Pregătire lucrare de control - 1 - 17.12.2021

AR 1 zi

1° Fie seria de puteri ale lui x:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Raza de convergență, intervalul și mulțimea de conv. și suma seriei.

T1 Abel + T Cauchy-Hadamard.

existența razei   formule de calcul

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| ; \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} ; \quad \left(\sum_1^{\infty} a_n \cdot x^n\right)$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 1$$

$\Rightarrow I = (-1, 1)$ = interv. de conv.

mulțimea de conv. (A) mai poate conține unul sau ambele capete ale interv. de conv.

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

Leibniz $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n \right.$ este conv. dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și conv. la zero; $a_n = \frac{1}{2n+1} \searrow 0$

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ - conv.}$$

$\Rightarrow A = [-1, 1]$.

$$S(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Suma unei serii de puteri este o funcție indefinit derivabilă pe intervalul de conv. și derivata sumei = suma seriei derivatelor de ordinul k, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$S'(x) = -x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{1} + \dots$$

$$= -x^2\left(1 - x^2 + x^6 - x^8 + \dots + (-1)^n \cdot x^{2(n-1)} + \dots\right)$$

$$= -x^2\left[1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots + (-x^2)^{n-1} + \dots\right]$$

$$= -x^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (-x^2)^n}{1 - (-x^2)} = -x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^2}{1+x^2}$$

$x \in (-1, 1)$

$$S(x) = \int \frac{-x^2}{1+x^2} \cdot dx = -\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = -\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \cdot dx$$

$$= -\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx = -(x - \operatorname{arctg} x) + C = -x + \operatorname{arctg} x + C$$

$$S(x) = -x + \operatorname{arctg} x + C = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$\forall x \in (-1, 1)$; pt $x = 0 \Rightarrow 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

$$-x + \operatorname{arctg} x = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$A = [-1, 1]$.

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow S(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \\ x = -1 \rightarrow S(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Teorema a II-a a lui Abel.

(2) Limita șirului $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}}$

criteriul Cauchy – d'Alembert.

Dacă $x_n > 0$ și există $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l$, atunci există $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

$$x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n} > 0 \;;\; \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)! \cdot 8^{n+1}} \cdot \frac{8^n (2n)!}{(n!)^2}$$

$$= \lim_{\infty} \frac{\cancel{(n!)^2}(n+1)^2}{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2) \cdot \cancel{8^n} \cdot 8} \cdot \frac{\cancel{8^n} \cdot \cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}} =$$

$$= \lim_{\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\, 2(n+1) \cdot 8} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{1}{16} \lim_{\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{1}{32} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{32}$$

Precizați natura seriei de numere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n} \quad ; \quad x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}$$

Criteriul Cauchy (radicalului)

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$; dacă $0 \le l < 1 \Rightarrow$ seria este convergentă

dar $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}} = \frac{1}{32} < 1 \Rightarrow$ — " —

Precizați natura seriei alternate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}$$

Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}$ conv $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n} = 0$

Totodată x_n este descrescător;

$x_n \searrow$; $x_n \to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x_n$ conv

conform criteriului lui Leibniz.

③ Fie funcția $u(x,y) = e^{4x+2y}$. Arătați că $u(x,y)$ verifică ecuația următoare:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - 6u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{4x+2y}\right) = e^{4x+2y} \cdot \frac{\partial(4x+2y)}{\partial x} \qquad \boxed{\left(e^{\varphi(x)}\right)' = e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)}$$

$$= 4 \cdot e^{4x+2y} = 4 \cdot u(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4 \cdot e^{4x+2y} \cdot 4 = 16 \cdot e^{4x+2y} = 16 \cdot u(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4 \cdot e^{4x+2y}\right) = 4 \cdot e^{4x+2y} \cdot 2 =$$

$$= 8 \cdot u(x,y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{4x+2y}\right) = e^{4x+2y} \cdot 2 = 2 \cdot u(x,y).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 \cdot e^{4x+2y}\right) = 2 \cdot e^{4x+2y} \cdot 2 =$$
$$= 4 \cdot u(x,y).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 \cdot e^{4x+2y}\right) = 2\, e^{4x+2y} \cdot 4 =$$
$$= 8 \cdot u(x,y)$$

înlocuim în ecuația:

$$u(x,y) \cdot (16 - 4 \cdot 8 - 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 6) =$$
$$= u(x,y)(16 - 32 - 4 + 16 + 10 - 6) = u(x,y) \cdot 0 = 0.$$

(4) Arătați că funcția $u(x,y) = x^2 + \sin(x^2 + y^4)$ verifică ec: $2y^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - 4x \cdot y^3 = 0$

$$2y^3 \cdot / \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \cos(x^2+y^4) \cdot 2x = 2x + 2x \cdot \cos(x^2+y^4)$$
$$(-x) \cdot / \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x^2+y^4) \cdot 4y^3 = 4y^3 \cdot \cos(x^2+y^4)$$
$$\cancel{4xy^3} + \cancel{4xy^3 \cdot \cos(x^2+y^4)} - \cancel{4xy^3 \cdot \cos(x^2+y^4)} - \cancel{4xy^3} = 0$$

Extremele unei funcții de 2 variabile

Să se determine punctele de extrem local ale funcției: $u(x,y) = \ldots$

(1) determinarea punctelor staționare — soluțiile sistemului (C.N.E.)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1, y_1) = \text{punct staționar}$$

(2) condiții suficiente pt extrem: (pt fiecare punct staționar)

$$\to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1,y_1); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_1,y_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_1,y_1); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_1,y_1)$$

$$\to H(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1,y_1) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_1,y_1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_1,y_1) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_1,y_1) \end{pmatrix}$$

Dacă $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow (x_1, y_1)$ nu este punct de extrem!

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, y_1) \; ; \; \Delta_2 = \det H = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Dacă $\frac{1}{\Delta_1}$ și $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ sunt ambele negative $\Rightarrow$ (x_1, y_1) este punct de maxim local

Dacă $\frac{1}{\Delta_1}$ și $\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$ sunt ambele pozitive $\Rightarrow$ punct de minim local.
$\Rightarrow (x_1, y_1)$ este punct de minim local.

În orice altă situație, (x_1, y_1) nu este punct de extrem local.

$$d^2 u(x_1, y_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, y_1) \cdot (dx)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot (dy)^2$$

Pentru o funcție de 3 variabile
$u = u(x_1, x_2, x_3)$. Pentru fiecare punct staționar se calculează hessiana $H(x, y, z) = (a_{ij})_{1 \le i, j \le 3}$

unde $a_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}(x_0, y_0, z_0)$$

Se calculează: $\Delta_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$; $\Delta_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$
și $\Delta_3 = \det H$

Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ și $\Delta_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ = punct de minim

Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ = punct de maxim

În orice altă situație, (x_0, y_0, z_0) ~~nu~~ punct de extrem.