Criterii de Convergență pentru șiruri de numere reale

[Fișier 2]

I) Aplicații la criteriul majorării

1) Să se arate că dacă $a \in (-1,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a^n = 0$.

Știm că $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, dacă $a \in (-1,1)$ {șirul exponențial}

În exemplul dat avem o nedeterminare $\infty \cdot 0$. astfel:

$|n \cdot a^n - 0| = n \cdot |a^n| = n \cdot |a|^n$. unde $a \in (-1,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow |a| \in [0,1)$ deci $a \leq |a| < 1$. Rezultă că există un unic număr pozitiv, $r > 0$, astfel încât

$|a| = \frac{1}{1+r} \Rightarrow$ avem: $|n \cdot a^n - 0| = n \cdot |a|^n < n \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{n}{1 + C_n^1 \cdot r + C_n^2 \cdot r^2 + \dots + C_n^n \cdot r^n} < \frac{r}{C_n^2 \cdot r^2} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} \cdot r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n-1}$$

Dar, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n-1} = 0$. Deci avem:

$|n \cdot a^n - 0| < \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n-1}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{n-1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a^n = 0$ conform criteriul majorării

2) Să se arate că dacă $a \in (-1,1)$ și $K > 0$, fixat, $K \in \mathbb{N}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^K \cdot a^n = 0$

avem: $|n^K \cdot a^n| = n^K \cdot |a^n| = n^K \cdot |a|^n$. Analog, dacă $a \in (-1,1)$, rezultă că există un unic număr real $r > 0$ astfel încât

$|a| = \frac{1}{1+r} < 1$. Rezultă că:

$|n^K \cdot a^n - 0| = n^K \cdot |a|^n < n^K \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \Rightarrow$

C_n → NO LOG. NATURAL.

$$\Rightarrow \frac{n^K}{1 + C_n^1 \cdot r + \dots + C_n^K r^K + C_n^{K+1} r^{K+1} + \dots + C_n^n r^n} <$$

$$\frac{n^K}{C_n^{K+1} \cdot r^{K+1}} \Rightarrow \frac{n^K}{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-K)}{(p+n)!} \cdot r^{K+1}} =$$

$$\Rightarrow \frac{(K+1)!}{r^{K+1}} \cdot \frac{n^K}{n(n-1)(n-2)\dots(n-K)}$$

Produsul $n(n-1)\dots(n-K)$ are $K+1$ factori, deci este de gradul $K+1$ în n.

Berlitz

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)} = 0$, deci, conform criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot a^n = 0$, $\forall a \in (-1,1)$ și $k>0$, fenit.

3) Să se calculeze limitele:

— a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^2}$ avem:

$$\left|\frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^2} - 0\right| \le \frac{|\cos 1| + \dots + |\cos n|}{n^2} < \frac{n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cos 1 + \dots + \cos n}{n^2} = 0$$

— b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} \overset{\infty}{=} \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$; avem cazul $k=2$ și $a = \frac{1}{3} < 1$

— c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1 + 2\cdot \sin 2 + \dots + 2^{n-1}\cdot \sin n}{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \dots (n+1)\cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$$|x_n - 0| = |x_n| \le \frac{|\sin 1| + 2\cdot|\sin 2| + \dots + 2^{n-1}\cdot|\sin n|}{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \dots + (n+1)\cdot 3^n} =$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}}{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \dots + (n+1)\cdot 3^n} = \frac{(2^n - 1)/(2-1)}{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \dots + (n+1)\cdot 3^n} =$$

$$\Rightarrow \frac{2^n - 1}{1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \dots + (n+1)\cdot 3^n} < \frac{2^n - 1}{(n+1)\cdot 3^n} = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \text{și } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

— d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}$, $n \ge 1$

Se demonstrează că prin inducție sau prin altă metodă că

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)} = 0$$

— e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} \overset{\infty}{=} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1\right)} = \frac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

— f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + n^2}{2^n + n} \overset{\infty}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n(1 + n^2/2^n)}{2^n(1 + n/2^n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1$ Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim\limits_{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ și

analog $\lim n/2^n = 0$

II) Trecerea la limită în inegalități și "Criteriul clештelui".

a) Dacă (x_n) și (y_n) sunt două șiruri convergente și $x_n \le y_n$, $\forall n \in N$ (dar, expectând, eventual, un număr finit de termeni), atunci și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

Enunț analog și dacă $x_n \ge y_n$ $\forall n \in N \Rightarrow \lim x_n \ge \lim y_n$

1) Criteriul clештelui: Fie $(U_n)_{n\in N}$, $(x_n)_{n\in N}$ și $(V_n)_{n\in N}$ trei șiruri care au proprietățile:

1°) $U_n \le x_n \le V_n$ $\forall n \in N$

2°) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} V_n = \ell$

Atunci șirul (x_n) are aceeași limită, ℓ; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$

Sugestiv, se vede astfel:

$$U_n \le x_n \le V_n$$
$$\searrow \Downarrow \swarrow$$
$$\ell$$

1°) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = ?$

Avem $U_n = 0 \le \frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdots2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n} < \frac{2\cdot\cancel{2}\cdot2\cdot2\cdots2}{1\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot3\cdots3} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = V_n$

Deci $0 \le \frac{2^n}{n!} < 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$, $\forall n \in N$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$, (șirul exponențial (a^n), $a \in (-1,1)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 0$)

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$; Șirul are n termeni.

Fie termenul $\frac{n}{n^2+K}$, $1 \le K \le n$.

Putem scrie:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{n}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{n}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+2} < \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{n}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+K} < \frac{n}{n^2+1} \\ \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+n} < \frac{n}{n^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Adunăm toate relațiile, înmulțim cu membrul n și obținem:

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n} < x_n < n\cdot\frac{n}{n+1};$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} < x_n < \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\to 1 \quad \to \lim x_n = 1$$

Comentăm: Fie, din nou, șirul exercițiului precedent.

X_n = o sumă formată din n termeni. Observăm că limita fiecărui termen este egală cu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+K} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{K}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{K}{n^2}} = 0 \cdot 1 = 0,$$

$\forall K$ a.î. $1 \le K \le n$.

Și totuși am arătat că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1, \neq 0$.

Aceasta se întâmplă deoarece atunci când $n \to \infty$ și numărul termenilor din șirul X_n tinde către $+\infty$, astfel că șirul X_n reprezintă o nedeterminare de tipul $(0 \cdot \infty)$, unde 0 este limita fiecărui termen, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+K} = 0$, iar $+\infty$ = numărul termenilor, $n \to \infty$

Deci, limita sumei de șiruri = suma limitelor de șiruri, dacă suma limitelor are sens (nu este o nedeterminare) și dacă numărul termenilor sumei este limit.

3) $$\lim_{X_n\to\infty} \frac{[x] + [3^2 \cdot x] + [3^2 x] + \dots + [(2n-1)^2 \cdot x]}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R}, \ [\alpha]: \text{partea întreagă a numărului } \alpha.$$

Din definiția părții întregi a unui număr real avem:

$$x - 1 < [x] \le x$$
$$3^2 \cdot x - 1 < [3^2 x] \le 3^2 x$$
$$\dots$$
$$(2n-1)^2 x - 1 < [(2n-1)^2 x] \le (2n-1)^2 x$$

$$X_n = [x] + [3^2 \cdot x] + \dots + [(2n-1)^2 \cdot x]$$

$$\oplus \quad x\left[1 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2\right] - n < X_n \le x\left[1 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2\right]$$

Dar, $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{n(4n^2-1)}{3} - n}{n^3} \cdot x < \frac{X_n}{n^3} \le x \cdot \frac{n(4n^2-1)}{3n^3}$$

$$\frac{4x}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3 - n}{3n^3} - \frac{n}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3(4 - n/n^3)}{3n^3} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{4}{3}$$

④ $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$

Arătăm că $0 < x_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicând teorema clештelui va rezulta că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Pornim de la inegalitatea evidentă:

$$4k^2-1 < 4k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow (2k-1)(2k+1) < (2k)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} < 1, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$k=1$: $\dfrac{1\cdot 3}{2^2} < 1$

$k=2$: $\dfrac{3\cdot 5}{4^2} < 1$

$k=2$: $\dfrac{5\cdot 7}{6^2} < 1$

- - - - - -

$k=n$: $\dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} < 1$

Înmulțind n coloane rezultă:

$$\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} < 1$$

$$\frac{1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2\cdot(2n+1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot\sqrt{(2n+1)}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} < 1 \ \Big|: \sqrt{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

---

② Criteriul Cesaro - Stolz

Fie șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu proprietățile:

a) $y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) y_n este strict crescător și nemărginit ($y_n \to \infty$)

c) Există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \ell$

Atunci există și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$

Criteriul se utilizează pentru calculul unei limite de șiruri în cazul unor nedeterminări de formă $\frac{\infty}{\infty}$, când nu se pot aplica alte proceduri de eliminare a nedeterminării.

© Berlitz

1) $a_n = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \dfrac{x_n}{y_n}$. Sunt îndeplinite toate ipotezele din enunț ($\lim 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\dots\frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$) vom studia la capitolul serii numerice.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+}{\sqrt{n+1}+}$

$\dfrac{-(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}})}{-\sqrt{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(n+1-n)} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = 2$

2) $a_n = \dfrac{1+1/2+1/3+\dots+1/n}{\ln n}$. Vom determina că $\to$

$\lim\limits_{n\to\infty} (1+1/2+1/3+\dots+1/n) = +\infty$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+1/2+1/3+\dots+1/n+1/n+1-(1+1/2+\dots+1/n)}{\ln(n+1)-\ln n}$

$= \lim\limits_{\infty} \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\ln\frac{n+1}{n}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\cdot\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim \dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{\ln e} = 1$

3) $a_n = \dfrac{1^p+3^p+\dots+(2n-1)^p}{n^{p+1}}$, $p\in\mathbb{N}^*$; Sunt îndeplinite condițiile din enunț

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+3^p+\dots+(2n+1)^p+(2n+1)^p-(1^p+3^p+\dots+(2n-1)^p)}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^p}{\cancel{n^{p+1}}+C_{p+1}^1\cdot n^p+C_{p+1}^2\cdot n^{p-1}+\dots+C_{p+1}^p\cdot n+C_{p+1}^{p+1}-\cancel{n^{p+1}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)^p+C_p^1\cdot(2n)^{p-1}+\dots+1}{n^p\left(C_{p+1}^1+C_{p+1}^2\cdot\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n^p}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^p}\left(2^p+C_p^1\cdot\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{(2n)^p}\right)}{\cancel{n^p}\left(C_{p+1}^1+C_{p+1}^2\cdot\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n^p}\right)} = \dfrac{2^p}{C_{p+1}^1} = \dfrac{2^p}{C_{p+1}^1} = \dfrac{2^p}{p+1}$

S-a utilizat dezvoltarea cu binomul lui Newton a expresiilor: $(2n+1)^p$ și $(n+1)^{p+1}$

3) Criteriul Raportului {Sau criteriul lui d'Alembert}

Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietățile:

a) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$
c) $l \in [0, 1)$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Aplicații:

Să se arate că are loc următorul șir de inegalități:

$\log_a n \ll n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, unde

$a > 1 \qquad k > 1 \qquad a > 1$

prin simboluri se înțelege "mult mai mic". Vom spune că $x_n \ll y_n$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

* Cesaro Stolz

Vom calcula următoarele limite:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \{C-S\}^* \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a(n-1) - \log_a n}{n+1-n} =$

$= \log_a \frac{n+1}{n} = \log_a 1 = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^k} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad k>1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ {a fost calculată la începutul secției

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 0$ Aplicăm criteriul raportului

Fie $x_n = \frac{a^n}{n!} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} = 0 < 1$

$\Rightarrow \lim x_n = 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Fie $x_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$

$e = 2{,}718$ Baza logaritmului natural

© Herlitz

Conform criteriului raportului $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

OBS | Criteriul se poate aplica și pentru calculul:

$\hookrightarrow \lim\limits_{\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

4) Criteriul rădăcinii {Sau criteriul Cauchy-D'Alembert}

Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu proprietățile:

a) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

Atunci șirul $(\sqrt[n]{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și avem aceeași limită.

$\hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+1}{x_n}$

Exemple:

1) $y_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ (0^0 = nedeterminare)

Fie $x_n = n > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

2) $y_n = \sqrt[n]{a_0 \cdot n^k + a_1 \cdot n^{k-1} + \dots + a_{k-1} \cdot n + a_k} = \sqrt[n]{P_k(n)}$, unde,

deci $P_k(n)$ = polinom de gradul k, cu $k \geq 1$, k fiind.

Calculăm $\lim\limits_{\infty} \frac{P_k(n+1)}{P_k(n)} = \lim\limits_{\infty} \frac{a_0 \cdot (n+1)^k + \dots + a_k}{a_0 \cdot n^k + \dots + a_k} = 1$

(raportul a două polinoame de aceeași grad, rezultă că:

$\lim\limits_{\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$

c) $y_n = \sqrt[n]{n!}$; Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \overset{\infty}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{0^0}{=} ?$

Fie $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{e} < 1$ | calculată mai în spe le cu criteriul raportului

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0 \text{, conform criteriul raportului} \\ \lim\limits_{\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{e} \text{, conform criteriul rădăcinii} \end{cases}$$

5) Criteriul lui Weierstrass.

a) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ este crescător și mărginit superior, atunci șirul este convergent și limita sa este marginea superioară a mulțimii valorilor șirului;

b) Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ este decrescător și mărginit inferior, atunci (x_n) este convergent și limita sa este egală cu marginea inferioară a mulțimii valorilor șirului.

Într-o formă mai ușor de memorat, criteriul se enunță astfel: Dacă șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton și mărginit, atunci (x_n) este convergent.

Acest criteriu se aplică de cele mai multe ori la șirurile definite prin relațiile de recurență.

Exemple

$$U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

MONOTONIA: $U_{n+1} - U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Deci șirul U_n este strict crescător.

Mărginirea superioară:

Avem: $n(n-1) < n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} \ \forall n \geq 2$

$n=2$: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2}$

$n=3$: $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3}$

$n=4$: $\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3\cdot 4}$

$\vdots$

$n-1$: $\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{(n-2)(n-1)}$

n: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$(+)$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Deci, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Relația arată că șirul este mărginit superior de numărul 2.

În concluzie, șirul este crescător și mărginit superior, deci este convergent.

Limita sa a fost calculată prima dată de matematicianul Leonard Euler și este egală cu $\frac{\pi^2}{6}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

Șirul Numărului

S-a demonstrat în clasa a-XI-a că șirul de numere raționale $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este convergent și limita s-a notat cu e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$, care este nr. irațional.

Numărul e a fost luat ca bază a log. naturali: $\log_e x=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

Alte șiruri remarcabile

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, cu proprietatea: $\lim_{n\to\infty} x_n=0$

Se demonstrează că următoarele șiruri sunt convergente și au limitele egale cu valorile precizate:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}=\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}=1$

b) $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$ $\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a$ $\quad\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n}=r.$

c) Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n=\pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)=e$

Șir Fundamental {Șir Cauchy}

În definiția unui șir convergent, după cum am văzut, intervine noțiunea de limită. Definiția limitei este utilă atunci când reușim să o calculăm. Importanța teoretică a definiției convergenței și a limitei este foarte mare, aflându-se la baza analizei matematice.

Matematicianul francez Augustin Louis-Cauchy a dat o definiție echivalentă a unui șir convergent în care nu mai intervine limita șirului, ci numai termenii săi.

Definiție: Un șir $(a_n)_{n\in N}$ se numește șir fundamental sau șir Cauchy dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0(\varepsilon)$ astfel încât pentru $m, n \geq n_0(\varepsilon)$, $m, n \in N$ avem

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

O formulare echivalentă este următoarea:

Șirul $(a_n)_{n\in N}$ se numește șir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0(\varepsilon) \in N$ a.î. $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ și $\forall p \geq 1$, $p \in N$, să avem

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

În definiția șirului Cauchy se afirmă că începând de la un anumit rang, $n_0(\varepsilon)$, distanța dintre doi termeni oarecare ai șirului $(a_n)_{n\in N}$ este mai mică decât orice număr $\varepsilon > 0$

Rezultatul fundamental demonstrat cu ajutorul șirului de tip Cauchy este următorul:

Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru șiruri numerice.

Un șir $(a_n)_{n\in N} \in R$ este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental (șir Cauchy)

Criteriul lui Cauchy ne permite să precizăm dacă un șir este convergent, fără a-i cunoaște limita. Criteriul are o deosebită importanță teoretică și stă la baza a numeroase rezultate fundamentale din capitolele de șiruri numerice, șiruri și serii de funcții în spațiile R, C, R^n, C^n, etc.

© Herlitz

Exemple:

① Demonstrați că șirul cu termenul general $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ este șir Cauchy și să se calculeze și limita sa.

Vom demonstra că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface definiția șirului Cauchy.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Trebue să arătăm că putem găsi întotdeauna un număr natural $n_0(\varepsilon)$ {care depinde de ε} începând de la care distanța dintre oricare doi termeni ai șirului poate fi făcută mai mică decât orice $\varepsilon > 0$.

Fie $|a_{n+p} - a_n|$, $n\in\mathbb{N}$, $p\geq 1$ aleșe arbitrar. AVEM:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \dots + \frac{1}{[2(n+p)-1]\cdot[2(n+p)+1]} - \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n-3)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+3)} + \dots + \frac{1}{(2n+2p-1)(2n+2p+1)}$$

Prelucrăm această expresie utilizând descompunerea în fracții simple ai termenului general ai șirului:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{A(2n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$\Leftrightarrow A(2n+1) + B(2n-1) = 1, \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow n(2A+2B) + A - B = 1 \Leftrightarrow 2(A+B) = 0$ și $A - B = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Deci: $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Verificare:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2n+1-2n+1}{(2n-1)(2n+1)}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Rezultă că:

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2n+1} - \cancel{\frac{1}{2n+3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2n+3}} - \cancel{\frac{1}{2n+5}}\right) + \dots\right.$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{2n+5}} - \cancel{\frac{1}{2n+7}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{2n+2p-3}} - \cancel{\frac{1}{2n+2p-1}}\right)$$

$$\left. + \left(\cancel{\frac{1}{2n+2p-1}} - \frac{1}{2n+2p+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2p+1}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \cancel{\frac{1}{2n+2p+1}} + \right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{1}{2n+2p+1}}\right) = \quad \forall p \geq 1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n+1} < \varepsilon$$

Am pus condiția ca $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ pentru a cerceta dacă putem determina un rang, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, începând de la care ($\forall n \geq n_0(\varepsilon)$) să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ $\forall p \geq 1$.

Condiția pentru $p \geq 1$ s-a rezolvat prin majorarea făcută anterior.

Mai departe avem:

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Rightarrow 2(2n+1) > \frac{1}{3};\ 2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$2n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1;\quad n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right).$$

Fie $n_0(\varepsilon)$, oricât ar fi de mic, putem determina acest rang, $n_0(\varepsilon)$.

Ex. $\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow n_0(0{,}1) = 3$

$$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)\right] + 1$$

Fie acum $n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow 2(2n+1) > 2(2n_0(\varepsilon)+1) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2(2n_0(\varepsilon)+1)} < \varepsilon$$

© Berlitz

Deci, pentru $\forall n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)\right] + 1$, vom avea, cu atât mai mult:

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2(2n_0(\varepsilon)+1)} < \varepsilon, \ \forall p \geq 1$$

$\Rightarrow$ Șirul (a_n) este șir Cauchy, deci este convergent.

În acest exemplu putem calcula și limita sa:

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} \dots + \cancel{\frac{1}{2n-3}} - \cancel{\frac{1}{2n-1}} + \cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$