Curs V. Gârban

09/03/2022

Curs 4

Schimbarea Coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n peste corpul comutativ K și $B_1 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ și $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ 2 baze ale lui V, DIFERITE.

Știm că orice vector $x \in V$ va avea coordonate unice între fiecare cele 2 baze.

Ex. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ in $B_1 \to x = x_1 \cdot u_1 + ... + x_n u_n$

$x = (y_1, y_2, ..., y_n)$ în $B_2 \to x = y_1 \cdot v_1 + ... + y_n v_n$

Într-o scriere matriceală aceste relații devin:

$$x = (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = u_1 x_1 + x_2 u_2 + ... + u_n x_n$$

$$x = (v_1, v_2, ..., v_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = v_1 y_1 + v_2 y_2 + ... + v_n y_n$$

Ne propunem să stabilim relațiile care permit calculul coordonatelor lui x în baza B_2 (cea nouă) în funcție de coordonatele lui x în baza B_1 (cea veche).

Pentru aceasta vom exprima mai întâi vectorii bazei noi, B_2 în funcție de vectorii bazei vechi, B_1. Avem relațiile:

$$\begin{cases} v_1 = a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + ... + a_{n1} \cdot u_n \\ v_2 = a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + ... + a_{n2} \cdot u_n \\ \vdots \\ v_n = a_{1n} \cdot u_1 + a_{2n} \cdot u_2 + ... + a_{nn} \cdot u_n \end{cases} \quad (1^\circ)$$

Pentru fiecare vector v_i cu $i = \overline{1,n}$ se rezolvă un sistem de n ecuații cu n necunoscute, acestea fiind coordonatele vectorului v_i în baza B_1

$$v_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}) \quad i = \overline{1,n}$$

Pentru fiecare vector v_i se rezolvă un sistem de n ecuații cu n necunoscute.

Se recomandă metoda eliminării cu PIVOTARE TOTALĂ al lui Gauss. Marele avantaj îl constituie faptul că toate cele n sisteme se pot rezolva simultan, cu aceeași matrice a coeficienților.

Coordonatele vectorului $v_1, v_2, \dots, v_n$ ale bazei B_2 formează o matrice pătratică de dimensiune n care se numește matrice de trecere de la baza B_1 la B_2.

Aceasta se notează de obicei cu T și se formează plasând pe coloanele sale coordonatele vectorilor din baza $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ calculate în raport cu baza $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, obținute prin rezolvarea celor n sisteme (1) pentru $i = \overline{1,n}$

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & \quad v_2 & \dots & v_n \end{matrix} \end{array} \qquad (2^\circ)$$

Sistem (1°) se poate scrie într-o formă matriceală astfel:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot T \qquad (3^\circ)$$

Procedând analog, putem exprima pentru vectorul din B_1, în raport cu vectorii din B_2.

Dacă notăm cu S matricea de trecere de la B_2 la B_1, vom obține

$\hookrightarrow \left(B_2 \xrightarrow{S} B_1\right)$:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot S \qquad (4^\circ)$$

Înlocuim relația 3 cu relația 4. Se obține

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot S \overset{(3^\circ)}{=} (u_1, \dots, u_n) \cdot T \cdot S \qquad (5^\circ)$$

Interpretarea relației (5) este următoarea:

Matricea produs $T \cdot S$ este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_1$, este matricea unitate I_n

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T \cdot S = I_n \rightarrow \begin{cases} T \text{ este inversabilă și } T^{-1} = S \\ S \text{ este inversabilă și } S^{-1} = T \end{cases}$$

În final putem scrie:

$$\mathcal{B}_1 \xrightarrow{T} \mathcal{B}_2 ; \Leftrightarrow \mathcal{B}_2 \xrightarrow{S} \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1 \xrightarrow{TS} \mathcal{B}_1 ; \; TS = I_n$$

Acum putem rezolva problema enunțată inițial și anume:

- Cum se schimbă coordonatele unui vector la schimbarea bazei?

Exemplu:

$$x = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \quad \mathcal{B}_1$$

Același vector x_i în baza $\mathcal{B}_2$ se scrie astfel:

$$x = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \quad \mathcal{B}_2$$

Utilizăm relația (3°) $\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$

$$y = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Din ultima egalitate rezultă că:

coord. x în $\mathcal{B}_2$

coord x în $\mathcal{B}_1$

$$F! \left[T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Concluzii:

① Dacă T este matrice de trecere de la $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ atunci T este inversabilă și inversa sa este $T^{-1} = S$ care este matricea de trecere de la $\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1$

$$\underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}_2} = \underbrace{(u_1, \dots, u_n)}_{\mathcal{B}_1} \cdot T \quad \boxed{3^\circ}$$

② Matricea de trecere de la coordonatele unui vector oarecare $x = (x_1, \dots, x_n)$ exprimată în baza $\mathcal{B}_1$ la coordonatele aceluiași vector $x = (y_1, \dots, y_n)$ în $\mathcal{B}_2$ este matricea $T^{-1} = S$ și au loc relațiile:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{x \text{ în } \mathcal{B}_2} = T^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x \text{ în } \mathcal{B}_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Aplicații

① În spațiul vectorial $V = \mathbb{R}^3$ peste corpul $\mathbb{R}$, se dau vectorii:

$B_1: \begin{cases} u_1 = (1, 0, 1) \\ u_2 = (2, 1, 3) \\ u_3 = (1, 1, 1) \end{cases}$ și $B_2: \begin{cases} v_1 = (1, -1, 2) \\ v_2 = (2, 0, 1) \\ v_3 = (1, 1, 0) \end{cases}$

a) Să se arate că fiecare mulțime (sistem) format din câte cei 3 vectori, formează o bază în $V = \mathbb{R}^3$

b) Să se determine matricea T de trecere de la B_1 la B_2; și matricea S de la B_2 la B_1

c) Să se determine coordonatele vectorului $w = (1, 1, 0)$ atât în B_1 și B_2

d) Să se determine coordonatele vectorului w când se trece del la B_1 la B_2 prin relațiile de transformare a coordonatelor.

---

a) B_1 = bază $\Leftrightarrow$ (u_1, u_2, u_3) sunt L.I și sistem de generatori.

$u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ = dim V. Dacă sunt L.I. → formează o bază.

$\Leftrightarrow$ Matricea (u_1, u_2, u_3) este nesingulară.

→ $\alpha_1 = 0$ $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = 0$

Sistemul admite doar soluția banală dacă rang (B_1) = MAX (adică 3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

rang $(B_1) = 3$ = MAX Sistem C. unic Determinat

→ rezultă că u_1, u_2, u_3 sunt L.I → și formează o bază

Fie $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ sunt L.I. pentru că rang $(B_2) = 3$ = MAX

c) Să se determine coordonatele lui w în B_1

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \; w \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{array}$$

$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = w \rightarrow u_1 - u_2 + 2u_3 = w$

b) Pentru a determina matricea de trecere de la $B_1 \rightarrow B_2$, vom scrie toți vectorii din B_2 în funcție de vectorii din B_1.

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot u_1 + \alpha_{21} \cdot u_2 + \alpha_{31} u_3 = v_1 \\ \alpha_{12} \cdot u_1 + \alpha_{22} \cdot u_2 + \alpha_{32} u_3 = v_2 \\ \alpha_{13} \cdot u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{33} u_3 = v_3 \end{cases}$$

Fiecare ecuație presupune rezolvarea unui sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute.

Fiecare sistem are aceeași matrice a coeficienților

= Matricea formată cu coloanele vectorilor: u_1, u_2, u_3

Rezultă că cele 3 sisteme se pot rezolva simultan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & +1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$I_3 \qquad T$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot T$

Pentru de la B_2 la B_1

Metoda 1: $S = T^{-1}$
Metoda 2: Se rezolva sistemul: $\left[v_1, v_2, v_3 \mid u_1, u_2, u_3 \right]$

---

d) Coordonatele lui w când se trece de la B_1 la B_2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verificare:

$w = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \beta_3 \cdot v_3$ $\quad w = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 1)$

$\rightarrow w = v_3$

Rezolvare b și d

b) Căutăm (calculăm) matricea S

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 7/2 & 2 \end{array}\right]$$

(the right block is labelled S)

d) Coordonatele lui w în β_2

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1/2 & 7/2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 \\ 0 + 2 - 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

în β_2 $\quad$ S $\quad$ în β_1 $\quad$ în β_2

Coordonatele (găsite în c) lui w în β_1 sunt $(1,-1,2)$; în β_2, folosind matricea de trecere, de la β_2 în β_1, S, coordonatele lui w sunt $(0,0,1)$.

Verificare:

$w=(1,1,0)$

În β_1:

$(1,1,0) = 1\cdot(1,0,1) - 1\cdot(2,1,3) + 2\cdot(1,1,1) =$

$= (1,0,1)-(2,1,3)+(2,2,2) = (1,1,0)$ ✓

În β_2:

$(1,1,0) = 0\cdot(1,-1,2) + 0\cdot(2,0,1) + 1\cdot(1,1,0) =$

$= (1,1,0)$ ✓