LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

U1 - TESTE DE AUTOEVALUARE ŞI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Fie $G(n)$ numărul relaţiilor de ordine parţială ce se pot defini pe o mulţime cu n elemente. Arătaţi că $G(3) = 19$.

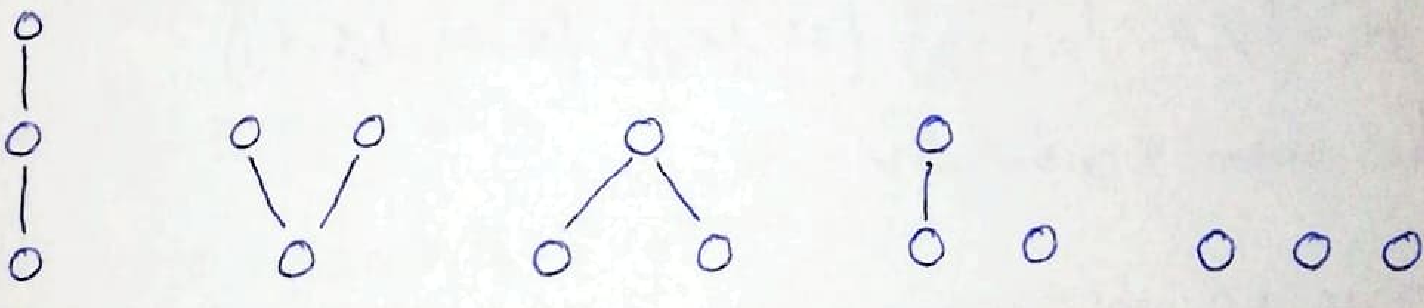
Rezolvare

R este o relaţie de ordine parţială pe M dacă:

(i) $(\forall)\, x \in M,\ xRx$

(ii) $(\forall)\, x, y, z \in M,\ xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

Diagramele Hasse pt. mulţimi cu 3 elemente:



$3! = 6$ $\quad 3 \quad 3 \quad 3 \cdot 2 = 6 \quad 1$

$G(3) = 6 + 3 + 3 + 6 + 1$

$G(3) = 19$

2. $x \leq y \iff x \circ y = x$

$y \leq z \iff y \circ z = y.$

$x \overset{?}{\leq} z \iff x \circ z = x.$

$x \circ z = (x \circ y) \circ z = x \circ (\underbrace{y \circ z}_{= y}) = x \circ y = x.$

Antisim: $x \leq y$ și $y \leq x \overset{?}{\implies} x = y.$

$x \leq y \implies x \circ y = x$

$y \leq x \implies y \circ x = y$

$x \circ y = y \circ x \implies x = y.$

$\implies (A, \leq)$ rel de ordine.

Dem $x \wedge y = x \circ y.$

Dem că $x \circ y \leq x$

$x \circ y \leq y$

Fie $z \in A$ minorant $\implies z \leq x \circ y.$

$x \circ y \le x \iff (x \circ y) \circ x = x \circ y$.

$(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x) = x \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ y = x \circ y$.

Analog $x \circ y \le y$

Fie $z \in A$ minorant al lui $\{x, y\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow z \le x \Rightarrow z \circ x = z$

$z \le y \Rightarrow z \circ y = z$

Trebuie $z \le x \circ y \iff z \circ (x \circ y) = z$.

$z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = z \circ y = z$.

TESTUL NR. 2

1. Este mulțimea N a numerelor naturale o latice completă față de relația de ordine definită de divizibilitate?

Rezolvare

Relația de divizibilitate este o relație de ordine pe mulțimea numerelor naturale. În această relație, 1 este minimul mulțimii numerelor naturale, iar 0 este maximul.

$(A, \leq)$ se numește latice completă dacă pentru orice familie $(x_i)_{i\in I}$ de elemente ale lui A, există $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ și $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$.

2. Fie A o mulțime dată, finită și P(A) mulțimea părților lui A. Să se găsească toate subalgebrele Boole ale mulțimii P(A), atunci când $A = \{x, y, z\}$

Rezolvare

Dacă card $A = n$, atunci card $P(A) = 2^n$

Dacă $A = \{x, y, z\}$ atunci card $A = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}, A\}$

$M_1 = \{\emptyset, A\}$

$M_2 = \{\emptyset, A, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$

$M_3 = \{\emptyset, A, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}\}$

$M_4 = \{\emptyset, A, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x,y\}, \{x,z\}, \{y,z\}\}$

deci avem 4 subalgebre.

TEMĂ DE CONTROL

1. Fie G(n) numărul relațiilor de ordine parțială ce se pot defini pe o mulțime cu n elemente. Arătați că $G(4) = 219$.

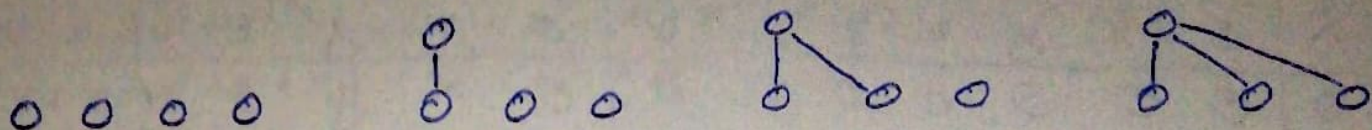
Rezolvare

R este o relație de ordine parțială pe M dacă:

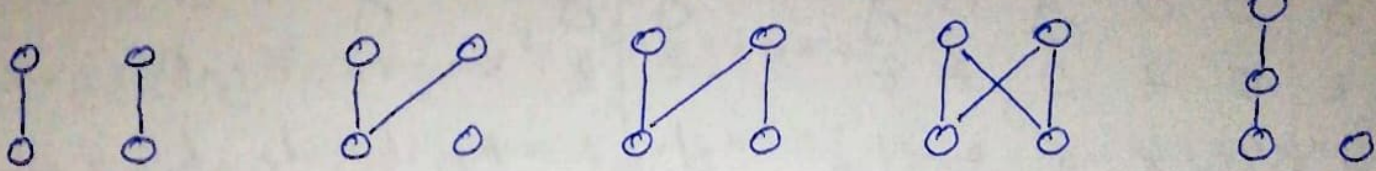
(i) $(\forall) x \in M, xRx$

(ii) $(\forall) x, y, z \in M, xRy, yRz \Rightarrow xRz$

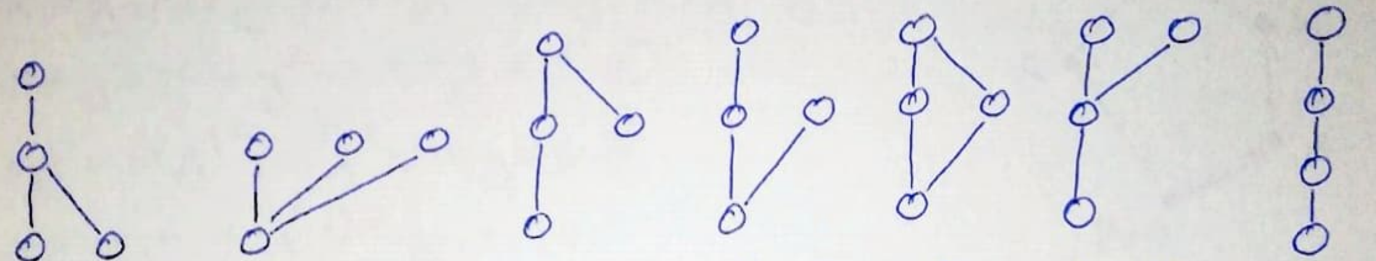
Diagramele Hasse pt. mulțimi cu 4 elemente:



1 $\qquad A_4^2 = 12$ $\qquad 4\cdot C_3^2 = 12$ $\qquad 4$



$C_4^2 \cdot 2 = 12$ $\qquad 4\cdot C_3^2 = 12$ $\qquad 4\cdot C_3^2 \cdot 2 = 24$ $\qquad C_4^2 = 6$ $\qquad A_4^3 = 24$



$4\cdot 3 = 12$ $\qquad 4$ $\qquad 4\cdot C_3^2\cdot 2 = 24$ $\qquad 4\cdot C_3^2 \cdot 2 = 24$ $\qquad 4\cdot C_3^2 = 12$ $\qquad 4\cdot 3 = 12$ $\qquad 4! = 24$

$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \qquad A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 6\cdot 4 = 24 \qquad C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

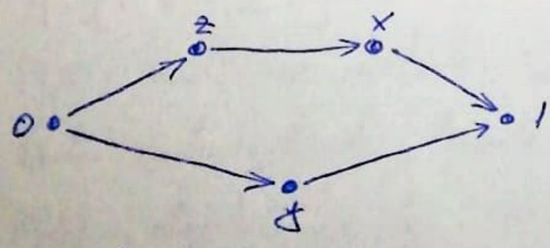
$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

$G(4) = 1 + 2\cdot 4 + 6 + 7\cdot 12 + 5\cdot 24$

$G(4) = 15 + 84 + 120$

$G(4) = 219$

2. Să se arate că laticea de mai jos nu este modulară:



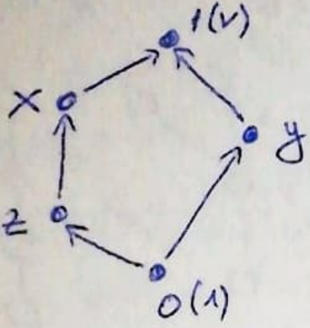
Rezolvare

O latice L este modulară dacă $(\forall)\, x, y, z \in L$ avem $x \le z \Rightarrow$

$\Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

$\wedge$	0	x	y	z	1
0	0	0	0	0	0
x	0	x	0	z	x
y	0	0	y	0	y
z	0	z	0	z	z
1	0	x	y	z	1

$\vee$	0	x	y	z	1
0	0	x	y	z	1
x	x	x	1	x	1
y	y	1	y	1	1
z	z	x	1	z	1
1	1	1	1	1	1



Pentru cazul $z \leq x$ dacă L este modular avem:

$(\forall)\ z, x, y \in L$

$z \leq x \Rightarrow z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge y$

$\Rightarrow z \vee 0 = x \wedge y$

$\Rightarrow z = 0$ $\quad \not\Rightarrow L$ nu este modulară

afirmația este pentru $(\forall)\ z \in L$

3. Arătați că într-un inel comutativ A de caracteristică 2, mulțimea $\{x \mid x^2 = x\}$ formează un inel Boole care este subinel al lui A. (A are caracteristica 2 dacă $x + x = 0$, pentru orice x din A).

indicație: $B \subset A$ este subinel, dacă:

(i) $(\forall)\ x, y \in B,\ x + y \in B$;

(ii) $(\forall)\ x \in B,\ -x \in B$;

(iii) $(\forall)\ x, y \in B,\ xy \in B$;

(iv) $1 \in B$.

Rezolvare

A - inel comutativ de carac. 2 $(\forall\ x \in A,\ x + x = 0)$

$B = \{x \mid x^2 = x\}$ - inel Boole care este subinel al lui A?

$x+x=(x+x)^2 \Rightarrow x+x=x^2+x^2+x^2+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+x=x+x+x+x \Rightarrow x+x=0$

$\Rightarrow x=-x$

$\Rightarrow -x\in B$ (I)

$x+y=(x+y)^2 \Rightarrow x+y=x^2+y^2+xy+yx \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+y=x+y+xy+yx \Rightarrow \left.\begin{array}{l} xy+yx=0 \\ x=-x \end{array}\right\} \Rightarrow xy-yx=0 \Rightarrow xy=yx \text{ (V)}$$

$x+y=(x+y)^2 \Rightarrow x+y=x^2+y^2+xy+yx \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y=x^2+y^2 \Rightarrow x+y\in B$ (II)

$xy=(xy)^2=x^2y^2 \Rightarrow xy\in B$ (III)

$$\left.\begin{array}{l} x=-x \Rightarrow x=(-1)x \\ x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=(-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\cdot x \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=1^2 \Rightarrow 1\in B \text{ (IV)}$$

I + II + III + IV $\Rightarrow$ B subinel al lui A

V $\Rightarrow$ B inel Boole

4. Fie A o mulțime dată, finită și P(A) mulțimea părților lui A. Să se găsească toate subalgebrele Boole ale mulțimii P(A), atunci când $A=\{a,b,c,d,e\}$

Rezolvare

$A=\{a,b,c,d,e\}$

P(A) = mulțimea părților lui A

toate subalgebrele Boole ale mulțimii P(A)

P(A) - algebră Boole : $M_1\vee M_2=M_1\cup M_2$

$M_1\wedge M_2=M_1\cap M_2$

$\neg M=C_A(M)=A-M=\{x \mid x\in A \wedge x\notin M\}$

M' subalgebră a lui P(A) dacă:

$(\forall)\ x,y\in M' \Rightarrow x\wedge y\in M'$ și $x\vee y\in M'$

$x\in M' \Rightarrow \neg x\in M'$

$Card\ A = 5 \quad Card\ P(A) = 2^5 = 32$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\},$

$\{a,b\}, \dots, \{d,e\},$

$\{a,b,c\}, \dots, \{c,d,e\},$

$\{a,b,c,d\}, \dots, \{b,c,d,e\}, A\}$

$M_0 = \{\emptyset, A\}$

$M_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d,e\}, A\} = M_0 \cup \{a\} \cup C_A(\{a\})$

$M_2 = M_0 \cup \{b\} \cup C_A(\{b\})$

$M_3 = M_0 \cup \{c\} \cup C_A(\{c\})$

$M_4 = M_0 \cup \{d\} \cup C_A(\{d\})$

$M_5 = M_0 \cup \{e\} \cup C_A(\{e\})$

$M_6 = M_0 \cup \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d,e\}, \{a,c,d,e\}, \{c,d,e\}\} =$

$= M_1 \cup M_2 \cup \{a,b\} \cup C_A(\{a,b\})$

$M_7 = M_1 \cup M_3 \cup \{a,c\} \cup C_A(\{a,c\})$

la fel ad - M_8 bd - M_{11} ce - M_{14}
ae - M_9 be - M_{12} de - M_{15}
bc - M_{10} cd - M_{13}

$M_{16} = M_0 \cup \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\},$
$\{b,c,d,e\}, \{a,c,d,e\}, \{a,b,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,d,e\}, \{a,d,e\},$
$\{d,e\}\} = M_6 \cup M_7 \cup M_{10} \cup \{a,b,c\} \cup C_A(\{a,b,c\})$

$M_{17} = M_6 \cup M_8 \cup M_{11} \cup \{a,b,d\} \cup C_A(\{a,b,d\})$

la fel abe - M_{18} ade - M_{21} bde - M_{24}
acd - M_{19} bcd - M_{22} cde - M_{25}
ace - M_{20} bce - M_{23}

$M_{26} = M_0 \cup \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\},$
$\{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{b,c,d,e\},$
$\{a,c,d,e\}, \{a,b,d,e\}, \{a,b,c,e\}, \{c,d,e\}, \{b,d,e\}, \{b,c,e\},$

$\{a,d,e\}, \{a,c,e\}, \{a,b,e\}, \{d,e\}, \{c,e\}, \{b,e\}, \{a,e\}, \{e\}\} = P(A)$

$M_{27} = M_0 \cup \{\{a,b\}, \{c,d,e\}\} = M_0 \cup \{a,b\} \cup C_A(\{a,b\})$

la fel
$ac - M_{28}$ $\quad bc - M_{31}$ $\quad cd - M_{34}$
$ad - M_{29}$ $\quad bd - M_{32}$ $\quad ce - M_{35}$
$ae - M_{30}$ $\quad be - M_{33}$ $\quad de - M_{36}$

$36 + 1 =$ <u>37 subalgebre</u>

5. După modelul exercițiului 8 de la probleme rezolvate, să se trateze cazul $n=4$ și $n=5$, pentru algebre Lukasiewicz.

Rezolvare

$n=4$ și $n=5$ pentru algebre Lukasiewicz

$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$

$\sigma_i\left(\frac{j}{n-1}\right) = \begin{cases} 0, & i+j < n \\ 1, & i+j \geq n \end{cases}$

$x \vee y = \max(x, y)$
$x \wedge y = \min(x, y)$
$\neg x = 1 - x$

$n=4$

$\wedge$	0	1/3	2/3	1
0	0	0	0	0
1/3	0	1/3	1/3	1/3
2/3	0	1/3	2/3	2/3
1	0	1/3	2/3	1

$\vee$	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	1
1/3	1/3	1/3	2/3	1
2/3	2/3	2/3	2/3	1
1	1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1/3	2/3
2/3	1/3
1	0

	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$	$\sigma_3(x)$
0	0	0	0
1/3	0	0	1
2/3	0	1	1
1	1	1	1

$n=5$

$\wedge$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	0	0	0	0
1/4	0	1/4	1/4	1/4	1/4
2/4	0	1/4	2/4	2/4	2/4
3/4	0	1/4	2/4	3/4	3/4
1	0	1/4	2/4	3/4	1

$\vee$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	1/4	2/4	3/4	1
1/4	1/4	1/4	2/4	3/4	1
2/4	2/4	2/4	2/4	3/4	1
3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	1
1	1	1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1/4	3/4
2/4	2/4
3/4	1/4
1	1

	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$	$\sigma_3(x)$	$\sigma_4(x)$
0	0	0	0	0
1/4	0	0	0	1
2/4	0	0	1	1
3/4	0	1	1	1
1	1	1	1	1

U2 - TESTE DE AUTOEVALUARE ȘI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Demonstrați că următoarea propoziție este o tautologie:

$P = (A \to B) \vee (A \to \neg B)$;

Rezolvare *TABELE DE ADEVĂR

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$A \to \neg B$	$(A \to B) \vee (A \to \neg B)$
a	a	a	f	f	a
a	f	f	a	a	a
f	a	a	f	a	a
f	f	a	a	a	a

toate adevărate $\Rightarrow$ tautologie

*TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este falsă

f $((A \to B) \vee (A \to \neg B)$

f $(A \to B)$

f $(A \to \neg B)$

a A

f B

a A

f $(\neg B)$

a B

⊗

⊗

toate ramurile sunt contradictorii
$\Rightarrow$ presupunerea este falsă
$\Rightarrow$ a (P) în orice situație
$\Rightarrow$ P este tautologie

2. Demonstrați că următoarea propoziție este o contradicție:

$P = (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (A \to \neg A)$;

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

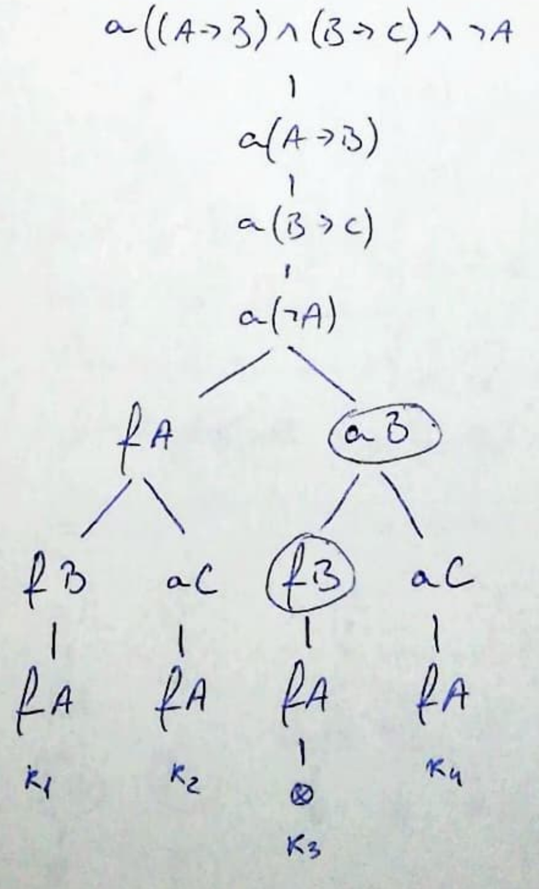
A	B	C	$\neg A$	$A \to B$	$B \to C$	$A \to \neg A$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (A \to \neg A)$
a	a	a	f	a	a	f	a	f
a	a	f	f	a	f	f	f	f
a	f	a	f	f	a	f	f	f
f	a	a	a	a	a	a	a	a
a	f	f	f	f	a	f	f	f
f	a	f	a	a	f	a	f	f
f	f	a	a	a	a	a	a	a
f	f	f	a	a	a	a	a	a

=> Avem cazuri în care P este adevărată => P <u>nu</u> este contradicție

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

$A \to \neg A = \neg A \Rightarrow P = (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge \neg A$



Avem ramuri care nu sunt contradictorii => P poate fi adevărată

=> P <u>nu</u> este contradicție

3. Demonstrați că următoarele propoziții sunt logic echivalente:

$A \vee (B \wedge C)$ și $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

$P = A \vee (B \wedge C)$

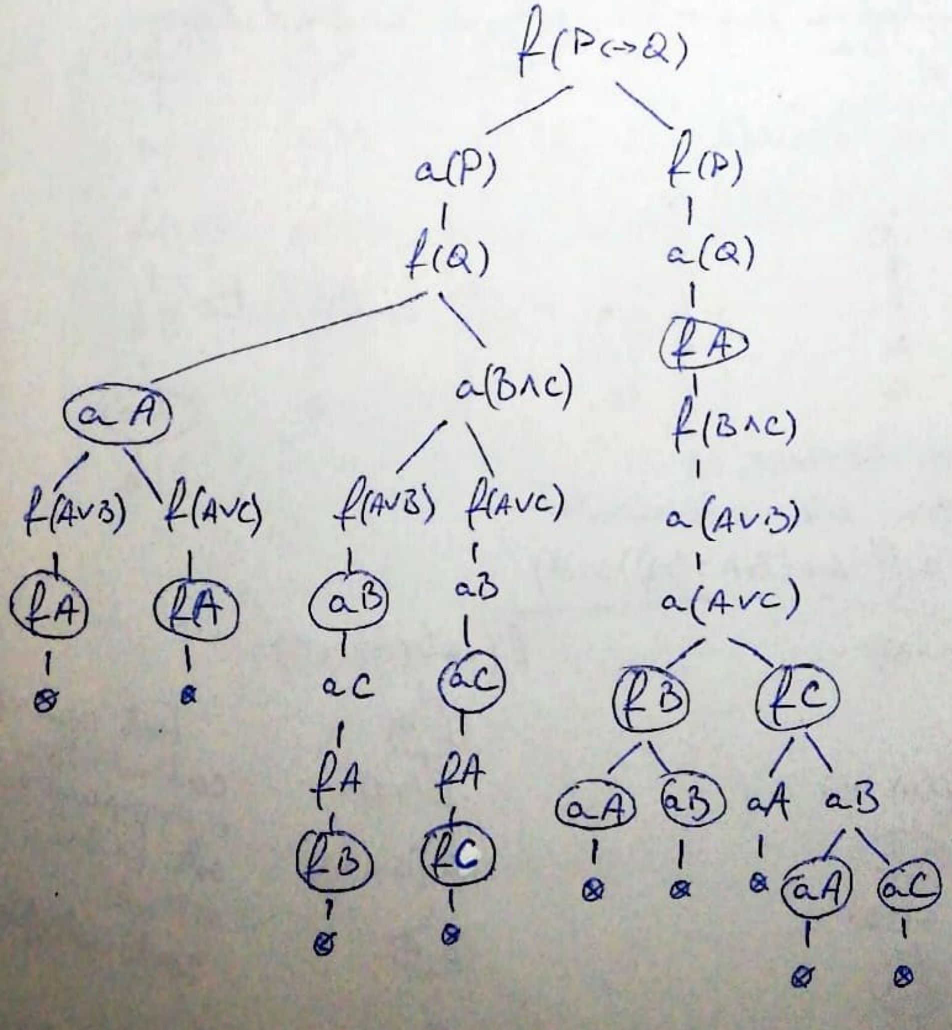
$Q = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A B C	$B \wedge C$	P	$A \vee B$	$A \vee C$	Q	$P \leftrightarrow Q$
a a a	a	a	a	a	a	a
a a f	f	a	a	a	a	a
a f a	f	a	a	a	a	a
f a a	a	a	a	a	a	a
a f f	f	a	a	a	a	a
f a f	f	f	a	f	f	a
f f a	f	f	f	a	f	a
f f f	f	f	f	f	f	a

Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că cele 2 propoziții nu sunt logic echivalente



Toate ramurile sunt contradictorii ⇒ ⇒ presupunerea este falsă ⇒ cele 2 propoziții sunt logic echivalente

TESTUL NR. 2

1. Demonstrați că următoarea propoziție este o tautologie:

$P = A \to \neg\neg A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

A	$\neg\neg A$	$A \to \neg\neg A$
a	a	a
f	f	a

} P este tautologie

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este falsă

$f(A \to \neg\neg A)$

aA

$f(\neg\neg A)$

fA

$\otimes$

Presupunerea este falsă
⇒ P este tautologie

2. Demonstrați că următoarea propoziție este o contradicție:

$P = (\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$(\neg A \vee (B \wedge \neg B))$	P
a	a	f	f	f	f	f
a	f	f	a	f	f	f
f	a	a	f	f	a	f
f	f	a	a	f	a	f

} ⇒ P este contradicție

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

$a((\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \Leftrightarrow A)$

Ramura stângă:

$a(\neg A \vee (B \wedge \neg B))$

aA

- $a(\neg A)$

  fA

  $\otimes$

- $a(B \wedge \neg B)$

  aB

  $a(\neg B)$

  fB

  $\otimes$

Ramura dreaptă:

$f(\neg A \vee (B \wedge \neg B))$

fA

$f(\neg A)$

$f(B \wedge \neg B)$

aA

$\otimes$

Toate ramurile contradictorii
⇒ presupunerea este falsă
⇒ P este contradicție

3. Demonstrați că următoarele propoziții sunt logic echivalente:

$A \to B$ și $\neg B \to \neg A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

$P = A \to B$

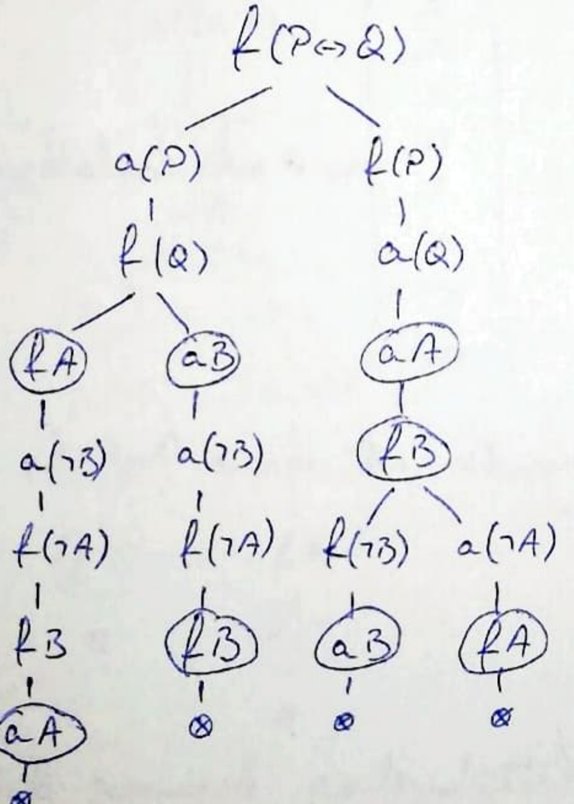
$Q = \neg B \to \neg A$

A	B	P	¬B	¬A	Q	P ↔ Q
a	a	a	f	f	a	a
a	f	f	a	f	f	a
f	a	a	f	a	a	a
f	f	a	a	a	a	a

Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că cele 2 propoziții nu sunt logic echivalente



Toate ramurile sunt contradictorii

=> presupunerea este falsă

=> cele 2 propoziții sunt logic echivalente $(a(P \leftrightarrow Q))$

TEMĂ DE CONTROL

1. Demonstrați că următoarea propoziție este o tautologie:

$P = ((A \wedge B) \to C \leftrightarrow (A \to (B \to C))$

Rezolvare

Aplicăm proprietatea $A \to B \equiv \neg A \vee B$

$P_1 = (A \wedge B) \to C = \neg(A \wedge B) \vee C = \neg A \vee \neg B \vee C$

$P_2 = A \to (B \to C) = \neg A \vee (B \to C) = \neg A \vee \neg B \vee C$

$P_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P$ este tautologie

* TABELE DE ADEVĂR

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \to C$	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	P
a	a	a	a	a	a	a	a
a	a	f	a	f	f	f	a
a	f	a	f	a	a	a	a
f	a	a	f	a	a	a	a
a	f	f	f	a	a	a	a
f	a	f	f	a	f	a	a
f	f	a	f	a	a	a	a
f	f	f	f	a	a	a	a

$\Rightarrow$ P este tautologie

2. Demonstrați că următoarea propoziție este o contradicție:

$P = \neg(A \wedge B) \wedge (A \to B) \wedge A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$A \to B$	P
a	a	f	a	f
a	f	a	f	f
f	a	a	a	f
f	f	a	a	f

$\Rightarrow$ P este contradicție

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

a(P)

f(A∧B)

a(A→B)

a(A)

f(A) f(B)

f(A) a(B)

Toate ramurile sunt contradictorii

$\Rightarrow$ presupunerea este falsă

$\Rightarrow$ P este contradicție

3. Demonstrați că următoarele propoziții sunt logic echivalente:

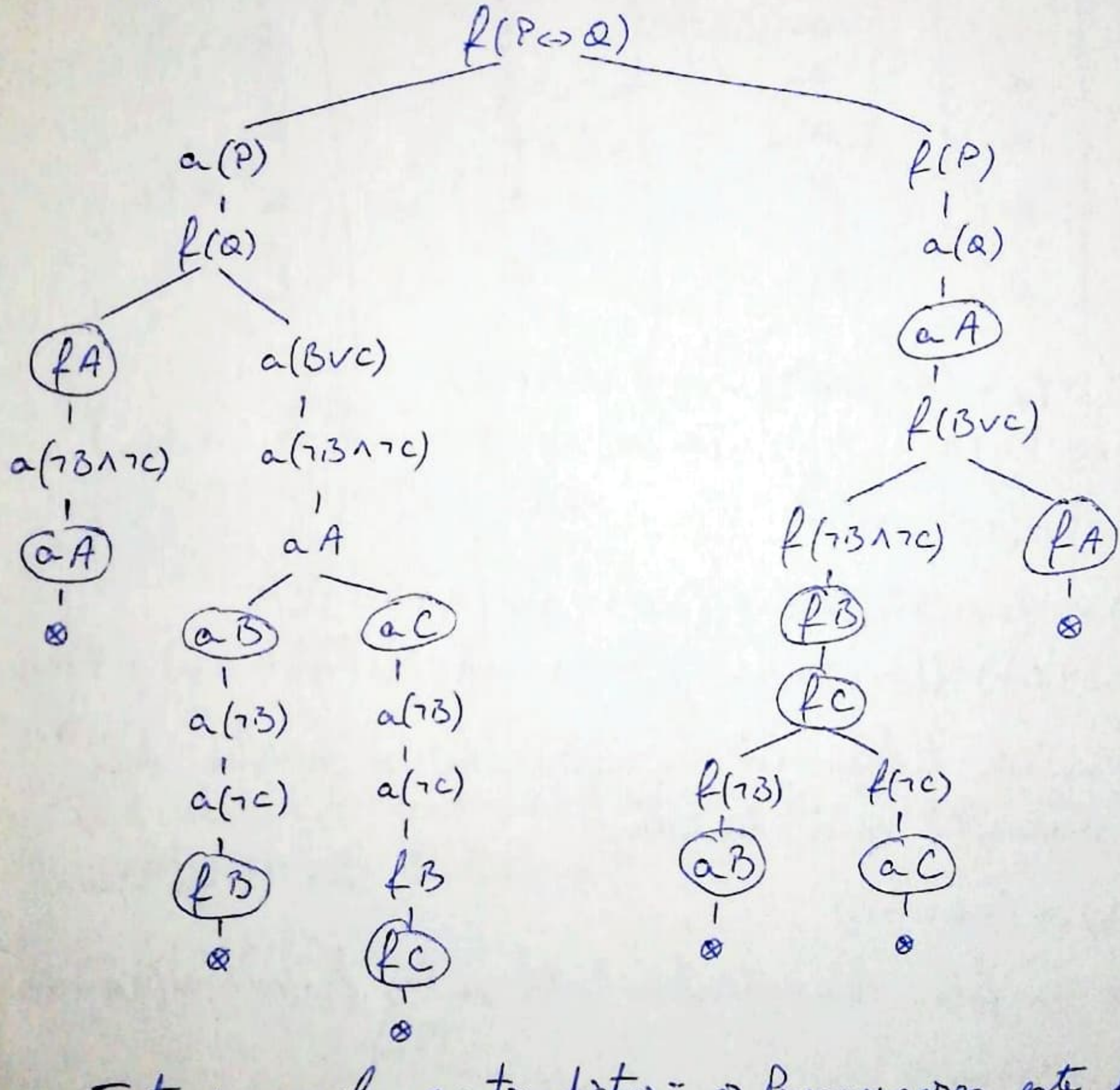
$A \to (B \vee C)$ și $(\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$

Rezolvare * TABLOURI SEMANTICE

$P = A \to (B \vee C)$

$Q = (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$ $\quad P \leftrightarrow Q$?

Presupunem că cele 2 propoziții nu sunt logic echivalente



Toate ramurile contradictorii ⇒ Presupunerea este falsă ⇒ a(P⟺Q

⇒ Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

* TABELE DE ADEVĂR

A B C	¬A ¬B ¬C	B∨C	P	¬B∧¬C	Q	P⟺Q
a a a	f f f	a	a	f	a	a
a a f	f f a	a	a	f	a	a
a f a	f a f	a	a	f	a	a
f a a	a f f	a	a	f	a	a
a f f	f a a	f	f	a	f	a
f a f	a f a	a	a	f	a	a
f f a	a a f	a	a	f	a	a
f f f	a a a	f	a	a	a	a

Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

4. Să se determine forma normal disjunctivă pentru propoziția:

$P = \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge C$

Rezolvare I.

	A	B	C	$A \vee B$	$\neg A \vee \neg B$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$	$\neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$	P	
*	a	a	a	a	f	f	a	a	* t_1
	a	a	f	a	f	f	a	f	
	a	f	a	a	a	a	f	f	
	f	a	a	a	a	a	f	f	
	a	f	f	a	a	a	f	f	
	f	a	f	a	a	a	f	f	
*	f	f	a	f	a	f	a	a	* t_7
	f	f	f	f	a	f	a	f	

$FND(P) = t_1 \vee t_7 = (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

conform $FND(F): (A_{11} \wedge \ldots \wedge A_{1m}) \vee (A_{21} \wedge \ldots \wedge A_{2m}) \vee \ldots \vee (A_{k1} \wedge \ldots \wedge A_{km})$.

II. $P = \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge C$

$P = (\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B)) \wedge C \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \wedge C \equiv$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \neg C) \vee ((A \wedge B) \wedge C) \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) = FND$

5. Aplicând metoda tablourilor semantice, să se verifice dacă următoarele propoziții sunt tautologii:

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

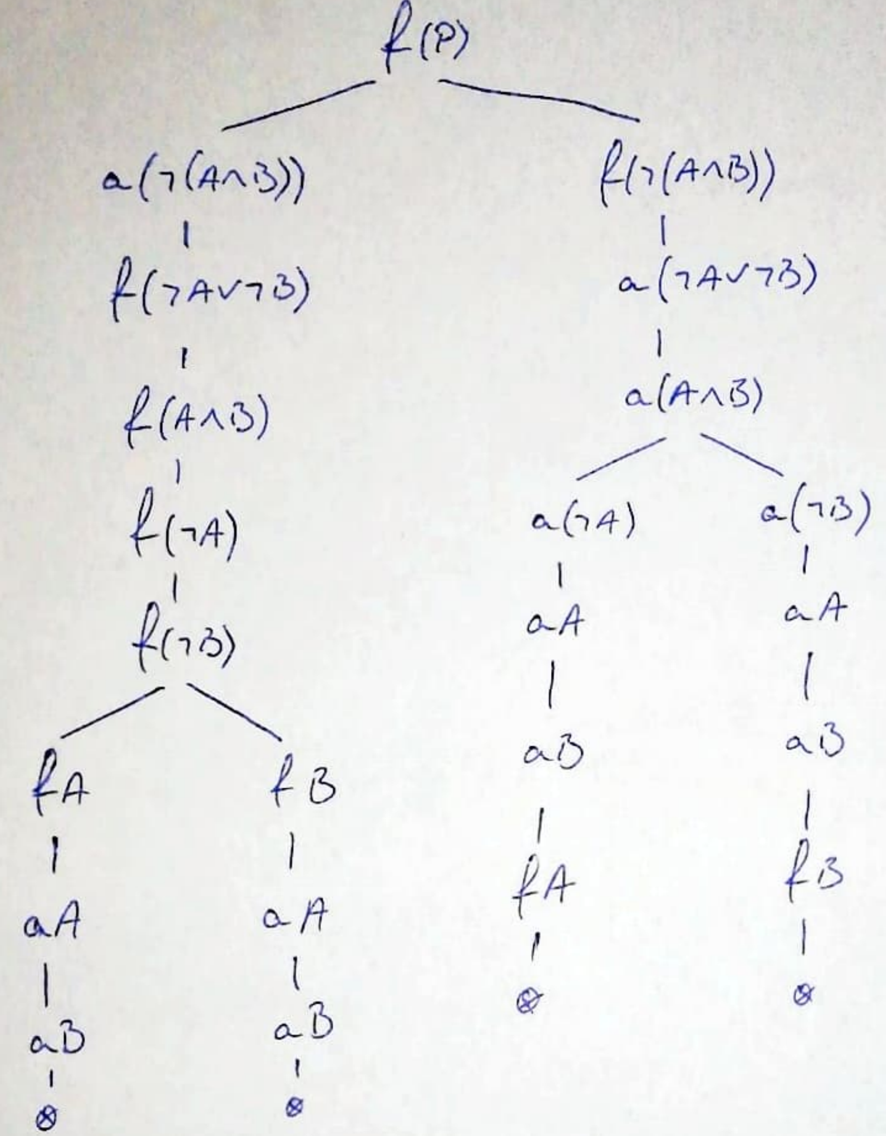
indicație: Se va folosi demonstrația Beth pentru $f(\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$

b) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \Leftrightarrow B$

indicație: Se va folosi demonstrația Beth pentru $f((A \wedge (A \rightarrow B)) \Leftrightarrow B)$

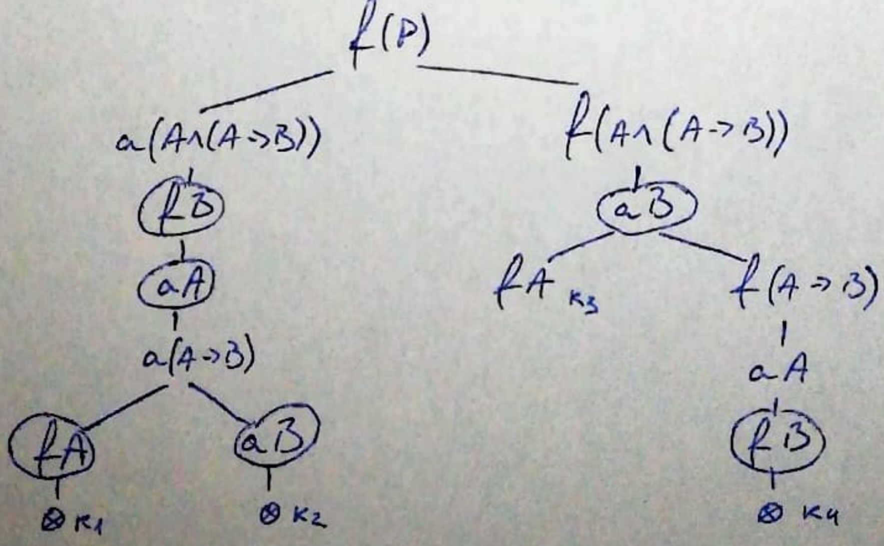
Rezolvare

a) $P = \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$



Toate ramurile sunt contradictorii => presupunerea este falsă => a(P) => P este tautologie

b) $P = (A \wedge (A \to B)) \leftrightarrow B$



Pentru ramura K3 presupunerea este adevărată => P nu este tautologie

TEMĂ SEMINAR

1. $K: [[(\neg A \wedge B) \to C] \vee D]$ este tautologie?

Rezolvare • TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a(K) & & \\
 & a((\neg A \wedge B) \to C) & & & aD \\
f(\neg A \wedge B) & & aC & & \\
f(\neg A) \quad fB & & & & \\
aA & & & &
\end{array}
$$

Nu avem ramuri contradictorii => P este tautologie

U3

Ex 5 : a) Lui Ion îi place mâncarea.
b) Merele sunt mâncare
c) Păsările sunt mâncare
d) Ce poate fi mâncat fără a omorî pe cineva este mâncare.
e) Barbu mănâncă și este încă viu.
f) Maria mănâncă tot ceea ce mănâncă Barbu

Predicate : Place (x, y) : x îi place pe y
Mâncare (x) : x este un fel de mâncare.
Mănâncă (x, y) : x îl mănâncă pe y
Viu (x) : x este viu.

$A \to B \equiv \neg A \vee B$.

a) $(\forall x)\,[\,\text{Mâncare}(x) \to \text{Place}(\text{ion}, x)\,] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x)\,(\underbrace{\neg \text{Mâncare}(x)} \vee \underbrace{\text{Place}(\text{ion}, x)})$

$S_a = \{\neg \text{Mâncare}(x) \,,\, \text{Place}(\text{ion}, x)\}$

b) Mâncare (Mere)

$S_b = \{\text{Mâncare}(\text{Mere})\}$

c) Mâncare (Păsări)

$S_c = \{\text{Mâncare}(\text{Păsări})\}$

d) $(\forall x)(\forall y)\,[\,\text{Mănâncă}(x,y) \wedge \text{Viu}(x) \to \text{Mâncare}(y)\,] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\,[\,\neg(\text{Mănâncă}(x,y) \wedge \text{Viu}(x)) \vee \text{Mâncare}(y)\,] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\,[\,\neg \text{Mănâncă}(x,y) \vee \neg \text{Viu}(x) \vee \text{Mâncare}(y)\,]$

$S_d = \{\neg \text{Mănâncă}(x,y) \,,\, \neg \text{Viu}(x) \,,\, \text{Mâncare}(y)\}$

e) $(\forall x)\,[\,\text{Mănâncă}(\text{Barbu}, x) \to \text{Viu}(\text{Barbu})\,]$

$\Leftrightarrow (\forall x)\,[\,\neg \text{Mănâncă}(\text{Barbu}, x) \vee \text{Viu}(\text{Barbu})\,]$

$S_e = \{\neg \text{Mănâncă}(\text{Barbu}, x) \,,\, \text{Viu}(\text{Barbu})\}$

f) $(\forall x)\,[\,\text{Mănâncă}(\text{Barbu}, x) \to \text{Mănâncă}(\text{Maria}, x)\,]$

$\Leftrightarrow (\forall x)\,[\,\neg \text{Mănâncă}(\text{Barbu}, x) \vee \text{Mănâncă}(\text{Maria}, x)\,]$

$S_f = \{\neg \text{Mănâncă}(\text{Barbu}, x) \,,\, \text{Mănâncă}(\text{Maria}, x)\}$

Ex 6. Predicate

Dragon (x) : „x este dragon"
Trimite (x, y) : „x trimite la y"
Fericit (x) : „x este fericit"
Animal (x) : „x este animal"
Înțelege (x, y) : „x înțelege pe y"
Politician (x) : „x este politician"
Om (x) : „x este om"
Vizitează (x, y) : „x vizitează y"

a) $\neg \text{Fericit}(x) \leftarrow \text{Dragon}(x),\ \text{Trimite}(x, \text{zoo})$

b) $\text{Fericit}(x) \leftarrow \text{Animal}(x),\ \text{Om}(y),\ \text{Politician}(y),\ \text{Înțelege}(x,y)$

c) $\text{Politician}(x) \leftarrow \text{Om}(x),\ \text{Vizitează}(x, \text{zoo})$

d) $\text{Înțelege}(x,y) \leftarrow \text{Animal}(x),\ \text{Om}(y),\ \text{Trimite}(x, \text{zoo}),$
$\text{Vizitează}(y, \text{zoo}).$

Ex 7 Mama (x, y) : „x este mama lui y"
Tata (x, y) : „x este tatăl lui y"
Femeie (x) : „x este femeie"
Bărbat (x) : „x este bărbat"
Părinte (x, y) : „x este părintele lui y"
Om (x) : „x este om"

a) $\text{Mamă}(x,y) \leftarrow \text{Femeie}(x),\ \text{Părinte}(x,y)$

b) $\text{Tată}(x,y) \leftarrow \text{Bărbat}(x),\ \text{Părinte}(x,y).$

c) $\text{Om}(x) \leftarrow \text{Om}(y),\ \text{Părinte}(y,x).$

d) $\text{Om}(x) \leftarrow \text{Om}(y),\ \text{Tată}(y,x).$

e) $\neg \text{Părinte}(x,x) \leftarrow$

U4 – TESTE DE AUTOEVALUARE ŞI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Considerăm maşina Turing $M = (d, \lambda, s)$ definită astfel:
$D = \{(1,1), (0,2), (1,2), (0,3), (1,4)\}$,

$d(1,1)=1$	$\lambda(1,1)=1$	$s(1,1)=2$
$d(0,2)=0$	$\lambda(0,2)=0$	$s(0,2)=2$
$d(1,2)=1$	$\lambda(1,2)=1$	$s(1,2)=1$
$d(0,3)=0$	$\lambda(0,3)=-1$	$s(0,3)=3$
$d(1,4)=1$	$\lambda(1,4)=0$	$s(1,4)=4$

a) Să se scrie sub formă de tablou această maşină Turing.

b) Să se scrie calculul cu această maşină Turing care începe cu:

$(2,1): \; 0 \; \underset{\uparrow}{1} \; 1 \; 0 \; 0 \; 0 \ldots$

Rezolvare

a)

	0	1
1		1R2
2	002	1R1
3	0L3	
4		104

b) $(2,1): \; 0 \; \underset{\uparrow}{1} \; 1 \; 0 \; 0 \; 0 \ldots$

$(3,2): \; 0 \; 1 \; \underset{\uparrow}{1} \; 0 \; 0 \; 0 \ldots$

$(4,1): \; 0 \; 1 \; 1 \; \underset{\uparrow}{0} \; 0 \; 0 \ldots$ STOP

2. Fie alfabetul $\Lambda = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$ şi F un algoritm Markov pe Λ. Fie $\Gamma = \Lambda \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ şi fie F algoritmul Markov dat de următorul tablou de substituţie:

$\xi_i \xi_j \beta \to \xi_j \beta \xi_i$ (I)

$\alpha \xi_i \to \xi_i \beta \xi_i \alpha$ (II)

$\beta \to \gamma$ (III)

$\gamma \to$ (IV)

$\alpha \to \cdot$ (V)

$\to \alpha$ (VI)

unde $\xi_i \in \Lambda$ (deci ξ_i este una din literele $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$)

Aplicaţi algoritmul F definit pe alfabetul Γ cuvântului $P = MA$ şi deduceţi cine este $F(P)$.

U3 - TESTE DE AUTOEVALUARE ŞI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Considerăm maşina Turing $M = (d, r, s)$ definită astfel:

$D = \{(1,1), (0,2), (1,2), (0,3), (1,4)\}$,

$d(1,1) = 1 \qquad r(1,1) = 1 \qquad s(1,1) = 2$

$d(0,2) = 0 \qquad r(0,2) = 0 \qquad s(0,2) = 2$

$d(1,2) = 1 \qquad r(1,2) = 1 \qquad s(1,2) = 1$

$d(0,3) = 0 \qquad r(0,3) = -1 \qquad s(0,3) = 3$

$d(1,4) = 1 \qquad r(1,4) = 0 \qquad s(1,4) = 4$

a) Să se scrie sub formă de tablou această maşină Turing.

b) Să se scrie calculul cu această maşină Turing care începe cu:

$(2,1): 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 0\ 0 \ldots$

Rezolvare

a)

	0	1
1		1R2
2	002	1R1
3	0L3	
4		104

b) $(2,1): 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 0\ 0 \ldots$

$(3,2): 0\ 1\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 0\ 0 \ldots$

$(4,1): 0\ 1\ 1\ \underset{\uparrow}{0}\ 0\ 0 \ldots$ STOP

2. Fie alfabetul $\Lambda = \{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}$ şi F un algoritm Markov pe Λ. Fie $\Gamma = \Lambda \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ şi fie F algoritmul Markov dat de următorul tablou de substituţie:

$\xi_i \xi_j \beta \to \xi_j \beta \xi_i \quad (I)$

$\alpha \xi_i \to \xi_i \beta \xi_i \alpha \quad (II)$

$\beta \to \gamma \quad (III)$

$\gamma \to \quad (IV)$

$\alpha \to \cdot \quad (V)$

$\to \alpha \quad (VI)$

unde $\xi_i \in \Lambda$ (deci ξ_i este una din literele $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$)

Aplicaţi algoritmul F definit pe alfabetul Γ cuvântului $P = MA$ şi deduceţi cine este $F(P)$.

Rezolvare

$P = MA$

$P = MA \xrightarrow{VI} \alpha MA \xrightarrow{II} M\beta M\alpha A \xrightarrow{II} M\beta MA\beta A\alpha \xrightarrow{I} M\beta A\beta MA\alpha \xrightarrow{2\text{ori}}$
$\xrightarrow{III} M\gamma A\gamma MA\alpha \xrightarrow{IV\ 2\text{ori}} MAMA\alpha \xrightarrow{V} MAMA.$

$\Rightarrow F(P) = PP \Rightarrow MAMA$

TEMĂ DE CONTROL

1. Se dă mașina Turing:

	0	1
1	1R2	
2	0R2	1R3
3	0L3	1R4
4	1R5	0L1

a) Să se scrie explicit această mașină Turing.
b) Să se determine calculul cu intrarea:
$(2,3)$: 0 $\underset{\uparrow}{0}$ 1 1 0 0 0...

Rezolvare

a) $D = \{(0,1), (0,2), (1,2), (0,3), (1,3), (0,4), (1,4)\}$

$d(0,1) = 1 \qquad r(0,1) = 1 \qquad s(0,1) = 2$
$d(0,2) = 0 \qquad r(0,2) = 1 \qquad s(0,2) = 2$
$d(1,2) = 1 \qquad r(1,2) = 1 \qquad s(1,2) = 3$
$d(0,3) = 0 \qquad r(0,3) = -1 \qquad s(0,3) = 3$
$d(1,3) = 1 \qquad r(1,3) = 1 \qquad s(1,3) = 4$
$d(0,4) = 1 \qquad r(0,4) = 1 \qquad s(0,4) = 5$
$d(1,4) = 0 \qquad r(1,4) = -1 \qquad s(1,4) = 1$

b) $(2,3)$: 0 $\underset{\uparrow}{0}$ 1 1 0 0 0...
$(1,3)$: $\underset{\uparrow}{0}$ 0 1 1 0 0 0... STOP

2. Considerăm mașina Turing următoare:

M:

	0	1
1	1L2	0R1
2	102	

a) Să se scrie calculul cu intrarea:

$(2,1): 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$

b) Să se determine $\underset{\bar{M}}{\overset{M}{\downarrow}}$ și să se scrie calculul cu această mașină Turing care începe cu intrarea dată la a).

Rezolvare

a) $(2,1): 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(3,1): 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(4,1): 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(3,2): 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(3,2): 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\ 0 \ldots$ <u>STOP</u>

b) Aplicând definiția avem $S(M) = \{1,2\}$

$n = 2$

$M_s(1,2) = (1,0,2)$

$\downarrow$

	0	1
1	1L2	0R1
2	102	102

$(2,1): 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(3,1): 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(4,1): 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(3,2): 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 1\ 0 \ldots$

$(3,2): 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \ldots$ <u>STOP</u>

3. Fie alfabetul $\Lambda = \{A, B, C, \dots, X, Y, Z, -\}$ şi F un algoritm Markov pe Λ. Fie $\Gamma = \Lambda \cup \{\alpha, \beta\}$ şi fie F algoritmul Markov dat de următorul tablou de substituţie:

$$\alpha\alpha \to \beta \quad (I)$$
$$\alpha\xi_i\xi_j \to \xi_j\alpha\xi_i \quad (II)$$
$$\beta\alpha \to \beta \quad (III)$$
$$\beta\xi_i \to \xi_j\beta \quad (IV)$$
$$\beta \to \cdot \quad (V)$$
$$\to \alpha \quad (VI)$$

unde $\xi_i \in \Lambda$ (deci ξ_i este una din literele $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, sau $-$).

Aplicaţi algoritmul F definit pe alfabetul Γ cuvântului

$P =$ ERAM-LEC-NAFETS şi deduceţi cine este $F(P)$.

Rezolvare

$P = ERAM\text{-}LEC\text{-}NAFETS \xrightarrow{VI} \alpha ERAM\text{-}LEC\text{-}NAFETS \xrightarrow{II \text{ 14 ori} + VI \text{ 14 ori}}$

$\to \alpha S\alpha T\alpha E\alpha F\alpha A\alpha N\alpha\text{-}\alpha C\alpha E\alpha L\alpha\text{-}\alpha M\alpha A\alpha R\alpha E \to$

$\xrightarrow{VI} \alpha\alpha S\alpha T\alpha E\alpha F\alpha A\alpha N\alpha\text{-}\alpha C\alpha E\alpha L\alpha\text{-}\alpha M\alpha A\alpha R\alpha E \to$

$\xrightarrow{I} \beta S\alpha T\alpha E\alpha F\alpha A\alpha N\alpha\text{-}\alpha C\alpha E\alpha L\alpha\text{-}\alpha M\alpha A\alpha R\alpha E \to$

$\xrightarrow[\text{13 ori}]{III+IV} STEFAN\text{-}CEL\text{-}MARE\beta \xrightarrow{V} STEFAN\text{-}CEL\text{-}MARE.$

$\Rightarrow F(P) = P^{-1} \Rightarrow STEFAN\text{-}CEL\text{-}MARE$