CONDIȚII INIȚIALE :

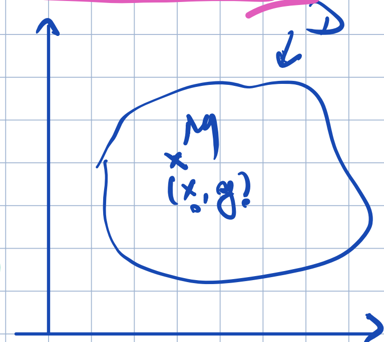
Problema lui Cauchy

1 Fie ec. $\boxed{y' = f(x, y)}$ ec. dif. de ordin, unde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și fie un punct D de coordonate (x_0, y_0)

Sol. generală a acestei ec. este o funcție $y = \varphi(x, c)$

d.p.d.v. geometric repr. o fam. de curbe incluse în domeniul D.

Se poate dem. o teorema de existență și unicitate a sol. ec., care arată că ec. $y' = f(x,y)$ are, în anumite ipoteze $\boxed{\text{o soluție unică}}$ care trece prin punctul $M(x_0, y_0) \in D$



Problema determinării soluției ecuației $y' = f(x,y)$, care pt $x = x_0$ ia valoarea y_0

$y' = x + y$

(<=> al cărui grafic trece / conține punctul $M(x_0, y_0)$)

se numește problema lui Cauchy iar pt $x = x_0$, soluția să ia valoarea $y = y_0$ se numește condiție inițială

$\boxed{\varphi(x_0) = y_0}$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$M(x_0, y_0)$

soluția

1 $y' = x + \cos x$; $M(0;2)$ $\Rightarrow$ $y = \int (x + \cos x) \cdot dx =$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$y = \frac{x^2}{2} + \sin x + C$

punem condiția ca $y(0) = 2 \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + \sin x + 2$

Soluția problemei Cauchy.

notițe prof :

$y' = \cos x + x$

$y = \int_0^x (\cos t + t) dt + c$

$= \sin t \Big|_0^x + \frac{t^2}{2} \Big|_0^x + c$

dacă

$g' = 3x$

$g = \int_0^x 3t \, dt + C$

$y = \sin x - \sin 0 + \frac{x^2}{2} - \frac{0}{2} + C =$

$y = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$

pt $x_0 = 0$

$\Rightarrow y = \sin 0 + \frac{0^2}{2} + C = C$

$\Rightarrow y = C$, $C = 2$

(2). $y'' - y = x$; $x \in \mathbb{R}$

este liniară și neomogenă → pt că este $= x$, dacă era $= 0$, funcția era omogenă

Sol. generală : $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x} - x$

Să se determine sol. problemei, care pt $x = 0$, îndeplinește condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Fizică
derivata era viteza
y'' era accelerația

$x = 0$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 - C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{matrix}$$

$y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x} - x$;

$y' = C_1 \cdot e^{x} - C_2 \cdot e^{-x} - 1$

$\rightarrow y = e^{x} - x$

PROBLEMA LUI CAUCHY pt. ec. liniară de ordin $\underline{n}$

Fie ec. 1 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$;
$x \in I$

Admitem că funcția F îndeplinește condițiile din teorema de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy $\Rightarrow$ putem determina soluția sa generată (este o funcție) $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_n)$; $\varphi : I \to \mathbb{R}$;
$\varphi \in C^n(I)$

are derivate continue până la ordinul n inclusiv

$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_n)$

① $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

$\Rightarrow F(x, \varphi(x, C_1, C_2, \dots C_n), \varphi'(x, C_1, C_2, \dots C_n), \dots,$
$\varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, \dots C_n)) \equiv 0$

există și este unică

Def. Se numește problema Cauchy pt. ec. 1 problema determinării soluției particulare a ecuației care verifică următoarele soluții inițiale:

$$② \begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots C_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots C_n) = y_1 \\ \dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots C_n) = y_{(n-1)} \end{cases}$$

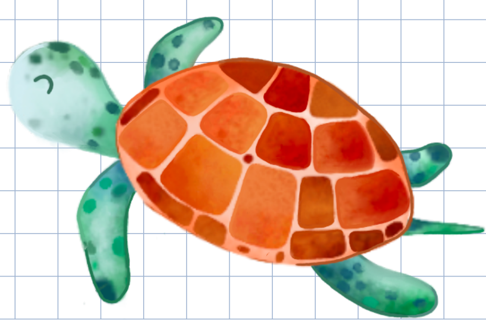
unde $y_0, y_1, \dots y_{(n-1)}$ sunt n numere date

Necunoscutele acestui sistem, sunt constantele $C_1, C_2, \dots C_n$.
Dacă sunt îndeplinite condițiile din teorema de existență și unicitate atunci acest sistem are soluție unică

$\Rightarrow \exists$ și sunt unice valorile $C_1, C_2, \dots C_n$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_1(x_0, y_0, y_1, \dots y_n) \\ C_2 = C_2(x_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}) \\ \vdots \\ C_n = C_n(x_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se înlocuiesc în soluția generală și se obține soluția particulară a problemei Cauchy în ②



TIPURI PARTICULARE DE EC. DIFERENȚIALE DE ORDINUL 1, REZOLVATE ÎN RAPORT CU y'

1 Ec. de forma $y' = f(x)$; $f : I \to \mathbb{R}$;

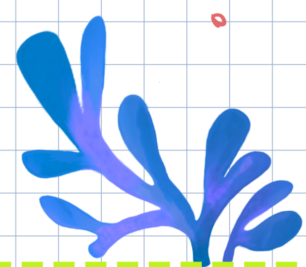
f admite primitive

$\Longleftrightarrow$ $(\exists)$ $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât
- F derivabilă pe I
- $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in I$

2. Ec. diferențiale care provin din anularea unei diferențiale totale ? exacte.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \; ; \; (\exists) \text{ și este finită}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} \Longleftrightarrow d f(x) = f'(x)\, dx$$

$df(x)$ → creșterea valorii funcției

dx → creșterea valorii

CUM SE REZOLVĂ DERIVATELE PARȚIALE

avem funcția de 2 variabile $f(x,y) = 2x^3y^2 + y^3$

derivata în funcție de x (pe y îl păstrăm constantă): $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x^3c^2 + c^3)' = (2x^3c^2)' + (c^3)' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot c^2 + 0 = 6x^2 \cdot c^2$

constantă (de exp: 2,5)

y este notat cu c pentru a explica mai bine

Rezultat $\boxed{6x^2y^2}$

derivata în funcție de y (pe x îl păstrăm constantă): $\frac{\partial f}{\partial y} = (2 \cdot c^3 \cdot y^2 + y^3)' = (2 \cdot c^3 \cdot y^2)' + (y^3)' = 2c^3 \cdot 2 \cdot y^{2-1} + 3 \cdot y^{3-1} = 4c^3y + 3y^2$

constantă (de exp: 2,5)

Rezultat $\boxed{4x^3y + 3y^2}$

$$F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

diferențiala func. 2 variabile

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy$$

diferențială totală df a funcției f(x,y)

$$dF(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz$$

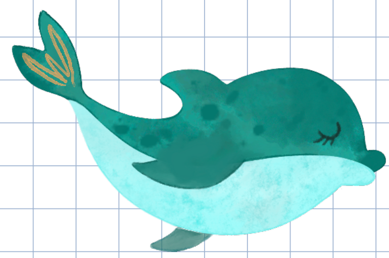
$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0$$ → A rezolva ecuația $\Longleftrightarrow$ a determina funcția F

$\Longrightarrow$ $dF(x,y) = 0 \Longleftrightarrow F(x,y) = c$

Condiția necesară și suficientă ca o expresie de forma să fie o diferențială totală exactă, este ca $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial x}$ → ele sunt egale dacă sunt și continue

pentru derivatele de ordin secund

derivate mixte de ordin 2



Ec. este sub forma : $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$

$F(x,y) = ?$ a.î. $dF = P dx + Q \cdot dy$

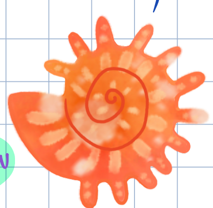
Se verifică dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ Dacă DA ⇒ (∃) $F(x,y)$ și se determină din relația :

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t) \cdot dx \Rightarrow F(x,y) = C$$

↓ soluția ecuației

Dacă ec. diferențială este dată sub forma: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Leftrightarrow y' = f(x,y)$



Exercițiu

Să se verifice dacă ec. următoare provine din anularea unei diferențiale totale exacte, iar dacă DA, să se găsească soluția generală

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$$

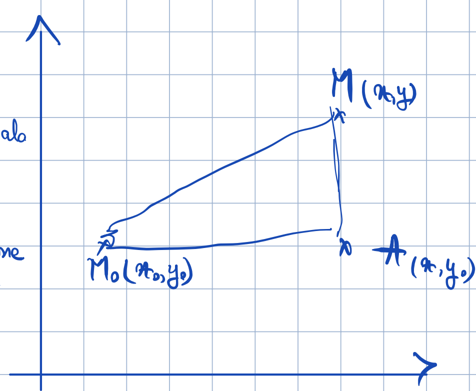
$\frac{1}{y} - \left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{1}{y} - \left(y \cdot \frac{1}{x^2}\right)'$

$P(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$

$Q(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$

} Pasul 1

$\frac{\partial P}{\partial y}$ → se citește derivata parțială a lui $P(x,y)$ în raport cu y → variabila x se menține este păstrată constantă



Pasul 2 → $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$

sunt egale?

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ DA

egale

pt. că sunt ...

Pasul 3

Fie $(x_0,y_0)\in D$

$$\underline{F(x,y)-F(x_0,y_0)} = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\cdot dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\cdot dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y} - \frac{y_0}{t^2} + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dt$$

x s-a înlocuit cu t, unde $t\in[x_0,x]$

y s-a înlocuit cu y_0

avem: $\begin{cases} x = t \ ; \ t\in[y_0,y] \\ y = y_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow F(x,y)-F(x_0,y_0) = \frac{1}{y_0}\cdot t\Big|_{x_0}^{x} + y_0\cdot\frac{1}{t}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{x}\cdot t\Big|_{y_0}^{y} + x\cdot\frac{1}{t}\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= \frac{1}{y_0}(x-x_0) + y_0\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right) + \frac{1}{x}(y-y_0) + x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{x}{y_0}} - \frac{x_0}{y_0} + \cancel{\frac{y_0}{x}} - \frac{y_0}{x_0} + \frac{y}{x} - \cancel{\frac{y_0}{x}} + \frac{x}{y} - \cancel{\frac{x}{y_0}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}_{\substack{F(x,y)\\ = c}} - \underbrace{\left(\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}\right)}_{F(x_0,y_0)} \Rightarrow F(x,y) = c \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x} = c \longrightarrow$$ sol sub formă explicită

$$y = \varphi(x,c)$$

Verificare $F(x,y) = c \iff \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} = c$

$$\Downarrow$$

$$P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$$

ECUAȚII CU VARIABILE SEPARATE

$P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0$ sau $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x)}{Q(y)} \Leftrightarrow y' = f(x,y)$

$(= y')$

P nu depinde de y

Q nu depinde de x

$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Ecuație cu variabilele separabile

Exemplu

$$y(x^3+1)\,dx + (y^2-1)\cdot x\cdot dy = 0 \quad \Big|\, : x\cdot y$$

am separat variabilele

$$\frac{x^3+1}{x}\cdot dx + \frac{y^2-1}{y}\cdot dy = 0$$

$$\int \frac{x^3+1}{x}\cdot dx + \int \frac{y^2-1}{y}\cdot dy = C$$

$$\int \left(x^2+\frac{1}{x}\right) dx + \int \left(y-\frac{1}{y}\right)\cdot dy = C$$

$$\frac{x^3}{3}\ \ln x + \frac{y^2}{2} - \ln y = C$$

$$F(x,y) = C \Leftrightarrow y = \varphi(x,C)$$

Temă:

1. $\left(-\dfrac{1}{x} + y + \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot dx + \left(\dfrac{1}{y} + x - \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot dy = 0$

2. $x(y^2+1)\cdot dx + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} + x^2 y\right) dy = 0$

3. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\cdot dx + \dfrac{1}{2}\cdot \ln(x^2+y^2)\cdot dy = 0$

4. $\left[1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right] dx + \left[\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right) y\right] dy = 0$

5. $\left(\sin y - \dfrac{2y}{x^3}\right) dx + \left(x\cos y + \dfrac{1}{x^2}\right) dy = 0$