Ex.

1) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ 2) $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

---

1) Căutăm soluții de forma $y = e^{zt}$; $y = (e^t)^z$ $\Big\}$ $y = x^z$

$x = e^t \rightarrow t = \ln x$

$y' = (x^z)' = z \cdot x^{z-1}$

$y'' = (y')' = z \cdot (z-1) \cdot x^{z-2}$

Înlocuind $\rightarrow$ $x^2 \cdot \left[z \cdot (z-1) \cdot x^{z-2}\right] - x \cdot (z \cdot x^{z-1}) - 3x^z = 0$ cond $x \neq 0 \rightarrow x^z \neq 0$

$\hookrightarrow x^z \cdot z(z-1) - x^z \cdot z - 3x^z = 0 \rightarrow x^z(z^2 - 2z - 3) = 0$

$\Rightarrow z^2 - 2z - 3$ Ec. caracteristică

$$\boxed{z_1 = 3 \qquad z_2 = -1}$$

$y = x^z$ $\begin{cases} y_1 = x^3 \\ y_2 = x^{-1} \rightarrow y_2 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ $\longrightarrow$ $y_0 = C_1 \cdot x^3 + \dfrac{C_2}{x}$ Soluția generală a ecuației omogene

2) $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$

Căutăm sol de forma $y = e^{zt} = (e^t)^z$ $\Big\}$ $y = x^z$

notăm $x = e^t$

$y = x^z$

$y' = z \cdot x^{z-1}$

$y'' = z \cdot (z-1) \cdot x^{z-2}$

$z^2 - 2z - z + z^2$

$y''' = z \cdot (z-1) \cdot (z-2) \cdot x^{z-3}$

înlocuind $\rightarrow$ $x^z \cdot z(z-1)(z-2) - x^z \cdot z(z-1) + 2x^z \cdot z - 2x^z$

$x^z\left[z(z-1)(z-2) - z(z-1) + 2z - 2\right]$ cond $x \neq 0 \rightarrow x^z \neq 0$

$\rightarrow (z-1)(z^2 - 3z + 2) = 0$ $\underbrace{z_1 = 1 \qquad z_3 = 1}_{\text{rad. dublă}}$ $z_2 = 2$

$y = x^z \rightarrow$ $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^2 \\ y_3 = x \end{cases}$ $\longrightarrow$ $y_0 = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x$ revenind la formula $y = x^z \Rightarrow$

$y_3 = y' \rightarrow y_3 = \left[(e^t)^z\right]'_{z=1} \Rightarrow (e^t)' \rightarrow y_3 = t \cdot e^t$

$\rightarrow y_3 = x \cdot \ln x$

Ec. cu coef. constanți

$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$ Sol generală și Sol. Prob. Cauchy | cond. inițiale $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=1 \\ y''(0)=-1 \end{cases}$

Căutăm sol de forma $y = e^{zx}$

$y = e^{zx}$

$y' = z \cdot e^{zx}$

$y'' = (y')' = (z \cdot e^{zx})' = z \cdot (e^{zx})' = z^2 \cdot e^{zx}$

$y''' = z^3 \cdot e^{zx}$ cond $e^{zx} \neq 0$

Inlocuind $\rightarrow$ $z^3 \cdot e^{zx} + 3 \cdot z^2 \cdot e^{zx} - z \cdot e^{zx} - 3 \cdot e^{zx} = 0$

$e^{zx}(\underbrace{z^3 + 3z^2 - z - 3}_{\text{ec. caracteristică}}) = 0$

	z^3	z^2	z^1	z^0
	1	3	-1	-3
1	1	4	3	0
-1	1	3	0	

$\left.\begin{array}{l} z_1 = 1 \\ z_2 = -1 \\ z_3 = -3 \end{array}\right\}$ Soluțiile ecuației caracteristică

$y = e^{zx} \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{x} \\ y_2 = e^{-x} \rightarrow y_2 = \frac{1}{e^x} \\ y_3 = e^{-3x} \rightarrow y_3 = \frac{1}{e^{3x}} \end{cases}$

Soluția generala a ecuației omogenee

$y_0 = C_1 e^x + C_2 \frac{1}{e^x} + C_3 \frac{1}{e^{3x}}$

Cond inițiale

$\begin{cases} y(0) = C_1 e^0 + C_2 \frac{1}{e^0} + C_3 \frac{1}{e^0} \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y'(0) = C_1 e^0 - C_2 e^0 - 3C_3 e^0 \rightarrow C_1 - C_2 - 3C_3 = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y''(0) = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + 9C_3 \cdot e^0 \longrightarrow C_1 + C_2 + 9C_3 = -1 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 Necunoscute

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 - C_2 - 3C_3 = 1 \\ C_1 + C_2 + 9C_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 16 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{3}{8} \\ C_2 = -\frac{1}{4} \\ C_3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$y = \frac{3}{8} \cdot \underbrace{e^{x}}_{y^1} - \frac{1}{4} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y^2} - \frac{1}{8} \cdot \underbrace{e^{-3x}}_{y^3}$$

Solutie Cauchy