22.10.2021

$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (serie)

$S_n=\sum_{n=1}^{n} a_n$ (suma parțiala - primii n termeni)

seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$ convergent dacă $\sum_{1}^{n} a_n$ este convergent și limita este S

natura unui șir stabilită de:
- criterii generale de convergență
- criterii pt termeni pozitivi
- criterii pt termeni oarecare

pentru Cauchy + seria e convergentă dacă seria parțială este convergentă
↳ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n\in\mathbb{N}\quad |S_{n+p}-S_n|>\varepsilon$

! natura nu se schimbă dacă se adaugă / elimină nr de termeni (nr finit)

Criterii de convergență pt serii cu termeni pozitivi

fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; unde $a_n>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

1) criteriul majorării

↳ o serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor sale parțiale este mărginit.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\underbrace{S_n=a_1+a_2+\dots+a_n}_{\text{șir sume parțiale}}$

Conform def convergenței seriei avem că seria sumei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă și are suma S dacă și numai dacă șirul ~~nr~~ sumelor parțiale S_n este convergent și are limita S

* Dem: „⇒" presupunem că seria e convergentă $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ ⇒

⇒ șirul S_n este convergent ⇒ $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\dots+a_n)=S$

$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n$

(S_n) mărginit dacă $\exists\ M>0$ aî $|S_n|\le M\quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

$-M<S_n<M\quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

$|S_{n+1}-S_n|=a_{n+1}>0$; crescător

prin ipoteză avem seria este convergentă → S_n = convergent

⇒ S_n = mărginit

„⇐" presupunem că S_n = mărginit, dem că S_n este convergent

⇒ $\exists\ M>0$ aî $-M<S_n<M$;

S_n = crescător, conform criteriului lui Weierstrass ⇒

S_n = convergent. ⇒ Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

Consecințe: - o serie cu termeni pozitivi este sau convergentă (limita finită) ($S=\lim S_n$ = finit) sau are suma $+\infty$.

2) Criteriul comparației

v1. pentru termeni

fie suma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$; unde $v_n > 0$ și $u_n > 0$

- dacă $u_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (sau de la un anumit rang finit) și suma $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă (serie majorantă) $\Rightarrow$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă
- dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (minorantă) e divergentă $\Rightarrow$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă

v2. pentru rapoarte

fie sumele $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ $\quad v_n > 0$ și $u_n > 0$

și pp. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ $\quad \forall n \geq p \geq 1$.

dacă suma $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ e convergentă $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} u_n$ = convergentă

dacă suma $\sum_{1}^{\infty} u_n$ e divergentă $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} v_n$ = divergentă

v3 limita raportului

fie $u_n > 0$ $\quad v_n > 0$

dacă $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty \Rightarrow v_n, u_n$ au aceeași natură

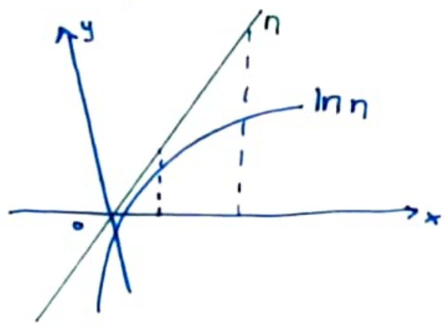
Aplicații:

- fie seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$

termenii pozitivi

$u_n = \frac{1}{\ln n} > 0 \quad \forall n > 2$

fie seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ serie divergentă (s.n armonică)



$n > \ln n \quad \forall n \geq 2$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} \quad \forall n \geq 2$

$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ = divergentă

$\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ = divergentă conform v2

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}}$$

$\cancel{u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n} \cdot \cos\frac{1}{n+1}} > 0 \ \forall n}$

fie seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow$ șir Cauchy $\rightarrow$ convergent

$S_n = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} \lim S_n = 1 \\ \text{convergent} \end{cases}$

$\Rightarrow$ seria convergentă $\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\right)$; $S = 1$

$$v_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} \; ; \; u_n = \frac{1}{n(n+1)} \to \sum u_n = \text{convergenta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}\cdot 1}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} = 1 \in (0,\infty)$$

$\Rightarrow$ si suma $\sum_1^\infty v_n$ = convergentă

calculam suma $\quad v_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}$

$$= \frac{\sin\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n+1}\cdot\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}} - \frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n+1}} = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}$$

$v_n = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1} \quad \forall n\geq 1$

$n=1 \quad v_1 = tg 1 - tg\frac{1}{2}$

$n=2 \quad v_2 = tg\frac{1}{2} - tg\frac{1}{3}$

$n=3 \quad v_3 = tg\frac{1}{3} - tg\frac{1}{4}$

$\vdots$

$n=n-1 \quad v_{n-1} = tg\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$n=n \quad v_n = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1}$

$S_n = v_1+v_2+\ldots+v_n = tg\frac{1}{n} - tg\frac{1}{n+1} = tg 1 - tg\frac{1}{n+1}$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(tg 1 - tg\frac{1}{n+1}\right) = tg 1 - tg 0 = tg 1$

$\Rightarrow$ convergenta cu $S = tg 1$

$360° \ldots\ldots 2\pi$ rad

$x \ldots\ldots 1$ rad

$x = \frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = \frac{180}{\pi} = 57°\ldots$

Pt a putea utiliza criteriul comparatiei este necesar sa cunoastem natura unor serii cu termeni pozitivi cu care să putem face comparația

Avem la dispozitie:

- seria geometrică de ratie r, cu $r\in(0,1)$ - convergentă

$$\sum_0^\infty r^n = 1 + r + \ldots + r^{n-1} + \ldots$$

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}, \; r\in(-1,1)$$

↳ criteriul comparatiei se poate aplica numai pentru $r\in(0,1)$; seria e convergenta si pt $r<0$

- seria armonică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad \text{este divergentă}$$

- seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

↳ convergentă

↳ $S = \frac{\pi^2}{6}$

3) Criteriul condensarii

↳ Cauchy

↳ fie $\sum_{1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi ai șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător atunci seria dată și seria $\boxed{\sum_{0}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}}$ sunt de aceeași natură

$$\sum_{1}^{\infty} u_n = u_1 + \underline{u_2} + u_3 + \underline{u_4} + u_5 + u_6 + u_7 + \underline{u_8} + \dots + u_n + \dots$$

$$\sum_{0}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n} = u_1 + 2 \cdot u_2 + 4 \cdot u_4 + 8 \cdot u_8 + \dots + 2^n \cdot u_{2^n} + \dots$$

- Aplicăm acest rezultat seriei armonice generalizate

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots ; \alpha \in \mathbb{R}$$

dacă $\alpha < 0 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \Rightarrow +\infty$ când $n \to \infty \Rightarrow$ serie divergentă

dacă $\alpha = 0 \quad \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^0} = 1 \to$ constant $\Rightarrow$ serie divergentă

dacă $\alpha > 0$: fie $\sum_{0}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n} \Rightarrow \boxed{v_n = 2^n \cdot u_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha}}$

$\frac{1}{n^\alpha} \to 0$

condiție necesară de convergență este asigurată

$$= \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \frac{1}{2^{n\alpha - n}} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n, \quad n \geq 1$$

v_n termen general al seriei geometrice de rație $r = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$

$\Rightarrow$ seria e convergentă dacă $0 < \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$

$\Leftrightarrow \quad 2^{\alpha-1} > 1 ; \quad 2^{\alpha-1} > 2^0$

$\Rightarrow \alpha - 1 > 0 \Rightarrow \alpha > 1$

dacă $\alpha > 1$ seria $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergentă

dacă $\alpha > 1$ seria $\sum_{1}^{\infty} 2^n \cdot u_{2^n}$ convergentă

dacă $r \geq 1 \quad \frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1 \Rightarrow 2^{\alpha-1} \leq 1 = 2^0 \Rightarrow \alpha \leq 1$

pt $\alpha \leq 1$ seria este divergentă

Concluzie: seria armonică generalizată $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are proprietățile

1) dacă $\alpha \leq 0 \to$ seria e divergentă

2) dacă $\alpha \leq 1$ și $\alpha > 0 \to$ seria e divergentă

3) dacă $\alpha > 1$ seria e convergentă

Exemple:

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ seria e convergentă

  $\alpha = \frac{3}{2}$

  pt $\alpha > 1 \to$ convergent

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $\quad \left.\begin{array}{l}\frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{2} < 1\end{array}\right\} \Rightarrow$ seria divergentă

  $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent cu limita $+\infty \to$ nemărginit.

- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[k]{2}} + \frac{1}{\sqrt[k]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right) = +\infty$

  $k \geq 2$ și $\frac{1}{k} < 1$

4. Criterii suficiente de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1. Criteriul rădăcinii (Cauchy)

$\to$ fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$; termeni pozitivi

a) dacă $\exists$ un nr $k \in \mathbb{R}$, $k \in (0,1)$ ai să avem $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$ pt o infinitate de termeni ai seriei (exceptând eventual un nr finit de termeni) atunci seria este convergentă

b) dacă $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pt o infinitate de termeni ai seriei atunci seria este divergentă.

în aplicații se utilizează criteriul sub formă numită „la limită"

„la limită" = a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sup \sqrt[n]{u_n}\right) < 1 \to$ serie convergentă

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sup \sqrt[n]{u_n}\right) > 1 \to$ seria este divergentă

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sup \sqrt[n]{u_n}\right) = 1 \to$ nu se poate trage nici o concluzie privind natura seriei

În această situație e necesar să aplicăm criterii de convergență mai „tari" decât criteriul rădăcinii

- exemple:

1) fie seria $\sum_{1}^{n} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$

$u_n = \frac{1}{n^n}$, $n > 0$ $\quad n \geq 1$ $\quad n \in \mathbb{N}$

calculam $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \sqrt[n]{u_n} \lim \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$ convergentă

2) $\sum_{1}^{n} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ $u_n = \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

calculam $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot e < 1 \\ e < 3\end{array}\right\} \Rightarrow < 1 \Rightarrow$ sir convergent

3) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot a\right)^n = (2a) + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n+1}{n} a\right)$ $a > 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \cdot a\right)^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot a = a$

$a =$ constant

dacă $0 < a < 1$
↳ serie convergentă

daca $a > 1 \to$ serie divergentă

daca $a = 1 \to$ incertitudine

Pt $a = 1$ $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = e \neq 0$

↳ nu e îndeplinită condiția necesară de convergență;

↳ serie divergentă;

2. Criteriul raportului

↳ d'Alembert.

↳ fie $\sum_{1}^{\infty} u_n$ serie cu termeni poz. $u_n > 0$; dacă $\exists$ un număr $p \in \mathbb{N}$ și un $K \in (0,1)$ aî pentru $\forall n \geq p$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq K < 1$ seria este este convergentă.

↳ dacă $\exists$ $p \in \mathbb{N}$ aî să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pt $\forall n \geq p$ atunci seria este divergentă

! criteriul se aplică sub forma „la limită"

Consecință

daca $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1 \Rightarrow$ serie convergenta

daca $\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1 \Rightarrow$ serie divergentă

daca $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow$ incertitudine

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $u_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$

  ↳ divergentă

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ $\left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = 1 \right.$

  $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$

  ↳ convergenta

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$

$u_n = \frac{1}{n!}$

$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$; $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = e}$

Concluzie

pe alte exemple se poate arăta că pt unele serii (cu termeni>0) criteriul raportului nu permite stabilirea naturii seriei, în timp ce criteriul rădăcinii permite acest lucru.

↳ Criteriul rădăcinii are aplicabilitate > criteriul raportului

↳ mai mult se demonstrează că are loc

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ atunci când a 2a limita există

Exemplul:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \Rightarrow$ incertitudine

din criteriul comparației la limită $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (convergentă)

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^2-1} = \frac{1}{4} \in (0,\infty)$

↳ seriile au aceeași natură

↳ $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este convergentă

$\Rightarrow$ criteriul comparației este „mai puternic" decât criteriul raportului

3) Criteriul Raabe Duhamel

fie $\sum_{1}^{\infty} u_n$; $u_n > 0$

a) dacă $\exists$ un nr K, $K>1$ și un nr $p \in \mathbb{N}$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq K > 1$ pt $\forall\ n \geq p$ $\rightarrow$ seria e convergentă

b) dacă $\exists$ $p \in \mathbb{N}$ a.î. $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $n \geq p \Rightarrow$ seria e divergentă

Consecință

→ criteriul se aplică sub forma „la limită"

→ se calculează $\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) - 1\right) = \ell$

dacă $\ell > 1$ → serie convergentă

dacă $\ell < 1$ → serie divergentă

dacă $\ell = 1$ incertitudine

Exemplu

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\qquad u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

criteriul raportului $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+3} = 1$ (incertitudine)

criteriul Raabe-Duhamel $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n-1} - 1\right)$

$= \lim n \cdot \frac{2n+3-2n+1}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n-1} = 2 \to$ serie convergentă

Exercițiu

$\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}$ $\qquad \alpha > 0$

?! natura seriei cu discuție după α

PAȘI : criteriul raportului de incertitudine $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

criteriul lui Raabe $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \alpha - 1$

$\hookrightarrow \alpha - 1 > 1 \to \alpha > 2$
$\hookrightarrow$ serie convergenta

$\hookrightarrow \alpha - 1 < 1 \to \alpha < 2$
$\hookrightarrow$ serie divergenta

$\hookrightarrow \alpha - 1 = 1 \to \alpha = 2$
$\hookrightarrow$ incertitudine

pt $\alpha = 2 \to u_n = \frac{n!}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$

o comparăm la limita $\sum \frac{1}{n}$ = divergent

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ seriile au aceași natură

$\hookrightarrow$ seria $\sum \frac{1}{n+1}$ divergentă

4. Criteriul logaritmic

fie $\sum_{1}^{\infty} u_n \quad u_n > 0$

- daca $\exists\, p \in \mathbb{N}$ si $K > 1$ aî $\forall\, n \geq p > 1$ sa avem:
  $\to \frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln n} \geq K > 1 \Rightarrow$ serie convergenta
- daca $\exists\, p \in \mathbb{N}$ aî $\forall\, n \geq p > 1$ sa avem $\frac{\ln \frac{1}{n}}{\ln n} \leq 1 \Rightarrow$ serie divergenta

forma la limită $-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\ln n}\right) = \ell$ $\begin{cases} \ell > 1 & \text{convergent} \\ \ell < 1 & \text{divergent} \\ \ell = 1 & \text{incertitudine} \end{cases}$

!! daca pt aceeasi serie se aplica criteriul lui Raabe si criteriul logaritmic atunci criteriul logaritmic se aplica la limita => c. logaritmic permite stabilirea naturii unei serii întotdeauna si criteriul lui Raabe are aceasta prop.

criteriul Raabe e mai slab decât cel logaritmic

↳ în plus are loc si egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$

↳ daca a 2a limita există.

Exemple:

!! stabiliti natura seriilor numerice următoare cu discutie dupa parametrul a, $a \in \mathbb{R}$

① $\sum\limits_{1}^{\infty} n^{\ln a}$, $a>0$

② $\sum\limits_{1}^{\infty} a^{\ln n}$; $a>0$