Suplimentar - V. Gârban | 00000010 | FAI-S-1

Suplimentar 1 18/02/2022

- Sisteme de n ecuații cu n necunoscute {Gauss}

Forma generală a sistemului

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

① Se scrie matricea extinsă a sistemului $\bar{A} = (A \mid b)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\quad j \end{array} \\ & \\ \\ i \to \end{array} \bar{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1j} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2j} & \dots a_{2n} & b_2 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots a_{ij} & \dots a_{in} & b_i \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nj} & \dots a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

② Se alege PIVOTUL inițial $a_{11} \neq 0$. Dacă, în prima ec. a sistemului lipsește necunoscuta x_1, atunci se va interschimba ec. 1 cu altă ecuație a sistemului care are αx_1, $\alpha \neq 0$

③ Linia pivotului se transcrie nemodificată.

④ Coloana pivotului se completează cu 0 pe TOATE pozițiile, cu excepția pivotului.

⑤ Toate celelalte elemente din $\bar{A}$ se calculează cu Regula dreptunghiului.

- elementul a_{ij} se va înlocui cu valoarea următoare:

$$\rightarrow a_{ij}^{(1)} = a_{11} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$$ și elementul b_i cu

* valoarea:

$$\rightarrow b_i^{(1)} = a_{11} \cdot b_i - a_{i1} \cdot b_1$$

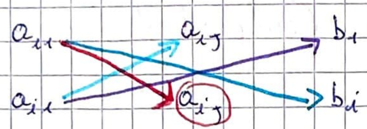
S-au făcut următoarele operații:

- linia 1 s-a înmulțit cu $-a_{i1}$
- linia i s-a înmulțit cu a_{11}
- linia 1 înmulțită cu $(-a_{i1})$ s-a adunat cu linia i înmulțită cu a_{11}

Aceste operații de înlocuire (*) se efectuează pentru orice $i=\overline{2,n}$ și pentru orice $j=\overline{2,n+1}$

OBS: Elementul a_{ij}, inițial, se înlocuiește cu:

a'_{ij} = diferența dintre produsul elementelor de pe diagonala pivotului și produsul elementelor de pe cealaltă diagonală, în dreptunghiul:



$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{11}\cdot a_{ij} - a_{i1}\cdot a_{1j} & \forall\, i=\overline{2,n} \\ b'_i = a_{11}\cdot b_i - a_{i1}\cdot b_1 & \forall\, j=\overline{2,n+1} \end{cases}$$

După efectuarea calculelor pe întreaga matrice $\bar{A}$, se ajunge la forma următoare:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots\; a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots\; a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots\; a'_{in} & b'_i \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots\; a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$$

Operațiile anterioare, de la 2 la 5, se repetă identic, pentru sub-matricea rămasă, adică din poziția (2,2) până în poziția (n,n+1).

În final, după n astfel de etape de calcul, se ajunge la forma următoare a matricei extinse:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & a^2_{22} & 0 & \cdots & 0 & b^2_2 \\ 0 & 0 & a^3_{33} & \cdots & 0 & b^3_3 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^n_{nn} & b^n_n \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & x_n \end{array} \end{array}$$

$x_1 = \dfrac{b'_1}{a_{11}}$ $x_2 = \dfrac{b^2_2}{a^2_{22}}$ $x_n = \dfrac{b^n_n}{a^n_{nn}}$

OBS 1: Dacă, când se trece de la o etapă la alta, viitorul pivot are valoarea 0 se interschimbă linia respectivă cu o altă linie de sub pivot care are PIVOT≠0

Dacă toate elementele de pe coloana pivotului sunt TOATE NULE se vor interschimba coloana pivotului cu coloana lui x_n.

OBS 2: Dacă pe parcurs, la sfârșit de etapă se constată că există factor comun pe una sau mai multe linii de sub-pivot, atunci liniile respective se pot simplifica cu acești factori.

Exemple

1)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 13 \\ -x + 2y - 3z = -9 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

Compatibil unic determinat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ -1 & 2 & -3 & -9 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 11 & -16 & -43 \end{array}\right] \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right]$$

$$\simeq \begin{array}{c} \\ \\ :6 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} :2 \\ \\ \\ \end{array} \simeq \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \simeq \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \end{array}$$

$x = 1$ $\quad y = -1$ $\quad z = 2$

2)
$$\begin{cases} x - 2y + t = -3 \\ 3x - y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 4 \\ x + 3y - 2z - 2t = 7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right]$$

$$\simeq \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right] \simeq \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -4 & -1 & +5 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Rang}(A) = 2 \\ \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \end{array}$$

Sistemul este compatibil nedeterminat

$z = \alpha$ $\quad t = \beta$

$$\overset{I_n}{}$$

① $$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A^{-1}? = \begin{bmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/3 \\ -2/9 & 5/18 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & -12 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 36 & 0 & -8 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 2/9 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/9 & 5/18 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/6 & 1/2 \end{array}\right]$$