04.03.2022

(Anul 1 zi)

Aplicații la spațiile vectoriale

Problema nr. 1 Fie spațiul vectorial generat de vectorii $\vec{v_1}=(2,1,11,2)$; $v_2=(1,0,4,-1)$; $v_3=(2,1,5,6)$; $v_4=(11,4,5,5)$. Să se determine dimensiunea sa și o bază a sa.

$v_i \in \mathbb{R}^4$, $(\forall)\ i=\overline{1,4}$

$[v_1, v_2, v_3, v_4] = \{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4 \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{1,4}\}$ = mulțimea tuturor combinațiilor liniare construite cu cei 4 vectori = subspațiul generat de cei 4 vectori.

Dimensiunea acestui subspațiu este dată de nr. vectorilor liniar independenți dintre cei 4 vectori.

Fie o combinație liniară arbitrară a lor =

$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4=(0,0,0,0)$.

Dacă de aici rezultă $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ ⇒ cei 4 vectori sunt liniar independenți și cum numărul lor este egal cu dimensiunea spațiului $(\mathbb{R}^4)$ ⇒ formează chiar o bază.

$\alpha_1(2,1,11,2)+\alpha_2(1,0,4,-1)+\alpha_3(2,1,5,6)+\alpha_4(11,4,5,5)=(0,0,0,0)$

sistem omogen de 4 ec. cu 4 necunoscute

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+11\alpha_4=0 \\ \alpha_1+\alpha_3+4\alpha_4=0 \\ 11\alpha_1+4\alpha_2+5\alpha_3+5\alpha_4=0 \\ 2\alpha_1-\alpha_2+6\alpha_3+5\alpha_4=0 \end{cases}$$

$$\bar{A}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 11 & 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \end{array}\end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -12 & -111 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ :(-4) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 3 & 12 & 111 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$a_{11}=2\neq 0$; $a_{22}=1\neq 0$; $a_{33}=2\neq 0$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 102 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ :6 \\ :(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} \sim$$

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 4$ ⇒ sistemul are sol. unică $= \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$

v_1, v_2, v_3, v_4 sunt liniar independenți $\Rightarrow \dim[\ ] = 4$
$\Rightarrow [v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^4$.

Problema 2. Fie $v_1 = (1, 2, -5)$; $v_2 = (-3, 1, 2)$; $v_3 = (-2, 3, -3)$ din $\mathbb{R}^3$. Verificați dacă sunt liniar independenți. Det. dimensiunea subspațiului generat de cei trei vectori. Dacă cei trei vectori sunt liniar dependenți, să se determine relația de dependență dintre ei.
Fie o combinație liniară arbitrară nulă:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0) \iff$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -13 & -13 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /:7 \\ /:-13 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\alpha_1 & \uparrow\alpha_2 & \uparrow\alpha_3 \end{array}$$

$\operatorname{rang} A = 2$ Nec. pr: α_1, α_2 $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$

$\operatorname{rang} \bar{A} = 2$ Nec. sec: α_3

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

$\operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow S_p[v_1, v_2, v_3]$ are dimensiunea 2

Rel. dintre cei 3 vectori:

$$-\alpha_3 \cdot v_1 - \alpha_3 \cdot v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0) \quad /\alpha_3 = 1$$

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0 \iff \boxed{v_3 = v_1 + v_2}$$

Problema 3. Fie vectorii: $v_1 = (2, 1, -3)$; $v_2 = (-1, 2, 4)$; $v_3 = (3, -4, 1)$.
1) Să se determine dimensiunea subspațiului generat de cei trei vectori. 2) Dacă vectorii sunt liniar independenți să se afle coordonatele vectorului $v = (9, -2, 13)$ în baza acestui subspațiu.

ⓐ: Se va determina rangul matricii construite pe cei trei vectori:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0)$ dacă sistemul are doar soluția nulă $\Rightarrow$ vectorii sunt liniar independenți și deci $\dim Sp[v_1, v_2, v_3] = 3 \iff \{v_1, v_2, v_3\} =$ bază a lui $\mathbb{R}^3$.

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & \vdots & 9 \\ 1 & 2 & -4 & \vdots & -2 \\ -3 & 4 & 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & -11 & -13 \\ 0 & 5 & 11 & 53 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 & 4 & 32 \\ 0 & 5 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 110 & 330 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 5 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & \vdots & 10 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 20 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

rang $A = 3$

rang $\bar{A} = 3$

$13 \cdot 13 = 143$; $13 \cdot 5 = 65$

$\Rightarrow$ sistem compatibil unic determinat.

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ = bază în $\mathbb{R}^3$; în această bază sunt coord. vect $v = (9, -2, 13)$

$\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 3$

$$\begin{cases} 5\alpha_1 = 10 \\ 5\alpha_2 = 20 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{v = 2v_1 + 4v_2 + 3v_3}$

Problema 4. Fie sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + \alpha z + t = -1 \\ x - y + z + \beta \cdot t = \gamma \end{cases}$$

a) Să det. α, β, γ ai. sistemul să fie compatibil dublu nedeterminat.

b) Să se discute după val. param. α, β și γ compatibilitatea sistemului.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \beta & \vdots & \gamma \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 2\alpha-1 & 3 & \vdots & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2\beta+1 & \vdots & 2\gamma-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3+2\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2\alpha-1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2\alpha+2 & 6\beta+6 & 6\gamma-6 \end{pmatrix}$$

Dacă $\alpha = -1$ și $\beta = -1$ și $\gamma = 1 \Rightarrow$ rang A = rang $\bar{A} = 2 \Leftrightarrow$ sistem compatibil dublu nedeterminat.

Dacă $\alpha = -1$ și $\beta = -1$ și $\gamma \neq 1 \Rightarrow$ rang $A = 2$ și rang $\bar{A} = 3 \Rightarrow$ sistem incompatibil.

Dacă $\alpha = -1$ și $\beta \neq -1 \Rightarrow$ rang $A = 3$ = rang $\bar{A} \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat; n.p.: x, y, t iar z = nec. secundară.

Dacă $\alpha \neq -1$ și $\beta = -1 \Rightarrow$ rang $A = 3$ = rang $\bar{A} \Rightarrow$ sistem e compatibil, simplu nedeterminat, nec. pr.: x, y, z; t = nec. sec., $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

Alte exemple la spații vectoriale

P.P. 1.5.3/pag 91

a) Să se arate că vectorii următori sunt liniar independenți în $\mathbb{R}^3$.

$$V_1=(0,2,1);\quad V_2=(1,0,1);\quad V_3=(1,3,5)$$

$\Leftrightarrow$ orice combinație liniară nulă a celor trei vectori are loc $\Leftrightarrow$ toți coeficienții combinației sunt nuli.

Fie $\alpha_1\cdot V_1+\alpha_2\cdot V_2+\alpha_3\cdot V_3=(0,0,0)$

$$\alpha_1(0,2,1)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(1,3,5)=(0,0,0)$$

$$(0,2\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_2,0,\alpha_2)+(\alpha_3,3\alpha_3,5\alpha_3)=(0,0,0)$$

$$(0+\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_1+0+3\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&3\\1&1&5\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\V_1&V_2&V_3\end{matrix}\end{array}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sistem omogen, din 3 ec. cu trei necunoscute, fiecare coloană a sa fiind unul din cei trei vectori

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&0\\2&0&3&0\\1&1&5&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&0\\2&0&3&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&5&0\\0&-2&-7&0\\0&1&1&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&-3&0\\0&-2&-7&0\\0&0&5&0\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c}-10&0&0&0\\0&-10&0&0\\0&0&5&0\end{array}\right)\\ \begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\end{array}\Rightarrow\begin{cases}-10\cdot\alpha_1=0\\ -10\alpha_2=0\\ 5\alpha_3=0\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\alpha_3=0\end{cases}\rightarrow$ V_1, V_2, V_3 sunt liniar independenți; $V_1, V_2, V_3\in\mathbb{R}^3$. Nr vectorilor fiind, egal cu dimensiunea spațiului $\mathbb{R}^3\Rightarrow$ cei trei vectori formează și un sistem de generatori, deci o bază.

<u>Problema 3</u> Arătați că vectorii: $v_1=(1,2,2,1)$, $v_2=(5,6,6,5)$; $v_3=(-1,-3,4,0)$; $v_4=(0,4,-3,-1)$ sunt liniar dependenți și determinați relația de dependență dintre ei. $\underline{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4=0_4}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & -3 & 4 & 0\\ 2 & 6 & 4 & -3 & 0\\ 1 & 5 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & -4 & 6 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 9 & -20 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -28 & 28 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /:-28\\ /:-4\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 9 & -2 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 0 & 7 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \lambda$

$\Rightarrow$ rang $A = 3 =$ rang $\bar{A}$ $\Rightarrow$ sist. comp. nedeterminat

Nec. pr. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

Nec. sec. $\alpha_4 = \lambda$

$$\begin{cases} -4\alpha_1 = -7\lambda \\ -4\alpha_2 = -3\lambda \\ \alpha_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{7}{4}\lambda \\ \alpha_2 = \frac{3}{4}\lambda \\ \alpha_3 = \lambda \\ \alpha_4 = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{7}{4}\cdot v_1 + \frac{3}{4}\cdot v_2 + v_3 + v_4\right)\cdot \lambda = (0,0,0,0) \quad /:\lambda$$

$$\boxed{7v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 4v_4 = (0,0,0,0)}$$