07. 01. 2021

Anul I zi

Integrala dublă

este, de asemenea, o extensie naturală a integralei lui Riemann. Integrala dublă se definește pe mulțimi plane din $\mathbb{R}^2$ din funcții de două variabile: fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D = o mulțime compactă (închisă și mărginită) din $\mathbb{R}^2$ a cărei frontieră este o curbă închisă alcătuită dintr-o reuniune finită de curbe netede. Se demonstrează că o astfel de mulțime are arie.

Integrala dublă din funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se definește în mod analog cu integrala simplă Riemann a unei funcții de o singură variabilă și se notează prin

$$I = \iint_D f(x,y)\cdot dx\,dy.$$

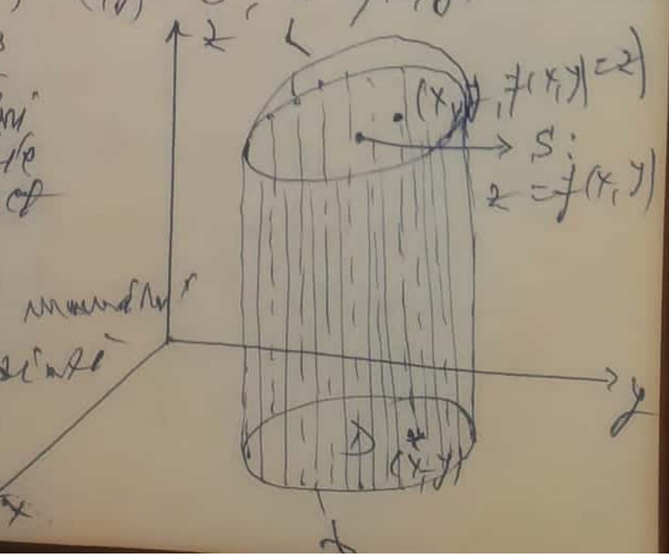
Valoarea sa este un număr și are o semnificație specifică în funcție de natura aplicației în care apare. D s.n. domeniul de integrare iar expresia $dx \cdot dy$ se numește element de arie în planul xoy.

Dacă presupunem că $f(x,y) \geq 0$ pe D și f este o funcție continuă pe D, atunci graficul său, definit prin:

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in D;\ z = f(x,y)\}$$ este

o suprafață S din $\mathbb{R}^3$ situată deasupra planului xoy și a cărei proiecție pe planul xoy este exact domeniul D.

În această interpretare mărimea $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ reprezintă volumul corpului din $\mathbb{R}^3$



cilindric, cu generatoarele paralele cu axa Oz, cu baza = domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ din planul xOy și mărginit superior de suprafața de ecuație $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$

Dacă $f(x,y) \equiv 1$ pe D, atunci $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = $ $= \text{aria}(D)$.

Din definiția integralei duble rezultă următoarele proprietăți de integrabilitate și ale integralei duble:

1°. Liniaritatea:

$$\iint_D \left(\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)\right) dx\,dy = \alpha \cdot \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \cdot \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

2°. Aditivitatea față de domeniul de integrare

Dacă $D = D_1 \cup D_2$ și $\mathring{D}_1 \cap \mathring{D}_2 = \emptyset$, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3°. Pozitivitate. Dacă $f(x,y) \geq 0$ pe $D \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

4°. Inegalitatea modulului

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

(modulul integralei $\leq$ integrala modulului)

5°. Dacă $f(x,y) \geq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

6°. Dacă $\exists\, m, M$ ai $m \leq f(x,y) \leq M$ pe D

$$\Rightarrow m \cdot \text{aria}(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M \cdot \text{aria}(D)$$

7°. Dacă $f(x,y)$ este continuă pe D, atunci există cel puțin un punct $(c_1, c_2) \in D$ a.î.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(c_1,c_2)\cdot \text{aria}(D).$$

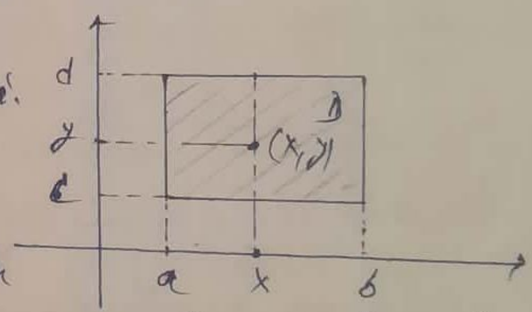
8°) Orice funcție continuă $f : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D.

9°) Criteriul de integrabilitate al lui H. Lebesgue: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe D $\iff$ f este mărginită pe D și continuă aproape peste tot pe D $\iff$ mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f pe D este o mulțime de arie nulă.

Calculul integralei duble

În anumite ipoteze, o integrală dublă se calculează printr-o succesiune de integrale simple.

Cazul 1 Domeniul D este bidimensional, dreptunghiular: $D = [a,b] \times [c,d]$



Teorema 1

Fie $f : [a,b] \times [c,d]$, mărginită.
Dacă f: 1°) este integrabilă pe D
2°) pt $\forall\, x \in [a,b]$
există integrala cu parametru

$$\int_c^d f(x,y)\cdot dy = F(x),\quad F : [a,b] \to \mathbb{R},$$ atunci:

1°) există și integrala $\int_a^b F(x)\cdot dx$ și are loc egalitatea:

2°) $$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{F(x)}\Big)\,dx = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Enunț similar dacă se inversează succesiunea operațiilor de integrare.

Obs 1. 1°) Dacă $f(x,y) = g(x)\cdot h(y)$, atunci vom avea:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d g(x)\cdot h(y)\,dy\right) dx = \int_a^b g(x)\left(\int_c^d \big(h(y)\,dy\big)\right)\cdot dx =$$

$$= \int_c^d h(y)\,dy \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

Dacă $f(x,y) = g(x)\cdot h(y) \Rightarrow \iint_D g(x)\cdot h(y)\,dx\,dy =$

$$= \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy$$

(2°) Dacă f este continuă pe $D = [a,b]\times[c,d]$ atunci ambele rezultate exprimate prin T1 și teorema de intersectabilitate a ordinii de integrare sunt, în același timp valabile:

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

rezultatul este cunoscut sub numele de teorema lui Fubini.

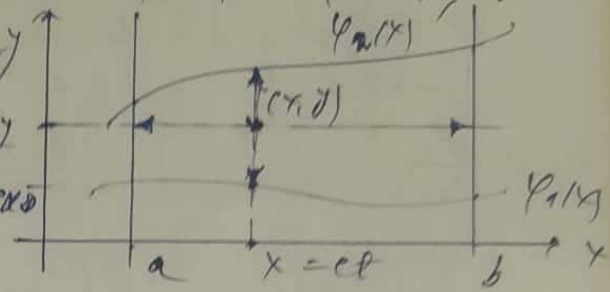
Dacă domeniul D nu este dreptunghiular, atunci el poate fi simplu în raport cu una din axele de coordonate sau un domeniu oarecare. Se demonstrează că orice domeniu D oarecare se poate descompune într-o reuniune finită de subdomenii dreptunghiulare sau simple în raport cu axele de coordonate, și fără puncte interioare comune. Atunci se poate aplica proprietatea de aditivitate a integralei dublei față de domeniul de integrare.

Vom defini și analiza cazurile în care domeniul D este simplu în raport cu una din axele de coordonate.

Definiție: Un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se numește simplu în raport cu axa Oy dacă este definit astfel:

$$(x,y)\in D: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \end{cases}$$ unde φ_1 și φ_2

sunt continue pe $[a,b]$ și $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, pt $(\forall)\, x \in [a,b]$.

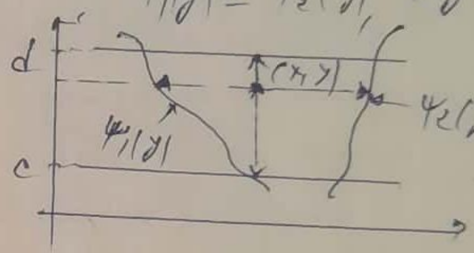


D s.n. simplu în raport cu axa Oy dacă orice paralelă la Oy dusă prin D intersectează frontiera lui D în exact două puncte, cu excepția extremităților.

Analog, un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se numește simplu în raport cu axa Ox dacă este definit astfel:

$$(x,y) \in D : \begin{cases} c \le y \le d \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{cases}$$

; $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, sunt continue pe $[c,d]$ și $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, $(\forall)\, y \in$



Teorema de calcul a integralei duble pentru D = simplu în raport cu axa Oy:

Fie D = compact simplu în raport cu Oy și $f : D \to \mathbb{R}$, mărginită pe D.

Dacă: 1° f este integrabilă pe D

2° $(\forall)\, x \in [a,b]$, există integrala cu parametru

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy = F(x).$$

Atunci: 1° există integrala $\int_a^b F(x)\, dx$ și are loc egalitatea: 2° $\int_a^b F(x)\, dx = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$

Exercițiu Să se scrie un enunț similar pt calculul $\iint$ pe un domeniu simplu în raport cu axa Ox

În aplicații se recomandă parcurgerea următoarelor etape, pt. calculul integralei duble:

(1°) Se reprezintă grafic domeniul D, conform enunțului. Admitem că D este simplu în raport cu axa Oy

(2°) Se duce prin D o paralelă la axa Oy de forma $x = ct$, cu $a \le x \le b$. Pe această paralelă se stabilesc limitele de variație pentru y: $y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$, pt $\forall x = ct$, $a \le x \le b$.

(3°) Se calculează integrala în raport y pt $y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$; $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) \cdot dy$

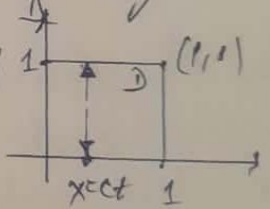
(4°) Se integrează pe intervalul $[a, b]$ (cu limite fixe) funcția $F(x)$ în raport cu variabila x.

$$I = \int_a^b F(x) \cdot dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

Sugestiv: dreapta $x = ct$ (care este $\parallel$ cu Oy) "mătură" tot domeniul D, de la $x = a$ până la $x = b$.

Exemple. (1°) Să se calculeze $I = \iint \frac{x^2}{1+y^2} \cdot dx\, dy$

unde $D = [0,1] \times [0,1]$; $f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$

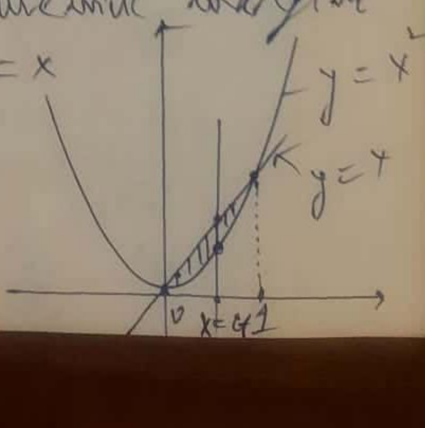


$I = \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} \cdot dx\, dy =$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} \cdot dy \right)}\, dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \right) \cdot dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \cdot \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \operatorname{arctg} y \Big|_0^1 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \overset{LN}{=} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{\pi}{12}$$

(2°) $I = \iint_D (x+y)\, dx\, dy$ unde D = domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ și dreapta $y = x$



$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x$; $x(x-1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1$

D = simplu în raport cu Oy

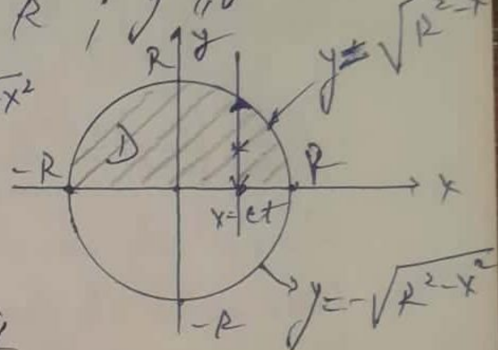
$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases} \Rightarrow I = \iint_D (x+y)\cdot dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy\right) dx$

$= \int_0^1 \left(x\cdot y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \left[x(x-x^2) + \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\right] dx =$

$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right)\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \ldots$

(30) $I = \iint_D x^2\cdot y\,dx\,dy$ unde D = interiorul semi-discului definit prin: $x^2+y^2 \le R^2$; $y \ge 0$



$x^2+y^2 = R^2$; $y^2 = R^2 - x^2$; $y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$

$D: \begin{cases} -R \le x \le R \\ 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2} \end{cases}$

$\Rightarrow D$ = simplu în raport cu axa Oy

$\Rightarrow I = \int_{-R}^{R} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2 y\,dy\right) dx = \int_{-R}^{R} x^2 \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\cdot dy\right) dx =$

$= \int_{-R}^{R} x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} x^2 (R^2 - x^2 - 0)\cdot dx =$

$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-R}^{R} (R^2x^2 - x^4)\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^R (R^2x^2 - x^4)\cdot dx =$

$= \left(R^2\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^R = \frac{1}{3} R^5 - \frac{1}{5} \cdot R^5 = \frac{2}{15}\cdot R^5$

(40) Să se calculeze aria domeniului plan din R^2 definit astfel: $D = \{(x,y)\in R^2 \mid x^2 \le y \le 4 - x^2\} \Leftrightarrow$ = mulțimea punctelor din plan dintre parabolele

$y = x^2$ și $y = 4 - x^2$

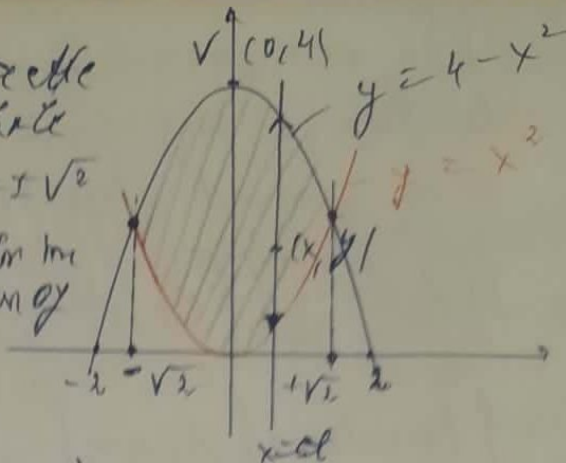
$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$; $x = \pm\sqrt{4}$; $x = \pm 2$

$x_V = 0$; $y_V = 4$

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ punctele de intersecție ale celor 2 parabole

$4 - x^2 = x^2;\ 2x^2 = 4;\ x^2 = 2;\ x = \pm\sqrt{2}$

$D: \begin{cases} -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ x^2 \le y \le 4 - x^2 \end{cases}$ D = simplu în raport cu Oy



$\text{Aria}(D) = \iint_D 1 \cdot dx\,dy =$

$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{4-x^2} 1 \cdot dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(y \Big|_{x^2}^{4-x^2} \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2) \cdot dx =$

$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) \cdot dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2)\, dx = 2 \left(4x - 2 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} =$

$= 4 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 4 \left(\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \ldots$

Aplicații ale integralei duble

1° Aria unei suprafețe plane, $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact care are arie.

$\text{Aria}(D) = \iint_D dx\,dy$

2° Volumul unui corp cilindric, cu generatoarele paralele cu axa Oz mărginit în planul xOy de domeniul D și în spațiu de o suprafață de ecuație $z = f(x,y)$; $f: D \to \mathbb{R}_+$, $f(x,y) \ge 0$, continuă

$\text{Vol}(\Delta) = \iint_D f(x,y) \cdot dx\,dy$

3° Masa unei plăci plane, neomogenă de grosime neglijabilă și care are forma unui domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, compact, pe care este distribuită a substanței materiale având densitatea $\rho = \rho(x,y)$, $\rho: D \to \mathbb{R}$, cunoscută în fiecare punct din D, continuă:

$M(D) = \iint_D \rho(x,y) \cdot dx\,dy$

4° coordonatele (x_G, y_G) ale centrului de greutate ale plăcii plane, neomogene, descrisă în aplicația 3°

$$x_G = \frac{1}{M}\cdot\iint_D x\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy \; ; \; y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$$

5° Momentele de inerție ale unei plăci plane, neomogene, descrisă în aplicația 3°

a) $I_O = \iint_D (x^2+y^2)\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$ = momentul de inerție polar, în raport cu originea $O(0,0)$ a axelor

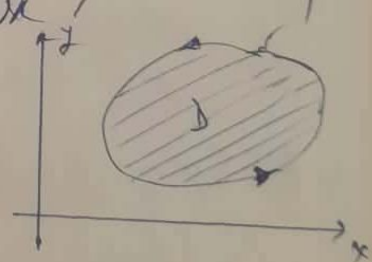
b) $I_{Ox} = \iint_D y^2\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$ → în raport cu axa Ox

$I_{Oy} = \iint_D x^2\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy$ → în raport cu axa Oy.

$\Rightarrow \quad I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$

Formula lui Riemann-Green

stabilește legătura dintre integrala curbilinie de tipul doi, pe o curbă închisă Γ, de clasă C_1, din plan, parcursă în sens direct, și integrala dublă dintr-o funcție definită pe domeniul simplu convex D, mărginit de curba Γ. O integrală curbilinie luată pe o curbă închisă, în sens direct se notează: $I = \oint_{\Gamma} = \oint_{\Gamma}$



Teorema lui Riemann-Green. Dacă domeniul plan $D\subset\mathbb{R}^2$, compact este simplu în raport cu ambele axe de coordonate Ox și Oy și dacă funcțiile P și Q : $D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt continue pe D și pe Γ și există derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue în D, atunci are loc egalitatea:

$$\oint_{\Gamma^+} P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot dx\,dy$$

Caz particular

(10) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact și Γ_+ frontiera sa, parcursă în sens direct, D fiind și simplu conex.

Fie integrala curbilinie

$$I = \frac{1}{2} \cdot \oint_{\Gamma_+} (-y) \cdot dx + x \cdot dy = \oint_{\Gamma_+} \left(-\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} \cdot dy \right)$$

$P(x,y) = -\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2} \to \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$Q(x,y) = \frac{x}{2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}$

Formula lui Green devine:

$$\oint_{\Gamma_+} \left(-\frac{y}{2}\right) \cdot dx + \left(\frac{x}{2}\right) \cdot dy = \iint_D 1 \cdot dx dy = \iint_D dx dy = \text{aria}(D)$$

⇒ Aria domeniului D se calculează cu ajutorul unei integrale curbilinii de tipul 2 pe curba Γ care mărginește domeniul D, calculată în sens direct, cu îndeplinirea condițiilor din teorema lui Green.

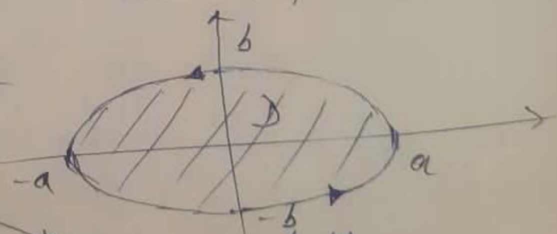
De fapt sunt trei integrale curbilinii de tipul 2 care ne permit acest rezultat:

$$\text{Aria}(D) = \oint_{\Gamma_+} (-y) \cdot dx = \oint_{\Gamma_+} x\, dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_+} (-y\, dx + x \cdot dy)$$

Exemplu. Să se calculeze aria elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

O reprez. parametrică pt elipsă

este: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$.



$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$; $\begin{cases} dx = -a \sin t \, dt \\ dy = b \cos t \cdot dt \end{cases}$

$$\text{Aria}(\mathcal{E}) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_+} (-y \cdot dx + x \cdot dy) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} [(-b \sin t)(-a \sin t) + a \cos t \cdot b \cos t] \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\sin^2 t + \cos^2 t) \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cdot dt = \frac{ab}{2} \cdot t \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi ab$$

Scanned with CamScanner

2°) La „Independența de drum a integralei curbilinii de tipul doi pe o curbă din plan am afirmat că integrala: $\int_{AB} P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy$ nu depinde de drumul de integrare, ci numai de extremitățile sale, $\Longleftrightarrow$ expresia de sub integrală $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = dF(x,y)$ este o diferențială totală exactă $\Longleftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

dacă Γ_+ este o curbă închisă, orientată pozitiv, care mărginește domeniul D, simplu conex, se poate aplica formula lui Green

$$\oint_{\Gamma_+} P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Exercițiu

Să se calculeze integrala curbilinie:

$$I = \oint_{\Gamma_+} e^{-x^2+y^2}\left[\cos(2xy)dx + \sin(2xy)\, dy\right]$$ unde Γ_+ este curba $x^2+y^2=R^2$, parcursă în sens direct.

Sunt îndeplinite condițiile din teorema Riemann-Green privind transformarea integralei curbilinii pe cercul $\Gamma_+ : x^2+y^2=R^2$, într-o integrală dublă pe domeniul compact, simplu conex, mărginit de curba Γ_+, deci pe discul $x^2+y^2 \le R^2$.

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= e^{-x^2+y^2}\cdot\cos(2xy) \\ Q(x,y) &= e^{-x^2+y^2}\cdot\sin(2xy) \end{aligned}\right\} \text{continue și au derivate parțiale } \frac{\partial P}{\partial y} \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x}$$

continue în D și pe curba Γ

Calculăm derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

Rezultă: $\oint_{\Gamma_+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$, unde

$P(x,y) = e^{-x^2+y^2}\cdot \cos(2xy)$ și $Q(x,y) = e^{-x^2+y^2}\cdot \sin(2xy)$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\cdot e^{-x^2+y^2}\cdot \cos(2xy) - 2x\cdot \sin(2xy)\cdot e^{-x^2+y^2} =$$
$$= 2\, e^{-x^2+y^2}\left(y\cdot \cos(2xy) - x\cdot \sin(2xy)\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\cdot e^{-x^2+y^2}\cdot \sin(2xy) + 2y\cdot \cos(2xy)\cdot e^{-x^2+y^2} =$$
$$= 2\cdot e^{-x^2+y^2}\cdot (y\cos 2xy - x\sin 2xy)$$

Constatăm că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(\forall)(x,y)\in D$, deci, aplicând formula lui Green vom obține:

$$I = \oint_{\Gamma_+} e^{-x^2+y^2}\cdot \cos(2xy)\cdot dx + e^{-x^2+y^2}\cdot \sin(2xy)\,dy = \iint_D 0\cdot dx\,dy = 0.$$

Alte concluzii:

a) Integrala curbilinie pe o curbă γ care unește două puncte $A(x_1,y_1)$ și $B(x_2,y_2)$, nu depinde de curba γ, ci numai de extremitățile sale, cele două puncte A și B

b) $(\exists)$ o funcție $F: D\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferențiabilă, cu proprietatea $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, $\forall (x,y)\in D$ și atunci $\oint_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)} dF(x,y) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1)$

c) Expresia funcției $F(x,y)$ se obține din relația:

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt,$$ unde

$(x_0,y_0)\in D$ este un punct arbitrar, fixat în D, iar $M(x,y)$ este punctul curent din D

d) Relația $F(x,y) = C$, C = constantă arbitrară, reprezintă, totodată și soluția ecuației

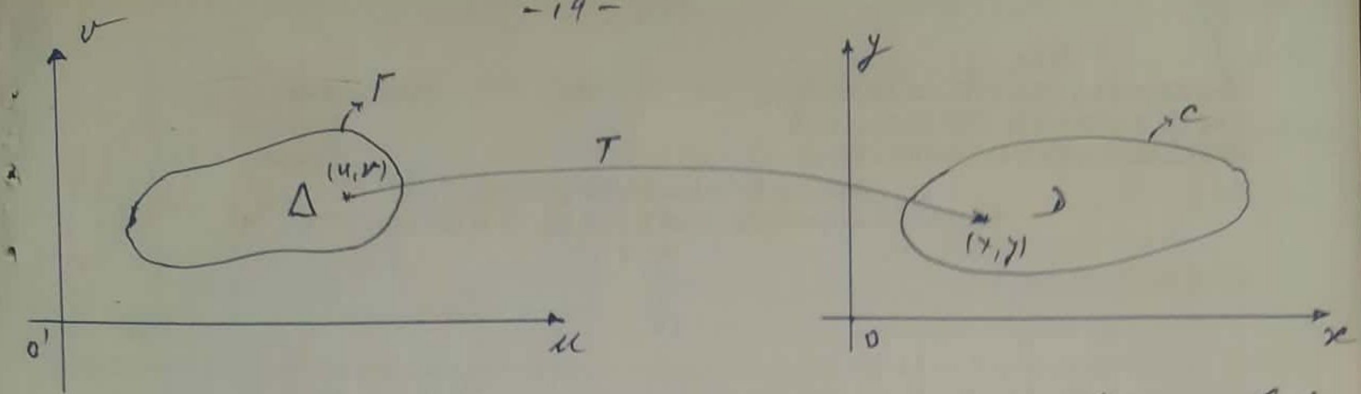
$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, care provine din anularea diferențialei totale exacte a funcției $F(x,y) = C$

Schimbarea de variabile la integrala dublă

Ca și în cazul integralei simple, integrala dublă se poate calcula uneori mai ușor dacă se face o schimbare de variabile.
Să ne amintim în ce constă o schimbare de variabile la integrala Riemann și la ce modificări conduce:
Admitem că sunt îndeplinite condițiile cerute de teorema de schimbare de variabilă, în cazul integralei: $I = \int_a^b f(u(x)) \cdot \underline{u'(x) \cdot dx}$
prin schimbarea de variabilă notată prin $u(x) = t$ rezultau următoarele modificări:

- intervalul de integrare se modifică astfel: $\begin{array}{c|cc} x & a & b \\ u(x)=t & u(a) & u(b) \end{array}$
- variabila de integrare se modifica din x în t:
  $u(x) = t \Rightarrow u'(x) \cdot dx = dt \Rightarrow$
  $\Rightarrow I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt$ și integrala I era, de regulă, mai ușor de calculat.

În mod corespunzător, și în cazul integralei duble (sau triple) printr-o schimbare de variabile se vor modifica, în mod corespunzător, următoarele:
- domeniul de integrare D și frontiera sa curba închisă C, într-un alt domeniu de integrare Δ și frontiera sa, curba Γ.
Aceste transformări se vor realiza printr-o transformare regulată de coordonate, care se definește astfel:
Fie Δ un domeniu compact în planul variabilelor (u, v), având drept frontieră curba Γ, simplă, închisă și netedă (eventual pe porțiuni = reuniune de curbe netede).
Fie transformarea $T: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \Delta \cup \Gamma$, de la planul (u,v) la planul (x,y).
Transformarea T se numește regulată dacă:



a) Realizează o corespondență biunivocă între domeniul Δ cu frontiera sa, curba Γ din planul (u,v) și domeniul D, cu frontiera sa curba C din planul (x,y);

b) Funcțiile $\varphi(u,v)$ și $\psi(u,v)$ sunt continue în Δ și pe Γ, admit derivate parțiale de ordinul I continue în Δ și pe Γ, iar determinantul funcțional

$$J \overset{not}{=} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \overset{def}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

are semn constant în Δ și pe Γ

Dacă T este transformare regulată, atunci $D = T(\Delta)$ și $C = T(\Gamma)$, $Fr(D) = C = T(\Gamma)$

Obs. Dacă $|J|$ este pozitiv pe Δ, atunci transformarea T se numește directă; în caz contrar se numește inversă. Cu aceste noțiuni bine precizate, putem enunța acum

<u>Teorema de schimbare de variabile pentru integrala dublă</u>

Fie, în planul (u,v) domeniul compact Δ, având frontiera o curbă Γ, simplă, inchisă, netedă pe porțiuni și transformarea regulată definită prin:

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in \Delta \cup \Gamma.$$

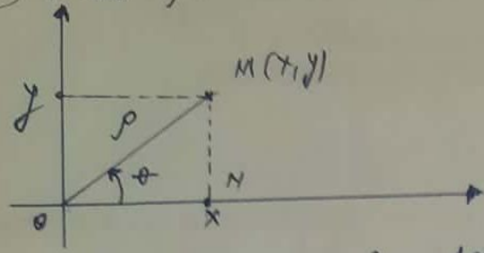
Fie $D = T(\Delta)$ și $C = T(\Gamma)$ și $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o funcție continuă pe D. Atunci are loc relația:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| \cdot du\,dv,$$

numită schimbarea de variabile la integrala dublă.

Exemple

(1°) Transformarea de coordonate polare, cu polul în origine



punctul $M(x,y)$ din plan poate fi identificat, în mod unic

a) prin coordonatele sale carteziene : $\begin{cases} x = \text{abscisa}, \\ y = \text{ordonata}; \end{cases}$

sau b) prin coordonatele sale polare : $\begin{cases} \rho = \text{distanța până la origine} \\ \theta = \text{unghiul dintre} \end{cases}$ axa Ox și raza OM, măsurat în sens direct trigonometric.

Relațiile dintre cele două perechi de coordonate ale aceluiași punct $M(x,y) = M(\rho,\theta)$ sunt relațiile care definesc transformarea de coordonate polare în plan:

$$T:\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow J = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta \ ; \ J = \rho \ ; \ |J| = \rho$$

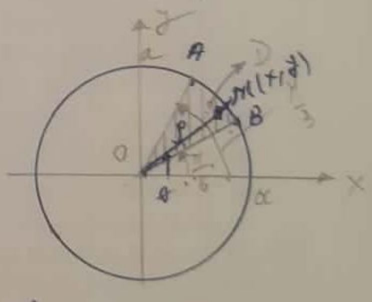
Exemplu

Să se calculeze $I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, D este domeniul din primul cadran limitat de cercul $x^2+y^2=a^2$, și dreptele $y = x\sqrt{3}$; $y\sqrt{3} = x$.

$y = mx$, m = panta dreptei.

$y = \sqrt{3}\cdot x$; $y = x\cdot tg\frac{\pi}{3}$ $\qquad y = mx$

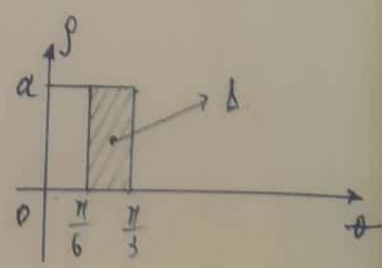
$y\sqrt{3} = x$; $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$; $y = x\cdot tg\frac{\pi}{6}$



Fie $T:\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \Delta:\begin{cases} \rho \in [0,a] \\ \theta \in [\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}] \end{cases}$; $J = \rho$

integrala devine :

$$I = \iint_\Delta \rho^2\cdot\rho\,d\theta\,d\rho = \int_0^a \rho^3 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta =$$

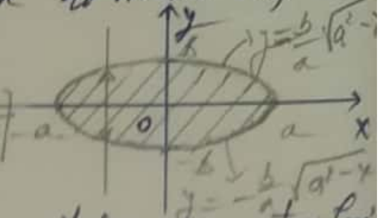


$$= \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a \cdot \theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^4}{4}\left(\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^4}{24}$$

Prin transformarea de coordonate polare, cu polul în origine, domeniul sector de disc s-a transformat într-un dreptunghi în planul (ρ,θ)

③ Transformarea de coordonate polare generalizate (cu polul în origine): se utilizează pentru domenii eliptice.

$$T: \begin{cases} x = a\cdot\rho\cdot\cos\theta \\ y = b\cdot\rho\cdot\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$



$\begin{cases} x\in[-a,a] \\ y\in\left[-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right] \end{cases}$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\rho^2\le 1 \Rightarrow \begin{cases} \rho\in[0,1] \text{ și} \\ \theta\in[\theta_1,\theta_2], \text{ conform enunțului.} \end{cases}$$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta \\ -a\rho\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix}=ab\rho \; ; \; \rho\in[0,1].$$

$$I=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right)dx$$

Exemplu

Să se calculeze integrala dublă $I=\iint_D \frac{xy\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, unde D este interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, din primul cadran

$\Rightarrow \rho\in[0,1]$ și $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$; $\Delta=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ este un dreptunghi în planul (ρ,θ)

$$\Rightarrow I=\iint_\Delta \frac{a\rho\cos\theta\cdot b\rho\cdot\sin\theta}{\sqrt{\rho^2(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}}\cdot ab\rho\,d\rho\,d\theta = a^2b^2\cdot\int_0^1\rho^2\,d\rho\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} = \frac{a^2b^2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cdot\sin^2\theta}}$$

prin schimbarea $\sin^2\theta=t \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=dt$

θ	0	$\frac{\pi}{2}$
$t=\sin^2\theta$	0	1

$$I=\frac{a^2b^2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cdot t}} \;\dots\; \text{etc.} \qquad a>b$$

$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx \qquad \int x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx$

$\int x\cdot\ln x\,dx=\int \ln x\cdot x\cdot dx$

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=x \Rightarrow g(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \int \ln x\cdot x\,dx=(\ln x)\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C$