Șiruri de Numere reale

[Fișier 1.]

Definiție: Un șir de numere reale este în funcție $f: N \to R$. Valorile funcției $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ se numesc termenii șirului și $f(n)$ este termenul general al șirului.

Acesta se mai notează și astfel:

- $(a_n)_{n \in N}$
- $(x_n)_{n \in N}$
- $(d_n)_{n \in N}$

⋮

Modalități de definiție a unui șir:

a) Printr-o relație analită

Ex. $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$; $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = 2/3$ ----

b) Printr-o relație de recurență între 2 sau mai mulți termeni consecutivi ai șirului.

Ex. $a_{n+1} = a_n + 2$; a_0 ; și 2
$x_{n+1} = x_n \cdot 2$; x_0 ; 2

Subșir al unui șir

Fie x_n: $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$

↳ x_{2n}: $x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots x_{2n}, \ldots$

↳ x_{2n+1}: $x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots x_{2n+1}$

Mai general: Fie $(K_n)_{n \in N}$, un șir strict crescător de numere naturale.

K_n: $K_0, K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots$
x_n: $x_{K_0}, x_{K_1}, x_{K_2}, x_{K_3}, \ldots, x_{K_n} \ldots$ se numește subșir al șirului dat

---

Operații cu șiruri

Fie (x_n) și (y_n) două șiruri de numere reale:

↳ 1) $(x_n \pm y_n)$: $x_1 \pm y_1$; $x_2 \pm y_2$; ---- ; $x_n \pm y_n$; ---

↳ 2) $(\alpha \cdot x_n)$: $\alpha \cdot x_1$; $\alpha \cdot x_2$; ---- ; $\alpha \cdot x_n$; ----

↳ 3) $(x_n \cdot y_n)$: $x_1 \cdot y_1$; $x_2 \cdot y_2$; ---- ; $x_n \cdot y_n$; ----

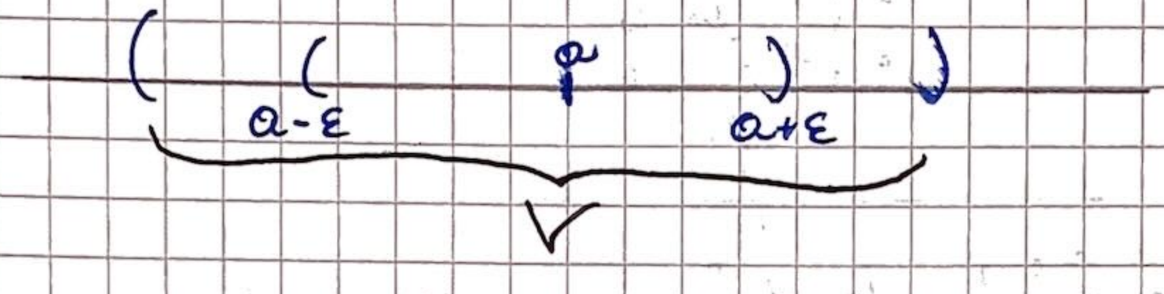
↳ 4) $y_n \neq 0, \forall n \to (x_n / y_n)$: x_1/y_1; x_2/y_2; ---- ; x_n/y_n; ---

© Herlitz

Șiruri convergente

Definiție {Vecinătate a unui șir}: Spunem că V este o vecinătate a unui șir/subșir real $a \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă există un interval al șirului în punctul a în care este inclus în V.

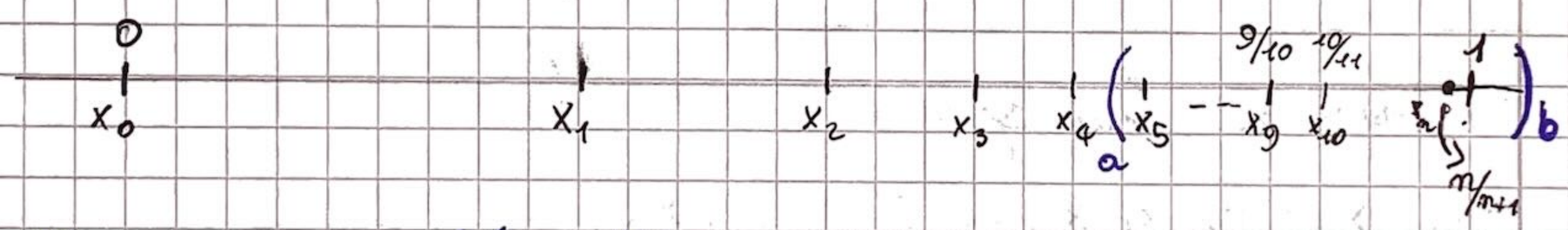
$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ astfel încât } (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$$



O vecinătate a lui $+\infty$ este de forma $(\alpha, +\infty)$; iar a lui $-\infty$ este de forma $(-\infty, \beta)$.

Exemplu: Fie șirul $x_n = n/(n+1)$

n	0	1	2	3	4	5	--	n	$n+1$ --
x_n	0	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$4/5$	$5/6$		$\frac{n}{n+1}$	$\frac{n+1}{n+2}$



$$x_n = \frac{n}{n+1} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fie $V \subset (a, b)$ $\qquad (1-a, b-1) = \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset V \subset (a, b)$$

În afară lui V se află n termeni ai șirului.
În intervalul lui V se află o infinitate de termeni ai șirului.

Ex. $V = (0{,}9 ; 1{,}1)$. În afară lui V $\exists$ un număr finit de termeni din șir. În V sunt tot o infinitate de termeni.

În afara oricărei vecinătăți a lui 1 există întotdeauna un număr finit de termeni a lui x_n și în intervalul său o infinitate de de termeni a lui x_n.

Definiție: Spunem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și limită sa este un număr real x_0 în orice vecinătate V a lui x_0 există o infinitate de termeni ai șirului, exceptând, eventual, un număr finit de termeni.

Definiția cu vecinătăți simetrice.

Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și are ca limită numărul $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un număr natural $n_0(\varepsilon)$ cu proprietatea că pentru orice număr $n \geq n_0(\varepsilon)$ astfel încât relația:

$$|x_n - x_0| < \varepsilon$$

Se va scrie că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

OBSERVAȚIE

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - x_0 < \varepsilon \quad \Big| + x_0 \implies$$

$$\implies x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon \iff$$

$$\iff x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$$

Exemplu Precedent:

$\varepsilon = 0{,}01$; $\quad V = (1 - 0{,}01 ; 1 + 0{,}01) \implies (0{,}99 ; 1{,}01)$

$$x_n \in V \iff 0{,}99 < n/(n+1) < 1{,}01 \quad \Big| \cdot (n+1) \implies$$

$$\implies \underbrace{0{,}99 \cdot n < n}\ < 1{,}01 \cdot n$$

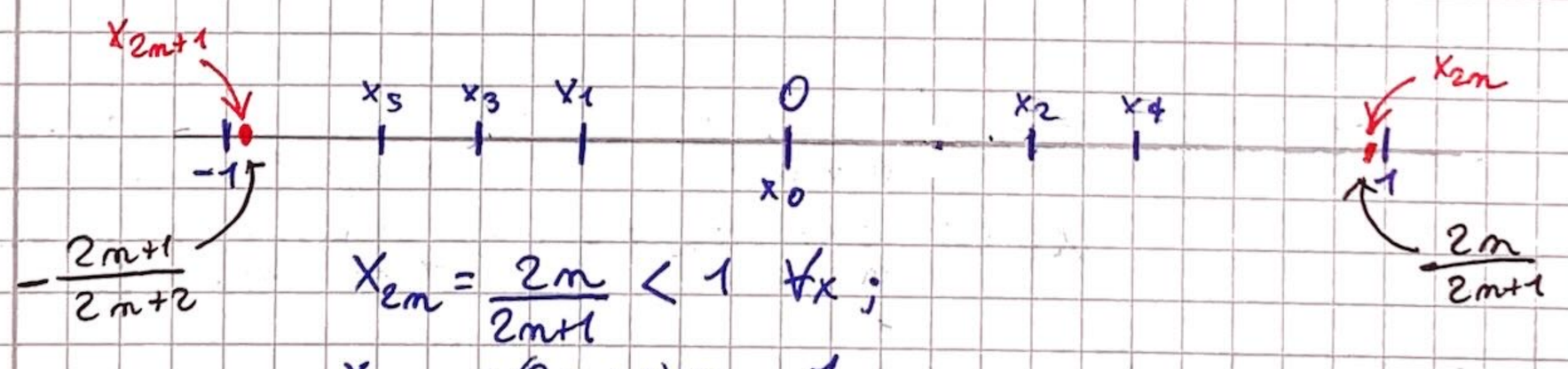
$$0{,}99 \cdot n < n \iff 0 < (1 - 0{,}99)\, n \implies$$

$$\implies 0{,}01 \cdot n > 0$$

Exemplu 2.

$$x_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$$

n	0	1	2	3	4	5	----	n
x_n	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{6}$		



$$x_{2n} = \frac{2n}{2n+1} < 1 \ \forall x;$$

$$x_{2n+1} = \frac{-(2n+1)}{2n+2} > -1$$

OBSERVAȚIE 1

$x_n = \frac{(-1)^2 \cdot n}{n+1}$ nu este convergent. x_n are 2 puncte de limită

$$\begin{cases} a = +1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} \\ b = -1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} \end{cases}$$

© Herlitz

OBS: Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ este convergent $\Leftrightarrow$ mulțimea punctelor sale limită este formată dintr-un singur punct

---

Propoziție: Un șir (x_n) este convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ $\Leftrightarrow$ orice subșir al său este convergent și limita sa este egală tot cu l.

Rezultă că dacă un șir are cel puțin două subșiruri convergente, dar având limite diferite, atunci șirul dat este divergent.

Șirurile care au limită $\pm\infty$ se numesc tot divergente.

Propoziție: Orice șir convergent este mărginit.

Consecință: Dacă șirul x_n este nemărginit, atunci el este divergent.

Propoziție: Dacă un șir este convergent, atunci limita sa este unică.

Teoremă: Din orice șir mărginit se poate extrage un subșir convergent.

Proprietăți:

1) Dacă șirul (x_n), $x_n > 0$, este strict crescător și nemărginit atunci limita sa este egală cu $+\infty$

2) Fie (x_n), $x_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{0_+} = +\infty$

$x_n < 0$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$; $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{0_-} = -\infty$

3) Criteriul Majorării

↳ Dacă $\alpha_n \to 0$, $\alpha_n > 0$ și $|x_n - l| \le \alpha_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = l$

4) Dacă (x_n) și (y_n) sunt convergente, atunci:

4.1) $\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n)$

4.2) $\lim(\alpha \cdot x_n) = \alpha \cdot \lim(x_n)$

4.3) $\lim(x_n \cdot y_n) = (\lim(x_n)) \cdot (\lim(y_n))$

4.4) $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim(x_n) / \lim(y_n)$ $y_n \neq 0$ $\forall n \neq 0$

4.5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^{y_n}\right) = \left(\lim(x_n)\right)^{\lim(y_n)}$

Dacă operațiile au sens

4.6) $\lim |(x_n)| = |\lim(x_n)|$

Cazuri de nedeterminare în calculul limitelor ale șirurilor:

1. $+ \to \infty - \infty$
2. $\cdot \to 0 \cdot \infty$
3. $\div \to 0/0,\ \infty/\infty$
4. $x_n^{y_n} \to 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

Șiruri Remarcabile $x_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$

Șirul exponențial (1)

Dacă:

- $a > 1 \to \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$
- $a = 1 \to \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = \lim\limits_{n\to\infty} = 1$
- $a = (-1, 1) \to \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$
- $a = -1 \to \lim\limits_{n\to\infty} a^n =$ Divergent
- $a < -1 \to \lim\limits_{n\to\infty} a^n =$ Divergent

} NU EXISTĂ

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & a \in (-1, 1) \\ \text{Nu există} & a \leq -1 \end{cases}$$

Șirul Polinomial (2)

$x_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + a_2 n^{k-2} + \dots + a_{k-1} n + a_k;\ a_0 \neq 0,\ k \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{n^k}\right) = \pm\infty\ a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +\infty & a_0 > 0 \\ -\infty & a_0 < 0 \end{cases}$$

Herlitz

Șirurile Raționale (3)

$$x_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0 \cdot n^k + \dots + a_k}{b_0 \cdot n^m + \dots + b_m} \overset{\infty/\infty}{=} \qquad a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k(a_0 + a^1/n + a^2/n^2 \dots + a^n/n^k)}{n^m(b_0 + b^1/n + b^2/n^2 \dots + b^m/b^m)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{k-m} \cdot \left(\frac{a_0}{b_0}\right) = \begin{cases} +\infty \cdot \left(\frac{a_0}{b_0}\right) & k > m \\ \frac{a_0}{b_0} & k = m \\ 0 & m > k \end{cases}$$

Pentru șirurile exprimate cu ajutorul logaritmilor sau radicalelor avem propozițiile:

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a(x_n) = \log\left(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)\right),\ a>0,\ a\neq 1,\ x_n>0$

"Limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei."

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)},\ k\in\mathbb{N}^*,\ x_n\geq 0,\ k\geq 2$

"Limita radicalului este egală cu radicalul limitei."