $Q(x) = -x\sqrt{x}$

PAS 1| Ecuația omogenă asociată $\to y' + P(x)y = 0 \to y' + \frac{(-4)}{x}y = 0$

$y' + \frac{(-4)}{x}y = 0 \to y' = \frac{4}{x}y \to \frac{y'}{y} = \frac{4}{x}$

PAS 2|

$\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{4}{x}dx \Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx = 4\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln y = 4\ln(x) + \ln c \Rightarrow \ln y = \ln(x)^4 + \ln c \Rightarrow y = x^4 \cdot c$

PAS 3| Neomogenă $\to$ Lagrange

$c = C(x) \to y = x^4 \cdot C(x) \to y' = 4x^3 \cdot C(x) + x^4 \cdot C(x)'$

Înlocuim y și y' în ecuația din start

$y' + \frac{(-4)}{x}\cdot y = x\sqrt{x} \to \cancel{4x^3 C(x)} + x^4 \cdot C(x)' - \frac{4}{\cancel{x}}\cdot(\cancel{x^4}^{3}\cdot C(x)) = x\sqrt{x} \to x^4 C(x)' = x\sqrt{x} \to C(x)' = \frac{x\sqrt{x}}{x^4} \Rightarrow C(x)' = \frac{\sqrt{x}}{x^3} \Rightarrow C(x)' = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-3} \Rightarrow C(x)' = x^{-\frac{5}{2}}$

$C(x) = \int x^{-\frac{5}{2}}dx \Rightarrow C(x) = \frac{x^{-\frac{5}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{5}{2}+\frac{2}{2}} + K \Rightarrow C(x) = \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + K \Rightarrow C(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}} + K \Rightarrow C(x) = \left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) + K$

$y = x^4 \cdot C(x) \to y = x^4 \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) + K\right] \Rightarrow y = x^4 \cdot K + \left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y = x^4\cdot K + \left(-\frac{2}{3}\cdot x^{3-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow y = x^4\cdot K - \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y = x^4\cdot K - \frac{2}{3}\sqrt{x^5} \Rightarrow y = \underbrace{x^4\cdot K}_{\text{Soluție generală a ecuației omogenee } y' + P(x) = 0} - \underbrace{\frac{2}{3}x^2\sqrt{x}}_{\text{Soluție particulară a ecuației neomogenee } y' + P(x) + Q(x) = 0}$

Curs 4 - Temă | Ex 2.

$y' = \frac{y}{x} - 2xy^2 \to y' - \frac{y}{x} = -2xy^2$

$y' + \frac{(-1)}{x}y + 2x\cdot y^2 = 0$ Neomogenă $P(x) = -\frac{1}{x}$ $Q(x) = 2x$ $\alpha = 2$ | Bernoulli equation

$\frac{y'}{y^2} - \frac{1}{xy} = -2x \to \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = -2x$

$z = \frac{1}{y} \to z' = (y^{-1})' \Rightarrow z' = -1\cdot y^{-2}\cdot y' \to z' = -y^{-2}\cdot y' \to z' = -\frac{y'}{y^2} \to -z' = \frac{y'}{y^2}$

$\hookrightarrow -z' - \frac{1}{x}\cdot z = -2x \to z' + \frac{z}{x} = 2x$ Ecuație neomogenă, liniară, de ordin 1.

Iau ecuația omogenă asociată $z' + \frac{z}{x} = 0$

$z' = -\frac{z}{x} \Big/ \frac{1}{z} \to \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$

$\int \frac{z'}{z}dx = -\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln z = -\ln x + \ln c \Rightarrow z = \frac{c}{x}$

$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x}$

$c = C(x) \to z = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow z' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} \to$ Înlocuiesc z și z' în ecuație

$z' + \frac{z}{x} = 2x \to \frac{C'(x)}{x} - \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} = 2x \Rightarrow \frac{C'(x)}{x} = 2x \,/\cdot x \Rightarrow C'(x) = 2x^2 \xrightarrow{\text{integrate}} C(x) = 2\int x^2dx \Rightarrow C(x) = 2\cdot\frac{x^3}{3} + K \Rightarrow C(x) = \frac{2}{3}x^3 + K$

Acum înlocuiesc C(x) în soluția $z = \frac{C(x)}{x}$

$z = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2}{3}x^3 + K\right) \to z = \underbrace{\frac{K}{x}}_{\text{Soluția generala a ecuației omogenee } y' + P(x) = 0} + \underbrace{\frac{2}{3}x^2}_{\text{Soluție particulară a ecuației neomogenee } y' + P(x) + Q(x) = 0} \to \frac{1}{y} = z \to \frac{1}{y} = \frac{K}{x} + \frac{2}{3}x^2 \to y = \frac{1}{\frac{K}{x} + \frac{2}{3}x^2}$

Soluție a problemei Cauchy

$y(1) = 1 \to \frac{1}{K + \frac{2}{3}} = 1 \to K + \frac{2}{3} = 1 \to K = -\frac{1}{3} \to y = \frac{1}{-\frac{1}{3x} + \frac{2x^2}{3}} \to \frac{1}{\frac{-1 + 2x^3}{3x}} \to y = \frac{3x}{2x^3 - 1}$ Este Soluție problemei Cauchy

---

Curs 4 - Temă | Ex 3.

$xy' + y = -x^2y^2 \,/ : y^2$ $P(x) = 1$ $Q(x) = x^2$ $\alpha = 2$ | Bernoulli equation

$\frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} = -x^2 \to x\cdot\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = -x^2$

$z = \frac{1}{y} \to z = y^{-1} \to z' = -y^{-2}\cdot y' \to z' = -\frac{y'}{y^2} \to -z' = \frac{y'}{y^2}$

$x\cdot\frac{y'}{y} + \frac{1}{y} = -x^2 \to -xz' + z = -x^2 \to xz' - z = x^2 \,/ : x \to z' - \frac{1}{x}\cdot z = x$ Ecuație liniară neomogenă de ordin 1

Iau ecuația omogenă asociată $z' - \frac{1}{x}\cdot z = 0$

$z' - \frac{1}{x}\cdot z = 0 \to z' = \frac{1}{x}\cdot z \to \frac{z'}{z} = \frac{1}{x}$

$\int \frac{z'}{z}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln z = \ln x + \ln K \to z = x\cdot c$

Acum folosesc metoda constantelor variabile pentru a găsi soluția particulară

$c = C(x) \to z = x\cdot C(x) \to z' = C(x) + xC(x)'$ înlocuiesc z și z' în ecuație

$z' - \frac{1}{x}\cdot z = x \to \cancel{C(x)} + xC(x)' - \cancel{C(x)} = x \to xC(x)' = x \to C(x)' = 1 \xrightarrow{\text{integrate}} C(x) = \int dx \to C(x) = x + K$

Acum înlocuiesc C(x) în $z = x\cdot C(x)$

$z = x\cdot C(x) \to z = x\cdot(x + K) \to z = \underbrace{x\cdot K}_{\text{Soluție generală a ecuației omogenee } y' + P(x) = 0} + \underbrace{x^2}_{\text{Soluție particulară a ecuației neomogenee } y' + P(x) + Q(x) = 0}$ } în z

$z = \frac{1}{y} \to \frac{1}{y} = x\cdot K + x^2 \to y = \frac{1}{x\cdot K + x^2} \to y = \frac{1}{x(K + x)}$

Soluția problemei Cauchy $y(1) = 1$

$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{1(K+1)} = 1 \Rightarrow \frac{1}{K+1} = 1 \Rightarrow 1 = K + 1 \Rightarrow K = 0 \to y = x^2$ este soluția problemei Cauchy

---

Curs 4 - Tema | Ex 4

$2x^2y' - 4xy = y^2 \,/ : 2x \to xy' - 2y = \frac{1}{2x}y^2 \,/ : x \to y' - \frac{2}{x}\cdot y = \frac{1}{2x^2}y^2 \,/ : y^2$ $P(x) = -\frac{2}{x}$ $Q(x) = -\frac{1}{2x}$ $\alpha = 2$ | Bernoulli Equation

$\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2}$ $z = \frac{1}{y} \to z = y^{-1} \to z' = -y^{-2}\cdot y' \to z' = -\frac{y'}{y^2} \to -z' = \frac{y'}{y^2}$

$\frac{y'}{y} - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{2x^2} \to -z' - \frac{2z}{x} = \frac{1}{2x^2} \to z' + \frac{2z}{x} = -\frac{1}{2x^2}$

Iau ecuația omogenă asociată $z' + \frac{2}{x}z = 0$

$z' + \frac{2z}{x} = 0 \to z' = -\frac{2}{x}z \to \frac{z'}{z} = -\frac{2}{x}$

$\int \frac{z'}{z}dx = -2\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln z = -2\ln x + \ln c \to \ln z = \ln x^{-2} + \ln c \to z = \frac{c}{x^2}$

Acum folosesc metoda constantelor variabile pentru a găsi soluția particulară

$c = C(x) \to z = \frac{C(x)}{x^2} \to z' = \frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4}$ înlocuiesc z și z' în ecuația asta

$z' + \frac{2z}{x} = -\frac{1}{2x} \to \frac{C'(x)}{x^2} - \cancel{\frac{2C(x)}{x^3}} + \cancel{\frac{2C(x)}{x^3}} = -\frac{1}{2x} \to \frac{C'(x)}{x^2} = -\frac{1}{2x^2} \to C'(x) = -\frac{1}{2} \to C(x) = -\frac{1}{2}\int dx \to C(x) = -\frac{1}{2}x + K$

Acum înlocuiesc C(x) în $z = \frac{C(x)}{x^2}$

$z = \frac{C(x)}{x^2} \to z = \frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x + K\right) \to z = \underbrace{\frac{K}{x^2}}_{\text{Soluție generală a ecuației omogenee } y' + P(x) = 0} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\text{Soluție particulară a ecuației neomogenee } y' + P(x) + Q(x) = 0} \to z = \frac{1}{y} \to \frac{1}{y} = \frac{K}{x^2} - \frac{1}{2x} \to y = \frac{1}{\frac{K}{x^2} - \frac{1}{2x}}$

Soluție problemei Cauchy

$y(1) = 1 \to \frac{1}{K - \frac{1}{2}} = 1 \to K - \frac{1}{2} = 1 \to K = \frac{3}{2} \to y = \frac{1}{\frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x}} \to y = \frac{1}{\frac{3 - x}{2x^2}} \to y = \frac{2x^2}{3 - x}$ Este soluție problemei Cauchy

---

Curs 4 - Temă | Ex 5

$y' + \frac{4}{x}y = y^2\ln x \,/ : y^2 \to \frac{y'}{y^2} + \frac{4}{x}\cdot\frac{1}{y} = \ln x$ $P(x) = \frac{4}{x}$ $Q(x) = \ln x$ $\alpha = 2$ | Bernoulli Equation

$z = \frac{1}{y} \to z = y^{-1} \to z' = -y^{-2}\cdot y' \to z' = -\frac{y'}{y^2} \to -z' = \frac{y'}{y^2}$

Înlocuiesc z și z'

$z' + \frac{8}{x}z = 4\ln x \to z' + \frac{8}{x}z = 4\ln x$

Iau ecuația omogenă asociată $z' + \frac{8}{x}z = 0$

$z' + \frac{8}{x}z = 0 \to z' = -\frac{8}{x}z \to \frac{z'}{z} = -\frac{8}{x}$

$\int \frac{z'}{z}dx = -8\int \frac{1}{x}dx \to \ln z = -8\ln x + \ln c \to \ln z = \ln x^{-8} + \ln c \to z = \frac{c}{x^8}$

Acum folosesc metoda constantelor variabile pentru a găsi soluția particulară

$c = C(x) \to z = \frac{C(x)}{x^8} \to z' = \frac{C'(x)x^8 - 8x^7C(x)}{x^{16}} \to z' = \frac{C'(x)}{x^8} - \frac{8C(x)}{x^9}$ Înlocuiesc z și z' în ecuația asta

$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\left[(n+1)\ln x - 1\right] + C$

$z' + \frac{8}{x}\cdot z = 4\ln x \to \frac{C'(x)}{x^8} - \cancel{\frac{8C(x)}{x^9}} + \cancel{\frac{8C(x)}{x^9}} = 4\ln x \to \frac{C'(x)}{x^8} = 4\ln x \to C'(x) = x^8\cdot 4\ln x \to C(x) = 4\int x^8\ln x\,dx \to C(x) = 4\left(\frac{x^9}{81}\cdot 9\ln x - \frac{x^9}{81}\right) \to C(x) = 4\left(\frac{x^9\ln x}{9} - \frac{x^9}{81}\right) + K \to C(x) = \frac{4x^9\ln x}{9} - \frac{4x^9}{81} + K$

Acum înlocuiesc C(x) în $z = \frac{C(x)}{x^8}$

$z = \frac{C(x)}{x^8} \to z = \frac{\frac{4x^9\ln x}{9}}{x^8} - \frac{\frac{4x^9}{81}}{x^8} + \frac{K}{x^8} \to z = \underbrace{\frac{4x\ln x}{9} - \frac{4x}{81}}_{\text{Soluție particulară a ecuației neomogenee } y' + P(x) + Q(x) = 0} + \underbrace{\frac{K}{x^8}}_{\text{Soluția generală a ecuației omogenee } y' + P(x) = 0}$

Curs 4 - Temă | Ex 6

$y' + y\,tg\,x = y^2 \,/ : y^2 \to \frac{y'}{y^2} + \frac{tg\,x}{y} = 1$ $P(x) = tg\,x$ $Q(x) = 1$ $\alpha = 2$ | Bernoulli Equation

$z = \frac{1}{y} \to z' = -\frac{y'}{y^2} \to -z' = \frac{y'}{y^2}$

Înlocuiesc z și z' în ecuația omogenă

$-z' + z\,tg\,x = 1 \to z' - z\,tg\,x = -1$

Iau ecuația omogenă asociată $z' - z\,tg\,x = 0$

$z' = z\,tg\,x \to \frac{z'}{z} = tg\,x$

$\forall x \in [0, 1]$

$\int \frac{z'}{z}dx = \int tg\,x\,dx \Rightarrow \ln z = -\ln|\cos x| + \ln c \to z = \frac{c}{|\cos x|} \to z = \frac{c}{\cos x}$

Acum folosesc metoda constantelor variabile pentru a găsi soluția particulară

$c = C(x) \to z = \frac{C(x)}{|\cos x|} \to z' = \frac{C'(x)|\cos x| + |\sin x|C(x)}{(\cos x)^2} \to z' = \frac{C'(x)|\cos x|}{(\cos x)^2} + \frac{C(x)|\sin x|}{(\cos x)^2}$ Înlocuiesc z și z' în ecuația asta

$+\frac{C'(x)}{|\cos x|} + \frac{C(x)|\sin x|}{(\cos x)^2} - \frac{C(x)}{|\cos x|}\cdot tg\,x = 1 \to +\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{(\cos x)^2} - \frac{C(x)}{|\cos x|}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \to +\frac{C'(x)}{\cos x} + \cancel{\frac{C(x)\sin x}{(\cos x)^2}} - \cancel{\frac{C(x)\sin x}{(\cos x)^2}} = 1 \to +\frac{C'(x)}{\cos x} = 1 \to C'(x) = +\cos x \to C(x) = \int \cos x\,dx \to C(x) = +\sin x + K$

Acum înlocuiesc C(x) în $z = \frac{C(x)}{|\cos x|}$

$z = \frac{C(x)}{|\cos x|} \Rightarrow z = \frac{(+\sin x + K)}{\cos x} \to z = \underbrace{+tg\,x}_{\text{Soluție particulară}} + \underbrace{\frac{K}{\cos x}}_{\text{Soluția generală}} \to z = \frac{1}{y} \to \frac{1}{y} = tg\,x + \frac{K}{\cos x} \to y = \frac{1}{\frac{\sin x + K}{\cos x}} \to y = \frac{\cos x}{\sin x + K}$