Seminar V. Cornaciu

29/03/2022

Seminar 7

Matricea Asociată a unei aplicații liniare în baza canonică și într-o bază oarecare

Def: Fie $f: V_1 \to V_2$ o apl. liniară, $\dim V_1 = n$, $\dim V_2 = m$

$B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza lui V_1

$B_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ baza lui V_2

Matricea $A = (a_{ij})_{i,j}$ care are pe coloane ~~vec~~ coord. vectorilor $f(e_1), \dots, f(e_n)$ în baza B_2, s.n. matricea asociată lui f în bazele B_1 și B_2

Exp: Fie $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -4x_1 - 2x_2)$ apl. lin.

$B_c^{\mathbb{R}^2} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

$T(e_1) = T(1,0) = (1-0, -4-0) = (1,-4) = \underbrace{1}\cdot(1,0) \underbrace{-4}(0,1)$

$T(e_2) = T(0,1) = (+0-1, -0-2) = (-1,-2) = \underbrace{-1}\cdot(1,0) \underbrace{-2}(0,1)$

$$A_T^{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Exp: Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3)$

$B_1 = \{e_1 = (1,0,0)\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1)\}$

$B_2 = \{f_1 = (1,0)\ f_2 = (0,1)\}$

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,1) = 1\cdot f_1 + 1\cdot f_2$

$T(e_2) = T(0,1,0) = (1,0) = 1\cdot f_1 + 0\cdot f_2$

$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,1) = 0\cdot f_1 + 1\cdot f_2$

$$A_T^{B_c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OBS: Dacă $f: V \to V$ apl liniară

$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $B_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ baze ale lui V

$$A_f^{B_2} = C^{-1} \cdot A_f^{B_1} \cdot C$$

$A_f^{B_1}$ = matricea asociată lui f în baza B_1

$A_f^{B_2}$ = " " " " " " B_2

C = matricea de trecere de la B_1 la B_2

Exp: Fie $B_1 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$, $B_2 = \{f_1 = (1,2), f_2 = (-1,3)\}$ două baze lui $\mathbb{R}^2$ și apl. exp 1.

Vrem $A_T^{B_2} = ?$

$$A_T^{B_2} = C^{-1} \cdot A_T^{B_1} \cdot C$$

$$A_T^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_T^{B_2} = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & -5/5 \\ -6/5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{5} & -\frac{14}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Ex 1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(x_1, x_2) = (-2x_1 + x_2, -4x_1 + 3x_2)$

a) Să se arate că T este apl. liniară

b) Să se determine Ker, Im T și câte o bază fiecare

c) Teorema Rang Defect

d) Să se determine matricea asociată lui T în bază can. în $\mathbb{R}^2$

e) Să se determine matricea asociată lui T în baza $B = \{v_1 = (-1,2), v_2 = (-2,2)\}$

a) dem $T(x+y)=T(x)+T(y)$

$T(x+y) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = (-2(x_1+y_1)+(x_2+y_2), -4(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))$

$= (-2x_1-2y_1+x_2+y_2, -4x_1-4y_1+3x_2+3y_2) =$

$= (-2x_1+x_2, -4x_1+3x_2) + (-2y_1+y_2, -4y_1+3y_2) = T(x)+T(y)$

dem $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$T(\alpha x) = (-2\alpha x_1 + \alpha x_2, -4\alpha x_1 + 3\alpha x_2) = (\alpha(-2x_1+x_2), \alpha(-4x_1+3x_2)) =$

$= \alpha(-2x_1+x_2, -4x_1+3x_2) = \alpha T(x)$

-> Apl liniară

b) $\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \rightarrow \operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$

$\hookrightarrow \operatorname{Dim} = 0$

$\operatorname{Im} T = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid T(x) = y \ \forall x \in \mathbb{R}^2\}$

$\operatorname{Im} T = \{(-2x_1+x_2, -4x_1+3x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1\underbrace{(-2,-4)}_{u_1} + x_2\underbrace{(1,3)}_{u_2}\}$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow$ rank 2 $\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ bază în $T \Rightarrow \operatorname{Im} T = Sp(u_1, u_2)$

$\operatorname{Dim} \operatorname{Im} T = 2$

c) $\operatorname{Dim} \mathbb{R}^2 = \operatorname{Dim} \operatorname{Ker} T + \operatorname{Dim} \operatorname{Im} T$

$\quad 2 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 2$

✓

d) $B_c = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

$T(e_1) = (-2\cdot 1 + 0, -4\cdot 1 + 3\cdot 0) = (-2,-4) = -2\cdot e_1 - 4\cdot e_2$

$T(e_2) = (-2\cdot 0 + 1, -4\cdot 0 + 3\cdot 1) = (1, 3) = 1\cdot e_1 + 3e_2$

$$A_T^{B_c} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

e) $B=\{v_1, v_2\}$ $v_1=(-1,2)$ $v_2=(-2,2)$

$T(v_1)=(2+2, 4+6)=(4,10)=\alpha_1(-1,2)+\alpha_2(-2,2)=14(-1,2)-9(-2,2)$

$T(v_2)=(4+2, 8+6)=(6,14)=\beta_1(-1,2)+\beta_2(-2,2)=20v_1-13v_2$

$\alpha_1=14$ $\alpha_2=-9$ $\beta_1=20$ $\beta_2=-13$

$$A_T^B=\begin{bmatrix}14 & 20\\ -9 & -13\end{bmatrix}$$

$$A_T^B=C^{-1}\cdot A_T^{B_c}\cdot C$$

$B_c \xrightarrow{C} B \rightarrow C=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A_T^B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 4\\ 4 & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 20\\ -9 & -13\end{bmatrix}$$

Ex 2 $f: R^3 \to R^3$ $f(x_1,x_2,x_3)=(3x_1-x_2+x_3, -x_1+5x_2-x_3, x_1-x_2+3x_3)$

a) $A_f^{Be^{R_3}}=?$

b) $A_f^B=?$ $B=\{v_1=(1,2,1)\ v_2=(2,1,3)\ v_3=(1,1,1)\}$

a) $f(e_1)=3e_1-e_2+e_3$

$f(e_2)=-e_1+5e_2-e_3$

$f(e_3)=e_1-e_2+3e_3$

$$A_f^{B_c}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ $A_f^{BC} = \begin{bmatrix} +3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ +1 & -1 & +3 \end{bmatrix}$

$$A_f^{B} = C^{-1} \cdot A_f^{BC} \cdot C = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & +10 & 3 \end{bmatrix}$$