Seminar V. Cornaciu | 00000100
08/03/2022

Seminar 4

Ex 1 Se consideră spațiul vectorial real $V=\mathbb{R}^3$ și

$x_1=(2,1,-1)$ $x_2=(1,-2,1)$ $x_3=(-1,1,2)$

$\{x_1,x_2,x_3\}$ Bază a lui $\mathbb{R}^3$?

Sol.

$\{x_1,x_2,x_3\}$ LI + SG

LI Fie $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3=0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \alpha_1(2,1,-1)+\alpha_2(1,-2,1)+\alpha_3(-1,1,2)=(0,0,0)$

$\Rightarrow 2\alpha_1+\alpha_1-\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_2+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_3+2\alpha_3=(0,0,0)$

$\Rightarrow (2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)+(-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_2)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0 \\ \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\alpha_2-2\alpha_3-\alpha_3=0 \\ \alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3 \\ -2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_2+2\alpha_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha_3-2\alpha_3-\alpha_3=0 \\ \alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3 \\ \alpha_2=\alpha_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3=0 \\ \alpha_1=\alpha_3 \\ \alpha_2=\alpha_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_3=0 \\ \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases}$$ Liniar Independente

$$\det=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -8-1-1+2-2-2=-12\neq 0$$

$\Rightarrow$ Este un sistem de generatori

$\Rightarrow$ Este o bază în $\mathbb{R}^3$

Ex 2 Se dau vectorii $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,2,3)$
Să se arate că formează o bază în $\mathbb{R}^3$ și să se determine coordonatele vectorului $x = (5,-1,1)$

Vectorii sunt L.i

$(5,-1,1) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,2) + \alpha_3(1,2,3) \Rightarrow \alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_3 = -6$

$\Rightarrow x = 3v_1 + 8v_2 - 6v_3$

Ex 3 a) Ce condiții trebuie să îndeplinească $\lambda \in \mathbb{R}$ ai vectorii următori să formeze o bază în $\mathbb{R}^3$

$v_1 = (1,\lambda,0)$, $v_2 = (\lambda,3,1)$, $v_3 = (1,0,\lambda)$

b) Pentru $\lambda = 2$ să se determine relația de dependență dintre cei 3 vectori

SOL a) $\{v_1, v_2, v_3\}$ Bază în $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \operatorname{rag}\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda^2 & -\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 3-\lambda^2 & -\lambda \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^3-4\lambda) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-4) \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0, -2, 2$

SOL b) $\lambda = 2 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ LI

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(2,3,1) + \alpha_3(1,0,2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} +\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_3 &= \alpha \\ \alpha_1 &= 3\alpha \\ \alpha_2 &= -2\alpha \end{aligned} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad 3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \rightarrow$ pentru $\alpha = 1$ $\quad v_3 = -3v_1 + 2v_2$

Ex 4 Să se determine dimensiunea și o bază pentru sub-spațiul generat de vectorii

$$v_1 = (2,1,2) \quad v_2 = (1,0,4) \quad v_3 = (3,3,-6) \in \mathbb{R}^3$$

SOL

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 6 - 24 + 6 = 0 \Rightarrow \text{rang} = 2$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sunt liniar dependenți

$W \subset (V,+,\cdot)$ se numește sub-spațiu vectorial lui V dacă $(W,+,\cdot)$ sp. vectorial

$\Leftrightarrow \quad x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$

$\quad\quad \alpha \in K, y \in W \Rightarrow \alpha \cdot y \in W$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$rg(B) = 2 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ o bază a sub-spațiului respectiv

$W = Sp(\{v_1, v_2\})$