Seminar 6

Aplicații liniare. Valori și vectori proprii

Def: Fie V_1 și V_2 două spații vectoriale peste corpul com. K

Se numește aplicație liniară, o funcție $f: V_1 \to V_2$ a.î.:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ aditivitatea
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$ omogenitate

$\forall x, y \in V_1$, $\forall \alpha \in K$

Def 3 $\Leftrightarrow$ $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Exemplu Considerăm aplicația

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (-3x_1 - 7x_2 - 5x_3, 2x_1 + 4x_2 + 3x_3, -x_1 - 3x_2 - 2x_3)$

unde $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

Verifică dacă T este aplicație liniară

• Aditivitatea

$T(x+y) \overset{?}{=} T(x) + T(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$

$x = (x_1, x_2, x_3)$
$y = (y_1, y_2, y_3)$

$T(x+y) = T((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = T((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)) =$

$= (-3(x_1+y_1) - 7(x_2+y_2) - 5(x_3+y_3), 2(x_1+y_1) + 4(x_2+y_2) + 3(x_3+y_3), -(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2)$
$-2(x_3+y_3)) =$

$= (-3x_1 - 3y_1 - 7x_2 - 7y_2 - 5x_3 - 5y_3, 2x_1 + 2y_1 + 4x_2 + 4y_2 + 3x_3 + 3y_3, -x_1 - y_1 - 3x_2 - 3y_2 +$
$-2x_3 - 2y_3) =$

$= (-3x_1 - 7x_2 - 5x_3, 2x_1 + 4x_2 + 3x_3, -x_1 - 3x_2 - 2x_3) + (-3y_1 - 7y_2 - 5y_3, 2y_1 + 4y_2$
$+ 3y_3, -y_1 - 3y_2 - 2y_3)$

$= T((x_1, x_2, x_3)) + T((y_1, y_2, y_3)) = T(x) + T(y)$

$\Rightarrow$ T este aditivă

• Omogenitate

$T(\alpha(x)) = \alpha T(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$T(\alpha(x)) = T(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (-3\alpha x_1 - 7\alpha x_2 - 5\alpha x_3,$
$2\alpha x_1 + 4\alpha x_2 + 3\alpha x_3, -\alpha x_1 - 3\alpha x_2 - 2\alpha x_3)$

$= T(\alpha(-3x_1-7x_2-5x_3), \alpha(2x_1+4x_2+3x_3), \alpha(-x_1-3x_2-2x_3)) =$

$= \alpha \cdot T(-3x_1-7x_2-5x_3, 2x_1+4x_2+3x_3, -x_1-3x_2-2x_3) = \alpha \cdot T(x_1, x_2, x_3)$

$= \alpha \cdot T(x)$ T este omogen

T aditivă + omogenă -> T este aplicație liniară

Exemplu 2 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = f(x_1, x_2) = (-x_1, 2x_1+3x_2, x_2+1)$

Verificați dacă f e aplicație liniară

- Aditivitate $x = (x_1, x_2)$ $y = (y_1, y_2)$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(x+y) = f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = f((x_1+y_1, x_2+y_2)) =$

$= (-(x_1+y_1), 2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2), (x_2+y_2)+1) =$

$= (-x_1-y_1, 2x_1+2y_1+3x_2+3y_2, x_2+y_2+1) =$

$= (-x_1, 2x_1+3x_2, x_2+1) + (-y_1, 2y_1+3y_2, y_2) \neq f(x)+f(y)$

f nu este aditiv

- Omogeneitate

$f(\alpha x) \overset{?}{=} \alpha \cdot f(x)$

$f(\alpha x) = f(\alpha(x_1, x_2)) = f((\alpha x_1, \alpha x_2)) = (-\alpha x_1, 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2, \alpha x_2 + 1) =$

$= (\alpha(-x_1), \alpha(2x_1+3x_2), \alpha(x_2+\frac{1}{\alpha})) = \alpha \underbrace{(-x_1, 2x_1+3x_2, x_2+\frac{1}{\alpha})}_{\neq f(x)}$

$\neq \alpha \cdot f(x)$ f nu este omogen

f nu este aplicație liniară

Nucleul și Imaginea unei aplicații liniare

Fie $f: V_1 \to V_2$ apl. liniară

$\mathrm{Ker} f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\}$ = Nucleul lui f

$\mathrm{Ker} f \subseteq V_1$ Kerf este sub-spațiu vectorial al lui V_1

$\mathrm{Im} f = \{y \in V_2 \mid f(x) = y, x \in V_1\}$ Imaginea lui f

$\mathrm{Im} f \subseteq V_2$ Imf este sub-spațiu vectorial al lui V_2

Exemplu 3 Pentru aplicația liniară de la ex. 1

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 7x_2 - 5x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3)$

$\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$T(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-3x_1 - 7x_2 - 5x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -7 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x_1 - 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \mid x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\frac{\alpha}{2} \\ x_2 = -\frac{\alpha}{2} \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad S = \left\{\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)\right\}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Ker} T = \left\{\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}, \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{\alpha}{2}\underbrace{(-1, -1, 2)}_{v_1}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

$= Sp(v_1)$ $\qquad \{v_1\}$ = bază în $\operatorname{Ker} T$

$\dim \operatorname{Ker} T = 1$

$\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid T(x) = y,\ x \in \mathbb{R}^3\}$

$T(x) = y \Leftrightarrow (-3x_1 - 7x_2 - 5x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3) = (y_1, y_2, \ldots$

$$\begin{cases} -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = y_2 \\ -3x_2 - 2x_3 - x_1 = y_3 \end{cases}$$

$\operatorname{rank} = 2$

$\operatorname{Im} f = \{(-3x_1 - 7x_2 - 5x_3,\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3)\}\ x_1, x_2, x_3 \in$

$= \{ x_1 \underbrace{(-3, 2, -1)}_{u_1} + x_2 \underbrace{(-7, 4, -3)}_{u_2} + x_3 \underbrace{(-5, +3, -2)}_{u_3} \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$

$A = [u_1, u_2, u_3]$ = rank 2 LD. $\{u_1, u_2, u_3\}$ nu formează o bază în Imf

$A_1 = [u_1, u_2]$ rank 2 L.I $\{u_1, u_2\}$ formează o bază în Imf

$Imf = Sp(u_1, u_2) \to$ Dim $Imf = 2$

TEOREMA DIMENSIUNII {RANG DEFECT}

$f : V_1 \to V_2$ aplicație liniară

$\dim V_1 = \dim Ker f + \dim Imf$

defect f — rang f

Exemplu 4 Pentru aplicația liniară exp. 1

$\underset{3}{\dim \mathbb{R}^3} = \underset{1}{\dim Ker f} + \underset{2}{\dim Imf}$

Exercițiu 5 Aplicația:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2 - 2x_3, -2x_2 + 5x_3)$

a) Să se arate că f e aplicație liniară

b) Să se determine sub-spațiile vectoriale Ker f și Im f, dim fiecăruia și câte o bază pentru fiecare

c) Teorema Dimensiunii

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\qquad x=(x_1, x_2, x_3) \quad y=(y_1\ y_2\ y_3)$

$f(x+y) = f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) =$

$= f((x_1+y_1, x_2+y_2; x_3+y_3)) =$

$= (3(x_1+y_1)+2(x_2+y_2), 2(x_1+y_1)+4(x_2+y_2)-2(x_3+y_3),$
$-2(x_2+y_2)+5(x_3+y_3)) =$

$= (3x_1+3y_2+2x_2+2y_2, 2x_1+2y_1+4x_2+4y_2-2x_3-2y_3,$
$-2x_2-2y\,y_2+5x_3+5y_3) =$

$= (3x_1+2x_2, 2x_1+4x_2-2x_3, -2x_2+5x_3) +$
$(3y_2+2y_2, 2y_1+4y_2-2y_3, -2y_2+5y_3) =$

$= f(x) + f(y) =$ ADITIVĂ

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ $\qquad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$

$f(\alpha x) = f(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) =$

$= (3(\alpha x_1)+2(\alpha x_2), 2(\alpha x_1)+4(\alpha x_2)-2(\alpha x_3), -2(\alpha x_2)+5(\alpha x_3)) =$

$= (\alpha(3x_1+2x_2), \alpha(2x_1+4x_2-2x_3), \alpha(-2x_2+5x_3)) =$

$= \alpha \cdot (3x_1+2x_2, 2x_1+4x_2-2x_3, -2x_2+5x_3) =$ OMOG.

f este aplicație liniară

b) $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\Rightarrow (3x_1+2x_2, 2x_1+4x_2-2x_3, -2x_2+5x_3) = (0,0,0)$

rank = 3 $\qquad x_1, x_2, x_3 = 0$

$\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\} \to \operatorname{Dim} \operatorname{Ker} f = 0$

c)

$\operatorname{Dim} \mathbb{R}^3 = \operatorname{Dim} \operatorname{Ker} f + \operatorname{Dim} \operatorname{Im} f$

$3 = 0 + 3$ ✓

$\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = y, x \in \mathbb{R}^3\}$

$$A \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = y_2 \\ -2x_2 + 5x_3 = y_3 \end{cases} \to \text{Rank} = 3$$

$\operatorname{Im} f = (x_1\underbrace{(3,2,0)}_{u_1} + x_2\underbrace{(2,4,-2)}_{u_2} + x_3\underbrace{(0,-2,5)}_{u_3})$

$A = [u_1, u_2, u_3]$ L.i $\qquad \operatorname{Dim} \operatorname{Im} f = 3$