Aplicații la rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale omogenee, liniare și cu coeficienți constanți

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Pentru un astfel de sistem se poate determina întotdeauna soluția generală

Se caută soluții de forma $Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot r \\ A_2 \cdot r \\ \vdots \\ A_n \cdot r \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \cdot r \\ A_2 \cdot r \\ \vdots \\ A_n \cdot r \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \Big/ : e^{rx}$$

$$\begin{cases} A_1 r = a_{11} \cdot A_1 + \dots + a_{1n} \cdot A_n \\ \vdots \\ A_n r = a_{n1} \cdot A_1 + \dots + a_{nn} \cdot A_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a_{11} - r) A_1 + \dots + a_{1n} A_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} A_1 + \dots + (a_{nn} - r) A_n = 0 \end{cases}$$

Am obținut un sistem algebric, liniar, omogen de n ecuații cu n necunoscute. Este întotdeauna compatibil {are cel puțin soluția banală} → aceasta ar conduce la soluția Nulă $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{rx}$

$\det(A - rI_n) = 0 \iff$ Polinomul caracteristic al matricei A trebuie să fie nul $\iff r_1, r_2, \dots, r_n$ sunt valorile proprii ale matricei A.

$\iff A_1, \dots, A_n$ sunt coordonatele vectorului propriu, care corespund fiecărei valoare proprie.

ALGORITMUL DE REZOLVARE

1) Se calculează pol. caracteristic al matricei A

$$f_A(r) = \det(A - rI_n) = 0$$

2) Se rezolvă această ecuație polinomială: Valorile proprii lui A

$$r_1, \dots, r_n$$

3) Pentru fiecare valoare proprie, se determină coordonatele vectorului propriu corespunzător

rezolvând sistemul:

- pentru z_i, notăm v_i vectorul propriu corespunzător
- coord. sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases}(a_{11}-z_i)A_{1i}+\dots+a_{1n}\cdot A_{ni}=0\\ a_{n1}\cdot A_{1i}+\dots+(a_{nn}-z_i)A_{ni}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow A_{1i},\dots,A_{ni}$ = coord. vectorului propriu

$z=z_i \Rightarrow Y=\begin{pmatrix}A_{1i}\\ \vdots\\ A_{ni}\end{pmatrix}\cdot e^{z_i x} \Rightarrow$ Soluția care corespunde valorii proprii $z=z_i$

Soluția generală a sistemului va fi:

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_1, & Y_2, & \dots, & Y_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}$$

Pot apărea următoarele situații:

1) valorile proprii ale lui A sunt reale și distincte
2) Pot exista valori proprii reale și multiple
3) Pot exista valori proprii complex conjugate simple
4) Pot exista valori proprii complex conjugate multiple

În cazul 2 se pot căuta soluții prin metoda coeficienților nedeterminați de forma

- Dacă $z=z_i$ este multiplă de ordinul $p>1$ se caută soluții de forma

$$Y_i=\begin{pmatrix}P_1(x)\\ \vdots\\ P_n(x)\end{pmatrix}\cdot e^{zx}$$

, unde polinoamele de indice $k=\overline{1,n}$ au gradul $p-1$ și coef. nedeterminați

→ Dacă $z_1=\alpha+i\beta$, $z_2=\alpha-i\beta$ sunt complex conjugate, le vor corespunde 2 soluții pt. sistemul de ec. dif.: Y_1, Y_2 cu coeficienți complecși.

→ Se recomandă să se utilizeze soluțiile:

$$\overline{Y_1}=\frac{Y_1+Y_2}{2} \qquad \overline{Y_2}=\frac{Y_1-Y_2}{2}$$

care au toate componentele reale

→ Dacă răd. sunt complex conj. multiple, se va proceda ca în cazul rădăcinilor reale și multiple.