UNITATEA DE ÎNVĂŢARE Nr. 4 – INTEGRALE CURBILINII, INTEGRALE MULTIPLE, INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ, FORMULE INTEGRALE

Obiective urmărite:

1. Însuşirea noţiunilor fundamentale şi a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor din domeniul calculului integral;
2. Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
3. Formarea şi dezvoltarea deprinderilor şi aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată în soluţionarea problemelor de natură matematică şi de specialitate, precum şi formarea şi dezvoltarea unui raţionament riguros şi a abilităţilor de calcul rapid şi corect necesare pentru diferite aplicaţii.
4. Formarea şi dezvoltarea capacităţilor de abstractizare, generalizare şi sinteză;
5. Aplicarea cunostintelor dobandite la curs in alte domenii ale stiintei si practicii.

Rezumat:

În această unitate de învăţare sunt prezentate, pe parcursul a cinci lecţii, principalele noţiuni teoretice referitoare la integrala curbilinie de tipul I şi II, integrala dublă, integrala triplă, integrala de suprafaţă de tipul I şi II, formulele integrale Green, Stockes, Gauss-Ostrogradski, precum şi algoritmii cei mai des întâlniţi pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestei unităţi de învăţare.

După parcurgerea celor cinci lecţii din cuprinsul unităţii de învăţare studenţii vor dobândi cunoştinţele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înţelege şi rezolva probleme specifice referitoare la tematica anunţată anterior.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecţii sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule şi algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noţiunilor teoretice şi algoritmilor de rezolvare prezentaţi anterior;
- în finalul fiecărei lecţii este propus un test de autoevaluare şi la sfârşitul unităţii de învăţare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate, ordonate după gradul lor de dificultate şi acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învăţare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unităţii de învăţare, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

- Drum, drum rectificabil, curbă, curbă rectificabilă, integrală curbilinie de primul tip, integrală curbilinie de al doilea tip, independenţa de drum a integralei curbilinii de tipul doi;
- Diviziune, sistem de puncte intermediare asociat unei diviziuni, sumă Riemann, sumă Darboux inferioară şi sumă Darboux superioară, mulţime neglijabilă, funcţie continuă aproape peste tot (continuă a.p.t.), domeniu simplu în raport cu o axă de coordonate, schimbarea de variabilă la integrala multiplă;
- Pânză parametrizată, suprafaţă parametrizată, formă diferenţială, integrală de suprafaţă de primul tip, suprafaţă orientată, integrală de suprafaţă de al doilea tip;
- formă diferenţială, diferenţială exterioară, domeniu cu bord regulat, domeniu orientat, formulele Green, Stockes, Gauss-Ostrogradski, camp vectorial, rotor, divergenţă, circulaţie, flux.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor anunţate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare si a Temelor de control.

LECŢIA 9 - INTEGRALA CURBILINIE

1. Noţiuni teoretice

Definiţia 5.1

(i) Fie $I=[a,b]$ interval compact. O funcţie continuă $d:I\to\mathbb{R}^3$ se numeşte drum.

(ii) Se numeşte imaginea drumului mulţimea

$$I(d)=\{d(t),t\in[a,b]\}=\{(f(t),g(t),h(t)),t\in[a,b]\}.$$

(iii) Dacă $d(a)=d(b)$, atunci drumul se numeşte închis.

(iv) Fie $d:I\to\mathbb{R}^3,\ d(t)=(f(t),g(t),h(t))$.

Drumul *d* se numeşte rectificabil dacă şi numai dacă funcţiile f, g, h sunt cu variaţie mărginită pe $[a,b]$.

Lungimea drumului *d*, dacă f, g, h au derivată integrabilă pe $[a,b]$, este dată de relaţia $\ell(d)=\int_a^b \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

(v) Două drumuri $d:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ şi $\delta:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$ se numesc echivalente dacă există o funcţie $\omega:[a,b]\to[\alpha,\beta]$, astfel încât $\omega(a)=\alpha$; $\omega(b)=\beta$ şi $\forall\, t\in[a,b]$, $d(t)=(\delta\circ\omega)(t)$.

Relaţia astfel definită este o relaţie de echivalenţă.

(vi) Se numeşte curbă o clasă de drumuri echivalente. Se numeşte curbă închisă o curbă ce conţine un drum închis, se numeşte curbă rectificabilă o curbă ce conţine un drum rectificabil, se numeşte lungimea curbei lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc curba şi se numeşte imaginea curbei imaginea drumurilor care aparţin curbei.

Definiţia 5.2. Fie *C* o curbă rectificabilă în spaţiu:

$$C:[a,b]\to\mathbb{R}^3,\ C=\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) & t\in[a,b] \\ z=h(t)\end{cases}$$

şi fie $F:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. (*D* un domeniu ce conţine imaginea curbei *C*)

Fie $\ell(t)$ lungimea curbei *C*. Dacă integrala Stieltjes.

$$\int_a^b F\big(f(t),g(t),h(t)\big)\mathrm{d}\ell(t)$$

există, atunci ea se notează $\int\limits_C F(x,y,z)\mathrm{d}\ell$ şi se numeşte integrala curbilinie de primul tip a funcţiei *F* de-a lungul curbei *C*.

Observaţia 5.3

(i) Dacă funcţiile f, g, h sunt de clasa $\mathrm{C}^1([a,b])$ şi dacă *F* este continuă pe *D*, atunci:

$$\int\limits_C F(x,y,z)\mathrm{d}\ell=\int_a^b F\big(f(t),g(t),h(t)\big)\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Considerând un fir material de grosime neglijabilă care este imaginea unei curbe *C* şi dacă $\mu=\mu(x,y,z)$ este densitatea în punctul (x,y,z), atunci masa *M* şi coordonatele centrului de greutate $x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}, z_{\mathrm{G}}$ sunt date de formulele:

$$M=\int\limits_C \mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,\ \ x_{\mathrm{G}}=\frac{1}{M}\int\limits_C x\mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,$$

$$y_{\mathrm{G}}=\frac{1}{M}\int\limits_C y\mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,\ \ z_G=\frac{1}{M}\int\limits_C z\mu(x,y,z)\mathrm{d}\ell,$$

evident dacă integralele de mai sus există.

Definiţia 5.4

(i) Fie $C=\{(f(t),g(t),h(t)), t\in[a,b]\}$ o curbă în spaţiu; *D* un domeniu în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ care conţine imaginea curbei *C*; $P,Q,R:D\to\mathbb{R}^3$.

Dacă integralele Stieltjes

$$\int_a^b P(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}f(t);$$

$$\int_a^b Q(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}g(t);$$

$$\int_a^b R(f(t),g(t),h(t))\mathrm{d}h(t),$$

există atunci suma lor se notează

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

şi se numeşte integrala curbilinie de tipul al doilea.

Dacă funcţiile P,Q,R sunt continue şi curba *C* rectificabilă, atunci integrala curbilinie de tipul al doilea există.

(ii) Din punct de vedere mecanic integrala

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

reprezintă lucrul mecanic al forţei vectoriale

$$\bar{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

al cărei punct de aplicaţie descrie curba *C*.

Proprietăţile 5.5

(i) Dacă $P;Q;R:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe *D* şi dacă funcţiile $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcţii de clasă $\mathrm{C}^1([a,b])$, atunci integrala curbilinie de tipul al doilea există şi

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z=$$

$$=\int_a^b\left[P(f(t),g(t),h(t))f'(t)+Q(f(t),g(t),h(t))\cdot g'(t)+R(f(t),g(t),h(t))\cdot h'(t)\right]\mathrm{d}t.$$

(ii) Fie *C* o curbă în spaţiu, *D* un domeniu care include imaginea lui *C* şi

$$P_1,Q_1,R_1,P_2,Q_2,R_2:D\to\mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2\in\mathbb{R}.$$

Atunci, dacă există integralele

$$\int_C P_i(x,y,z)\mathrm{d}x + Q_i(x,y,z)\mathrm{d}y + R_i(x,y,z)\mathrm{d}z,\ i=\overline{1,2},$$

are loc egalitatea

$$\int_C \sum_{i=1}^{2}\lambda_i P_i(x,y,z)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{2}\lambda_i Q_i(x,y,z)\mathrm{d}y + \sum_{i=1}^{2}\lambda_i R_i(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\lambda_i \int_C P_i(x,y,z)\mathrm{d}x + Q_i(x,y,z)\mathrm{d}y + R_i(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

(ii) Fie C_1, C_2 două curbe juxtapozabile şi $C = C_1 \cup C_2$.

Fie $P,Q,R : D \to \mathbb{R}$, unde *D* este un domeniu ce conţine imaginea curbei *C*. Atunci, dacă integralele există, are loc egalitatea:

$$\int_{C=C_1\cup C_2} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\int_{C_i} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

Definiţia 5.6

(i) Fie $P,Q,R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Dacă există $F : D \to \mathbb{R}$, diferenţiabilă pe *D* astfel încât

$$\mathrm{d}F(x,y,z) = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,\ \forall\,(x,y,z)\in D,$$

atunci spunem că expresia

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

este o diferenţială totală pe *D*.

(ii) Spunem că integrala curbilinie nu depinde de drum dacă pentru orice curbe C_1 şi C_2 având acelaşi punct iniţial şi acelaşi punct final

$$\int_{C_1} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{C_2} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$\underline{\underline{\mathrm{not}}} \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

unde (x_1,y_1,z_1) şi (x_2,y_2,z_2) sunt extremităţile iniţială şi finală ale curbei $C_i,\ i=\overline{1,2}$.

Proprietăţile 5.7

(i) Fie $P,Q,R:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funcţii continue.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca integrala

$$\int_C P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

să nu depindă de drum este ca expresia

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

să fie o diferenţială totală pe *D*.

În aceste condiţii o funcţie *F* cu proprietatea

$$\mathrm{d}F=P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

este dată de relaţia

$$F(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\int_{(\overline{x}_0,\overline{y}_0,\overline{z}_0)}^{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

unde (x_0,y_0,z_0) este un punct fixat în *D*, iar $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ este un punct oarecare în *D*.

(ii) Integrala unei diferenţiale exacte pe o curbă închisă este nulă.

(iii) Fie $P,Q,R:D\to\mathbb{R}$ funcţii continue ce admit derivate parţiale după orice direcţie. Atunci

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

este o diferenţială exactă dacă şi numai dacă pentru orice $(x,y,z)\in D$ au loc egalităţile $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

2. Probleme rezolvate

$\boxed{1}$ Să se arate că următoarele drumuri au aceeaşi imagine. Sunt drumuri echivalente cu aceeaşi orientare?

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ f(t)=(a\cos t,b\sin t);$$

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ g(t)=(a\cos t,-b\sin t).$$

Rezolvare. Dacă notăm cu $x=a\cos t$ şi $y=b\sin t$, prin eliminarea lui *t*, rezultă imaginea drumului f ca fiind elipsa

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Analog, dacă notăm cu $x = a\cos t,\ y = -b\sin t$, rezultă că $\operatorname{Im} g$ este aceeaşi elipsă. Prima parametrizare parcurge elipsa în sens trigonometric direct, iar a doua, în sens invers. Rezultă că *f* şi *g* nu sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

2 Să se arate că următoarele drumuri sunt echivalente cu aceeaşi orientare:

$$f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \ f(t)=(a\cos t, a\sin t, b);$$

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \ g(t)=(a\cos 2t, a\sin 2t, b).$$

Rezolvare. Dacă notăm cu

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = b \ \text{ sau } \ x = a\cos 2t,\ y = a\sin 2t,\ z = b,$$

obţinem că imaginea în $\mathbb{R}^3$ a lui f şi *g* este cercul cu centrul pe axa Oz, de rază *a* situat în planul $z = b$. Observăm că aplicaţia

$$\varphi:[0,2\pi]\to[0,\pi],\ \varphi(t)=\frac{t}{2}$$

este bijectivă, continuă, strict crescătoare, iar

$$f(t)=(g\circ\varphi)(t),\ t\in[0,2\pi].$$

Rezultă că f şi *g* sunt echivalente cu aceeaşi orientare.

3 Să se calculeze lungimea cicloidei

$$\gamma:\begin{cases} x = t-\sin t; \\ y = 1-\cos t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Rezolvare.

$$\ell(\lambda)=\int_\gamma \mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8.$$

4 Să se calculeze lungimea cardioidei

$$\gamma:\begin{cases} x = R(2\cos t-\cos 2t); \\ y = R(2\sin t-\sin 2t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi],\ R>0.$$

Rezolvare.

$$\ell(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2(-2\sin t+2\cos 2t)^2+R^2(2\cos t-2\cos 2t)^2}\ \mathrm{d}t=16R.$$

$\boxed{5}$ Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip $\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s$, unde

$$\gamma:\begin{cases} x=\cos^2 t; \\ y=\cos t, \end{cases} \quad t\in[0,\pi].$$

Rezolvare.

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}s=\int_0^\pi \cos^3 t\sin t\sqrt{4\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t=0.$$

$\boxed{6}$ Să se calculeze

$$\int_\gamma \left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}s,$$

unde γ are ca imagine mulţimea

$$\Gamma=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2=a^2,\, x+y+z=0\right\}.$$

Rezolvare. γ are parametrizarea

$$\gamma:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \\ z=-a(\sin t+\cos t), \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

$$\int_\gamma \left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}s=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t\right)\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+a^2(\cos t-\sin t)^2}\,\mathrm{d}t=0.$$

$\boxed{7}$ Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

unde

$$\gamma:\begin{cases} x=9\cos t; \\ y=9\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Rezolvare.

$$\int_\gamma xy\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left[81\cos t\sin t(-9\sin t)+9\cos t\right]\mathrm{d}t=-729\frac{\sin^3 t}{3}\bigg|_0^{2\pi}+9\sin t\big|_0^{2\pi}=0.$$

$\boxed{8}$ Să se calculeze:

$$I = \int_{\gamma} \left(y^2 + 2xz\right)\mathrm{d}x + 2y\left(x+z\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}z,$$

unde

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t; \qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = ct, \end{cases}$$

Rezolvare.

$$I = \int_0^{2\pi} \Big[\left(b^2 \sin^2 t + 2act\cos t\right)\left(-a\sin t\right) +$$

$$+ 2b\sin t\left(a\cos t + ct\right)\cdot\left(b\cos t\right) + \left(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right)\cdot c\Big]\mathrm{d}t =$$

$$= 2\pi a^2 c.$$

$\boxed{9}$ Să se calculeze:

$$I = \int_{(-1,1)}^{(2,-1)} x(1+x)\mathrm{d}x - y(1+y)\mathrm{d}y,$$

verificându-se că nu depinde de drumul care uneşte punctele $(-1,1)$ şi $(2,-1)$.

Rezolvare. Fie $P(x,y) = x(1+x)$ şi $Q(x,y) = -y(1+y)$.

Avem $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Rezultă că integrala nu depinde de drumul care uneşte punctele $(-1,1)$ şi $(2,-1)$. Fie γ drumul care uneşte cele două puncte:

$$\gamma : \begin{cases} x = 3t - 1; \\ y = -2t + 1, \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

Atunci:

$$I = \int_0^1 \left[9t(3t-1) + 2(-2t+1)(-2t+2)\right]\mathrm{d}t = \frac{31}{6}.$$

$\boxed{10}$ Să se determine funcţia $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dacă

$$\mathrm{d}U = \left(2x^2 + 2xy - y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 - 2xy - y^2\right)\mathrm{d}y.$$

Rezolvare. Fie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(2t^2 + 2ty_0 - y_0^2\right) \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} \left(x^2 - 2xt - t^2\right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2\frac{t^3}{3}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{t^2}{2} y_0\Big|_{x_0}^{x} - y_0^2 t\Big|_{x_0}^{x} + x^2 t\Big|_{y_0}^{y} - x\frac{t^2}{2}\Big|_{y_0}^{y} - \frac{t^3}{3}\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= \frac{x-y}{3}\left(x^2 + 4xy + y^2\right) + C,$$

unde C este o constantă reală.

$\boxed{11}$ Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa

$$F(x, y, z) = (2x + y + z,\ x + 2y + z,\ x + y + 2z)$$

când punctul ei de aplicaţie descrie arcul

$$AB = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in [0, \pi]\right\}.$$

Rezolvare. Lucrul mecanic L este

$$\mathsf{L} = \int_{AB} (2x + y + z)\mathrm{d}x + (x + 2y + z)\mathrm{d}y + (x + z + 2z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\pi} \Big[(2a\cos t + a\sin t + bt)\cdot(-a\sin t) + (a\cos t + 2a\sin t + bt)(a\cos t) +$$

$$+ (a\cos t + a\sin t + 2bt)\cdot b\Big]\mathrm{d}t = b\pi(b\pi - 2a).$$

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

$\boxed{12}$ $\displaystyle\int_C y\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C = \begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t + 1, \end{cases} \quad t \in [0,1].$

Rezolvare.

$$\int_C y\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\ell = \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t + 1)\mathrm{e}^{-\ln\left(1+t^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t + 1) \cdot \frac{1}{t^2+1} \cdot 1\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

$\boxed{13}$ $\int_C y\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=R(t-\sin t);\\ y=R(1-\cos t),\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$, $R>0$.

Rezolvare.

$$\int_C y\,\mathrm{d}\ell=\int_0^{2\pi}R(1-\cos t)\sqrt{R^2(1-\cos t)^2+R^2\sin^2 t}\;\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{2\pi}R^2(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\;\mathrm{d}t=$$

$$=R^2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{3/2}\mathrm{d}t=4R^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{32R^2}{3}.$$

$\boxed{14}$ $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases} x=a\cos t;\\ y=b\sin t,\end{cases}$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $a,b>0$.

Rezolvare.

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}\ell=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t+b\sin t)\sqrt{a^2\sin^2+b^2\cos^2}\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\sqrt{\left(a^2-b^2\right)\sin^2 t+b^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}b\sin t\sqrt{a^2+\left(b^2-a^2\right)\cos^2 t}\;\mathrm{d}t=$$

$$=\int_0^1 a\sqrt{\left(a^2-b^2\right)u^2+b^2}\;\mathrm{d}u+\int_0^1 b\sqrt{\left(b^2-a^2\right)u^2+a^2}\;\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{b^2-a^2}}\left(b\arccos\frac{b}{a}+a\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$

$\boxed{15}$ $\int_C xy\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C:\begin{cases} x=|t|;\\ y=\sqrt{1-t^2},\end{cases}$ $t\in[-1,1]$.

Rezolvare.

$$\int_C xy\,\mathrm{d}\ell=\int_{-1}^0 -t\sqrt{1-t^2}\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\;\mathrm{d}t+$$

$$+\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\;\mathrm{d}t=\int_{-1}^0 -t\mathrm{d}t+\int_0^1 t\mathrm{d}t=1.$$

$\boxed{16}$ $\int\limits_C (x+y+z)\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C:\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ a,b>0. \\ z = bt, \end{cases}$

Rezolvare.

$$\int\limits_C (x+y+z)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + a\sin t + bt)\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t + a\sin t + bt)\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+b^2}\left(2a + \frac{b\pi^2}{8}\right).$$

$\boxed{17}$ $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)\ln z\,\mathrm{d}\ell$, dacă $C:\begin{cases} x = \mathrm{e}^t\cos t; \\ y = \mathrm{e}^t\sin t; \quad t\in[0,1]. \\ z = \mathrm{e}^t, \end{cases}$

$$\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)\ln z\,\mathrm{d}\ell = \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,t\cdot\mathrm{e}^t\sqrt{3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$$

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + \mathrm{e}^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + \mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sqrt{3}\,\mathrm{d}t.$$

$\boxed{18}$ Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului $C:\begin{cases} x = t; \\ y = \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ $t\in[0,1]$ şi are densitatea liniară $\rho(x,y) = 1+x$.

Rezolvare.

$$M = \int\limits_C (1+x)\,\mathrm{d}\ell = \int_0^1 (1+t)\cdot\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{7\sqrt{2}-2}{6}.$$

$\boxed{19}$ Să se calculeze masa firului material care este imaginea drumului $C:\begin{cases} x = 4t^5; \\ y = \sqrt{15}\,t^4; \quad t\in[-1,1] \\ z = 2t^3, \end{cases}$ şi are densitatea liniară $\rho(x,y,z) = \left|\dfrac{z}{2}\right|$.

Rezolvare.

$$M=\int_C\left|\frac{z}{2}\right|\mathrm{d}\ell=\int_{-1}^{1}\left|t^3\right|\cdot\sqrt{\left(20t^4\right)^2+\left(4\cdot\sqrt{15}t^3\right)^2+\left(6t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left|t^3\right|\cdot\sqrt{400t^8+240t^6+36t^4}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 t^3\sqrt{400t^8+240t^6+36t^4}\,\mathrm{d}t=$$

$$=4\int_0^1 t^5\sqrt{100t^4+60t^2+9}\,\mathrm{d}t=4\int_0^1 t^5\left(10t^2+3\right)\mathrm{d}t=5+2=7.$$

$\boxed{20}$ $\int_C y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases}x=\cos t;\\ y=\sin t.\end{cases}$ $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare.

$$\int_C y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 t\left(-\sin t\right)-\cos^2 t\cos t\right)\mathrm{d}t=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}.$$

$\boxed{21}$ $\int_C y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right);\\ y=t-2\operatorname{arctg}t,\end{cases}$ $t\in\left[-1,1\right]$.

Rezolvare.

$$\int_C y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\left[\left(t-2\operatorname{arctg}t\right)\cdot 1+\ln\left(1+t^2\right)\left(1+t^2\right)\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[t-2\operatorname{arctg}t+\left(1+t^2\right)\ln\left(1+t^2\right)-2\ln\left(1+t^2\right)\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{92-30\pi-12\ln 2}{9}.$$

$\boxed{22}$ $\int_C\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x-\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$, dacă $C:\begin{cases}x=\sqrt{t};\\ y=\sqrt{1-t},\end{cases}$ $t\in\left[0,1\right]$.

Rezolvare.

$$\int_C\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x-\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^1\left[\left(t+1-t\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}+\left(t-1+t\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right]\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}.$$

$\boxed{23}$ Să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{9x^2+4y^2+4y},$$

unde C este curba simplă, închisă şi orientată pozitiv care are drept imagine în plan elipsa $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ şi ambele extremităţi în punctul $(2,0)$.

Rezolvare. O parametrizare a curbei C poate fi

$$C:\begin{cases} x = 2\cos\theta; \\ y = 3\sin\theta, \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi].$$

$$\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{9x^2+4y^2+4y} =$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3\sin\theta\cdot(-2\sin\theta)}{36\cos^2\theta+36\sin^2\theta+12\sin\theta}-\frac{2\cos\theta(3\cos\theta)}{36+12\sin\theta}\right]d\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{-6}{36+12\sin\theta}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{-1}{6+2\sin\theta}d\theta=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$\boxed{24}$ Să se calculeze integrala

$$\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz,$$

dacă C este curba lui Viviani obţinută prin intersecţia suprafeţelor

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ şi } x^2+y^2-ax=0,\ a>0,\ z>0.$$

Rezolvare. O parametrizare a curbei C se obţine folosind coordonatele cilindrice $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ z=z$. Parametrizarea cilindrului impune $\rho^2-a\rho\cos\theta=0\Rightarrow\rho=a\cos\theta$.

Curba fiind pe sferă vom obţine

$$a^2\cos^4\theta+a^2\cos^2\theta\sin^2\theta+z^2=a^2,$$

de unde rezultă $z=a\sin\theta$.

În aceste condiţii:

$$\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz=a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5\theta+\sin^2\theta\cos2\theta+\frac{-\sin^3 2\theta}{4}\right)d\theta=-\frac{3\pi a^3}{4}.$$

Să se calculeze următoarele integrale verificând independenţa lor de drum:

$\boxed{25}$ $\int_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 e^x\,dx+2ye^x\,dy.$

Rezolvare.

$$P(x,y)=y^2\,\mathrm{e}^x;$$
$$Q(x,y)=2y\,\mathrm{e}^x.$$

Deoarece $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă că $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ este o diferenţială exactă. Considerăm drumul cu parametrizarea

$$\begin{cases} x=t; \\ y=2-t, \end{cases} \quad t\in[0,2]$$

şi integrala devine

$$\int_0^2 (2-t)^2\,\mathrm{e}^t-2(2-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\int_0^2\left(t^2-2t\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=-4.$$

26 Să se determine o funcţie $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ astfel încât $\mathrm{d}F=\omega$ dacă

$$\omega=y(y+2z)\mathrm{d}x+2x(y+z)\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}z.$$

Rezolvare. Fie

$$P(x,y,z)=y(y+2z),\ Q(x,y,z)=2x(y+z),\ R(x,y,z)=2xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y+2z=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=2x=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=2y=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Rezultă că expresia $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ este diferenţială totală exactă:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^2+2yz\Rightarrow F(x,y,z)=xy^2+2xyz+g(y,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2xy+2xz;\quad 2xy+2xz=2xy+2xz+\frac{\partial g}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow F(x,y,z)=xy^2+2xyz+h(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2xy;\quad 2xy=2xy+h'(z)\Rightarrow h'(z)=0.$$

Deci, funcţia $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ căutată va fi $F(x,y,z)=xy^2+2xyz+\mathrm{C}$.

3. TEST DE AUTOEVALUARE

1. Să se arate că drumul $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ este rectificabil

$$\gamma(t)=\begin{cases}\left(t^2\sin\dfrac{\pi}{t},t^2\right),\ t\in(0,1];\\ (0,0),\ t=0.\end{cases}$$

Răspuns. $\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}$ este mărginită.

2. Să se afle lungimea elipsei de semiaxe $a,b,\ a>b$.

Răspuns. $2a\pi\left[1-\dfrac{e^2}{2^2}-\dfrac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\dfrac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\dots\right]$, unde

$$e^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip:

3. $\displaystyle\int_\gamma y\,\mathrm{d}s,$ unde $\gamma:\begin{cases}x=a\cos^3 t;\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right].$

Răspuns. $\dfrac{3\sqrt{2}a^2}{40}$.

4. $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{y}\,\mathrm{d}s,$ unde $\gamma:\begin{cases}x=2t;\\ y=t^2;\\ z=\dfrac{2}{3}t^3,\end{cases}\quad t\in[0,1].$

Răspuns. $6\sqrt{3}-2+3\ln\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

5**.** Să se calculeze masa firului material cu densitatea

$$\rho(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\ln z$$

şi care are forma arcului de curbă:

$$AB:\begin{cases}x=e^t\cos t;\\ y=e^t\sin t;\quad t\in[0,1].\\ z=e^t,\end{cases}$$

Răspuns. Masa$=\displaystyle\int\limits_{AB}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\frac{1+2a^3}{3\sqrt{3}}$.

Să se calculeze integralele curbilinii de al doilea tip:

6. $\displaystyle\int\limits_{\gamma}\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$

$$\gamma:\begin{cases}x=a\cos t;\\ y=a\sin t,\end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$$

Răspuns. -2π.

Să se arate că următoarele integrale sunt independente de drum şi să se calculeze:

7. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)}2xy\,\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$.

Răspuns. 1.

8. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pe un drum care nu trece prin punctul $(0,0)$.

Răspuns. 9.

9. Să se calculeze

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,2)}yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z,$$

verificând că integrala este independentă de drum.

Răspuns. Dacă notăm cu

$$P(x,y,z)=yz,\ Q(x,y,z)=xz,\ Q=(x,y,z)=xy,$$

atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Să se calculeze integrala curbilinie:

10. $\displaystyle\int\limits_{C}xyz\mathrm{d}\ell$, dacă $C=\begin{cases}x=t;\\ y=\dfrac{2}{3}\sqrt{2t^3};\quad t\in[0,1].\\ z=\dfrac{1}{2}t^2,\end{cases}$

Răspuns. $\dfrac{16\sqrt{2}}{143}$.

4. TEMĂ DE CONTROL

1. Să se calculeze $\int\limits_C x\mathrm{d}y$ dacă

$$C = \begin{cases} x = \mathrm{e}^t; \\ y = \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right), \end{cases} \quad t \in [0, \ln 2].$$

Răspuns. $1 + \ln\frac{2}{3}$.

2. Să se calculeze integrala $\int\limits_C (\arcsin y)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$ dacă

$$C: \begin{cases} x = -t; \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

Răspuns. $\frac{3\pi}{8} - 2$.

3. Să se calculeze integrala

$$\int\limits_C x\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z, \quad \text{dacă } C: \begin{cases} x = \mathrm{e}^t; \\ y = \mathrm{e}^{-t}; \\ z = \sqrt{2}t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Răspuns. $\frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{2-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}}$.

4. Să se calculeze integrala

$$\int\limits_C z\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}z, \quad \text{dacă } C = \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a, b > 0.$$

Răspuns. $\frac{a^2 b}{2}(\pi - 1)$.

5. Să se calculeze integrala

$$\int_C \sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x+\sqrt{z^2+x^2}\,\mathrm{d}y+\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z,$$

unde C este curba simplă care are drept imagine segmentul din spaţiu AB cu $\mathrm{A}(-1,-1,-1)$ şi $\mathrm{B}(2,2,2)$ şi capătul în punctul A.

Răspuns. $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$.

6. Să se calculeze integrala

$$\int_C y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z,$$

unde C este curba simplă închisă care are drept imagine triunghiul din spaţiu $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$ cu vârfurile $\mathrm{A}_1(1,0,0)$; $\mathrm{A}_2(0,1,0)$; $\mathrm{A}_3(0,0,1)$.

Răspuns. $-\dfrac{3}{2}$.

7. Să se calculeze integrala

$$\int_{\left(\frac{1}{3},-2\right)}^{(3,0)} \frac{y}{1+xy}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y$$

pe o curbă a cărei imagine nu intersectează hiperbola $xy=-1$.

Răspuns. $\ln 3$.

8. Stabilind că expresia $\omega(x,y,z)=\left(y^2-3x^2\right)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y$ este o diferenţială totală să se găsească o funcţie $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, astfel încât $\mathrm{d}F=\omega$.

Răspuns. $F(x,y)=-x^3+xy^2+\mathrm{C}$.

9. Stabilind în prealabil că expresia

$$\omega=\left(\frac{z+xy}{xz}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x+x\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y+\frac{z-xy}{z^2}\mathrm{d}z,\ x>0,\ z>0$$

este o diferenţială totală să se găsească o funcţie $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, astfel încât $\mathrm{d}F=\omega$.

Răspuns. $F(x,y,z)=\ln xz-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z}+\dfrac{xy}{z}+\mathrm{C}$.

LECŢIA 10 - INTEGRALA DUBLĂ

1. Noţiuni teoretice

Fie D o mulţime compactă din $\mathbb{R}^2$ astfel încât $D \subset [a,b] \times [c,d]$. Frontiera domeniului D este o curbă închisă alcătuită dintr-o reuniune finită de imagini de curbe netede. Să considerăm diviziunile:

$$\delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b),$$
$$\overline{\delta} = (c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d)$$

ale intervalului $[a,b]$, respectiv $[c,d]$. Paralelele la axa Oy prin punctele diviziunii δ şi paralelele la axa Ox prin punctele diviziunii $\overline{\delta}$ împart dreptunghiul $[a,b] \times [c,d]$ în $n \times m$ dreptunghiuri de forma

$$I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_j],\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m.$$

Să notăm cu Λ mulţimea dreptunghiurilor conţinute în D sau care au puncte comune cu D.

Definiţia 6.1. Vom numi diviziune a domeniului D mulţimea dreptunghiurilor $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ din Λ şi vom nota $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$, ordinea de numerotare a dreptunghiurilor fiind arbitrară. Norma diviziunii Δ este egală cu

$$\|\Delta\| = \max\left\{x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1} \middle| 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\right\} = \max\left\{\|\delta\|, \|\overline{\delta}\|\right\}.$$

Să considerăm diviziunile δ şi $\overline{\delta}'$ ale intervalului $[a,b]$ şi, respectiv, $[c,d]$ mai fine decât δ; adică $\delta' \supset \delta,\ \overline{\delta}' \supset \overline{\delta}$. Acestor diviziuni le corespunde o diviziune Δ' a domeniului D care este mai fină decât Δ şi $\|\Delta'\| \le \|\Delta\|$, deoarece $\|\delta'\| \le \|\delta\|,\ \|\overline{\delta}'\| \le \|\overline{\delta}\|$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Notăm cu

$$m_k = \inf\left\{f(x,y) \middle| (x,y) \in \delta_k\right\},\ 1 \le k \le p,$$
$$M_k = \sup\left\{f(x,y) \middle| (x,y) \in \delta_k\right\},\ 1 \le k \le p$$

şi definim $s_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} m_k \cdot \text{aria}\, \delta_k$, suma Darboux inferioară, respectiv $S_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{p} M_k \cdot \text{aria}\, \delta_k$, suma Darboux superioară asociată funcţiei f şi diviziunii Δ.

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos volumul corpului mărginit de suprafaţa $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$, planul xOy şi cilindrul cu generatoarele paralele cu axa Oz şi a cărui curbă directoare în planul *x*O*y* este frontiera lui *D*. Pentru f pozitivă suprafaţa este situată deasupra planului *x*O*y* şi are ca proiecţie pe acest plan pe *D*.

Fie $(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k,\ 1\le k\le p$, un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ a domeniului *D*. Numărul real

$$\sigma_\Delta(f,\xi_k,\eta_k)=\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k,\eta_k)\cdot \text{aria}\,\delta_k$$

se numeşte suma Riemann asociată funcţiei *f*, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k,\ 1\le k\le p$.

Propoziţia 6.2

1. Dacă Δ' este o diviziune mai fina decât Δ, atunci

$$s_\Delta(f)\le s_{\Delta'}(f)\le S_{\Delta'}(f)\le S_\Delta(f).$$

2. Pentru orice diviziuni Δ şi Δ' ale lui *D* avem:

$$s_\Delta(f)\le S_{\Delta'}(f).$$

3. Pentru orice sumă Riemann $\sigma_\Delta(f,\xi_k,\eta_k)$, avem

$$s_\Delta(f)\le\sigma_\Delta(f,\xi_k,\eta_k)\le S_\Delta(f).$$

Definiţia 6.3. Spunem că funcţia *f* este integrabilă Riemann pe *D* dacă există $I\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$, astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui cu $\|\Delta\|<\delta_\in$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k,\ 1\le k\le p$, rezultă că

$$\left|\sigma_\Delta(f,\xi_k,\eta_k)-I\right|<\varepsilon.$$

Numărul *I* cu această proprietate se notează:

$$I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

şi se numeşte integrala dublă a lui f pe *D*. Domeniul *D* se numeşte domeniul de integrare, iar $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se numeşte elementul de arie.

Teorema 6.4 (Criteriul lui Darboux)

Funcţia mărginită $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe *D* dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\delta_\in>0$, astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui *D* cu $\|\Delta\|<\delta_\in$ să avem:

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon.$$

Din definiţia integralei duble rezultă următoarele proprietăţi (presupunem că integralele există):

a) aria domeniului *D* este dată de relaţia: $\text{aria}\, D = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

b) liniaritatea integralei duble este dată de formulele:

$$\iint\limits_D \left[f_1(x,y) + f_2(x,y) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_D \alpha f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \alpha \in \mathbb{R};$$

c) dacă *D* este împărţit în două subdomenii D_1 şi D_2 printr-o curbă, atunci

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

d) dacă f este pozitivă pe *D*, adică $f(x,y) \geq 0,\ (\forall)(x,y) \in D$, atunci

$$\iint\limits_D f(x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \geq 0;$$

e) dacă f este integrabilă pe *D*, atunci $|f|$ este integrabilă pe *D* şi are loc inegalitatea:

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leq \iint\limits_D \left| f(x,y) \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Teorema 6.5 Orice funcţie continuă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe *D*.

Mulţimea funcţiilor integrabile pe *D* este mai bogată decât mulţimea funcţiilor continue, după cum va rezulta din următoarea teoremă.

Definiţia 6.6. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte mulţime neglijabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir de dreptunghiuri deschise $(I_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2$, astfel încât:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aria}(I_n) < \varepsilon,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A.$$

Propoziţia 6.7

a) Orice mulţime cel mult numărabilă $A = \left\{ (x_n, y_n) \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$ este neglijabilă.

b) Dacă $A \subset B$ şi B este neglijabilă, atunci *A* este neglijabilă.

c) Orice reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile este o mulţime neglijabilă.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Notăm:

$$A_f := \left\{ (x,y) \in D \middle| (x,y) \text{ este punct de discontinuitate pentru } f \right\}.$$

Definiţia 6.8. Funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numeşte continuă aproape peste tot (prescurtat a.p.t.) dacă A_f este o mulţime neglijabilă.

Teorema 6.9 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)

O funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă este mărginită şi continuă aproape peste tot.

Teorema 6.10. Fie $f : D = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi integrabilă pe *D*, astfel încât pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala

$$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y := F(x).$$

Atunci funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x.$$

În mod analog, avem şi formula

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y.$$

De obicei, se notează:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right),$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right).$$

În acest fel,

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) = \int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right).$$

Definiţia 6.11. $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte domeniul simplu în raport cu axa O*y* dacă

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \right\},$$

unde funcţiile $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R},\ \varphi_1 \le \varphi_2$, sunt continue.

$D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte domeniul simplu în raport cu axa O*x* dacă

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \right\},$$

unde funcţiile $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R},\ \psi_1 \le \psi_2$, sunt continue.

Teorema 6.12. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa O*y* şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi integrabilă, astfel încât pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Atunci funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x.$$

Analog se scrie formula de calcul în cazul domeniilor simple în raport cu axa Ox. Într-adevăr, dacă

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\right\}$$

este un domeniu simplu în raport cu axa Ox, atunci are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Pentru calculul integralelor duble pe domenii mai complicate, împărţim aceste domenii cu ajutorul unor segmente paralele cu axele de coordonate, în subdomenii care sunt simple în raport cu axa Ox sau Oy, apoi folosim formulele anterioare şi proprietatea de aditivitate a integralei duble.

Fie $D'\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu compact, raportat la sistemul de referinţă cartezian $u\mathrm{O}v$, având frontiera Γ', care este urma unei curbe închise netede. Să considerăm transformarea regulată

$$T:\begin{cases} x=\varphi(u,v);\\ y=\psi(u,v),\end{cases}\quad \varphi,\psi\in\mathrm{C}^1(D_1);\quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\neq 0\ \text{ pe } D_1\subset\mathbb{R}^2,$$

unde D_1 este o mulţime deschisă ce conţine compactul $D'\subset\mathbb{R}^2$. Atunci când (u,v) parcurge pe D', (x,y) prin transformarea regulată T parcurge compactul $D\subset\mathbb{R}^2$ raportat la sistemul de referinţă cartezian xOy. În acest caz spunem că domeniul $D\subset\mathbb{R}^2$ este imaginea domeniului $D'\subset\mathbb{R}^2$ prin transformarea regulată T şi se scrie $D=T(D')$, iar frontiera Γ a domeniului este imaginea frontierei Γ' prin transformarea regulată T, adică $\Gamma=T(\Gamma')$. Dacă $\varphi,\psi\in\mathrm{C}^2(D_1)$, are loc formula schimbării de variabilă în integrala dublă.

Teorema 6.13 (Formula schimbării de variabilă în integrala dublă)

Fie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Să considerăm trecerea de la coordonatele carteziene (x,y) la coordonatele polare (ρ,θ) prin transformarea regulată.

$$T:\begin{cases} x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases};\ \rho\in[0,R],\ \theta\in[0,2\pi], \text{ unde } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho\neq 0.$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala dublă devine

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,\ D=T(D').$$

De asemenea, se foloseşte transformarea regulată care permite trecerea de la coordonatele carteziene (x,y) la coordonatele polare generalizate (ρ,θ):

$$T:\begin{cases} x = a\rho\cos\theta; \\ y = b\rho\sin\theta, \end{cases} \quad \rho\in[0,1],\ \theta\in[0,2\pi], \text{ unde } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho \neq 0.$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala dublă devine

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\iint_{D'} f(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,\ D = T(D').$$

Principalele aplicaţii ale integralelor duble sunt:

a) Fie $D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ un domeniu compact a cărui frontieră este urma unei curbe închise netede (sau netedă pe porţiuni). Aria domeniului *D* este dată de formula

$$\text{aria } D = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b) Fie funcţia $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continuă şi pozitivă. Notăm cu Γ_f subgraficul lui *f*:

$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| (x,y)\in D,\ 0\le z\le f(x,y)\right\}.$$

Volumul lui Γ_f este: $\text{volum}\,\Gamma_f = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

c) Să considerăm o placă materială plană neomogenă, de grosime neglijabilă, care are forma dată de domeniul compact $D\subset\mathbb{R}^2$. Dacă $\rho:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ este densitatea plăcii materiale şi ρ este presupusă continuă, atunci masa *M* a plăcii este

$$M = \iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Coordonatele (x_G, y_G) ale centrului de greutate al plăcii sunt de formulele:

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dacă $\rho = \text{const.}$ (placa este omogenă), atunci

$$x_G = \frac{1}{\text{aria } D}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad y_G = \frac{1}{\text{aria } D}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

d) Fie o placă materială plană neomogenă de grosime neglijabilă, care are forma dată de domeniul compact $D\subset\mathbb{R}^2$ şi $\rho:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ densitatea plăcii materiale. Momentul de inerţie faţă de originea axelor de coordonate este dat de formula

$$I_O = \iint_D \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Momentele de inerţie I_{Ox} şi I_{Oy} ale plăcii faţă de axele de coordonate O*x* şi O*y* au expresiile: $I_{Ox} = \iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y; I_{Oy} = \iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Are loc şi $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$.

2. Probleme rezolvate

$\boxed{1}$ Să se arate că funcţia $f:[0,1]\times[2,3]\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y^3$ este integrabilă.

Rezolvare. Funcţia *f* este continuă pe domeniul de definiţie, deci integrabilă.

$\boxed{2}$ Funcţia $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R},$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{dacă } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este integrabilă?

Rezolvare. Observăm că funcţia f este mărginită, deoarece $\left|f(x,y)\right|\leq 1$, $(\forall)\,x,y\in[-1,1]$. Pe de altă parte, f are un singur punct de discontinuitate, $(0,0)$. Conform criteriului lui Lebesgue f este integrabilă.

$\boxed{3}$ Să se calculeze aria domeniului plan din $\mathbb{R}^2: D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2\leq y\leq 4-x^2\right\}$

Rezolvare.

$$\text{aria}(D)=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2}^{4-x^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(4-x^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

$\boxed{4}$ Să se calculeze integrala dublă: $I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Rezolvare. Se observă că:

$$\left\{(x,y)\middle|0\leq x\leq 1, x\leq y\leq 1\right\}=\left\{(x,y)\middle|0\leq y\leq 1, 0\leq x\leq y\right\}.$$

Atunci: $I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int\limits_0^1 y\,\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

$\boxed{5}$ $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde D este domeniul mărginit de axa Ox şi semicercul superior $(x-2)^2+y^2=1$.

Rezolvare. $D=\left\{(x,y)\middle|1\leq x\leq 3, 0\leq y\leq\sqrt{1-(x-2)^2}\right\},$

$$I=\int\limits_1^3\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^3 x\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-2)^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 x\left(4x-x^2-3\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

Cu ajutorul unor schimbări de variabilă adecvate, să se calculeze integralele duble:

6 $\iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ a>0\right\}.$$

Rezolvare. Vom trece la coordonate polare:

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho\in[0,a],\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$ Rezultă:

$$\int_0^a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{e^{-\rho^2}}{-2}\right|_0^a=\frac{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}{4}.$$

7 $\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$; să se deducă valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Rezolvare. Folosind problema precedentă avem:

$$I=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\lim_{a\to\infty}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le a^2\\ x\ge 0,y\ge 0}}e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Pe de altă parte,

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$ Rezultă că $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{I}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8 Să se calculeze integrala dublă improprie $I=\iint\limits_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde D este exteriorul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

Rezolvare. Facem schimbarea de variabile

$x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta,\ J=ab\rho$, unde $\theta\in[0,2\pi],$ iar $\rho\in[1,\infty)$.

Rezultă: $I=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^\infty e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi ab}{e}$.

9 Să se afle volumul corpului mărginit de planul xOy, cilindrul $x^2+y^2=1$ şi planul $x+y+z=3$.

Rezolvare.

$\mathrm{Vol} = \iint\limits_D (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde D este proiecţia pe planul xOy a intersecţiei dintre planul $z = 3 - x - y$ şi cilindrul $x^2 + y^2 = 1$, adică $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. Atunci:

$$\mathrm{Vol} = \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (3 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 6\pi \int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho = 6\pi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1 = 3\pi .$$

$\boxed{10}$ Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru un sector circular omogen cu raza R şi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Rezolvare. Să notăm cu D domeniul din enunţ. Avem

$$I_1 = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R \rho\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^2}{8},$$

$$I_2 = \iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{R^3\sqrt{2}}{6},$$

$$I_3 = \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{R^3\left(2 - \sqrt{2}\right)}{6}.$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_G = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4R\sqrt{2}}{3}; \quad y_G = \frac{I_3}{I_1} = \frac{4R\left(2 - \sqrt{2}\right)}{3}.$$

$\boxed{11}$ Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa Oy al plăcii plane materiale delimitată de $y^2 = 1 - x,\ x = 0$, având densitatea $\rho(x, y) = xy$.

Rezolvare.

$$I_{0y} = \iint\limits_D xyx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x}} y\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{x^3(1-x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{40}.$$

$\boxed{12}$ Să se calculeze momentul de inerţie faţă de originea axelor al plăcii plane materiale omogene de densitate constantă ρ_0, delimitată de $x^2 + y^2 = R^2$.

Rezolvare. Fie $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$.

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^2\rho\mathrm{d}\rho = 2\pi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}.$$

$\boxed{13}$ Să se arate că mulţimea:

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \ge 2px,\ x^2 + y^2 \le 8p^2\right\},\ p > 0,$$

este măsurabilă Jordan şi să se calculeze aria sa.

Rezolvare. Cum ∂E este o curbă cu tangentă continuă pe porţiuni deducem că este neglijabilă Jordan $\Rightarrow E$ este măsurabilă Jordan. Există mai multe modalităţi de a calcula aria mulţimii *E*.

(i) Folosind aditivitatea de domeniu şi teorema Fubini:

$$\text{aria}\, E = 2\iint\limits_{(\text{OAC})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\left[\int_0^{2p}\left(\int_0^{\sqrt{2px}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{2p}^{2\sqrt{2}p}\left(\int_0^{\sqrt{8p^2-x^2}} \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \right.$$

$$\left. = 2\left(\sqrt{2p}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^{2p} + \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}p} + x\sqrt{8p^2-x^2}\right)\Bigg|_{2p}^{2\sqrt{2}p}\right] =$$

$$= \frac{4p^2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

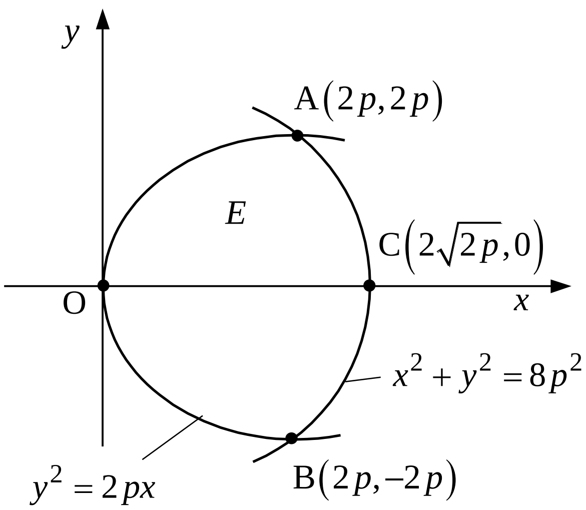

Fig. 6.1

(ii) Folosind faptul că domeniul *E* este simplu în raport cu axa O*y*:

$$\text{aria}\, E = \int_{-2p}^{2p}\left(\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\sqrt{8p^2-x^2}} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-2p}^{2p}\left(-\frac{y^2}{2p} + \sqrt{8p^2-x^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{4p^2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\textbf{14}}$ Să se calculeze integrala

$$I = \iint\limits_{[0,\pi]\times[a,b]} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y-\cos x},\ 1 < a < b,$$

şi apoi să se deducă valoarea integralei cu parametrii

$$J=\int_0^{\pi}\ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rezolvare. Funcţia integrant este continuă pe domeniul de integrare. Mai mult, deoarece domeniul este simplu în raport cu ambele axe, putem folosi teorema lui Fubini în două moduri diferite:

$$I=\int_a^b\left(\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{y-\cos x}\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\,\mathrm{d}y=\pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\,.$$

Pe de altă parte,

$$I=\int_0^{\pi}\left(\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y-\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\,\mathrm{d}x=J\,.$$

Am determinat astfel valoarea integralei J ca fiind:

$$J=\int_0^{\pi}\ln\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\,\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}.$$

15 Să se calculeze integrala

$$I=\iint\limits_{\left[0,\pi/2\right]\times[0,a]}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+y\cdot\cos x},\ 0<a<1,$$

şi apoi să se deducă valoarea integralei cu parametru

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\left(1+a\cdot\cos x\right)}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Rezolvare. Funcţia integrant este continuă pe domeniul de integrare. Mai mult, deoarece domeniul este simplu în raport cu ambele axe, putem folosi teorema lui Fubini în două moduri diferite:

$$I=\int_0^a\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cdot\cos x}\right)\mathrm{d}y=\int_0^a\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\,\mathrm{d}y\,.$$

Folosind schimbarea de variabliă $y=\cos\left(2\cdot u\right)$ obţinem:

$$I=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\cdot\left(\arccos a\right)^2.$$

Pe de altă parte,

$$I=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{1+y\cdot\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\left(1+a\cdot\cos x\right)}{\cos x}\,\mathrm{d}x=J\,.$$

Am determinat astfel valoarea integralei J ca fiind

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\cdot(\arccos a)^2.$$

Observăm că în integralal J funcţia integrant poate fi prelungită prin continuitate. Într-adevăr:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(1+a\cdot\cos x)}{\cos x}=a.$$

16 Să se calculeze integrala

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \text{unde}\ D=\left\{(x,y)\middle|\, y\le x^2,\, x^2+y^2\le 2\right\}.$$

Rezolvare.

$$y+y^2=2\Leftrightarrow y^2+y-2=0\Leftrightarrow y=1\ \text{şi}\ y=-2.$$

Dar $y\ge 0\Rightarrow y=1$ soluţie acceptabilă $y=x^2\Rightarrow x=\pm 1$.

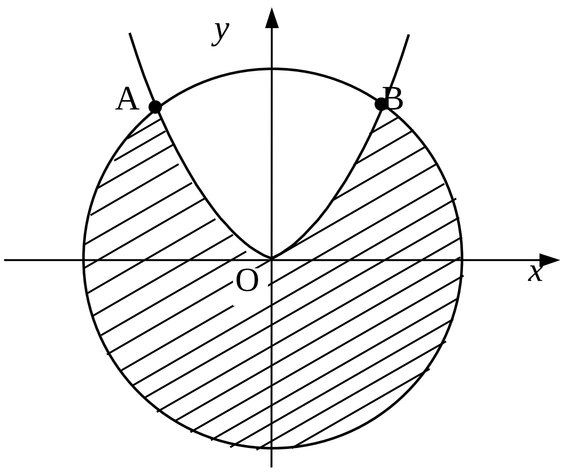

Fig. 6.2

Deci $\mathrm{A}(-1,1)$ şi $\mathrm{B}(1,1)$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{2}}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^2}y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4+x^2-2\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{15}.$$

Folosind aditivitatea de domeniu se putea calcula astfel:

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{15}.$$

17 Să se calculeze integrala $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde:

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, ax\le x^2+y^2\le 2ax,\ y\ge 0,\ a>0\right\}.$$

Rezolvare.

Utilizând transformarea în coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\ \rho\in[0,\infty); \\ y=\rho\sin\theta,\ \theta\in[-\pi,\pi], \end{cases}$$

domeniul D devine

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \rho\in[a\cos\theta,2a\cos\theta]\right\}.$$

Jacobianul transformării fiind egal cu ρ rezultă că:

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8a^3\cos^3\theta-a^3\cos^3\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\mathrm{d}\theta=\frac{7}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{14}{9}.$$

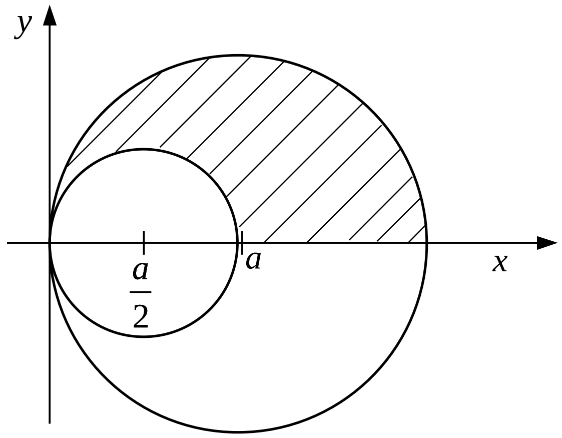

Fig. 6.3

18 Să se calculeze $\iint_D\sqrt{a^2-\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dacă D este interiorul cercului $x^2+y^2-2ax=0$, $a>0$.

Rezolvare. Trecând la coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta; \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}\quad \rho\in[0,\infty);\ \theta\in[-\pi,\pi),$$

domeniul D devine

$$\Delta=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,\rho\in[0,2a\cos\theta],\ \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

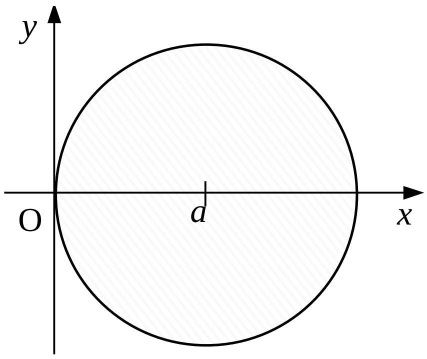

Fig. 6.4

$$\iint_D \sqrt{a^2-\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta}\sqrt{a^2-\left(\frac{\rho}{2\cos\theta}\right)^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\cos\theta}\frac{1}{2\cos\theta}\sqrt{4a^2\cos^2\theta-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos\theta}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(4a^2\cos^2\theta-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6\cos\theta}8a^3\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\mathrm{d}\theta=\frac{2a^3\pi}{3}.$$

3. Test de autoevaluare

1. Să se calculeze ariile domeniilor plane:

a) $D=\left\{(x,y)\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$; b) $D=\left\{(x,y)\middle|\,1\le x^2+y^2\le 9,\ x\le y\le 3x\right\}$.

Răspuns: a) πab; b) $\frac{4\pi}{3}$.

2. Să se calculeze următoarele integrale duble:

a) $\iint\limits_D x\sin(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=[0,1]\times[0,\pi]$;

b) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde $D=\left\{(x,y)\middle|\,x\in[1,2],\ \frac{1}{x}\le y\le x\right\}$.

Răspuns: a) 1; b) $\frac{9}{4}$.

3. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafeţele:

a) $z=0,\ x^2+y^2=1,\ x+y+z=3$; b) $z=xy^2,\ x^2+y^2=R^2,\ y=0,\ x=0$, aflat în primul cadran.

Răspuns: a) 3π; b) $\frac{R^5}{15}$.

4. Să se calculeze masa unei plăci plane de grosime neglijabilă dacă densitatea $\rho(x,y)=x^2+y^2$, iar $D=\left\{(x,y)\middle|1\le\frac{x^2}{4}+y^2\le 4\right\}$.

Răspuns. $\frac{75\pi}{2}$.

5. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci plane de grosime neglijabilă cu densitatea $\rho(x,y)=y$ şi care are forma dată de domeniul

$$D=\left\{(x,y)\middle|x+y\le 2,\ y\ge x^2\right\}.$$

Răspuns. $x_{\text{G}}=-\frac{25}{32},\ y_{\text{G}}=\frac{235}{112}$.

6. Să se afle momentul de inerţie în raport cu axa Ox a triunghiului delimitat de dreptele $x=2,\ y=2,\ x+y-2=0$.

Răspuns. 4.

7. Să se calculeze aria figurii limitate de curbele

$$x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=4x;\ y=x \text{ şi } y=0.$$

Răspuns. Se trece la coordonate polare, $A=3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

7. Să se calculeze integrala

$$\iint_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dacă domeniul D este limitat de elipsa, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b\in\mathbb{R}_+^*$. **Răspuns.** $\frac{2}{3}\pi ab$.

8. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei plăci omogene limitată de curbele $x^2=ay,\ x+y=2a,\ a>0$.

Răspuns. $\left\{x_{\text{G}}=-\frac{a}{2};\quad y_{\text{G}}=\frac{8}{5}a.\right.$

9. Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbele

$$xy=a^2;\ x+y=\frac{5}{2}a,\ a>0.$$

Răspuns. $\frac{15}{8}-2\ln 2$.

LECŢIA 11 - INTEGRALA TRIPLĂ

1. Noţiuni teoretice

Fie V o mulţime compactă din $\mathbb{R}^3$, astfel încât $V\subset[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$. Frontiera domeniului V este o reuniune de suprafeţe netede. Să considerăm diviziunile

$$\delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b),$$
$$\overline{\delta}=(c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d),$$
$$\overline{\overline{\delta}}=(x=z_0<z_1<\ldots<t_p=g)$$

ale intervalelor $[a,b]$, $[c,d]$, $[e,g]$. Planele paralele cu planele $zOz,\ zOx,\ xOy$ duse prin punctele diviziunilor $\delta,\ \overline{\delta},\ \overline{\overline{\delta}}$ împart paralelipipedul $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ în $n\times m\times p$ paralelipipede de forma:

$$I_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k,\ ],\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m,\ 1\le k\le p.$$

Să notăm cu Δ mulţimea paralelipipedelor conţinute în V sau care au puncte comune cu V.

Definiţia 7.1. Vom numi diviziune a domeniului V mulţimea paralelipipedelor $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_r$ din Λ şi o vom nota:

$$\Delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_r),\ \ r=n\times m\times\rho,$$

ordinea de numerotare fiind arbitrară. Norma diviziunii Δ este egală cu

$$\|\Delta\|=\max_{1\le i\le n,\,1\le j\le m.\,1\le k\le p}\{x_i-x_{i-1},y_j-y_{j-1},z_k-z_{k-1}\}=\max\left\{\|\delta\|,\|\overline{\delta}\|,\|\overline{\overline{\delta}}\|\right\}.$$

Să considerăm diviziunile $\delta,\ \overline{\delta},\ \overline{\overline{\delta}}$ ale intervalelor $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$, care sunt mai fine decât $\delta,\ \overline{\delta},\ \overline{\overline{\delta}}\supset\delta,\ \overline{\delta}'\supset\overline{\overline{\delta}}$. Acestor diviziuni le corespunde o diviziune Δ' a domeniului V care este mai fină decât Δ şi $\|\Delta'\|\le\|\Delta\|$, deoarece

$$\|\delta'\|\le\|\delta\|,\quad \|\overline{\delta}'\|\le\|\overline{\delta}'\|,\quad \|\overline{\overline{\delta}}'\|\le\|\overline{\overline{\delta}}\|.$$

Fie $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Notăm cu

$$m_k=\inf\{f(x,y,z)|(x,y,z)\in\delta_k\},\ 1\le k\le r,$$
$$M_k=\sup\{f(x,y,z)|(x,y,z)\in\delta_k\},\ 1\le k\le r,$$

şi cu υ_k volumul paralelipipedului $\delta_k,\ 1\le k\le r$. Definim

$$s_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{r}m_k\cdot\upsilon_k;\quad S_\Delta(f)=\sum_{k=1}^{r}M_k\cdot\upsilon_k$$

suma Darboux inferioară, respectiv suma Darboux superioară asociată funcţiei f şi diviziunii Δ.

Sumele Darboux $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos, masa unui corp neomogen de densitate variabilă $f(x,y,z)\ge0$ şi de volum V.

Fie $\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\in\delta_k,\ 1\le k\le r$, un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ a domeniului *V*. Numărul real

$$\sigma_\Delta\left(f,\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)=\sum_{k=1}^{r} f\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\cdot \upsilon_k$$

se numeşte suma Riemann asociată funcţiei *f*, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\in\delta_k,\ 1\le k\le r$.

Propoziţia 7.2

1. Dacă Δ' este o diviziune mai fină decât Δ, atunci:

$$s_\Delta\left(f\right)\le s_{\Delta'}\left(f\right)\le S_{\Delta'}\left(f\right)\le S_\Delta\left(f\right).$$

2. Pentru orice diviziuni Δ şi Δ' ale lui *V* avem:

$$s_\Delta\left(f\right)\le S_{\Delta'}\left(f\right).$$

3. Pentru orice sumă Riemann $\sigma_\Delta\left(f,\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)$ avem

$$s_\Delta\left(f\right)\le\sigma_\Delta\left(f,\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\le S_\Delta\left(f\right).$$

Definiţia 7.3. Spunem că funcţia *f* este integrabilă Riemann pe $V\subset\mathbb{R}^3$ dacă există $I\in R$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui V cu $\left\|\Delta\right\|<\delta_\varepsilon$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\in\delta_k,\ 1\le k\le r$, rezultă că:

$$\left|\sigma_\Delta\left(f,\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)-I\right|<\varepsilon.$$

Numărul *I* cu această proprietate se notează:

$$I=\iiint\limits_V f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

şi se numeşte integrala triplă (sau integrala de volum) a lui f pe *V*. Domeniul *V* se numeşte domeniul de integrare, iar $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se numeşte elementul de volum.

Teorema 7.4 (Criteriul lui Darboux)

Funcţia mărginită $f:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $V\subseteq D$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a lui V cu $\left\|\Delta\right\|<\delta_\varepsilon$ să avem

$$S_\Delta\left(f\right)-s_\Delta\left(f\right)<\varepsilon.$$

Teorema 7.5. Orice funcţie continuă $f:V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe *V*.

Din definiţia integralei triple rezultă următoarele proprietăţi (presupunem că integralele există):

a) volumul domeniului *V* este $\text{volum}V=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

b) liniaritatea integralei triple este dată de formulele:

$$\iiint\limits_V \left[f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_V f_2(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_V \alpha f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \alpha \iiint\limits_V f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

c) dacă *V* este împărţit în două subdomenii V_1 şi V_2 printr-o suprafaţă, atunci:

$$\iiint\limits_V f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{V_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,;$$

d) $f(x,y,z) \geq 0,\ \forall (x,y) \in D$ implică

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \geq 0\,;$$

e) are loc inegalitatea

$$\left| \iiint\limits_V f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right| \leq \iiint\limits_V \left| f(x,y,z) \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Calculul integralei triple se reduce la calculul succesiv a trei integrale simple.

Teorema 7.6. Fie $f : V = [a,b] \times [c,d] \times [e,g] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi integrabilă pe *V*, astfel încât pentru orice $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$ există integrala:

$$\int_e^g f(x,y,z)\mathrm{d}z := F(x,y).$$

Atunci funcţia $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ şi are loc relaţia: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \left(\int_e^g f(x,y,z)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

unde am notat $D := [a,b] \times [c,d]$.

Definiţia 7.7. $V \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte domeniu simplu în raport cu axa Oz dacă

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \right\},$$

unde funcţiile $\varphi, \psi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt continue.

Teorema 7.8. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axa O*y* şi $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi integrabilă astfel încât pentru orice $(x,y) \in D$ există integrala

$$\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z := F(x,y).$$

Atunci funcţia $F : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe *D* şi are loc relaţia:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Dacă domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu în raport cu axa O*y*,

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le x \le b,\ u(x) \le x \le v(x) \right\},$$

iar $V \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oz,

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in D, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \right\},$$

atunci avem următoarea formulă de calcul pentru integrala triplă:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \iint\limits_D \int\limits_{u(x)}^{v(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z .$$

Pentru calculul integralelor triple pe domenii mai complicate, împărţim aceste domenii cu ajutorul unor plane paralele cu planele de coordonate, în subdomenii care sunt simple în raport cu una din axe, apoi folosim formulele anterioare şi proprietatea de aditivitate a integralei triple.

Fie $V' \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact, raportat la sistemul de referinţă cartezian O*uvw*, având frontiera S', care este o suprafaţă închisă netedă. Să considerăm transformarea regulată

$$T: \begin{cases} x = f(u,v,w); \\ y = g(u,v,w); \quad f,g,h \in C^1(V_1);\ \dfrac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} \ne 0 \text{ pe } V \subset \mathbb{R}^3, \\ z = h(u,v,w), \end{cases}$$

unde V_1 este o mulţime deschisă ce conţine compactul $V' \subset \mathbb{R}^3$. Atunci când (u,v,w) parcurge pe V', (x,y,z) prin transformarea regulată *T* parcurge compactul $V \subset \mathbb{R}^3$ raportat la sistemul de referinţă cartezian O*xzy*. În acest caz, spunem că domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$ este imaginea domeniului $V' \subset \mathbb{R}^3$ prin transformarea regulată *T* şi se scrie $V = T(V')$, iar frontiera *S* a domeniului *V* este imaginea frontierei S' prin transformarea regulată *T*, adică $S = T(S')$. În aceste condiţii are loc formula schimbării de variabilă în integrala triplă.

Teorema 7.9. (Formula schimbării de variabilă în integrala triplă)

Fie $F: V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe *V*. Atunci:

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y = \iiint\limits_{V'} F\big(f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w)\big)\left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w .$$

Să considerăm trecerea de la coordonatele carteziene x, y, z la coordonatele sferice ρ, θ, φ prin

$$T:\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi; \quad \rho\in[0,R],\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi], \\ z=\rho\cos\theta; \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=\rho^2\sin\theta .$$

În acest caz formula de schimbare de variabilă în integrala triplă devine:

$$\iiint_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y =$$

$$=\iiint_{V'} F(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Mai general, se poate considera transformarea regulată

$$T:\begin{cases} x=a\rho\sin\theta\cos\varphi; \\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi; \quad \rho\in[0,1],\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi], \\ z=\rho\cos\theta; \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}=abc\rho^2\sin\theta ,$$

care permite trecerea de la coordonatele carteziene x,y,z la coordonatele sferice generalizate ρ,θ,φ.

De asemenea, se utilizează trecerea de la coordonate carteziene la coordonate cilindrice prin transformarea regulată

$$T:\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi; \quad \rho\in[0,R],\theta\in[0,2\pi],\varphi\in[0,h], \\ z=z; \end{cases}$$

unde

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)}=\rho .$$

În acest caz, formula de schimbare de variabilă în integrala triplă devine:

$$\iiint_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'} F(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z .$$

Cele mai importante aplicaţii ale integralelor triple sunt:

a) Fie $V\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu compact a cărui frontieră este urma unei suprafeţe închise netede (sau netedă pe porţiuni). Volumul domeniului V este dat de formula

$$\mathrm{volum}(V)=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

b) Să considerăm un corp material neomogen ce ocupă în spaţiu domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct a corpului material dată de funcţia continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$. Masa corpului material este

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

iar coordonatele centrului de greutate $(x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G}, z_\mathrm{G})$ sunt date de formulele:

$$x_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$y_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\iiint_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$z_\mathrm{G} = \frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

c) Momentele de inerţie faţă de axele de coordonate ale unui corp material, de densitate ρ care ocupă domeniul *V*, sunt date de egalităţile:

$$I_{\mathrm{O}x} = \iiint_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$I_{\mathrm{O}y} = \iiint_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$I_{\mathrm{O}z} = \iiint_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Momentele de inerţie faţă de planele de coordonate ale aceluiaşi corp sunt

$$I_{x\mathrm{O}y} = \iiint_V z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$I_{x\mathrm{O}z} = \iiint_V y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$I_{y\mathrm{O}z} = \iiint_V x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

iar momentul de inerţie faţă de originea axelor de coordonate este

$$I_\mathrm{O} = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

d) Fie un corp material neomogen care ocupă în spaţiu domeniul compact $V \subset \mathbb{R}^3$ şi presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct al corpului material dată de funcţia continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3$ şi presupunem cunoscută densitatea în fiecare punct al corpului material dată de funcţia continuă $\rho : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$.

Potenţialul newtonian al corpului în punctul $\mathrm{P}(a,b,c)$ este dat de formula

$$U(a,b,c)=\iiint_V \frac{\rho(x,y,z)}{r(x,y,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde $r(x,y,z)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ este distanţa dintre punctul curent $\mathrm{M}(x,y,z)\in V$ şi punctul $\mathrm{P}(a,b,c)$.

Corpul material neomogen atrage punctul material $\mathrm{P}(a,b,c)$ de masă m cu o forţă $\overline{F}$ (îndreptată spre corpul material) ale cărei proiecţii pe axele de coordonate sunt:

$$F_x=K\cdot m\cdot\iiint_V \frac{x-a}{r^3(x,y,z)}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_y=K\cdot m\cdot\iiint_V \frac{y-b}{r^3(x,y,z)}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_z=K\cdot m\cdot\iiint_V \frac{z-c}{r^3(x,y,z)}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde K este constanta atracţiei universale.

2 Probleme rezolvate

$\boxed{1}$ Să se calculeze volumul corpului mărginit de $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ $z\le 1-y^2,\ x+y\le 1$.

Rezolvare. Volumul unui corp este dat de expresia

$$\mathrm{Vol}=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde

$$V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x\in[0,1],\, 0\le y\le 1-x,\, 0\le z\le 1-y^2\right\},$$

domeniu simplu în raport cu axa Oz (în spaţiu) şi axa Oy (în plan). Rezultă:

$$\mathrm{Vol}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-y^2}\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(1-x-\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y=0}^{y=1-x}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1\left(1-x-\frac{(1-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$$

$\boxed{2}$ Să se calculeze volumul corpului sferic

$$V=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le R\right\}.$$

Rezolvare. Coordonatele sferice ρ,θ,φ sunt legate de coordonatele carteziene prin relaţiile

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta$$

cu

$$0 \le \rho \le R,\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi] \text{ şi } J = \rho^2 \sin\theta \text{ (Jacobianul).}$$

Aşadar:

$$\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R} \rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{R} \rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

$\boxed{3}$ Să se calculeze volumul elipsoidului

$$V = \left\{ (x,y,z) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}.$$

Rezolvare. Aplicăm coordonatele sferice generalizate

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = c\rho\cos\theta$$

Cu $0 \le \rho \le 1,\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi]$. Jacobianul transformării este $J = abc\rho^2 \sin\theta$.

$$\mathrm{Vol} = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{1} abc\rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Dacă $a = b = c = R$, se obţine volumul corpului sferic.

$\boxed{4}$ Să se calculeze volumul cilindrului

$$V = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le h \right\}.$$

Rezolvare. Trecând la coordonate cilindrice

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z \text{ şi } J = \rho,$$

obţinem:

$$\mathrm{Vol} = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R} \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{h} \mathrm{d}z = 2\pi \frac{R^2}{2} h = \pi R^2 h.$$

$\boxed{5}$ Să se calculeze următoarele integrale triple:

$$I = \iiint_V xyz \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde V este delimitat de suprafeţele $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.

Rezolvare. Domeniul

$$V = \left\{ (x,y,z) \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 1 - x - y \right\}$$

este un domeniu simplu în raport cu axa Oz. Rezultă:

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} xyz\mathrm{d}z=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{xy(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$\int_0^{1-x}\frac{xy(1-x-y)^2}{2}\mathrm{d}y=\left(\frac{xy^2}{4}+\frac{x^3y^2}{4}+\frac{xy^4}{8}-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{xy^3}{3}+\frac{x^2y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}=$$

$$=\frac{\left(x+x^3\right)(1-x)^2}{4}+\frac{x(1-x)^4}{8}-\frac{x^2(1-x)^2}{2}-\frac{(1-x)^3\left(x^2-x\right)}{3}=\frac{x(1-x)^4}{24}.$$

Deci:

$$I=\int_0^1\frac{x(1-x)^4}{24}\mathrm{d}x=\frac{1}{24}\int_0^1 x\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{720}.$$

$\boxed{6}$ $I=\iiint_V x^2y^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde V este elipsoidul $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

Rezolvare. Facem schimbarea de variabile $x=a\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=c\rho\cos\theta$ cu $\rho\in[0,1]$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $J=abc\rho^2\sin\theta$.

$$I=a^3b^3c^3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^8\mathrm{d}\rho=$$

$$=\frac{a^3b^3c^3}{9}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^5\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{16a^3b^3c^3}{945}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4a^3b^3c^3}{945}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{4a^3b^3c^3}{945}\left(\frac{\varphi}{8}-\frac{\sin 4\varphi}{32}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi a^3b^3c^3}{945}.$$

$\boxed{7}$ Să se determine coordonatele centrului de greutate al corpului cuprins între paraboloidul $z=1-x^2-y^2$ şi planul $z=0$.

Rezolvare. Calculăm volumul şi momentele statice faţă de planele de coordonate

$$V=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\left(\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z\right)=\iint_D\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2},\ \text{unde}\ D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}\subset\mathbb{R}^2.$$

$$S_{yOz}=\iiint_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z=\iint_D x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho=\frac{4}{15}\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{15}\sin\theta\Big|_0^{2\pi}=0.$$

$$S_{xOz}=\iiint_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}\mathrm{d}z=\iint_D y\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^1\rho^2\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{15}\int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{15}(-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

$$S_{xOy}=\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2-y^2}z\mathrm{d}z=$$

$$=\iint_D\left(1-x^2-y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(1-\rho^2\right)^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}.$$

Rezultă coordonatele centrului de greutate:

$$x_G=\frac{S_{yOz}}{V}=0;\ y_G=\frac{S_{xOz}}{V}=0;\ z_G=\frac{S_{xOy}}{V}=\frac{1}{3}.$$

$\boxed{8}$ Să se calculeze momentul de inerţie faţă de planul (yOz) al unui sfere cu centrul în origine şi de densitate constantă ρ.

Rezolvare.

$I_{yOz}=\rho_0\iiint_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde

$$V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le\mathbb{R}^2\right\}.$$

Folosind coordonatele sferice

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta,\ j=\rho^2\sin\theta$$

se obţine

$$I_{yOz}=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{4\pi R^5}{15}.$$

$\boxed{9}$ Să se calculeze integrala $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, domeniul V fiind limitat de suprafeţele $x^2+y^2=z^2;\ z=1$.

Rezolvare.

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{pr_{xOy}V}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

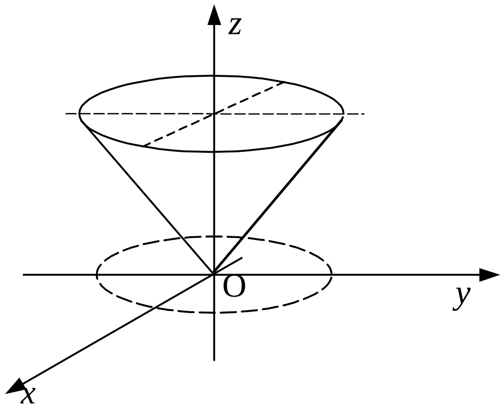

Fig. 7.1

Trecând la coordonate polare $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, & \rho\in[0,\infty); \\ y=\rho\sin\theta, & \theta\in[0,2a), \end{cases}$ domeniul $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$ devine $\Delta=\left\{(\rho,\theta)\middle|\rho\in(0,1],\theta\in[0,2\pi)\right\}$ şi deoarece Jacobianul transformării este $\rho\neq 0$ obţinem că:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^2(1-\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}.$$

$\boxed{10}$ Să se calculeze valoarea integralei

$$\iiint\limits_D x^P y^q z^r (1-x-y-z)^s\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \ p,q,r,s>0,$$

unde $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle| x+y+z-1\le 0,\ x,y,z\ge 0\right\}$.

Rezolvare. Funcţia integrant este continuă şi domeniul este simplu în raport cu Oz.

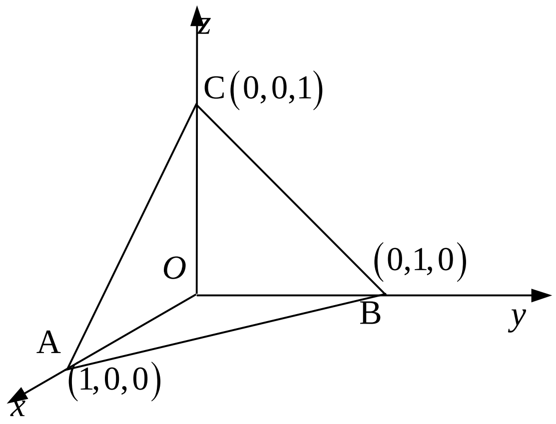

Fig. 7.2

Folosind teorema lui Fubini deducem

$$\iiint_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\mathrm{AOB}} \left(\int_0^{1-x-y} x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Făcând în această integrală schimbarea de variabilă $z = (1-x-y)u$, integrala devine:

$$I = \iint_{\mathrm{AOB}} x^p y^q \left(\int_0^1 (1-x-y)^{r+s+1} u^r (1-u)^s \,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= B(r+1, s+1) \int_0^1 \int_0^{1-x} x^p y^q (1-x-y)^{r+s+1} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cu schimbarea de variabilă $y = (1-x)v$ integrala devine

$$I = B(r+1, s+1) \int_0^1 \int_0^1 x^p (1-x)^{q+r+s+2} v^q (1-v)^{r+s+1} \,\mathrm{d}v\mathrm{d}x =$$

$$= B(r+1, s+1) B(q+1, r+s+2) B(p+1, q+r+s+3) =$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

$\boxed{11}$ Să se afle volumul corpului Ω limitat de suprafeţele $x^2 + y^2 = az$ şi $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$.

Rezolvare. Paraboloidul de rotaţie $z = \dfrac{x^2 + y^2}{a}$ şi conul $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ se intersectează după cercul $z = a$ $x^2 + y^2 = a^2$ a cărui proiecţie în planul xOy este $z = 0,\ x^2 + y^2 = a^2$.

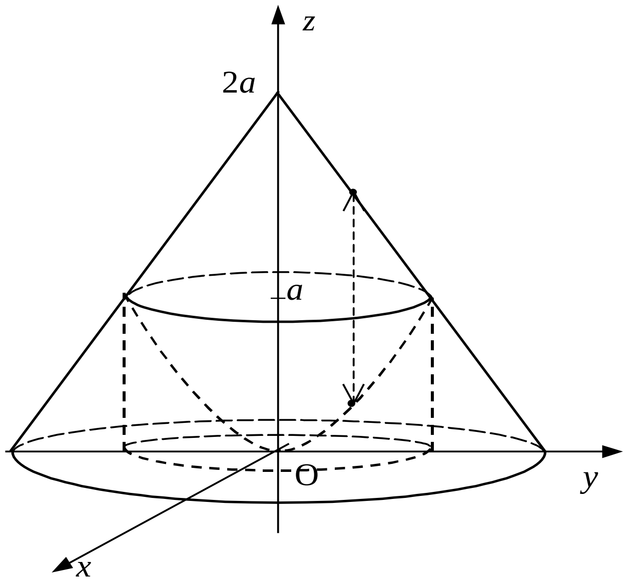

Fig. 7.3

În aceste condiţii volumul corpului Ω va fi

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\int_{\frac{x^2+a^2}{a}}^{2a-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(2a-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+a^2}{a}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[2a\rho-\rho^2-\frac{\rho^3}{a}\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi a^3}{6}.$$

$\boxed{\textbf{12}}$ Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafeţele $x^2+y^2+z^2=2az$ şi $x^2+y^2\le z^2$.

Rezolvare. Sfera $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ intersectează conul $z^2=x^2+y^2$ după curba $z=a,\ x^2+y^2=a^2$ care se proiectează în planul xOy în curba $z=0,\ x^2+y^2=a^2$. În aceste condiţii volumul corpului limitat de cele două suprafeţe va fi

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\rho^2-a\rho+\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{2}+\frac{1}{3}a^3\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^3}{3}.$$

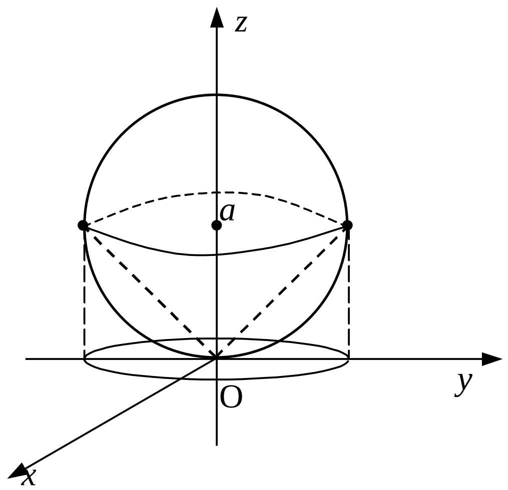

Fig. 7.4

$\boxed{13}$ Să se calculeze volumul corpului cuprins între suprafeţele $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ şi $x = -1, x = 2$.

Rezolvare. Corpul cuprins între cilindrii $z = 4 - y^2$ şi $z = y^2 + 2$ se proiectează în planul $y\mathrm{O}z$ în domeniul ABCD.

În aceste condiţii volumul corpului va fi

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{1}\left(\int_{y^2+2}^{4-y^2} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(\int_{-1}^{1}\left(2 - 2y^2\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(4 - \frac{4}{3}\right)3 = 8.$$

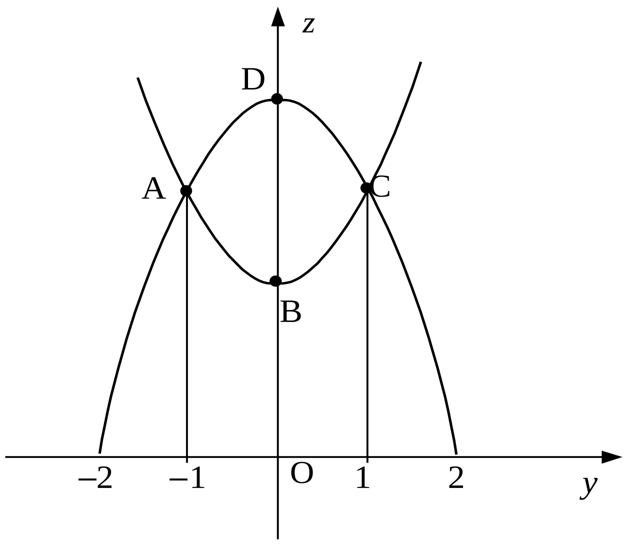

Fig. 7.5

$\boxed{14}$ Determinaţi centrul de greutate al unui corp având forma unei semisfere $z \geq 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ştiind că densitatea într-un punct oarecare al solidului este proporţională cu distanţa de la acest punct la centrul sferei.

Rezolvare. Coordonatele centrului de greutate se calculează cu ajutorul formulelor:

$$x_G = \frac{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z};\ y_G = \frac{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z};$$

$$z_G = \frac{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} \gamma(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

unde $\gamma(x,y,z)$ este densitatea corpului Ω în punctul (x,y,z).

Trecând la coordonate sferice, vom obţine relaţiile

$$M = \iiint\limits_{\Omega} k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} k \cdot \rho \cdot \rho^2 \sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= k\frac{a^4}{4}\cdot 2\pi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\pi a^4}{2}$$

$$M_x = \iiint\limits_{\Omega} x \cdot k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} \rho\sin\theta\cos\varphi \cdot \rho^3 \sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 0$$

$$M_y = \iiint\limits_{\Omega} y \cdot k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} \rho\sin\theta\sin\varphi \cdot \rho^3 \sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 0$$

$$M_z = \iiint\limits_{\Omega} z \cdot k \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = k\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} \rho\cos\theta\rho^3 \sin\theta\sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= k\frac{a^5}{5}2\pi\left(-\frac{\cos 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ka^5\pi}{5}.$$

Obţinem deci $x_G = 0,\ y_G = 0$ şi $z_G = \dfrac{2a}{5}$.

$\boxed{15}$ Calculaţi integrala

$$\int_0^{2r}\left(\int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} 3\left(x^3+y^2\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

determinând domeniul de integrare.

Rezolvare. Domeniul de integrare Ω este determinat de intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 2rx$ cu semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2\ (z \geq 0)$.

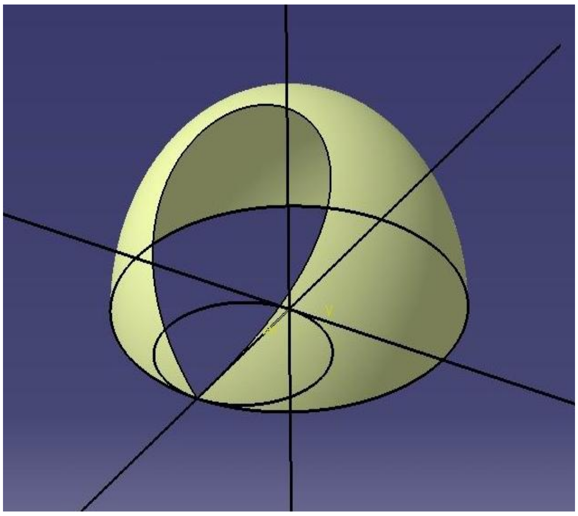

Fig. 7.6

Trecând la coordonate cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \geq 0, \\ y = \rho\sin\theta, & \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ z = z, & z \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

integrala devine

$$\iiint_\Omega 3\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{x^2+y^2 \leq 2rx} \left(3\left(x^2+y^2\right)\int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2r\cos\theta} 3\rho^2\sqrt{4r^2-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \right) =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2r\cos\theta} 3\rho^3\sqrt{4r^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \right)\mathrm{d}\theta = r^5\left(\frac{1036}{75} + \frac{64}{5}\pi \right).$$

16 Să se calculeze integrala

$$\iiint_\Omega \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

dacă Ω este domeniul compact mărginit de elipsoidul $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0$.

Rezolvare. Trecând la coordonate sferice generalizate

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi, & \rho \in [0,1], \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi, & \theta \in [0,\pi], \\ z = c\rho\cos\theta, & \varphi \in [0,2\pi], \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $J = abc\rho^2\sin\theta$ şi integrala devine

$$J = abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{16}\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi^2}{4}abc.$$

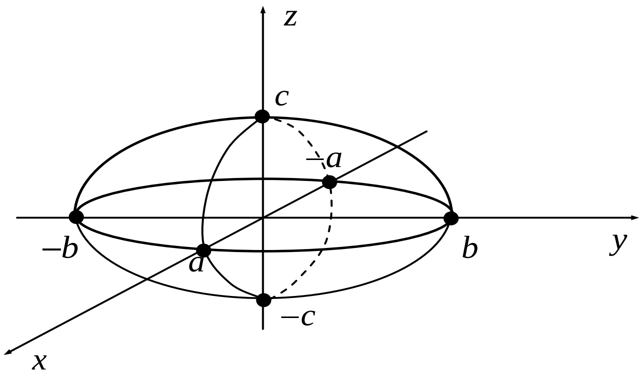

Fig. 7.7

3. Test de autoevaluare

1. Să se calculeze volumele domeniilor din $\mathbb{R}^3$:

a) $V=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2\le a^2,\, 0\le z\le x^2+y^2\right\}$;

b) $V=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 5,\, x^2+y^2\le 4z\right\}$

Răspuns : a) $\dfrac{\pi a^4}{2}$; b) $\dfrac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-4\right)$.

2. Să se calculeze: $\iiint\limits_V 45x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, unde

$$V=\left\{(x,y,z)\middle| x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ 4x+2y+z\le 8\right\}.$$

Răspuns. 128.

3. $\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$, unde domeniul *V* este mărginit de sferele $x^2+y^2+z^2=R^2$ şi $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$.

Răspuns. $\dfrac{5\pi R^4}{24}$.

4. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate a jumătăţii superioare a unui elipsoid omogen de semiaxe a,b,c.

Răspuns. $x_G=0;\ y_G=0;\ z_G=\dfrac{3c}{8}$.

5. Să se calculeze

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Răspuns. $\pi\sqrt{\pi}$.

6) Să se calculeze $\iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dacă domeniul

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle| z\ge 0,\ r^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2\right\},\ r,R\in\mathbb{R}_+^*;\ r<R.$$

Răspuns. $\dfrac{4}{15}\pi\left(R^5-r^5\right)$.

7. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafeţele următoare:

$$x^2+y^2+z^2=1;\ x^2+y^2+z^2=16;\ z^2=x^2+y^2;$$
$$x=0;\ y=0;\ z=0\quad (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0).$$

Răspuns. $\dfrac{21\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}\pi$.

8. Să se calculeze $\iiint\limits_{\Omega}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dacă domeniul Ω este limitat de suprafaţa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Răspuns. $\dfrac{4}{5}\pi abc$.

9. Să se calculeze volumul corpului Ω limitat de suprafeţele

$$az=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\quad (a>0).$$

Răspuns. $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

10. Să se calculeze volumul corpului limitat de sfera $x^2+y^2+z^2=4$ şi suprafaţa $x^2+y^2=3z$ (interiorul acestei suprafeţe).

Răspuns. $\dfrac{19\pi}{6}$.

11. Din porţiunea bilei $x^2+y^2+z^2\le c$ aflată în primul octant $\left(x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0\right)$ se decupează un corp OABC limitat de planele de coordonate şi de planul $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0\quad \left(a\le c;\ b\le c\right)\quad a,b,c>0$.

Determinaţi masa acestui corp dacă în fiecare punct densitatea sa este egală cu z.

Răspuns. $\dfrac{ab}{24}\left(6c^2-a^2-b^2\right)$.

12. Determinaţi coordonatele centrului de greutate şi momentele de inerţie ale piramidei formată de planele $x=0,\ y=0,\ z=0;\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1;\ a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Răspuns. $\begin{cases} x_G=\dfrac{a}{4},\ j_G=\dfrac{b}{4},\ z_G=\dfrac{c}{4}; \\ J_x=\dfrac{a^3bc}{60},\ J_y=\dfrac{b^3ac}{60},\ J_z=\dfrac{c^3ab}{60}; \\ J_0=\dfrac{abc}{60}\left(a^2+b^2+c^2\right). \end{cases}$

LECŢIA 12 - INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ

1. Noţiuni teoretice

Definiţia 8.1. Se numeşte pânză parametrizată netedă orice aplicaţie $s: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clasă C^1 pe mulţimea deschisă *D*.

În felul acesta oricărui punct $(u,v) \in D$ îi corespunde un punct $s(u,v)$ din $\mathbb{R}^3$ având coordonatele

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), \quad (u,v) \in D. \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

Aceste relaţii se numesc ecuaţiile parametrice ale pânzei *s* sau reprezentarea parametrică a pânzei *s*. Pânza *s* se numeşte simplă dacă *s* este injectivă. Mulţimea $S := s(D)$ se numeşte urma pânzei *s*. De multe ori notăm suprafaţa cu *S*.

Definiţia 8.2. O pânză netedă $s: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$s(u,v) = \left(f(u,v), g(u,v), h(u,v) \right)$$

se numeşte nesingulară dacă în fiecare punct $(u,v) \in D$, matricea jacobiană a lui *s*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

are rangul maxim, adică are rangul doi.

În spaţiu alegem reperul ortogonal $\mathrm{O}xyz$ de versori i, j, k. Atunci punctul curent $\left(f(u,v), g(u,v), h(u,v) \right)$ al urmei lui *s* are vectorul de poziţie *r* dat de relaţia

$$r(u,v) = f(u,v)i + g(u,v)j + h(u,v)k.$$

Să considerăm vectorii

$$\overline{r}_u(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\overline{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\overline{j} + \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\overline{k},$$

$$\overline{r}_v(u,v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\overline{i} + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\overline{j} + \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\overline{k}.$$

Fie $(u_0,v_0) \in D$. Planul care trece prin punctul $\mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$, unde $x_0 = f(u_0,v_0)$, $y_0 = g(u_0,v_0)$, $z_0 = h(u_0,v_0)$, paralel cu vectorii $r_u(u_0,v_0)$ şi $r_v(u_0,v_0)$ se numeşte planul tangent la *s* în punctul (u_0,v_0). Acest plan are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Versorul-normală la suprafaţa s în punctul (u_0, v_0) este

$$\overline{n}(u_0,v_0) = \frac{\overline{r}_u(u_0,v_0) \times \overline{r}_v(u_0,v_0)}{\left\| \overline{r}_u(u_0,v_0) \times \overline{r}_v(u_0,v_0) \right\|}, \text{ unde } \overline{r}_u \times \overline{r}_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dacă notăm cu $A = \frac{D(g,h)}{D(u,v)},\ B\frac{D(h,f)}{D(u,v)},\ A = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}$, observăm că $\left\| \overline{r}_u(u_0,v_0) \times \overline{r}_v(u_0,v_0) \right\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ şi versorul-normalei la suprafaţa s în punctul (u_0, v_0) are expresia $\overline{n} = \frac{A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, unde am renunţat la specificarea punctului (u_0, v_0).

Dacă notăm cu $E = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2,\ F = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}$, $G = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2$ atunci avem identitatea $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 > 0.$

Două pânze parametrizate netede $s : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ şi $s_1 : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (D şi D_1 deschişi) se numesc echivalente şi se notează $s \sim s_1$, dacă există o funcţie bijectivă $\varphi : D \to D_1,\ \varphi \in C^1(D),\ \varphi^{-1} \in C^1(D)$, astfel încât jacobianul lui φ să fie strict pozitiv în fiecare punct al deschisului D şi $s_1 \circ \varphi = s$. Funcţia φ se numeşte schimbare de parametri.

Dacă $s \sim s_1$, atunci urmele celor două pânze parametrizate netede coincid. Relaţia „~” este o relaţie de echivalenţă în mulţimea pânzelor parametrizate netede.

Definiţia 8.3. Se numeşte suprafaţă parametrizată netedă o clasă de echivalenţă de pânze parametrizate netede.

Să considerăm suprafaţa $s : D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ netedă, definită pe mulţimea deschisă D_1, având reprezentarea parametrică:

$$s:\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v), \quad (u,v)\in D_1. \\ z=h(u,v) \end{cases}$$

Dacă $D\subset D_1$ este un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, atunci mulţimea $s(D)=S$ reprezintă o porţiune din suprafaţa netedă dată. Presupunem că suprafaţa *s* este simplă şi nesingulară.

Definiţia 8.4. Se numeşte aria porţiunii de suprafaţă $S\subset\mathbb{R}^3$ numărul real pozitiv:

$$\text{aria}\, S=\iint_D \|r_u\times r_v\|\text{d}u\text{d}v=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\text{d}u\text{d}v=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\text{d}u\text{d}v.$$

Forma diferenţială $\text{d}\sigma=\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|\text{d}u\text{d}v=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\text{d}u\text{d}v=\sqrt{EG-F^2}\text{d}u\text{d}v$ se numeşte elementul de arie al suprafeţei *S*.

Integrala dublă $\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\text{d}u\text{d}v$ este independentă de reprezentarea parametrică a suprafeţei *S*.

Dacă suprafaţa *S* este dată explicit de ecuaţia $z=f(x,y),\ (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$,

Atunci $\text{aria}\, S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\text{d}x\text{d}y$, unde $p=\frac{\partial f}{\partial x},\ q=\frac{\partial f}{\partial y}$.

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ o mulţime compactă şi suprafaţa netedă, simplă, nesingulară

$$s:\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z=h(u,v) \end{cases}$$

unde $f,g,h\in\text{C}^1(D)$. Să considerăm funcţia $F:S\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ şi o diviziune $\delta=(s_1,s_2,...,s_p)$ a suprafeţei *S*. Definim suma

$$\sigma_\delta(F,\xi_k,n_k,\zeta_k)=\sum_{k=1}^{p}F(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\text{aria}\, s_k,$$

unde $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in s_k,\ 1\le k\le p$. Deoarece $\begin{cases}\xi_k=f(u_k,v_k)\\ \eta_k=g(u_k,v_k), \quad 1\le k\le p,\\ \zeta_k=h(u_k,v_k)\end{cases}$

rezultă că $\sigma_\delta(F,\xi_k,\eta_k,\zeta_k)=\sum_{k=1}^{p}F\left(f(u_k,v_k),g(u_k,v_k),h(u_k,v_k)\right)\cdot\text{aria}\, s_k$.

Diviziunii δ a suprafeţei *S* îi corespunde o diviziune Δ a domeniului *D*, iar porţiunilor de suprafaţă $s_1,s_2,...,s_p$ le corespund subdomeniile $\delta_1,\delta_2,...,\delta_p$. Aşadar, $(u_k,v_k)\in\delta_k,\ 1\le k\le p$.

Definiţia 8.5. Dacă pentru orice şir de diviziuni $(\delta_n)_{n\geq 1}$ ale suprafeţei S cu proprietatea că $\|\delta_n\| \to 0$, şirul sumelor $(\sigma_{\delta_n})_{n\geq 1}$ are o aceeaşi limită finită, atunci şirului $(\sigma_{\delta_n})_{n\geq 1}$ se numeşte integrala de suprafaţă de primul tip pe suprafaţa S şi se notează

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma.$$

Teorema 8.6. În condiţiile de mai sus, dacă $F : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este continuă atunci:

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \iint_D F\big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Dacă suprafaţa S este dată de $z = f(x,y)$, $(x,y)\in D \subset \mathbb{R}^2$, atunci

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}\sigma = \iint_S F\big(x,y,f(x,y)\big)\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \text{unde } p = \frac{\partial f}{\partial x},\quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Propoziţia 8.7.

a) Dacă F şi G sunt funcţii continue pe un deschis care conţine S şi α, β sunt constante reale, atunci:

$$\iint_S (\alpha F + \beta G)\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_S F\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_S G\mathrm{d}\sigma.$$

b) Dacă S este juxtapunerea a două porţiuni disjuncte S_1, S_2 de suprafaţă, atunci:

$$\iint_S F\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} F\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} F\mathrm{d}\sigma.$$

c) Aria unei porţiuni de suprafaţă S este $\text{aria}\, S = \iint_S \mathrm{d}\sigma$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime compactă şi suprafaţa netedă simplă, nesingulară

$$s : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

unde $f,g,h \in \mathrm{C}^1(D)$. Fie $\mathrm{M}(x,y,z)$ un punct al lui $S = s(D)$. Putem considera în punctul M doi versori-normală la S:

$$\overline{n}_1 = \frac{A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \overline{n}_2 = -\frac{A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

având sensuri opuse.

Suprafaţa S se numeşte orientabilă dacă în fiecare punct din S este definit un versor-normală şi aplicaţia $(x,y,z) \mapsto \overline{n}(x,y,z)$ este continuă. Suprafaţa orientabilă S împreună cu unul din cei doi versori-normală se numeşte suprafaţă orientală.

O suprafaţă S în $\mathbb{R}^3$ se numeşte închisă dacă există o aplicaţie bijectivă

$$\varphi:\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2=1\right\}\to S,$$

astfel încât φ şi φ^{-1} să fie continue (adică sfera unitate şi suprafaţa *S* sunt homeomorfe).

Fie $S\subset\mathbb{R}^3$ o suprafaţă orientabilă. Dacă *S* este închisă, atunci în fiecare punct din *S* este definit versorul-normală. Notăm cu $\overline{n}_{\mathrm{e}}$ versorul normalei exterioare (care iese din domeniul mărginit de *S*) şi cu $\overline{n}_{\mathrm{i}}$ versorul normalei interioare $\left(\overline{n}_{\mathrm{i}}=-\overline{n}_{\mathrm{e}}\right)$. În primul caz, perechea $\left\{S,\overline{n}_{\mathrm{e}}\right\}$ se numeşte faţa exterioară şi se notează cu S_{e}, iar perechea $\left\{S,\overline{n}_{\mathrm{i}}\right\}$ se numeşte faţa interioară şi se notează cu S_{i}.

Dacă *S* este neînchisă, proiectabilă pe planul $x\mathrm{O}y$, atunci vom numi faţa exterioară a suprafeţei *S* în raport cu planul $\mathrm{O}xy$ perechea $\left\{S,\overline{n}_{\mathrm{e}}\right\}$, notată S_{e}, unde $\overline{n}_{\mathrm{e}}$ este versorul-normală care face un unghi ascuţit cu axa $\mathrm{O}z$. Faţa interioară a suprafeţei *S* va fi $\left\{S,\overline{n}_{\mathrm{i}}\right\}$, notată S_{i}, cealaltă faţă a lui *S*, adică faţa pentru care versorul-normală face un unghi obtuz cu axa $\mathrm{O}z$.

Fie *C* conturul suprafeţei *S* şi Γ proiecţia lui *C* pe planul $\mathrm{O}xy$. Pe *C* se pot considera două sensuri de parcurs. Sensul asociat suprafeţei exterioare este acela care corespunde sensului direct (pozitiv) pe conturul Γ. Feţei interioare i se asociază sensul invers (negativ). În acest mod se defineşte un sens de parcurs pe conturul oricărei părţi din suprafaţa *S*. Totodată am indus o orientare şi pe domeniul *D* din planul $\mathrm{O}uv$.

Dacă $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ sunt cosinuşii directori ai versorului-normală *n* la suprafaţa *S* atunci

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Fie $R=R(x,y,s):S\to\mathbb{R}$ o funcţie definită pe suprafaţa orientată *S*.

Definiţia 8.8. Fie $F:V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o funcţie vectorială continuă pe domeniul *V*, domeniu care conţine suprafaţa *S*,

$$F(x,y,z)=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}.$$

Integrala de suprafaţă de al doilea tip a funcţiei vectoriale *F* pe suprafaţa S_{e} sau fluxul câmpului vectorial *F* prin suprafaţa S_{e} sau fluxul câmpului vectorial *F* prin suprafaţa S_{e}, cu notaţia:

$$\iint_{S_{\mathrm{e}}} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Leftrightarrow \Phi_{S_{\mathrm{e}}}(F)=\iint_{S_{\mathrm{e}}} F\cdot n\mathrm{d}\sigma,$$

se defineşte prin egalitatea:

$$\iint_{S_{\mathrm{e}}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma.$$

În mod asemănător se defineşte

$$\iint_{S_{\mathrm{i}}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma.$$

Utilizând regula de calcul a integralei de suprafaţă de primul tip, rezultă că

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_S \frac{PA+QB+RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \left(PA+QB+RC\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Am obţinut regula de calcul a integralei de suprafaţă de al doilea tip

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left(PA + Q\beta + RC\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

unde $P = P\left(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\right)$, $Q = Q\left(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\right)$, $R = R\left(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\right)$, iar $A = A(u,v)$, $B = B(u,v)$, $C = C(u,v)$.

Dacă folosim scrierea vectorială, rezultatele anterioare devin:

$$\iint_{S_e} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\mathrm{d}\sigma = \iint_S \overline{F}\cdot\frac{\overline{r}_u\times\overline{r}_v}{\left\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right\|}\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \iint_S \frac{\left(\overline{F},\overline{r}_u,\overline{r}_v\right)}{\left\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right\|}\mathrm{d}\sigma = \iint_D \left(\overline{F},\overline{r}_u,\overline{r}_v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

unde produsul mixt este

$$\left(\overline{F},\overline{r}_u,\overline{r}_v\right) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

În cazul în care suprafaţa netedă este de ecuaţie $z = f(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Atunci versorul-normală $\overline{n}_{\mathrm{e}}$, corespunzător feţei exterioare S_{e}, este

$$\overline{n}_{\mathrm{e}} = \frac{-p\overline{i} - q\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

iar versorul-normală $\overline{n}_{\mathrm{i}}$, corespunzător feţei interioare S_{i}, este $\overline{n}_{\mathrm{i}} = -\overline{n}_{\mathrm{e}}$.

Să considerăm o placă materială neomogenă curbă, de grosime neglijabilă, care are forma dată de urma *S* a suprafeţei *s* din spaţiu. Presupune cunoscută în fiecare punct al plăcii materiale dată de funcţia continuă $\rho(x,y,z)$. În acest caz, pentru placa materială se pot calcula:

a) masa *M* a plăcii: $M = \iint_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$;

b) coordonatele centrului de greutate G al plăcii:

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\iint_S x\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma,\ y_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\iint_S y\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma,\ z_{\mathrm{G}} = \frac{1}{M}\iint_S z\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma;$$

c) momentele de inerţie ale plăcii materiale în raport cu axele de coordonate:

$$I_{Ox}=\iint_{(S)}\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma,\ I_{Oy}=\iint_{(S)}\left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_{Oz}=\iint_{(S)}\left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma;$$

d) momentele de inerţie ale plăcii materiale în raport cu planele de coordonate:

$$I_{xOy}=\iint_{(S)}z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma,\ I_{yOz}=\iint_{(S)}x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma,\ I_{xOz}=\iint_{(S)}y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

e) momentele de inerţie ale plăcii materiale în raport cu originea:

$$I_O=\iint\limits_{(S)}\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma.$$

2. Probleme rezolvate

$\boxed{1}$ Să se stabilească dacă paraboloidul eliptic

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ a,b\in\mathbb{R}^*$$

este o suprafaţă orientabilă.

Rezolvare. Observăm că $\bar{n}=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)=\left(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2},1\right)$ şi $\|\bar{n}\|=\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+1}\neq 0$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Deoarece $\bar{n}=\bar{n}(x,y)$ este o funcţie continuă nenulă pe $\mathbb{R}^2$, deci suprafaţa este orientabilă.

$\boxed{2}$ Să se calculeze aria suprafeţei $x=\sqrt{y^2+z^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=a^2,\ a>0$.

Rezolvare. Din simetria figurii faţă de planul xOy, $\text{Aria}\,S=2\iint\limits_S\mathrm{d}\sigma$, unde S este suprafaţa care are reprezentarea carteziană:

$$z=\sqrt{x^2-y^2},\ (x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}.$$

Observăm că

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\text{Aria}\,S=2\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^a\rho\mathrm{d}\rho+2\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^a \rho d\rho = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)\Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} = \frac{a^2\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\boxed{3}$ Să se calculeze aria decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - ay = 0,\ a > 0$, în emisfera superioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Rezolvare. Ecuaţia emisferei superioare este $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ şi

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

$$\text{Aria} = \iint_D \frac{a dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

unde D este proiecţia pe planul xOy a suprafeţei decupată de cilindru în suprafaţa emisferei

$$\text{Aria} = a\int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{ay-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a\int_0^a \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}}\right]_{x=-\sqrt{ay-y^2}}^{x=\sqrt{ay-y^2}} dx =$$

$$= 2a\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{y}{a+y}}\, dy = a^2(\pi - 2).$$

$\boxed{4}$ Să se calculeze integrala de suprafaţă $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma$, unde S este suprafaţa laterală a conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0;\ 0 \le z \le b,\ a > 0$.

Rezolvare. Observăm că $z = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$, şi

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2}\frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + b^2}\, dxdy$$

$$\text{Atunci } I = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

unde D este proiecţia pe planul xOy a suprafeţei S, adică $D = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le a^2\right\}$.

$$I = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{2\pi a^2\sqrt{a^2 + b^2}}{3}.$$

$\boxed{5}$ Să se calculeze $I = \iint\limits_S \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\mathrm{d}\sigma$,

unde S este emisfera superioară $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geq 0,\ a\neq 0$.

Rezolvare. O reprezentare parametrică a lui S este $x=a\sin\theta\cos\varphi$, $y=a\sin\theta\sin\rho,\ z=a\cos\theta$, cu $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ \varphi\in[0,2\pi]$. Avem

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=a^2, G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=a^2\sin^2\theta$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\ \text{deci}\ \mathrm{d}\sigma=a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{a^2+3a^2\cos^2\theta}}\mathrm{d}\theta=-2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\sqrt{1+3\cos^2\theta}}=$$

$$=\frac{-2\pi a}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{1+3\cos^2\theta}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi a}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

$\boxed{6}$ Să se calculeze integrala de suprafaţă $I=\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0$.

Rezolvare. Versorul normală $\overline{n}$ al feţei exterioare a sferei este $\overline{n}=\left(\dfrac{x}{R},\dfrac{y}{R},\dfrac{z}{R}\right)$

$$I=\iint\limits_S\left(\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R}+\frac{z^2}{R}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_S\frac{R^2}{R}\mathrm{d}\sigma=R\iint\limits_S\mathrm{d}\sigma=R\cdot 4\pi R^2=4\pi R^3.$$

$\boxed{7}$ Să se calculeze $I=\iint\limits_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z$,

unde S este faţa exterioară a suprafeţei

$$S=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geq\sqrt{x^2+y^2},\ a>0\right\}.$$

Rezolvare. O parametrizare a suprafeţei S este

$$x=a\sin\theta\cos\varphi;\ \ y=a\sin\theta\sin\varphi;\ \ z=a\cos\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Deducem $A=a^2\cos\varphi\sin^2\theta,\ B=a^2\sin\varphi\sin^2\theta,\ C=a^2\sin\theta\cos\theta,$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=a^2\sin\theta.$$

Atunci $\bar{n}$ are coordonatele $\left(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta\right)$. Rezultă:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} a^4\left(\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^4\theta + \sin^2\varphi\sin^3\theta\cos\theta + \cos\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^4}{16}.$$

$\boxed{8}$ Să se afle coordonatele centrului de greutate a emisferei superioare $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0$.

Rezolvare. Ecuaţia emisferei superioare S este

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ D = \left\{(x,y)\middle| x^2 + y^2 \le R^2\right\}.$$

Observăm că $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, iar $S = \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = 2\pi R^2$

$$S_x = \iint\limits_S x\mathrm{d}\sigma = R\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\int\limits_0^R \rho^2\left(R^2 - \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta = 0$$

$$S_y = \iint\limits_S y\mathrm{d}\sigma = R\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\int\limits_0^R \rho^2\left(R^2 - \rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0$$

$$S_z = \iint\limits_S z\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= R\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = R\int\limits_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi R^3.$$

Coordonatele centrului de greutate sunt

$$x_G = \frac{S_x}{S} = 0;\ y_G = \frac{S_y}{S} = 0;\ z_G = \frac{S_z}{S} = \frac{R}{2}.$$

$\boxed{9}$ Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $\bar{F}$ prin faţa exterioară a suprafeţei semisferei S unde, $\bar{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ şi

$$S = \left\{(x,y,z)\middle| x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0\right\},\ R > 0.$$

Rezolvare. Avem: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x,y) \in D = \left\{(x,y)\middle| x^2 + y^2 \le R^2\right\}$,

$$\text{şi } \bar{n} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}\right)$$

$$\Phi_s(F) = \iint\limits_S \bar{F}\cdot\bar{n}\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S \left(x\cdot\frac{x}{R} + y\frac{y}{R} + z\cdot\frac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}\right)\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{R}\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + R^2 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}\sigma = R\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = R\cdot 2\pi R^2 = 2\pi R^3.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Să se calculeze aria suprafeţei $z=\sqrt{x^2+y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=2x$.

Rezolvare.

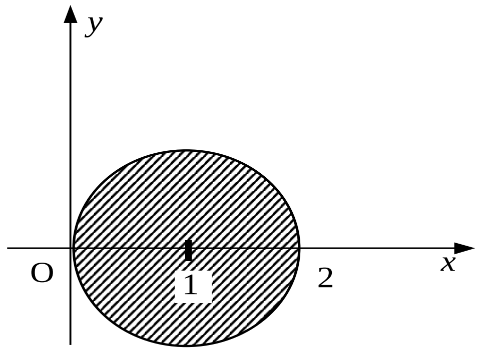

Fig. 8.1

Aria suprafeţei considerate va fi $S=\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x\right\}$ şi este proiecţia lui *S* în planul $x\mathrm{O}y$.

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi\sqrt{2}.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Să se calculeze aria suprafeţei sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ situată în exteriorul cilindrului $x^2+y^2=\pm ax$ (Viviani).

Rezolvare. Cei doi cilindri decupează în sferă patru ferestre de arii egale. Vom calcula aria situată în interiorul celor patru ferestre şi o vom scădea din aria sferei: aria unei ferestre este:

$$A_{\mathrm{f}}=\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{1+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonatele polare, integrala devine:

$$A_{\mathrm{f}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-\rho^2}}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\left(a-a\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=\pi a^2-2a^2.$$

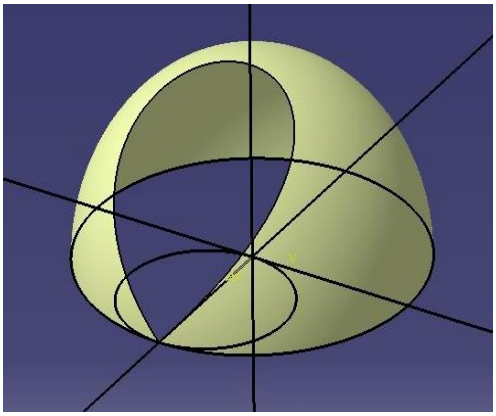

Fig. 8.2

Aria din suprafaţa sferei aflată în interiorul cilindrului este prin urmare $4\pi a^2 - 8a^2$.

Aria totală a sferei este $S = 4\pi a^2$. Deci, aria suprafeţei din sferă aflată în afara ferestrelor Viviani va fi $A = 4\pi a^2 - \left(4\pi a^2 - 8a^2\right) = 8a^2$.

$\boxed{12}$ Calculaţi aria porţiunii din planul $6x + 3y + 2z = 12$ conţinută în primul octant.

Rezolvare. Aria suprafeţei ABC va fi

$$A = \iint\limits_{\text{ABC}} \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{\text{OAB}} \sqrt{1 + (-3)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\text{OAB}} \sqrt{\frac{49}{4}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{7}{2}\iint\limits_{\text{OAB}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 14.$$

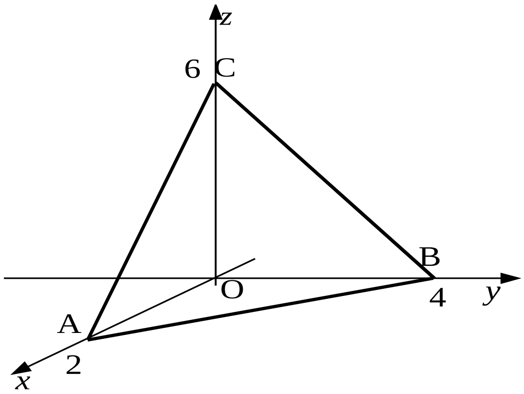

Fig. 8.3

$\boxed{13}$ Să se calculeze aria suprafeţei $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ situată în interiorul cilindrului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le c^2,\ a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare. Suprafaţa decupată din paraboloidul $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$ de cilindrul $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le c^2$ se proiectează în planul $x\mathrm{O}y$ în elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le c^2$. Atunci, deoarece $p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{a}$ $q = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{b}$, aria se calculează cu relaţia:

$$A=\iint_S \mathrm{d}\sigma=\iint_{\mathrm{pr}\, xOy}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Trecând în planul xOy la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x=ac\rho\cos\theta; \\ y=ac\rho\sin\theta. \end{cases}$

Jacobianul transformării va fi egal cu $abc^2\rho$ şi deci integrala va deveni

$$A=\int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1+c^2\rho^2}\,abc^2\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi ab}{3}\left[\left(\sqrt{1+c^2}\right)^3-1\right].$$

$\boxed{14}$ Să se calculeze $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}\sigma$ dacă S este suprafaţa

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ cu } z\ge 0\,.$$

Rezolvare. Considerăm parametrizarea suprafeţei S dată de

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\ y=a\sin\theta\sin\varphi,\ z=a\cos\theta,\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Atunci:

$$A=\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=a^2\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} -a\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}=a^2\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=a^2\sin^2\theta\cos\theta$$

şi $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{a^4\sin^4\theta+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}=a^2\sin\theta$.

În aceste condiţii:

$$\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta\cos\varphi+a\sin\theta\sin\varphi+a\cos\theta)\cdot a^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=2a^3\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=a^3\pi.$$

$\boxed{15}$ Să se calculeze integrala $\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

dacă S este faţa exterioară a conului $x^2+y^2=z^2\,(0\le z\le h)$.

Rezolvare. Deoarece suprafaţa S este exprimată explicit prin relaţia $z=\sqrt{x^2+y^2}$, deducem imediat că $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi deci normala la suprafaţă va fi dată de formula:

$$\overline{n}_e=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{i}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{j}-\overline{k}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overline{j}-\overline{k}\right)$$

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_{\mathrm{Pr}(S;xOy)}\left[\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x+y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}(2y-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare $\begin{cases} x=\rho\cos\theta; \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ $\rho\in(0,1];\ \theta\in[0,2\pi),$

integrala devine $\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho(\sin\theta-\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0$.

16 Să se calculeze integrala $\iint_S \frac{1}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

dacă S este faţa exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$.

Rezolvare. Pentru suprafaţa S considerăm parametrizarea

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi, \\ y=b\sin\theta\sin\varphi, \\ z=c\cos\theta, \end{cases}\quad \begin{matrix}\theta\in[0,\pi]; \\ \varphi\in[0,2\pi].\end{matrix}\quad \text{Atunci}$$

$$A=\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \\ -c\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=bc\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B=\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} -c\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}=ac\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C=\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\sin\theta\cos\theta \text{ şi}$$

avem: $\iint_S \frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{bc\sin^2\theta\cos\varphi}{a\sin\theta\cos\varphi}+\frac{ac\sin^2\theta\sin\varphi}{b\sin\theta\sin\varphi}+\frac{ab\sin\theta\cos\theta}{c\cos\theta}\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)=4\pi\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{abc}.$$

$\boxed{17}$ Să se calculeze masa pânzei parabolice $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ $\left(0\le z\le 1\right)$ a cărei densitate variază după legea $\rho=z$.

Rezolvare. Masa pânzei parabolice se calculează după formula

$$M=\iint_S \rho\mathrm{d}\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 2}\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

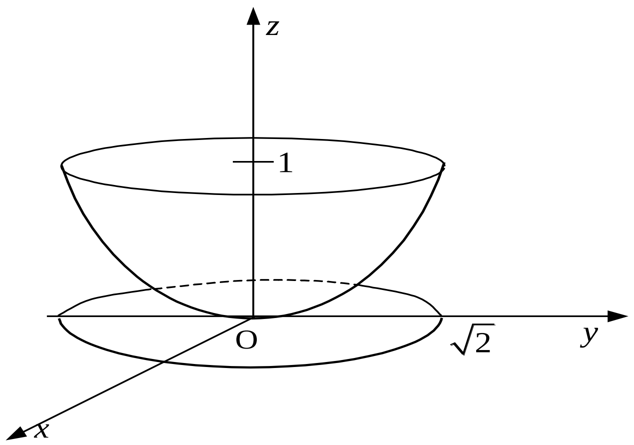

Fig. 8.4

Trecând la coordonate polare în planul xOy, integrala devine:

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{15}\left[1+6\sqrt{3}\right].$$

$\boxed{18}$ Să se calculeze suprafaţa totală a corpului limitat de sfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$ şi de paraboloidul $x^2+y^2=2az$ $\left(a>0\right)$.

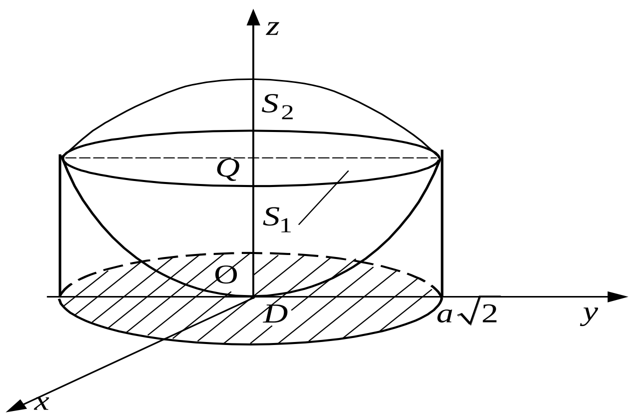

Fig. 8.5

Cele două suprafeţe se intersectează după curba $z=a,\ x^2+y^2=2a^2$

$S=S_1\cup S_2$, unde $A_1=\iint\limits_{S_1}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

$$A_2=\iint\limits_{S_2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{x^2}{3a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{3a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}}\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=2\pi a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Suprafaţa totală va fi deci $A_1+A_2=4\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$.

$\boxed{19}$ Să se afle aria porţiunii de suprafaţă, exprimată sub formă explicită, secţionată:

(i) de cilindrul $x^2+y^2=R^2,\ R>0\ \left(x,y>0\right)$ din paraboloidul hiperbolic $z=xy$;

(ii) de cilindrul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2,\ c>0$, din paraboloidul eliptic $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b};\ a,b>0$;

Rezolvare.

(i) Cum suprafaţa este exprimată sub formă explicită este comod să folosim formule:

$$A_1=\iint\limits_{S}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este proiecţia suprafeţei S pe planul $x\mathrm{O}y$.

În acest caz $D_{xy}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}_+^2\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\right\}$ şi $A_1=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Trecând la coordonate polare, găsim:

$$A=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^R r\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}\left[\left(r+R^2\right)^{3/2}-1\right].$$

(ii) Procedând similar ca la punctul (i), deducem:

$$A_2=\iint\limits_{S}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\text{unde: } D_{xy}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le c^2\right\}.$$

Prin urmare,

$$A_2 = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Folosind coordonatele polare generalizate obţinem:

$$A=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{1+r^2}\cdot a\cdot b\cdot r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\pi\cdot a\cdot b\left[\left(1+c^2\right)^{3/2}-1\right].$$

$\boxed{20}$ Să se afle aria porţiunii de suprafaţă, exprimată sub formă implicită, secţionată de cilindrul $x^2+y^2=Rx,\ R>0$, din sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, (suprafaţa Viviani);

Rezolvare.

Metoda recomandată în astfel de cazuri este de a obţine o reprezentare parametrică a suprafeţei pentru care calculăm aria. Vom folosi coordonatele sferice:

$$T\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi, & r=R,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & \varphi\in[0,\pi],\\ z=r\cos\varphi, & \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

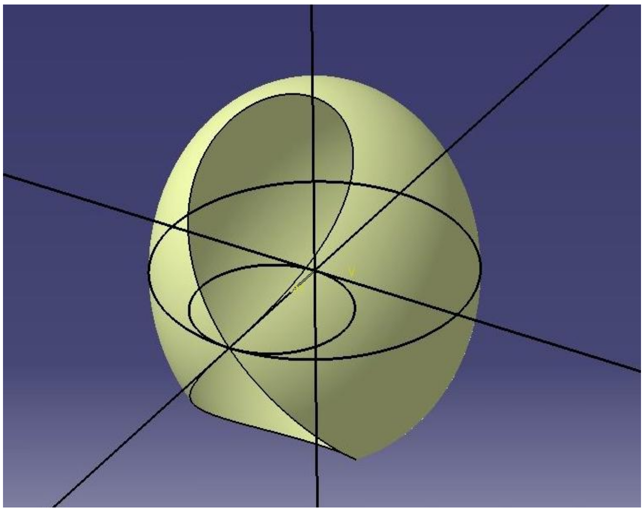

Fig. 8.6

Cu ajutorul matricei derivatelor

$$M=\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

se determină coeficienţii formei Gauss ai sferei $E=R^2,\ F=0,\ G=R^2\sin^2\varphi$ şi

$$A=\iint\limits_S \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}} R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\,,$$

unde pentru $D_{\varphi\theta}$ vom face următoarele consideraţii.

Vom studia numai porţiunea din suprafaţă situată în primul cadran. Pentru punctele de pe curba Viviani curba de intersecţie dintre sferă şi cilindru) vom avea

$$\sin\varphi=\cos\theta \text{ şi cum } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \text{ iar } 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}.$$

În consecinţă: $D_{\varphi\theta} = \left\{ (\varphi, \theta) \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} - \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$,

iar $A = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2-\theta} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$.

Obs. Aria părţii de emisferă care rămâne după decuparea suprafeţei Viviani este $4R^2$, fapt ce arată că valoarea ei nu se exprimă prin intermediul numerelor iraţionale.

$\boxed{21}$ **(i)** Să se determine momentul de inerţie al suprafeţei paraboloidului conic $x^2 + y^2 = 2az,\ 0 < z < a$, în raport cu axa Oz.

(ii) Pentru aceeaşi suprafaţă determinaţi coordonatele centrului de greutate.

Rezolvare.

(i) Cum suprafaţa este dată printr-o ecuaţie explicită deduc

$$I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x^2 + y^2 \le 2a^2 \right\}$.

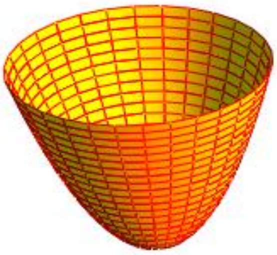

Fig. 8.7

Folosim transformarea în coordonate polare şi apoi teorema lui Fubini, deducem:

$$I_z = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2a}} \rho^3 \sqrt{a^2 + \rho^2} \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{15} \left(1 + 6\sqrt{3}\right) a^4.$$

(ii) Datorită simetriei faţă de axa O*y* deducem $x_G = y_G = 0$

$$S_z = \iint_S z \mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2a} \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot J_z = \frac{2\pi}{15} \left(1 + 6\sqrt{3}\right) a^3.$$

Cum aria suprafeţei paraboloidului este $S = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi}{3} \left(3\sqrt{3} - 1\right) a^2$ deducem că

$$z_G = \frac{S_z}{S} = \frac{55 + 9\sqrt{3}}{130} a.$$

3. TEST DE AUTOEVALUARE

1. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\iint\limits_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$ unde $S = \left\{(x,y,z) \middle| z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\, a > 0\right\}.$

Răspuns. πa^3.

2. Să se calculeze integrala de suprafaţă $\iint\limits_S \dfrac{z\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}$,

unde $S = \left\{(x,y,z) \middle|\ z = \dfrac{1}{2a}\left(x^2 + y^2\right), 0 \le z \le h\right\}.$

Răspuns. πh^2.

3. Să se calculeze $\iint\limits_S \sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}\sigma,\ a,b,c \in \mathbb{R}_+^*,$

unde $S = \left\{(x,y,z) \middle| \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0\right\}.$

Răspuns. $\dfrac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \dfrac{a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot a^2}{a \cdot b \cdot c}$.

4. Să se calculeze $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde *S* este faţa exterioară a conului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0,\ a,b,c \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \le z \le b$.

Răspuns. $\dfrac{\pi a^2 b^2}{2}$.

5. Să se calculeze $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde *S* este faţa exterioară a cilindrului $x^2 + y^2 = a^2,\ -h \le z \le h,\ a,h \in \mathbb{R}_+^*$.

Răspuns. $3\pi a^2 h$.

6. Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ prin faţa exterioară a suprafeţei care delimitează domeniul

$$\left\{(x,y,z) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ x \le y,\ a,b,c > 0\right\}.$$

Răspuns. 0.

7. Să se calculeze $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este suprafaţa exterioară a conului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0 \ \left(0\le z\le b,\ a,b>0\right).$$

Răspuns. $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$.

8. Să se calculeze $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este porţiunea suprafeţei conului $z=\sqrt{x^2+y^2}$ decupată de suprafaţa $x^2+y^2=2ax,\ a>0$.

Răspuns. $\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

9. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţei omogene $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ x+y\le a,\ a>0$.

Răspuns. $x_G=y_G=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

10. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}\sigma$ dacă S este porţiunea din planul $x+y+z=1$ aflată în planul octant.

Răspuns. $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

11. Să se calculeze integrala $\iint\limits_S y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ dacă S suprafaţa din primul octant constituită din $z=x^2+y^2;\ x^2+y^2=1$ şi planele de coordonate.

Răspuns. $\frac{\pi}{8}$.

12. Să se calculeze $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dacă S este suprafaţa exterioară a sferei $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ a,b,c,R>0$.

Răspuns. $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$.

LECŢIA 13 - FORMULE INTEGRALE

1. Noţiuni teoretice

Formulele integrale sunt formule de legătură între integralele multiple, integralele curbilinii şi integralele de suprafaţă fiind aplicaţii particulare ale relaţiei $\int\limits_{\partial X} \omega = \int\limits_{X} \alpha \mathrm{d}\omega$, unde ω este o formă diferenţială, $\mathrm{d}\omega$ este diferenţiala sa exterioară, iar *X* este un domeniu cu bord regulat, orientabil, orientările lui *X* şi ∂X fiind asociate.

Definiţia 9.1.

(i) Fie în spaţiul euclidian real $\mathbb{R}^2$ triunghiul T_1 cu vârfurile în punctele $\mathrm{A}_0(0,0)$; $\mathrm{A}_1(1,0)$; $\mathrm{A}_2(0,1)$. Vom spune că triunghiul T_1 este orientat pozitiv dacă se consideră pe mulţimea vârfurilor sale relaţia de ordine $\mathrm{A}_0 < \mathrm{A}_1 < \mathrm{A}_2$.

(ii) Un triunghi oarecare $\mathrm{M}_1(a_1,b_1)$, $\mathrm{M}_2(a_2,b_2)$, $\mathrm{M}_3(a_3,b_3)$ este orientat pozitiv dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} > 0$.

(iii) Un domeniu poligonal *D* a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple şi închise este orientat pozitiv dacă orice triunghi format din mulţimea vârfurilor domeniului este orientat pozitiv.

(iv) Fie *D* un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră este imaginea unei curbe simple şi închise. Vom spune că *D* este orientat pozitiv dacă frontiera lui *D* este orientată pozitiv (orice linie poligonală formată din puncte ale frontierei este pozitiv orientată).

Observaţia 9.2. Fie *D* un domeniu compact în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^2$ a cărui frontieră ∂D este imaginea unei curbe simple şi incluse. Fie A un punct arbitrar pe ∂D. Notăm $C(\mathrm{A})$ curba simpla şi închisă care are proprietatea că orientează pozitiv domeniul *D* având ca imagine ∂D.

Fie $P,\ Q : D \to \mathbb{R}$ două funcţii astfel încât integrala curbilinie $\int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ există. Atunci pentru orice $\mathrm{A} \in \partial D$ integrala $\int_{C(A)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ există şi nu depinde de A. Vom nota $\oint\limits_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ valoarea comună a acestor integrale.

Propoziţia 9.3 (Formula lui Green-Riemann).

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact având ca frontieră o curbă simplă, închisă rectificabilă. Fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe *D* care admit derivatele parţiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe *D*. În aceste condiţii integralele următoare există şi are loc relaţia

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Observaţia 9.4.

Fie D un domeniu compact având ca frontieră o curbă simplă închisă şi rectificabilă. Atunci are loc egalitatea: $\mathrm{aria}D = \dfrac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$.

Observaţia 9.5.

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă netedă deschisă definită de $x = f(u,v)$; $y = g(u,v)$; $z = h(u,v)$ $(u,v) \in D$ mărginită de o curbă închisă, netedă $C = \partial S$, funcţiile $f,\ g,\ h$ fiind funcţie de clasă C^2 pe $D \subset \mathbb{R}^2$.

Vom alege pentru normala suprafeţei *S* acea orientare care determină parcurgerea frontierei ∂S în sens direct şi vom numi această faţă, faţa superioară a lui *S*.

Propoziţia 9.6 (Formula lui Stokes).

Fie $S \subset \mathbb{R}^3$ o suprafaţă orientată, netedă, deschisă, mărginită de o curbă închisă *C*, $S = \left\{(x,y,z) \middle| x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v),\ (u,v) \in D,\ f,g,h \in C^2(D)\right\}$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu care conţine suprafaţa *S* şi $P,Q,R : D \to \mathbb{R}$ trei funcţii continue care admit derivate parţiale de ordinul I continue pe *D*.

Atunci are loc egalitatea

$$\oint\limits_C P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Observaţia 9.7. Formula lui Green se obţine din formula lui Stokes dacă *C* şi *S* sunt în $\mathbb{R}^2$ (dacă $z = 0,\ \mathrm{d}z = 0$).

Propoziţie 9.8 (Formula lui Gauss-Ostrogradski).

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu mărginit de o suprafaţă $S = \partial\Omega$ închisă, netedă, orientată după normala exterioară a domeniului Ω. Dacă domeniul Ω este simplu în raport cu toate planele de coordonate şi dacă funcţiile $P,Q,R : \Omega \cup S \to \mathbb{R}$ sunt continue şi admit derivate parţiale continue pe Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\iint\limits_{S=\partial\Omega} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Observaţia 9.9. (Interpretări vectoriale)

(i) Fie câmpul vectorial $\vec{F}(x,y,z)$ de componente (P,Q,R) definit într-un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ prin:

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

astfel încât funcţiile $P,Q,R:V\to\mathbb{R}$ sunt continue şi $\bar{n}$ este versorul normalei la suprafaţa $S\subset V$, $\bar{n}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$. Atunci fluxul vectorului $\bar{F}$ prin suprafaţa orientată *S* va fi

$$\phi=\iint_S \vec{F}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(ii) Dacă $\bar{F}$ este un câmp vectorial de componente P,Q,R de clasă C^1 pe $V\subset\mathbb{R}^3$, atunci se numeşte rotorul lui $\bar{F}$ vectorul

$$\operatorname{rot}\bar{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Formula lui Stokes devine

$$\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}=\iint_S \bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{F}\cdot\mathrm{d}\sigma,$$

adică circulaţia vectorului câmp de-a lungul unei curbe închise este egală cu fluxul rotorului său prin orice suprafaţa *S* ce se sprijină pe această curbă închisă.

(iii) Numim divergenţa câmpului vectorial

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

şi notăm $\operatorname{div}\bar{F}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$. Cu această definiţie formula lui Gauss Ostrogradski devine

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\bar{F}\mathrm{d}v=\iint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\cdot\mathrm{d}\sigma,$$

adică integrala triplă a divergenţei unui câmp vectorial continuu diferenţial pe compactul simplu Ω este egală cu fluxul câmpului prin suprafaţa frontieră a domeniului, de la interiorul către exteriorul său.

2. Probleme rezolvate

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii, folosind formula lui Green:

$\boxed{1}$ $I=\int_\Gamma\left(x^3-3xy^2\right)\mathrm{d}x+\left(3x^2y-y^3\right)\mathrm{d}y,$

unde Γ este frontiera domeniului $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$,

parcursă în sens pozitiv.

Rezolvare. Fie $P,Q:D\to\mathbb{R},\ P(x,y)=x^3-3xy^2,\ Q(x,y)=3x^2y-y^3.$ Se observă că $P,Q\in\mathrm{C}^1(D)$, iar $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-6xy,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=6xy.$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{3R^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3R^4}{2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3R^4}{2}.$$

$\boxed{2}$ $I=\int_\Gamma (xy+x+y)\mathrm{d}x+(xy+x-y)\mathrm{d}y,$

unde Γ este frontiera domeniului $D=\left\{(x,y)\middle|\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\frac{a^2}{4},\ a>0\right\}$,

parcursă în sens pozitiv.

Rezolvare. Fie $P,Q:D\to\mathbb{R},\ P(x,y)=xy+x+y;\ Q(x,y)=xy+x-y$.

$$P,Q\in \mathrm{C}^1(D) \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x}=y+1,\ \frac{\partial P}{\partial y}=x+1.$$

$$I=\iint_D (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\sin\theta-\frac{a}{2}-\rho\cos\theta\right)\rho\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}(-\cos\theta)\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{a}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}-\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}\sin\theta\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{a^3\pi}{8}.$$

Folosind formula Gauss-Ostrogradski, să se calculeze integralele de suprafaţă de tipul al doilea:

$\boxed{3}$ $I=\iint_S 4x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde *S* este faţa exterioară a domeniului $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2\le 4, z\in[0,3]\right\}$.

Rezolvare. Fie $P,Q,R:V\to\mathbb{R}$,

$$P(x,y,z)=4x,\ Q(x,y,z)=-2y^2,\ R(x,y,z)=z^2.$$

Observăm că $P,Q,R\in\mathrm{C}^1(V)$ şi că $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=4-4y+2z$.

Deci: $I=\iiint_V (4-4y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\left(\int_0^3(4-4y+2z)\mathrm{d}z\right)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

$$=\iint_D\left(4z-4yz+z^2\right)\Bigg|_{z=0}^{z=3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(12-12y+9)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 4\right\}$.

Avem: $I=21\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y-12\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^2\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho=21\cdot 4\pi-0=84\pi$.

$\boxed{4}$ $I=\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

unde S este faţa exterioară a cubului $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a,\ a>0$.

Rezolvare. Fie $V=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a\right\}$

$$I=2\iiint\limits_V(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int\limits_0^a\mathrm{d}x\int\limits_0^a\mathrm{d}y\int\limits_0^a(x+y+z)\mathrm{d}z=$$

$$=\int\limits_0^a\mathrm{d}x\int\limits_0^a\left(2ax+2ay+a^2\right)\mathrm{d}y=\int\limits_0^a\left(2a^3x+a^2x^2\right)\mathrm{d}x=3a^4.$$

$\boxed{5}$ $I=\iint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

unde S este faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rezolvare. $I=\iiint\limits_V 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$

unde $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$. Trecând la coordonate sferice, avem:

$$I=3\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^R\rho^2\cdot\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho=6\pi\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R=\frac{12\pi R^5}{5}.$$

$\boxed{6}$ Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F(x,y,z)=\left(2xz,-yz,x^2+y^2\right)$ prin faţa exterioară a suprafeţei S din primul octant:

$$x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0.$$

Rezolvare. Fie $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}$.

Fluxul câmpului vectorial F este dat de integrala $\Phi=\iint\limits_S\vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\sigma$, unde S este compusă din suprafaţa sferică a octantului şi trei suprafeţe plane, iar n este normala exterioară la fiecare suprafaţă

$$\Phi=\iiint\limits_V\operatorname{div}F\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V(2z-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Trecem la coordonate sferice $x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta$ cu $\rho\in[0,R],\ \varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ J=\rho^2\sin\theta$. Avem:

$$\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)(\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho=$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^4}{16}.$$

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze:

7 $I=\int_\Gamma x\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+y\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+z\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$,

unde Γ este curba dată de ecuaţiile: $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x+y+z=0$.

Rezolvare.

$$I=\iint_{S_e}(2yz-2yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2zx-2xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy-2xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

S_e este faţa exterioară a suprafeţei mărginită de curba Γ.

8 $I=\int_\Gamma x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$, unde $\Gamma=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2=R^2,z=0\right\}$.

Rezolvare. $I=\iint_{S_e}-3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, unde S_e reprezintă o suprafaţă mărginită de curba Γ, $z=f(x,y),(x,y)\in D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$. Atunci:

$$A=-\frac{\partial f}{\partial x},\ B=-\frac{\partial f}{\partial y},\ C=1 \text{ şi rezultă:}$$

$$I=-3\iint_D x^2\cdot y^2\cdot C\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\int_0^R\rho^5\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$=-3\int_0^R\rho^5\mathrm{d}\rho\left[\frac{\theta}{8}-\frac{\sin4\theta}{32}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=-\frac{3\pi}{4}\int_0^R\rho^5\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

9 $I=\int_\Gamma(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z$, unde conturul poligonal închis $\Gamma=\overline{\mathrm{ABCA}}$ are vârfurile $\mathrm{A}(1,0,0),\ \mathrm{B}(0,1,0),\ \mathrm{C}(0,0,1)$.

Rezolvare. Ecuaţia planului (ABC) este $x+y+z-1=0$.

Normala la planul (ABC) este $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Atunci $I=2\iint\limits_{\Delta\mathrm{ABC}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Delta\mathrm{OAB}}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3$.

$\boxed{10}$ Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{\mathrm{AMO}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y,$$

unde AMO este semicercul superior $x^2+y^2=ax$ parcurs de la $\mathrm{A}(a,0)$ la $\mathrm{O}(0,0)$.

Rezolvare. Fie $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-my;\quad Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-m.$

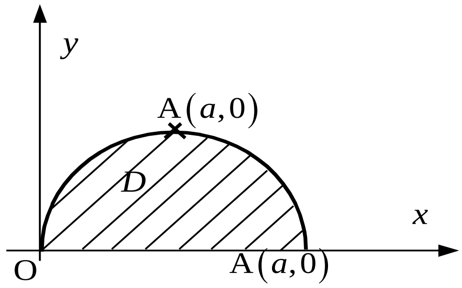

Fig. 9.1

$P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt funcţii diferenţiabile. Funcţiile $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-m$ şi, respectiv, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y$ sunt şi ele funcţii continue.

Considerăm curba determinată de reuniunea dintre arcul AMO şi segmentul $\overline{\mathrm{OA}}$ şi aplicăm formula lui Green pe acest contur închis

$$\int\limits_{\mathrm{AMO}\cup\overline{\mathrm{OA}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le ax;\ y\ge 0\right\}$. Trecând la coordonate polare, integrala devine:

$$\iint\limits_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^{a\cos\theta}m\rho\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m}{2}\left(a^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{ma^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{ma^2\pi}{8}.$$

Deci:

$$\int\limits_{\mathrm{AMO}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y+$$

$$+\int_{\overline{\mathrm{OA}}}\left(\mathrm{e}^x\sin y-my\right)\mathrm{d}x+\left(\mathrm{e}^x\cos y-m\right)\mathrm{d}y=\frac{ma^2\pi}{8}.$$

O parametrizare pentru OA este $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \end{cases} \quad t \in [0, a]$ şi

$$\int_{\overline{\mathrm{OA}}} \left(\mathrm{e}^x \sin y - my\right)\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^x \cos y - m\right)\mathrm{d}y = \int_0^a 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Rezultă deci că

$$\int\limits_{\mathrm{AMO}} \left(\mathrm{e}^x \sin y - my\right)\mathrm{d}x + \left(\mathrm{e}^x \cos y - m\right)\mathrm{d}y = \frac{ma^2\pi}{8}.$$

$\boxed{11}$ Să se calculeze $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\right]\mathrm{d}y,$

unde *C* este curba $C: \begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta; \\ z = 2 + 2\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$

Rezolvare. Curba *C* este cercul centrat în $(2, 2)$ şi de raza 2 deci este o curbă închisă.

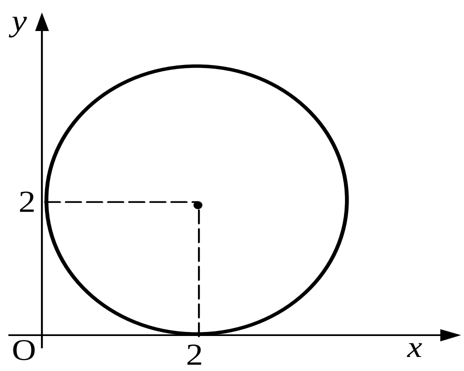

Fig. 9.2

Fie $D = \left\{(x, y) \middle| (x - y)^2 + (y - 2)^2 \le 4\right\}$; $P, Q : D \to \mathbb{R}$; $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$Q(x, y) = xy^2 + y\ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Deoarece $(0, 0) \notin D$, P, Q sunt funcţii continue şi cu derivate parţiale continue. Fiind satisfăcute ipotezele formulei Green rezultă

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\mathrm{d}y\right] = \iint\limits_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 [2 + \rho\sin\theta]^2 \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[4\rho + 4\rho^2\sin\theta + \rho^3\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = 20\pi.$$

$\boxed{12}$ Să se calculeze în două moduri integrala

$$\oint_{x^2 + y^2 = 1} \mathrm{e}^{x^2 + y^2}\left(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\right).$$

Rezolvare. Prin calcul direct, o parametrizare a curbei *C* este :

$$\begin{cases} x = \cos\theta; \\ y = \sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

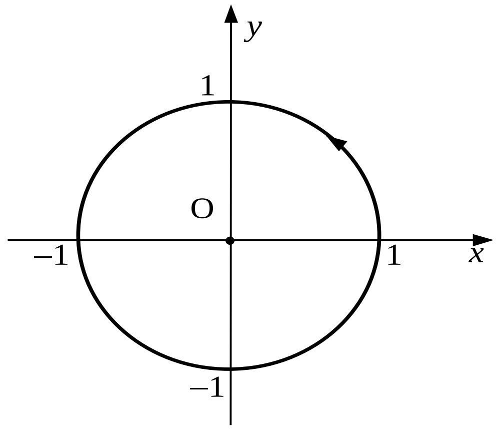

Fig. 9.3

Integrala devine atunci

$$\oint_{x^2+y^2=1} e^{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = \int_0^{2\pi} e\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta = 2\pi e.$$

Deoarece curba C este o curbă închisă şi funcţiile sunt continue, cu derivate parţiale continue pe $D = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$ se poate aplica formula lui Green:

$$\oint_{x^2+y^2=1} e^{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}\left(2 + 2x^2 + 2y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\rho^2}\left(1+\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = (e-1)2\pi + 2\pi = 2\pi e.$$

13 Să se calculeze integrala $\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$,

dacă C este elipsa $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ h > 0 \end{matrix}$ parcursă în sens trigonometric dacă privim din partea pozitivă a axei $\mathrm{O}x$.

Rezolvare. Elipsa considerată este un contur simplu, închis, ce mărgineşte suprafaţa

$$D = \left\{(x, y, z) \middle| \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1,\ x^2 + y^2 \le a^2\right\}.$$

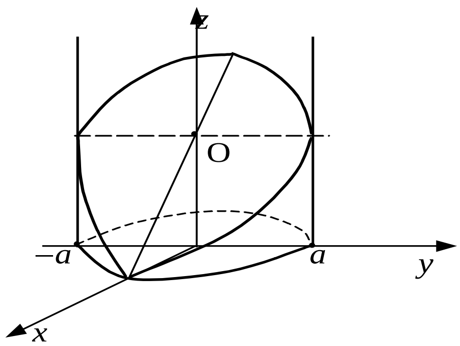

Fig. 9.4

Funcţiile $P(x,y,z)=y-z;\ Q(x,y,z)=z-x;\ R(x,y,z)=x-y$ sunt funcţii continue care admit derivate parţiale continue. Atunci aplicând formula lui Stokes, obţinem : $\oint_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=$

$$=\iint_D -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(+\frac{h}{a}+0+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2(h+a)\pi a.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Să se calculeze integrala: $\oint_C \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$, unde C este secţiunea cubului $0<x<a,\ 0<y<0,\ 0<z<0$ cu planul $x+y+z=\frac{3}{2}a$ parcursă în sens trigonometric, dacă privim din partea pozitivă a axei $\mathrm{O}x$.

Rezolvare. Curba MNPQRS obţinută prin intersecţia cubului cu planul este un hexagon regulat de latură $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Funcţiile

$$P(x,y,z)=y^2-z^2,\quad Q(x,y,z)=z^2-x^2,\quad R(x,y,z)=x^2-y^2$$

sunt funcţii continue ce admit derivate parţiale continue pe $\mathbb{R}^3$. Aplicând formula lui Stokes, vom obţine $\oint_C \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z=$

$$=\iint_{\mathrm{MNPQRS}}(-2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

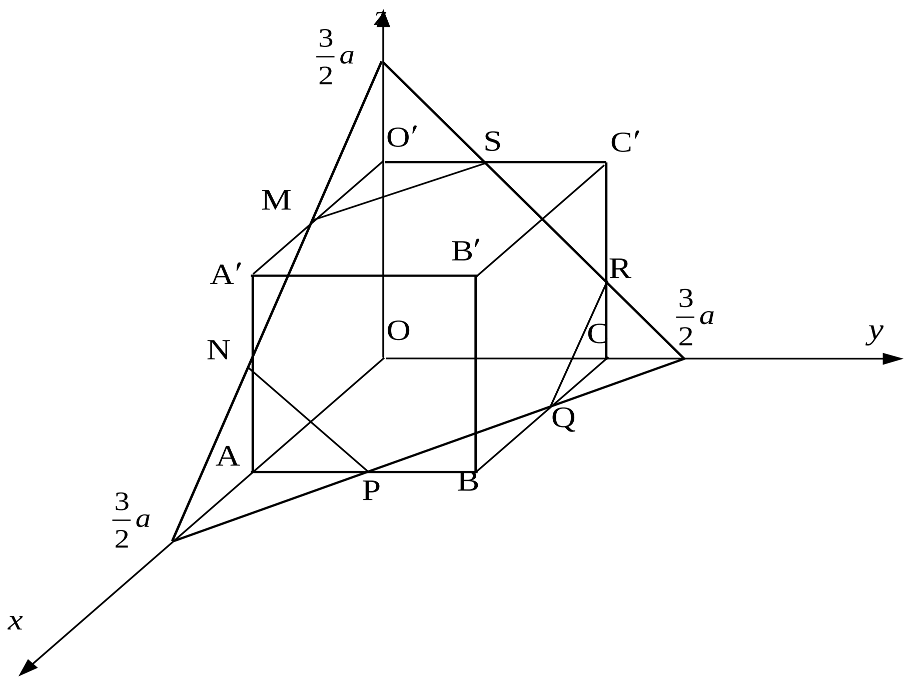

Fig. 9.5

Hexagonul MNPQRS fiind inclus în planul $x+y+z=\frac{3}{2}a$ obţinem :

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \oint_C \left(y^2 - z^2\right)\mathrm{d}x + \left(z^2 - x^2\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}z =$$

$$= -4 \iint\limits_{\text{VAPQCT}} \left(x + y + \frac{3}{2}a - x - y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -6a \iint\limits_{\text{VAPQCT}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{9}{2}a^3.$$

15 Să se calculeze integrala $\oint_C x\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z$,

dacă C este curba $C: \begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \\ z = a(\sin t + \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$.

Rezolvare. Curba C este elipsa obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul $z = x + y$ şi este o curbă simplă închisă care mărgineşte domeniul D pe planul $z = x + y$.

Funcţiile $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = x + y$ şi $R(x,y,z) = x + y + z$ fiind continue şi cu derivate parţiale continue putem aplica formula lui Stokes şi vom obţine:

$$\oint_C x\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y + (x+y+z)\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_D +\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi a^2.$$

16 Să se calculeze $\iint_S y^2 \cdot z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,

dacă S este suprafaţa exterioară a corpului din primul octant limitat de suprafeţele $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 1$ şi planele de coordonate.

Rezolvare. Suprafaţa paraboloidului $z = x^2 + y^2$ şi cea a cilindrului se întâlnesc în $z = 1$ şi deoarece funcţiile $P(x,y,z)$; $Q(x,y,z)$ şi $R(x,y,z)$ sunt continue şi cu derivate parţiale continue se poate aplica formula Gauss-Ostrogradski şi vom obţine:

$$\iint\limits_{\partial\Omega = S} y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x^2 y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2 + z + x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x,y>0}} \left(\int_0^{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2 + z\right)\mathrm{d}z \right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ x,y>0}} \left(x^2 + y^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(\int\limits_0^1 \rho^3 \mathrm{d}\rho \right)\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

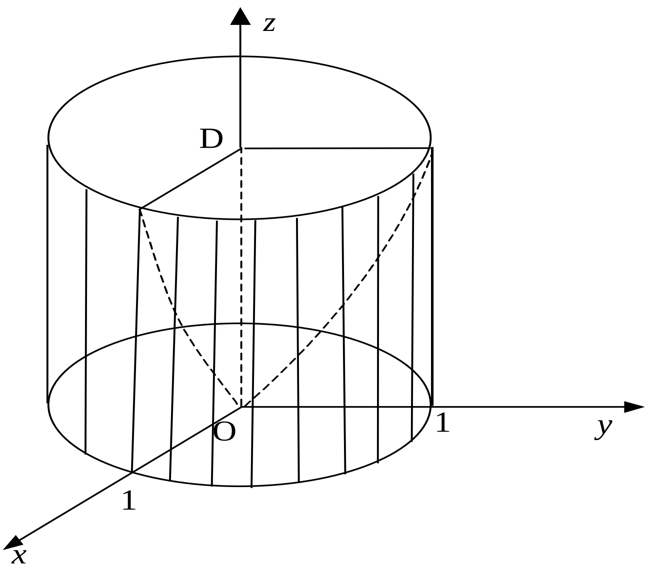

Fig. 9.6

17 Să se calculeze fluxul vectorului de poziţie $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ prin suprafaţa conului $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \geq 0$.

Rezolvare. Fluxul vectorului $\vec{a}$ prin suprafaţa considerată va fi

$$\phi = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

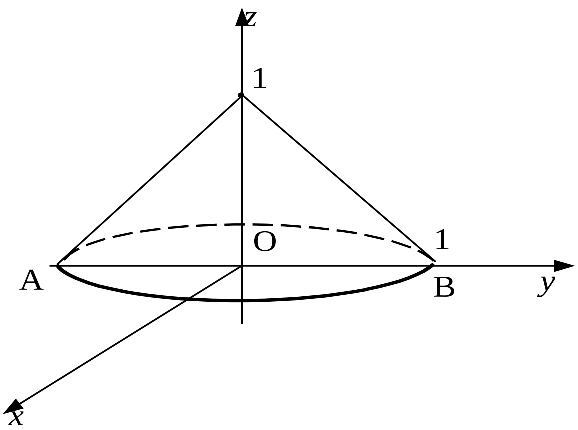

Fig. 9.7

Vom închide suprafaţa conului cu discul din planul $x\mathrm{O}y$ $\left(x^2 + y^2 \leq 1\right)$ şi vom aplica formula lui Gauss-Ostrogradski, deoarece ipotezele acesteia sunt îndeplinite

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\ z=0}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Dar $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ z=0}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ şi deci $\phi = 3\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$

$$= 3\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \pi.$$

$\boxed{18}$ Să se calculeze fluxul vectorului $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ prin octantul pozitiv al sferei $x^2+y^2+z^2=1$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

Rezolvare. Deoarece suprafaţa considerată este deschisă, o vom închide adăugând planele de coordonate $x=0,\ y=0,\ z=0$. Fluxul vectorului $\overline{a}$ prin suprafaţa considerată va fi:

$$\phi = \iint\limits_{S} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Observăm că

$$\iint\limits_{\substack{z=0\\ x^2+y^2\le 1,\, x,y>0}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x=0\\ x^2+y^2\le 1,\, y,z>0}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint\limits_{\substack{y=0\\ x^2+y^2\le 1,\, x,z>0}} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Deoarece $P(x,y,z)=x^2,\ Q(x,y,z)=y^2$ şi $R(x,y,z)=z^2$ sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$, suntem în condiţiile formulei Gauss-Ostrogradski şi

$$\phi = \iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde $\Omega = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\right\}$.

Trecând la coordonate sferice $\Omega:\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi, & \rho\in[0,1];\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi, & \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ z=\rho\cos\theta, & \varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\end{cases}$ Jacobianul transformării este $J=\rho^2\sin\theta$. Obţinem:

$$\phi = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(\rho\sin\theta\cos\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta\right)\cdot\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\theta\cos\varphi + \sin^2\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2\theta + \sin^2\theta + \frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}.$$

$\boxed{19}$ Să se calculeze integrala $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

dacă S este suprafaţa exterioară a conului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 0,\ z \in [0,b],\ a,b > 0$.

Rezolvare. Deoarece suprafaţa S este o suprafaţă deschisă, o vom închide considerând discul $D = \left\{(x,y,z) \middle|\ z = b,\ x^2 + y^2 \le a^2\right\}$

$$\iint_D x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} b^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^2 b^2.$$

Deoarece funcţiile $P(x,y,z) = x^2,\ Q(x,y,z) = y^2$ şi $R(x,y,z) = z^2$ sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$ şi suprafaţa $S \cup D$ este o suprafaţă închisă, putem aplica formula Gauss-Ostrogradski şi vom obţine:

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \pi a^2 b^2 = \iiint\limits_{\Omega}(2x + 2y + 2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= 2\iint\limits_{x^2+y^2\le a}\left(\int_{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{b}(x+y+z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= 2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x+y)b\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right) + \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a b\rho^2\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{b^2\rho}{2} - \frac{b^2\rho^3}{2a^2}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi b^2 a^2}{2}.$$

Deci, $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\dfrac{\pi a^2 b^2}{2}$.

3. Test de autoevaluare

Folosind formula lui Green, să se calculeze:

1. $\int_{\Gamma} -x^2 y \mathrm{d}x + xy^2 \mathrm{d}y$,

unde Γ este cercul $x^2 + y^2 = R^2$ parcurs în sens pozitiv.

Răspuns. $\dfrac{\pi R^4}{2}$.

2. $I = \int_{\Gamma} xy\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$,

unde Γ este conturul $\Delta\mathrm{OAB}$ de vârfuri $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(1,2)$ parcurs în sens pozitiv.

Răspuns. $\dfrac{3}{2}$.

3. $I = \int_{\Gamma} \left(3x^2 - 8y^2\right)\mathrm{d}x + \left(4x - 6xy\right)\mathrm{d}y$,

unde Γ este frontiera domeniului

$$D = \left\{(x,y) \middle| x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Răspuns. $\dfrac{5}{3}$.

Să se calculeze integralele de suprafaţă, utilizând formula Gauss-Ostrogradski:

4. $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este faţă exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$, delimitat de planele $x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Răspuns. $\dfrac{a^3}{2}$.

5. $I = \iint_S x\left(y^2 - z^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\left(z^2 - x^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Răspuns. 0.

6. $I = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

unde S este forţa exterioară a domeniului din $\mathbb{R}^3$ mărginit de planele $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$.

Răspuns. 0.

Să se calculeze integralele următoare, aplicând formula lui Stokes:

7. $\int\limits_{\mathrm{ABCA}} y^2 \mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}y + x^2 \mathrm{d}z$, unde ABCA este conturul poligonal determinat de punctele $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,a,0)$, $\mathrm{C}(0,0,a)$.

Răspuns. $-a^3$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (2x - z)\mathrm{d}x + (y - z + 1)\mathrm{d}y + z^2 \mathrm{d}z$,

unde Γ mărgineşte suprafaţa

$$S = \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [1,2],\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Răspuns. 0.

9. Fie câmpul vectorial $F(x,y,z) = (2z - 2y, 2x - 2z, 2y - 2x)$ şi elipsoidul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ Să se calculeze circulaţia câmpului *F* în lungul curbei de intersecţie dintre elipsoid şi semiplanele de coordonate $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ în sens pozitiv.

Răspuns. 11π.

10. Să se calculeze $\oint\limits_{\partial D} (x - y)\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, dacă

$$D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\right\}.$$

Răspuns. $\frac{\pi}{2}$.

11. Să se calculeze integrala

$$\oint_C (y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - z)\mathrm{d}z,$$

curba *C* este obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$.

Răspuns. 4π.

12. Să se calculeze integrala

$$\oint_C \left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}y + \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}z,$$

dacă *C* este curba aflată la intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \cdot R \cdot x$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = 2 \cdot r \cdot x,\ 0 < r < R,\ z > 0$, parcursă în sens trigonometric privind dinspre partea pozitivă a axei O*x*.

Răspuns. $2\pi R r^2$.

4. Temă de control

1. Să se calculeze integrala

$$\iint_S \left(2x + xy^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(z^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde S este suprafaţa exterioară a solidului comun suprafeţelor $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$ şi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

Răspuns. 16π.

2. Să se calculeze integrala $\oint_C y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$,

dacă C este curba lui Viviani definită prin intersecţia suprafeţelor $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi $x^2 + y^2 = a \cdot x,\ a > 0$.

Răspuns. $-\frac{\pi a^3}{4}$.

3. Calculaţi direct şi apoi verificaţi rezultatul folosind formula Stokes, următoarea integrală curbilinie $\Gamma = \int_\Gamma x^2 y^3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$,

unde Γ este cercul $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = 0. \end{cases}$

Răspuns. $I = -\frac{\pi R^6}{8}$.

4. Determinaţi cu ajutorul teoremei Gauss-Ostrogradski fluxul câmpului vectorial

$$\overline{v} = x^2 y\overline{i} + xy^2\overline{j} + xyz\overline{k}$$

prin suprafaţa S ce este bordura domeniului

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\},\ R > 0,$$

în direcţia normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\overline{v}, S) = \frac{R^5}{3}$.

5. Să se calculeze integrala $I = \iint_S \left(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$,

unde S este suprafaţa sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0$, iar $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sunt unghiurile formate de normala exterioară cu direcţia pozitivă a axelor de coordonate.

Răspuns. $I = \dfrac{12}{5}\pi R^5$.

6. Calculaţi folosind formula Gauss-Ostrogradski integrala de suprafaţă:

$I = \iint_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}z + yx\mathrm{d}y\mathrm{d}x + zy\mathrm{d}z\mathrm{d}y$, unde S este bordura domeniului

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 \le R^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le h\right\},\ \ R, h \in \mathbb{R}_+^*.$$

Răspuns. $I = R^2 h\left(\dfrac{2R}{3} + \dfrac{\pi h}{3}\right)$.

7. Determinaţi fluxul câmpului vectorial $\overline{v} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$

prin suprafaţa S a conului $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} \le 0,\ 0 \le z \le b\right\}$,

în direcţia normalei exterioare.

Răspuns. $\phi(\overline{v}, S) = \dfrac{\pi a^2 b^2}{2}$.

8. Să se calculeze, folosind formula integrală a lui Stokes, integrala:

$$I = \oint_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul aflat la intersecţia planului $x + y + z = 0$ cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$, parcurs în sens direct faţă de axa Ox.

Răspuns. $\pi a^2\sqrt{3}$.

9. Să se calculeze, folosind formula integrală lui Gauss-Ostrogradski, integrala:

$$I = \oiint_S (x - y + z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (y - z + x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (z - x + y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

unde S este suprafaţa tetraedrului ABCO cu vârfurile $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$ şi $\mathrm{O}(0,0,0)$.

Răspuns. $\dfrac{1}{2}$.

10. (i) Să se calculeze în două moduri integrala: $I = \int_C -x^2 \cdot y\mathrm{d}x + x \cdot y^2\mathrm{d}y$,

unde C este curba închisă dată de ecuaţia: $x^2 + y^2 = a^2,\ a > 0$.

(ii) Calculaţi valoarea integralei: $I = \int_{\mathrm{AB}} \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x$,

unde AB este arcul din cercul $x^2 + y^2 = 2 \cdot x$ cu $\mathrm{A}(0,0)$ şi $\mathrm{B}(1,1)$.

Răspuns. (i) $\dfrac{\pi}{2}a^4$; **(ii)** 1.

5. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE INVĂŢARE Nr. 4

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. **Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină,** *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Vol III**,** Editura Tehnică, Bucureşti, 1967
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
4. **M. Craiu, M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978, 1979, Editura ALL, 1993, 1994
6. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecţii de analiză matematică,* Editura ALL, 1993
7. **.......................................***Analiză matematică*, vol. II, Ediţia a III-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
8. **C. Udrea,** *Integrala Riemann pentru funcţii de variabilă vectorială,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
9. **M. Roşculeţ**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
10. **M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
11. **I. Sprinţu**, *Elemente de analiză matematică,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
12. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
13. **I. Sprinţu**, **V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferenţial şi integral,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2003
14. **D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bătineţu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciţii şi probleme*, Editura Militară, Bucureşti, 1992

În dorinţa de ridicare continuă a standardelor desfăşurării activitatilor dumneavoastra, va rugăm să completaţi acest chestionar şi să-l transmiteţi indrumatorului de an.

Disciplina: CALCUL DIFERENŢIAL ŞI INTEGRAL
Unitatea de invatare/modulul:_________________
Anul/grupa:_________________________
Tutore:________________________

Partea I . Conţinut

1. Care dintre subiectele tratate in aceasta unitate/modul consideraţi că este cel mai util şi eficient? Argumentati raspunsul.

2. Consideraţi că este necesară reluarea, sub forma de recapitulare, a unor cunoştinţe de Analiză matematică din liceu care stau la baza acestei discipline ? Argumentaţi.

3. Ce subiecte din acesta unitate de invatare/modul consideraţi că ar fi trebuit să fie tratate mai extins ?

4. La care aplicatii practice ati intampinat dificultati in procesul de învăţare? Care credeti ca este motivul dificultatilor întâlnite?

5. Timpul alocat acestui modul a fost suficient?

6. Daca ar fi sa va evaluati cunostintele acumulate din parcurgerea unitatii de invatare/modului, care este nota pe care v-o alocati, pe o scala de la 1-10?. Argumentati.

Partea II. Impresii generale

1. Acest modul a întrunit aşteptările dumneavoastră?

În totalitate   În mare măsură   În mică măsură   Nu

2. Aveţi sugestii care să conducă la creşterea calităţii acestei unitati de invatare/modul?

3. Aveţi propuneri pentru alte teme în cadrul acestei discipline ? Argumentati.

4. Cunoasteţi care sunt disciplinele de studiu din semestrele următoare la care veţi utiliza cunostinţele dobândite la această disciplină ?

5. Apreciaţi că disciplinele de Matematică sunt utile şi importante la formarea Dvs intelectuală şi profesională prin dezvoltarea capacităţilor de abstractizare, generalizare şi sinteză, prin crearea şi dezvoltarea unui raţionament logic şi riguros, a unei argumentări fundamentate ?

Vă mulţumim pentru feedback-ul dumneavoastră!