UNIVERSITATEA **TITU MAIORESCU**

Facultatea de INFORMATICĂ

Conf. univ. dr.
VALENTIN GÂRBAN

ECUAȚII DIFERENȚIALE ȘI SISTEME DINAMICE

Curs pentru învăţământul la distanţă

editura universității Titu Maiorescu

BUCUREŞTI – 2015

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE NR. 1
ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I

1.1 Elemente introductive

În acest paragraf sunt prezentate elemente definitorii referitoare la ecuațiile diferențiale de ordinul I.

Definiția 1.1.1

(i) Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție definită pe $D \subset \mathbb{R}^2$ şi funcția $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval) satisface condițiile: 1) $\forall\, x \in I$, $(x, \varphi(x)) \in D$; 2) φ este derivabilă pe I şi $\forall\, x \in I$, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, atunci φ se *numeşte soluție a ecuației diferențiale* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$. Adesea, soluția φ se mai numeşte şi curbă integrală.

(ii) Din definiția dată pentru soluția unei ecuații diferențiale se impune implicit şi termenul de *ecuație diferențială (ordinară) de ordinul I*. Aceasta revine la cunoaşterea funcției f ($f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$) şi la cerința determinării unei funcții φ având proprietățile din punctul (i). Aceste lucruri se marchează prin simbolul matematic: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ sau $y' = f(x, y)$ sau $\dot{y} = f(x, y)$.

Observația 1.1.1

(i) Pentru ecuația $y' = f(x, y)$, y se numeşte variabila dependentă (sau, mai sugestiv, dar incorect, „funcția necunoscută”), iar $x \in \mathbb{R}$ se numeşte variabila independentă.

Ecuațiile diferențiale (ordinare, de ordinul I) pot fi astfel considerate drept cazuri particulare de „ecuații funcționale”, în care „necunoscuta” este o funcție.

(ii) Adesea, o ecuație diferențială ordinară de ordinul I poate apărea sub forma $F(x, y, y') = 0$, unde $F : D \to \mathbb{R}$ cu $D \subset \mathbb{R}^3$. Se cere, ca mai înainte, găsirea unei funcții $\varphi : I \to \mathbb{R}$ derivabilă ($I \subset \mathbb{R}$ interval) astfel încât $\forall\, x \in I$, $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ şi $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.

Dacă din egalitatea $F(x, y, y') = 0$ se poate determina y', atunci ea poate fi scrisă sub forma: $y' = f(x, y)$, care se numeşte şi *forma normală* sau forma explicită a unei ecuații diferențiale de ordinul I, spre deosebire de egalitatea $F(x, y, y') = 0$ care se numeşte *forma implicită* a ecuației diferențiale de ordinul I.

Definiția 1.1.2

Fie ecuația $y' = f(x,y)$, $f : D \to \mathbb{R}$ (unde $D \subset \mathbb{R}^2$) şi $(x_0, y_0) \in D$. Se numeşte *problema Cauchy* (f, x_0, y_0), problema determinării unei soluții $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ interval) a ecuației, astfel încât $x_0 \in I$ şi $\varphi(x_0) = y_0$.

Prin urmare, rezolvarea problemei Cauchy (f, x_0, y_0) revine la determinarea unei curbe integrale pentru ecuația $y' = f(x,y)$, care trece prin punctul (x_0, y_0).

Punctul (x_0, y_0) se numeşte şi *punct inițial*, iar egalitatea $\varphi(x_0) = y_0$ se numeşte *condiție inițială*.

Observația 1.1.2

În ceea ce priveşte ecuațiile diferențiale se ridică câteva probleme de natură diferită care sunt precizate în cele ce urmează.

(i) Existența soluției. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) se pune întrebarea: ce proprietăți trebuie să aibă funcția *f*, astfel încât ecuația $y' = f(x,y)$ să admită soluție? Analog, în ce condiții problema Cauchy (f, x_0, y_0) admite soluție?

Spre exemplu, dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este $f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, ecuația $y' = f(x,y)$ nu are soluție. Dacă ar exista o funcție $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$, atunci $\varphi'(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Prin urmare, funcția $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ fiind derivata lui φ, trebuie să aibă proprietatea lui Darboux, ceea ce evident este fals. Aşadar, ecuația de mai sus nu are soluție.

(ii) Unicitatea soluției. Adesea problemele concrete a căror rezolvare a condus la studiul unor ecuații diferențiale au impus (eventual în condiții suplimentare) necesitatea de a şti dacă soluția găsită este unică. Problema este deci de a preciza ce proprietăți trebuie satisfăcute de către funcția *f*, astfel încât soluția ecuației $y' = f(x,y)$ să fie unică.

Spre exemplu, ecuația $y' = y$ are ca soluții funcțiile $f(x) = C\mathrm{e}^x$, unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Prin urmare, ecuația dată are o infinitate de soluții. Dacă se cere soluția ecuației $y' = y$ care îndeplineşte condiția $y(0) = 2$, se obține funcția $\varphi(x) = 2\mathrm{e}^x$, care este singura ce rezolvă problema Cauchy dată.

Nu trebuie crezut că problema Cauchy individualizează soluțiile unei ecuații.

Spre exemplu, funcțiile $\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}(x-x_0)^3 & \text{dacă } x\in[x_0,\infty);\\ 0 & \text{dacă } x\in[\alpha,x_0),\\ (x-\alpha)^3 & \text{dacă } x\in(-\infty,\alpha).\end{cases}$ unde x_0

este fixat şi $\alpha < x_0$ verifică ecuația $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ şi condiția inițială $y(x_0)=0$. Prin urmare, problema Cauchy $(f,x_0,0)$ $\left(\text{unde} f(x,y)=3y^{\frac{2}{3}}\right)$ admite o infinitate de soluții.

În general interesează studiul simultan al celor două probleme remarcate până acum, adică proprietatea de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy.

(iii) Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Problematica impusă sub acest titlu se referă la studiul proprietăților soluțiilor unei ecuații diferențiale cum ar fi: care este intervalul pe care o anumită soluție poate fi definită; cum depinde soluția problemei Cauchy de datele inițiale sau de parametrii dați (adică, dacă dependența este continuă sau diferențiabilă).

(iv) Determinarea efectivă a soluțiilor unei ecuații. Una din problemele greu de rezolvat este aceea a determinării unui algoritm de construcție a soluției unei ecuații diferențiale. Teoretic se pot indica astfel de algoritmi (care, prin intermediul analizei numerice şi prin utilizarea unor programe adecvate de calcul, pot duce la aproximări ale soluției, în situația în care aceasta nu poate fi calculată efectiv), dar nu există metode de rezolvare decât pentru ecuații particulare (aşa numitele ecuații integrabile prin cuadraturi, adică ecuații pentru care soluțiile pot fi exprimate ca primitive ale unor funcții continue).

Chiar şi în situația ecuațiilor integrabile prin cuadraturi, adesea soluțiile (curbele integrale) nu pot fi obținute „explicit”, adică sub forma unei funcții $\varphi: I\to\mathbb{R}$, ci sunt găsite „implicit”, adică funcții despre care se ştie că verifică o ecuație de tipul $F(x,\varphi(x))=0$.

În alte cazuri soluțiile se pot obține sub formă parametrică: $\begin{cases}x=u(t)\\ y=v(t)\end{cases}$ $t\in J\subset\mathbb{R}$ în sensul că pe orice subinterval $J_1\subset J$ pe care funcția u este inversabilă $\varphi(x)=v\left(u^{-1}(x)\right)$, definită pe $I=u(J_1)$, verifică ecuația dată.

1.2 Ecuații diferențiale de ordinul I (Cazul Lipschitzian)

Paragraful este consacrat studiului ecuației $y' = f(x,y)$ pentru care se enunță şi se demonstrează o teoremă de existență şi unicitate a soluției în situația particulară (aşa cum este anunțat şi în titlu): *f* funcție lipschitziană.

O primă teoremă de acest tip a fost demonstrată de Cauchy (publicată în 1840) pentru situația în care *f* este continuă (în raport cu ambele argumente) şi admite derivată parțială, continuă în raport cu al doilea argument. În 1868 Lipschitz a enunțat şi a demonstrat existența şi unicitatea soluției ecuației $y' = f(x,y)$ în condițiile în care *f* este continuă (în ambele variabile), dar posedă, în raport cu a doua variabilă, o proprietate mai „tare" decât continuitatea şi mai „slabă" decât existența derivatei parțiale, continue, proprietate care de atunci îi poartă numele.

Definiția 1.2.1

Fie $G \subset \mathbb{R}$.

(i) Atunci $g : G \to \mathbb{R}$ se numeşte *lipschitziană* pe *G* dacă şi numai dacă există $L \geq 0$, astfel încât $\forall\, x, y \in G, \left|g(x) - g(y)\right| \leq L\left|x - y\right|$.

(ii) $g : G \to \mathbb{R}$ se numeşte *local lipschitziană* pe *G* dacă şi numai dacă $\forall\, x_0 \in G,\ \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $g|_V$ este lipschitziană.

Condiția ca *g* să fie local lipschitziană revine la a spune că $\forall\, x_0 \in G$, $\exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\, L_V \geq 0$ (deci, o constantă care depinde de vecinătatea *V* a punctului x_0), astfel încât $\forall\, x, y \in V, \left|g(x) - g(y)\right| \leq L_V \left|x - y\right|$.

Observația 1.2.1

(i) Dacă $g : G \to \mathbb{R}$ este lipschitziană pe *G*, atunci se observă că *g* este continuă pe *G* (chiar şi uniform continuă pe *G*), dar reciproca afirmației precedente este falsă. Spre exemplu, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$ este continuă pe $\mathbb{R}$, dar nu este lipschitziană: dacă se presupune că $\exists\, L \geq 0$, astfel încât $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \left|x^2 - y^2\right| \leq L\left|x - y\right|$, se observă că $L > 0$. Fie atunci $x = 3L$ şi $y = L$. Ar trebui îndeplinită inegalitatea $\left|9L^2 - L^2\right| \leq L\left|2L\right| \Leftrightarrow 8L^2 \leq 2L^2 \Leftrightarrow 8 \leq 2$ (contradicție).

(ii) De asemenea, dacă $g : G \to \mathbb{R}$ este lipschitziană pe *G*, atunci ea este local lipschitziană, dar din nou reciproca afirmației precedente este falsă după cum dovedeşte acelaşi exemplu de mai înainte: $g(x) = x^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este local lipschitziană: $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$, fie $V = (x_0 - 1, x_0 + 1)$; dacă $x, y \in V$, atunci

$\left|x^2-y^2\right| \le |x-y||x+y| \le |x-y|\left(|x-x_0|+|y-x_0|\right) \le 2|x-y|$. Deci, g este local lipschitziană, dar nu este lipschitziană (după cum s-a arătat mai înainte).

(iii) O categorie importantă de funcții lipschitziene o constituie funcțiile derivabile, cu derivata continuă şi mărginită pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Într-adevăr, dacă $\exists\, M \ge 0$, astfel încât $\forall\, x \in I$, $\left|g'(x)\right| \le M$, atunci din teorema lui Lagrange se obține: $\left|g(x)-g(y)\right| = \left|g'(z)\right||x-y| \le M|x-y|$. Deci g este lipschitziană. Reciproca este falsă: $g(x)=|x|$ este lipschitziană (afirmație care rezultă din inegalitatea $\left||x|-|y|\right| \le |x-y|$ (cu $L=1$)), dar g nu este derivabilă pe $\mathbb{R}$, neavând derivată în 0.

(iv) În general, o funcție $g: G \to \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}$ mulțime deschisă) care este de clasă C^1 (adică, admite derivată continuă pe G) este local lipschitziană. $\forall\, x_0 \in G$, fie $\varepsilon > 0$, astfel încât $V_0 = \left[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right] \subset G$. Atunci $g'\big|_{V_0}: V_0 \to \mathbb{R}$ este continuă şi deci (V_0 compact) este şi mărginită. Prin urmare, $g\big|_{V_0}$ este lipschitziană şi deci g este local lipschitziană. Exemplul de la punctul (iii) $g(x)=x^2$ serveşte drept contraexemplu pentru o eventuală reciprocă.

(v) Folosind notațiile:

$$C(G)=\left\{g: G \to \mathbb{R} \,\middle|\, g \text{ continuă}\right\},\ \mathrm{Lip}(G)=\left\{g: G \to \mathbb{R} \,\middle|\, g \text{ lipschitziană pe } G\right\},$$

$$\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(G)=\left\{g: G \to \mathbb{R} \,\middle|\, g \text{ local lipschitziană pe } G\right\},$$

unde $G \subset \mathbb{R}$ este deschis şi observațiile precedente, rezultă incluziunile stricte:

$$C^1(G) \subset \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(G) \subset \mathrm{Lip}(G) \subset C(G).$$

(vi) Nici uniform continuitatea nu asigură ca o funcție f să fie lipschitziană; spre exemplu, $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$ este continuă ($I=[-1,1]$ compact), deci g este uniform continuă. Dar g nu este lipschitziană: dacă se presupune că $\exists\, L>0$ cu proprietatea că $\forall\, x,y \in [-1,1], \left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right| \le L|x-y|$, atunci $\forall\, x,y \in [-1,1]\,(x \ne y)$ obținem $1 \le L\left|\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right|$. Luând $x=\frac{1}{n}$ şi $y=-\frac{1}{n}$, avem $1 \le L\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\,(\forall\, n \in \mathbb{N})$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}=\infty$ şi deci ar rezulta $1 \le 0$ (contradicție).

Definiția 1.2.2

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $g: G \to \mathbb{R}$, atunci g se *numeşte lipschitziană în al II-lea argument* dacă şi numai dacă $\exists\, L \ge 0$, astfel încât $\forall\, x, y_1, y_2, (x,y_1),(x,y_2) \in D$, are loc inegalitatea $\left|g(x,y_1)-g(x,y_2)\right| \le L|y_1-y_2|$.

Dacă $L=0$, atunci $g(x,y_1)=g(x,y_2)$ $\forall\, x,y_1,y_2$ ce satisfac condițiile de domeniu de definiție, adică g este constantă în raport cu a II-a variabilă. Deci, renotând, obținem $g(x,y)=u(x)$ $(\forall\, x\in I)$.

Observația 1.2.2

(i) Dacă I este un interval compact şi $y_0\in\mathbb{R}$, fie $X:=\left\{g\in C(I)\middle|\|g-y_0\|_\infty\le k\right\}(k>0)$, unde prin $\|f\|_\infty$ se înțelege $\|f\|_\infty=\sup\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in I\right\}=\max\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in I\right\}$ (pentru că *I* este compact).

Se defineşte pentru $g_1,g_2\in X$,

$$d(g_1,g_2)=\sup\left\{|g_1(x)-g_2(x)|:x\in I\right\}=\|g_1-g_2\|_\infty.$$

Este imediat că $d:X\times X\to[0,+\infty)$ este o distanță (adică:

1) $d(g_1,g_2)=0\Leftrightarrow g_1=g_2$,
2) $d(g_1,g_2)=d(g_2,g_1)$
3) $d(g_1,g_2)\le d(g_1,h)+d(h,g_2)$ $\forall\, g_1,g_2,h\in X$).

(ii) Conform definiției distanței în *X*, rezultă că $(g_n)_n\to g$ (în metrica *d*) dacă $\lim\limits_{n\to\infty}d(g_n,g)=0\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\ \forall\, n\ge n_\varepsilon$ şi $\forall\, x\in I,\ |g_n(x)-g(x)|<\varepsilon$. Adică $(g_n)_n\to g$ (în metrica *d*) dacă şi numai dacă $(g_n)_n$ converge uniform către *g* (pe *I*).

(iii) Se observă că (X,d) este un spațiu metric complet; într-adevăr, dacă $(g_n)_n$ este un şir Cauchy în (X,d), aceasta înseamnă că $(g_n)_n$ este Cauchy în convergența uniformă (adică $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall\, n,m\ge n_\varepsilon$ şi $\forall\, x\in I$, $|g_n(x)-g_m(x)<\varepsilon|$). Atunci, din teorema corespunzătoare de la şiruri de funcții se obține că: $\exists\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}g_n(x)=:g(x)$ $(\forall\, x\in I)$, *g* este funcție continuă pe *I*. În plus, din $|g_n(x)-y_0|\le k$ $\forall\, x\in I$ rezultă (prin trecere la limită) $|g(x)-y_0|\le k$ $(\forall\, x\in I)$, adică $\|g-y_0\|_\infty\le k$. Prin urmare, $g\in X$, adică (X,d) este spațiu metric complet.

Teorema 1.2.1 (Cauchy-Lipschitz-Picard)

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $(x_0,y_0)\in D$ şi $f:D\to\mathbb{R}$, funcție continuă (în ansamblul variabilelor) şi lipschitziană în al doilea argument (avem astfel definită ecuația $y'=f(x,y)$ şi problema Cauchy (f,x_0,y_0)).

Atunci $\exists I_0$ interval cu $x_0 \in I$ şi $\exists \varphi : I_0 \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile: $\varphi(x_0) = y_0$, φ derivabilă pe I_0 şi $\forall x \in I_0$ $(x, \varphi(x)) \in D$, iar $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Demonstraţie

1. Fie $\alpha > 0$, $\beta > 0$, astfel încât $\Delta = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset D$ (*D* mulţime deschisă şi $(x_0, y_0) \in D$). Din condiţiile impuse funcţiei *f* şi deoarece Δ este compact, fie $m := \sup\{|f(x,y)|; (x,y) \in \Delta\}$ unde evident $m < +\infty$.

Dacă $m = 0$, rezultă $f(x,y) = 0$ şi atunci $\varphi(x) = y_0$ (φ definită pe un interval oarecare ce-l conţine pe x_0) este „soluţia” problemei puse. Fie deci $m > 0$. Fie, de asemenea, *L* constanta din condiţia lui Lipschitz pentru $f\ (L \geq 0)$. Dacă $L = 0$, atunci pe un interval $I_0 \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ cu $x_0 \subset I_0$ se defineşte $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ (s-a observat că *f* nu depinde de variabila a II-a). Din cunoştinţele de teoria integrării funcţiilor reale de o variabilă reală, φ este singura primitivă a lui *f* pentru care $\varphi(x_0) = y_0$. Fie deci $L > 0$. Se alege $h > 0$ astfel încât $Lh < 1$, $[x_0 - h, x_0 + h] \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (adică $h \leq \alpha$) şi $[y_0 - mh, y_0 + mh] \subset [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ (adică $mh \leq \beta$) şi fie $I_0 = [x_0 - h, x_0 + h]$.

2. Se defineşte spaţiul de funcţii $X = \{g \in C(I_0) \| \|g - y_0\|_\infty \leq mh\}$. Din observaţia precedentă, (X, d) este un spaţiu metric complet (distanţa este definită la fel ca mai înainte $d(g_1, g_2) = \|g_1 - g_2\|_\infty$).

Se mai observă că pentru $g \in X$ rezultă: $\forall t \in I_0, |g(t) - y_0| \leq mh$, adică

$$g(t) \in [y_0 - mh, y_0 + mh] \subset [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$$

şi cum

$$t \in [x_0 - h, x_0 + h] \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha],$$

atunci $(t, g(t)) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] = \Delta$, deci domeniul de definiţie al lui *f*.

Pentru $g \in X$, fie $(\mathrm{A}g)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\,\mathrm{d}t$, cu $\mathrm{A}g : I_0 \to \mathbb{R}$, deci Ag este o funcţie definită pe I_0.

3. Se demonstrează că $\mathrm{Ag} \in X$, dacă $g \in X$. Fie $u(t) = f(t, g(t))$; $u : I_0 \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă şi deci $(\mathrm{Ag})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t$. Apelând din nou la cunoştințe elementare de analiză matematică, rezultă că Ag este derivabilă pe I_0 şi $(\mathrm{Ag})'(x) = \left(\int_{x_0}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t \right)' = u(x) = f(x, g(x))$. Deci, Ag este funcție de clasă C^1.

În plus, $\left|\mathrm{Ag}(x) - y_0\right| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left|f(t, g(t))\right|\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} m\,\mathrm{d}t \right| \le mh$

pentru că $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$. Prin urmare, $\mathrm{Ag} \in X$, adică $A : X \to X$. De asemenea, se dovedeşte că A este contracție: pentru $g_1, g_2 \in X$ şi $x \in I_0$, avem:

$$\left|\mathrm{Ag}_1(x) - \mathrm{Ag}_2(x)\right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \left[f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t)) \right] \mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t)) \right| \mathrm{d}t \right|.$$

Dar

$$\left| f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t)) \right| \le L \left| g_1(t) - g_2(t) \right| \le L \left\| g_1 - g_2 \right\|_\infty = Ld(g_1, g_2).$$

Prin urmare,

$$\forall\, x \in I,\ \left|\mathrm{Ag}_1(x) - \mathrm{Ag}_2(x)\right| \le \left| \int_{x_0}^{x} Ld(g_1, g_2)\,\mathrm{d}t \right| \le (Lh)\,d(g_1, g_2)$$

şi cum $Lh < 1$ se obține că A este contracție.

4. Aplicând teorema de punct fix perechii (X, A), rezultă că: $\exists!\, \varphi \in X$, astfel încât $A\varphi = \varphi$, deci $\forall\, x \in I_0$ $\varphi(x) = (A\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

Din subpunctul precedent al demonstrației $A\varphi \in C^1(I_0)$ şi cum $\varphi = A\varphi$, $\varphi \in C^1(I_0)$, deci φ este derivabilă pe I_0, $\varphi(x_0) = y_0$ şi $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ $(\forall\, x \in I_0)$.

Observația 1.2.3

Teorema de punct fix a lui Banach oferă un algoritm de construcție pentru şirul a cărui limită este punctul fix. În cazul de aici, luând *g* funcție arbitrară din *X*, se defineşte $u_0 = g$, $u_1 = \mathrm{A}g$ şi, în general, $u_{n+1} = Au_n$ (*A* operatorul definit în demonstrația teoremei). Atunci, demonstrația teoremei enunțate arată că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \varphi$ (limita este uniformă pe I_0). Tot din demonstrația invocată avem că:

$d(u_n,\varphi) \le \dfrac{q^n}{1-q} d(u_1,u_0)$ (aici $q = Lh$) şi

$$d(u_n,u_0) \le \left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right) d(u_1,u_0) \le \frac{d(u_1,u_0)}{1-q}.$$

Dacă alegerea lui *g* este făcută astfel încât să poată fi calculată $\int\limits_{x_0}^{x} f(t,g(t))\mathrm{d}t$, atunci inegalitatea $d(u_n,\varphi) \le \dfrac{q^n}{1-q} d(u_1,u_0)$ oferă un procedeu de găsire a aproximației dorite, adică dacă se doreşte o funcție care să difere față de soluție cu mai puțin de ε ($\varepsilon > 0$ număr dat), atunci fie $n_0 \in \mathbb{N}$ (cel mai mic) astfel încât $\dfrac{q^{n_0}}{1-q} d(u_1,u_0) < \varepsilon$. Găsim astfel că $d\left(u_{n_0},\varphi\right) < \varepsilon$ şi deci $\forall\, x \in I_0$ $\left|u_{n_0}(x) - \varphi(x)\right| < \varepsilon$. Deci, dacă se pot calcula integralele care apar în definirea contracției *A*, putem găsi funcția u_{n_0} care diferă de soluția φ cu mai puțin decât ε.

Exemplul 1.2.1

(i) Fie $f:[-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y^2$ şi problema Cauchy $(f,0,0)$. Se consideră deci ecuația $y' = x + y^2$. Refăcând, eventual, raționamentul din ***observația 1.2.1*** punctul **2**, funcția $f(x,y) = x + y^2$ este lipschitziană în raport cu *y*, pe $[-1,1]\times[-1,1]$ cu $L = 2$ şi $m = 2$. Fie deci $h = \dfrac{1}{3}$ şi $I_0 = \left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$. Luând $u_0(x) = 0 = y_0$, rezultă: $\forall\, x \in \left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$,

$$u_1(x) = \int\limits_0^x f(t,0)\mathrm{d}t = \int\limits_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2};\ u_2(x) = \int\limits_0^x f\left(t,\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \left(t+\frac{t^4}{4}\right)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20};$$

$$u_3(x) = \int\limits_0^x f\left(t,\frac{t^2}{2}+\frac{t^5}{20}\right)\mathrm{d}t = \int\limits_0^x \left(t+\frac{t^4}{4}+\frac{t^7}{20}+\frac{t^{10}}{400}\right)\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{11}}{4400}$$

şi calculul poate continua până la ordinul dorit.

(ii) $d(u_0,u_1)=\max\limits_{x\in[-1/3,1/3]}\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{1}{18}$; $q=Lh=\dfrac{2}{3}$.

Deci, $d(u_n,\varphi)\le\dfrac{q^n}{1-q}d(u_1,u_0)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n 3\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Dacă se caută în şirul de mai sus funcţia care reprezintă o aproximare de ordinul $\dfrac{1}{10}$ a soluţiei, din $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2<\dfrac{1}{10}$, se obţine că aceasta este $u_3(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^5}{20}+\dfrac{x^8}{160}+\dfrac{x^{11}}{4400}$. Aşadar, aproximaţia de ordinul $\dfrac{1}{10}$ a soluţiei problemei Cauchy date poate fi u_3 (evident că $\forall\, n\ge 4$ u_n este o aproximare „mai bună”).

Observaţia 1.2.4

Revenind la problema Cauchy (f,x_0,y_0), adică la cerinţa găsirii unei funcţii derivabile $\Psi: I\to\mathbb{R}$ astfel încât $\Psi(x_0)=y_0\,(x_0\in I)$ şi $\forall\, x\in I$ $\Psi'(x)=f(x,\Psi(x))$, aşa cum s-a observat şi în demonstraţia ***teoremei 1.2.1***, aceasta este $\Psi(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(t,\Psi(t))\mathrm{d}t$. Dacă $\Psi: I_0\to\mathbb{R}$ (unde I_0 este intervalul construit în ***teorema 1.2.1***) verifică această egalitate şi cu cerinţa firească ca $\forall\, x\in I_0$ $(x,f(x))\in\Delta$ (dreptunghiul construit în aceeaşi teoremă), se obţine că: $\forall\, x\in I_0$ $|\Psi(x)-y_0|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(t,\Psi(t))\mathrm{d}t\right|\le mh$ şi $\Psi(x_0)=y_0$ observăm că $\Psi\in X$. Atunci se obţine următorul rezultat:

Corolarul 1.2.1

Funcţia φ construită în ***teorema 1.2.1*** este singura soluţie a problemei Cauchy (f,x_0,y_0) pe intervalul I_0.

Demonstraţie

Cum $A\varphi=\varphi$ şi $A\Psi=\Psi$ din unicitatea punctului fix, obţinem că $\varphi=\Psi$.

Corolarul 1.2.2 (teorema de unicitate locală a soluţiei problemei Cauchy)

Fie $f:[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]\to\mathbb{R}$ funcţie continuă în ansamblul variabilelor şi lipschitziană în a II-a variabilă şi, pentru $i=1,2$, fie $\varphi_i: I_i\to\mathbb{R}$

soluții ale problemei Cauchy (f, x_0, y_0) (unde I_1, I_2 sunt intervale cu $x_0 \in \overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2$). Atunci există I interval cu $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, astfel încât $\forall\, x \in \overset{\circ}{I}$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Demonstrație

Fie $h > 0$ astfel încât să respecte condițiile puse în demonstrația ***teoremei 1.2.1*** pasul **1** la care adăugăm condiția $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I_1 \cap I_2$ (*m* şi *L* având aceleaşi semnificații ca în demonstrația anunțată).

Atunci $\forall\, x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$, $\varphi_i(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \varphi_i(t))\,\mathrm{d}t \quad (i = 1,2)$ şi din ***observația 1.2.4*** găsim că $\varphi_1\big|_I, \varphi_2\big|_I \in X$ (unde X este definit în demonstrația aceleiaşi teoreme, dar pentru intervalul $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, în mod analog definim contracția *A* pentru acest spațiu); în plus $\varphi_1\big|_I$, $\varphi_2\big|_I$ sunt puncte fixe pentru *A* şi deci, din unicitate $\varphi_1\big|_I = \varphi_2\big|_I$, adică $\forall\, x \in I$, $\varphi_1(x) = \phi_2(x)$.

Observația 1.2.5

(i) O problemă importantă în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale este dependența soluției problemei Cauchy (gândită ca funcție de condițiile inițiale) de aceste condiții inițiale. Această problemă are un corespondent real, şi anume: interpretând valoarea y_0 ca fiind starea unui corp fizic în momentul x_0, y_0 ar trebui să fie rezultatul unor măsurători. Efectuând aceste măsurători, din cauza impreciziei instrumentelor folosite, aceasta oferind, în general, aproximări ale valorilor căutate, se obține valoarea y_1 (în momentul x_0). Prin aplicarea algoritmului descris mai sus se obține astfel soluția problemei Cauchy (f, x_0, y_1) când, de fapt, se căuta soluția pentru problema (f, x_0, y_0). Se pune întrebarea, cât de mult poate diferi starea y_1 de y_0?

(ii) În ceea ce priveşte alegerea valorii *h* (din demonstrația ***teoremei 1.2.1***) se poate adăuga următoarea remarcă: dacă $f : \Delta = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe Δ şi lipschitziană în a II-a variabilă (de constantă *L*), fie $y_0, y_1 \in (a, b)$ şi $\beta > 0$, astfel încât: $[y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset [a, b]$, $[y_1 - \beta, y_1 + \beta] \subset [a, b]$.

Dacă $m := \sup\{|f(x, y)| \mid (x, y) \in \Delta\}$, h se alege astfel încât să respecte condițiile: $Lh < 1$, $h \le \alpha$ şi $mh \le \beta$. Prin urmare, intervalul $I_0 = [x_0 - h, x_0 + h]$ este domeniul de definiție pentru soluțiile problemelor Cauchy (f, x_0, y_0) şi (f, x_0, y_1), adică aceste soluții sunt definite pe un interval comun.

Notația 1.2.1

(i) Soluția problemei Cauchy (f, x_0, y_0) (dacă ea există) se notează prin $\varphi(x; x_0, y_0)$. Aşadar, $\varphi(x; x_0, y_0): I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi satisface condițiile de domeniu de definiție şi egalitățile:

$$\forall\, x \in I,\ \varphi'(x; x_0, y_0) = f\left(x, \varphi(x; x_0, y_0)\right),\ \varphi(x_0; x_0, y_0) = y_0.$$

(ii) Dacă $y_0 \in [a,b]$ şi $\beta > 0$ este ales astfel încât $2\beta < b - a$ şi $[y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset [a,b]$, atunci $\forall\, u \in [a+\beta, b-\beta]$ rezultă că $[u-\beta, u+\beta] \subset [a,b]$. Cu notația introdusă mai sus şi în ipotezele ***teoremei 1.2.1*** soluțiile problemelor Cauchy (f, x_0, u) $(\forall\, u \in [a+\beta, b-\beta])$ sunt definite, conform observației precedente, pe un interval comun. Se va nota prin X_u spațiul de funcții corespunzător valorii *u*: deci $X_u = \left\{ g \in C(I_0) \,\middle|\, \|g-u\|_\infty \le mh \right\}$ (analog demonstrației teoremei anunțate) şi prin A_u contracția care defineşte soluția $\varphi(x; x_0, u)$, adică $A_u g(x) = u + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, g(t)\right) \mathrm{d}t$.

În teorema ce urmează se vor considera toate funcțiile definite pe $I_1 := \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} \right]$, luându-se deci restricțiile acestora la acest interval (*h* definit pentru *L* şi *m* ca în ***teorema 1.2.1*** şi β valoarea de la începutul acestui subpunct).

Teorema 1.2.2

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $(x_0, y_0) \in D$ şi $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă în ansamblul variabilelor şi lipschitziană în al II-lea argument. Cu notațiile precedente rezultă că $\lim\limits_{u \to y_0} \varphi(x; x_0, u) = \varphi(x; x_0, y_0)$ uniform pe $I_1 = \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} \right]$.

Demonstrație

1. Se defineşte soluția $\varphi(x; x_0, u)$ conform demonstrației din teorema de punct fix a lui Banach: $\varphi_u(x) := \varphi(x; x_0, u) = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n(x)$ (uniform pe I_0 deci şi pe I_1) unde $v_0 \in X_u$ este o funcție arbitrară,

$$v_1(x) = u + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, u)\, \mathrm{d}t, \ldots,\ v_{n+1}(x) = u + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, v_n(t)\right) \mathrm{d}t \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Se observă că $\varphi_0(x) := \varphi(x; x_0, y_0) \in X_{u_x}$, dacă $u \in \left[y_0 - \frac{mh}{2}, y_0 + \frac{mh}{2}\right]$;

$$\forall\, x \in I_1, \quad \left|\varphi_0(x) - u\right| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,\mathrm{d}t - u\right| \le$$

$$\le |y_0 - u| + \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,\mathrm{d}t\right| \le |y_0 - u| + \frac{mh}{2} \le mh,$$

deoarece funcțiile sunt definite pe $I_1 = \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}\right]$.

Atunci, pentru $u \in \left[y_0 - \frac{mh}{2}, y_0 + \frac{mh}{2}\right]$, astfel încât $[u - \beta, u + \beta] \subset [a, b]$, fie în construcția precedentă $v_0 = \varphi_0$ şi $q = Lh < 1$.

2. $d\left(A_{y_0}\varphi_0, A_u\varphi_0\right) =$

$$= \max_{x \in I_1}\left\{\left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,\mathrm{d}t - u - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,\mathrm{d}t\right|\right\} = |y_0 - u|$$

şi $|y_0 - u| = d\left(A_{y_0}\varphi_0, A_u\varphi_0\right) = d(\varphi_0, A_u\varphi_0)$, deoarece $\varphi_0 = A_{y_0}\varphi_0$. În plus,

$$d(v_0, v_n) \le \left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) d(v_0, v_1) \le \frac{d(v_0, v_1)}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}\left\|\varphi_0 - A_u\varphi_0\right\|_\infty =$$

$= \frac{1}{1-q} d(\varphi_0, A_u\varphi_0) = \frac{|y_0 - u|}{1 - q}$ şi, prin trecere la limită,

$$d(v_0, \varphi_u) = \lim_{n \to \infty} d(v_0, \varphi_n) \le \frac{y_0 - u}{1 - q}.$$

Luând $u \in \left[y_0 - \frac{mh}{2}, y_0 + \frac{mh}{2}\right] \cap \left(y_0 - \varepsilon(1 - q), y_0 + \varepsilon(1 - q)\right) \cap V$ (unde V este vecinătatea lui y_0 pentru care $u \in V \Rightarrow [u - \beta, u + \beta] \subset [a, b]$), se obține $d(\varphi_u, \varphi_0) = \max_{x \in I_1}\left\{\left|\varphi(x; x_0, y_0) - \varphi(x; x_0, u)\right|\right\} \le \frac{|y_0 - u|}{1 - q} < \varepsilon$.

Teorema 1.2.3

Fie $f : \Delta = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \times [\lambda_0 - \gamma, \lambda_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ continuă în ansamblul variabilelor şi lipschitziană în a II-a variabilă. Pentru $(x_0, y_0, \lambda) \in \Delta$ vom nota prin $\varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$ soluția problemei Cauchy

(f_λ, x_0, y_0) (unde $f_\lambda(x,y) = f(x,y,\lambda)$). Fie $I_0 = [x_0 - h, x_0 + h]$, unde h este definit ca în ***teorema 1.2.1*** cu $m = \sup\left\{ |f(x,y,\lambda)|; (x,y,\lambda) \in \Delta \right\}$.

Atunci, $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \varphi(x; x_0, y_0, \lambda) = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda_0)$ uniform pe I_0.

Demonstrație

1. Vom nota prin A_λ contracția din ***teorema 1.2.1*** care definește soluția $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x; x_0, y_0, \lambda)$. Din definiția contracțiilor:

$$d\left(A_\lambda g, A_{\lambda_0} g\right) = \max_{x \in I} \left\{ \left| \int_{x_0}^{x} \left[f\left(t, g(t), \lambda\right) - f\left(t, g(t), \lambda_0\right) \right] \mathrm{d}t \right| \right\} \leq$$

$$\leq \max_{x \in I_0} \left\{ \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(t, g(t), \lambda\right) - f\left(t, g(t), \lambda_0\right) \right| \mathrm{d}t \right| \right\} \leq$$

$$\leq \max_{x \in I_0} \left| \int_{x_0}^{x} \max_{t \in I_0} \left| f\left(t, g(t), \lambda\right) - f\left(t, g(t), \lambda_0\right) \right| \mathrm{d}t \right| \leq$$

$$\leq h \max_{x \in I_0} \left| f\left(t, g(t), \lambda\right) - f\left(t, g(t), \lambda_0\right) \right|.$$

Dacă $\varepsilon > 0$, fie $\delta_\varepsilon > 0$ ales astfel încât dacă $|\lambda - \lambda_0| < \delta_\varepsilon$ să avem $\left| f(x,y,\lambda) - f(x,y,\lambda_0) \right| < \dfrac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{h}$, $\forall (x,y) \in [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - mh, y_0 + mh]$ (unde $q = hL < 1$). Atunci, $d\left(A_\lambda g, A_{\lambda_0} g\right) \leq \varepsilon(1-q)$ pentru λ cu $|\lambda - \lambda_0| < \delta_\varepsilon$ și g o funcție continuă pe I_0 cu $g(I_0) \subset [y_0 - mh, y_0 +, h]$.

2. Repetându-se construcția din teorema precedentă,

$$\varphi_{\lambda_0}(x) := \varphi(x; x_0, y_0, \lambda_0) = \lim_{n \to \infty} v_n \text{, unde } v_0 = \varphi_\lambda$$

și $v_{n+1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, v_n(t), \lambda\right) \mathrm{d}t + y_0$. Din inegalitatea $d(v_0, v_n) \leq \dfrac{d(v_0, v_1)}{1-q}$ se obține, prin trecere la limită: $d\left(v_0, \varphi_{\lambda_0}\right) \leq \dfrac{d(v_0, v_1)}{1-q}$, adică $d\left(\varphi_\lambda, \varphi_{\lambda_0}\right) \leq \dfrac{1}{1-q} d\left(\varphi_\lambda, A_{\lambda_0} \varphi_\lambda\right) = \dfrac{1}{1-q} d\left(A_\lambda \varphi_\lambda, A_{\lambda_0} \varphi_\lambda\right)$. Pentru λ ales ca la pasul **1**, $d\left(\varphi_{\lambda},\varphi_{\lambda_0}\right)\leq\frac{1}{1-q}d\left(A_{\lambda}\varphi_{\lambda},A_{\lambda_0}\varphi_{\lambda}\right)<\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon}=\varepsilon$, adică $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0}\varphi_{\lambda}=\varphi_{\lambda_0}$ uniform pe I_0.

Observația 1.2.6

Revenind, în cele ce urmează, asupra condițiilor impuse funcției *f*, slăbindu-se condiția ca *f* să fie funcție lipstchitziană, se va cere ca *f* să îndeplinească numai local condiția lui Lipschitz.

Definiția 1.2.3

(i) Funcția $f:D\to\mathbb{R}$ (unde $D\subset\mathbb{R}^2$) se numeşte *local lipschitziană în al II-lea argument* dacă şi numai dacă $\forall\left(x_0,y_0\right)\in D$, $\exists\,\alpha>0$, $\exists\,\beta>0$ şi $\exists\,L>0$ cu proprietatea că $\forall\left(x,y_1\right),\left(x,y_2\right)\in\left(x_0-\alpha,x_0+\alpha\right)\times\left(y_0-\beta,y_0+\beta\right)$, $\left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|<L\left|y_1-y_2\right|$.

(ii) După cum se observă din definiție, proprietatea de a fi local lipschitziană în al II-lea argument atribuie variabilei notate aici cu *x* un rol „neutru”, proprietatea nedepinzând de *x*; ar trebui ca o astfel de proprietate să se numească local lipschitziană în al II-lea argument, uniform în raport cu primul (aşa cum ar fi trebuit să se procedeze şi în ***definiția 1.2.2***), dar pentru a nu lungi exprimările şi pentru că nu se foloseşte şi un alt concept de funcție lipschitziană, se preferă această exprimare mai scurtă (chiar dacă nu suficient de corectă).

Exemplul 1.2.2

(i) Funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f\left(x,y\right)=x+y^2$ este local lipschitziană, fără a fi lipschitziană. Raționamentul îl urmează pe cel din ***observația 1.2.1*** punctele (i) şi (ii). Se poate adăuga aici că dacă $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde *v* este lipschitziană (respectiv local lipschitziană), atunci $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f\left(x,y\right)=u\left(x\right)+v\left(y\right)$ este lipschitziană (respectiv, local lipschitziană) în al doilea argument.

(ii) Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ ($D\subset\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă) admite derivată parțială continuă în raport cu al II-lea argument, atunci ea este local lipschitziană în a II-a variabilă. Fie $\left(x_0,y_0\right)\in D$ şi $\alpha>0$, $\beta>0$, astfel încât $\Delta=\left[x_0-\alpha,x_0+\alpha\right]\times\left[y_0-\beta,y_0+\beta\right]\subset D$. Din ipoteză $\frac{\partial f}{\partial y}:D\to\mathbb{R}$ este continuă şi deci, cum Δ este compact, $\frac{\partial f}{\partial y}$ este mărginită. Dacă $\left(x,y_1\right),\left(x,y_2\right)\in\Delta$, aplicând funcției $y\mapsto f\left(x,y\right)$ (*x* fixat) teorema lui Lagrange, se găseşte y_x cuprins între y_1 şi y_2 (număr care depinde de *x*), astfel încât:

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_x)(y_1-y_2).$$

Dacă $M>0$ este ales astfel încât $\forall (x,y)\in\Delta$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le M$, rezultă:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_x)\right||y_1-y_2|\le M|y_1-y_2|.$$

Teorema 1.2.4

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă, $(x_0,y_0)\in D$ şi $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe *D* şi local lipschitziană în a II-a variabilă pe *D*.

Atunci, $\exists I_0$ interval cu $x_0\in\overset{\circ}{I_0}$ şi $\exists\varphi:I_0\to\mathbb{R}$ cu proprietățile: $\varphi(x_0)=y_0$, φ derivabilă pe I_0 şi $\forall x\in I_0$, $(x,\varphi(x))\in D$, iar $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$.

Demonstrație

Fie $\alpha_1>0$ şi $\beta_1>0$ astfel încât *f* să fie lipschitziană în a II-a variabilă pe $[x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_1]\times[y_0-\beta_1,y_0+\beta_1]$ şi, evident, $[x_0-\alpha_1,x_0+\alpha_1]\times[y_0-\beta_1,y_0+\beta_1]\subset D$.

La această alegere în continuare, demonstrația ***teoremei 1.2.1*** se aplică în mod identic.

Observația 1.2.7

(i) Se poate afirma că rezultatele din ***corolarul 1.2.2*** (unicitatea locală a soluției problemei Cauchy de condiția inițială y_0) şi din ***teorema 1.2.3*** (continuitatea soluției problemei Cauchy de parametru) rămân valabile, demonstrațiile respective adaptându-se cazului studiat aici (*f* local lipschitziană) prin restricția funcției *f* la domeniul pe care ea este lipschitziană (în raport cu a II-a variabilă).

(ii) În acest paragraf au fost prezentate proprietăți care decurg din condiția ca *f* să fie lipschitziană în a II-a variabilă şi care, prin intermediul teoremei de punct fix a lui Banach, au demonstrații mai simple. Se revine asupra problemei Cauchy (în paragraful următor) în cazul în care *f* este doar continuă, fără a se impune un comportament deosebit al funcției în raport cu a II-a variabilă.

1.3 Ecuații diferențiale de ordinul I (Cazul funcției continue)

Observația 1.3.1

În acest paragraf se renunță la condiția ca funcția *f*, care definește ecuația diferențială $y' = f(x,y)$, să fie lipschitziană (sau local lipschitziană) în a II-a variabilă, cerându-se doar ca *f* să fie continuă. După cum rezultă din exemplul prezentat în Introducere (***observația 1.1.2***), nu se mai pune problema unicității soluției, rezolvându-se doar problema existenței acesteia, ceea ce se va face prin intermediul teoremei lui Peano.

Propoziția 1.3.1

Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă (unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime deschisă) și $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval), atunci, φ este o soluție a ecuației $y' = f(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \varphi \text{ este continuă;} \\ 2)\ \{(t,\varphi(t));\, t \in I\} \subset D; \\ 3)\ \forall\, x \in I, \varphi(x) = \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t \left(\text{unde } x_0 \in I\right). \end{cases}$

Demonstrație

„$\Rightarrow$” Dacă φ este o soluție a ecuației diferențiale $y' = f(x,y)$, conform definiției rezultă că: $\forall\, t \in I$, $(t,\varphi(t)) \in D$ și φ este derivabilă, deci continuă. În plus, din egalitatea $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$ $(\forall\, x \in I)$ și formula Leibniz-Newton, se obține că (pentru $x_0 \in I$): $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

„$\Leftarrow$” Egalitatea $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t$ și continuitatea funcției $(t \mapsto f(t,\varphi(t))) : I \to \mathbb{R}$ impun derivabilitatea funcției φ și relația $\varphi'(x) = f(x,\varphi(x))$, $(\forall\, x \in I)$. Așadar, φ este o soluție a ecuației diferențiale $y' = f(x,y)$.

Observația 1.3.2

(i) Trebuie remarcat că în propoziția precedentă relația din condiția **3** nu este o „formulă” prin care se definește funcția φ; ea este, la rândul ei, o „ecuație”; deci, rezolvarea ei conduce la soluția (notată cu φ), care este, așa cum s-a demonstrat, aceeași cu soluția ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$. Așadar, ecuația diferențială dată este echivalentă cu o ecuație integrală (adică cu o ecuație în care funcția necunoscută apare și sub semnul operației de integrare).

(ii) Se fixează câteva notații care vor fi folosite în acest paragraf, și anume: $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă și $(x_0, y_0) \in D$ un punct fixat. Fie $\delta > 0$, $\gamma > 0$ alese astfel încât $\Delta := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \gamma, y_0 + \gamma] \subset D$ și $m := \max\left\{ |f(x, y)| : (x, y) \in \Delta \right\}$ (Δ este o mulțime compactă și *f* este continuă). Dacă funcția *f* nu este identic nulă, atunci $m > 0$ și se notează prin $h := \min\left\{ \delta, \dfrac{\gamma}{m} \right\}$ și $I_0 := [x_0 - h, x_0 + h]$. Așadar, în cazul în care $m > 0$, sunt îndeplinite condițiile: $I_0 \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ și $[y_0 - mh, y_0 + mh] \subset [y_0 - \gamma, y_0 + \gamma]$.

(iii) Cu notațiile și elementele fixate în (ii) se definește șirul $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ în felul următor: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x + \frac{h}{n}} f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t, & \text{dacă } x \in \left[x_0 - h, x_0 - \dfrac{h}{n} \right]; \\ y_0, & \text{dacă } x \in \left[x_0 - \dfrac{h}{n}, x_0 + \dfrac{h}{n} \right]; \\ y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x - \frac{h}{n}} f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t, & \text{dacă } x \in \left[x_0 + \dfrac{h}{n}, x_0 + h \right]. \end{cases}$$

Aparent, funcția φ_n este definită printr-o ecuație (integrală) (a se vedea și punctul (i) al acestei observații). În fapt, se va dovedi că $\forall\, x \in \left[x_0 - h, x_0 - \dfrac{h}{n} \right] \cup \left[x_0 + \dfrac{h}{n}, x_0 + h \right]$, φ_n este deja definită pe intervalul de integrare, interval care apare în expresia lui $\varphi_n(x)$ și, prin urmare, $\varphi_n(x)$ este corect definit.

Lema 1.3.1

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, funcția φ_n, introdusă în observația precedentă, este corect definită şi satisface proprietățile:

(i) $\forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h], \left|\varphi_n(x) - y_0\right| \le \gamma$;

(ii) $\forall\, x', x'' \in \left[x_0 - \frac{h}{n}, x_0 + \frac{h}{n}\right], \left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left|x' - x''\right|$.

Demonstrație

Se arată inductiv că: $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$,

1) φ_n este corect definită pe intervalul $\left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right]$;

2) $\forall\, x', x'' \in \left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right], \left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left|x' - x''\right|$.

(Această ultimă condiție asigură, în particular, că φ_n este lipschitziană pe $\left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right]$, deci uniform continuă).

1. Pentru $k = 1$, conform definiției, $\varphi_n(x) = y_0 \quad \forall\, x \in \left[x_0 - \frac{h}{n}, x_0 + \frac{h}{n}\right]$. Deci, φ_n este corect definit şi $\forall\, x', x'' \in \left[x_0 - \frac{h}{n}, x_0 + \frac{h}{n}\right]$, $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| = 0$.

2. Se presupune că φ_n este corect definită pe intervalul $\left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right]$ şi că $\forall\, x', x'' \in \left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right]$, $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left|x' - x''\right|$, unde $k \le n - 1$.

3. Se demonstrează că aceleaşi proprietăți rămân valabile, pentru φ_n, pe intervalul $\left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right]$. Pentru aceasta se descompune intervalul dat astfel:

$$\left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right] = \left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 - k\frac{h}{n}\right] \cup$$

$$\cup \left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right] \cup \left[x_0 + k\frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right],$$

urmărindu-se îndeplinirea proprietățile enunțate pe fiecare din aceste intervale. Mai întâi se justifică, corectitudinea definirii.

a) Pentru $x \in \left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right]$, nu este nimic de arătat, întrucât $\varphi_n(x)$ este corect definit datorită ipotezei asumate la **2**.

b) Fie $x \in \left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 - k\frac{h}{n}\right]$, atunci

$$\left[x + \frac{h}{n}, x_0\right] \subset \left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right].$$

Pe acest ultim interval, conform ipotezei formulate, φ_n este definită şi este continuă. Aşadar, expresia

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x+\frac{h}{n}} f\left(t, \varphi_n(t)\right) \mathrm{d}t \text{ este corect definită.}$$

c) Dacă $x \in \left[x_0 + k\frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right]$, se procedează analog ca la **b)**, observându-se că $\left[x_0, x - \frac{h}{n}\right] \subset \left[x_0 - k\frac{h}{n}, x_0 + k\frac{h}{n}\right]$.

d) Pentru proprietatea Lipschitz a funcției φ_n se foloseşte descompunerea

$$\left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right] = \left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 - \frac{h}{n}\right] \cup$$
$$\cup \left[x_0 - \frac{h}{n}, x_0 + \frac{h}{n}\right] \cup \left[x_0 + \frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right],$$

punându-se în evidență cazurile după cum x' şi x'' aparțin fiecăruia din intervalele de mai sus.

(α_1) Dacă $x', x'' \in \left[x_0 - \frac{h}{n}, x_0 + \frac{h}{n}\right] =: I_2$.

Atunci $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| = \left|y_0 - y_0\right| = 0$.

(α_2) Dacă $x', x'' \in \left[x_0 - (k+1)\frac{h}{n}, x_0 - \frac{h}{n}\right] =: I_1 \subset \left[x_0 - h, x_0 + h\right]$, conform definiției, $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| = \int_{x''+\frac{h}{n}}^{x'+\frac{h}{n}} f\left(t, \varphi_n(t)\right) \mathrm{d}t \le m\left|x' - x''\right|$.

(α_3) Dacă $x', x'' \in \left[x_0 + \frac{h}{n}, x_0 + (k+1)\frac{h}{n}\right] \subset \left[x_0 + \frac{h}{n}, x_0 + h\right]$,
se procedează analog cu (α_2).

(β_1) Fie $x' \in I_1$ şi $x'' \in I_2$.

Din definiție: $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| = \left|\int_{x_0}^{x' + \frac{h}{n}} f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \le m\left|x_0 - x' - \frac{h}{n}\right|$.

Cum $x_0 - \frac{h}{n} \le x''$ şi $x_0 - x' - \frac{h}{n} \ge 0$, rezultă:

$$\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left(x_0 - \frac{h}{n} - x'\right) \le m(x'' - x') = m\left|x'' - x'\right|.$$

(β_2) Pentru $x' \in I_1$ şi $x'' \in I_3$ rezultă că

$$\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| = \int_{x'' - \frac{h}{n}}^{x' + \frac{h}{n}} f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t = m\left|x'' - x' - 2\frac{h}{n}\right|.$$

Cum $x' \le x_0 - \frac{h}{n}$ şi $x_0 + \frac{h}{n} \le x''$, se obține $x'' - x' \ge 2\frac{h}{n}$. Atunci: $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left(x'' - x' - 2\frac{h}{n}\right) \le m(x'' - x') = m\left|x'' - x'\right|$.

(γ_1) Dacă $x' \in I_2$ şi $x'' \in I_1$, se reface raționamentul din (β_1).

(γ_2) Fie $x' \in I_2$ şi $x'' \in I_3$.

Din definiție: $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| = \left|\int_{x_0}^{x'' - \frac{h}{n}} f(t, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \le m\left|x'' - \frac{h}{n} - x_0\right|$.

Cum $x' \le x_0 + \frac{h}{n} \le x''$, rezultă că

$$\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left(x'' - \left(\frac{h}{n} + x_0\right)\right) \le m(x'' - x') = m\left|x'' - x'\right|.$$

(δ_1) $x' \in I_3$ şi $x'' \in I_1$; rezultă din (β_2).

(δ_2) $x' \in I_3$ şi $x'' \in I_2$; rezultă din (γ_2).

4. Pentru cealaltă inegalitate din enunț, raționamentul este direct: $\forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, dacă $x \in \left[x_0 - h, x_0 - \frac{h}{n}\right]$, atunci

$$\left|\varphi_n(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x+\frac{h}{n}} f\left(t, \varphi_n(t)\right) \mathrm{d}t\right| \le m\left|x + \frac{h}{n} - x_0\right| = m\left(x_0 - x - \frac{h}{n}\right) \le mh \le \gamma\,;$$

dacă $x \in \left[x_0 - \frac{h}{n}, x_0 + \frac{h}{n}\right]$ inegalitatea este trivială, iar pentru $x \in \left[x_0 + \frac{h}{n}, x_0 + h\right]$ se foloseşte din nou definiția:

$$\left|\varphi_n(x) - y_0\right| = \left|\int_{x_0}^{x-\frac{h}{n}} f\left(t, \varphi_n(t)\right) \mathrm{d}t\right| \le m\left|x - \frac{h}{n} - x_0\right| = m\left(x - x_0 - \frac{h}{n}\right) \le mh \le \gamma\,.$$

Corolarul 1.3.1

Şirul $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir uniform mărginit de funcții echicontinue pe I_0.

Demonstrație

Din lema precedentă, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\, x', x'' \in I_0$, a rezultat că $\left|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\right| \le m\left|x' - x''\right|$, ceea ce asigură că funcțiile $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt echicontinue în orice punct din *I*. În plus, $\forall\, x \in I_0$ şi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \left|\varphi_n(x)\right| \le \left|\varphi_n(x) - y_0\right| + \left|y_0\right| \le \gamma + \left|y_0\right|$. Adică, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : \left\|\varphi_n\right\|_\infty \le \gamma + \left|y_0\right|$.

Teorema 1.3.1 (Peano)

Fie $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi $(x_0, y_0) \in D$. Atunci $\exists\, I_0$ interval cu $x_0 \in \overset{\circ}{I}_0$ şi $\exists\, \varphi : I_0 \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât $\forall\, x \in I_0 : \left(x, \varphi(x)\right) \in D$, $\varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$ şi $\varphi(x_0) = y_0$.

Demonstrație

Dacă $f(x, y) = 0\ \ \forall\, (x, y) \in D$, atunci $\varphi(x) = y_0$ şi deci funcția $\varphi(x) = y_0$ definită pe un interval convenabil ales satisface condițiile cerute de teoremă.

Fie deci funcția *f* nenulă pe *D*. Sunt folosite, în continuare, notațiile din ***observația 1.3.2*** (ii) şi (iii). Din corolarul precedent a rezultat că şirul $\left(\varphi_n\right)_n$ este echicontinuu şi uniform mărginit pe I_0. Conform teoremei Arzela-Ascoli (a se vedea ***corolarul 0.3.1***), există $\left(\varphi_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ un subşir al lui $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uniform convergent pe $I_0=\left[x_0-h,x_0+h\right]$ către o funcţie φ care este, la rândul ei, continuă pe I_0. Cum

$$\varphi_n(x)=\begin{cases} y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(t,\varphi_n(t)\right)\mathrm{d}t+\int_{x}^{x+\frac{h}{n}} f\left(t,\varphi_n(t)\right)\mathrm{d}t, & \text{dacă } x\in\left[x_0-h,x_0-\dfrac{h}{n}\right];\\ y_0, & \text{dacă } x\in\left[x_0-h,x_0-\dfrac{h}{n}\right];\\ y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x} f\left(t,\varphi_n(t)\right)\mathrm{d}t+\int_{x}^{x-\frac{h}{n}} f\left(t,\varphi_n(t)\right)\mathrm{d}t, & \text{dacă } x\in\left[x_0+\dfrac{h}{n},x_0+h\right]\end{cases}$$

şi $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(t,\varphi_{n_k}(t)\right)=f\left(t,\varphi(t)\right)$ uniform pe I_0 (*f* este uniform continuă pe Δ) se poate trece la limită în integralele de mai înainte (după subşirul $\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$) şi se obţine că:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left(t,\varphi_{n_k}(t)\right)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} f\left(t,\varphi(t)\right)\mathrm{d}t,\ \forall\, x\in\left[x_0-h,x_0+h\right],$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x}^{x+\frac{h}{n_k}} f\left(t,\varphi_{n_k}(t)\right)\mathrm{d}t=0=\lim_{k\to\infty}\int_{x}^{x-\frac{h}{n_k}} f\left(t,\varphi_{n_k}(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Aşadar, $\forall\, x\in\left[x_0-h,x_0+h\right]:\varphi(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=y_0+\displaystyle\int_{x}^{x} f\left(t,\varphi(t)\right)\mathrm{d}t$.

Conform ***propoziţiei 1.3.1***, φ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale: $y'=f(x,y)$. (Condiţia de domeniu de definiţie a fost verificată în ***lema 1.3.1***).

Observaţia 1.3.3

(i) Din exemplul oferit în ***observaţia 1.1.2*** (i) se observă că nu se poate renunţa la proprietatea de continuitate pentru *f*. Deci, dacă *f* nu este continuă, ecuaţia $y'=f(x,y)$ poate să nu aibă soluţie.

(ii) Paragraful continuă cu prezentarea câtorva rezultate, importante prin ele însele, dar care vor fi utile şi pentru studiul soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale.

Lema 1.3.2 (Bellman-Gronwall)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval, $x_0 \in I$, $M \in \mathbb{R}$ şi $u, v : I \to \mathbb{R}$ funcţii continue cu $v \geq 0$.

(i) Dacă $\forall\, x \geq x_0$, $x \in I$, $u(x) \leq M + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t$, atunci $\forall\, x \geq x_0$, $x \in I$, $u(x) \leq M\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t}$.

(ii) Dacă $\forall\, x \leq x_0$, $x \in I$, $u(x) \leq M - \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t$, atunci $\forall\, x \leq x_0$, $x \in I$, $u(x) \leq M\, \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t}$.

Demonstraţie

(i) Fie funcţia $w(x) = \left(M + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t \right) \cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t}$ definită pentru $x \in I$, $x \geq x_0$. Atunci w este derivabilă şi

$$w'(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t} \left[u(x)\, v(x) - v(x) \left(M + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t \right) \right] =$$

$$= v(x) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t} \left[u(x) - \left(M + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t \right) \right] \leq 0$$

conform condiţiei din ipoteză. Prin urmare, w este descrescătoare şi deci $w(x) \leq w(x_0)$ $(x \geq x_0, x \in I)$. Atunci, $\left(M + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t \right) \cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t} \leq M$, adică $u(x) \leq M + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)\, v(t) \mathrm{d}t \leq M \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} v(t) \mathrm{d}t}$.

(ii) În mod analog, fie $w(x)=\left(M-\int\limits_{x_0}^{x}u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right)\cdot \mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t}$ definită pentru $x\le x_0$, $x\in I$ care este derivabilă şi:

$$w'(x)=v(x)\cdot \mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t}\left[M-\int\limits_{x_0}^{x}u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t-u(x)\right]\ge 0,$$

conform ipotezei. Deci, w este crescătoare şi, în particular, $w(x)\le w(x_0)=M$ $(\forall\, x\in I, x\le x_0)$. Atunci, $\left[M-\int\limits_{x_0}^{x}u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right]\cdot \mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t}\le M$. Folosind din nou condiţia din ipoteză, $\forall\, x\in I$, $x\le x_0$, găsim:

$$u(x)\le M-\int\limits_{x_0}^{x}u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\le M\cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Corolarul 1.3.2

Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval, $x_0\in I$, $M\in\mathbb{R}$ şi $u,v:I\to\mathbb{R}_+$ funcţii continue. Dacă $\forall\, x\in I$, $u(x)\le M+\left|\int\limits_{x_0}^{x}u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t\right|$, atunci $u(x)\le M\cdot \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t}$, $\forall\, x\in I$. În particular, dacă $M=0$, atunci $u(t)=0$, $\forall\, t\in I$.

Demonstraţie

Pentru $x\ge x_0$, cum $u\ge 0$ şi $v\ge 0$ se poate aplica punctul (i) din lema precedentă şi se obţine inegalitatea dorită pentru că $\left|\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t\right|=\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t$.

Pentru $x\le x_0$, cum $u\ge 0$ şi $v\ge 0$ se poate aplica punctul (ii) din lemă şi se obţine inegalitatea cerută, pentru că $\left|\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t\right|=-\int\limits_{x_0}^{x}v(t)\,\mathrm{d}t$.

Lema 1.3.3 (Gronwall)

Dacă $u:[0,T]\to\mathbb{R}_+$ este continuă $(T>0)$ şi $u(x)\le ax+k\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$ (unde $a\ge 0$ şi $k>0$), atunci: $\forall\, x\in[0,T]$, $u(x)\le \frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)$.

Demonstrație

Fie $w:[0,T]\to\mathbb{R}$, $w(x)=\mathrm{e}^{-kx}\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$. Evident w este derivabilă şi

$$w'(x)=\mathrm{e}^{-kx}\left[u(x)-k\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\right]\le \mathrm{e}^{-kx}\left[ax+k\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t-k\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\right]=ax\cdot\mathrm{e}^{-kx}.$$

Adică, $\forall\, x\in[0,T]$, $ax\cdot\mathrm{e}^{-kx}-w'(x)\ge 0$ şi deci $\int_0^x\left[at\cdot\mathrm{e}^{-kt}-w'(t)\right]\mathrm{d}t\ge 0$.

Cum $w(0)=0$, $w(x)\le\int_0^x at\cdot\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{k^2}\left(1-\mathrm{e}^{-kx}-kx\cdot\mathrm{e}^{-kx}\right)$.

Adică: $\mathrm{e}^{-kx}\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\le\frac{a}{k^2}\left(1-\mathrm{e}^{-kx}-kx\cdot\mathrm{e}^{-kx}\right)\Rightarrow\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\le\frac{a}{k^2}\left(\mathrm{e}^{kx}-1-kx\right)$.

Dar $u(x)\le ax+k\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t\le ax+k\frac{a}{k^2}\left(\mathrm{e}^{kx}-1-kx\right)=\frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)$ $(\forall\, x\in 0,T)$.

Observația 1.3.4

(i) Lemele prezentate aici, în afară de utilitatea lor ulterioară, oferă o nouă demonstrație pentru unicitatea soluției problemei Cauchy (f,x_0,y_0) în situația în care *f* este (local) lipschitziană în raport cu a II-a variabilă, fără a mai apela la teorema contracției (teorema de punct fix).

Spre exemplu, pentru cazul prezentat, cu *f* funcție local lipschitziană, dacă $\varphi_1,\varphi_2:I\to\mathbb{R}$ sunt soluții pentru problema Cauchy (f,x_0,y_0) (unde *I* este un interval compact) a căror existență este asigurată (aici) de teorema lui Peano, se obține că: $\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|=\left|y_0+\int_{x_0}^x f\left(t,\varphi_1(t)\right)\mathrm{d}t-y_0-\int_{x_0}^x f\left(t,\varphi_2(t)\right)\mathrm{d}t\right|$ (***propoziția 1.3.1***) şi deci: $\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\le\left|\int_{x_0}^x\left|f\left(t,\varphi_1(t)\right)\mathrm{d}t-f\left(t,\varphi_2(t)\right)\right|\mathrm{d}t\right|$,

$\forall\, x \in I$. Cum f este local lipschitziană pe $D \subset \mathbb{R}^2$ (mulţime deschisă), iar $D_0 = \{(t,\varphi_1(t)) \mid t \in I\} \cup \{(t,\varphi_2(t)) \mid t \in I\}$ este o mulţime compactă (fiind mărginită şi închisă, spre exemplu), atunci există $L > 0$ astfel încât $\forall\, t \in I$, $|f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))| \le L|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$. Deci, luând $u(t) := |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$ şi $v(t) = L$, se obţine că $\forall\, x \in I$ $u(x) \le \left|\int_{x_0}^{x} u(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_{x_0}^{x} L\, u(t)\, \mathrm{d}t\right|$ şi din ***corolarul 1.3.2*** avem că $u(x) = 0$ $\forall\, x \in I$, adică $\forall\, x \in I$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, deci unicitatea.

(ii) O altă variantă pentru demonstraţia unicităţii anunţate mai sus se găseşte apelând la ***lema 1.3.3***.

1. a) Se observă, mai întâi, că dacă $u : [x_0, T_1] \to \mathbb{R}_+$ este continuă şi $u(x) \le a(x - x_0) + k\int_{x_0}^{x} u(t)\mathrm{d}t$, atunci $\forall\, x \in [x_0, T_1]$, avem $u(x) \le \frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{k(x-x_0)} - 1\right)$ (unde $a \ge 0$, $k > 0$). Justificarea apelează la ***lema 1.3.3*** în maniera următoare: se efectuează schimbarea de variabilă $t = \tau + x_0$ în $\int_{x_0}^{x} u(t)\mathrm{d}t$ şi se obţine: $\int_{x_0}^{x} u(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x-x_0} u(\tau + x_0)\mathrm{d}\tau$. Fie $y = x - x_0$; atunci, $\forall\, y \in [0, T_1 - x_0]$, este îndeplinită inegalitatea: $u(y + x_0) \le ay + k\int_0^y u(\tau + x_0)\mathrm{d}\tau$; fie $v : [0, T_1 - x_0] \to \mathbb{R}_+$, $v(y) = u(y + x_0)$, deci $v(y) \le ay + k\int_0^y v(\tau)\mathrm{d}\tau$; cu lema anunţată rezultă că: $v(y) \le \frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{ky} - 1\right)$, $\forall\, y \in [0, T_1 - x_0]$, adică $u(y + x_0) \le \frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{ky} - 1\right)$ şi, cum $x = y + x_0$, se obţine $u(x) \le \frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{k(x-x_0)} - 1\right)$.

b) În mod analog se găseşte că, dacă $u : [T_1, x_0] \to \mathbb{R}_+$ este continuă şi $\forall\, x \in [T_1, x_0]$, avem $u(x) \le a(x - x_0) + k\int_x^{x_0} u(t)\mathrm{d}t$; deci, $\forall\, x \in [T_1, x_0]$, $u(x) \le \frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{k(x_0-x)} - 1\right)$ $(a \ge 0, k > 0)$. Se refac calculele de mai sus efectuând, în integrala dată, schimbarea de variabilă $t=-\tau+x_0$ şi notând $y=-x+x_0$, se obţine inegalitatea: $u(x_0-y)\le ay+k\int\limits_0^{x_0-x} u(x_0-\tau)\mathrm{d}\tau$. Dacă $v:[0,x_0-T_1]\to\mathbb{R}_+$, $v(y)=u(x_0-y)$, rezultă $v(y)\le ay+k\int\limits_0^y u(\tau)\mathrm{d}\tau$ care, prin ***lema 1.3.3***, oferă $v(y)\le\frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{ky}-1\right)$ $\left(\forall\, y\in[0,x_0-T_1]\right)$ şi, revenind la variabila x şi funcţia u, se obţine: $u(x)\le\frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{k(x_0-x)}-1\right)$.

c) În definitiv, dacă $u:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}_+$ este continuă, $x_0\in(\alpha,\beta)$ şi $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$, avem $u(x)\le a|x-x_0|+k\left|\int\limits_{x_0}^x u(t)\mathrm{d}t\right|$ şi rezultă $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$, $u(x)\le\frac{a}{k}\left(\mathrm{e}^{k|x_0-x|}-1\right)$ (unde $a\ge 0$, $k>0$).

2. Dacă $\varphi_1,\varphi_2:I\to\mathbb{R}$ sunt soluţii pentru ecuaţia $y'=f(x,y)$, iar f este lipschitziană în raport cu a II-a variabilă, pentru $x\in I$, de constantă L, atunci: $\forall\, x\in I$, $\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right|\le\left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|\mathrm{e}^{L|x-x_0|}$ (unde I este un interval compact şi $x_0\in\overset{\circ}{I}$).

Într-adevăr, fie $u(x)=\left|\varphi_1(x)-\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x)+\varphi_2(x_0)\right|$; u este funcţie continuă şi $u:I\to\mathbb{R}_+$. Cum $\varphi_i(x)=\varphi_i(x_0)+\int\limits_{x_0}^x f(t,\varphi_i(t))\mathrm{d}t$ $(i=1,2)$, atunci $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)+\int\limits_{x_0}^x\left[f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))\right]\mathrm{d}t$; de asemenea, din condiţia asupra lui f rezultă $\left|f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))\right|\le L\left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right|$, $\forall\, t\in I$, adică:

$$u(x)=\left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)-\varphi_1(x_0)+\varphi_2(x_0)\right|=$$
$$=\left|\int\limits_{x_0}^x\left|f(t,\varphi_1(t))-f(t,\varphi_2(t))\right|\mathrm{d}t\right|\le L\left|\int\limits_{x_0}^x\left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right|\mathrm{d}t\right|.$$

Cum $\left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right| \le \left|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)-\varphi_1(x_0)+\varphi_2(x_0)\right|+\left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|$, revenind în inegalitatea de mai sus şi majorând sub integrală, se obţine:

$$u(x) \le L\left[\left|\int_{x_0}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|\mathrm{d}t\right|\right],$$

adică $\forall\, x \in I$, $u(x) \le L\left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|\left|x-x_0\right|+L\left|\int_{x_0}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t\right|$ şi din **1c)** rezultă

$u(x) \le \dfrac{L\left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|}{L}\cdot\left[\mathrm{e}^{L|x-x_0|}-1\right]$.

În sfârşit, din: $\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right| \le u(x)+\left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|$ şi inegalitatea obţinută mai sus se găseşte: $\left|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right| \le \left|\varphi_1(x_0)-\varphi_2(x_0)\right|\cdot\left[\mathrm{e}^{L|x-x_0|}-1\right]$.

3. Dacă φ_1, φ_2 sunt soluţii pentru problema Cauchy (f, x_0, y_0) (unde f este local lipschitziană), $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ interval compact) atunci, cum $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0$, din inegalitatea de mai sus rezultă că $\forall\, x \in I$, $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, deci unicitatea.

(iii) S-a observat că dacă f este local lipschitziană, atunci problema Cauchy (f, x_0, y_0) are soluţie unică; de asemenea, dacă f este doar continuă, din exemplul (ii), ***observaţia 1.1.2***, sunt posibile cazuri în care problema Cauchy are o infinitate de soluţii. S-ar putea crede că proprietatea ca f să fie local lipschitziană nu este numai o condiţie suficientă, ci şi necesară. Ori aceasta este fals după cum rezultă din următorul exemplu.

a) $f(x,y)=\sqrt[3]{y}+a$ $(a \ne 0)$. Din exemplul dat în ***observaţia 1.2.1*** (vi) funcţia f nu este local lipschitziană în nici un punct $(x_0, 0)$.

b) Fie acum $\varphi_i : [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ soluţii pentru problema Cauchy (f, x_0, y_0) (unde y_0 este arbitrar, $y_0 \ne -a^3$); deci, dacă $y_0 = 0$, este cazul punctelor în care f nu este local lipschitziană; $I_0 := [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$. Deoarece φ_i sunt continue pe un compact, fie $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\forall\, x \in I_0$, $m \le \varphi_i(x)$ $(i=1,2)$ şi fie $\delta \in \mathbb{R}$ cu $\delta > -a^3-m$. Se defineşte $v_i : I_0 \to \mathbb{R}$, $v_i(x)=\varphi_i(x)+\delta$; atunci: $v_i'(x)=\varphi_i'(x)=\sqrt[3]{\varphi_i(x)}+a=\sqrt[3]{v_i(x)-\delta}+a$; deci, cum $v_i(x)-\delta=\varphi_i(x) \le m$ şi $v_i(x) \ge m+\delta > m-a^3-m=-a^3$, rezultă că $\sqrt[3]{v_i(x)-\delta}+a>0$, $\forall\, x \in I_0$. Adică funcţiile v_i verifică egalitatea:

c) $\dfrac{v_i'(x)}{\sqrt[3]{v_i(x)-\delta+a}}=1$, $\forall\, x\in I_0$ (împărțirea făcându-se pentru că numitorul nu este 0).

d) Fie acum $g(z)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{z-\delta+a}}$, $g:\left(\delta-a^3,+\infty\right)\to\mathbb{R}$. Fiind o funcție continuă, ea admite o primitivă F.

Atunci $(F\circ v_i)'(x)=F'(v_i(x))\cdot v_i'(x)=\dfrac{v_i'(x)}{\sqrt[3]{v_i(x)-\delta+a}}=1$, $\forall\, x\in I_0$.

Prin urmare, $F\circ v_i=x+C_i$ $(i=1,2)$ şi de aici, $\forall\, x\in I_0$, $F(v_i(x))-F(v_i(x_0))=x-x_0$ $(i=1,2)$. (Cum două primitive diferă, pe un interval, printr-o constantă se găseşte că oricare altă primitivă satisface aceeaşi proprietate).

Adică funcțiile v_1, v_2 satisfac relațiile $F(v_i(x))-F(v_i(x_0))-x+x_0=0$, $\forall\, x\in I_0$ $(i=1,2)$ şi $v_1(x_0)=\delta+\varphi_1(x_0)=\delta+\varphi_2(x_0)=v_2(x_0)$, unde F este o primitivă pentru funcția g.

e) Se consideră acum ecuația $F(v)-F(v_0)-x+x_0=0$, unde $v_0=v_1(x_0)=v_2(x_0)=y_0+\delta$. Cum $F'(v_0)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{v_0-\delta+a}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y_0+a}}\neq 0$, din teorema funcțiilor implicite se obține că soluția ecuației considerate este unică şi $v_1(x)=v_2(x)$ $\forall\, x$, deci unicitatea soluției, căci din $v_1=v_2$ rezultă $\varphi_1=\varphi_2$.

Prin urmare, condiția ca f să fie lipschitziană nu este necesară pentru unicitatea soluției problemei Cauchy.

1.4 Soluții globale şi soluții maximale pentru o ecuație diferențială

Observația 1.4.1

Rezultatele prezentate până acum au un caracter local, adică se referă la proprietăți ce sunt verificate pe vecinătăți ale punctelor considerate. Se pune problema dacă, pentru ecuații diferențiale date, se poate defini soluția „globală”, adică soluția care verifică ecuația pe tot domeniul de definiție considerat; deci, proprietatea $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ să aibă loc „global”.

(i) **a)** Se consideră exemplul următor de problemă Cauchy: (f,x_0,y_0), unde $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y^2$, iar $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ este un punct dat $(y_0\neq 0)$. Prin urmare, se consideră ecuația diferențială $y'=y^2$ şi, cum $f(x,y)=y^2$ este local lipschitziană, atunci este asigurată existența şi unicitatea soluției problemei

Cauchy enunțate: $\exists\, h>0$ și $\exists!\ \varphi:[x_0-h,x_0+h]\to\mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât $\varphi(x_0)=y_0$ şi $\forall\, x\in[x_0-h,x_0+h], \varphi'(x)=\varphi^2(x)$.

Punând $\varphi(x)=-\dfrac{y_0}{xy_0-1-x_0y_0}$, avem $\varphi'(x)=\varphi^2(x)$ şi $\varphi(x_0)=y_0$, adică φ este o soluție a problemei Cauchy (f,x_0,y_0); din unicitate rezultă că φ este funcția oferită de ***teorema 1.2.1***. Dar funcția φ este definită pe un interval „mai mare” decât $[x_0-h,x_0+h]$, și anume: φ poate fi definită sau pe intervalul $\left(-\infty,x_0+\dfrac{1}{y_0}\right)\ni x_0$ (dacă $y_0>0$) sau pe $\left(x_0+\dfrac{1}{y_0},+\infty\right)\ni x_0$ (dacă $y_0<0$). Deci, soluția găsită poate fi definită pe un interval mai mare decât cel oferit de teorema citată, adică soluția poate fi „prelungită” pe un domeniu mai mare decât cel oferit de teorema Cauchy-Lipschitz-Picard sau de teorema lui Peano.

b) Dacă în exemplul precedent considerăm $x_0=y_0=0$, atunci funcția identic nulă $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=0$, respectă condițiile $\varphi(0)=0$ $\varphi'(x)=\varphi^2(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. În acest caz, soluția poate fi definită pe întreg domeniul de definiție posibil pentru o funcție de variabilă reală.

(ii) Fie din nou problema Cauchy (f,x_0,y_0), unde $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă, D este un deschis din $\mathbb{R}^2$, iar $(x_0,y_0)\in D$ un punct. Vom nota cu $\mathcal{S}_f=\{\varphi \mid \varphi:I\to\mathbb{R},\ I$ interval închis centrat în x_0, iar φ soluție pentru problema Cauchy $(f,x_0,y_0)\}$. Deci, $\mathcal{S}_f$ este mulțimea funcțiilor φ care verifică ecuația $y'=f(x,y)$ pe un interval centrat în x_0 ($\forall\, x_0$ din domeniul de definiție).

Din exemplele prezentate în (i) se pune problema dacă, dată fiind soluția $\varphi\in\mathcal{S}_f$ (care, din oricare dintre cele două teoreme prezentate până acum privitoare la existența soluției, este definită pe un interval de forma $I_0=[x_0-h,x_0+h]$) se poate prelungi la un interval „mai mare” decât I_0. Mai mult, se poate găsi un „cel mai mare” interval pe care poate fi definită soluția φ (adică se poate defini o soluție „maximală”)? Sau, se poate prelungi funcția φ pe întregul interval maxim posibil, cu păstrarea caracterului de soluție a ecuației (adică se poate defini „global” soluția)? Acestea sunt problemele care constituie esența celor ce vor fi prezentate în continuare.

Definiția 1.4.1

Fie I_1 un interval astfel încât $(a_1,b_1)\subset I_1\subset[a_1,b_1]$; analog, I_2, cu $(a_2,b_2)\subset I_2\subset[a_2,b_2]$ și funcțiile $\varphi_1:I_1\to\mathbb{R}$, $\varphi_2:I_2\to\mathbb{R}$. Atunci se spune că:

(i) φ_1 *prelungeşte aplicaţia* φ_2 dacă: 1) $I_2 \subset I_1$ şi 2) $\forall x \in I_2$, $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$ (adică restricţia lui φ_1 la I_2 este $\varphi_2; \varphi_1\big|_{I_2} = \varphi_2$); se notează această proprietate prin $\varphi_2 \langle \varphi_1$;

(ii) φ_1 *prelungeşte strict la dreapta pe* φ_2 dacă: 1) $I_2 \subset I_1$, $b_2 < b_1$ şi 2) $\varphi_1\big|_{I_2} = \varphi_2$; se notează aceasta prin $\varphi_2 \langle_{\mathrm{d}} \varphi_1$;

(iii) φ_1 *prelungeşte strict la stânga pe* φ_2 dacă: 1) $I_2 \subset I_1$ cu $a_1 < a_2$ şi 2) $\varphi_1\big|_{I_2} = \varphi_2$; se notează aceasta prin $\varphi_2 \langle_{\mathrm{s}} \varphi_1$;

(iv) în oricare din cazurile precedente pentru cazul $I_2 \subset I_1$ şi $I_2 \neq I_1$ se spune că φ_1 este *o prelungire strictă* a lui φ_2.

Observaţia 1.4.2

Fie relaţiile de mai sus definite pe mulţimea S_f a soluţiilor ecuaţiei $y' = f(x,y)$, unde $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^2$ mulţime deschisă). Este uşor de verificat că relaţia definită în **2** i) este o relaţie de ordine pe S_f adică este reflexivă $(\varphi\langle\varphi)$ antisimetrică ($\varphi_1\langle\varphi_2$ şi $\varphi_2\langle\varphi_1$ impune $\varphi_1 = \varphi_2$) şi tranzitivă ($\varphi_1\langle\varphi_2$ şi $\varphi_2\langle\varphi_3$ atrag după sine $\varphi_1\langle\varphi_3$). Atunci $(\mathsf{S}_f, \langle)$ este o mulţime ordonată. Redefinind concepte specifice mulţimilor ordonate, obţinem următoarele definiţii.

Definiţia 1.4.2

Fie $\varphi \in \mathsf{S}_f$ o soluţie pentru ecuaţia diferenţială $y' = f(x,y)$, unde $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu $D \subset \mathbb{R}$ mulţime deschisă. Atunci φ se numeşte:

(i) *maximală* (saturată, neprelungibilă) dacă $\forall \varphi_1 \in \mathsf{S}_f$ cu $\varphi \langle \varphi_1$, atunci $\varphi_1 = \varphi$ (adică φ nu admite o prelungire strictă);

(ii) *maximală* (saturată) *la dreapta* dacă $\nexists\, \varphi_1 \in \mathsf{S}_f$ cu $\varphi \langle_d \varphi_1$ (adică φ nu admite o prelungire strictă la dreapta);

(iii) *maximală* (saturată) *la stânga* dacă $\nexists\, \varphi_1 \in \mathsf{S}_f$ cu $\varphi \langle_s \varphi_1$ (adică φ nu admite o prelungire strictă la stânga);

(iv) dacă $D = I \times G \subset \mathbb{R}^2$, unde I este un interval, $G \subset \mathbb{R}$ mulţime deschisă, atunci soluţia $\varphi : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie globală a ecuaţiei date*.

Este uşor de observat, conform definiţiei, că o soluţie globală (dacă există) este şi maximală. De asemenea, exemplul discutat în ***observaţia 1.4.1*** pct. i, este un exemplu de ecuaţie care admite soluţie maximală (fără a fi globală), dar care admite şi o soluţie globală.

Teorema 1.4.1 (asupra prelungirii soluțiilor)

Fie $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ o soluție a ecuației $y' = f(x,y)$. Atunci:

(i) φ admite o prelungire strictă la dreapta în $\mathcal{S}_f \Leftrightarrow \exists\, t_0 \in (a,b)$ şi $\exists\, D_0 \subset D$ o mulțime compactă astfel încât, $\forall\, t \in [t_0,b)$, $(t,\varphi(t)) \in D_0$;

(ii) φ admite o prelungire strictă la stânga în $\mathcal{S}_f \Leftrightarrow \exists\, t_0 \in (a,b)$ şi $\exists\, D_0 \subset D$ o mulțime compactă astfel încât, $\forall\, t \in (a,t_0]$, $(t,\varphi(t)) \in D_0$.

Prin urmare, φ admite o prelungire strictă la dreapta sau la stânga dacă şi numai dacă graficul lui φ nu părăseşte (la dreapta, respectiv la stânga) o mulțime compactă.

Demonstrație

Este prezentată demonstrația numai pentru punctul (i), aceea corespunzătoare punctului (ii) decurgând analog.

„$\Rightarrow$” Fie $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ o soluție pentru ecuația $y' = f(x,y)$ care prelungeşte strict la dreapta pe φ; deci $(a,b) \subset I_1$ unde $(a_1,b_1) \subset I_1 \subset [a_1,b_1]$, iar $b < b_1$ şi $\forall\, x \in (a,b)$ $\varphi_1(x) = \varphi(x)$. În plus, (conform definiției soluției) $(b,\varphi_1(b)) \in D$.

Dacă $t_0 \in (a,b)$ este arbitrar, se defineşte $F : [t_0,b] \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,\varphi_1(x))$ care este o funcție continuă şi, cum $[t_0,b]$ este compact, $F([t_0,b]) = \{(x,\varphi_1(x)) \mid x \in [t_0,b]\} =: D_0$ este compact.

În sfârşit, $\forall\, x \in [t_0,b)$, $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ deci:

$$\{(x,\varphi_1(x)) \mid x \in [t_0,b)\} = \{(x,\varphi(x)) \mid x \in [t_0,b)\} \subset D_0 .$$

„$\Leftarrow$” 1) Cum $D_0 \subset D$ este compact, atunci mulțimea $f(D_0) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in D\}$ este un compact, deci este o mulțime mărginită în $\mathbb{R}^2$. Fie $m = \sup\{|\, f(x,y)\,| \mid (x,y) \in D_0\}$.

2) Deoarece φ este soluție pentru ecuația $y' = f(x,y)$, din ***propoziția 1.3.1*** rezultă că: $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x, x_0 \in (a,b)$.

Atunci $\forall\, x',x'' \in [t_0,b) \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| = \left| \int_{x_0}^{x'} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x''} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t \right| =$

$$= \left| \int_{x''}^{x'} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t \right| \le \left| \int_{x_0}^{x''} |f(t,\varphi(t))|\,\mathrm{d}t \right| \le m|x' - x''|.$$

Prin urmare, în ipoteza asumată aici, $\varphi\big|_{[t_0,b)}$ este lipschitziană; de aici rezultă că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \left(\delta_\varepsilon \le \dfrac{\varepsilon}{2m} \right)$, astfel încât $\forall\, t',t'' \in (b - \delta_\varepsilon, b)$, $|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon$. Adică funcția φ verifică criteriul lui Cauchy de existență a limitei finite φ în punctul b; în plus, $\lim\limits_{x \nearrow b} \varphi(x) \in \mathbb{R}$.

3) Cum $\forall\, x \in [t,b)$ $(x,\varphi(x)) \in D_0$ şi D_0 este compact, atunci: $\lim\limits_{x \nearrow b} (x,\varphi(x)) \in D_0$; fie $\lim\limits_{x \nearrow b} \varphi(x) = \beta$, deci $(b,\beta) \in D_0 \subset D$. Se aplică acum teorema lui Peano pentru a rezolva problema lui Cauchy (f,b,β): deci $\exists\, \alpha > 0$, şi $\exists\, \varphi_0 : [b - \alpha, b + \alpha] \to \mathbb{R}$, derivabilă, astfel încât $\forall\, x \in [b - \alpha, b + \alpha]$, $(x,\varphi_0(x)) \in D_0$, $\varphi'(x) = f(x,\varphi_0(x))$; în plus, $\varphi_0(b) = \beta$.

4) Fie funcția $\varphi_1 : (a, b + \alpha) \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ dacă } x \in (a,b); \\ \varphi_0(x) \text{ dacă } x \in [b, b + \alpha). \end{cases}$

Verificarea afirmației că φ_1 este soluție pentru ecuația $y' = f(x,y)$ este imediată şi conform ***definiției 1.4.1***, (ii), φ_1 prelungeşte strict la dreapta pe φ.

Observația 1.4.3

(i) Dacă funcția $\varphi : I \to \mathbb{R}$ este soluție pentru $y' = f(x,y)$, iar I este de forma $[a,b]$, $[a,b)$ sau $(a,b]$, din teorema precedentă rezultă că soluția φ admite o prelungire strictă. Dacă $I = (a,b)$, atunci numai existența lui t_0 şi a compactului D_0 cu proprietățile din enunț asigură posibilitatea prelungirii.

(ii) Pentru $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ se obține că φ este maximală la dreapta (deci nu mai admite prelungire strictă la dreapta) $\Leftrightarrow$ graficul funcției „părăseşte" la dreapta orice compact inclus în D $\Leftrightarrow$ sau $\lim\limits_{t \nearrow b} \left(|t| + |\varphi(t)| \right) = \infty$ sau $\exists\, (x_n)_n$, $x_n \in (a,b)$, $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = b$ şi $(x_n, \varphi(x_n)) \to (b,\beta) \in \partial D := \overline{D} \setminus D$. Mai precis, se obține următoarea propoziție:

Propoziția 1.4.1

Pentru $f : D \to \mathbb{R}$ continuă cu $D \subset \mathbb{R}^2$ mulțime deschisă şi $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ o soluție pentru ecuația $y' = f(x,y)$, atunci: φ este maximală la dreapta $\Leftrightarrow$ este verificată una din următoarele proprietăți: (i) $b = +\infty$; (ii) $\lim\limits_{x \nearrow b} |\varphi(x)| = +\infty$; (iii) $\exists (x_n)_n \subset (a,b)$ cu proprietățile: $(x_n)_n \nearrow b$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \beta$ şi $(b,\beta) \in \partial D$.

Demonstrație

„$\Leftarrow$” (i) Dacă $b = +\infty$, evident că φ nu poate fi prelungită strict la dreapta.

(ii) Dacă $\lim\limits_{x \nearrow b} |\varphi(x)| = \infty$, atunci $\forall\, t_0 \in (a,b)$, mulțimea $\{(x,\varphi(x)) \,|\, x \in [t_0,b]\}$ nu este mărginită şi deci nu poate fi inclusă într-un compact $D_0 \subset D$. Prin urmare, conform ***teoremei 1.4.1***, φ nu poate fi prelungită strict la dreapta.

(iii) Dacă $(x_n)_n \nearrow b$ şi $\beta = \lim\limits_{x\to\infty} |\varphi(x)| < \infty$ sunt astfel încât $(b,\beta) \in \partial D$ şi dacă se presupune condiția din ***teorema 1.4.1*** îndeplinită, atunci $\exists\, n_0$, astfel încât $\forall\, n \ge n_0$ $x_n \in [t_0,b)$ şi deci $(x_n,\varphi(x_n)) \in D_0 \subset D$. Cum D este compact, $(b,\beta) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n,\varphi(x_n)) \in D_0 \subset D$, contradicție cu $(b,\beta) \in \partial D$. Deci, nu există t_0 şi D_0 cu proprietățile din teoremă, adică φ nu admite prelungire strictă la dreapta.

„$\Rightarrow$” Fie o soluție care nu admite prelungire strictă la dreapta, adică este maximală la dreapta; se presupune că nu se realizează nici condiția (i), nici (ii). Trebuie să demonstrăm că este îndeplinită (iii). Fie deci $(x_n)_n \subset (a,b)$, $(x_n)_n \nearrow b$ $(b < +\infty)$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \beta < +\infty$.

Cum $(b,\beta) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n,\varphi(x_n))$ şi $(x_n,\varphi(x_n)) \in D$, atunci $(b,\beta) \in \overline{D}$. Trebuie demonstrat că $(b,\beta) \notin D$.

a) Fie $(b,\beta) \in D$; deoarece D este deschisă, fie $\delta > 0$ şi $\gamma > 0$, astfel încât: $[b-\delta, b+\delta] \times [\beta-\gamma, \beta+\gamma] =: \Delta \subset D$ şi $m = \max\{ |f(x,y)| : (x,y) \in D \} > 0$. Punând $\alpha = \min\left\{ \dfrac{\delta}{4}, \dfrac{\gamma}{4m} \right\}$, se obține din demonstrația teoremei lui Peano că

$\forall (x_0, y_0) \in \left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2} \right] \times \left[\beta - \frac{\gamma}{2}, \beta + \frac{\gamma}{2} \right]$, $\exists \alpha_0 > 0$, $\exists \varphi_0 : [b - \alpha_0, b + \alpha_0] \to \mathbb{R}$ soluție a problemei Cauchy (f, x_0, y_0) $(\alpha_0 \geq 0)$. (Într-adevăr conform construcției din teorema anunțată şi alegerilor de aici:

$$(x_0, y_0) \in \left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2} \right] \times \left[\beta - \frac{\gamma}{2}, \beta + \frac{\gamma}{2} \right] \Rightarrow \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2} \right] \times \left[y_0 - \frac{\gamma}{2}, y_0 + \frac{\gamma}{2} \right] \subset$$

$$\subset [b - \delta, b + \delta] \times [\beta - \gamma, \beta + \gamma]$$

şi $m_0 = \max\left\{ |f(x, y)| \,\middle|\, (x, y) \in \left[x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2} \right] \times \left[y_0 - \frac{\gamma}{2}, y_0 + \frac{\gamma}{2} \right] \right\} \leq m$, atunci $\alpha_0 = \min\left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\gamma}{2m} \right\} \geq \alpha$).

b) Cum $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, \varphi(x_n)) = (b, \beta)$, atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_0$, $(x_n, \varphi(x_n)) \in \left[b - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2} \right] \times \left[\beta - \frac{\gamma}{2}, \beta + \frac{\gamma}{2} \right]$ şi $b - x_n < \alpha \leq \alpha_0$. Dar, $\forall n \geq n_0$, există $\varphi_n : [x_n - \alpha_0, x_n + \alpha_0] \to \mathbb{R}$ soluție a problemei Cauchy (f, x_0, y_0). Fie atunci $\tilde{\varphi}_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ dacă } x \in [a, x_n); \\ \varphi_n(x) \text{ dacă } x \in [x_n, x_n + \alpha_0), \end{cases}$ $(n \geq n_0)$. Din construcția funcțiilor φ_n rezultă imediat că $\tilde{\varphi}_n$ este soluție pentru ecuația $y' = f(x, y)$ şi cum $x_n + x_0 \geq x_n + \alpha > b$ rezultă că $\tilde{\varphi}_n$ este o prelungire strictă la dreapta a soluției φ, contradicție cu faptul că φ este soluție maximală la dreapta. Deci, $(b, \beta) \notin D \Rightarrow (b, \beta) = \partial D$.

Corolarul 1.4.1

Dacă $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continuă şi φ este o soluție a ecuației $y' = f(x, y)$, atunci $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ este maximală la dreapta $\Leftrightarrow$ este îndeplinită una din condițiile: (i) $b = +\infty$, (ii) $\lim\limits_{x \nearrow b} |\varphi(x)| = +\infty$.

Demonstrație

Rezultatul este oferit de propoziția precedentă pentru că în acest caz $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ şi deci $\partial D = \varnothing$, adică (iii), din enunțul folosit, nu poate fi realizat.

Observația 1.4.4

(i) Din ***observația 1.4.2*** $\left(\mathcal{S}_f, \langle\right)$ este o mulțime ordonată, iar din ***definiția 1.4.2*** (i), existența unei soluții maximale este echivalentă cu existența unui element maximal în mulțimea $\left(\mathcal{S}_f, \langle\right)$.

Dacă $\varphi \in \mathcal{S}_f$, fie mulțimea $\mathcal{S}_{f,\varphi} = \left\{\psi \in \mathcal{S}_f \middle| \varphi \langle \psi\right\}$. Evident că, la rândul ei, mulțimea $\mathcal{S}_{f,\varphi}$ este o mulțime ordonată şi existența unei soluții maximale φ_1, $\left(\varphi < \varphi_1\right)$ este echivalentă cu existența unui element maximal în mulțimea $\left(\mathcal{S}_{f,\varphi}, \langle\right)$, adică existența unei prelungiri maximale pentru soluția φ este echivalentă cu existența unui element maximal al mulțimii $\left(\mathcal{S}_{f,\varphi}, \langle\right)$.

(ii) Amintim aici enunțul lemei lui Zorn pe care o folosim în demonstrarea teoremei de existență a soluțiilor maximale.

Fie $(A, \leq)$ o mulțime nevidă ordonată, astfel încât pentru oricare mulțime nevidă $L \subset A$, total ordonată există marginea superioară a lui *L*. Atunci există un element maximal în *A*.

Teorema 1.4.2 (existența soluțiilor maximale)

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ funcție continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$ şi *D* o mulțime deschisă. Atunci orice soluție $\varphi \in \mathcal{S}_f$ admite o prelungire maximală în $\mathcal{S}_f$.

Demonstrație

Fie mulțimea ordonată $\left(\mathcal{S}_{f,\varphi}, \langle\right)$. Trebuie găsit un element maximal în această mulțime; pentru aceasta vom folosi Lema lui Zorn (observația 1.4.4 (ii)). Fie $P \subset S_{f,\varphi}$ o parte total ordonată $P = \left\{\varphi_j \middle| j \in J\right\}$, unde $\varphi_j \in \mathcal{S}_{f,\varphi}$. Trebuie demonstrat că *P* admite un majorant. Pentru aceasta, fie $\varphi_j : I_j \to \mathbb{R}$, I_j interval şi $\forall\, x \in I_j$, $\varphi_j'(x) = f\left(x, \varphi_j(x)\right)$. Fie $I^* = \bigcup I_j$ şi $\varphi^* : I^* \to \mathbb{R}$ definită astfel: $\forall\, x \in I^*$, $\exists\, j \in J$ cu $x \in I_j$, atunci $\varphi^*(x) = \varphi_j(x)$.

(i) Se demonstrează că I^* este interval: fie $x_1, x_2 \in I^*$ şi $j_1, j_2 \in J$ cu $x_1 \in I_{j_1}$ şi $x_2 \in I_{j_2}$. Cum *P* este total ordonată sau $\varphi_{j_1} \langle \varphi_{j_2}$, sau $\varphi_{j_2} \langle \varphi_{j_1}$. Fie, spre exemplu, $\varphi_{j_1} \langle \varphi_{j_2}$; atunci $I_{j_1} \subset I_{j_2}$ şi deci $x_1, x_2 \in I_{j_2} \Rightarrow [x_1, x_2] \subset I_{j_2}$ (I_{j_2} interval) şi cum $I_{j_2} \subset I^*$, rezultă $[x_1, x_2] \subset I^*$; deci, I^* interval.

(ii) φ^* este bine definit. Dacă $x \in I^*$ este astfel încât $x \in I_{j_1} \cap I_{j_2}$, atunci pe de o parte, $\varphi^*(x) = \varphi_{j_1}(x)$, iar pe de altă parte, $\varphi^*(x) = \varphi_{j_2}(x)$. Cum $\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2} \in P$ sau $\varphi_{j_1} \langle \varphi_{j_2}$, sau $\varphi_{j_2} \langle \varphi_{j_1}$;deci, oricum, din definirea relației de prelungire, $\varphi_{j_1}(x)=\varphi_{j_2}(x)$; aşadar, $\varphi^*(x)=\varphi_{j_1}(x)=\varphi_{j_2}(x)$ şi numărul $\varphi(x)$ este bine definit.

(iii) $\varphi^* \in \mathcal{S}_f$. Dacă $x \in I^*$, fie $j \in J$ cu $x \in I_j$, atunci pe I_j $\varphi^*\big|_{I_j}=\varphi_j$; prin urmare, $\forall\, x \in I_j$, φ^* este derivabilă (la capetele intervalului derivatele sunt derivate laterale) şi $\varphi^{*\prime}(x)=\varphi_j'(x)=f\left(x,\varphi_j(x)\right)=f\left(x,\varphi^*(x)\right)$.

În particular, $\varphi^{*\prime}(x)=f\left(x,\varphi_j(x)\right)$, $\forall\, x \in I^*$.

(iv) Din construcţie, $\varphi_j \langle \varphi$ ($\forall\, j \in I$) şi deci φ este un majorant. Atunci, din lema lui Zorn, există un element maximal $\varphi_1 \in \mathcal{S}_{f,\varphi}$. Deci, există o prelungire φ_1 a lui φ maximală în $\mathcal{S}_f$.

Observația 1.4.5

Din ***observația 1.4.3***, dacă $\varphi: I \to \mathbb{R}$ este o soluție maximală, atunci *I* este neapărat un interval deschis.

Teorema 1.4.3 (unicitatea soluției maximale)

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$, *D* mulțime deschisă, astfel încât ecuația $y'=f(x,y)$ admite proprietatea de unicitate a soluțiilor locale ale problemei lui Cauchy (în particular, pentru *f* local lipschitziană în al II-lea argument, din ***teorema 1.2.1*** este asigurată unicitatea soluției). Atunci:

1) $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}_f \Rightarrow \exists!\ \varphi_1 \in \mathcal{S}_f$ maximală astfel încât $\varphi \langle \varphi_1$;

2) $\forall\, (x_0,y_0) \in D \Rightarrow \exists!\ \varphi$ o soluție maximală a problemei Cauchy (f,x_0,y_0).

Demonstrație

(i) Pentru $\varphi \in \mathcal{S}_f$ existența prelungirii maximale φ_1 în $\mathcal{S}_f$ este asigurată de ***teorema 1.4.2***. Fie $\varphi_2 \in \mathcal{S}_f$ un alt element maximal astfel încât $\varphi \langle \varphi_2$. Dacă $\varphi_1: I_1 \to \mathbb{R}$ şi $\varphi_2: I_2 \to \mathbb{R}$ I_1, I_2 sunt intervale astfel încât $I \subset I_1 \subset I_2$ (unde $\varphi: I \to \mathbb{R}$, *I* interval), atunci conform ***observației 1.4.5*** I_1 şi I_2 sunt intervale deschise, $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

(ii) Dacă $I^* := \left\{ x \in I_1 \cap I_2 \,\middle|\, \varphi_1(x)=\varphi_2(x) \right\}$, cum φ_1, φ_2 prelungesc pe φ, atunci $I \subset I^*$. Se demonstrează că I^* este o mulțime deschisă: Dacă $x_0 \in I^*$, atunci, din ipoteză, problema Cauchy $\left(f, x_0 \cdot \varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)\right)$ admite o soluție (locală) unică, deci există $\varphi_3 > 0$ şi $\varphi_3: [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \to \mathbb{R}$ unica soluție a problemei Cauchy enunțate. Cum şi φ_1 şi φ_2 sunt soluții ale aceleiaşi probleme

($\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_f$ şi $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$), rezultă că $\forall\, x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \varphi_3(x)$. Prin urmare: $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset I^*$, deci I^* este o mulţime deschisă. Deoarece φ_1 şi φ_2 sunt funcţii continue, I^* este o mulţime închisă. Deci $I^* \subset I_1 \cap I_2$ (interval deschis) este o mulţime care este simultan închisă şi deschisă; atunci, deoarece $I^* \neq \emptyset$, $I^* = I_1 \cap I_2$ (spre exemplu, $I_1 \cap I_2$ este interval deschis, deci o mulţime conexă, adică nu admite submulţimi stricte, nevide, simultan deschise şi închise). De aici rezultă că $\forall\, x \in I_1 \cap I_2$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$; cum $\varphi_1 \neq \varphi_2$, rezultă că $I_1 \neq I_2$.

(iii) Fie acum $\varphi^* : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) \text{ pentru } x \in I_1; \\ \varphi_2(x) \text{ pentru } x \in I_2. \end{cases}$

Evident că φ^* este bine definită (dacă $x \in I_1 \cap I_2$, $\varphi_1^*(x) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$) şi se verifică imediat că $\varphi^* \in \mathcal{S}_f$; dar $\varphi_1 \langle \varphi^*$, contradicţie cu faptul că φ_1 este maximal. Prin urmare, ipoteza că $\varphi_1 \neq \varphi_2$ este falsă şi deci $\varphi_1 = \varphi_2$.

Dacă $(x_0, y_0) \in D$, din teorema lui Peano există φ soluţie pentru problema Cauchy (f, x_0, y_0); din primul punct, există o unică prelungire maximală φ_1 a acestei soluţii în $\mathcal{S}_f$. Atunci problema Cauchy (f, x_0, y_0) admite o singură soluţie maximală).

Notaţia 1.4.1

Pentru ecuaţia $y' = f(x, y)$ (unde $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă şi $D \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă) şi $(x_0, y_0) \in D$, soluţia maximală a ecuaţiei care în x_0 are valoarea y_0 o vom nota prin $y(x, x_0, y_0)$.

Deci $y(x, x_0, y_0)$ este o funcţie definită pe $I \to \mathbb{R}$ (I interval deschis cu $x_0 \in I$), care verifică ecuaţia $y' = f(x, y)$, $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$ şi este soluţie maximală, deci nu mai poate fi prelungită strict nici la dreapta, nici la stânga.

Observaţia 1.4.6

Din ***teorema 1.4.3*** avem precizate condiţiile în care o problemă Cauchy (f, x_0, y_0) admite soluţie maximală, deci o soluţie a ecuaţiei $y' = f(x, y)$ al cărei grafic trece prin punctul de coordonate (x_0, y_0) şi care este definită pe un interval maxim de definiţie posibil. În continuare, se urmăreşte precizarea unor condiţii în care se poate găsi o soluţie globală, deci definită pe intervalul de definiţie ce apare în definiţia lui *f*.

Definiția 1.4.3

Fie $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval. Se spune că *f admite proprietatea de creştere liniară* (notată cu (CL)) dacă: $\exists\, r \geq 0$, $\exists\, a: I \to \mathbb{R}_+$ continuă, astfel încât $\forall\, x \in I$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$ cu $|y| > r$, avem $|f(x,y)| \leq a(x)|y|$.

Teorema 1.4.4 (existența soluțiilor globale)

Fie $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ interval) o funcție continuă care admite proprietatea de creştere liniară. Atunci ecuația $y' = f(x,y)$ admite proprietatea de existență a soluțiilor globale (adică $\forall\,(x,y) \in I \times \mathbb{R}$, $\exists\, \varphi: I \to \mathbb{R}$ soluție (globală) a problemei Cauchy (f, x_0, y_0)).

Demonstrație

(i) Aplicând ***teorema 1.4.3***, se alege $\varphi: I \to \mathbb{R}$ o soluție maximală a ecuației $y' = f(x,y)$. Se va demonstra că $I_0 = I$ şi deci că φ este soluție globală. Pentru aceasta se va arăta că, în ipoteza că $I_0 \neq I$, φ poate fi prelungită strict la dreapta sau la stânga ceea ce ar contrazice maximalitatea lui φ. În acest scop se va folosi ***teorema 1.4.1***.

Fie $I_0 = (a_0, b_0)$ (care este deschis, din ***observația 1.4.5***) şi deci $I \supset (a_0, b_0)$, presupunând că $I_0 \neq I$ ($I_0 \subset I$); pentru a face o alegere, fie $b_0 < b$ (în particular, $b_0 < +\infty$) $x_0 \in (a_0, b_0)$.

(ii) Deoarece $\left(\varphi^2(x)\right)' = 2\varphi(x)\varphi'(x) = 2\varphi(x) f\left(x, \varphi(x)\right)$, $\forall\, x \in I_0$, din formula Leibniz Newton, $\forall\, x \in I$, rezultă că:

$$\int_{x_0}^{x} 2\varphi(t) f\left(t, \varphi(t)\right) \mathrm{d}t = \varphi^2(x) - \varphi^2(x_0);$$

prin urmare, $\forall\, x \in I_0$,

$$\varphi^2(x) = \varphi^2(x_0) + 2\int_{x_0}^{x} \varphi(t) f\left(t, \varphi(t)\right) \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

Fie acum $a: I \to \mathbb{R}_+$ şi $r \geq 0$ date de proprietatea (CL) (care este verificată de f), $I_1 = \left\{x \in [x_0, b_0) \,\middle|\, |\varphi(x)| \leq r\right\}$ şi $I_2 = [x_0, b_0) \setminus I_1 = \left\{x \in [x_0, b_0) \,\middle|\, |\varphi(x)| > r\right\}$.

a) Din condiția CL găsim că $\forall\, x \in I_2$,

$$\varphi(x) f\left(x, \varphi(x)\right) \leq \left|\varphi(x) f\left(\varphi(x)\right)\right| \leq |\varphi(x)| a(x) |\varphi(x)| = a(x)\varphi^2(x).$$

b) Fie acum $D_1 = [x_0, b_0] \times [-r, r] \subset I \times \mathbb{R}$ şi

$m = \max\{|f(x,y)| \,|\, (x,y) \in D_1\}$ (*f* continuă pe D_1 şi $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ este compact).

Atunci, $\forall\, x \in I_1$, $\varphi(x) f(x, \varphi(x)) \le |\varphi(x)| |f(x, \varphi(x))| \le rm$, pentru că $|\varphi(x)| \le r$ şi deci $(x, \varphi(x)) \in D_1$.

În definitiv, $\forall\, x \in [x_0, b_0)$ este îndeplinită inegalitatea:
$\varphi(x) f(x, \varphi(x)) \le rm + a(x)\ \varphi^2(x)$ care, folosită în $(*)$, duce la proprietatea: $\forall\, x \in [x_0, b_0)$,

$$\varphi^2(x) = \varphi^2(x_0) + 2\int_{x_0}^{x} \varphi(t) f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le \varphi^2(x_0) + 2rm(b_0 - x_0) + \int_{x_0}^{x} 2a(t)\varphi^2(t)\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le \varphi^2(x_0) + 2rm(b_0 - x_0) + 2\int_{x_0}^{x} a(t)\varphi^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) Se aplică acum lema Bellman-Gronwall inegalităţii:

$\varphi^2(x) \le \varphi^2(x_0) + 2rm(b_0 - x_0) + 2\int_{x_0}^{x} a(t)\, \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t$, (adevărată $\forall\, x \in [x_0, b_0)$)

şi se obţine că:

$$\varphi^2(x) \le \left(\varphi^2(x_0) + 2rm(b_0 - x_0)\right) \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} 2a(t)\,\mathrm{d}t} \quad ,\forall\, x \in [x_0, b_0).$$

Cum $\int_{x_0}^{x} 2a(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{b_0} 2a(t)\,\mathrm{d}t \quad (\forall\, x \in [x_0, b_0))$, rezultă că:

$\varphi^2(x) \le \left(\varphi^2(x_0) + 2rm(b_0 - x_0)\right) \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{b_0} 2a(t)\,\mathrm{d}t} =: \gamma$ (se notează acest număr cu γ).

Prin urmare, $\forall\, x \in [x_0, b_0) \Rightarrow (x, \varphi(x)) \in [x_0, b_0] \times \left[-\sqrt{\gamma}, \sqrt{\gamma}\right] \subset I \times \mathbb{R}$ şi aplicând iarăşi ***teorema 1.4.1*** punctul **1**, φ admite o prelungire strictă la dreapta în $\mathcal{S}_f$, ceea ce contrazice maximalitatea lui φ. Procedând analog în situaţia $a < a_0$, se găseşte că $I_0 = I$, deci $\varphi : I \to \mathbb{R}$, adică φ este soluţie globală.

Observația 1.4.7

(i) Prin urmare, în prezența proprietății de creștere liniară pentru funcția *f*, orice soluție maximală (care există în conformitate cu ***teorema 1.4.2***) este o soluție globală, iar dacă este îndeplinită pentru *f* şi condiția de unicitate locală a soluției problemei Cauchy (conform ***teoremei 1.4.3***), este asigurată îndeplinirea teoremei de existență şi unicitate pentru soluția globală a problemei Cauchy.

(ii) Se încheie acest paragraf prin precizarea câtorva tipuri de soluții pentru ecuațiile diferențiale. Pentru aceasta fie următorul exemplu: pentru ecuația diferențială $y' = xy$, prin integrări elementare se obține soluția $\varphi_c(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, unde C este o constantă reală oarecare. Dacă se dorește rezolvarea problemei Cauchy $(f,1,\mathrm{e})$ (unde $f(x,y) = xy$), trebuie ca soluția găsită să verifice condiția $\varphi(1) = \mathrm{e}$, adică $C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}$; deci $C = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. Aşadar, se poate determina soluția problemei Cauchy plecând de la funcția $\varphi_c(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Definiția 1.4.4

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $D \subset \mathbb{R}^2$, D mulțime deschisă şi $\varphi_c : I \to \mathbb{R}$ o familie de funcții derivabile care depind de parametrul real $C \in E \subset \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$ fiind presupus maxim ales). Atunci:

(i) Familia de funcții $(\varphi_c)_{C\in E}$ se numeşte *soluție generală* pentru ecuația $y' = f(x,y)$ dacă şi numai dacă:

a) $\forall\, C \in E$ şi $\forall\, x \in I$, $(x,\varphi_c(x)) \in D$ şi $\varphi_c'(x) = f(x,\varphi_c(x))$;

b) $\forall\,(x_0,y_0) \in D$ $\exists\, C_0 \in E$ astfel încât $\varphi_{c_0}(x_0) = y_0$.

Deci familia de funcții $(\varphi_c)_{C\in E}$ se numeşte soluția generală dacă orice funcție din familie verifică ecuația $y' = f(x,y)$ şi orice problemă Cauchy (f,x_0,y_0) are soluție în familia dată.

(ii) Dacă $(\varphi_c)_{C\in E}$ este soluția generală, atunci oricare din funcțiile familiei se va numi *soluție particulară* a ecuației $y' = f(x,y)$.

(iii) Dacă $(\varphi_c)_{C\in E}$ este soluția generală a ecuației date ($y' = f(x,y)$) şi $u : I \to \mathbb{R}$ este o altă soluție a ecuației $y' = f(x,y)$ care nu se regăseşte în familia $(\varphi_c)_{C\in E}$ (deci, $\forall\, C \in E$, $u \neq \varphi_c$), atunci u se numeşte *soluție singulară* a ecuației date.

1.5 Ecuații diferențiale liniare de ordinul I

Observația 1.5.1

În acest paragraf sunt studiate, în principal, ecuațiile liniare. Tipul prezentat este important din cel puțin două puncte de vedere: în primul rând, pentru că astfel de ecuații fac parte din categoria ecuațiilor de ordinul I care pot fi rezolvate prin metode elementare (prin „cuadraturi”, adică prin calcul de integrale), deci din categoria acelor ecuații pentru care se poate indica un algoritm de rezolvare; în al doilea rând, ele fac parte din clasa ecuațiilor liniare, clasă despre care se va oferi, în acest context, mai multe informații şi în cazul sistemelor, ecuațiilor de ordin superior sau al ecuațiilor cu derivate parțiale.

Vor fi prezentate în acest paragraf şi alte tipuri de ecuații care fie folosesc pentru integrare ecuațiile liniare, fie se reduc la ecuații liniare.

Definiția 1.5.1 (Ecuații cu variabile separabile)

Fie funcțiile continue $f: I \to \mathbb{R}$ şi $g: J \to \mathbb{R}$, unde $I, J \subset \mathbb{R}$ sunt intervale deschise. Atunci, ecuația $y' = f(x) \cdot g(y)$ se numeşte *ecuație cu variabile separabile*.

Dacă se notează cu $h: I \times J \to \mathbb{R}$ funcția $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, se observă imediat că *h* este o funcție continuă şi deci, din ***teorema 1.3.1 (Peano)***, problema Cauchy ataşată acestei ecuații are soluții.

Propoziția 1.5.1

Fie funcțiile continue $f: I \to \mathbb{R}$ şi $g: J \to \mathbb{R}$, unde $I, J \subset \mathbb{R}$ sunt intervale şi fie ecuația diferențială $y' = f(x) \cdot g(y)$.

(i) Dacă există $y_0 \in J$ cu $g(y_0) = 0$, atunci funcția $\varphi: I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = y_0$ este soluție a ecuației date (numită şi soluție staționară).

(ii) Fie acum *F* o primitivă a funcției *f* pe intervalul *I* şi *G* o primitivă a funcției $\frac{1}{g}$ pe un interval deschis $J_0 \subset \{y \in J \mid g(y) \neq 0\}$ şi $\varphi: I_1 \to J_0$ funcție continuă ($I_1 \subset I$ interval). Atunci φ este o soluție pentru ecuația dată $\Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că: $\forall\, x \in I_1$, $G(\varphi(x)) = F(x) + C$.

Demonstrație

(i) Dacă $g(y_0) = 0$ şi $\varphi(x) = y_0$, $\forall\, x \in I$, este evident că:

$$\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)), \forall\, x \in I \Leftrightarrow 0 = f(x) \cdot g(y_0).$$

(ii) „$\Leftarrow$” Fie îndeplinită relația din enunț: $G(\varphi(x)) = F(x) + C$, $\forall\, x \in I_1$. Cum $G'(y) = \dfrac{1}{g(y)} \neq 0$, $\dfrac{1}{g}: J_0 \to \mathbb{R}$, atunci *G* este strict monotonă pe

J_0 şi deci există $G^{-1}: G(J_0) \to \mathbb{R}$. Atunci, $\forall\, x \in I_1$, $\varphi(x) = G^{-1}(F(x)+C)$; cum G^{-1} şi F sunt derivabile, rezultă φ derivabilă pe I_1. Derivând egalitatea $G \circ \varphi = F + C$ pe I_1, obținem: $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{g(\varphi(x))}\varphi'(x) = f(x)$ $\Leftrightarrow$ $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x))$, $\forall\, x \in I_1$.

„$\Rightarrow$" Fie acum $\varphi : I_1 \to J_0$ o soluție pentru ecuația $y' = f(x) \cdot g(y)$. Atunci, $\forall\, x \in I_1$, $\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)) \Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$ ($\varphi(x) \in J_0$ şi deci $g(\varphi(x)) \neq 0$).

Cum $(G \circ \varphi)'(x) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$ $(\forall\, x \in I_1)$, atunci din cunoştințele elementare de analiză matematică (consecințe ale teoremei lui Lagrange), deoarece F este o primitivă pentru *f*, $\exists\, C \in \mathbb{R}$, astfel încât $\forall\, x \in I_1$ $(G \circ \varphi)(x) = F(x) + C$.

Observația 1.5.2

(i) Dacă $(x_0, y_0) \in I \times J_0$ (notațiile din ***propoziția 1.5.1***), atunci problema Cauchy ataşată ecuației $y' = f(x) \cdot g(y)$ în punctul (x_0, y_0) are soluție unică.

Faptul că problema Cauchy are soluție rezultă din teorema lui Peano.

Fie acum $\varphi_1, \varphi_2 : I_1 \to J_0$ două soluții ale ecuației date, cu $\varphi_1(x_0) = y_0 = \varphi_2(x_0)$.

Atunci, din ***propoziția 1.5.1***, $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\forall\, x \in I_1,\ G(\varphi_1(x)) = F(x) + C_1 \text{ şi } G(\varphi_2(x)) = F(x) + C_2.$$

Cum $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0 \Rightarrow C_1 = C_2 = C$. Deoarece G este inversabilă pe J_0, se obține că $\varphi_1(x) = G^{-1}(F(x)+C) = \varphi_2(x)$, $\forall\, x \in I_1$, adică $\varphi_1 = \varphi_2$.

(ii) În punctele $(x_0, y_0) \in I \times (J \setminus J_0)$ este posibil ca soluția problemei Cauchy ataşată ecuației $y' = f(x) \cdot g(y)$ să nu fie unică. Un exemplu, în care unicitatea nu este asigurată, a fost dat în ***observația 1.1.2*** (ii), pentru ecuația $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

(iii) Dacă se urmăreşte rezolvarea ecuației cu variabile separabile $y' = f(x) \cdot g(y)$, presupunând că se cunosc primitivele cerute, se procedează în felul următor:

1) se rezolvă ecuația $g(y)=0$ şi, pentru orice soluție y_i a acestei ecuații, funcția $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x)=y_i$ este soluție pentru ecuația diferențială dată;

2) pe intervale din mulțimea $\{y \in J | g(y) \neq 0\}$ se „separă variabilele”, adică se înlocuieşte simbolul $y' = f(x) \cdot g(y)$ cu un alt simbol matematic, şi anume: $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$ după care se calculează primitive pentru funcțiile $\frac{1}{g}$ şi f („se integrează fiecare membru al egalității”) şi se obține, notând cu G şi, respectiv, F aceste primitive, $G(y) = F(x) + C$, care defineşte implicit soluția ecuației diferențiale;

3) pentru o problemă Cauchy definită de punctul (x_0, y_0) se procedează, în continuare, astfel:

a) dacă $g(y_0)=0$, atunci se reține soluția staționară $\varphi(x)=y_0$;

b) dacă $g(y_0) \neq 0$, se alege intervalul $J_0\left(\subset \{y | g(y) \neq 0\}\right)$, astfel încât $y_0 \in J_0$; din relația $G(\varphi(x)) = F(x) + C$ $(\forall\, x \in I_1)$ se determină C astfel încât $G(y_0) = F(x_0) + C$ şi atunci egalitatea $G(\varphi(x)) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$ defineşte, implicit, soluția dorită.

Exemplul 1.5.1

Fie din nou $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=3$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^{\frac{2}{3}}$ sunt evident continue.

(i) $g(y)=0 \Leftrightarrow y=0$, deci unica soluție staționară este funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x)=0$.

(ii) Pe intervalul $(0,+\infty)$ sau $(-\infty,0)$, fie $\frac{\mathrm{d}y}{3y^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x$ (s-au separat variabilele). Calculând primitivele, rezultă $y^{\frac{1}{3}} = x + C$ $(C \in \mathbb{R})$ şi deci soluția generală este definită implicit pe $(0,+\infty)$ (sau $(-\infty,0)$) prin egalitatea $\sqrt[3]{\varphi(x)} = x + C$ din care, în acest caz, se obține uşor că $\varphi(x) = (x+C)^3$.

(iii) Dacă se doreşte soluția problemei Cauchy definită de punctul (0,1), cum $g(1) \neq 0$, se găseşte soluția $\varphi(x) = (x+1)^3$ pe $(-1,\infty)$ (dacă se caută soluția $y>0$ trebuie ca $\varphi(x)>0 \Leftrightarrow x>-1$).

(iv) Se observă că soluția φ poate fi prelungită într-o infinitate de moduri pe $\mathbb{R}$ prin: $\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}(x+1)^3, & \text{dacă } x\in(-1,\infty);\\ 0, & \text{dacă } x\in[-\alpha,-1],\\ (x+\alpha)^3, & \text{dacă } x\in(-\infty,-\alpha).\end{cases}$ unde $\alpha\ge 1$.

Definiția 1.5.2 (Ecuații omogene)

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție continuă ($D\subset\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă) omogenă de grad 0 (adică $f(tx,ty)=f(x,y)$, $\forall\, t\ne 0$ și $\forall\,(x,y)\in D$, cu $(tx,ty)\in D$). Atunci, ecuația $y'=f(x,y)$ se numește *ecuație omogenă*.

Observația 1.5.3

(i) Dacă $g:G\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă ($G\subset\mathbb{R}$ mulțime deschisă), atunci o ecuație de forma $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ (definită pentru $\left\{(x,y)\middle|\frac{y}{x}\in G \text{ cu } x\ne 0\right\}$) este, evident, omogenă, pentru că funcția $f:D\to\mathbb{R}$, unde $D=\left\{(x,y)\middle| x\ne 0 \text{ și } \frac{y}{x}\in G\right\}$, $f(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)$ este funcție omogenă de grad 0 și ecuația $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ se poate scrie sub forma $y'=f(x,y)$.

(ii) Dacă f este o funcție omogenă de grad 0, atunci, spre exemplu,

$$f(x,y)=f\left(x\cdot 1, x\cdot\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)\ \forall\, x\ne 0, \text{ dacă } \left(1,\frac{y}{x}\right)\in D.$$

Notând prin $g\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$, ecuația capătă forma $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$.

(iii) Exemplele cele mai naturale de funcții omogene de grad 0 sunt rapoartele de polinoame omogene în x și y, polinoame de același grad.

(iv) Rezolvarea unei ecuații omogene se reduce la rezolvarea unei ecuații cu variabile separabile după cum va rezulta din următoarea propoziție. Mai înainte însă se observă că f fiind continuă, există soluții pentru ecuația omogenă conform teoremei lui Peano.

Propoziția 1.5.2

Fie ecuația omogenă $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$ cu $g:G\to\mathbb{R}$ continuă, $G\subset\mathbb{R}$ mulțime deschisă și $\varphi:I\to\mathbb{R}$ ($I\subset\mathbb{R}$, interval cu $0\notin I$). φ este soluție pentru ecuația omogenă dată $\Leftrightarrow$ $\psi : I \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$ este soluție pentru ecuația (cu variabile separabile) $y' = \dfrac{g(y) - y}{x}$.

Demonstrație

„$\Rightarrow$" Dacă φ este soluție pentru ecuația propusă, atunci $\forall\, x \in I$ $\dfrac{\varphi(x)}{x} \in G$ şi $\varphi'(x) = g\left(\dfrac{\varphi(x)}{x}\right)$. Funcția ψ, evident derivabilă, îndeplineşte egalitatea $\psi'(x) = \dfrac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x}\left[\varphi'(x) - \dfrac{\varphi(x)}{x}\right] = \dfrac{1}{x}\left[g\left(\dfrac{\varphi(x)}{x}\right) - \dfrac{\varphi(x)}{x}\right]$.

Prin urmare, $\forall\, x \in I$ $\psi'(x) = \dfrac{g(\psi(x)) - \psi(x)}{x}$, deci ψ este soluția ecuației $y' = \dfrac{g(y) - y}{x}$.

„$\Leftarrow$" Reciproc, dacă funcția $\psi : I \to \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$ este soluție pentru ecuația $y' = \dfrac{g(y) - y}{x}$, atunci $\forall\, x \in I$ $\dfrac{\varphi(x)}{x} \in G$ şi cum ψ este derivabilă, rezultă că $\varphi(x) = x \cdot \psi(x)$ este derivabilă şi

$$\Psi'(x) = \frac{g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x}}{x} \Leftrightarrow \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} =$$

$$= \frac{g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x}}{x} \Leftrightarrow x\varphi'(x) = xg\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \Leftrightarrow \varphi'(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right).$$

Deci, funcția φ este soluție pentru ecuația $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Observația 1.5.4

Pentru rezolvarea unei astfel de ecuații $\left(y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$ se poate proceda în felul următor:

1) se face schimbarea de variabilă $y = z \cdot x$, căutându-se deci aflarea funcției z în locul lui y; derivând egalitatea, obținem $y' = z' \cdot x + z$, înlocuind în ecuație se găsește: $z' = \frac{g(z) - z}{x}$, ecuație cu variabile separabile;

2) se procedează ca în ***observația 1.5.2*** (iii) pentru rezolvarea ecuației $z' = \frac{g(z) - z}{x}$, obținându-se, spre exemplu, soluția ψ; atunci, $\varphi(x) = x\psi(x)$ este soluția căutată pentru ecuația $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Exemplul 1.5.2

Fie ecuația $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$; deci, $g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$, cu $g : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$.

1. Punând $y = z \cdot x$, se obține ecuația cu variabile separabile $z' = \frac{\operatorname{tg} z}{x}$.

2. Cum $\operatorname{tg} z \neq 0$, $\forall\, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prin integrare după modelul din ***observația 1.5.2*** (iii) rezultă:

$$\frac{\cos z}{\sin z}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|\sin z| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \sin z = Cx \text{ și deci } \sin\frac{y}{x} = Cx.$$

Prin urmare, funcția φ, soluția ecuației enunțate, verifică ecuația $\sin\frac{\varphi(x)}{x} = Cx$ (unde, evident, C este astfel ales încât pentru $x \in I$, $|Cx| \le 1$).

Definiția 1.5.3 (Ecuații reductibile la ecuații omogene)

(i) Fie ecuația $y' = g\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'x + c'}\right)$, definită prin intermediul funcției continue g, a numerelor reale a, b, c, a', b' c' și $d = ab' - a'b$.

1. Dacă $d = 0$, ecuația se reduce la o ecuație cu variabile separabile.

a) Fie $a = a' = 0$, rezultă ecuația $y' = g\left(\frac{by + c}{b'y + c'}\right)$ și cum g depinde numai de y, ecuația este cu variabile separabile.

b) Dacă $b = b' = 0$, ecuația devine $y' = g\left(\frac{ax + c}{a'x + c'}\right)$ și se obține situație analogă celei de la punctul **a)**, numai că g depinde numai de x.

c) Fie acum $d = 0$ și, spre exemplu, $b \neq 0$. Se efectuează schimbarea de variabilă $z = ax + by$ și atunci din $ab' = a'b$ rezultă:

$$a'x+b'y+c'=\frac{ab'}{b}x+b'y+c'=\frac{b'}{b}(ax+by)+c'=\frac{b'}{b}z+c'.$$

Deci, ecuația devine: $(z'=a+by')$; $\frac{z'-a}{b}=f\left(\frac{z+c}{\frac{b'}{b}z+c'}\right)$ care este, evident, cu variabile separabile.

d) Analog, se procedează pentru situația $d=0$, dar $b'\neq 0$, notând $z=a'x+b'y$.

2. Dacă $d\neq 0$ și $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ este unica soluție pentru sistemul $\begin{cases}ax+by+c=0\\ a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ atunci, prin schimbarea de variabilă $u=x-x_0$, $v=y-y_0$, se obține ecuația omogenă $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=g\left(\frac{au+bv}{a'u+b'v}\right)$ și dacă ψ este soluția care verifică această ecuație, funcția $\varphi(x)=\psi(x-x_0)+y_0$ verifică ecuația inițială. Într-adevăr,

$$ax+by+c=a(u+x_0)+b(v+y_0)+c=au+bv+ax_0+by_0+c=au+bv$$

și analog $a'x+b'y+c'=a'u+b'v$. În plus, din schimbarea de variabilă propusă, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ și deci ecuația devine: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=g\left(\frac{au+bv}{a'u+b'v}\right)$ care este omogenă.

(ii) Exemplu. Fie ecuația $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

1. Cum $d=2$ și soluția sistemului $\begin{cases}x-y+1=0\\ x+y-3=0\end{cases}$ este (1,2) se face schimbarea de variabilă $u=x-1$ și $v=y-2$. Rezultă ecuația omogenă $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{u-v}{u+v}$.

2. Se schimbă din nou variabilele notând $v=z\cdot u$ (funcția necunoscută fiind acum z).

Se obține ecuația: $(v'=z'u+z)$, $z'u+z=\frac{1-z}{1+z}\Leftrightarrow z'u=\frac{1-2z-z^2}{1+z}$, adică $z'=\frac{1-2z-z^2}{u(1+z)}$.

3. Cum $g(z)=\frac{1-2z-z^2}{1+z}=0\Leftrightarrow z^2+2z-1=0\Leftrightarrow z_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$, rezultă soluțiile (singulare) $\varphi_1(u)=-1+\sqrt{2}$ și $\varphi_2(u)=-1-\sqrt{2}$, adică (pentru variabila

u) $\psi_1(u)=\left(-1+\sqrt{2}\right)u$ şi $\psi_2(u)=\left(-1-\sqrt{2}\right)u$ şi, în definitiv, pentru ecuația inițială $\theta_1(x)=\left(-1+\sqrt{2}\right)(x-1)+2$ şi $\theta_2(x)=\left(-1-\sqrt{2}\right)(x-1)+2$.

4. Pentru un interval J_0 pentru care $\dfrac{1-2z-z^2}{1+z}$ este definită şi nenulă se obține $\dfrac{(1+z)\mathrm{d}z}{1-2z-z^2}=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$ şi deci, prin integrare, $-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-2z-z^2\right|=\ln|u|-\dfrac{1}{2}\ln|C|$; adică $C=u^2\left(1-2z-z^2\right)$.

Înlocuind $z=\dfrac{v}{u}=\dfrac{y-2}{x-1}$, se găseşte $x^2-2xy-y^2+2x+6y=C$.

Prin urmare, soluția φ a ecuației propuse verifică o ecuație de forma: $x^2-2x\varphi(x)-\varphi^2(x)+2x+6\varphi(x)=C$ a cărei rezolvare oferă forma soluției pentru φ.

Definiția 1.5.4 (Ecuația diferențială liniară de ordinul I)

Fie $P,Q:I\to\mathbb{R}$ funcții continue ($I\subset\mathbb{R}$ interval). O ecuație de forma $y'+P(x)y+Q(x)=0$ se numeşte *ecuație diferențială liniară de ordinul I.*

Dacă $Q(x)=0$, $\forall\, x\in I$, ecuația se *numeşte ecuație diferențială liniară de ordinul I, omogenă*; dacă $\exists\, x\in I$ cu $Q(x)\neq 0$ ecuația se va *numi ecuație diferențială liniară de ordinul I neomogenă* (sau ecuație diferențială de ordinul I afină).

Observația 1.5.5

(i) Ecuația prezentată mai sus, $y'+P(x)y+Q(x)=0$, se poate scrie sub forma $y'=f(x,y)$ unde $f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este $f(x,y)=-P(x)y-Q(x)$. Evident că *f* este continuă şi cum $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-P(x)$ (constant în raport cu *y*), rezultă că *f* este local lipschitziană.

Aplicându-i ***teorema 1.2.1***, se găseşte că orice problemă Cauchy (ce respectă condițiile de domeniu de definiție) are soluție unică. Mai mult, din ***teorema 1.4.3*** există şi sunt unice soluțiile maximale ale problemei Cauchy ataşate funcției *f*.

(ii) Se observă că $|f(x,y)|\le|P(x)||y|+|Q(x)|$; dacă $|y|\ge 1$, atunci $\forall\, x\in I$ şi $\forall\, y$ cu $|y|\ge 1$, $|f(x,y)|\le|P(x)||y|+|Q(x)||y|=\left(|P(x)|+|Q(x)|\right)|y|$.

Punându-se $a:I\to\mathbb{R}_+$, $a(\xi)=|P(\xi)|+|Q(\xi)|$, se găseşte că funcția $f(x,y)=-P(x)y-Q(x)$ satisface condiția de creştere liniară (***definiția 1.4.3***).

Atunci din ***teorema 1.4.4*** se obține că ecuația liniară admite soluții globale (unice) pentru că, din teorema invocată, orice soluție maximală este o soluție globală.

(iii) Se prezintă în continuare metode de rezolvare a ecuațiilor liniare, care vor apela numai la calculul de primitive.

Propoziția 1.5.3

Fie $P: I \to \mathbb{R}$ funcție continuă ($I \subset \mathbb{R}$ interval), $\varphi: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă şi F o primitivă a funcției P pe intervalul I. Atunci: φ este soluție a ecuației $y' + P(x)y = 0 \Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$, astfel încât $\forall\, x \in I$ $\varphi(x) = C\mathrm{e}^{-F(x)}$.

Demonstrație

„$\Leftarrow$" Evident că $\varphi(x) = C\mathrm{e}^{-F(x)}$ este derivabilă şi $\varphi'(x) = C\mathrm{e}^{-F(x)} \cdot (-F'(x))$, adică $\varphi'(x) + \varphi(x)P(x) = 0$, $\forall\, x \in I$. Aşadar, φ este soluție pentru ecuația $y' + P(x)y = 0$.

„$\Rightarrow$" Dacă φ este soluție pentru ecuația $y' + P(x)y = 0$, atunci $\forall\, x \in I$, $\varphi'(x) + P(x)\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) = -P(x)\varphi(x)$.

(i) Dacă există $x_0 \in I$ cu $\varphi(x_0) = 0$, cum problema Cauchy $(f, x_0, 0)$ (cu $f(x,y) = -P(x)y$) admite o singură soluție, aceasta nu poate fi decât funcția identic nulă $y = 0$.

(ii) Fie acum, $\forall\, x \in I$, $\varphi(x) \neq 0$, atunci $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + P(x) = 0$, $\forall\, x \in I$. Deci, primitiva acestei funcții este constantă pe I, adică (presupunând că $\varphi(x) > 0$, $\forall\, x \in I$) $\ln\varphi(x) + F(x) = C_1 \Leftrightarrow \varphi(x) = \mathrm{e}^{C_1 - F(x)} = \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{-F(x)}$. Pentru $C = \mathrm{e}^{C_1}$ se obține că: $\varphi(x) = C\mathrm{e}^{-F(x)}$, $\forall\, x \in I$. (Analog pentru $\varphi(x) < 0$).

Observația 1.5.6

(i) Ecuația $y' + P(x)y = 0$ este o ecuație cu variabile separabile şi, prin urmare, algoritmul de rezolvare este oferit de ***observația 1.5.2*** punctul (iii). Din propoziția precedentă soluția generală are forma $\varphi(x) = C\mathrm{e}^{-F(x)}$, unde F este o primitivă pentru funcția P. Dacă $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t$, $F: I \to \mathbb{R}$ cu $x_0 \in I$, atunci soluția generală are forma $\varphi(x) = C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}$.

(ii) Dacă se caută soluția problemei Cauchy (f, x_0, y_0), unde $f(x,y) = -P(x)y$ şi $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, cerând ca $\varphi(x_0) = y_0$, se obține: $C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x_0} P(t)\mathrm{d}t} = y_0 \Leftrightarrow C = y_0$. Prin urmare, soluția problemei Cauchy (f, x_0, y_0) este $\varphi(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}$.

Propoziția 1.5.4

Fie $P, Q : I \to \mathbb{R}$ funcții continue ($I \subset \mathbb{R}$ interval), F o primitivă pentru funcția P pe intervalul I şi $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Atunci: φ este soluție a ecuației $y' + P(x)y + Q(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\, G : I \to \mathbb{R}$ primitivă a funcției $Q(x)\mathrm{e}^{F(x)}$, astfel încât $\forall\, x \in I$, $\varphi(x) = -G(x)\mathrm{e}^{-F(x)}$.

Demonstrație

„$\Leftarrow$” Dacă $\varphi(x) = -G(x)\mathrm{e}^{-F(x)}$, din condițiile impuse pentru F şi G, φ este derivabilă şi

$$\varphi'(x) = -G'(x)\mathrm{e}^{-F(x)} - G(x)\mathrm{e}^{-F(x)}\left(-F(x)\right)' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = -Q(x)\mathrm{e}^{F(x)}\,\mathrm{e}^{-F(x)} - G(x)\mathrm{e}^{-F(x)}\left(-P(x)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = -Q(x) - P(x)\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi'(x) + P(x)\varphi(x) + Q(x) = 0.$$
$$(\forall\, x \in I)$$

Prin urmare, $\varphi(x) = -G(x)\mathrm{e}^{-F(x)}$ este soluție pentru ecuația:

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0.$$

„$\Rightarrow$” Fie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ o soluției a ecuației $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ şi $G(x) = -\varphi(x)\mathrm{e}^{F(x)}$. Atunci

$$G'(x) = -\varphi'(x)\mathrm{e}^{F(x)} - \varphi(x)\mathrm{e}^{F(x)}F'(x) \Leftrightarrow G'(x) = -\mathrm{e}^{F(x)}\left[\varphi'(x) + P(x)\varphi(x)\right];$$

dar $\varphi'(x) + P(x)\varphi(x) + Q(x) = 0$, deci $G'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{F(x)}$. Prin urmare, G este o primitivă a funcției $\left(x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{F(x)}\right)$, adică există primitiva G astfel încât $\varphi(x) = -G(x)\mathrm{e}^{-F(x)}$.

Observația 1.5.7

(i) Pentru a integra ecuația liniară: $y' + P(x)y + Q(x) = 0$, din cele prezentate până acum, rezultă următorul algoritm de rezolvare:

1) se integrează mai întâi ecuația omogenă $y' + P(x)y = 0$; pentru aceasta ***propoziția 1.5.3*** oferă soluția generală $\varphi_1(x) = C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}$;

2) se caută acum o funcție $C : I \to \mathbb{R}$, derivabilă, astfel încât funcția: $\varphi(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x}$ să verifice ecuația dată. (Această metodă de găsire a soluției ecuației neomogene, poartă numele de *metoda variației constantelor*). Impunând funcției φ să verifice ecuația dată, obținem că funcția C verifică ecuația: $C'(x)\cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t} = -Q(x) \Leftrightarrow C'(x) = -Q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}$.

Determinându-se o primitivă a funcției din membrul drept al ultimei egalități, se obține că: $C(x) = K - \int Q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x$ $(K \in \mathbb{R})$ și revenind la forma lui φ, găsim: $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}\left[K - \int Q(x)\cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x\right]$, soluția generală a ecuației $y' + P(x)y + Q(x) = 0$.

(ii) Dacă se cere soluția unei probleme Cauchy (f, x_0, y_0), unde $f(x,y) = -P(x)y - Q(x)$ și $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, se aleg următoarele primitive $x \to \int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t$ și $x \to \int_{x_0}^{x} Q(t)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t} P(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t$, atunci

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}\left[K - \int_{x_0}^{x} Q(t)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t} P(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right],$$

cerând $\varphi(x_0)=y_0$, rezultă că: $\varphi(x_0)=K=y_0$, deci

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}\left(y_0-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}P(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right)=$$

$$=y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}-\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}\cdot\int_{x_0}^{x}Q(t)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}P(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t=$$

$$=y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}P(s)\,\mathrm{d}s-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}-\int_{x_0}^{x}Q(t)\,\mathrm{e}^{\int_{x}^{t}P(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t.$$

Exemplul 1.5.3

Fie ecuația $y'-y-\mathrm{e}^{x}=0$. Atunci $P(x)=-1$ şi $Q(x)=-\mathrm{e}^{x}$. Se poate aplica pas cu pas algoritmul de mai sus, dar dacă se foloseşte forma generală la care s-a ajuns în observația precedentă punctul (i), se găseşte că soluția generală necesită calculul a două primitive: $\int P(x)\,\mathrm{d}x=-x$ şi $\int Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-x$; atunci soluția este $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x}(K+x)$.

Observația 1.5.8

(i) Fie din nou ecuația liniară $y'+P(x)y+Q(x)=0$, unde $P,Q:I\to\mathbb{R}$ funcții continue, iar $I\subset\mathbb{R}$ interval, căruia i se ataşează ecuația omogenă $y'+P(x)y=0$. Se consideră pentru φ o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$, operatorul definit astfel $(L\varphi)(x)=\varphi'(x)+P(x)\varphi(x)$; evident $L\varphi$ este o funcție definită pe *I*. De asemenea, se alege ca domeniu de definiție pentru *L* clasa funcțiilor derivabile, cu derivata continuă; deci $L:C^1(I)\to C(I)$. Este imediat că dacă $\varphi_1,\varphi_2\in C^1(I)$ şi $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, atunci $L(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1 L\varphi_1+\alpha_2 L\varphi_2$, ceea ce înseamnă, conform termenilor din algebră, că $L:C^1(I)\to C(I)$ este un operator liniar. Cu notațiile folosite în algebră, $\operatorname{Ker}L=\left\{\varphi\in C^1(I)\,\middle|\,L\varphi=0_I\right\}$; deci, nucleul operatorului *L* nu este nimic altceva decât spațiul soluțiilor ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul *I*, care se cunoaşte a fi un spațiu vectorial liniar (peste corpul numerelor reale).

(ii) Ceea ce a interesat până acum a fost forma soluțiilor, exprimarea şi găsirea lor, apelând la funcția *P*. În ***propoziția 1.5.3*** s-a obținut că: $\varphi(x)=C\,\mathrm{e}^{-F(x)}$

unde F este o primitivă pentru P. Dacă se reprezintă primitiva lui P conform formulei Leibniz-Newton, $F(x)=\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t$ (unde $x_0 \in I$ este un punct fixat), atunci $\varphi(x)=C\cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}$ sau $\varphi(x)=\varphi(x_0)\cdot \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}$.

Prin urmare, $\operatorname{Ker} L=\left\{\varphi\in C^1(I)\,\middle|\,\varphi(x)=C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}\right\}$.

Se mai observă că, în conformitate cu ***observația 1.5.5*** punctul (ii), orice soluție a ecuației $y'+P(x)y=0$ este o soluție globală, definită deci pe întreg domeniul de definiție al funcției P.

(iii) În contextul prezentat mai înainte spațiul vectorial $\operatorname{Ker} L$ are dimensiune 1. Într-adevăr, dacă $\varphi\in\operatorname{Ker} L$, invocând din nou ***propoziția 1.5.3*** folosită aici la punctul (ii), se obține că $\varphi(x)=\varphi(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}$. Se observă că dacă $\varphi(x_0)\neq 0$, atunci $\varphi(x)\neq 0$, $\forall\, x\in I$. Fie acum o altă funcție $\psi\in\operatorname{Ker} L$, astfel încât $\psi\neq 0_I$, atunci $\psi(x)=\psi(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}$ $(\forall\, x\in I)$ și $\psi(x)\neq 0$. Prin urmare, $\psi(x)=\dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\cdot\varphi(x)$ $\forall\, x\in I$, adică $\psi=\dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\cdot\varphi$, $\{\varphi\}$ este bază pentru $\operatorname{Ker} L$.

(iv) Fie acum ecuația neomogenă $y'+P(x)y+Q(x)=0$ și φ_0 o soluție particulară a acestei ecuații se efectuează schimbarea de funcție $y=\varphi_0+z$, dorindu-se determinarea funcției necunoscute z, astfel încât să se poată scrie forma generală a soluției y. Revenind în ecuație, se obține $\varphi_0'+z'+P(x)\varphi_0+P(x)z+Q(x)=0_I$; deci, $z'+P(x)z=0_I$ (pentru că $\varphi_0'+P(x)\varphi_0+Q(x)=0$), deci z este o soluție a ecuației omogene. Prin urmare, soluția generală a ecuației $y'+P(x)y+Q(x)=0$ are forma $\varphi(x)=C\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}+\varphi_0(x)$, unde φ_0 este o soluție particulară a ecuației neomogene.

(v) Revenind la metoda variației constantelor, se obține că $\varphi_0(x)=C(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}$, unde $C:I\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă care verifică ecuația $C'(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}=-Q(x)\Leftrightarrow C'(x)=-Q(x)\mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}$.

Verificarea se poate face imediat:

$$\varphi_0'(x)=C'(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}-C(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}\cdot P(x)=$$

$$=-Q(x)\mathrm{e}^{\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}-C(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}\cdot P(x)=$$

$$=-Q(x)-P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Atunci:

$$\varphi_0'(x)+P(x)\varphi_0(x)+Q(x)=$$

$$=-Q(x)-P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}+C(x)\cdot P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x}P(t)\,\mathrm{d}t}+Q(x)=0$$

$(\forall\, x\in I)$. Deci, se regăseşte formula din ***observația 1.5.7*** punctul (i) **2)**.

Observația 1.5.9

(i) Din formula de rezolvare a ecuației $y'+P(x)y+Q(x)=0$ a rezultat că soluția generală a ecuației are forma:

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[K-\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right];$$

deci este de forma $\varphi(x)=u(x)+K\,v(x)$, adică o familie de curbe care depinde liniar de constanta *K*.

Reciproc, orice familie de curbe care depinde liniar de o constantă şi este de clasă C^1 verifică o ecuație diferențială liniară de ordinul *I*: fie $\varphi(x)=u(x)+K\,v(x)\Rightarrow\varphi'(x)=u'(x)+K\,v'(x)$ şi, eliminând constanta dintre cele două egalități, se obține: $\dfrac{\varphi(x)-u(x)}{v(x)}=\dfrac{\varphi'(x)-u'(x)}{v'(x)}$, $\forall\, x\in I$, adică φ verifică ecuația $y'-\dfrac{v'(x)}{v(x)}y+\dfrac{v'(x)u(x)-v(x)u'(x)}{v(x)}=0$.

(ii) În general, determinarea soluției generale necesită calculul a două primitive, dar cunoaşterea unei soluții pentru ecuația dată reduce găsirea soluției generale la calculul unei singure primitive (aşa cum s-a justificat în observația precedentă punctul (iv)).

Dacă se cunosc două soluții particulare diferite pentru ecuația $y'+P(x)y+Q(x)=0$ notate prin φ_1 şi φ_2, atunci din punctul (i), $\varphi_1(x)=u(x)+K_1\, v(x)$ şi $\varphi_2(x)=u(x)+K_2\, v(x)$, iar forma generală este $\varphi(x)=u(x)+K\, v(x)$; de aici avem că: $\dfrac{\varphi(x)-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}=\dfrac{K-K_2}{K_1-K_2}=A$ (constant); prin urmare, $\varphi(x)=\varphi_2(x)+A\big(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\big)\ \forall\, x\in I\ \ (A\in\mathbb{R})$ şi deci determinarea soluției generale nu mai necesită determinarea nici unei primitive.

Definiția 1.5.5 (Ecuația Bernoulli)

O ecuație de forma $y'+P(x)y+Q(x)y^{\alpha}=0$, unde $P,Q:I\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul $I\subset\mathbb{R}$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0,1$ se numeşte *ecuația Bernoulli*.

Dacă $\alpha=0$, ecuația devine o ecuație diferențială liniară de ordinul I neomogenă, iar pentru $\alpha=1$ devine o ecuație diferențială liniară de ordinul I omogenă şi deci condiția $\alpha\neq 0,1$ nu este o restricție, ci numai o condiție pentru ca ecuația astfel definită să nu fie de un tip cunoscut până acum. Alături de ecuația $y'+P(x)y+Q(x)y^{\alpha}=0$ (B) se consideră şi ecuația liniară $y'+(1-\alpha)P(x)y+(1-\alpha)Q(x)=0$ (B′), pentru că rezolvarea ecuației (B) se reduce la rezolvarea ecuației (B′).

Propoziția 1.5.5

Fie $\varphi:I\to\mathbb{R}_+^*$ şi $u:I\to\mathbb{R}_+^*$ $u(x)=\varphi^{1-\alpha}(x)$. Atunci φ este soluție a ecuației (B) $\Leftrightarrow$ u este soluție pentru ecuația (B′).

Demonstrație

„$\Rightarrow$” Dacă $u(x)=\varphi^{1-\alpha}(x)$, atunci $u'(x)=(1-\alpha)\varphi'(x)\varphi^{-\alpha}(x)$ şi deci înlocuind în (B′), se obține:

$$(1-\alpha)\varphi'(x)\varphi^{-\alpha}(x)+(1-\alpha)P(x)\varphi^{1-\alpha}(x)+(1-\alpha)Q(x)=$$
$$=\varphi^{-\alpha}(x)(1-\alpha)\Big[\varphi'(x)+\varphi(x)P(x)+Q(x)\varphi^{\alpha}(x)\Big]=0$$

„$\Leftarrow$” Fie acum $u(x)=\varphi^{1-\alpha}(x)$ soluţia ecuaţiei (B′), atunci $\varphi(x)=u^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$ şi deci $\varphi'(x)=\frac{1}{1-\alpha}u'(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)$; înlocuind în (B), rezultă că:

$$\frac{1}{1-\alpha}u'(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)+P(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)+Q(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)=$$

$$=\frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(x)}{1-\alpha}\left[u'(x)+(1-\alpha)P(x)u(x)+(1-\alpha)Q(x)\right]=0$$

(conform cu B′), deci φ verifică ecuaţia (B′).

Observaţia 1.5.10

Pentru rezolvarea ecuaţiei Bernoulli se procedează în maniera următoare:

1) se efectuează substituţia (schimbarea de funcţie) $y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ căutând determinarea funcţiilor (strict pozitive) z în locul funcţiei y, atunci $y'=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'$; înlocuind în ecuaţia (B), se găseşte că z trebuie să verifice ecuaţia
$$\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'+P(x)z^{\frac{1}{1-\alpha}}+Q(x)z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}\left[z'+(1-\alpha)P(x)z+(1-\alpha)Q(x)\right]=0\Leftrightarrow.$$
$$\Leftrightarrow z'+(1-\alpha)P(x)z+(1-\alpha)Q(x)=0;$$

2) se rezolvă ecuaţia liniară $z'+(1-\alpha)P(x)z+(1-\alpha)Q(x)=0$ pentru determinarea lui z. Cu z astfel determinat se găseşte că $y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Exemplul 1.5.4

Fie ecuaţia $y'-2xy-x^3\sqrt{y}=0$. Atunci $\alpha=\frac{1}{2}$.

1. Deci $y=z^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=z^2$ şi $2zz'-2xz^2-x^3z=0\Leftrightarrow z'-xz-\frac{x^3}{2}=0$.

2. Se rezolvă ecuația liniară obținută $\int P(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}$ şi

$$\int Q(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int\left(-\frac{x^3}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}};$$

prin urmare, $u(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2+2}{2}$; atunci soluția generală a ecuației Bernoulli este: $\varphi(x) = u^2(x) = \left(C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2+2}{2}\right)^2$.

Definiția 1.5.6 (Ecuația Riccati)

Fie $P,Q,R : I \to \mathbb{R}$ funcții continue definite pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Atunci ecuația (R) $\quad y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$ se numeşte *ecuație Riccati*.

O astfel de ecuație nu poate fi rezolvată prin calcul de primitive (J. Liouville a demonstrat în 1841 că ecuația $y' - ay^2 - cx^{\alpha} = 0$ $(a,c,\alpha \in \mathbb{R}$ şi $a \cdot c \neq 0)$ poate fi integrată prin cuadraturi dacă şi numai dacă $\alpha = -2$ sau există $k \in \mathbb{N}$ cu $\alpha = \frac{4k}{-2k+1}$, deci în restul cazurilor ea nu poate fi integrată prin cuadraturi). Totuşi, în situații particulare ea poate fi rezolvată după cum va rezulta din propoziția următoare.

Propoziția 1.5.6

Fie $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$ o soluție particulară pentru ecuația (*R*), $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq \varphi_1(x)$, $\forall\, x \in I$ şi $u(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \varphi_1(x)}$, $\forall\, x \in I$.

Atunci φ este soluție generală a ecuației $(R) \Leftrightarrow u$ este soluția generală a ecuației $y' - \left(2\varphi_1(x)P(x) + Q(x)\right)y - P(x) = 0$ (R').

Demonstrație

„$\Rightarrow$” Fie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ soluție pentru ecuația (*R*) şi $u(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \varphi_1(x)}$, atunci $u'(x) = -\frac{\varphi'(x) - \varphi_1'(x)}{\left(\varphi(x) - \varphi_1(x)\right)^2}$ şi, înlocuind în (R'), se obține:

$$-\frac{\varphi'(x)-\varphi_1'(x)}{\left(\varphi(x)-\varphi_1(x)\right)^2}-\left(2\varphi_1(x)P(x)+Q(x)\right)\frac{1}{\varphi(x)-\varphi_1(x)}-P(x)=$$

$$=-\left[\varphi'(x)-\varphi_1'(x)+\left(2\varphi_1(x)P(x)+Q(x)\right)\left(\varphi(x)-\varphi_1(x)\right)+P(x)\left(\varphi(x)-\varphi_1(x)\right)^2\right]\cdot\frac{1}{\left(\varphi(x)-\varphi_1(x)\right)^2}=$$

$$=-\left[\varphi'(x)+P(x)\varphi^2(x)+Q(x)\varphi(x)-\varphi_1'(x)-P(x)\varphi_1^2(x)-Q(x)\varphi_1(x)\right]\cdot\frac{1}{\left(\varphi(x)-\varphi_1(x)\right)^2}=$$

$$=-\left(-R(x)+R(x)\right)\cdot\frac{1}{\left(\varphi(x)-\varphi_1(x)\right)^2}=0$$

(conform ipotezei că φ şi φ_1 verifică ecuaţia (R)).

„$\Leftarrow$” Reciproc, fie o soluţie pentru ecuaţia (R'); atunci $\varphi(x)=\varphi_1(x)+\frac{1}{u(x)}$ şi $\varphi'(x)=\varphi_1'(x)-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$; înlocuind în ecuaţia ($R$) se obţine:

$$\varphi_1'(x)-\frac{u'(x)}{u^2(x)}+P(x)\left[\varphi_1(x)+\frac{1}{u(x)}\right]^2+Q(x)\left[\varphi_1(x)+\frac{1}{u(x)}\right]+R(x)=$$

$$\left(\varphi_1'(x)+P(x)\varphi_1^2(x)+Q(x)\varphi_1(x)+R(x)\right)-\frac{u'(x)}{u^2(x)}+\frac{2P(x)\varphi_1(x)}{u(x)}+\frac{P(x)}{u^2(x)}+\frac{Q(x)}{u(x)}=$$

$$=-\frac{1}{u^2(x)}\left[u'(x)-\left(2P(x)\varphi_1(x)+Q(x)\right)u(x)-P(x)\right]=0$$

conform cu ipotezele asupra lui u şi φ_1.

Observaţia 1.5.11

În situaţia în care se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei (R), aceasta se poate rezolva recurgând la următorul algoritm:

1) dacă φ_1 este o soluţie particulară pentru ecuaţia (R), se efectuează schimbarea de funcţie $y=\varphi_1+\frac{1}{z}$, urmărind găsirea funcţiei z; cum $y'=\varphi_1'-\frac{z'}{z^2}$, înlocuind în ($R$), se găseşte că z verifică ecuaţia

$$z'-\left(2\varphi_1(x)P(x)+Q(x)\right)z-P(x)=0 \quad (R');$$

2) se rezolvă ecuaţia liniară (R') şi cu soluţia determinată se revine în y şi se obţine soluţia generală.

Exemplul 1.5.5

(i) Fie ecuația $y' + 2xy^2 - y - \frac{x-1}{x^2} = 0$, știind că $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o soluție particulară.

1. Efectuând schimbarea de funcție $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, se obține înlocuind în ecuația dată că *z* verifică ecuația $z' - 3z - 2x = 0$ care este ecuație liniară.

2. Soluția acesteia este $u(x) = K\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{9}(3x+1)$ și deci:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{K\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{9}(3x+1)}.$$

(ii) Fie ecuația $y' + ay^2 + by + c = 0$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$ și $b^2 - 4ac \geq 0$. Atunci dacă x_1 este o rădăcină a ecuației $at^2 + bt + c = 0$, se verifică imediat că funcția $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\varphi_1(x) = x_1$ verifică ecuația dată. Deci, este vorba de o ecuație Riccati căreia îi cunoaștem o soluție particulară și, prin urmare, substituția $y = x_1 + \frac{1}{z}$, va duce, conform celor de mai sus, la rezolvarea ei completă.

(iii) Fie ecuația $y' + ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2} = 0$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$ și $(b-1)^2 - 4ac \geq 0$. Atunci ea admite o soluție particulară de forma $\varphi_1(x) = \frac{K_1}{x}$; unde K_1 este o soluție pentru ecuația $ak^2 + (b-1)k + c = 0$. Din nou, cunoașterea unei soluții particulare va permite rezolvarea ei completă prin algoritmul indicat mai sus.

1.6 Alte exemple de ecuații diferențiale de ordinul I integrabile prin cuadraturi

Observația 1.6.1

Ecuațiile prezentate în continuare permit și ele, așa cum este anunțat în titlu, integrarea lor prin cuadraturi, adică permit găsirea soluțiilor prin calcul de primitive. Primul tip studiat – ecuațiile diferențiale exacte – necesită recapitularea câtorva noțiuni și rezultate legate de formele diferențiale de grad 1.

(i) S-a notat prin $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ - mulțimea aplicațiilor liniare definite pe $\mathbb{R}^2$ cu valori reale. Este cunoscut (și ușor de demonstrat) că $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ca aplicație liniară, este continuă apelând, spre exemplu, la scrierea $L(x_1,x_2)=L(x_1(1,0)+x_2(0,1))=x_1Le_1+x_2Le_2$ (unde $e_1=(1,0)$ şi $e_2=(0,1)$ formează baza canonică în $\mathbb{R}^2$) şi la inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$\left|L(x_1,x_2)\right|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{(Le_1)^2+(Le_2)^2}=\left\|(x_1,x_2)\right\|\sqrt{(Le_1)^2+(Le_2)^2}\,.$$

Se mai observă că din scrierea de mai sus a cunoaşte funcția L revine la cunoaşterea vectorului (Le_1,Le_2), adică valorile lui L pe baza canonică $\{e_1,e_2\}$, pentru că: $L(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}Le_1\\Le_2\end{pmatrix}$ şi deci $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ este un $\mathbb{R}$ - spațiu vectorial izomorf cu $\mathbb{R}^2$.

(ii) Dacă D este un deschis, se numeşte formă diferențială de gradul I o funcție $\omega:D\to L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Atunci a cunoaşte forma ω înseamnă a avea definite două funcții $P,Q:D\to\mathbb{R}$, deci: $\omega(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$.

Cum o bază pentru spațiul $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ este dată de proiecțiile p_1,p_2 $(p_1(x,y)=x$ şi $p_2(x,y)=y)$, atunci $\omega(x,y)=P(x,y)p_1+Q(x,y)p_2$, iar din notațiile clasice ($p_1=\mathrm{d}x$ şi $p_2=\mathrm{d}y$) se obține scrierea canonică $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

(iii) Exemplul clasic de forme diferențiale de grad I este diferențiala unei funcții (evident diferențiabilă): dacă $f:D\to\mathbb{R}$ ($D\subset\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă) este diferențiabilă, atunci $\mathrm{d}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$. Se disting aceste forme prin denumirea de forme diferențiale de gradul I exacte: deci $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ se numeşte formă diferențială de gradul I exactă pe deschisul D dacă există $f:D\to\mathbb{R}$ funcție diferențiabilă, astfel încât $\forall\,(x,y)\in D,\ P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ şi $Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

(iv) Se observă că dacă $f:D\to\mathbb{R}$ are derivate parțiale de ordinul 2 continue, atunci din teorema lui Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y),\ \forall(x,y)\in D$. Se disting şi aceste forme diferențiale de grad I prin a le spune forme diferențiale de grad I închise, adică: forma $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ (unde $P,Q:D\to\mathbb{R}$ admit derivate parțiale) se numeşte forma diferențială de grad I închisă pe D, dacă $\forall\,(x,y)\in D$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$.

Din cele observate mai sus rezultă că o formă diferențială exactă (definită cu P şi Q admițând derivate parțiale de ordinul I continue) este închisă pentru că din exactitate se obține că $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$, $\forall(x,y)\in D$ şi deci $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, adică ω este formă închisă.

(v) Cum formele diferențiale de grad I închise pe D sunt mai uşor de recunoscut (prin calculul a două derivate parțiale), se pune problema reciprocă: dacă ω este închisă, este ea exactă? Teorema clasică, cunoscută şi sub numele de lema lui Poincaré, afirmă că acest rezultat este adevărat dacă deschisul D este stelat în raport cu un punct $(x_0,y_0)\in D$ (adică dacă $\forall(x,y)\in D$ şi $\forall t\in[0,1]$ $t(x_0,y_0)+(1-t)(x,y)\in D$). Spre exemplu, dacă D este convex, atunci el este stelat în raport cu oricare din punctele sale şi acest rezultat (valabil în $\mathbb{R}^n$ ($\forall n\geq 2$)) şi care va fi reluat în parte mai târziu este valabil pentru $D=(a,b)\times(c,d)$.

Definiția 1.6.1 (Ecuații diferențiale exacte)

Fie $P,Q:D\to\mathbb{R}$ funcții continue pe deschisul $D\subset\mathbb{R}^2$, ecuația $y'Q(x,y)+P(x,y)=0$ se numeşte *ecuație diferențială exactă* dacă există $f:D\to\mathbb{R}$ diferențiabilă, astfel încât $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$, $\forall(x,y)\in D$.

Cu alte cuvinte, ecuația $y'Q(x,y)+P(x,y)=0$ este ecuație diferențială exactă dacă forma diferențială asociată $\omega(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ este exactă.

Prin această identificare, adesea simbolul prin care este marcată ecuația $y'Q(x,y)+P(x,y)=0$ este înlocuit prin simbolul $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

Observația 1.6.2

(i) A rezolva ecuația diferențială exactă revine la determinarea funcției derivabile $\varphi:I\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall x\in I$, $(x,\varphi(x))\in D$ şi $P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$.

(ii) Dacă $\forall(x,y)\in D$, $Q(x,y)\neq 0$, atunci ecuația dată se scrie sub forma „normală”: $y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

Propoziția 1.6.1

Fie ecuația diferențială exactă $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ pe deschisul *D*, $D \subset \mathbb{R}^2$, funcția $f : D \to \mathbb{R}$, diferențiabilă, astfel încât:

$$\mathrm{d}f(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{şi} \quad \varphi : I \to \mathbb{R}$$

derivabilă ($I \subset \mathbb{R}$, interval). Atunci: φ este soluție pentru ecuația dată $\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$, astfel încât $\forall\, x \in I$, $f(x,\varphi(x)) = C$.

Demonstrație

„$\Leftarrow$" Fie $f(x,\varphi(x)) = C$, $\forall\, x \in I$. Atunci $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x,\varphi(x)) = 0$, $\forall\, x \in I$, adică: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$; cum $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) = P(x,\varphi(x))$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = Q(x,\varphi(x))$, rezultă $P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$, deci φ este soluție pentru ecuația dată.

„$\Rightarrow$" Reciproc, dacă $P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$, $\forall\, x \in I$, din condiția de formă exactă se obține:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \ \forall\, x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,\varphi(x)) = 0, \ \forall\, x \in I.$$

Deci, funcția $u : I \to \mathbb{R}$, $u(x) = f(x,\varphi(x))$ are derivata nulă pe *I* şi deci $\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}$, astfel încât $\forall\, x \in I$, $u(x) = C \Leftrightarrow \forall\, x \in I$, $f(x,\varphi(x)) = C$.

Propoziția 1.6.2

Fie ecuația diferențială $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ cu $P,Q : D = (a,b)\times(c,d) \to \mathbb{R}$ funcții de clasă C^2. Atunci, ecuația dată este exactă pe $D \Leftrightarrow$ forma diferențială $\omega(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ este închisă.

Demonstrație

„$\Rightarrow$” Dacă ecuația este exactă, atunci conform definiției există $f: D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2, astfel încât $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in D$. Atunci este imediat că $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ (vezi ***observația 1.6.1*** pct. (iv)).

„$\Leftarrow$” Ştiind acum că forma ω este închisă, pentru a demonstra că ecuația este exactă, trebuie găsită funcția $f: D \to \mathbb{R}$ a cărei diferențială să fie ω. Fixând $(x_0, y_0) \in D$, fie (x,y) arbitrar în D şi definită prin $f(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,\mathrm{d}t$. Cum *P*, *Q* sunt definite pe dreptunghiul $D = (a,b) \times (c,d)$, atunci pentru *t* între x_0 şi *x* rezultă că: $(t, y_0) \in D$, iar pentru $t \in (y_0, y)$ şi $x \in (a,b)$ se obține $(x,t) \in D$; prin urmare, funcția *f* este bine definită. Aplicând acum teorema de derivabilitate a integralei în raport cu parametrul, rezultă că: $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Din ipoteză $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, deci $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,t)\,\mathrm{d}t$, iar din formula Leibniz-Newton se obține $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y)$.

Deci, $\mathrm{d}f(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, adică ecuația este exactă. În plus, $f(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Observația 1.6.3

Pentru „rezolvarea” unei astfel de ecuații se procedează deci în maniera următoare: dacă ecuația $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ este definită pe un dreptunghi $D = (a,b) \times (c,d)$, atunci:

1) se verifică dacă ecuația este exactă; dacă nu, algoritmul s-a oprit;

2) în cazul că răspunsul la prima întrebare este afirmativ, fixând $(x_0, y_0) \in D$, se defineşte $f(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,\mathrm{d}t$;

3) din ***propoziția 1.6.1*** egalitatea $f(x,\varphi(x))=C$ defineşte soluția φ a ecuației date, deci soluția este definită implicit de ecuația $f(x,y)=C$.

Exemplul 1.6.1

Fie ecuația $(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$; $P(x,y)=x+y+1$ şi $Q(x,y)=x-y^2+3$ cu $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

1. Cum $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=1=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, ecuația este exactă.

Fie $(x_0,y_0)=(0,0)$.

2. Atunci $f(x,y)=\int\limits_0^x(t+1)\mathrm{d}t+\int\limits_0^y(x-t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y$.

3. Soluția este definită de: $\frac{x^2}{2}+x+xy-\frac{y^3}{3}+3y=C$.

Observația 1.6.4

Ecuațiile exacte de tipul $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ sunt „mai puține” decât ecuațiile generale de această formă. Se pune problema dacă schimbând ecuația, adică modificând-o adecvat, se poate obține o ecuație de tipul precedent, care, chiar dacă implicit, permite obținerea unor informații despre soluție.

Definiția 1.6.2

Fie ecuația $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ cu $P,Q:D\to\mathbb{R}$ ($D\subset\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă). O funcție $\mu:D\to\mathbb{R}^*$ se numeşte *factor integrant* pentru ecuația dată dacă $\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ este o ecuație diferențială exactă.

Observația 1.6.5

Dacă $D\subset\mathbb{R}^2$ este dreptunghi şi $\mu,P,Q:D\to\mathbb{R}$ sunt de clasă C^1, atunci conform ***propoziției 1.6.2*** μ este un factor integrant dacă:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)(x,y)\Leftrightarrow\frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y)P(x,y)+\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y)=$$

$$=\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y)+\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y)\Leftrightarrow\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y)-$$

$$-\frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]=0.$$

Deci, μ verifică această relație, care se numeşte *ecuația factorului integrant* şi care este o ecuație cu derivate parțiale. Dacă se poate rezolva o astfel de ecuație, atunci şi integrarea ecuației date este imediată.

În acest moment găsirea unui factor integrant se poate face numai în cazuri particulare când avem informații suplimentare despre el de genul celor care vor apărea în exemplul următor.

Exemplul 1.6.2

(i) Să se integreze ecuația $\left(xy^2 - y^3\right)\mathrm{d}x + \left(1 - xy^2\right)\mathrm{d}y = 0$, ştiind că admite un factor integrant funcție numai de y.

1. Deci, $\mu = \mu(y)$ şi scriind ecuația factorului integrant $\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = 0\right)$, obținem: $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}\left(xy^2 - y^3\right) + \mu\left(2xy - y^3\right) + \mu y^2 = 0$, de unde obținem: $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = -2\dfrac{\mu}{y}$, care are ca soluție particulară $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$ (ecuația factorului integrant este o ecuație cu variabile separabile).

2. Revenind în ecuația inițială şi amplificând-o cu factorul integrant, se obține ecuația diferențială exactă: $(x - y)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{1}{y^2} - x\right)\mathrm{d}y = 0$, care oferă soluția definită implicit prin

$$\int_0^x (t-1)\mathrm{d}t + \int_1^y \left(\frac{1}{t^2} - x\right)\mathrm{d}t = C \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - xy = C$$

pe orice dreptunghi D care nu întâlneşte dreapta $y = 0$. (Am fixat $(x_0, y_0) = (0,1)$).

(ii) Să se integreze ecuația $(x - y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y = 0$, ştiind că ecuația admite un factor integrant de forma $\mu(x, y) = u\left(x^2 + y^2\right)$.

1. Scriind ecuația factorului integrant şi ținând cont că $\dfrac{\partial\mu}{\partial x}(x, y) = 2xu'\left(x^2 + y^2\right)$ şi $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}(x, y) = 2yu'\left(x^2 + y^2\right)$, se obține:

$$(x + y)2xu'\left(x^2 + y^2\right) + (x - y)2yu'\left(x^2 + y^2\right) + u\left(x^2 + y^2\right)[1 + 1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + y^2\right)u'\left(x^2 + y^2\right) + u\left(x^2 + y^2\right) = 0.$$

Notând $z = x^2 + y^2$, se obține ecuația diferențială cu variabile separabile $zu'(z) + u = 0$, care are soluția generală $u(z) = \frac{C}{z}$, din care se alege factorul integrant $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ $(C = 1)$.

2. Amplificând ecuația dată cu funcția μ, se găsește: $\frac{x - y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y = 0$ căreia, aplicându-i expresia funcției f dată de ***propoziția 1.6.2*** pe un dreptunghi deschis *D*, ce nu conține originea, conduce la: $\sqrt{x^2 + y^2} = C\mathrm{e}^{-\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$.

Definiția 1.6.3

Dacă $F : G \to \mathbb{R}$ $\left(G \subset \mathbb{R}^3\right)$, se numește *ecuație diferențială implicită* de ordinul *I* simbolul matematic $F(x, y, y') = 0$ (D.I.)

Propoziția 1.6.3

Fie ecuația $F(x, y, y') = 0$, unde $F : G \to \mathbb{R}$ $\left(G \subset \mathbb{R}^3\right)$ și fie $f : D \to \mathbb{R}$ $\left(D \subset \mathbb{R}^2\right)$, astfel încât $\forall (x, y) \in D$, $(x, y, f(x, y)) \in G$ și $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Atunci:

(i) orice soluție a ecuației $y' = f(x, y)$ este soluție a ecuației (D.I.);

(ii) dacă f este unică cu proprietatea din ipoteză, se obține că orice soluție $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ interval) a ecuației (D.I.) cu proprietatea că: $(x, \varphi(x)) \in D$, $\forall x \in I$, este soluție pentru ecuația $y' = f(x, y)$.

Demonstrație

(i) Dacă $\varphi : I \to \mathbb{R}$ este soluție pentru $y' = f(x, y)$, atunci $\forall x \in I$, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Așadar, cum $F(x, y, f(x, y)) = 0$ $\forall (x, y) \in D$, rezultă că: $F(x, \varphi(x), f(x, \varphi(x))) = 0 \Leftrightarrow F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.

(ii) Fie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ astfel încât, $\forall x \in I$,

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 = F(x, y, f(x, y)).$$

Cum $(x, \varphi(x)) \in D$, $\forall x \in I$, atunci $F(x, \varphi(x), f(x, \varphi(x))) = 0$ și cum, prin ipoteză, *f* este unica funcție cu această proprietate, se găsește că $\forall x \in I$, $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Observația 1.6.6

Din propoziția precedentă rezultă că determinarea funcției f cu proprietățile cerute permite reducerea rezolvării ecuației $F(x,y,y')=0$ la rezolvarea ecuației $y'=f(x,y)$. Existența funcției f este asigurată de teorema funcțiilor implicite, dar aceasta, după cum se știe, nu permite un algoritm de găsire a unei expresii analitice pentru f (fie şi local). Deci, această metodă nu este lucrativă. O posibilitate de a găsi metode de integrare pentru astfel de ecuații o deschide „metoda parametrizării" care va fi prezentată în continuare.

Definiția 1.6.4

Fie $f:G\to\mathbb{R}$ $\left(G\subset\mathbb{R}^3\right)$ funcție continuă şi fie $\alpha,\beta,\gamma:D\to G$ (unde $D\subset\mathbb{R}^2$). Tripleta (α,β,γ) se numeşte *parametrizare* a suprafeței $S_F=\left\{(x,y,z)\in G\,\middle|\,F(x,y,z)=0\right\}$ (suprafață numită şi „de nivel zero") dacă şi numai dacă $\forall\,(u,v)\in D$ este îndeplinită relația $F\left(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v)\right)=0$.

Într-o formulare mai puțin precisă se spune că simbolurile $x=\alpha(u,v)$ $y=\beta(u,v)$ $z=\gamma(u,v)$ reprezintă ecuațiile parametrice ale suprafeței S_F.

Exemplul 1.6.3

(i) Pentru ecuația de tip Lagrange $y=xf(y')+g(y')$, unde $f,g:I\to\mathbb{R}$ ($I\subset\mathbb{R}$ interval) sunt funcții de clasă C^1, funcția $F(x,y,z)=y-xf(z)-g(z)$ şi suprafața S_F admite parametrizarea $\begin{cases}x=v\\ z=u\\ y=vf(u)+g(u)\end{cases}$, unde $(u,v)\in I\times\mathbb{R}$.

(ii) Pentru ecuația de *tip Clairaut*: $y=xy'+g(y')$, unde $g:I\to\mathbb{R}$ ($I\subset\mathbb{R}$ interval) este funcție de clasă C^1 (se observă că ecuația Clairaut este o ecuație de tip Lagrange cu $f(y')=y'$, adică f este funcția identitate) obținem, analog ca mai sus, parametrizarea naturală

$$\begin{cases}x=v\\ z=u\\ y=vu+g(u)\end{cases},\ \text{unde } (u,v)\in I\times\mathbb{R}.$$

Observația 1.6.7 (Algoritm privind folosirea metodei parametrizării pentru rezolvarea ecuației implicite $F(x,y,y')=0$)

(i) După cum este anunțat şi în titlu se pune în evidență un algoritm care este posibil să ducă la integrarea ecuației implicite date.

1. Se determină o parametrizare de clasă C^1 (α,β,γ) a suprafeței $S_F=\{(x,y,z)\in G \mid F(x,y,z)=0\}$.

2. Se asociază parametrizări (α,β,γ) ecuația „explicită”

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,v)-\frac{\partial\beta}{\partial u}(u,v)}{\frac{\partial\beta}{\partial v}(u,v)-\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)} \text{ (E.P.) dacă } \frac{\partial\beta}{\partial v}(u,v)-\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)\neq 0$$

sau ecuația inversată: $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{\frac{\partial\beta}{\partial v}(u,v)-\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)}{\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,v)-\frac{\partial\beta}{\partial u}(u,v)} \text{ (E.P}'\text{.),}$$ dacă $\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,v)-\frac{\partial\beta}{\partial u}(u,v)\neq 0$.

Pentru a obține prima ecuație, spre exemplu, se poate proceda în felul următor: din $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, scriind formal $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z$ (deoarece în expresia lui *F*, *z* înlocuieşte pe y'), se obține $\mathrm{d}y=z\,\mathrm{d}x$. Înlocuind aici pe *x*, *y*, *z* cu expresiile date de parametrizările respective, rezultă $\mathrm{d}\beta(u,v)=\gamma(u,v)\mathrm{d}x(u,v)$ şi deci: $\frac{\partial\beta}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\beta}{\partial v}\mathrm{d}v=\gamma\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\mathrm{d}v\right]$ (din definiția diferențialei unei funcții). Din ultima egalitate se află $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ şi se obține ecuația de mai sus (prima).

3. Dacă ecuația (E.P.) poate fi integrată, fie $v=\varphi(u,C)$ $(C\in\mathbb{R})$ soluția ei generală şi eventuale soluții singulare $v=\varphi_i(u)$ $(i=1,2,...)$.

4. Revenind cu aceste soluții în ecuațiile parametrice, se găseşte: (S.G.) $\begin{cases}x=\alpha(u,\varphi(u,C))\\ y=\beta(u,\varphi(u,C))\end{cases}$ $(C\in\mathbb{R})$, care dau soluția generală a ecuației sub formă parametrică şi, respectiv, $\begin{cases}x=\alpha(u,\varphi_i(u,C))\\ y=\beta(u,\varphi_i(u,C))\end{cases}$ $(i=1,2,...)$, care oferă soluțiile singulare sub formă parametrică.

5. Uneori se poate continua, fie eliminând parametrul u între relațiile ce dau (S.G.) şi se obține o relație nouă, $G(x,y,C)=0$, care constituie soluția generală sub formă implicită, fie se inversează funcția $\left(u \mapsto \alpha\left(u,\varphi(u,C)\right)\right) =: \tau_C(u)$ $(C\in\mathbb{R})$ şi înlocuind $u=\tau_C^{-1}(x)$ în expresia lui y rezultă: $y(x)=\beta\left(\tau_C^{-1}(x),\varphi\left(\tau_C^{-1}(x)\right),C\right)$, $(C\in\mathbb{R})$, care reprezintă soluția generală sub forma, după cum se vede, explicită.

(ii) Este de subliniat că algoritmul prezentat a necesitat două ipoteze: prima, existența parametrizării suprafeței S_F care obligă la folosirea intensă a cunoştințelor de geometrie diferențială; a doua, că una din ecuațiile (E.P.) sau (E.P′.) poate fi integrată. Dacă această a doua ipoteză nu este verificată algoritmul trebuie oprit aici şi fie se caută o altă parametrizare a suprafeței, fie o altă metodă de integrare a ecuației date.

Justificarea teoretică a algoritmului propus este dată de următoarea propoziție.

Propoziția 1.6.4

Fie ecuația $F(x,y,y')=0$ ($F:G\to\mathbb{R}$ funcție continuă pe $G\subset\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă), $(\alpha,\beta,\gamma):D\to\mathbb{R}$ o parametrizare de clasă C^1 a suprafeței S_F (unde $D\subset\mathbb{R}^2$, deschis, conex), astfel încât, spre exemplu, $\frac{\partial\beta}{\partial v}(u,v)-\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)\neq 0$ şi $\frac{D(\alpha,\beta)}{D(u,v)}(u,v)\neq 0$, $\forall (u,v)\in D$ şi $\varphi:I\to\mathbb{R}$ o soluție a ecuației (E.P.) din ***observația 1.6.7*** (i) **2)**, ($I\subset\mathbb{R}$ interval). Atunci: (1) funcția $\tau:I\to\mathbb{R}$, $\tau(u)=\alpha(u,\varphi(u))$ este inversabilă şi (2) funcția $u:\tau(I):=J\to\mathbb{R}$ definită prin $u(x)=\beta\left(\tau^{-1}(x),\varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)$ este soluție pentru ecuația $F(x,y,y')=0$.

Demonstrație

1. $\tau:I\to\mathbb{R}$ este derivabilă şi

$$\tau'(u)=\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u,\varphi(u))+\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,\varphi(u))\cdot\varphi'(u)=\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\cdot\frac{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\frac{\partial\beta}{\partial u}}{\frac{\partial\beta}{\partial v}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}}=$$

$$=\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u}}{\frac{\partial\beta}{\partial v}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}}=\frac{\frac{D(\alpha,\beta)}{D(u,v)}(u,v)}{\frac{\partial\beta}{\partial v}(u,v)-\gamma(u,v)\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u,v)}\neq 0.$$

Atunci $\tau : I \to \tau(I) =: J$ (J interval) având derivata nenulă, admite inversă $\tau^{-1} : J \to I$ de clasă C^1.

2. Dacă

$$u(x) = \beta\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right) \Rightarrow u'(x) =$$

$$= \left[\frac{\partial\beta}{\partial u}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right) + \frac{\partial\beta}{\partial v}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)\varphi'\left(u^{-1}(x)\right)\right]\left(\tau^{-1}\right)'(x).$$

Din $\left(\tau \circ \tau^{-1}\right)(x) = 1,\ \forall\, x \in J \Rightarrow \tau'\left(\tau^{-1}(x)\right)\left(\tau^{-1}\right)'(x) = 1$ şi deci:

$$\left(\tau^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)\varphi'\left(\tau^{-1}(x)\right)}.$$

Atunci:

$$u'(x) = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial u}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right) + \frac{\partial\beta}{\partial v}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)\varphi'\left(u^{-1}(x)\right)}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)\varphi'\left(u^{-1}(x)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta}{\partial v}\dfrac{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{\partial\beta}{\partial u}}{\frac{\partial\beta}{\partial v} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}}}{\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\dfrac{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \frac{\partial\beta}{\partial u}}{\frac{\partial\beta}{\partial v} - \gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}}} = \frac{\gamma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)}{\frac{\partial\alpha}{\partial u}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial u}} = \gamma\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right).$$

Deci $\forall\, x \in J$, $u'(x) = \gamma\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)$. Prin urmare:

$$F\left(x, u(x), u'(x)\right) = F\left(\left(\tau\left(\tau^{-1}(x)\right)\right), \beta\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right), \gamma\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)\right) =$$

$$= F\left(\left(\alpha\left(\tau^{-1}(x)\right), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right), \beta\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right), \gamma\left(\tau^{-1}(x), \varphi\left(\tau^{-1}(x)\right)\right)\right) = 0,$$

$\forall\, x \in J$ (din alegerea funcţiilor α, β, γ).

Exemplul 1.6.4

(i) Revenim la ecuaţia Lagrange, $y = xf(y') + g(y')$, cu $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1 pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$.

Cu parametrizarea din ***exemplul 1.6.3*** se obține ecuația diferențială a parametrizării $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{vf'(u)+g'(v)}{u-f(u)}$ pe orice deschis în care $f(u)\neq u$. Adică $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{f'(u)}{f(u)-u}\cdot v+\frac{g'(u)}{f(u)-u}=0$, deci ecuația liniară în v care oferă soluția generală $v=\varphi(u,C)$ pe orice interval cuprins între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(u)-u=0$. Atunci, $y=\varphi(u,C)\cdot f(u)+g(u)$ şi $x=\varphi(u,C)$ reprezintă soluția generală scrisă sub formă parametrică.

În acest caz, dacă $u_0\in\mathbb{R}$ este o soluție a ecuației $f(u)-u=0$, atunci $\begin{cases}x=v\\ y=vu_0+g(u_0)\end{cases}$, adică $y=xu_0+g(u_0)$ reprezintă o soluție pentru ecuația dată, verificabil, fie apelând la ***propoziția 1.6.4*** (în care schimbăm rolul variabilelor u şi v), fie direct prin înlocuirea în ecuație: cum $y=u_0$, rezultă $y=xf(y')+g(y')\Leftrightarrow vu_0+g(u_0)=vf(u_0)+g(u_0)\Leftrightarrow f(u_0)=u_0$.

(ii) Să se integreze ecuația $y=xy'^2+y'^3$. Deci, $f(y')=y'^2$ şi $g(y')=y'^3$. În parametrizarea naturală introdusă se obține că:

$$\begin{cases}x=v\\ y=vu^2+u^3\\ z=u\end{cases}\text{ şi deci, pentru } f(u)\neq u\Leftrightarrow u\neq 0,1,$$

se găseşte ecuația: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+\frac{2u}{u^2-u}\cdot v+\frac{3u^2}{u^2-u}=0$, a cărei soluție generală este: $v(u)=\mathrm{e}^{-\int\frac{2\mathrm{d}u}{u-1}}\left[C-\int\frac{3u}{u-1}\mathrm{e}^{-\int\frac{2\mathrm{d}u}{u-1}}\mathrm{d}u\right]$. Aşadar, $v(u)=\frac{1}{(u-1)^2}\left[C-u^3+\frac{3}{2}u^2\right]$.

Prin urmare, soluția generală are forma: $\begin{cases}x(u)=\frac{1}{(u-1)^2}\left[C-u^3+\frac{3}{2}u^2\right];\\ y(u)=\frac{u^2}{(u-1)^2}\left[C-u^3+\frac{3}{2}u^2\right]+u^3,\end{cases}$

definită pe un interval ce nu conține pe 0 şi 1. Pentru $u_1=0$ rezultă soluția singulară $\begin{cases}x=v\\ y=0\end{cases}$, adică $y=0$ este soluție singulară. Pentru $u_0=1$, $\begin{cases}x=v\\ y=v+1\end{cases}$ adică $y=x+1$ este soluție singulară.

(iii) Pentru ecuația Lagrange se poate oferi un algoritm ceva mai simplu de rezolvare observând că în parametrizarea de mai înainte esențial a fost înlocuirea lui y' cu o variabilă nouă (notată acolo cu *u*), în raport cu care s-au efectuat restul calculelor. Se procedează în felul următor:

1. Fie $y'=p$, atunci $y=xf(p)+g(p)$ şi prin derivare în raport cu *x* se obține egalitatea: $y'=f(p)+xf'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+g'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Cum $y'=p\Rightarrow p-f(p)=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[xf'(p)+g'(p)\right]$.

2. Pentru un interval în care $f(p)\neq p$, scriind ecuația „inversată”, se găseşte $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}+\dfrac{f'(p)}{f(p)-p}x+\dfrac{g'(p)}{f(p)-p}=0$. Se recunoaşte aici ecuația din subpunctul (i) în care variabilele (u,v) s-au schimbat cu (p,x).

3. Soluția generală este atunci dată sub formă parametrică

$$\begin{cases} x(p)=\varphi(p,C) \\ y(p)=\varphi(p,C)\cdot f(p)+g(p) \end{cases}$$ (soluția generală a ecuației liniare de mai sus).

Dacă $p_k\in\mathbb{R}$ este soluție pentru $f(p)-p=0$, atunci: $y=p_kx+g(p_k)$ reprezintă soluția singulară.

(iv) Pentru ecuația Clairaut $y=xy'+g(y')$ cu $g:I\to\mathbb{R}$ funcție de clasă C^1 pe intervalul *I* se refac calculele de mai înainte.

Parametrizarea este $\begin{cases} x=\alpha(u,v)=v \\ y=\beta(u,v)=vu+g(u) \\ z=\gamma(u,v)=u \end{cases}$ (din nou variabila independentă este *u* care notează pe *z* sau y'). Cum $f(u)=u$, revenind la modalitatea de găsire a ecuației asociată parametrizării se obține: din $\mathrm{d}y=z\,\mathrm{d}x$, înlocuind cu parametrizările:

$$\mathrm{d}\beta=\gamma\,\mathrm{d}\alpha\Leftrightarrow\frac{\partial\beta}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\beta}{\partial v}\mathrm{d}v=\gamma(u,v)\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\alpha}{\partial v}\mathrm{d}v\right].$$

Deci, $\left(v+g'(u)\right)\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v=u\,\mathrm{d}v\Leftrightarrow\left(v+g'(u)\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=0$. Prin urmare, sau $u=C$ (constant) şi deci soluția generală este $y=Cx+g(C)$, sau $v=-g'(u)$ şi înlocuind în parametrizare, rezultă: $\begin{cases} x=-g'(u) \\ \mathrm{y}=-ug'(u)+g(u) \end{cases}$, care reprezintă soluția singulară a ecuației Clairaut.

(v) Să se integreze ecuația Clairaut $y = xy' + \frac{1}{y'}$, $g(y') = \frac{1}{y'}$.

În această situație parametrizarea dorită este $\begin{cases} x = \alpha(u,v) = v; \\ y = \beta(u,v) = vu + \frac{1}{v}; \\ z = \gamma(u,v) = u. \end{cases}$

Din aceasta se obține $\left(v - \frac{1}{u^2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = 0$, deci pentru $u = C$ se obține soluția generală: $y = Cx + \frac{1}{C}$, iar pentru $v = \frac{1}{u^2}$, soluția singulară $\begin{cases} x(u) = \frac{1}{u^2} \\ y(u) = \frac{2}{u} \end{cases}$ de unde, eliminând parametrul *u*, se obține $y^2 = 4x$.

(vi) Urmând paralelismul cu algoritmul oferit la ecuația Lagrange, se precizează şi aici etapele modului de rezolvare a ecuației Clairaut.

1. Se notează $y' = p$ şi se obține $y = xp + g(p)$ care, derivată în raport cu *x*, oferă $y' = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x + g'(p)\right) = 0$.

2. $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow p = C$ şi deci soluția generală a ecuației este: $y = Cx + g(C)$, iar pentru $\begin{cases} x = -g'(p) \\ \mathrm{y} = -pg'(p) + g(p) \end{cases}$ se obține soluția singulară.

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE NR. 2
ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE,DE ORDIN SUPERIOR

2.1 Introducere

Definiția 2.1.1

(i) O ecuație diferențială de forma:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x), \quad \textbf{(2.1.1)}$$

unde $y^{(k)} = \dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$, $k = \overline{0,n}$, liniară în $y, y', \dots. y^{(n)}$ şi în care funcțiile $a_k, f \in C^0(I)$, $k = \overline{0,n}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, $a_0 \neq 0$, iar $y \in C^n(I)$ este funcția necunoscută, se numeşte ecuație diferențială liniară de ordinul *n*.

(ii) Dacă $f(x) = 0$, $\forall\, x \in I$, ecuația se numeşte omogenă, iar dacă $\exists\, x \in I$, astfel încât $f(x) \neq 0$, ecuația se numeşte neomogenă. Funcțiile a_k se numesc coeficienții ecuației, iar funcția *f*, termenul liber. Punctele $x \in I$ în care $a_0(x) = 0$ se numesc puncte singulare ale ecuației.

Pentru a evita complicațiile impuse de prezența unor astfel de puncte, vom presupune $a_0(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$.

Definim operatorul diferențial liniar de ordinul *n*:

$$L_n : C^n(I) \to C^0(I),$$

prin: $L_n(y) = a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y$.

Cu ajutorul său ecuația (**2.1.1**) se scrie $L_n(y) = f(x)$.

Ecuația $L_n(y) = 0$ se mai numeşte ecuația omogenă asociată ecuației (**2.1.1**).

Propoziția 2.1.1

L_n este operator liniar.

Demonstrație

Fie $y_1, y_2 \in C^n(I)$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, arbitrare.

Atunci:

$$\begin{aligned} L_n(\alpha y_1+\beta y_2) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\cdot \frac{\mathrm{d}^{n-k}(\alpha y_1+\beta y_2)}{\mathrm{d}x^{n-k}} = \alpha\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-k}y_1}{\mathrm{d}x^{n-k}} + \\ &+\beta\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-k}y_2}{\mathrm{d}x^{n-k}} = \alpha\, L_n(y_1)+\beta\, L_n(y_2). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de ecuația diferențială liniară, de ordinul *n*, omogenă: $L_n(y)=0$. Problema care ne interesează în legătură cu ecuația omogenă este determinarea soluțiilor sale, adică a funcțiilor $y\in C^n(I)$, astfel încât $L_n(y)=0$, $\forall\, x\in I$.

Prin „integrarea” ecuației diferențiale $L_n(y)=0$ se înțelege determinarea tuturor soluțiilor sale.

Fie $\varphi\in C^n(I)$ o soluție arbitrară a ecuației omogene $L_n(y)=0 \Rightarrow L_n(\varphi)=0$. Deci, imaginea lui φ prin operatorul L_n este elementul nul din $C^0(I)$. Aşadar, mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale liniare şi omogene de ordinul *n* coincide cu nucleul operatorului L_n, deci cu $\operatorname{Ker} L_n$.

Cum L_n este operator liniar rezultă că $\operatorname{Ker} L_n$ este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial real $C^n(I)$. Deşi $C^n(I)$ este un spațiu vectorial infinit dimensional, subspațiul său, $\operatorname{Ker} L_n$, este întotdeauna finit dimensional. Se va arăta mai departe că $\dim(\operatorname{Ker} L_n)=n$ (unde *n* este ordinul ecuației omogene).

Să mai observăm că dacă $\varphi(x)+\mathrm{i}\,\psi(x)$ este o soluție complexă a ecuației $L_n(y)=0$ (cu coeficienții $a_k(x)$, $k=\overline{0,n}$, reali), atunci funcțiile reale φ şi ψ sunt, de asemenea, soluții ale ecuației $L_n(y)=0$.

Într-adevăr, avem: $L_n(\varphi+\mathrm{i}\,\psi)=L_n(\varphi)+\mathrm{i}\,L_n(\psi)=0$, deoarece $\varphi+\mathrm{i}\,\psi$ este soluție a ecuației omogene $L_n(y)=0$. Rezultă atunci că $L_n(\varphi)=L_n(\psi)=0$, adică φ şi ψ sunt soluții ale ecuației $L_n(y)=0$.

2.2 Dependență şi independență liniară în $\operatorname{Ker} L_n$

S-a arătat că $\operatorname{Ker} L_n$ este spațiu vectorial. Reamintim următoarele definiții.

Definiția 2.2.1

Elementele $y_1,y_2,\dots,y_p\in\operatorname{Ker} L_n$ se numesc liniar dependente dacă există constantele $c_1,c_2,\dots,c_p\in\mathbb{R}$ nu toate nule $\left(\sum_{i=1}^{p} c_i^2\neq 0\right)$, astfel încât să avem

$$\sum_{i=1}^{p} c_i y_i(x) = 0,\ \forall\, x \in I.$$

Definiția 2.2.2

Elementele $y_1, y_2, ..., y_p \in \operatorname{Ker} L_n$ se numesc liniar independente dacă şi numai dacă din $\sum_{i=1}^{p} c_i y_i(x) = 0, \forall\, x \in I$, rezultă $c_i = 0$, $\forall\, i = \overline{1,p}$, deci dacă nu sunt liniar dependente.

Exemplul 2.2.1

a) Funcțiile $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = \mathrm{e}^x$ sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$, deoarece condiția $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, implică $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

b) Funcțiile $y_1(x) = x^2 + 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = (x+1)^2$ sunt liniar dependente pe $\mathbb{R}$, deoarece există $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$, astfel încât $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\left(\sum_{i=1}^{3} c_i^2 = 6 \neq 0 \right)$.

Definiția 2.2.3

Fie $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x) \in C^{n-1}(I)$. Determinantul

$$w(y_1, y_2, ..., y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

se numeşte determinantul lui Wronski sau wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, ..., y_n$.

Teorema 2.2.1

Funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n \in C^{n-1}(I)$ sunt liniar dependente pe *I* dacă şi numai dacă wronskianul lor este nul în orice punct din *I*.

Demonstrație

Conform ipotezei, există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, cu $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$, astfel încât

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall\, x \in I. \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Cum $y_i \in C^{n-1}(I)$, $\forall\, i=\overline{1,n}$, se poate deriva succesiv această relație până la inclusiv ordinul $n-1$. Obținem:

$$\begin{cases} c_1 y_1'(x) & + & c_2 y_2'(x) & + & \cdots & + & c_n y_n'(x) & = & 0 \\ c_1 y_1''(x) & + & c_2 y_2''(x) & + & \cdots & + & c_n y_n''(x) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) & + & c_2 y_2^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{cases} \qquad \mathbf{(2.2.3)}$$

$\forall\, x \in I$.

Relațiile (**2.2.2**) şi (**2.2.3**) formează un sistem algebric, liniar, omogen, din *n* ecuații cu *n* necunoscute, (acestea fiind $c_1, c_2, ..., c_n$), care admite şi alte soluții în afară de soluția banală, $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Conform teoremei lui Rouché, acest sistem admite şi soluții diferite de soluția banală dacă şi numai dacă determinantul său este nul pe *I*, adică $w(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$, $\forall\, x \in I$, q.e.d.

Teorema 2.2.2

Fie $y, y_1, y_2, ..., y_n \in C^n(I)$, $n+1$ funcții cu proprietățile:

a) $w(y_1, y_2, ... y_n) \neq 0$, $\forall\, x \in I$;

b) $w(y_1, y_2, ... y_n, y) = 0$, $\forall\, x \in I$.

Atunci există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ constante arbitrare, cu $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$, astfel încât $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$.

Demonstrație

Deoarece

$$w(y_1, y_2, ..., y_n, y) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0,\ \forall\, x \in I, \quad \mathbf{(2.2.4)}$$

rezultă că toţi determinanţii următori sunt nuli pe I:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \cdots & y_n^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix} = 0,\ \forall\, x \in I,\ \forall\, k = 0,1,...,n, \quad \textbf{(2.2.5)}$$

deoarece liniile $k+1$ şi $n+1$ sunt identice, pentru orice $k = 0,1...,n-1$, iar pentru $k = n$ este $w(y_1,...,y_n,y)$, nul pe I.

Dezvoltând determinanţii (**2.2.5**) după ultima linie, obţinem relaţiile:

$$\lambda_0(x)y^{(k)} + \lambda_1(x)y_1^{(k)} + ... + \lambda_n(x)y_n^{(k)} = 0,\ \forall\, k = \overline{0,n}, \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

unde funcţiile $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$ sunt aceleaşi pentru orice $k = \overline{0,n}$ şi

$$\lambda_0(x) = w(y_1,y_2,...,y_n) \neq 0,\ \forall\, x \in I. \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

Împărţind relaţiile (**2.2.6**) cu $\lambda_0(x) \neq 0$ şi notând $\mu_j(x) = -\dfrac{\lambda_j(x)}{\lambda_0(x)}$, $j = \overline{1,n}$, acestea se vor scrie, desfăşurat, astfel:

$$\begin{cases} k=0 & : & y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + ... + \mu_n y_n \\ k=1 & : & y' = \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + ... + \mu_n y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k=n-1 & : & y^{(n-1)} = \mu_1 y_1^{(n-1)} + \mu_2 y_2^{(n-1)} + ... + \mu_n y_n^{(n-1)} \\ k=n & : & y^{(n)} = \mu_1 y_1^{(n)} + \mu_2 y_2^{(n)} + ... + \mu_n y_n^{(n)} \end{cases} \qquad \textbf{(2.2.8)}$$

unde, pentru simplificarea scrierii, nu am mai pus în evidenţă variabila x.

Din ipotezele teoremei mai rezultă că toate funcţiile μ_j, $j = 1,...,n$, sunt derivabile pe I. Derivând succesiv fiecare relaţie din sistemul (**2.2.8**) (până la $k = n-1$) şi ţinând seama de fiecare dată de anterioara, se va obţine:

$$\begin{cases} \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + ... + \mu_n' y_n & = & 0 \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2 + ... + \mu_n' y_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + ... + \mu_n' y_n^{(n-1)} & = & 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2.2.9)}$$

Am obţinut un sistem omogen, liniar, de n ecuaţii, cu n necunoscute, acestea fiind $\mu_1',\mu_2',...,\mu_n'$, al cărui determinant este $w(y_1,y_2,...y_n)$, nenul în

$\forall\, x \in I$. Conform teoremei lui Rouché sistemul (**2.2.9**) admite numai soluția banală în orice punct $x \in I$. Deci, $\mu_1'(x) = 0, \mu_2'(x) = 0, ..., \mu_n'(x) = 0$, de unde deducem că $\mu_1 = c_1,\ \mu_2 = c_2, ...,\ \mu_n = c_n$, $\forall\, x \in I$, deci prima relație din sistemul (**2.2.8**) va deveni: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$, unde $c_1, c_2, ..., c_n$ sunt *n* constante arbitrare, q.e.d.

Teorema 2.2.3 (Soluția generală a ecuației diferențiale liniare, omogene, de ordinul n)

Fie ecuația diferențială liniară de ordinul *n*, omogenă,

$$L_n(y) = a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad \textbf{(2.2.10)}$$

cu $a_i(x)$ continue pe un interval *I*, $\forall\, i = 0, 1, ..., n$, $a_0(x) \neq 0$ pe *I* şi $y_1, y_2, ..., y_n$, *n* soluții ale sale, definite pe *I*. Dacă wronskianul soluțiilor $y_1, y_2, ..., y_n$ nu este identic nul pe *I*, atunci orice soluție a ecuației (**2.2.10**) pe *I* este de forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,\ \forall\, x \in I, \quad \textbf{(2.2.11)}$$

unde $c_1, c_2, ... c_n$ sunt *n* constante arbitrare. Funcția dată de (**2.2.11**) se numeşte soluția generală a ecuației (**2.2.10**) pe *I*.

Demonstrație

Se face în două etape. În etapa întâi se demonstrează că dacă $w(y_1, y_2, ..., y_n)$ nu este identic nul pe *I*, atunci $w(y_1, y_2, ..., y_n)$ nu se anulează în nici un punct din *I* (rezultat cunoscut şi sub numele de „Teorema lui Abel-Ostrogradski-Liouville”). În etapa a doua se demonstrează că orice soluție a ecuației (**2.2.10**) are forma din enunț.

Etapa 1. Fie $y_1, y_2, ..., y_n$ *n* soluții ale ecuației (**2.2.10**) pe *I*, cu proprietatea că $w(y_1, y_2, ..., y_n)$ nu este identic nul pe *I*.

Rezultă în primul rând că $y_1, y_2, ..., y_n \in C^n(I)$ şi în al doilea rând că $w \overset{\text{not}}{=} w(y_1, y_2, ..., y_n)$ este o funcție derivabilă pe *I*. Aplicând regula de derivare a unui determinant, vom obține:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad \textbf{(2.2.12)}$$

unde în sumă sunt n determinanți obținuți din w, derivând de fiecare dată o altă linie, toate celelalte rămânând neschimbate. Toți determinanții obținuți, cu excepția ultimului, sunt nuli pe I, deoarece fiecare are câte două (alte) linii identice. Deci,

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \cdots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \qquad \textbf{(2.2.13)}$$

Însă, $y_1,y_2,...,y_n$ sunt soluții ale ecuației (**2.2.10**). Împărțim ecuația (**2.2.10**) cu $a_0(x)\neq 0$, $\forall\, x\in I$, şi notăm $\alpha_i(x)=\dfrac{a_i(x)}{a_0(x)}$, $i=1,2,...,n$. Evident, $\alpha_i(x)$, $i=1,...,n$ sunt funcții continue pe I. Deci, putem scrie:

$$y_k^{(n)}+\alpha_1(x)\cdot y_k^{(n-1)}+...+\alpha_{n-1}(x)\cdot y_k'+\alpha_n(x)\cdot y_k=0,\ \forall\, k=1,2,...,n, \qquad \textbf{(2.2.14)}$$

deci

$$y_k^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\cdot y_k^{(n-i)},\ k=1,2,...,n,\ \forall\, x\in I. \qquad \textbf{(2.2.15)}$$

Înlocuind în (**2.2.13**) şi ținând seama de proprietățile determinaților, vom obține:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\cdot y_1^{(n-i)} & -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\cdot y_2^{(n-i)} & \cdots & -\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\cdot y_n^{(n-i)} \end{vmatrix};$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -\alpha_1(x)\cdot y_1^{(n-1)} & -\alpha_1(x)\cdot y_2^{(n-1)} & \cdots & -\alpha_1(x)\cdot y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \text{ deci}$$

$$\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}=-\alpha_1(x)\cdot w(x),\ \forall\, x\in I. \qquad \textbf{(2.2.16)}$$

Fie $x_0\in I$ astfel încât $w(x_0)\neq 0$ (există un astfel de x_0, deoarece $w(y_1,y_2,...,y_n)$ nu este identic nul pe *I*). Cum $w(x)$ este o funcție derivabilă pe *I*, va fi și continuă pe *I*. De asemenea, $\alpha_1(x)$ este continuă pe *I*. Fie $x\in I$, arbitrar, $x\neq x_0$. Integrând ecuația (**2.2.16**) pe intervalul cu extremitățile x_0 și *x*, vom obține:

$$\ln\left|w(t)\right|\Big|_{t=x_0}^{t=x}=-\int_{x_0}^{x}\alpha_1(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow w(x)=w(x_0)\cdot\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\alpha_1(t)\,\mathrm{d}t\right]. \qquad \textbf{(2.2.17)}$$

Funcția $\alpha_1(x)$ fiind continuă pe *I*, rezultă că $w(x)$ nu se anulează în nici un punct din *I*. Într-adevăr, presupunând că ar exista un punct $x'\in I$ în care *w* s-ar anula, putem alege pe $x_0<x'$, astfel încât în intervalul (x_0,x'), *w* să nu se anuleze. Cum *w* este continuă pe *I* și $w(x_0)\neq 0$, rezultă că trebuie să avem:

$$\lim_{x\to x'}w(x)=\lim_{x\to x'}w(x_0)\cdot\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\alpha_1(t)\,\mathrm{d}t\right]. \qquad \textbf{(2.2.18)}$$

Dar, $\lim\limits_{x\to x'}w(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to x'}w(x_0)\cdot\exp\left[-\int_{x_0}^{x}\alpha_1(t)\,\mathrm{d}t\right]\neq 0$, deoarece $\alpha_1(t)$ este continuă în x', deci mărginită în $x'\in I$. Contradicția obținută arată că nu există puncte $x' \in I$ pentru care $w(x')=0$, demonstrația etapei 1 fiind, deci încheiată. Putem da acum următoarea definiție:

Definiția 2.2.4

Un sistem de soluții $y_1, y_2, ..., y_n$ ale ecuației (**2.2.10**), definit pe *I*, cu $w(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe *I*, se numeşte sistem fundamental de soluții pe *I* al ecuației (**2.2.10**).

Etapa a 2-a. Fie $y_1, y_2, ..., y_n$ un sistem fundamental de soluții al ecuației (**2.2.10**) pe *I* şi *y* o soluție oarecare a aceleaşi ecuații definită tot pe *I*. Avem:

$$\begin{cases} y_1^{(n)} & +\alpha_1(x)\cdot y_1^{(n-1)} & +\cdots & +\alpha_{n-1}(x)\cdot y_1' & +\alpha_n(x)\cdot y_1 & = & 0 \\ y_2^{(n)} & +\alpha_1(x)\cdot y_2^{(n-1)} & +\cdots & +\alpha_{n-1}(x)\cdot y_2' & +\alpha_n(x)\cdot y_2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^{(n)} & +\alpha_1(x)\cdot y_n^{(n-1)} & +\cdots & +\alpha_{n-1}(x)\cdot y_n' & +\alpha_n(x)\cdot y_n & = & 0 \\ y^{(n)} & +\alpha_1(x)\cdot y^{(n-1)} & +\cdots & +\alpha_{n-1}(x)\cdot y' & +\alpha_n(x)\cdot y & = & 0 \end{cases} \quad \textbf{(2.2.19)}$$

Sistemul (**2.2.19**) poate fi privit ca un sistem liniar, omogen, de $n+1$ ecuații cu $n+1$ necunoscute, acestea fiind: 1, $\alpha_1(x), ..., \alpha_{n-1}(x), \alpha_n(x)$, admițând, deci soluție nebanală. Conform teoremei lui Rouché rezultă că determinantul său este nul pe *I*. Dar $\Delta = w(y_1, y_2, ..., y_n, y)$. Deci, $w(y_1, y_2, ..., y_n, y) \equiv 0$, $\forall\, x \in I$.

Prin urmare, $w(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ şi $w(y_1, y_2, ..., y_n, y) \equiv 0$, $\forall\, x \in I$. Conform ***teoremei 2.2.2*** rezultă că $\forall\, x \in I$, există $c_1, ..., c_n$ constante arbitrare cu $\sum_{i=1}^{n} c_1^2 \neq 0$, astfel încât $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$. Astfel, teorema este complet demonstrată.

Observația 2.2.1

Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ constituie un sistem fundamental de soluții al ecuației (**2.2.10**) pe *I*, atunci funcția $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ se numeşte soluția generală a ecuației (**2.2.10**) pe *I*.

Exemplul 2.2.2

Ecuația $(2x-1)\cdot y'' - \left(4x^2+1\right)\cdot y' + \left(4x^2-2x+2\right)\cdot y = 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ are soluțiile particulare $y_1 = \mathrm{e}^x$ şi $y_2 = \mathrm{e}^{x^2}$, ceea ce se poate verifica prin calcul direct. Ele formează un sistem fundamental de soluții pe $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, deoarece

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^x & e^{x^2} \\ e^x & 2x\,e^{x^2} \end{vmatrix}=e^{x+x^2}(2x-1)\neq 0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Soluția generală a ecuației va fi deci $y=c_1\,e^x+c_2\,e^{x^2}$, $\forall\, x\neq\frac{1}{2}$, cu c_1 şi c_2 constante arbitrare.

Prin urmare, pentru a se obține soluția generală a ecuației diferențiale (**2.2.10**), $L_n(y)=0$, trebuie să se cunoască un sistem fundamental de soluții ale sale, $y_1,y_2,...,y_n$, adică o bază pentru spațiul vectorial $\operatorname{Ker}(L_n)\subset C^n(I)$. Atunci, orice soluție a ecuației $L_n(y)=0$ fiind un element al spațiului vectorial finit dimensional $\operatorname{Ker}(L_n)$ se va exprima ca o combinație liniară, cu coeficienți constante arbitrare de elementele bazei $y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$.

În definitiv, toate rezultatele anterioare se pot concretiza sub forma următorului enunț:

Teorema 2.2.4

$\operatorname{Ker}(L_n)$ este un spațiu vectorial *n*-dimensional.

Observația 2.2.2

Un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă $L_n(y)=0$ nu este unic; într-adevăr, într-un spațiu vectorial finit dimensional există o infinitate de baze şi trecerea de la o bază la alta se face printr-o matrice pătratică, nesingulară, cu elemente constante. De exemplu, dacă $B=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ este un sistem fundamental de soluții şi matricea $C=(c_{ij})$, $c_{ij}\in\mathbb{R}$ $\forall\, 1\le i\le n; 1\le j\le n$ este nesingulară, atunci mulțimea $B'=\{z_1,z_2,...,z_n\}$, unde

$$\begin{cases} z_1 & = & c_{11}y_1 & +c_{12}y_2 & +\cdots & +c_{1n}y_n \\ z_2 & = & c_{21}y_1 & +c_{22}y_2 & +\cdots & +c_{2n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_n & = & c_{n1}y_1 & +c_{n2}y_2 & +\cdots & +c_{nn}y_n \end{cases} \tag{2.2.20}$$

constituie, de asemenea, un sistem fundamental de soluții pentru aceeaşi ecuație $L_n(y)=0$. Matricea de trecere de la baza B la baza B' este matricea C^{t}

(transpusa matricei C, cu convenția că pe coloanele matricei de trecere C^{t} se înscriu coordonatele vectorilor noii baze B' în raport cu vechea bază B).

Observația 2.2.3

În general nu există o metodă de aflare a unui sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială liniară, de ordinul n, omogenă, cu coeficienții variabili:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=0.$$

În anumite situații se pot determina însă unele componente ale sistemului fundamental de soluții, după cum urmează:

a) dacă $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)=0$, atunci $y_1=\mathrm{e}^x$ este un element al bazei spațiului soluțiilor;

b) dacă $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot a_i(x)=0$, atunci $y_2=\mathrm{e}^{-x}$ este un element al bazei spațiului soluțiilor;

c) dacă $a_{n-1}(x)+x\cdot a_n(x)=0$, atunci $y_3=x$ este un element al bazei spațiului soluțiilor;

d) dacă $a_i(x)$, $i=0,1,\ldots,n$ sunt polinoame, atunci ecuația $L_n(y)=0$ poate admite ca elemente ale bazei spațiului soluțiilor funcții polinomiale, care se pot determina prin metoda coeficienților nedeterminați;

e) dacă $a_n(x)\equiv 0$ (ecuația nu are termen în y), atunci $y_1=1$ (sau orice număr real) este soluție a ecuației $L_n(y)=0$. Analog, dacă ecuația nu are ultimii k termeni din forma standard, adică dacă este de forma:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-k}(x)\cdot y^{(k)}=0,$$

unde $1\le k\le n$, atunci ecuația admite soluția $y=c_1+c_2x+\ldots+c_kx^{k-1}$ cu $c_1,c_2,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ constante arbitrare, de unde rezultă că $y_1=1$, $y_2=x,\ldots$, $y_k=x^{k-1}$ sunt elemente ale bazei spațiului soluțiilor.

Toate aceste afirmații se pot proba prin calcul direct.

Exemplul 2.2.3

Să se determine soluția generală a ecuațiilor diferențiale:

(i) $xy'''-y''-xy'+y=0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Observăm că $\sum_{i=0}^{3} a_i(x)=+x-1-x+1=0\Rightarrow y_1=\mathrm{e}^x$.

b) Observăm că

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^{3-i}\cdot a_i(x)=(-1)^3 x-(-1)^2-x(-1)^1+1=0\Rightarrow y_2=\mathrm{e}^{-x}.$$

c) Observăm că $a_{n-1}(x)+x\cdot a_n(x)=-x+x\cdot 1=0\Rightarrow y_3=x$.

Verificăm dacă y_1,y_2,y_3 formează un sistem fundamental de soluții al ecuației date pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$w(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1'' & y_2'' & y_3''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} & x\\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} & 1\\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & x\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & x+1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=-(2-2x-2)=2x\neq 0.$$

Deci, soluția generală a ecuației date va fi: $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+c_3x$, cu $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$, constante arbitrare.

(ii) $\left(x^3-3x^2-x+1\right)y''-y'\left(x^3-7x\right)+y\left(3x^2-6x-1\right)=0$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2,x_3\}$, unde $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ sunt rădăcinile ecuației

$$x^3-3x^2-x+1=0.$$

a) Observăm că

$$\sum_{i=0}^{2}a_i(x)=x^3-3x^2-x+1-x^3+7x+3x^2-6x-1=0\Rightarrow y_1=\mathrm{e}^x.$$

b) Coeficienții ecuației sunt polinoame; ne propunem să căutăm o componentă a bazei spațiului soluțiilor de forma unui polinom de gradul $n: y_2(x)=x^n+b_1\cdot x^{n-1}+b_2\cdot x^{n-2}+\ldots+b_n$. Pentru a-l afla pe n punem condiția $L_2(y_2)=0$ şi reținem doar coeficientul lui x^{n+2} (termenul de grad maxim), pe care deci îl egalăm cu zero:

$$y_2'(x)=nx^{n-1}+b_1(n-1)x^{n-2}+b_2(n-2)x^{n-3}+\ldots+b_{n-1}$$

$$y_2''(x)=n(n-1)\cdot x^{n-2}+b_1(n-1)(n-2)\cdot x^{n-3}+b_2(n-2)(n-3)x^{n-4}+\ldots+2b_{n-2}.$$

Termenii de gradul maxim, x^{n+2}, vor rezulta din termenii al doilea şi al treilea din ecuație. Obținem:

$$x^{n+2}(-n)+x^{n+2}\cdot 3\equiv 0\Rightarrow n=3.$$

Deci, $y_2 = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$. Punând din nou condiția $L_2(y_2) = 0$, se va obține, prin identificarea coeficienților, $b_1 = 0$, $b_2 = -1$, $b_3 = 0$, deci $y_2(x) = x^3 - x$. Verificăm dacă y_1 şi y_2 sunt independente:

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x^3 - x \\ \mathrm{e}^x & 3x^2 - 1 \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^x \left(x^3 - 3x^2 - x + 1\right) \neq 0,$$

deci y_1 şi y_2 constituie o bază pentru spațiul soluțiilor ecuației $L_2(y) = 0$. Soluția generală a ecuației va fi: $y = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\left(x^3 - x\right)$, cu $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, constante arbitrare.

(iii) $(2x-1)\cdot y'' - 4xy' + 4y = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $a_1(x) + x \cdot a_2(x) = -4x + 4\cdot x = 0 \Rightarrow y_1(x) = x$.

Ne propunem să căutăm o altă componentă a bazei spațiului soluțiilor de forma $y_2 = \mathrm{e}^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$, deşi ecuația nu are coeficienți constanți. Înlocuind $y_2 = \mathrm{e}^{rx}$, $y_2' = r\,\mathrm{e}^{rx}$, $y_2'' = r^2\,\mathrm{e}^{rx}$ în ecuația diferențială, obținem identitatea: $2x\left(r^2 - 2r\right) + \left(-r^2 + 4\right) \equiv 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, ceea ce este adevărat, dacă ecuațiile $r^2 - 2r = 0$ şi $r^2 - 4 = 0$ au cel puțin o rădăcină comună. Aici $r = 2$, deci $y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Verificăm dacă y_1 şi y_2 sunt liniar independente pe $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \mathrm{e}^{2x} \\ 1 & 2\mathrm{e}^{2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x}(2x-1) \neq 0,\ \forall\, x \neq \frac{1}{2}.$$

Deci, $\{y_1, y_2\}$ constituie o bază a spațiului soluțiilor şi soluția generală a ecuației date va fi $y = c_1x + c_2\mathrm{e}^{2x}$.

Observația 2.2.4 (Micşorarea ordinului unei ecuații liniare şi omogene)

Teorema 2.2.5

Fie ecuația diferențială liniară de ordinul *n*, omogenă,

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = 0,$$

cu $a_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,n$ continue pe intervalul *I* şi $a_0(x) \neq 0$ pe *I*. Dacă se cunoaşte o soluție particulară y_1 a ecuației date (deci, un element al bazei spațiului soluțiilor), atunci ordinul său se poate micşora cu o unitate prin schimbarea de funcție $y = y_1 \cdot z$.

Demonstrație

Presupunem că se cunoaşte soluția $y_1(x)$ a ecuației $L_n(y) = 0$ pe intervalul *I* şi că $y_1(x) \neq 0$ pe *I*. Dacă $y_1(x)$ se anulează pe *I*, atunci vom considera ecuația $L_n(y) = 0$ numai pe subintervalele pe care y_1 nu se anulează.

Facem schimbarea de funcție $y = y_1 \cdot z$. Evident, noua funcție necunoscută *z* trebuie să fie de clasă C^n pe *I*. Utilizând regula lui Leibniz de derivare până la ordinul n a unui produs de două funcții, obținem:

$$\begin{array}{ccc} y & = & y_1 \cdot z \\ y' & = & y_1' z + y_1 \cdot z' \\ y'' & = & y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 \cdot z'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y^{(n)} & = & y_1^{(n)} \cdot z + \mathrm{C}_n^1 y_1^{(n-1)} \cdot z' + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} y_1' \cdot z^{(n-1)} + \mathrm{C}_n^n \cdot y_1 \cdot z^{(n)}. \end{array}$$

Înlocuind în ecuația $L_n(y) = 0$, vom obține:

$$b_0(x) \cdot z^{(n)} + b_1(x) \cdot z^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x) \cdot z' + b_n(x) \cdot z = 0, \qquad \textbf{(2.2.21)}$$

unde $b_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,n$ rezultă din calcul, iar pentru $b_n(x)$ avem:

$$b_n(x) = a_0(x) \cdot y_1^{(n)} + a_1(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y_1' + a_n(x) \cdot y_1 \equiv 0,$$

deoarece y_1, prin ipoteză, este soluție a ecuației inițiale $L_n(y) = 0$. În ecuația obținută lipseşte deci funcția necunoscută *z* şi putem lua ca nouă funcție necunoscută pe $u(x) = z'$, ceea ce va conduce la ecuația:

$$b_0(x) \cdot u^{(n-1)} + b_1(x) \cdot u^{(n-2)} + \ldots + b_{n-2}(x) \cdot u' + b_{n-1}(x) \cdot u = 0 \qquad \textbf{(2.2.22)}$$

al cărui ordin este $n-1$. Astfel, ordinul ecuației inițiale a coborât de la *n* la $n-1$.

Integrarea ecuației (**2.2.22**) atrage după sine integrarea ecuației din enunț, $L_n(y) = 0$. Într-adevăr, presupunem că ecuația (**2.2.22**) are sistemul fundamental de soluții format din $u_2, u_3, \ldots, u_n$, pe intervalul *I*. Atunci, soluția sa generală va fi $u = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots + c_n u_n$, unde c_i, $i = 2,\ldots,n$ sunt constante arbitrare reale. Dar $z' = u(x)$; deci, prin integrare rezultă

$$z(x) = c_1 + c_2 \int u_2(x) \mathrm{d}x + \ldots + c_n \int u_u(x) \mathrm{d}x,$$

unde am adăugat o nouă constantă de integrare, c_1. Rezultă atunci că:

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_1(x)\cdot\int u_2(x)\mathrm{d}x+...+c_n y_1(x)\cdot\int u_n(x)\mathrm{d}x.$$

Pentru aceasta trebuie să arătăm că soluțiile

$$y_1(x),y_1(x)\cdot\int u_2(x)\mathrm{d}x,...,y_1(x)\cdot\int u_n(x)\mathrm{d}x \qquad \textbf{(2.2.23)}$$

formează un sistem fundamental pe *I*, adică sunt liniar independente pe *I*. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că nu sunt liniar independente pe *I*. Rezultă că există *n* constante, $k_1,k_2,...,k_n$, nu toate nule, astfel încât să avem

$$k_1 y_1(x)+k_2 y_1(x)\cdot\int u_2(x)\mathrm{d}x+...+k_n\cdot y_1(x)\cdot\int u_n(x)\mathrm{d}x=0,\ \forall\, x\in I. \quad \textbf{(2.2.24)}$$

Nu putem însă avea $k_2=0,...,k_n=0$ şi $k_1\neq 0$, căci atunci ar rămâne $k_1\cdot y_1(x)\equiv 0\quad \forall\, x\in I$, deci $y_1(x)\equiv 0\quad \forall\, x\in I$, contradicție cu presupunerea inițială referitoare la $y_1(x)$. Deci, există cel puțin o constantă k_j, $j=2,3,...,n$, nenulă. Împărțind în (**2.2.24**) cu $y_1(x)\neq 0$ pe *I* şi apoi derivând, obținem:

$$k_2\cdot u_2(x)+...+k_n u_n(x)=0,\ \forall\, x\in I,$$

fără ca toate constantele k_j, $j\geq 2$ să fie nule, contradicție cu faptul că $u_2,...u_n$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (**2.2.22**). Prin urmare, relația (**2.2.24**) este posibilă numai dacă avem $k_1=k_2=...=k_n=0$, ceea ce înseamnă că (**2.2.23**) reprezintă un sistem fundamental de soluții pentru ecuația $L_n(y)=0$ pe *I*.

Odată demonstrat acest rezultat, ne punem în mod firesc întrebarea: dacă se cunosc *p* soluții liniar independente pe intervalul *I* ale ecuației $L_n(y)=0$, se poate micşora ordinul ecuației inițiale cu *p* unități şi dacă da, cum se realizează acest lucru?

Presupunem deci că se cunosc soluțiile $y_1,y_2,...,y_p$ ale ecuației $L_n(y)=0$, liniar independente pe *I*. Deci, cel puțin una dintre ele este diferită de zero pe intervalul *I*. Renumerotând eventual soluțiile cunoscute, putem presupune că $y_1(x)\neq 0$, $\forall\, x\in I$. Facem, la fel ca în cazul anterior, schimbarea de funcție $y(x)=y_1(x)\cdot z(x)$ şi apoi $z'(x)=u(x)$. Se obține ecuația diferențială (**2.2.22**):

$$b_0(x)\cdot u^{(n-1)}+b_1(x)\cdot u^{(n-2)}+b_{n-2}(x)\cdot u'+b_{n-1}(x)\cdot u=0.$$

Deoarece ecuația inițială are soluțiile liniar independente $y_1,y_2,...,y_p$ pe *I*, rezultă că (**2.2.22**) are soluțiile:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = u_1;\ \left(\frac{y_3}{y_2}\right)' = u_2, \ldots, \left(\frac{y_p}{y_1}\right)' = u_{p-1}. \qquad \textbf{(2.2.25)}$$

Într-adevăr, din schimbările de funcții făcute rezultă:

$$\frac{y(x)}{y_1(x)} = z(x);\ \left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)' = z'(x) = u(x).$$

Vom demonstra că soluțiile $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ sunt şi liniar independente pe *I*, de asemenea, prin reducere la absurd. Presupunem că soluțiile $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, date de (**2.2.25**) nu sunt de liniar independente pe *I*. Atunci, există $p-1$ constante arbitrare, nu toate nule, pe care le notăm $k_2, k_3, \ldots, k_p$, astfel încât să avem:

$$k_2 u_1(x) + k_3 u_2(x) + \ldots + k_p u_{p-1}(x) = 0,\ \forall\ x \in I,$$

echivalent cu:

$$k_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + k_3\left(\frac{y_3}{y_1}\right)' + \ldots + k_p\left(\frac{y_p}{y_1}\right)' = 0,\ \forall\ x \in I.$$

Integrând ultima relație şi adăugând încă o constantă de integrare arbitrară k_1, obținem:

$$k_1 + k_2 \cdot \frac{y_2}{y_1} + k_3 \cdot \frac{y_3}{y_1} + \ldots + k_p \cdot \frac{y_p}{y_1} = 0,\ \forall\ x \in I,$$

respectiv

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_p y_p = 0,\ \forall\ x \in I,$$

fără ca toate constantele $k_1, k_2, \ldots, k_p$ să fie nule, contradicție cu faptul că $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sunt *p* soluții liniar independente ale ecuației $L_n(y) = 0$ pe *I*. Presupunerea făcută este falsă, deci soluțiile $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, date de (**2.2.25**), ale ecuației (**2.2.22**), sunt liniar independente pe *I*.

Recapitulând rezultatele, avem că prin schimbările de funcții $y = y_1 z$ şi apoi $z' = u$ se trece de la ecuația diferențială liniară, omogenă, de ordinul *n*, $L_n(y) = 0$, căreia i se cunosc *p* soluții liniar independente pe *I*, acestea fiind $y_1, y_2, \ldots, y_p$, la ecuația diferențială liniară, omogenă, de ordinul $n-1$, (**2.2.22**), căreia i se cunosc $p-1$ soluții liniar independente pe *I*, acestea fiind $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, date de relațiile:

$$u_1=\left(\frac{y_2}{y_1}\right)';\ u_2=\left(\frac{y_3}{y_1}\right)',\dots,u_{p-1}=\left(\frac{y_p}{y_1}\right)'.$$

Problema se reia plecându-se acum de la ecuația

$$b_0(x)\cdot u^{(n-1)}+b_1(x)\cdot u^{(n-2)}+\dots+b_{n-2}(x)\cdot u'+b_{n-1}(x)\cdot u=0.$$

Efectuând aceleaşi operații, se va obține o ecuație diferențială liniară şi omogenă de ordinul $n-2$ pentru care se cunosc $p-2$ soluții liniar independente pe *I*. Procedeul se poate continua (în mod succesiv) până se ajunge la o ecuație diferențială liniară şi omogenă de ordinul $n-p$.

Cazul $n=2$

Fie ecuația diferențială liniară şi omogenă de ordinul doi pusă sub forma:

$$y''+\alpha_1(x)\cdot y'+\alpha_2(x)\cdot y=0, \tag{\textbf{2.2.26}}$$

pentru care presupunem că se cunoaşte o soluție y_1 a sa. Prin schimbarea de funcție $y=y_1\cdot z$ se obține ecuația: $z''+\left(2\frac{y_1'}{y_1}+\alpha_1(x)\right)\cdot z'=0$.

Făcând $z'=u$, rezultă:

$$u'+\left(2\frac{y_1'}{y_1}+\alpha_1(x)\right)\cdot u=0,$$

sau, după separarea variabilelor, $\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\left(\alpha_1(x)+2\frac{y_1'}{y_1}\right)\cdot\mathrm{d}x$, de unde, integrând, se deduce:

$$u(x)=\frac{c_2}{y_1^2}\cdot\mathrm{e}^{-\int\alpha_1(x)\mathrm{d}x},$$

unde c_2 este o constantă arbitrară. Revenind la schimbările de funcții efectuate anterior, deducem că soluția generală a ecuației (**2.2.26**) este:

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_1(x)\cdot\int\frac{1}{y_1^2(x)}\cdot\mathrm{e}^{-\int\alpha_1(x)\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x, \tag{\textbf{2.2.27}}$$

c_1 fiind, de asemenea, o altă constantă arbitrară. Prin urmare, dacă $y_1(x)$ este o soluție nenulă pe *I* a ecuației (**2.2.26**), $\alpha_1(x)$ şi $\alpha_2(x)$ fiind funcții continue pe *I*, atunci funcția dată de

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{1}{y_1^2(x)}\cdot \mathrm{e}^{-\int\alpha_1(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x,$$

este o altă soluţie a ecuaţiei (**2.2.26**) şi sistemul $\left(y_1(x),y_2(x)\right)$ formează un sistem fundamental de soluţii pentru aceasta. Soluţia generală a ecuaţiei (**2.2.26**) este dată de (**2.2.27**).

Exemplul 2.2.4

$$(2x-1)y''-\left(4x^2+1\right)y'+\left(4x^2-2x+2\right)=0,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Avem: $\sum_{i=0}^{2}a_i(x)=2x-1-4x^2-1+4x^2-2x+2=0$. Deci, $y_1=\mathrm{e}^x$ este o componentă a sistemului fundamental de soluţii (un element al bazei spaţiului soluţiilor). Cealaltă componentă se determină cu formula stabilită anterior:

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{1}{y_1^2(x)}\cdot \mathrm{e}^{-\int\alpha_1(x)\,\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x,\ \text{unde}\ \alpha_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}=\frac{-\left(4x^2+1\right)}{2x-1}.$$

Deci,

$$y_2(x)=\mathrm{e}^x\cdot\int\frac{\mathrm{e}^{\int\frac{4x^2+1}{2x-1}\mathrm{d}x}}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cdot\int\frac{\mathrm{e}^{x^2+x+\ln(2x-1)}}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=$$
$$=\mathrm{e}^x\cdot\int(2x-1)\cdot\mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{x^2-x}=\mathrm{e}^{x^2}.$$

Sistemul fundamental de soluţii este format din $y_1(x)=\mathrm{e}^x$; $y_2=\mathrm{e}^{x^2}$. Soluţia generală a ecuaţiei va fi: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{x^2}$, cu $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, constante arbitrare.

Observaţia 2.2.5 (Construcţia ecuaţiei diferenţiale liniare, omogene, de ordinul n, de sistem fundamental dat)

Teorema 2.2.3 privind soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare, de ordinul *n*, omogenă are două consecinţe importante:

Consecinţa 2.2.1

n soluţii $y_1,y_2,\ldots,y_n$ formează un sistem fundamental pe *I* dacă şi numai sunt liniar independente pe *I*. Justificarea consecinţei este imediată.

Consecința 2.2.2

$n+1$ soluții ale unei ecuații diferențiale de ordinul *n*, definite pe *I*, sunt liniar dependente pe *I*.

Demonstrație

Fie $y_1, y_2, ..., y_n$, *n* soluții din cele $n+1$ date; există două posibilități:

a) Soluțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt liniar dependente pe *I*; rezultă atunci că și $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}$, sunt liniar dependente pe *I*. Într-adevăr, conform ipotezei, $\exists\, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$, cu $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$, astfel încât $c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \equiv 0$, $\forall\, x \in I$. Luând $c_{n+1} = 0$, rezultă de asemenea:

$$c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) + 0 \cdot y_{n+1}(x) = 0,\ \forall\, x \in I,\ \text{cu}\ \sum_{i=1}^{n+1} c_i^2 \neq 0,$$

deci $y_1(x), ..., y_n(x), y_{n+1}(x)$ sunt liniar dependente pe *I*.

b) Funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt liniar independente pe *I*; ele formează un sistem fundamental de soluții pe *I* pentru ecuația $L_n(y) = 0$, deci orice altă soluție a sa va fi de forma $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, cu $c_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, arbitrare. Așadar, pentru y_{n+1}, există *n* constante $k_1, ..., k_n \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem:

$$y_{n+1} = k_1 y_1 + ... + k_n y_n \ \ \forall\, x \in I,\ \text{adică}\ k_1 y_1 + ... + k_n y_n - 1 \cdot y_{n+1} = 0 \ \ \forall\, x \in I$$

$(-1 \neq 0)$, deci $y_1, ..., y_n, y_{n+1}$ sunt liniar dependente pe *I*. Concluziile acestor două consecințe împreună cu rezultatul stabilit în teorema următoare permit construirea ecuației diferențiale liniare, omogene, de ordinul *n*, atunci când i se dă sistemul fundamental de soluții.

Teorema 2.2.6

Dacă două ecuații diferențiale liniare, omogene, de ordinul *n*,

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + ... + a_n(x) y = 0;$$

$$y^{(n)} + b_1(x) y^{(n-1)} + ... + b_n(x) y = 0$$

au același sistem fundamental de soluții pe un interval *I*, atunci ele sunt identice pe *I*, adică $a_i(x) = b_i(x)$, $\forall\, i = \overline{1,n}$ și $\forall\, x \in I$.

Demonstrație

Presupunem prin absurd că $\exists\, i=\overline{1,n}$ astfel încât $a_i(x)\neq b_i(x)$. Scăzând cele două ecuații, obținem: $\left[a_1(x)-b_1(x)\right]\cdot y^{(n-1)}+...+\left[a_n(x)-b_n(x)\right]\cdot y=0$, deci o ecuație de ordinul $n-1$ care admite *n* soluții liniar independente, ca și ecuațiile din enunț, contradicție cu ***consecința 2.2.2*** demonstrată anterior. Prin urmare, trebuie să avem $a_i(x)=b_i(x)$, $\forall\, i=\overline{1,n}$ și $\forall\, x\in I$, ceea ce arată cele două ecuații sunt identice pe *I*.

Concluzia firească a teoremei este că un sistem fundamental de soluții $\{y_1,...,y_n\}$, $x\in I$, determină o unică ecuație diferențială liniară de ordinul *n* care admite pe $\{y_1,...,y_n\}$ ca sistem fundamental pe *I*, ecuația fiind următoarea:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(n)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & y_n'' & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0. \qquad \textbf{(2.2.28)}$$

Într-adevăr, ecuația (**2.2.28**) are soluțiile $y_1,y_2,...,y_n$, fapt care se verifică imediat înlocuind y cu y_i, $\forall\, i=\overline{1,n}$; determinantul obținut este nul, având de fiecare dată două linii identice.

De asemenea, ecuația (**2.2.28**) este de ordinul *n*, întrucât coeficientul lui $y^{(n)}$ (presupunând că facem dezvoltarea sa după prima linie, de exemplu) este:

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \cdots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \cdots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n' & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\cdot w(y_1,y_2,...,y_n)\neq 0$$

pe *I*, deoarece $\{y_1,...,y_n\}$ este sistem fundamental de soluții pe *I*, deci $y_1,...,y_n$ sunt liniar independente pe $I \Leftrightarrow w(y_1,y_2,...,y_n)\neq 0$ pe *I*.

Exemplul 2.2.5

Fie $y_1(x)=\sin x$ și $y_2(x)=\cos x$, $y_1,y_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, y_1 și y_2 sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$; într-adevăr, $w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-1\neq 0$ pe $\mathbb{R}$.

Ecuația cerută va fi:

$$w(y, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \sin x & \cos x & -\sin x \\ \cos x & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y'' + y = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

2.3 Soluția problemei lui Cauchy

Definiția 2.3.1

Se numeşte problema lui Cauchy pentru ecuația diferențială liniară, omogenă, de ordinul *n*:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

cu $a_i(x): I \to \mathbb{R}$, continue pe *I*, $\forall\, i = \overline{0,n}$, $a_0(x) \neq 0$ pe *I*, problema determinării soluției $\varphi: I \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^n(I)$, care în punctul $x_0 \in I$ satisface condițiile inițiale:

$$\varphi(x_0) = y_0,\ \varphi'(x_0) = y_0^1, ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

unde $y_0, y_0^1, y_0^2, ..., y_0^{n-1}$ sunt numere reale date. Problema poate fi rezolvată în două moduri: fie ca o consecință directă a teoremei de existență şi unicitate a lui Cauchy-Lipschitz pentru ecuații diferențiale de ordinul I, cale ce presupune câteva pregătiri, deci transformări şi reformulări ale problemei în discuție, fie direct, după cum rezultă din teorema următoare.

Teorema 2.3.1 (Soluția problemei Cauchy pentru ecuația liniară, omogenă)

Fie ecuația diferențială liniară, omogenă, de ordinul *n*,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

cu $a_i(x) \in C^0(I)$, $\forall\, i = \overline{0,n}$, $a_0(x) \neq 0$ pe *I*, având $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ sistem fundamental de soluții pe *I*. Atunci există şi este unică o soluție $y \in C^n(I)$ a ecuației, care în punctul $x_0 \in I$ satisface condițiile inițiale:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^1, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1},$$

unde $y_0, y_0^1, ..., y_0^{n-1}$ sunt *n* numere date.

Demonstrație

În ipotezele teoremei rezultă că soluția generală a ecuației $L_n(y)=0$ pe I este

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x),$$

unde $c_1,...,c_n\in\mathbb{R}$ sunt constante arbitrare.

Punând condițiile inițiale, obținem sistemul algebric liniar, neomogen, de n ecuații cu n necunoscute, $c_1,c_2,...,c_n$:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) & +c_2y_2(x_0) & +\cdots & +c_ny_n(x_0) & = & y_0 \\ c_1y_1'(x_0) & +c_2y_2'(x_0) & +\cdots & +c_ny_n'(x_0) & = & y_0^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) & +c_2y_2^{(n-1)}(x_0) & +\cdots & +c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_0^{n-1} \end{cases} \quad \textbf{(2.3.1)}$$

Determinantul sistemului (**2.3.1**) este:

$$w(y_1,y_2,...,y_n)(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}\neq 0, \quad \textbf{(2.3.2)}$$

deoarece $\{y_1,y_2,...,y_n\}$ este sistem fundamental de soluții pe *I*. Conform teoremei lui Rouché rezultă că sistemul (**2.3.1**) are soluție unică. Înlocuind $c_1,c_2,...,c_n$ determinate după regula lui Cramer din sistemul (**2.3.1**) în expresia soluției generale, rezultă soluția unică, $y(x)$, căutată.

Exemplul 2.3.1

$$y''+y=0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Un sistem fundamental de soluții pentru această ecuație este $\{\cos x,\sin x\}$. Soluția generală a ecuației omogene:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x,\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

Punând condițiile inițiale, obținem:

$$y'(x)=-c_1\sin x+c_2\cos x$$

$$\begin{cases} c_2=1 \\ -c_1=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=1 \end{cases}$$

Deci, $y(x) = -\cos x + \sin x$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2.4 Ecuații diferențiale liniare de ordinul n, neomogene

În paragraful anterior am rezolvat, teoretic, problema determinării soluției generale a ecuației diferențiale liniare, de ordinul *n*, omogenă. Ne propunem să rezolvăm acum şi problema determinării soluției generale a ecuației neomogene.

Teorema 2.4.1

Fie ecuația diferențială de ordinul *n*, liniară şi neomogenă,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

cu $a_i(x)$, $i = \overline{0,n}$ şi $f(x)$ continue pe un interval *I* şi $a_0(x) \neq 0$ pe *I*.

Soluția generală a ecuației (**2.4.1**) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate şi o soluție particulară (oarecare) a ecuației neomogene.

Demonstrație

Fie $y_p(x)$ o soluție particulară a ecuației neomogene. Deci, $L_n(y_p) = f(x)$, $\forall\, x \in I$. Făcând schimbarea de funcție $y(x) = y_p(x) + z(x)$ şi ținând seama de liniaritatea operatorului L_n, obținem:

$$L_n(y) = L_n(y_p + z) = L_n(y_p) + L_n(z) = f(x).$$

Rezultă $L_n(z) = 0$, deci *z* este soluția generală a ecuației omogene asociată.

Fie $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un sistem fundamental de soluții al ecuației omogene. Atunci $z = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ şi deci,

$$y(x) = z(x) + y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + y_p(x). \qquad \textbf{(2.4.2)}$$

Observația 2.4.1

În multe aplicații practice $f(x)$ este de forma:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x).$$

Dacă $y_{1p}, y_{2p}, \ldots, y_{mp}$ sunt soluții particulare ale ecuațiilor neomogene $L_n(y) = f_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, respectiv, atunci $y_p = \sum_{k=1}^{m} y_{kp}$ este o soluție particulară a ecuației neomogene $L_n(y)=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$. Într-adevăr, ținând seama de liniaritatea operatorului L_n, obținem: $L_n\left(\sum_{k=1}^{m} y_{kp}\right)=\sum_{k=1}^{m} L_n(y_{kp})=\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$. Această observație mai este cunoscută sub numele de principiul superpoziției sau principiul suprapunerii efectelor (pentru cazul liniarității).

Exemplul 2.4.1

Fie ecuația $y''-4y'+4y=1+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$ o soluție particulară a sa va fi de forma $y_p(x)=y_{1p}(x)+y_{2p}(x)+y_{3p}(x)$, unde $y_{kp}(x)$, $k=\overline{1,3}$, sunt soluții particulare ale ecuațiilor neomogene:

$$y''-4y'+4y=1 \;\rightarrow\; y_{1p}(x)=\frac{1}{4};$$

$$y''-4y'+4y=\mathrm{e}^x \;\rightarrow\; y_{2p}(x)=\mathrm{e}^x;$$

$$y''-4y'+4y=\mathrm{e}^{2x} \;\rightarrow\; y_{3p}(x)=\frac{x^2\,\mathrm{e}^{2x}}{2},$$

ceea ce se poate verifica prin calcul direct. Deci, o soluție particulară a ecuației inițiale va fi $y_p(x)=\frac{1}{4}+\mathrm{e}^x+\frac{x^2\,\mathrm{e}^{2x}}{2}$.

Pentru a elucida problema determinării soluției generale a unei ecuații neomogene, mai rămâne de arătat cum se poate determina o soluție particulară a ecuației neomogene, presupunând că se cunoaşte soluția generală a ecuației omogene asociată.

Vom prezenta în continuare metoda variației constantelor (sau metoda constantelor variabile) a lui Lagrange pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene.

Teorema 2.4.2

Fie ecuația diferențială de ordinul *n*, liniară şi neomogenă

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),$$

unde $a_k, f\in C^0(I)$, $k=\overline{0,n}$, $a_0(x)\neq 0$ pe *I*.

Fie $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene asociate, $L_n(y)=0$, pe *I*.

O soluție particulară a ecuației neomogene (**2.4.1**) pe *I* este dată de

$$y_p(x)=y_1(x)\cdot\int c_1'(x)\,\mathrm{d}x+y_2(x)\cdot\int c_2'(x)\,\mathrm{d}x+y_n(x)\cdot\int c_n'(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textbf{(2.4.3)}$$

unde $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$ reprezintă soluția sistemului algebric, liniar, de n ecuații, cu n necunoscute, neomogen:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x) & +c_2'(x)\cdot y_2(x) & +\cdots & +c_n'(x)\cdot y_n(x) & =0 \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x) & +c_2'(x)\cdot y_2'(x) & +\cdots & +c_n'(x)\cdot y_n'(x) & =0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)}(x) & +c_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)}(x) & +\cdots & +c_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)}(x) & =0 \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}(x) & +c_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}(x) & +\cdots & +c_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}(x) & =\dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases} \qquad \textbf{(2.4.4)}$$

Demonstrație

Fie $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene asociate, $L_n(y)=0$. Soluția generală a ecuației omogene va fi:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n,$$

unde $c_1, c_2, ..., c_n$ sunt n constante arbitrare.

Metoda variației constantelor a lui Lagrange constă în următoarele: se presupune că $c_1, c_2, ..., c_n$, din soluția generală a ecuației omogene nu sunt de fapt constante, ci funcții de clasă C^1 de variabila x, pe I: $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$, verificând primele $n-1$ ecuații ale sistemului (**2.4.4**). Se pune condiția ca funcția

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + ... + c_n(x)y_n(x) \qquad \textbf{(2.4.5)}$$

să fie soluție a ecuației neomogene (**2.4.1**), obținându-se a $n-a$ ecuație din sistemul (**2.4.4**). Rezolvând sistemul (**2.4.4**) se obține soluția unică a sa:

$$\begin{cases} c_1'(x) & = & \varphi_1(x); \\ c_2'(x) & = & \varphi_2(x); \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n'(x) & = & \varphi_n(x). \end{cases} \qquad \textbf{(2.4.6)}$$

Se efectuează cuadraturile (**2.4.6**) şi se înlocuiesc în (**2.4.5**), obținându-se o soluție particulară a ecuației neomogene:

$$y_p(x) = y_1(x)\cdot\int\varphi_1(x)\mathrm{d}x + y_2(x)\cdot\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x + y_n(x)\cdot\int\varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrația teoremei revine la obținerea celei de-a $n-a$ ecuații a sistemului (**2.4.4**) în ipotezele menționate mai sus.

Fie $y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+...+c_n(x)y_n(x)$, cu $c_i(x)$ de clasă C^1 pe I, $i=\overline{1,n}$. Derivând, obținem:

$$\begin{aligned}y'(x)=c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)+...+c_n'(x)y_n(x)+\\+c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x)+...+c_n(x)y_n'(x).\end{aligned} \quad \textbf{(2.4.7)}$$

Ținând seama de prima ecuație din (**2.4.4**), rezultă:

$$y'(x)=c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x)+...+c_n(x)y_n'(x). \quad \textbf{(2.4.7)'}$$

Derivăm relația obținută şi ținem seama de a doua relație din (**2.4.4**):

$$\begin{aligned}y''(x)=c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)+...+c_n'(x)y_n'(x)+\\+c_1(x)y_1''(x)+c_2(x)y_2''(x)+...+c_n(x)y_n''(x).\end{aligned} \quad \textbf{(2.4.8)}$$

$$\Rightarrow y''(x)=c_1(x)y_1''(x)+c_2(x)y_2''(x)+...+c_n(x)y_n''(x). \quad \textbf{(2.4.8)'}$$

Repetând cele două operații, obținem succesiv:

$$y'''(x)=c_1(x)y_1'''(x)+c_2(x)y_2'''(x)+\cdots+c_n(x)y_n'''(x); \quad \textbf{(2.4.9)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y^{(n-2)}(x)=c_1(x)y_1^{(n-2)}(x)+c_2(x)y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+c_n(x)y_n^{(n-2)}(x). \quad \textbf{(2.4.10)}$$

Derivăm $y^{(n-2)}(x)$ şi ținem seama de penultima relație din (**2.4.4**):

$$\begin{aligned}y^{(n-1)}(x)=c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+...+c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)+\\+c_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y^{(n-1)}(x)=c_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n(x)y_n^{(n-1)}(x). \textbf{(2.4.11)}$$

Derivata de ordinul n va fi:

$$\begin{aligned}y^{(n)}(x)=c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)+\\+c_1(x)y_1^{(n)}(x)+c_2(x)y_2^{(n)}(x)+...+c_n(x)y_n^{(n)}(x).\end{aligned} \quad \textbf{(2.4.12)}$$

Punând condiția ca $y(x)$ dat de (**2.4.5**) să verifice ecuația neomogenă, obținem:

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=f(x)\Leftrightarrow$$

$$a_0(x)\left[c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]+$$
$$+a_0(x)\left[c_1(x)y_1^{(n)}(x)+c_2(x)y_2^{(n)}(x)+...+c_n(x)y_n^{(n)}(x)\right]+$$
$$+a_1(x)\left[c_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]+$$
$$.............................$$
$$+a_{n-1}(x)\left[c_1(x)y_1'(x)+c_2(x)y_2'(x)+...+c_n(x)y_n'(x)\right]+$$
$$+a_n(x)\left[c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+...+c_n(x)y_n(x)\right]=f(x);$$

$$a_0(x)\left[c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)\right]+$$
$$+c_1(x)\cdot L_n\left(y_1(x)\right)+c_2(x)\cdot L_n\left(y_2(x)\right)+...+c_n(x)\cdot L_n\left(y_n(x)\right)=f(x).$$

Dar, $L_n\left(y_1(x)\right)=L_n\left(y_2(x)\right)=...=L_n\left(y_n(x)\right)=0$, deoarece $y_1(x),...,y_n(x)$ sunt soluții ale ecuației omogene asociate. Rezultă a $n-a$ ecuație a sistemului (**2.4.4**):

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=\frac{f(x)}{a_0(x)}, \text{ q.e.d.} \quad \textbf{(2.4.13)}$$

Fie acum sistemul (**2.4.4**):

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n(x)=0 \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n'(x)=0 \\ \qquad\qquad .... \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)}(x)+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)}(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)}(x)=0 \\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}(x)=\dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

Sistemul are soluție unică pe *I*, deoarece

$$\Delta=w\left(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\right)\neq 0 \text{ pe } I.$$

Fie $c_1'(x)=\varphi_1(x)$, $c_2'(x)=\varphi_2(x),...,c_n'(x)=\varphi_n(x)$, soluția sa. Evident, $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, sunt continue pe *I*. Rezultă:

$$c_1(x)=\int\varphi_1(x)\mathrm{d}x,\ c_2(x)=\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x,...,\ c_n(x)=\int\varphi_n(x)\mathrm{d}x \quad \textbf{(2.4.14)}$$

şi deci

$$y_p(x)=y_1(x)\cdot\int\varphi_1(x)\mathrm{d}x+y_2(x)\cdot\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x+...+y_n(x)\int\varphi_n(x)\mathrm{d}x\,. \quad \textbf{(2.4.15)}$$

Observaţia 2.4.2

Dacă la efectuarea cuadraturilor pentru $c_k'(x)$ $k=\overline{1,n}$ se adaugă pentru fiecare cuadratură câte o constantă arbitrară A_k, $k=\overline{1,n}$, se obţine:

$$c_1(x)=\int\varphi_1(x)\mathrm{d}x+A_1, c_2(x)=\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x+A_2,...,c_n(x)=\int\varphi_n(x)\mathrm{d}x+A_n\,. \quad \textbf{(2.4.16)}$$

Înlocuind în (**2.4.5**), rezultă:

$$\begin{aligned} y(x)=&A_1y_1(x)+A_2y_2(x)+...+A_ny_n(x)+\\ &+y_1(x)\int\varphi_1(x)\mathrm{d}x+y_2(x)\int\varphi_2(x)\mathrm{d}x+...+y_n(x)\int\varphi_n(x)\mathrm{d}x, \end{aligned} \quad \textbf{(2.4.17)}$$

adică $y(x)=y_0(x)+y_p(x)$, unde cu $y_0(x)$ am notat soluţia generală a ecuaţiei omogene. Procedând deci conform acestei observaţii, se obţine direct soluţia generală a ecuaţiei neomogene.

Observaţia 2.4.3

Din demonstraţia teoremei rezultă şi algoritmul de determinare a unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene, liniare, de ordinul *n*, prin metoda variaţiei constantelor. Etapele algoritmului sunt următoarele:

a) având dat un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă, se scrie sistemul de ecuaţii (**2.4.4**):

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n(x)=0;\\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n'(x)=0;\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-2)}(x)+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-2)}(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-2)}(x)=0;\\ c_1'(x)\cdot y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)\cdot y_2^{(n-1)}(x)+...+c_n'(x)\cdot y_n^{(n-1)}(x)=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}; \end{cases}$$

b) se rezolvă acest sistem, obţinându-se soluţia unică:

$$c_1'(x)=\varphi_1(x), c_2'(x)=\varphi_2(x),...,c_n'(x)=\varphi_n(x);$$

c) se efectuează cele *n* cuadraturi, adăugând pentru fiecare câte o constantă arbitrară:

$$c_1(x)=\int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x+A_1;\, c_2(x)=\int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x+A_2,\ldots,c_n(x)=\int \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x+A_n;$$

d) rezultă soluția generală a ecuației neomogene:

$$y(x)=A_1y_1(x)+A_2y_2(x)+\ldots+A_ny_n(x)+y_1(x)\int \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x+$$
$$+y_2(x)\int \varphi_2(x)\,\mathrm{d}x+\ldots+y_n(x)\int \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplul 2.4.2

Să se determine soluția generală a ecuației:

$$x^3(y''-6y'+9y)=\left(9x^2+6x+2\right)\mathrm{e}^{3x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Ecuația omogenă asociată: $x^3(y''-6y'+9y)$; $x\neq 0\Rightarrow y''-6y'+9y=0$; un sistem fundamental pentru această ecuație este: $\begin{cases} y_1=\mathrm{e}^{3x} \\ y_2=x\mathrm{e}^{3x}\end{cases}$, ceea ce poate verifica prin calcul direct (inclusiv independența soluțiilor: $w(y_1,y_2)\neq 0$).

Soluția generală a ecuației omogene asociate:

$$y_0(x)=c_1\mathrm{e}^{3x}+c_2x\mathrm{e}^{3x}.$$

Fie acum: $y(x)=c_1(x)\cdot y_1(x)+c_2(x)\cdot y_2(x)$;

$$y(x)=c_1(x)\mathrm{e}^{3x}+c_2(x)x\mathrm{e}^{3x}.$$

Sistemul (**2.4.4**) devine, în cazul de față:

$$\begin{cases} c_1'(x)\mathrm{e}^{3x}+c_2'(x)x\mathrm{e}^{3x}=0 \\ 3c_1'(x)\mathrm{e}^{3x}+c_2'(x)(1+3x)\mathrm{e}^{3x}=\dfrac{9x^2+6x+2}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{3x}\end{cases},\ x\neq 0.$$

Se obține soluția:

$$c_1'(x)=-9-\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2};\ c_2'(x)=9+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}.$$

Rezultă:

$$c_1(x)=A_1-9x-6\ln|x|+\frac{2}{x}$$
$$c_2(x)=A_2+9\ln|x|-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}.$$

Deci,

$$y(x) = A_1 \mathrm{e}^{3x} + A_2 x \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{3x}\left[(9x-6)\ln|x| + \frac{1}{x} - 9x - 6\right],$$

unde: $y_0(x) = A_1 \mathrm{e}^{3x} + A_2 x \mathrm{e}^{3x}$ – soluția generală a ecuației omogene;

$y_p(x) = \mathrm{e}^{3x}\left[(9x-6)\ln|x| + \frac{1}{x} - 9x - 6\right]$ – o soluție particulară a ecuației neomogene, determinată prin metoda variației constantelor.

Teorema 2.4.3 (Soluția problemei Cauchy pentru ecuația liniară, neomogenă)

Fie ecuația diferențială liniară de ordinul n neomogenă

$y^{(n)} + \alpha_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1}(x) \cdot y' + \alpha_n(x) \cdot y = \varphi(x)$ cu $\alpha_i(x): I \to \mathbb{R}$, **(2.4.18)**

continue pe I, $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}$, având pe $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ca sistem fundamental de soluții pe intervalul I; $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Atunci există şi este unică o soluție $y \in C^n(I)$ care satisface condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{cases}, x_0 \in I,\ y_0, y_1, \ldots y_{n-1} \qquad \mathbf{(2.4.19)}$$

sunt n numere oarecare.

Demonstrație

Soluția generală a ecuației date pe I este

$$y(x) = \underbrace{c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)}_{y_0} + y_p(x). \qquad \mathbf{(2.4.20)}$$

Punând condițiile inițiale, rezultă:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) & +c_2 y_2(x_0) & +\cdots & +c_n y_n(x_0) & +y_p(x_0) & = y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) & +c_2 y_2'(x_0) & +\cdots & +c_n y_n'(x_0) & +y_p'(x_0) & = y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & +c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & +\cdots & +c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & +y_p^{(n-1)}(x_0) & = y_{n-1} \end{cases} \qquad \mathbf{(2.4.21)}$$

sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute, acestea fiind $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Determinantul său este $w\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)\left(x_0\right) \neq 0$. $\Rightarrow$ sistemul are soluție unică.

Înlocuind valorile găsite pentru $c_1, c_2, ..., c_n$ în $y(x)$ se obține soluția unică a problemei Cauchy.

Exemplu 2.4.3

Fie ecuația: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -6x + 11$.

Să se determine soluția problemei Cauchy:

$$y(0) = y'(0) = 0;\ y''(0) = 1.$$

Ecuația omogenă asociată are sistemul fundamental:

$$y_1 = \mathrm{e}^x,\ y_2 = \mathrm{e}^{2x},\ y_3 = \mathrm{e}^{3x}.$$

Se verifică faptul că $w\left(y_1, y_2, y_3\right) = 2\mathrm{e}^{6x} \neq 0$ pe $\mathbb{R}$. Soluția generală a ecuației omogene este: $y_0(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{3x}$.

O soluție particulară a ecuației neomogene este $y_p(x) = x$ (exercițiu). Soluția generală a ecuației neomogene este $y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{3x} + x$.

Punând condițiile inițiale, se obține:

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 = -1 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -5 \\ c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 3\mathrm{e}^x - 5\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{3x},\ x \in \mathbb{R}.$$

2.5 Ecuații diferențiale de ordinul n, liniare, cu coeficienți constanți

Forma generală a unei astfel de ecuații este:

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n)}(x) + ... + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x) = f(x), \qquad \textbf{(2.5.1)}$$

$a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă.

Pentru această clasă de ecuații se poate determina întotdeauna soluția generală. Într-adevăr, vom arăta că se poate determina întotdeauna un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă asociată. Apoi, aplicând metoda variației constantelor se poate determina și o soluție particulară pentru ecuația neomogenă, suma lor reprezentând soluția generală a ecuației neomogene.

În unele cazuri particulare legate de o anumită formă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (sau $f: I \to \mathbb{R}$) vom arăta că se poate evita metoda variației constantelor pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene, metodă cu atât mai laborioasă cu cât ordinul ecuației este mai mare. Vom prezenta, pentru aceste cazuri, metoda coeficienților nedeterminați.

Problemă de bază însă o constituie determinarea unui sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă asociată şi implicit soluția generală a sa.

Definiția 2.5.1

Se numeşte ecuația caracteristică a ecuației diferențiale de ordinul *n*, liniară, cu coeficienți constanți, omogenă:

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0,\ a_0 \neq 0,$$

ecuația algebrică de gradul *n*:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_0 = 0. \tag{2.5.2}$$

Se mai notează: $K_n(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$.

Teorema 2.5.1

Fie ecuația diferențială de ordinul *n*, liniară, omogenă, cu coeficienți constanți

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0$$

şi ecuația sa caracteristică asociată:

$$K_n(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

În aceste condiții:

a) dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile reale şi distincte, $r_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $r_i \neq r_j$, $\forall\, i \neq j$, atunci funcțiile

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x};\ y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}, \ldots, y_n(x) = \mathrm{e}^{r_n x}, \tag{2.5.3}$$

formează un sistem fundamental de soluții pe $\mathbb{R}$ al ecuației omogene;

b) dacă $n = 2k$ şi ecuația caracteristică are toate rădăcinile complexe, distincte,

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1,\ r_2 = \alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2, \ldots,\ r_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k \\ \overline{r_1} &= \alpha_1 - \mathrm{i}\beta_1,\ \overline{r_2} = \alpha_2 - \mathrm{i}\beta_2, \ldots,\ \overline{r_k} = \alpha_k - \mathrm{i}\beta_k, \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

atunci funcțiile:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \mathrm{e}^{\alpha_1 x} \cos\beta_1 x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{\alpha_2 x} \cos\beta_2 x, \ldots,\ y_k(x) = \mathrm{e}^{\alpha_k x} \cos\beta_k x, \\ y_1^*(x) &= \mathrm{e}^{\alpha_1 x} \sin\beta_1 x,\ y_2^*(x) = \mathrm{e}^{\alpha_2 x} \sin\beta_2 x, \ldots,\ y_k^*(x) = \mathrm{e}^{\alpha_k x} \sin\beta_k x \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

formează un sistem fundamental de soluții pe $\mathbb{R}$ al ecuației omogene;

c) dacă ecuația caracteristică are rădăcina $r = \alpha$ reală, multiplă, de ordinul k $(k \leq n)$, atunci funcțiile:

$$y_1(x)=e^{\alpha x},\ y_2(x)=x e^{\alpha x},...,\ y_k(x)=x^{k-1}\cdot e^{\alpha x} \qquad \textbf{(2.5.6)}$$

sunt k soluții independente pe $\mathbb{R}$ ale ecuației omogene;

d) dacă ecuația caracteristică are rădăcina complexă $r=\alpha+i\beta$ multiplă, de ordinul k $\left(k\le\frac{n}{2}\right)$, atunci funcțiile:

$$\begin{aligned}&y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_2(x)=x e^{\alpha x}\cos\beta x,...,\ y_k(x)=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ &y_1^*(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x;\ y_2^*(x)=x e^{\alpha x}\sin\beta x,...,\ y_k^*(x)=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{aligned} \qquad \textbf{(2.5.7)}$$

sunt $2k$ soluții independente pe $\mathbb{R}$ ale ecuației omogene.

Demonstrație

Fie ecuația omogenă:

$$a_0y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+...+a_{n-1}y'(x)+a_ny(x)=0,$$

pentru care căutăm soluții de forma: $y(x)=e^{rx}$, cu $r\in\mathbb{C}$, $r=\text{ct.}$ Avem:

$$y'(x)=r e^{rx};\ y''(x)=r^2 e^{rx},...,y^{(n-1)}(x)=r^{n-1}e^{rx};\ y^{(n)}(x)=r^n e^{rx}. \qquad \textbf{(2.5.8)}$$

Ecuația devine:

$$e^{rx}\left[a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_{n-1}r+a_n\right]=0.$$

Cum $e^{rx}\neq 0$, $\forall\, x\notin\mathbb{R}$, rezultă $K_n(r)=a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_{n-1}r+a_n=0$. Deci, numărul (real sau complex) r trebuie să fie rădăcină a ecuației caracteristice asociată ecuației omogene; în cazul de față ecuația caracteristică este o ecuație algebrică, de gradul n, cu coeficienți reali. Ea va avea n rădăcini, în general în corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$.

a) Dacă ecuația caracteristică $K_n(r)=0$ are toate rădăcinile reale şi distincte, $r_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, $r_i\neq r_j$, $\forall\, i\neq j$, atunci funcțiile $y_i(x)=e^{r_ix}$, $i=\overline{1,n}$ sunt soluții ale ecuației diferențiale omogene. Să arătăm că sunt independente pe $\mathbb{R}$, deci constituie un sistem fundamental de soluții pe $\mathbb{R}$ pentru ecuația omogenă:

$$w(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} & \cdots & e^{r_nx} \\ r_1 e^{r_1x} & r_2 e^{r_2x} & \cdots & r_n e^{r_nx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1x} & r_2^{n-1} e^{r_2x} & \cdots & r_n^{n-1} e^{r_nx} \end{vmatrix}=$$

$$= e^{(r_1+r_2+\ldots+r_n)x}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & r_3^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{-\frac{a_1}{a_0}\cdot x}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(r_j-r_i)\neq 0, \qquad \textbf{(2.5.9)}$$

deoarece $r_i \neq r_j$, $\forall\, i \neq j$ şi funcţia exponenţială nu se anulează pe $\mathbb{R}$.

Deci, $\{y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)\} = \{e^{r_1x}, e^{r_2x},\ldots, e^{r_nx}\}$ reprezintă un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbb{R}$ pentru ecuaţia omogenă. Soluţia generală a sa va fi, deci:

$$y(x) = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x} + \ldots + c_n e^{r_nx},\ \forall\, x\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.5.10)}$$

b) Dacă $n = 2k$ şi ecuaţia caracteristică $K_n(r) = 0$ are toate rădăcinile complexe şi distincte, rezultă în primul rând că ele sunt două câte două complex-conjugate ($a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{0,n}$). Deci, dacă $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $r_2 = \alpha_2 + i\beta_2,\ldots,$ $r_k = \alpha_k + i\beta_k$ sunt $k\left(k = \dfrac{n}{2}\right)$ rădăcini ale ecuaţiei caracteristice, atunci şi $\overline{r_1} = \alpha_1 - i\beta_1$, $\overline{r_2} = \alpha_2 - i\beta_2,\ldots,$ $\overline{r_k} = \alpha_k - i\beta_k$ sunt celelalte *k* rădăcini ale ecuaţiei caracteristice, de asemenea distincte între ele şi distincte de $r_1, r_2,\ldots, r_k$. Urmează că soluţiile:

$$\begin{aligned} &y_1(x) = e^{(\alpha_1+i\beta_1)x},\ y_2(x) = e^{(\alpha_2+i\beta_2)x},\ldots,\ y_k = e^{(\alpha_k+i\beta_k)x}; \\ &y_1^*(x) = e^{(\alpha_1-i\beta_1)x},\ y_2^*(x) = e^{(\alpha_2-i\beta_2)x},\ldots,\ y_k^*(x) = e^{(\alpha_k-i\beta_k)x} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.5.11)}$$

formează un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene pe $\mathbb{R}$ (după un calcul similar pentru $w(y_1, y_2,\ldots, y_n)$, ca în cazul rădăcinilor reale şi distincte). Dar, funcţiile $y_1(x), y_1^*(x),\ldots, y_k(x), y_k^*(x)$ nu sunt reale şi cum în practică interesează soluţiile reale, se ia drept sistem fundamental de soluţii cel format din următoarele funcţii:

$$\begin{aligned}
&Y_1(x)=\frac{y_1(x)+y_1^*(x)}{2}=e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, && Y_1^*(x)=\frac{y_1(x)-y_1^*(x)}{2i}=e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x;\\
&Y_2(x)=\frac{y_2(x)+y_2^*(x)}{2}=e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, && Y_2^*(x)=\frac{y_2(x)-y_2^*(x)}{2i}=e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x;\\
&\vdots && \vdots\\
&Y_k(x)=\frac{y_k(x)+y_k^*(x)}{2}=e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, && Y_k^*(x)=\frac{y_k(x)-y_k^*(x)}{2i}=e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x.
\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Într-adevăr, sistemul funcțiilor $\left\{Y_i(x), Y_i^*(x), i=\overline{1,k}\right\}$ formează tot un sistem fundamental de soluții, deoarece trecerea de la sistemul fundamental inițial $\left\{y_i(x), y_i^*(x), i=\overline{1,k}\right\}$ la acesta se face printr-o matrice nesingulară:

$$\begin{pmatrix} Y_1(x)\\ Y_1^*(x)\\ Y_2(x)\\ Y_2^*(x)\\ \cdots\\ Y_{k-1}(x)\\ Y_{k-1}^*(x)\\ Y_k(x)\\ Y_k^*(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\
\frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} & 0 & 0 & \dots & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_1^*(x)\\ y_2(x)\\ y_2^*(x)\\ \cdots\\ y_{k-1}(x)\\ y_{k-1}^*(x)\\ y_k(x)\\ y_k^*(x)\end{pmatrix} \tag{2.5.13}$$

$\det A=\left(-\frac{1}{2i}\right)^k\neq 0$.

Soluția generală pe $\mathbb{R}$ a ecuației omogene va fi:

$$\begin{aligned}
y(x)&=c_1 e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x+c_2 e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x+\ldots+c_k e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x+\\
&+c_1^* e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x+c_2^* e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x+\ldots+c_k^* e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

cu c_i, c_i^*, $i=\overline{1,k}$, constante arbitrare.

c) Presupunem că $r=\alpha$ este rădăcină reală, multiplă de ordinul k $(k \le n)$ a ecuației caracteristice $K_n(r)=0$. Vrem să arătăm că funcțiile

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{\alpha x},\ y_2(x)=x\,\mathrm{e}^{\alpha x},\ldots,\ y_k(x)=x^{k-1}\cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad \textbf{(2.5.15)}$$

sunt k soluții independente ale ecuației omogene. Pentru aceasta arătăm întâi că aceste funcții sunt soluții ale ecuației omogene şi apoi că sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$.

(i) $y_i(x)$, $\forall\, i=\overline{1,k}$, este soluție a ecuației omogene dacă şi numai dacă $L_n(y_i(x))=0$, $\forall\, i=\overline{1,k}$.

Avem: $L_n(y_i(x))=L_n\left(x^{i-1}\cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\right)$. Însă, $L_n\left(\mathrm{e}^{rx}\right)=\mathrm{e}^{rx}\cdot K_n(r)$, $\forall\, r\in\mathbb{C}$.

Să derivăm de m ori această identitate în raport cu r.

Avem: $\dfrac{\partial^m}{\partial r^m}\left[L_n\left(\mathrm{e}^{rx}\right)\right]=\dfrac{\partial^m}{\partial r^m}\left[\mathrm{e}^{rx}\cdot L_n(r)\right]$. Însă, operatorul L_n poate fi interschimbat cu operatorul $\dfrac{\partial^m}{\partial r^m}$, deoarece L_n este un operator liniar cu coeficienți constanți (în cazul de față), iar e^{rx} are derivate parțiale de orice ordin (în raport cu r şi x) continue (deci, conform criteriului lui Schwarz, derivatele parțiale mixte de orice ordin ale lui e^{rx}, în care variabilele în raport cu care se face derivarea intervin de acelaşi număr de ori, dar în ordini diferite, sunt egale).

Deci, $\dfrac{\partial^m}{\partial r^m}\left[L_n\left(\mathrm{e}^{rx}\right)\right]=L_n\left[\dfrac{\partial^m}{\partial r^m}\cdot \mathrm{e}^{rx}\right]=L_n\left(x^m\cdot \mathrm{e}^{rx}\right)$. Însă,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left[L_n\left(\mathrm{e}^{rx}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial r^m}\left[\mathrm{e}^{rx}\cdot K_n(r)\right]=\\ &=r^m\cdot \mathrm{e}^{rx}\cdot K_n(r)+C_m^1\cdot r^{m-1}\cdot K_n'(r)+\ldots+C_m^m\cdot r^{rx}\cdot K_n^{(m)}(r)\end{aligned}$$

conform regulii lui Leibniz de derivare a produsului a două funcții. Deci,

$$L_n\left(x^m\,\mathrm{e}^{rx}\right)=\mathrm{e}^{rx}\left[r^mK_n(r)+C_m^1r^{m-1}K_n'(r)+\ldots+C_m^mK_n^{(m)}(r)\right],\ \forall\, x\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(2.5.16)}$$

Presupunem că $r=\alpha$ este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației caracteristice $K_n(r)=0$. Atunci $K_n(\alpha)=0,\ K_n'(\alpha)=0,\ldots,\ K_n^{(k-1)}(\alpha)=0,$ $K_n^{(k)}(\alpha)\ne 0$. Rezultă deci că

$$\begin{aligned}&L_n(y_i(x))=L_n\left(x^{i-1}\cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\right)=\\ &=\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\alpha^{i-1}\cdot K_n(\alpha)+C_{i-1}^1\alpha^{i-2}K_n'(\alpha)+\ldots+C_{i-1}^{i-1}K_n^{(i-1)}(\alpha)\right]\equiv 0,\ \forall\, i=\overline{1,k},\end{aligned} \qquad \textbf{(2.5.17)}$$

adică toate funcțiile $y_i(x) = x^{i-1} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, sunt soluții ale ecuației omogene.

(ii) Liniar independența lor pe $\mathbb{R}$ rezultă din faptul că monoamele $1, x, x^2, ..., x^{k-1}$ sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$, constituind o bază pentru spațiul vectorial al polinoamelor de o nedeterminată, cu coeficienți reali (sau complecşi), de grad $k-1$.

Într-adevăr, presupunând că funcțiile $y_i(x)$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, n-ar fi liniar independente pe $\mathbb{R}$, ar rezulta că ar avea loc relația:

$$\lambda_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + \lambda_2 x \mathrm{e}^{\alpha x} + ... + \lambda_k x^{k-1} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ cu } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \neq 0. \qquad \textbf{(2.5.18)}$$

Rezultă: $\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\lambda_1 + \lambda_2 x + ... + \lambda_k x^{k-1}\right] \equiv 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Cum $\mathrm{e}^{\alpha x} \neq 0$, urmează că $\lambda_1 + \lambda_2 x + ... + \lambda_k x^{k-1} \equiv 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k \equiv 0$, contradicție cu $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \neq 0$.

L_n fiind operator liniar şi deci $y_i(x)$, $\forall\, i = \overline{1,k}$, fiind soluții ale ecuației omogene $L_n(y) = 0$, rezultă că funcția:

$$y_\alpha(x) = c_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + c_2 x \mathrm{e}^{\alpha x} + ... + c_k \cdot x^{k-1} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}, \text{ cu } c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R},$$

constante arbitrare, este o soluție a ecuației omogene; această expresie a lui $y_\alpha(x)$ se mai numeşte contribuția rădăcinii reale, multiple de ordinul *k*, $r = \alpha$, a ecuației caracteristice la soluția generală a ecuației omogene.

d) Presupunem că ecuația caracteristică are rădăcina complexă $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ multiplă, de ordinul *k*. Cum ecuația diferențială omogenă are coeficienții reali rezultă că ecuația caracteristică are şi rădăcina $r = \alpha - \mathrm{i}\beta$ multiplă, tot de ordinul *k* $\left(k \leq \dfrac{n}{2}\right)$. Conform raționamentului făcut la punctul **c)** al demonstrației rezultă că cele 2*k* rădăcini ale ecuației caracteristice vor furniza pentru sistemul fundamental al ecuației omogene următoarele soluții liniar independente:

$$\begin{aligned} &y_1(x) = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x},\ y_2(x) = x\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}, ...,\ y_k = x^{k-1} \cdot \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}, \\ &y_1^*(x) = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x},\ y_2^*(x) = x\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}, ...,\ y_k^* = x^{k-1} \cdot \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.5.19)}$$

Ca şi la punctul **b)** vom înlocui acest sistem de 2*k* soluții independente complexe, cu următorul sistem de 2*k* soluții independente reale, toate corespunzând rădăcinii $r=\alpha+\mathrm{i}\beta$ a ecuației caracteristice $K_n(r)=0$, rădăcină complexă, multiplă de ordinul k:

$$\begin{cases} Y_1(x)=\dfrac{y_1(x)+y_1^*(x)}{2}=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;\ Y_1^*(x)=\dfrac{y_1(x)-y_1^*(x)}{2i}=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x;\\ Y_2(x)=\dfrac{y_2(x)+y_2^*(x)}{2}=x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;\ Y_2^*(x)=\dfrac{y_2(x)-y_2^*(x)}{2i}=x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x;\\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ Y_k(x)=\dfrac{y_k(x)+y_k^*(x)}{2}=x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;\ Y_k^*(x)=\dfrac{y_k(x)-y_k^*(x)}{2i}=x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.\end{cases} \quad \textbf{(2.5.20)}$$

„Contribuția" rădăcinii complex-conjugate $r=\alpha+\mathrm{i}\beta$ multiplă de ordinul k a ecuației caracteristice la soluția generală a ecuației omogene va fi:

$$\begin{aligned} y_{\alpha+i\beta}(x)&=c_1\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+c_2x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+\ldots+c_kx^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x+\\ &+c_1^*\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x+c_2^*x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x+\ldots+c_k^*x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.\end{aligned} \quad \textbf{(2.5.21)}$$

Cazurile combinate se tratează similar.

Astfel, dacă ecuația caracteristică (**2.5.2**) $K_n(r)=0$ are rădăcinile reale $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_s$ de ordinele de multiplicitate respectiv $k_1,k_2,\ldots,k_s$ $\left(k_i\geq 1,\ \forall\, i=\overline{1,s}\right)$, astfel încât $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$ $\left(s<n\right)$, atunci acestor rădăcini le vor corespunde următoarele soluții ale ecuației omogene (componente ale bazei spațiului soluțiilor, $\mathrm{Ker}(L_n)$):

$$\left.\begin{array}{lcl} r=\rho_1 & : & \mathrm{e}^{\rho_1 x},\ x\,\mathrm{e}^{\rho_1 x},\cdots,x^{k_1-1}\,\mathrm{e}^{\rho_1 x};\\ r=\rho_2 & : & \mathrm{e}^{\rho_2 x},\ x\,\mathrm{e}^{\rho_2 x},\cdots,x^{k_2-1}\,\mathrm{e}^{\rho_2 x}\\ \quad\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots\\ r=\rho_s & : & \mathrm{e}^{\rho_s x},\ x\,\mathrm{e}^{\rho_s x},\cdots,x^{k_s-1}\,\mathrm{e}^{\rho_s x}\end{array}\right\} \quad \textbf{(2.5.22)}$$

Toate aceste soluții ale ecuației omogene sunt liniar independente pe $\mathbb{R}$, iar soluția generală a ecuației omogene va fi o combinație liniară, cu coeficienți constante arbitrare reale, de aceste componente ale bazei spațiului soluțiilor, $\mathrm{Ker}(L_n)$:

$$y(x)=P_1(x)\cdot\mathrm{e}^{\rho_1 x}+P_2(x)\cdot\mathrm{e}^{\rho_1 x}+\ldots+P_s(x)\cdot\mathrm{e}^{\rho_s x}, \quad \textbf{(2.5.23)}$$

unde $P_\ell(x)$, $\ell=\overline{1,s}$, este un polinom de grad $k_\ell-1$, cu coeficienți constante arbitrare:

$$P_\ell(x)=c_{\ell,1}+c_{\ell,2}x+\ldots+c_{\ell,k_\ell}x^{k_\ell-1}. \quad \textbf{(2.5.24)}$$

Cazul rădăcinilor complex-conjugate multiple se tratează similar, ţinând seama de precizările făcute la punctul **d)** din demonstraţia ***teoremei 2.5.1***.

Exemplul 2.5.1

1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$; se determină soluţia generală. Căutând soluţii de forma $y = e^{rx}$, se obţine ecuaţia caracteristică:

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0,$$

care are rădăcinile: $r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Deci, un sistem fundamental de soluţii este: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{x}$, $y_3(x) = e^{2x}$, iar soluţia generală este $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$.

2) $3y'' - 2y' - 8y = 0$; soluţia generală şi soluţia problemei Cauchy: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Ecuaţia caracteristică asociată este: $3r^2 - 2r - 8 = 0$ şi are rădăcinile: $r_1 = 2$, $r_2 = -\frac{4}{3}$, cărora le corespunde sistemul fundamental de soluţii: $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-\frac{4}{3}x}$. Soluţia generală va fi: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. Pentru a afla soluţia problemei Cauchy, se impun soluţiei generale şi derivatei sale condiţiile iniţiale date. Cum $y'(x) = 2c_1 e^{2x} - \frac{4}{3} c_2 e^{-\frac{4}{3}x}$, se obţine:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - \frac{4}{3} c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{10} \\ c_2 = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

şi deci soluţia problemei Cauchy este: $y(x) = \frac{3}{10} e^{2x} - \frac{3}{10} e^{-\frac{4}{3}x}$.

3) $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0$; se determină soluţia generală. Ecuaţia caracteristică asociată este: $r^7 + 3r^6 + 3r^5 + r^4 = 0$ şi are rădăcinile: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$; $r_5 = r_6 = r_7 = -1$. Un sistem fundamental de soluţii este: $y_1(x) = 1$; $y_2(x) = x$; $y_3(x) = x^2$; $y_4(x) = x^3$; $y_5(x) = e^{-x}$; $y_6(x) = x e^{-x}$; $y_7(x) = x^2 e^{-x}$. Soluţia generală va fi:

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3\right) + \left(c_5 + c_6 x + c_7 x^2\right) e^{-x}.$$

4) $y^{(5)}-11y^{(4)}+50y^{(3)}-94y''+13y'+169y=0$, soluția generală.

Ecuația caracteristică asociată este: $r^5-11r^4+50r^3-94r^2+13r+169=0$ şi are rădăcinile: $r_1=-1$; $r_2=r_3=3+2\mathrm{i}$; $r_4=r_5=3-2\mathrm{i}$, cărora le corespunde sistemul fundamental de soluții: $y_1=\mathrm{e}^{-x}$; $y_2=\mathrm{e}^{3x}\cos 2x$; $y_3=x\mathrm{e}^{3x}\cos 2x$; $y_4=\mathrm{e}^{3x}\sin 2x$; $y_5=x\mathrm{e}^{3x}\sin 2x$. Soluția generală va fi:

$$y=c_1\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{3x}\left[\left(c_2+c_3x\right)\cos 2x+\left(c_4+c_5x\right)\sin 2x\right].$$

Observația 2.5.1

Integrarea ecuației omogene asociată ecuației (**2.5.1**) ($L_n\left(y\right)=0$, cu $a_i\left(x\right)=a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{0,n}$, necesită rezolvarea ecuației caracteristice asociate $K_n\left(r\right)=0$ (**2.5.2**), care este o ecuație algebrică, de ordinul n, cu coeficienți reali. Soluția generală a ecuației $L_n\left(y\right)=0$ se exprimă cu ajutorul exponențialei, funcțiilor circulare, funcției polinomiale şi combinații ale acestora, în raport cu diversele tipuri de rădăcini ale ecuației caracteristice. Este important deci să se cunoască în fiecare caz forma soluțiilor din sistemul fundamental care corespund fiecărui tip de rădăcină a ecuației caracteristice.

2.6 Ecuații diferențiale liniare de ordinul n, cu coeficienți constanți, neomogene

Forma generală a unui astfel de ecuații este:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f\left(x\right), \tag{2.6.1}$$

$a_0\neq 0$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{0,n}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă. Conform ***teoremei 2.4.1***, soluția generală a ecuației (**2.6.1**) este suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate şi a soluției particulare (oarecare) a ecuației neomogene.

Metoda variației constantelor prezentată în § **2.4**, ***teorema 2.4.2***, permite determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene prin n cuadraturi, atunci când se cunoaşte soluția generală a ecuației omogene asociate. În § **2.5**, ***teorema 2.5.1***, s-a demonstrat că pentru ecuația liniară omogenă, de ordinul n, cu coeficienți constanți, se poate determina întotdeauna soluția sa generală. Prin urmare, se poate determina întotdeauna soluția generală a ecuației (**2.6.1**), utilizând rezultatele menționate anterior.

Exemplul 2.6.1

Să se determine soluția generală a ecuației $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

a) Vom determina întâi soluția generală a ecuației omogene asociate: $y'' + 3y' + 2y = 0$. Ecuația caracteristică asociată este $r^2 + 3r + 2 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = -1$ şi $r_2 = -2$. Soluția generală a ecuației omogene va fi:

$$y_0(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

b) Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene, se va utiliza metoda variației constantelor a lui Lagrange, prezentată în § **2.4**. Sistemul (**2.4.4**) devine, în cazul de față:

$$\begin{cases} c_1'\,\mathrm{e}^{-x} + c_2'\,\mathrm{e}^{-2x} = 0 \\ -c_1'\,\mathrm{e}^{-x} - 2c_2'\,\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{cases}$$

şi are soluția: $c_1' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$; $c_2' = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}$.

Efectuând cele două cuadraturi şi adăugând, de fiecare dată constantele de integrare K_1 şi K_2, se va obține:

$$c_1(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + K_1 \text{ şi } c_2(x) = -\mathrm{e}^x + \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + K_2.$$

Soluția generală a ecuației neomogene inițială va fi, conform ***observației 2.4.1***, obținută astfel:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1(x)\cdot \mathrm{e}^{-x} + c_2(x)\cdot \mathrm{e}^{-2x} = \\ &= \left[K_1 + \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-x} + \left[K_2 - \mathrm{e}^x + \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-2x} = \\ &= K_1\,\mathrm{e}^{-x} + K_1\,\mathrm{e}^{-2x} + \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \mathrm{e}^{-x} = y_0(x) + y_p(x), \end{aligned}$$

unde: $y_0(x) = K_1\,\mathrm{e}^{-x} + K_2\,\mathrm{e}^{-2x}$ este soluția generală a ecuației omogene asociate, iar $y_p(x) = \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \mathrm{e}^{-x}$ este o soluție particulară a ecuației neomogene, determinată prin metoda variației constantelor.

Trebuie făcută însă mențiunea că dacă ordinul ecuației omogene este mare, atunci calculele pentru determinarea soluției particulare devin laborioase, deoarece sistemul (**2.4.4**) are *n* ecuații, cu *n* funcții necunoscute şi rezolvarea sa este urmată şi de efectuarea celor *n* cuadraturi, date prin (**2.4.6**).

Există cazuri frecvent întâlnite în aplicații când soluția particulară a ecuației neomogene poate fi determinată prin metoda coeficienților nederminanți (sau a identificării). Aceste cazuri sunt dictate de forma funcției $\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{f(x)}{a_0}$, unde $f(x)$ este funcția din membrul drept al ecuației neomogene. Prezentăm în continuare aceste cazuri particulare.

1. Ecuații diferențiale pentru care

$$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot P_m(x), \tag{2.6.2}$$

unde $P_m(x)$ este un polinom de gradul *m* ($m\geq 0$, finit) şi $K_n(\alpha)\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\in\mathbb{R}$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice asociate ecuației omogene. În acest caz se propune, pentru soluția particulară a ecuației neomogene, o expresie de forma:

$$y_p(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot Q_m(x), \tag{2.6.3}$$

unde $Q_m(x)$ este un polinom arbitrar, cu coeficienți nedeterminați şi de gradul *m* (= grad $P_m(x)$). Se pune condiția ca $y_p(x)$ să verifice ecuația neomogenă şi prin identificare se determină coeficienții lui $Q_m(x)$.

Dacă în plus, α este rădăcină de ordinul *k* a ecuației caracteristice:

$$\Leftrightarrow K_n(\alpha)=0,\ K_n'(\alpha)=0,\dots,\ K_n^{(k-1)}(\alpha)=0,\ K_n^{(k)}(\alpha)\neq 0, \tag{2.6.4}$$

atunci se propune pentru $y_p(x)$ expresia

$$y_p(x)=x^k\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,Q_m(x) \tag{2.6.5}$$

şi din identificare vor rezulta coeficienții polinomului de grad *m*, $Q_m(x)$.

2. Ecuații diferențiale pentru care:

$$f(x)=P_{m_1}(x)\cos\alpha x+Q_{m_2}(x)\sin\alpha x, \tag{2.6.6}$$

unde P_{m_1} şi Q_{m_2} sunt polinoame de gradul m_1, respectiv m_2, iar $K_n(i\alpha)\neq 0$. ($r=\mathrm{i}\alpha$ nu este rădăcină imaginară a ecuației caracteristice).

Utilizând formulele lui Euler:

$$\cos\alpha x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}}{2}\ \text{şi}\ \sin\alpha x=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}}{2i}, \tag{2.6.7}$$

problema se reduce la cea studiată la cazul **1)** (inclusiv cu utilizarea principiului superpoziției, prezentat în ***observația 2.4.1***).

Astfel, soluția particulară va fi propusă de forma următoare:

$$y_p(x)=P_m^*(x)\cos\alpha x+Q_m^*(x)\sin\alpha x, \tag{2.6.8}$$

unde $P_m^*(x)$ şi $Q_m^*(x)$ sunt polinoame cu coeficienți nedeterminați, de gradul $m=\max\{m_1,m_2\}$. Coeficienții lui P_m^* şi Q_m^* se vor determina prin identificare.

Dacă în plus $r = \alpha \mathrm{i}$ şi, respectiv, $\overline{r} = -\alpha \mathrm{i}$ sunt rădăcini multiple de ordinul k ale ecuaţiei caracteristice, atunci $y_p(x)$ va fi propusă sub forma:

$$y_p(x) = x^k \left[P_m^*(x)\cos\alpha x + Q_m^*(x)\sin\alpha x \right]. \tag{2.6.9}$$

3) Ecuaţii diferenţiale pentru care:

$$f(x) = P_{m_1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{m_2}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, \tag{2.6.10}$$

cu aceleaşi semnificaţii ca la **2)**.

Conform aceloraşi observaţii de la punctul **2)** soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $y_p(x)$ se va propune de forma:

$$y_p(x) = \left[P_m^*(x)\cos\beta x + Q_m^*(x)\sin\beta x \right]\mathrm{e}^{\alpha x}, \tag{2.6.11}$$

dacă $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ şi $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ nu sunt rădăcini ale ecuaţiei caracteristice şi respectiv de forma:

$$y_p(x) = x^k \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}\left[P_m^*(x)\cos\beta x + Q_m^*(x)\sin\beta x \right], \tag{2.6.12}$$

dacă $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ şi $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sunt rădăcini de ordinul k ale ecuaţiei caracteristice; în ambele cazuri $m = \max\{m_1, m_2\}$.

În ambele situaţii prezentate la **3)** se recomandă întâi o schimbare de funcţie necunoscută definită prin:

$$y(x) = z(x) \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}. \tag{2.6.13}$$

Ecuaţia diferenţială neomogenă verificată de funcţia z va fi de tipul **2)**, pentru care calculele de determinare a soluţiei particulare $z_p(x)$ sunt mai puţin laborioase decât în cazul **3)**, pentru $y_p(x)$.

Exemplul 2.6.2

1) $y'' - y = x\mathrm{e}^x + x + x^3\,\mathrm{e}^{-x}$, se determină soluţia generală a ecuaţiei.

Ecuaţia omogenă are soluţia generală $y_0(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-x}$ ($r = \pm 1$ sunt rădăcini reale, simple, ale ecuaţiei caracteristice).

Pentru soluţia particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei neomogene, vom propune forma: $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + y_{p_3}(x)$, unde:

a) $L_2\left(y_{p_1}\right) = x\mathrm{e}^x$;

b) $L_2\left(y_{p_2}\right) = x$;

c) $L_2\left(y_{p_3}\right) = x^3\,\mathrm{e}^{-x}$, iar $L_2(y) = y'' - y$.

1) a) Deoarece $r=1$ este rădăcină simplă a ecuației caracteristice, se va propune $y_{p_1}(x)=x^1(Ax+B)\mathrm{e}^x$. Înlocuind în **a)** şi identificând, se va obține $A=\frac{1}{4}$ şi $B=-\frac{1}{4}$, deci $y_{p_1}(x)=\frac{x^2-x}{4}\mathrm{e}^x$.

1) b) Deoarece $r=0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, se va propune $y_{p_2}(x)=(Ax+B)\mathrm{e}^{0\cdot x}=Ax+B$. Înlocuind în **b)** şi identificând, se va obține $y_{p_2}(x)=-x$.

1) c) Deoarece $r=-1$ este rădăcină simplă a ecuației caracteristice, se va propune $y_{p_3}(x)=x^1\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\mathrm{e}^{-x}$. Înlocuind în **c)** şi identificând, se va obține: $y_{p_3}(x)=x\left(-\frac{x^3}{8}-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{8}x-\frac{3}{8}\right)\mathrm{e}^{-x}$. În final, soluția particulară a ecuației neomogene va fi:

$$y_p(x)=x\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^x-x-x\left(\frac{x^3}{8}+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\right)\mathrm{e}^{-x},$$

iar soluția generală a ecuației date va fi:

$$y(x)=c_1\,\mathrm{e}^x+c_2\,\mathrm{e}^{-x}+y_p(x).$$

2) $y''-2y'+2y=2\mathrm{e}^x\cos x-4x\mathrm{e}^x\sin x$; se caută soluția generală.

Soluția generală a ecuației omogene asociate este $y_0(x)=c_1\,\mathrm{e}^x\cos x+c_2\,\mathrm{e}^x\sin x$ ($r=1\pm\mathrm{i}$ sunt rădăcini simple ale ecuației caracteristice. Se poate proceda ca la cazul **3)**.

Se va lua $y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)$, unde:

$$y_{p_1}(x)=x\cdot\mathrm{e}^x(A\cos x+B\sin x)$$

şi

$$y_{p_2}(x)=x\cdot\mathrm{e}^x\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right],$$

deoarece $r_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$ sunt rădăcini de ordinul 1 ale ecuației caracteristice. Dacă se face mai întâi schimbarea de funcție necunoscută $y(x)=z(x)\cdot\mathrm{e}^x$, ecuația dată se transformă în următoarea:

$$z''+z=2\cos x-4x\sin x,$$

pentru care se poate proceda ca la cazul **2)**. Se va lua $z_p(x)=z_{p_1}(x)+z_{p_2}(x)$, unde

$$z_{p_1}(x)=x\cdot(A\cos x+B\sin x)$$

şi

$$z_{p_2}(x) = x\left[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right],$$

deoarece $r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$ sunt rădăcini simple ale ecuației caracteristice.

În final, se obține:

- pentru ecuația în z: $z(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + x^2\cos x$;
- pentru ecuația în y: $y(x) = \mathrm{e}^x\left[c_1\cos x + c_2\sin x + x^2\cos x\right]$.

2.7 Ecuații diferențiale liniare de ordinul n, cu coeficienți variabili, reductibile la ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

În acest paragraf se vor studia ecuațiile diferențiale liniare de tip Euler sau Cauchy, omogene şi neomogene.

Definiția 2.7.1

O ecuație diferențială liniară de ordinul n de forma:

$$a_0\cdot x^n\cdot y^{(n)}(x) + a_1\cdot x^{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}\cdot x\cdot y'(x) + a_n\cdot y(x) = f(x), \quad \textbf{(2.7.1)}$$

unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ se numeşte ecuația lui Euler, neomogenă. Dacă $f(x) \equiv 0$, atunci ecuația (**2.7.1**) este omogenă şi soluția sa este definită pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Teorema 2.7.1

Prin schimbarea de variabilă independentă $|x| = \mathrm{e}^t$, ecuația diferențială de tip Euler (**2.7.1**) se transformă într-o ecuație diferențială liniară de ordinul n, cu coeficienți constanți.

Demonstrație

Fie schimbarea de variabilă independentă $|x| = \mathrm{e}^t$. Pentru $x > 0$, aceasta devine $x = \mathrm{e}^t$. În ecuația (**2.7.1**) funcția necunoscută y depinde de variabila x, $y = y(x)$, În general, printr-o schimbare de variabilă independentă de forma $x = \varphi(t)$, funcția y, soluția ecuației, va depinde de noua variabilă t astfel: $y = y(\varphi(t))$. Este necesar să se exprime derivatele lui y în raport cu variabila x în funcție de derivatele lui y în raport cu noua variabilă t, cu utilizarea teoremei de derivare a funcțiilor compuse:

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = \psi_k\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\right), \ k = \overline{1,n}. \quad \textbf{(2.7.2)}$$

În cazul schimbării propuse, $x=\mathrm{e}^t \Leftrightarrow t=\ln x$, $x>0$, se va obține:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\text{ deci } x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)=\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

deci $x^2\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$;

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right]\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=$$

$$=\mathrm{e}^{-t}\left[-2\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]=\mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

deci $x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ etc.

Analog, pentru $x<0$, schimbarea de variabilă devine $x=-\mathrm{e}^t$ şi se obține:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\text{ deci } x\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=$$

$$=-\mathrm{e}^{-t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)=\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

deci $x^2\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$;

La fel, $x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ etc.

În general, toate produsele de forma $x^k \frac{\mathrm{d}\, y^k}{\mathrm{d}\, x^k}$ se exprimă cu ajutorul derivatelor $\frac{\mathrm{d}^s\, y}{\mathrm{d}\, t^s}$, $s=\overline{1,k}$, prin relații liniare cu coeficienți numerici.

Înlocuind în ecuația (**2.7.1**) toate produsele de forma $x^k \frac{\mathrm{d}^k\, y}{\mathrm{d}\, x^k}$, $k=\overline{1,n}$, se va obține o ecuație cu coeficienți constanți, şi anume:

$$b_0 y^{(n)}(t)+b_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+b_{n-1} y'(t)+b_n y(t)=f\left(\mathrm{e}^t\right), \qquad \textbf{(2.7.3)}$$

unde b_i, $i=\overline{0,n}$, sunt constante reale. Astfel teorema este demonstrată.

Observația 2.7.1

Ecuația omogenă asociată ecuației (**2.7.3**) admite soluții de forma $y(t)=\mathrm{e}^{rt}$, unde r este rădăcină a ecuației caracteristice asociate, $K_n(r)=0$. Revenind la ecuația inițială (**2.7.1**) şi la schimbarea de variabilă utilizată, $|x|=\mathrm{e}^t$, se deduce că ecuația Euler omogenă admite soluții de forma $y(x)=|x|^r$. Această observație va fi utilizată la exprimarea soluției generale a ecuației de tip Euler, omogenă.

Observația 2.7.2

Fie ecuația Euler, omogenă:

$$a_0 x^n y^{(n)}(x)+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1} x y'(x)+a_n y(x)=0. \qquad \textbf{(2.7.4)}$$

În acord cu ***observația 2.7.1***, căutăm soluții de forma: $y=|x|^r$. Se obțin succesiv:

$$y'(x)=r|x|^r,\ y''(x)=r(r-1)|x|^{r-2},\ldots,\ y^{(n)}(x)=r(r-1)\ldots(r-n+1)|x|^{r-n}.$$

Scrierea este generică; de fapt, calculele se fac ținând seama de semnul lui x.

Înlocuind în (**2.7.4**) şi dând factor comun pe $|x|^r$, se obține: $|x|^r \cdot K_n(r)=0$, unde $K_n(r)$ este ecuația caracteristică asociată ecuației Euler omogene:

$$\begin{aligned}K_n(r)&=a_0 r(r-1)\ldots(r-n+1)+a_1 r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots+\\&+a_{n-2} r(r-1)+a_{n-1} r+a_n=0.\end{aligned} \qquad \textbf{(2.7.5)}$$

Aceeaşi ecuație, ordonată după puterile lui r, se obține şi dacă se caută soluții de forma $y=\mathrm{e}^{rt}$ în ecuația omogenă asociată ecuației (**2.7.3**).

Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$, rădăcinile ecuației caracteristice. Analog ca la ecuațiile diferențiale liniare și omogene cu coeficienți constanți, după natura rădăcinilor r_k, $k = \overline{1,n}$, și ordinele lor de multiplicitate, se determină sistemul fundamental de soluții al ecuației omogene asociate lui (**2.7.3**) și, ținând seama și de schimbarea de variabilă $|x| = \mathrm{e}^t$, se determină și sistemul fundamental de soluții al ecuației Euler omogenă (**2.7.4**).

Avem, astfel, următoarele cazuri:

(i) Ecuația caracteristică $K_n(r) = 0$ are toate rădăcinile r_k, $k = \overline{1,n}$, reale și distincte. Acestora le va corespunde, pentru ecuația omogenă cu coeficienți constanți, în variabila *t*, sistemul fundamental de soluții:

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{r_2 t}, \ldots, y_n(t) = \mathrm{e}^{r_n t}, \qquad \textbf{(2.7.6)}$$

iar pentru ecuația Euler omogenă, în variabila *x* (**2.7.4**), în mod corespunzător,

$$y_1(x) = |x|^{r_1},\ y_2(x) = |x|^{r_2}, \ldots,\ y_n(x) = |x|^{r_n}. \qquad \textbf{(2.7.7)}$$

Soluția generală a ecuației omogene Euler va fi:

$$y(x) = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2} + \ldots + c_n |x|^{r_n}. \qquad \textbf{(2.7.8)}$$

Exemplu 2.7.1

$x^2 y'' - xy' - 3y = 0$: soluția generală.

Prin schimbarea $|x| = \mathrm{e}^t$ și căutând soluții de forma $y = |x|^r$, se obține în final ecuația caracteristică: $r(r-1) - r - 3 = 0$. $r^2 - 2r - 3 = 0$, care are rădăcinile $r_1 = -1$ și $r_2 = 3$. Ecuația în variabila independentă *t* este: $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0$, are sistemul fundamental de soluții $\left\{ y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, y_2(t) = \mathrm{e}^{3t} \right\}$ și soluția generală $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t} + c_2 \mathrm{e}^{3t}$, iar ecuația omogenă Euler inițială are sistemul fundamental $\left\{ y_1(x) = \dfrac{1}{x}, y_2(x) = x^3 \right\}$ și soluția generală $y(x) = \dfrac{c_1}{x} + c_2 x^3$, $x \neq 0$.

(ii) Ecuația caracteristică are rădăcinile complex-conjugate, simple.

Fie $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ și $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ două rădăcini complex conjugate simple ale ecuației caracteristice $K_n(r) = 0$. Acestora le vor corespunde, pentru ecuația în variabila *t*, soluțiile:

$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \cos\beta t \ \text{ și } \ y^*(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \sin\beta t, \qquad \textbf{(2.7.9)}$$

iar pentru ecuația Euler omogenă, în variabila x (**2.7.4**) (după înlocuirea $t=\ln|x|$), soluțiile:

$$y(x)=|x|^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|) \text{ şi } y^*(x)=|x|^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|). \qquad \textbf{(2.7.10)}$$

În general, dacă ecuația caracteristică $K_n(r)=0$ a ecuației Euler are rădăcinile complex-conjugate simple:

$$\begin{aligned} &r_1=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1,\ r_2=\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2,\dots,\ r_k=\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k,\\ &\overline{r_1}=\alpha_1-\mathrm{i}\beta_1,\ \overline{r_2}=\alpha_2-\mathrm{i}\beta_2,\dots,\ r_k=\alpha_k-\mathrm{i}\beta_k, \end{aligned} \qquad \textbf{(2.7.11)}$$

atunci acestora le vor corespunde următoarele soluții în sistemul fundamental:

$$\begin{aligned} &y_1=|x|^{\alpha_1}\cos(\beta_1\ln|x|),\ y_1^*=|x|^{\alpha_1}\sin(\beta_1\ln|x|),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &y_k=|x|^{\alpha_k}\cos(\beta_k\ln|x|),\ y_k^*=|x|^{\alpha_k}\sin(\beta_k\ln|x|). \end{aligned} \qquad \textbf{(2.7.12)}$$

În ecuația generală, în mod corespunzător, vom avea:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{k}|x|^{\alpha_i}\left[c_i\cos(\beta_i\ln|x|)+c_i^*\sin(\beta_i\ln|x|)\right]. \qquad \textbf{(2.7.13)}$$

pe orice interval $I\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$, cu c_i şi $c_i^*\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,k}$, constante arbitrare.

Exemplul 2.7.2

$x^3y'''+3x^2y''+xy'-y=0$; se cere soluția generală.

Căutând soluții de forma $y=|x|^r$, se obține ecuația caracteristică:

$$r(r-1)(r-2)+3r(r-1)+r-1=0\Leftrightarrow r^3-1=0\Leftrightarrow (r-1)\left(r^2+r+1\right)=0,$$

care are rădăcinile $r_1=1$, $r_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ecuația omogenă în variabila independentă t este: $\dddot{y}-y=0$, care are sistemul fundamental de soluții: $\left\{y_1(t)=\mathrm{e}^t,\ y_2(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_3(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}$ şi soluția generală:

$$y(t)=c_1\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Sistemul fundamental de soluții pentru ecuația Euler inițială este:

$$\left\{ y_1(x)=|x|,\, y_2(x)=|x|^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right),\, y_3(x)=|x|^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right\},$$

iar soluția generală este:

$$y(x)=c_1|x|+|x|^{-\frac{1}{2}}\left[c_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)+c_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right].$$

(iii) Ecuația caracteristică are rădăcina reală $r=\alpha$ multiplă de ordinul *k*. ($k\le n$). Pentru ecuația în variabila *t*, acestei rădăcini îi vor corespunde următoarele componente în sistemul fundamental:

$$\left\{ y_1(t)=\mathrm{e}^{\alpha t},\, y_2(t)=t\,\mathrm{e}^{\alpha t},\dots,y_k(t)=t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\right\}, \qquad \textbf{(2.7.14)}$$

iar pentru ecuația Euler, (înlocuind *t* cu $\ln|x|$) vom obține:

$$\left\{ y_1(x)=|x|^{\alpha},\, y_2(x)=|x|^{\alpha}\ln|x|,\dots,y_k(x)=|x|^{\alpha}\ln^{k-1}|x|\right\}. \qquad \textbf{(2.7.15)}$$

Contribuția rădăcinii $r=\alpha$ în soluția generală va fi.

$$y_\alpha(x)=|x|^{\alpha}\left(c_1+c_2\ln|x|+\dots+c_k\ln^{k-1}|x|\right)$$

sau

$$y_\alpha(x)=|x|^{\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{k}c_i\ln^{i-1}|x|. \qquad \textbf{(2.7.16)}$$

Exemplul 2.7.3

$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$; se cere soluția generală. Ecuația caracteristică: $r(r-1)(r-2)-r(r-1)+2r-2=0$; $r^3-4r^2+5r-2=0$; $(r-1)^2(r-2)=0$. Rădăcinile sale sunt $r_1=r_2=1$ şi $r_3=2$. Ecuația în variabila *t*, adică $\dddot{y}-4\ddot{y}+5\dot{y}-2y=0$, are sistemul fundamental de soluții:

$$\left\{ y_1(t)=\mathrm{e}^{t},\, y_2(t)=t\,\mathrm{e}^{t},\, y_3(t)=\mathrm{e}^{2t}\right\}$$

şi soluția generală $y(t)=c_1\mathrm{e}^{t}+c_2t\,\mathrm{e}^{t}+c_3\mathrm{e}^{2t}$. Ecuația Euler are sistemul fundamental: $\left\{ y_1(x)=|x|,\, y_2(x)=|x|\ln|x|,\, y_3(x)=x^2\right\}$ şi soluția generală $y(x)=|x|\left(c_1+c_2\ln|x|\right)+c_3x^2$.

(iv) Ecuația caracteristică $K_n(r)=0$ are rădăcinile $r=\alpha+\mathrm{i}\beta$ şi $\overline{r}=\alpha-\mathrm{i}\beta$ multiple de ordinul *k*. Analog se arată că funcțiile:

$$
\begin{aligned}
&Y_1(x)=|x|^{\alpha}\cos\left(\beta\ln|x|\right),\\
&Y_2(x)=|x|^{\alpha}\left(\ln|x|\right)\cos\left(\beta\ln|x|\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Y_k(x)=|x|^{\alpha}\left(\ln|x|\right)^{k-1}\cos\left(\beta\ln|x|\right),\\
&Y_1^*(x)=|x|^{\alpha}\sin\left(\beta\ln|x|\right),\\
&Y_2^*(x)=|x|^{\alpha}\left(\ln|x|\right)\sin\left(\beta\ln|x|\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Y_k^*(x)=|x|^{\alpha}\left(\ln|x|\right)^{k-1}\sin\left(\beta\ln|x|\right)
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(2.7.17)}
$$

sunt componentele din sistemul fundamental al ecuației Euler care corespund rădăcinilor $r=\alpha+\mathrm{i}\beta$ şi $\overline{r}=\alpha-\mathrm{i}\beta$, multiple de ordinul *k*, ale ecuației $K_n(r)=0$. „Contribuția" lor în soluția generală va fi:

$$
y_{\alpha\pm\mathrm{i}\beta}(x)=|x|^{\alpha}\cos\left(\beta\ln|x|\right)\sum_{i=1}^{k}c_i\left(\ln|x|\right)^{i-1}+|x|^{\alpha}\sin\left(\beta\ln|x|\right)\sum_{i=1}^{k}c_i^*\left(\ln|x|\right)^{i-1}, \qquad \mathbf{(2.7.18)}
$$

unde c_i şi c_i^*, $i=\overline{1,k}$, sunt $2k$ constante arbitrare.

Definiția 2.7.2

O ecuație diferențială liniară de ordinul *n* de forma:

$$
\begin{aligned}
&a_0(ax+b)^n y^{(n)}(x)+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+\\
&+a_{n-1}(ax+b)y'(x)+a_n y(x)=f(x),
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(2.7.19)}
$$

unde a_0, $a\neq 0$, *a*, *b*, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{0,n}$ şi $f:I\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe intervalul $I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$, se numeşte ecuația lui Cauchy, neomogenă.

Dacă $f(x)\equiv 0$ pe *I*, atunci (**2.7.19**) este omogenă şi soluția sa este definită pe orice interval *I* care nu conține pe $x_0=-\dfrac{b}{a}$.

Aceste ecuații se integrează la fel ca ecuațiile de tip Euler, fie căutând soluții de forma $y=|ax+b|^r$, fie făcând schimbarea de variabilă independentă $|ax+b|=\mathrm{e}^t$.

Exemplul 2.7.4

$(3x+2)^2y''+7(3x+2)y'=0$; soluția generală.

Facem schimbarea de variabilă independentă $|3x+2| = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln|3x+2|$.

Presupunem că $3x+2>0 \Rightarrow t = \ln(3x+2)$ şi $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{3x+2}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{3}{\mathrm{e}^t} = 3\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(3\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} =$$

$$= 3\mathrm{e}^{-t}\left(-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{e}^{-t} + 3\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) = 9\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$

Înlocuind în ecuaţie, se obţine:

$$9\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) + 7\cdot 3\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.$$

$$9\ddot{y} + 12\dot{y} = 0;\ 3\ddot{y} + 4\dot{y} = 0;\ y = \mathrm{e}^{rt} \Rightarrow 3r^2 + 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$y_1(t) = 1,\ y_2(t) = \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t} \Rightarrow y(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t} \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2(3x+2)^{-\frac{4}{3}}.$$

Pentru cazul $3x+2<0$, $t = \ln(-3x-2)$ şi calculele se desfăşoară similar.

Observaţia 2.7.3 (Ecuaţiile Euler şi Cauchy neomogene)

Din cele prezentate până acum rezultă că se poate determina întotdeauna un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţiile Euler şi Cauchy omogene. Utilizând şi metoda variaţiei constantelor, se poate determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, deci se poate determina întotdeauna soluţia generală a unei ecuaţii neomogene de aceste tipuri. De obicei calculele sunt laborioase, mai ales dacă ordinul ecuaţiei este superior lui 2. De aceea, atunci când este posibil, se aplică metoda coeficienţilor nedeterminanţi pentru ecuaţia transformată prin schimbarea de variabilă $|x| = \mathrm{e}^t$ pentru ecuaţia Euler, respectiv $|ax+b| = \mathrm{e}^t$, pentru ecuaţia Cauchy. Astfel, dacă în ecuaţia transformată:

$$b_0y^{(n)}(t) + b_1y^{(n-1)}(t) + \ldots + b_{n-1}y'(t) + b_ny(t) = f\left(\mathrm{e}^t\right)$$

termenul liber al ecuaţiei are una din formele particulare prezentate în § **2.6**, se va proceda în consecinţă, obţinându-se o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene în variabila *t*. În final se determină soluţia generală a ecuaţiei iniţiale Euler sau Cauchy, prin schimbarea $t = \ln|x|$, respectiv $t = \ln|ax+b|$.

Exemplul 2.7.5

Să se determine soluția generală a ecuației:

$$(x+1)^2 y'' + (x+1) y' + y = x^2 + 2\sin\left(\ln|x+1|\right);\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Schimbarea de variabilă $|x+1| = \mathrm{e}^t$ conduce la ecuația:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = \mathrm{e}^{2t} - 2\,\mathrm{e}^t + 1 + 2\sin t.$$

Soluția generală a ecuației omogene este:

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Pentru ecuația omogenă se caută o soluție particulară de forma:

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) + y_{p_3}(t) + y_{p_4}(t),$$

unde $y_{p_i}(t)$, $i = \overline{1,4}$, sunt soluțiile particulare ale ecuațiilor neomogene următoare:

1) $L_2\left(y_{p_1}\right) = \mathrm{e}^{2t}$;

2) $L_2\left(y_{p_2}\right) = -2\,\mathrm{e}^t$;

3) $L_2\left(y_{p_3}\right) = 1$;

4) $L_2\left(y_{p_4}\right) = 2\sin t$.

Având în vedere forma expresiei din membrul doi al fiecărei ecuații, soluția particulară corespunzătoare se va propune, respectiv, de forma:

$$y_{p_1}(t) = A\mathrm{e}^{2t};\ y_{p_2}(t) = B\mathrm{e}^t;\ y_{p_3}(t) = C;\ y_{p_4}(t) = t\left(D\cos t + E\sin t\right).$$

După identificare se obține:

$$y_{p_1}(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2t};\ y_{p_2}(t) = -\mathrm{e}^t;\ y_{p_3}(t) = 1;\ y_{p_4}(t) = -t\cos t.$$

Astfel, soluția generală a ecuației în variabila t va fi:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + 1 - t\cos t,$$

iar soluția generală a ecuației inițiale va fi:

$$y(x) = c_1 \cos\left(\ln|x+1|\right) + c_2 \cos\left(\ln|x+1|\right) + \frac{1}{5}(x+1)^2 - x - \left(\ln|x+1|\right)\cos\left(\ln|x+1|\right).$$

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE NR. 3
SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

3.1 Introducere

Intervin în mod frecvent în aplicații tehnico-inginerești. Pot fi de ordinul I sau de ordin superior, cu cel puțin două funcții necunoscute.

Un sistem de 3 ecuații diferențiale cu trei funcții necunoscute va fi definit astfel:

$$\begin{cases} F_1\left(t;x,x',\ldots,x^{(m)};y,y',\ldots,y^{(n)};z,z',\ldots,z^{(p)}\right)=0 \\ F_2\left(t;x,x',\ldots,x^{(m)};y,y',\ldots,y^{(n)};z,z',\ldots,z^{(p)}\right)=0 \\ F_3\left(t;x,x',\ldots,x^{(m)};y,y',\ldots,y^{(n)};z,z',\ldots,z^{(p)}\right)=0, \end{cases} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

unde $F_1,F_2,F_3 : I\times E\times F\times G \to \mathbb{R}$, cu $I\subset\mathbb{R}$, interval, $E\subset\mathbb{R}^{m+1}$, $F\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $G\subset\mathbb{R}^{p+1}$, t se numește variabila independentă iar x, y şi z se numesc funcțiile necunoscute. Prin soluție a acestui sistem se înțelege un triplet de 3 funcții, $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ toate definite pe I şi derivabile de m, respectiv n, respectiv p ori pe I şi care verifică identic sistemul (**3.1.1**) pe $I\times E\times F\times G$. Dacă $\max(m,n,p)=k>1$, sistemul (**3.1.1**) se numeşte de ordinul k, iar dacă $m=n=p=1$, sistemul se numeşte de ordinul 1. Analog se poate defini un sistem de ecuații diferențiale de ordinul k sau 1, de s ecuații cu s funcții necunoscute.

Dacă sistemul (**3.1.1**) este rezolvat în raport cu derivatele de ordinul cel mai înalt, adică este de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m}=f_1\left(t;x,x',\ldots,x^{(m-1)};y,y',\ldots,y^{(n-1)};z,z',\ldots,z^{(p-1)}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}=f_2\left(t;x,x',\ldots,x^{(m-1)};y,y',\ldots,y^{(n-1)};z,z',\ldots,z^{(p-1)}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}^p z}{\mathrm{d}t^p}=f_3\left(t;x,x',\ldots,x^{(m-1)};y,y',\ldots,y^{(n-1)};z,z',\ldots,z^{(p-1)}\right), \end{cases} \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

atunci se numeşte canonic sau explicit.

Teorema 3.1.1

Un sistem de ecuații diferențiale de ordin superior poate fi transformat într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I prin introducerea de noi funcții necunoscute.

Demonstrație

Fie sistemul (**3.1.2**) anterior. Introducem următoarele funcții necunoscute:

$$x_1 = x,\ x_2 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\ x_3 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\dots,\ x_m = \frac{\mathrm{d}x_{m-1}}{\mathrm{d}t},$$

$$y_1 = y,\ y_2 = \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t},\ y_3 = \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t},\dots,\ y_n = \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.1.3}$$

$$z_1 = z,\ z_2 = \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t},\ z_3 = \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t},\dots,\ z_p = \frac{\mathrm{d}z_{p-1}}{\mathrm{d}t}.$$

Atunci, deoarece $\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} = x^{(m)}$; $\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = y^{(n)}$; $\frac{\mathrm{d}z_p}{\mathrm{d}t} = z^{(p)}$, sistemul (**3.1.2**) devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} = f_1\left(t; x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, \dots y_n; z_1, \dots, z_p\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = f_2\left(t; x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, \dots y_n; z_1, \dots, z_p\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}z_p}{\mathrm{d}t} = f_3\left(t; x_1, x_2, \dots, x_m; y_1, \dots y_n; z_1, \dots, z_p\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2; \quad \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2; \quad \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = z_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_3; \quad \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_3; \quad \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = z_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{m-1}}{\mathrm{d}t} = x_m; \quad \dfrac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}t} = y_n; \quad \dfrac{\mathrm{d}z_{p-1}}{\mathrm{d}t} = z_p, \end{cases} \tag{3.1.3$'$}$$

deci un sistem canonic, de ordinul 1, cu $m + n + p$ ecuații, q.e.d.

Consecința 3.1.1

O ecuație diferențială de ordinul *n* se poate transforma într-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul I.

Fie ecuația diferențială de ordinul *n* rezolvată în raport cu $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right). \tag{3.1.4}$$

Introducem funcțiile:

$$y_1 = y$$
$$y_2 = \frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = y'$$
$$y_3 = \frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}\left(= y''\right)$$
....
$$y_n = \frac{\mathrm{d}\,y_{n-1}}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}^{n-1}\,y}{\mathrm{d}\,x^{n-1}}\left(= y^{(n-1)}\right).$$

Rezultă $y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}\,y_n}{\mathrm{d}\,x}$, deci ecuația (**3.1.4**) este echivalentă cu sistemul (**3.1.5**), de ordinul I, din *n* ecuații, cu *n* funcții necunoscute, $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ şi y_n.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = y_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = y_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_{n-1}}{\mathrm{d}\,x} = y_n, \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_n}{\mathrm{d}\,x} = f\left(x, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, y_n\right). \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Exemplul 3.1.1

Fie ecuația:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x). \tag{3.1.6}$$

Fie $\alpha_i(x) = -\frac{a_i(x)}{a_0(x)}$, $i = \overline{1,n}$. Rezultă:

$$y^{(n)} = \alpha_1(x)\cdot y^{(n-1)} + ... + \alpha_{n-1}(x)\cdot y' + \alpha_n(x)\cdot y + f(x).$$

Fie $y_1 = y$; $y_2 = \frac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = y'$; $y_3 = \frac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = y''$, $y_n = \frac{\mathrm{d}\,y_{n-1}}{\mathrm{d}\,x} = y^{(n-1)}$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,y_n}{\mathrm{d}\,x} = y^{(n)}$. Ecuația este echivalentă cu:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = y_3 \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_n}{\mathrm{d}\,x} = \alpha_n \cdot y_1 + \alpha_{n-1} \cdot y_2 + \ldots + \alpha_1 \cdot y_n + f(x) \end{cases} \tag{3.1.7}$$

sau într-o scriere matriceală:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_3}{\mathrm{d}\,x} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_n}{\mathrm{d}\,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \tag{3.1.8}$$

Teorema 3.1.2

Rezolvarea unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I se poate reduce la rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul n.

Demonstrație

Fie sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul I:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_n}{\mathrm{d}\,x} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Derivăm prima ecuație de $n-1$ ori şi apoi pe toate celelalte ecuații de $n-2$ ori fiecare. Se obțin astfel $n+(n-1)\cdot(n-1)=n^2-n+1$ ecuații în care apar $y_2, y_3, \ldots, y_n$ şi toate derivatele lor până la ordinul $n-1$ şi y_1 cu toate derivatele sale până la ordinul n. Eliminăm între aceste ecuații variabilele $y_2, y_3, \ldots, y_n$ şi toate derivatele lor până la ordinul $n-1$. Se va obține o relație în care rămâne y_1 şi toate derivatele sale până la ordinul n, deci o ecuație diferențială de ordinul n în care funcția necunoscută este y_1. Analog se poate proceda cu orice altă funcție necunoscută.

Exemplul 3.1.2

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 4y_1 + 5y_2 = x^2; \\ \ddot{y}_2 + 5y_1 + 4y_2 = x + 1. \end{cases}$$

Conform teoremei de reducere la un sistem de ordinul I se va obține un sistem de ordinul I cu 4 ecuații şi 4 funcții necunoscute. Conform teoremei de reducere la o singură ecuație diferențială se va obține o ecuație diferențială de ordinul 4 cu necunoscuta y_1 sau y_2. Derivăm de două ori prima ecuație:

$$\ddddot{y}_1 + 4\ddot{y}_1 + 5\ddot{y}_2 = 2.$$

Dar:

$$\ddot{y}_1 = -4y_1 - 5y_2 + x^2 \text{ şi } \ddot{y}_2 = -5y_1 - 4y_2 + x + 1.$$

Atunci:

$$\ddddot{y}_1 - 16y_1 - 20y_2 + 4x^2 - 25y_1 - 20y_2 + 5x + 5 = 2$$

$$\ddddot{y}_1 - 41y_1 - 40y_2 = -4x^2 - 5x - 3.$$

Din prima ecuație: $5y_2 = -\ddot{y}_1 - 4y_1 + x^2$.

Deci:

$$\ddddot{y}_1 - 41y_1 - 8\ddot{y}_1 + 32y_1 - 8x^2 = -4x^2 - 5x - 3$$

$$\ddddot{y}_1 - 8\ddot{y}_1 - 9y_1 = 4x^2 - 5x - 3;\ y_{1p}(x) = \frac{-1}{9}\left(4x^2 - 5x + \frac{37}{9}\right)$$

$$r^4 + 8r^2 - 9 = 0;\ r_{1,2} = \pm 1;\ r_{3,4} = \pm 3\mathrm{i}.$$

Atunci:

$$y_1 = y_{10} + y_{1p} = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x - \frac{1}{9}\left(4x^2 - 5x + \frac{37}{9}\right).$$

Din prima ecuație a sistemului inițial mai avem: $y_2 = \frac{1}{5}\left(x^2 - \ddot{y}_1 - 4y_1\right)$.

Rezultă: $y_2 = -c_1 \mathrm{e}^x - c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + \frac{1}{9}\left(5x^2 - 4x + \frac{44}{9}\right)$.

Teorema 3.1.3 (de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale de ordinul I (scrise sub formă canonică))

Fie punctul $\left(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ şi fie sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, y_1}{\mathrm{d}\, x} = F_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_2}{\mathrm{d}\, x} = F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_n}{\mathrm{d}\, x} = F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \end{cases}$$

care îndeplineşte condițiile:

a) Funcțiile $F_k\left(x, y_1, ..., y_n\right)$, $k = \overline{1,n}$, sunt continue pe compactul $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definit prin:

$$\left|x - x_0\right| \le a\,,\ \left|y_k - y_{k0}\right| \le b_k\,,\ k = \overline{1,n}$$

$$D = \left\{\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \left| \left|x - x_0\right| \le a; \left|y_k - y_{ko}\right| \le b_k, k = \overline{1,n}\right.\right\},$$

unde a şi b_k, $k = \overline{1,n}$ sunt numere date.

b) Funcțiile F_k, $k = \overline{1,n}$ sunt local lipschitziene pe D în raport cu argumentele $y_1, y_2, ..., y_n \Leftrightarrow \exists\, L_1, L_2, ..., L_n > 0$, astfel încât $\forall\ \left(x, y_{11}, y_{21}, ..., y_{n1}\right)$ şi $\left(x, y_{12}, y_{22}, ..., y_{n2}\right) \in D$ au loc inegalitățile:

$$\begin{aligned} &\left|F_k\left(x, y_{11}, y_{21}, ..., y_{n1}\right) - F_k\left(x, y_{12}, y_{22}, ..., y_{n2}\right)\right| \le \\ &\le L_1\left|y_{11} - y_{12}\right| + L_2\left|y_{21} - y_{22}\right| + ... + L_n\left|y_{n1} - y_{n2}\right|. \end{aligned}$$

Atunci există şi este unică o soluție a sistemului dat, şi anume:

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x),\ \text{cu}\ \varphi_k : I \to \mathbb{R},\ k = \overline{1,n},$$

$$I = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|x - x_0\right| \le h\right\}$$

$$h = \min\left\{a, \frac{b_k}{M}, k = \overline{1,n}\right\};\ M = \max\left\{\sup_D\left|F_1\right|, \sup_D\left|F_2\right|, ..., \sup_D\left|F_n\right|\right\},$$

φ_k derivabile pe I şi care verifică următoarele condiții inițiale:

$$\varphi_k\left(x_0\right) = y_{k0}\,,\ k = \overline{1,n}\,.$$

Funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ verifică şi următorul sistem de ecuații integrale:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = y_{1,0} + \int\limits_{x_0}^{x} F_1(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \cdot \mathrm{d}t \\ \varphi_2(x) = y_{2,0} + \int\limits_{x_0}^{x} F_2(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \cdot \mathrm{d}t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) = y_{n,0} + \int\limits_{x_0}^{x} F_n(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \cdot \mathrm{d}t. \end{cases} \qquad \mathbf{(3.1.10)}$$

Demonstrația teoremei se poate face prin metoda aproximațiilor succesive sau utilizând principiul contracției.

Observația 3.1.1

Problema determinării unei soluții particulare $(y_1(x), ..., y_n(x))$ a sistemului care pentru $x = x_0$ ia valorile inițiale $(y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{n,0})$ se numeşte problema lui Cauchy.

O consecință importantă a acestei teoreme este următoarea:

Teorema 3.1.4

Fie sistemul de *n* ecuații diferențiale de ordinul I cu *n* funcții necunoscute: $\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = F_k(x, y_1, ..., y_n)$, $k = \overline{1,n}$, unde F_k sunt continue şi au derivate parțiale de ordinul I continue într-un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Atunci soluția generală a sistemului depinde de *n* constante arbitrare.

Demonstrație

Rezultă, din ipoteze, că F_k sunt diferențiabile pe *D*, adică sunt local lipschitziene în *D*, deci are loc teorema anterioară pentru orice punct $(x_0, y_{10}, ..., y_{n0}) \in D$. Cum $y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$ sunt arbitrare, dar fixate, rezultă că soluția generală a sistemului depinde de *n* constante arbitrare.

Exemplul 3.1.3

Să se determine soluția generală a sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{z}+y \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z^2}{y}-z \end{cases},\quad y,z\neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y} \\ -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}. \end{cases}$$

Fie $u=\dfrac{1}{y}$ şi $v=\dfrac{1}{z}$ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-u-v \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-u+v. \end{cases}$

Aplicăm metoda eliminării: derivăm prima ecuație în raport cu x:

$$\left.\begin{array}{l} u''=-u'-v' \\ v'=-u+v \end{array}\right\}\Rightarrow u''=-u'+u-v\,.$$

Din prima ecuație: $v=-u-u'$.

Deci, $u''=-u'+u+u+u'\Leftrightarrow u''=2u\Leftrightarrow u''-2u=0$, ecuație cu coeficienți constanți, omogenă

$$u=\mathrm{e}^{rx}\Rightarrow r^2-2=0,\ r_{1,2}=\pm\sqrt{2}\quad u=c_1\cdot\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}+c_2\cdot\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}.$$

Dar $v=-u-u'=-c_1\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}-c_2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}-c_1\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}\cdot x}+c_2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}$.

Deci: $\begin{cases} u=\dfrac{1}{y}=c_1\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}+c_2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}, \\ v=\dfrac{1}{z}=-\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot c_1\cdot\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}-c_2\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}, \end{cases}\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$

De aici se obțin z şi y, reprezentând soluția generală a sistemului:

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{c_1\,\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}+c_2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}}, \\ z=\dfrac{1}{-\left(1+\sqrt{2}\right)c_1\cdot\mathrm{e}^{x\sqrt{2}}-\left(1-\sqrt{2}\right)c_2\cdot\mathrm{e}^{-x\sqrt{2}}}. \end{cases}$$

Consecința 3.1.2

Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ depinde de n constante arbitrare. Într-adevăr, ecuația este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, y_1}{\mathrm{d}\, x} = y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_2}{\mathrm{d}\, x} = y_3 \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_n}{\mathrm{d}\, x} = f\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \end{cases} \tag{3.1.11}$$

$f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, D$ compact, $f \in C^1(D)$, pentru care se aplică teorema anterioară. Semnificația condițiilor inițiale este următoarea: fie $x_0 \in [a,b] = I$; atunci:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{1,0} = y(x_0), \\ y_2(x_0) = y_{2,0} = y'(x_0), \\ y_3(x_0) = y_{3,0} = y''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_{n,0} = y^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Astfel, avem teorema următoare:

Teorema 3.1.5

Fie ecuația diferențială de ordinul n, $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ cu f continuă şi cu derivate parțiale de ordinul I continue în raport cu toate argumentele sale, într-un domeniu $D = [a,b] \times E$, cu $E \subset \mathbb{R}^n$. Atunci, $\forall\, x_0 \in [a,b]$, există şi este unică o soluție a ecuației $y = \varphi(x)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $I = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x - x_0| \le h, h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right) \right\}$, a, b, date, φ derivabilă pe I şi care soluție satisface condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_{1,0}, \\ y'(x_0) = y_{2,0}, \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(x_0) = y_{n-1,0}, \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n,0}, \end{cases}$$ unde $(y_{10}, y_{20}, ..., y_{n,0}) \in E$ sunt n numere date.

Observația 3.1.2

Teorema se aplică în cazul ecuației diferențiale liniare şi omogene de ordinul n, cu coeficienți funcții continue:

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = 0,$$

$a_0(x) \neq 0$, $a_i(x)$, $i = \overline{0,n}$, continue. De asemenea, teorema se aplică şi în cazul ecuațiilor liniare şi omogene de ordinul n sau în cazul ecuațiilor liniare de tip Euler ($x \neq 0$).

3.2 Sisteme de ecuații diferențiale liniare, de ordinul I

Definiția 3.2.1

Un sistem de ecuații diferențiale de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = a_{1,1}(x)\cdot y_1 + a_{1,2}(x)\cdot y_2 + ... + a_{1,n}(x)\cdot y_n + f_1(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = a_{2,1}(x)\cdot y_1 + a_{2,2}(x)\cdot y_2 + ... + a_{2,n}(x)\cdot y_n + f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = a_{n,1}(x)\cdot y_1 + a_{n,2}(x)\cdot y_2 + ... + a_{n,n}(x)\cdot y_n + f_n(x), \end{cases} \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

unde $a_{i,j}, f_i \in C^0(I)$, $i,j = \overline{1,n}$, iar $y_1, y_2, ..., y_n \in C^1(I)$ (I interval) sunt funcții necunoscute, se numeşte sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul I. Dacă $f_1 = f_2 = ... = f_n \equiv 0$ pe I sistemul se numeşte omogen; în caz contrar se numeşte neomogen. $a_{i,j}$ se numesc coeficienții sistemului. Condensat, sistemul se poate scrie astfel:

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\cdot y_j + f_i(x),\ i = \overline{1,n}. \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

Un sistem liniar de ordinul I satisface condițiile din teorema de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy. Într-adevăr funcțiile:

$$F_i(x, y_1, ..., y_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \cdot y_j + f_i(x),\ i = \overline{1,n},$$

sunt continue pe $I \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ și diferențiabile în raport cu $y_1, y_2, ..., y_n$, deci local lipschitziene în raport cu aceste argumente.

De aceea, oricare ar fi $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{n,0}) \in I \times D$ există o soluție unică $x \mapsto (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ definită pe o vecinătate a lui $x_0 \in I$ $(\{|x - x_0| \le h\})$ care verifică condițiile inițiale $y_i(x_0) = y_{i,0}$, $i = \overline{1,n}$. Se poate demonstra că orice asemenea soluție se poate prelungi până la extremitățile intervalului *I*, dacă *I* este închis. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că sistemele liniare cu coeficienți continui nu au soluții care tind la infinit într-un timp finit. Geometric soluția $(y_1(x), ..., y_n(x))$ cu $x \in J \subset I$ este o curbă din $\mathbb{R}^n$ (sub formă parametrică), de clasă $C^1(J)$. Astfel de sisteme se rezolvă prin mai multe metode.

a) Metoda eliminării, care constă în reducerea sistemului la o singură ecuație diferențială liniară de ordinul *n*, pentru una din funcțiile necunoscute ale sistemului și rezolvarea apoi a acestei ecuații.

b) Metoda combinațiilor integrabile, care presupune scrierea sistemului sub formă simetrică:

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{F_1} = \frac{\mathrm{d}y_2}{F_2} = ... = \frac{\mathrm{d}y_n}{F_n} (= \mathrm{d}x)$$

și apoi determinarea a $n-1$ integrale prime independente, obținându-se soluția generală a sistemului sub formă implicită, ca intersecție de hipersuprafețe din $\mathbb{R}^n$.

c) Metoda matriceală

Reamintim că noțiunile de limită, continuitate, diferențiabilitate, integrabilitate pentru funcțiile matriceale se reduc la noțiunile respective pentru elementele matricei.

Fie

$$Y = [y_1, y_2, ..., y_n]^{\mathrm{t}};\ A(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \le i,j \le n};\ F(x) = [f_1(x), ..., f_n(x)]^{\mathrm{t}}.$$

Sistemul (**3.2.1**) se va scrie:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x) \cdot Y + F(x), \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

iar condițiile inițiale se scriu:

$$Y(x_0)=Y_0 \Leftrightarrow Y(x_0)=\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{n,0} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

Teorema 3.2.1

Soluția generală a sistemului neomogen $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)\cdot Y+F(x)$ este suma dintre soluția generală a sistemului omogen asociat, $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)Y$ şi o soluție particulară a sistemului neomogen.

Demonstrație

Fie Y_p o soluție particulară a sistemului neomogen şi fie schimbarea de funcții definită prin $Y=Z_0+Y_p$, unde Y este soluția generală a sistemului neomogen. Înlocuind în (**3.2.3**) se obține:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(Z_0+Y_p)}{\mathrm{d}x};\ \frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}x}=A(x)(Z_0+Y_p)+F(x).$$

Dar $\frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}x}=A(x)Y_p+F(x)$. Rezultă $\frac{\mathrm{d}Z_0}{\mathrm{d}x}=A(x)Z_0$, adică Z_0 este soluția generală a sistemului omogen asociat, q.e.d.

În continuare ne vom ocupa de structura mulțimii soluțiilor sistemului omogen asociat sistemului (**3.2.3**). Fie sistemul diferențial liniar omogen: $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)\cdot Y$, $x\in I$.

Notăm cu V mulțimea tuturor soluțiilor sistemului definite pe intervalul I. Vom arăta că V este un subspațiu vectorial finit dimensional al spațiului vectorial real infinit dimensional, $C^1(I)$.

Teorema 3.2.2

Dacă A este o matrice de ordinul n, atunci V este un spațiu vectorial izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Demonstrație

Fie Y_1 şi Y_2 două soluții ale sistemului omogen; $Y_1, Y_2 \in V$:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{n,1} \end{pmatrix};\ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \\ \vdots \\ y_{n,2} \end{pmatrix}.\ \text{Deci,}\ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}x} = A(x)\cdot Y_1; \\ \dfrac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}x} = A(x)\cdot Y_2. \end{array}$$

Fie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, constante arbitrare. Atunci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c_1Y_1 + c_2Y_2\right) = c_1\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}x} + c_2\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}x} = c_1 \cdot A(x)\cdot Y_1 + c_2 \cdot A(x)\cdot Y_2 = A(x)\left(c_1Y_1 + c_2Y_2\right)$$

adică $c_1Y_1 + c_2Y_2$ este, de asemenea, soluție a sistemului omogen, deci V este spațiu vectorial. Arătăm acum că $\dim V = n$. Fie $x_0 \in I$ arbitrar. Fiecărei soluții a sistemului, $Y \in V$, îi putem ataşa punctul $Y(x_0) \in \mathbb{R}^n$, $Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix}$. Am definit, astfel, o transformare liniară $\mathsf{T} : V \to \mathbb{R}^n$; arătăm că T este izomorfism.

T este surjectivă, deoarece $\operatorname{Im}\mathsf{T} = \mathbb{R}^n$. Într-adevăr teorema de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy afirmă că $\forall\, Y_0 \in \mathbb{R}^n$, există o soluție Y a sistemului, care verifică condiția inițială $Y(x_0) = Y_0$.

T este injectivă; într-adevăr, conform teoremei de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy rezultă că singura soluție cu condiția inițială $Y(x_0) = O_n$ este $Y = O_n$, deci $\ker\mathsf{T} = O_n$, adică T este injectivă.

În consecință, T este izomorfism între V şi $\mathbb{R}^n$ şi cum $\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$ rezultă că $\dim(V) = n$, adică ordinul matricei A. Deci, orice mulțime de n soluții liniar independente ale sistemului este bază a spațiului soluțiilor.

Fie

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{n,1} \end{pmatrix};\quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \\ \vdots \\ y_{n,2} \end{pmatrix}, \ldots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ \vdots \\ y_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

n soluții liniar independente ale sistemului omogen $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x)\cdot Y$. atunci orice soluție Y a sistemului omogen poate fi exprimată sub forma: $Y = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot Y_k$, cu

$c_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, constante. Y scrisă sub această formă se numeşte soluția generală a sistemului omogen. Din ea se poate obține orice soluție particulară, prin particularizarea constantelor c_k, $k=\overline{1,n}$, în urma impunerii condițiilor inițiale $Y(x_0)=Y_0$. Altă formă de scriere:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

Definiție 3.2.2

Fie n soluții ale sistemului liniar, omogen, $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)\cdot Y$, şi anume: $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$. Dacă ele sunt liniar independente pe I, atunci matricea $W=[Y_1,Y_2,\dots,Y_n]$ se numeşte matrice wronski sau matrice fundamentală de soluții , iar $w=\det W$ s.n. wronskianul celor n soluții.

Observația 3.2.1

Soluția generală a sistemului omogen se scrie $Y=W\cdot C$, unde $C=[c_1,\dots,c_n]^{\mathrm{t}}$.

Teorema 3.2.3

a) Matricea W satisface ecuația diferențială $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=A\cdot W$.

b) Wronskianul $w(x)$ are expresia $w(x)=w(x_0)\cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, A(x)\cdot \mathrm{d}x}$, $\forall\, x_0 \in I$.

c) Soluțiile $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ (coloanele lui W) sunt liniar independente, dacă şi numai dacă $w(x)\neq 0$ pe I.

Demonstrație

a) şi **c)** – exercițiu.

b) Ținem seama de regula de derivare a unui determinant:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}x},Y_2,\dots,Y_n\right]+\left[Y_1,\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}x},Y_3,\dots,Y_n\right]+\dots+\left|Y_1,Y_2,\dots,Y_{n-1},\frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}x}\right|=$$

$$=|AY_1,Y_2,\dots,Y_n|+\dots+|Y_1,\dots,Y_{n-1},AY_n|=\dots=w\cdot \mathrm{tr}(A)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}w}{w} = \mathrm{tr}\, A \cdot \mathrm{d}x \,; \; \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, A(t) \cdot \mathrm{d}t$$

$$\ln \frac{w(x)}{w(x_0)} = \int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, A(t) \cdot \mathrm{d}t \,; \; \frac{w(x)}{w(x_0)} = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, A(t) \cdot \mathrm{d}t} \quad w(x) = w(x_0) \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\, A(t) \cdot \mathrm{d}t}, \text{ q.e.d.}$$

3.3 Sisteme neomogene. Metoda variației constantelor

Fie sistemul liniar, neomogen,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x) \cdot Y + F(x) \tag{3.3.1}$$

şi sistemul omogen asociat:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x) \cdot Y \tag{3.3.2}$$

cu $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ şi $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, F continuă pe I.

Teorema 3.3.1

Soluția generală a sistemului neomogen este suma dintre soluția generală a sistemului omogen şi o soluție particulară a sistemului neomogen.

Demonstrație

Fie Y_p o soluție particulară a sistemului neomogen şi fie schimbarea de funcție necunoscută $Y = U + Y_p$. Înlocuim în sistemul neomogen:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}Y_p}{\mathrm{d}x} = A \cdot U + A \cdot Y_p + F(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = A \cdot U,$$

adică U este soluția generală a sistemului omogen asociat.

Dacă se cunoaşte soluția generală a sistemului omogen asociat, atunci o soluție particulară pentru sistemul neomogen se poate afla prin metoda variației constantelor.

Teorema 3.3.2

Fie sistemul liniar, neomogen, $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x) \cdot Y + F(x)$ şi sistemul omogen asociat, $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A(x) \cdot Y$. Fie Y_0 soluția generală a sistemului omogen şi matricea fundamentală de soluții, $W = \left[Y_1, Y_2, ..., Y_n\right]$. O soluție particulară a sistemului neomogen poate fi găsită sub forma: $Y_p(x) = W(x) \cdot C(x)$, unde

$$\frac{\mathrm{d}\, C(x)}{\mathrm{d}\, x} = W^{-1}(x) \cdot F(x) \text{ pe } I. \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

Demonstrație

Fie $W = [Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen. Rezultă $w(x) = \det W \neq 0$.

Fie $Y_0(x) = W(x) \cdot C$, unde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Presupunem că c_i, $i = \overline{1, n}$ nu sunt constante, ci funcții de x. Punem condiția ca Y_0, cu $C = C(x)$ să verifice sistemul neomogen. Rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}\, Y_0}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\, W}{\mathrm{d}\, x} \cdot C(x) + W(x) \cdot \frac{\mathrm{d}\, C(x)}{\mathrm{d}\, x} = A \cdot W \cdot C + F.$$

Rezultă: $\left(\dfrac{\mathrm{d}\, W}{\mathrm{d}\, x} - A \cdot W \right) \cdot C(x) + W(x) \cdot \dfrac{\mathrm{d}\, C(x)}{\mathrm{d}\, x} = F(x)$.

Dar W este matrice fundamentală de soluții şi deci $\dfrac{\mathrm{d}\, W}{\mathrm{d}\, x} = A \cdot W$, de unde: $W(x) \cdot \dfrac{\mathrm{d}\, C(x)}{\mathrm{d}\, x} = F(x)$. Cum $W(x)$, este inversabilă, rezultă:

$\dfrac{\mathrm{d}\, C(x)}{\mathrm{d}\, x} = W^{-1}(x) \cdot F(x)$, de unde rezultă:

$C(x) = \int W^{-1}(x) \cdot F(x) + K$, unde $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$. Înlocuind rezultă:

$$Y(x) = W(x) \cdot \left[K + \int W^{-1}(x) \cdot F(x)\, \mathrm{d}\, x \right] \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

$$Y(x) = \underbrace{W(x) \cdot K}_{Y_0(x)} + \underbrace{W(x) \cdot \int W^{-1}(x) F(x)\, \mathrm{d}\, x}_{Y_p(x)}, \text{ q.e.d.} \qquad \textbf{(3.3.5)}$$

Observația 3.3.1 (Construcția unui sistem de ecuații diferențiale liniar şi omogen, de ordinul I, de sistem fundamental dat)

Fie $W = \left[Y_1, Y_2, ..., Y_n \right]$ o matrice fundamentală de soluții $\left(\det W \neq 0 \right)$ pe un interval *I*.

Atunci sistemul de *n* ecuații diferențiale de ordinul *I*:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\, y_k}{\mathrm{d}\, x} & \dfrac{\mathrm{d}\, y_{k,1}}{\mathrm{d}\, x} & \dfrac{\mathrm{d}\, y_{k,2}}{\mathrm{d}\, x} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}\, y_{k,n}}{\mathrm{d}\, x} \\ y_1 & y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_{n,1} & y_{n,2} & \cdots & y_{n,n} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3.3.6)}$$

pentru orice $k = 1, 2, ..., n$, admite ca sistem fundamental de soluții coloanele $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ ale matricei $W\left(x \right)$.

Exemplul 3.3.1

Să se formeze sistemul de 2 ecuații diferențiale de ordinul I care admite următorul sistem fundamental de soluții

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}; \; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$W = \left[Y_1, Y_2 \right] = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix};$$

$$\det W = W\left(x \right) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ pe } \mathbb{R}.$$

$$k = 1: \begin{vmatrix} y_1' & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_1' = 2y_2;$$

$$k = 2: \begin{vmatrix} y_2' & -2\cos 2x & -2\sin 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y_2' = -2y_1.$$

Deci, sistemul este: $\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\, y_1}{\mathrm{d}\, x} \\ \dfrac{\mathrm{d}\, y_2}{\mathrm{d}\, x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$

3.4 Sisteme omogene cu coeficienți constanți

Forma generală:

$$\frac{\mathrm{d}\, Y}{\mathrm{d}\, x} = A \cdot Y, \tag{3.4.1}$$

unde $A = \left[a_{i,j} \right]_{1 \le i, j \le n}$.

Pentru astfel de sisteme este valabilă teorema de existență şi unicitate a soluției problemei Cauchy şi se poate determina întotdeauna un sistem fundamental de soluții.

Fie sistemul omogen $\dfrac{\mathrm{d}\, Y}{\mathrm{d}\, x} = A \cdot Y$; căutăm soluții particulare de forma:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{rx}, \tag{3.4.2}$$

unde A_i, $i = 1,2,...,n$ şi r sunt constante ce se vor determina.

Înlocuind în sistem se obține:

$$\begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \\ \vdots \\ A_n r \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{rx} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{rx};$$

$$\begin{cases} \left(a_{1,1} - r \right) A_1 + a_{1,2} A_2 + ... + a_{1,n} A_n = 0 \\ a_{2,1} A_1 + \left(a_{2,2} - r \right) A_2 + ... + a_{2,n} A_n = 0 \\ \text{..} \\ a_{n,1} A_1 + a_{n,2} A_2 + ... + \left(a_{n,n} - r \right) A_n = 0 \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Necunoscute: A_i, $i = \overline{1, n}$ şi r. Sistemul algebric, liniar, omogen (**3.4.3**) admite soluţii nebanale

$$\Leftrightarrow \det\left(S\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(A - rI_n\right) = 0, \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

care se numeşte ecuaţia caracteristică a sistemului (**3.4.1**). Dar $\det\left(A - rI_n\right)$ este polinomul caracteristic al matricei A, deci valorile căutate pentru r sunt valorile proprii ale matricei A.

(i) **Dacă matricea A are valori proprii distincte**, atunci fiecărei valori proprii îi corespunde un vector propriu, de componente $\left(A_1, A_2, ...A_n\right)$.

Deci:

– se rezolvă ecuaţia $\det\left(A - rI_n\right) = 0$; se obţin $r_i \in \mathbb{R}\left(\mathbb{C}\right)$, $i = \overline{1,n}$, $r_i \neq r_j$;

– pentru fiecare valoare proprie $r = r_i$ se determină vectorul propriu corespunzător $\left(A_{1,i}, ..., A_{n,i}\right)$, soluţie a sistemului omogen (**3.4.3**);

– se scrie soluţia corespunzătoare a sistemului (**3.4.1**):

$$Y_i = \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ A_{2,i} \\ \vdots \\ A_{n,i} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{r_i x}, \; i = \overline{1, n}; \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

– se scrie soluţia generală a sistemului omogen:

$$Y = \left[Y_1, Y_2, ..., Y_n\right] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.4.6)}$$

Exemplul 3.4.1

Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x} = y_1 + 4y_2; \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x} = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Pentru a determina un sistem fundamental de soluţii, în vederea construirii soluţiei generale, căutăm soluţii de forma:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{rx}, \text{ cu } A_1,\ A_2 \text{ şi } r \text{ constante.}$$

Înlocuind în sistem, se obţine:

$$\begin{cases} (1-r)A_1 + \quad 4A_2 = 0 \\ A_1 \quad + (1-r)A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (A-rI_2)\cdot\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3.4.3)'}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca acest sistem algebric, liniar, omogen, să admită şi soluţii diferite de cea banală este ca determinantul matricei coeficienţilor necunoscutelor să fie egal cu zero: $\det(A-rI_2)=0 \Leftrightarrow P_A(r)=0$, adică valorile lui r sunt valorile proprii ale matricei A a coeficienţilor sistemului de ecuaţii diferenţiale iniţial.

$\det(A-rI_2)=\begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix}=r^2-2r-3=0$. Se obţin valorile $\begin{cases} r_1=-1; \\ r_2=\ 3. \end{cases}$

Fiecărei valori proprii $r=r_i$ a matricei A îi va corespunde un vector propriu $V=V_i$, ale cărui componente, $A_{1,i}$ şi $A_{2,i}$, se vor determina rezolvând sistemul **(3.4.3')**, pentru fiecare $r=r_i$:

– pentru $r=-1$ se obţine:

$$\begin{cases} 2A_1+4A_2=0 \\ A_1+2A_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=-2\lambda \\ A_2=\ \ \lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R};\ V_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R};$$

– pentru $r=3$ se obţine:

$$\begin{cases} -2A_1+4A_2=0 \\ A_1-2A_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=2\mu \\ A_2=\ \ \mu \end{cases},\ \mu\in\mathbb{R};\ V_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mu,\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Pentru componentele vectorilor proprii V_1 şi V_2 se pot lua valori proporţionale cu cele rezultate din calculul direct. Soluţiile particulare corespunzătoare ale sistemului diferenţial iniţial vor fi:

$$Y_1=\begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{-x} \text{ şi } Y_2=\begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{3x}.$$

Ele formează un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbb{R}$, căci matricea fundamentală de soluţii, $W=(Y_1,Y_2)=\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$, are

$$\det W = w(x) = -4\mathrm{e}^{2x} \neq 0 \text{ pe } \mathbb{R}.$$

Soluția generală a sistemului se scrie imediat:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=W\cdot C=\left(Y_1,Y_2\right)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} \\ y_{2,1} & y_{2,2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

adică:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-x} & 2\,\mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} y_1=-2c_1\,\mathrm{e}^{-x}+2c_2\,\mathrm{e}^{3x}; \\ y_2=\quad c_1\,\mathrm{e}^{-x}+\quad c_2\,\mathrm{e}^{3x}. \end{cases}$$

În cazul rădăcinilor complex conjugate simple se pot considera soluțiile reale corespunzătoare:

$$\overline{Y_1}\;=\;\frac{Y_1\;+\;Y_2}{2}\,;\;\overline{Y_2}\;=\;\frac{Y_1\;-\;Y_2}{2i},\tag{3.4.7}$$

care sunt, de asemenea, liniar independente.

Exemplul 3.4.2

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,y_1}{\mathrm{d}\,x}=-7y_1+\;\;y_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y_2}{\mathrm{d}\,x}=-2y_1-5y_2 \end{cases}$$; soluția generală.

Căutăm soluții de forma: $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cdot\mathrm{e}^{rx}$. Înlocuind în sistem, se obține: $\begin{cases} \left(-7-r\right)A_1+A_2=0 \\ -2A_1+\left(-5-r\right)A_2=0 \end{cases}$.

Ecuația caracteristică a sistemului de ecuații diferențiale este

$$\det\left(A-rI_2\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix}=0;\;r^2+12r+37=0;\;r_{1,2}=-6\pm\mathrm{i}.$$

Valorile proprii ale matricei A sunt complex conjugate, simple. Vectorii proprii corespunzători vor avea, de asemenea, componente complex conjugate.

- pentru $r_1=-6+\mathrm{i}$ se obține $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}\cdot\lambda,\;\lambda\in\mathbb{R}$;
- pentru $r_2=-6-\mathrm{i}$ se obține $V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\cdot\mu,\;\mu\in\mathbb{R}$.

Soluțiile particulare corespunzătoare ale sistemului de ecuații diferențiale sunt:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{(-6+\mathrm{i})x};\ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{(-6-\mathrm{i})x}.$$

Vom considera soluțiile reale obținute conform relațiilor (**3.4.7**):

$$\overline{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \text{ și } \overline{Y}_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2\mathrm{i}},$$

de asemenea, liniar independente.

Efectuând calculele se obține:

$$\overline{Y}_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-6x};\ \overline{Y}_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-6x}.$$

Matricea fundamentală de soluții este:

$$W = \left(\overline{Y}_1, \overline{Y}_2\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-6x} \cos x & \mathrm{e}^{-6x} \sin x \\ \mathrm{e}^{-6x}\left(\cos x - \sin x\right) & \mathrm{e}^{-6x}\left(\sin x + \cos x\right) \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului inițial va fi:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = W \cdot C = W \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)\mathrm{e}^{-6x}; \\ y_2 = \left[c_1\left(\cos x - \sin x\right) + c_2\left(\sin x + \cos x\right)\right]\mathrm{e}^{-6x}. \end{cases}$$

De la algebră se cunoaşte, în cazul sistemelor omogene de forma (**3.4.3**), următoarea proporționalitate dintre componentele vectorului propriu corespunzător unei anumite valori proprii şi **complemenții algebrici** ai elementelor din prima linie a matricei $\left(A - rI_n \right)$:

$$\frac{A_1}{\Gamma_{11}} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}} = \frac{A_3}{\Gamma_{13}} = \ldots = \frac{A_n}{\Gamma_{1n}}. \qquad \textbf{(3.4.8)}$$

Practic, se calculează complemenții algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $A - rI_n$ şi apoi se întocmeşte următorul tabel:

complem. alg. / val. proprie	$\Gamma_{1,1}\quad \Gamma_{1,2}\quad \cdots\quad \Gamma_{1,n}$	
$r = r_1$	$A_{1,1}\quad A_{2,1}\quad \cdots\quad A_{n,1}$	$\to V_1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$r = r_n$	$A_{1,n}\quad A_{2,n}\quad \cdots\quad A_{n,n}$	$\to V_n$

(3.4.9)

Exemplul 3.4.3

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+z\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}= \qquad z\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-x+z\end{cases}\text{; soluția generală.}$$

– căutăm soluții de forma: $Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{rt}$; înlocuind în sistem, se obține:

$$\begin{cases}-rA_1-A_2+A_3=0\\ -rA_2+A_3=0\\ -A_1+(1-r)A_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-r&-1&1\\0&-r&1\\-1&0&1-r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

– determinăm valorile proprii ale matricei coeficienților:

$$\det(A-rI_3)=0\Leftrightarrow(1-r)\left(r^2+1\right)=0\Rightarrow r_1=1, r_2=i, r_3=-\mathrm{i};$$

– determinăm vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii pe baza observației anterioare.

Componentele vectorilor proprii V_1, V_2, V_3 care corespund valorilor proprii $r_1=1$, $r_2=\mathrm{i}$, $r_3=-\mathrm{i}$, verifică ecuațiile $(A-r_1I_3)V_1=O_3$, $(A-r_2I_3)V_2=O_3$, $(A-r_3I_3)V_3=O_3$, deci sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $(A-rI_3)$. Avem:

$$\Gamma_{11}=\begin{vmatrix}-r&1\\0&1-r\end{vmatrix}=r^2-r;\ \Gamma_{12}=-\begin{vmatrix}0&1\\-1&1-r\end{vmatrix}=-1;\ \Gamma_{13}=\begin{vmatrix}0&-r\\-1&0\end{vmatrix}=-r.$$

Construim tabelul (**3.4.9**) corespunzător:

compl. alg. / val. proprie	Γ_{11} r^2-r	Γ_{12} -1	Γ_{13} $-r$	Vectorul propriu
$r_1=1$	0	-1	-1	$V_1^\tau=(0,1,1)^\tau$
$r_2=\mathrm{i}$	$-1-\mathrm{i}$	-1	$-\mathrm{i}$	$V_2^\tau=(1+\mathrm{i},1,\mathrm{i})^\tau$
$r_3=-\mathrm{i}$	$-1+\mathrm{i}$	-1	i	$V_3^\tau=(1-\mathrm{i},1,-\mathrm{i})^\tau$

Pentru vectorul propriu se pot lua componente proporționale cu cele rezultate din calculul direct. Un sistem fundamental de soluții poate fi următorul:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t;\ Y_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t};\ Y_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}.$$

Sistemul fundamental de soluții cu componentele reale este cel dat de relațiile (**3.4.7**), pentru valorile proprii complex conjugate:

$$\overline{Y_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix};\ \overline{Y_2} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix};\ \overline{Y_3} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Matricea fundamentală de soluții este: $W = \left(\overline{Y_1}, \overline{Y_2}, \overline{Y_3}\right)$, iar soluția generală a sistemului va fi $Y = W \cdot C$, unde $C^\tau = (c_1, c_2, c_3)$.

Efectuând calculele, se va obține:

$$\begin{cases} x(t) = c_2(\cos t - \sin t) + c_3(\cos t + \sin t); \\ y(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t; \\ z(t) = c_1\,\mathrm{e}^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t. \end{cases}$$

(ii) **Cazul valorilor proprii multiple**

Presupunem că $r = r_0$ este valoare proprie de ordin de multiplicitate m a matricei A.

Acesteia trebuie să-i corespundă m soluții ale sistemului omogen (din sistemul fundamental de soluții).

Se demonstrează că soluțiile se pot obține prin metoda coeficienților nedeterminanți astfel:

– se propune o soluție de forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y_{r_0} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + A_{1,2}x + A_{1,3}x^2 + \ldots + A_{1,m}x^{m-1} \\ A_{2,1} + A_{2,2}x + A_{2,3}x^2 + \ldots + A_{2,m}x^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n,1} + A_{n,2}x + A_{n,3}x^2 + \ldots + A_{n,m}x^{m-1} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{r_0 x}, \quad \textbf{(3.4.10)}$$

unde $\left(A_{i,j}\right)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, sunt mn parametrii ce se vor determina;

– se pune condiția ca Y_{r_0} se verifice sistemul omogen; în urma identificării coeficienților şi rezolvării sistemului obținut se vor exprima în mod convenabil, $m \cdot (n-1)$ coeficienți, în funcție de m coeficienți care vor rămâne pe post de constante arbitrare în soluția găsită.

Fie acestea $c_1, c_2, ..., c_m$. Soluția Y_{r_0} va arăta astfel:

$$Y_{r_0} = \left[\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix} \cdot c_1 + \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix} \cdot x \cdot c_2 + ... + \begin{pmatrix} \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,m} \\ \vdots \\ \alpha_{n,m} \end{pmatrix} \cdot x^{m-1} c_m\right] \cdot \mathrm{e}^{r_0 x} . \mathbf{(3.4.11)}$$

Exemplul 3.4.4

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y - z \end{cases} ; \text{ soluția generală.}$$

Căutăm soluții de forma: $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{rx}$. Înlocuind în sistem, se va obține:

$$\begin{cases} (-3-r)A_1 - A_2 = 0 \\ A_1 - (1+r)A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+r & 1 \\ -1 & r+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuația caracteristică: $\det(A - rI_2) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$, $r_1 = r_2 = -2$, deci $r = -2$ este valoare proprie reală, multiplă, de ordinul 2.

Vom determina soluția generală a sistemului prin metoda coeficienților nedeterminanți. Propunem soluția generală de forma:

$$\begin{cases} y = (A_{1,1} + A_{1,2}x)\mathrm{e}^{-2x} \\ z = (A_{2,1} + A_{2,2}x)\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$$

şi punem condiția ca aceasta să verifice sistemul omogen. Se va obține, după identificare, sistemul de 4 ecuații cu 4 necunoscute:

$$\begin{cases} A_{1,1} & +A_{1,2} & +A_{2,1} & & =0 \\ A_{1,1} & & +A_{2,1} & +A_{2,2} & =0 \\ & +A_{1,2} & & +A_{2,2} & =0 \\ & -A_{1,2} & & -A_{2,2} & =0 \end{cases}$$

Dacă lăsăm $A_{1,1}$ şi $A_{1,2}$ arbitrare, pentru $A_{2,1}$ şi $A_{2,2}$, se vor obține expresiile:

$$\begin{cases} A_{2,1} = & -A_{1,1} & -A_{1,2} \\ A_{2,2} = & & -A_{1,2} \end{cases}$$

Astfel, soluția generală se exprimă cu ajutorul constantelor arbitrare $A_{1,1}$ şi $A_{1,2}$, astfel:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(A_{1,1} + A_{1,2}x\right)\mathrm{e}^{-2x} \\ \left[\left(-A_{1,1} - A_{1,2}\right) - A_{1,2}x\right]\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$$

sau

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} \\ -\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} A_{1,1} + \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^{-2x} \\ \left(-1-x\right)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} A_{2,2},$$

unde $A_{1,1}$ şi $A_{2,2}$ sunt cele două constante arbitrare din soluția generală.

Altă metodă presupune, de asemenea, calculul complemenților algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $\left(A - rI_n \right)$.

Soluțiile din sistemul fundamental corespunzătoare valorii proprii $r = r_0$, multiplă, de ordinul *m*, se demonstrează că pot fi obținute astfel:

$$Y_{01} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,1}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx} \\ \Gamma_{1,2}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Gamma_{1,n}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx} \end{pmatrix}_{r=r_0},$$

$$Y_{02} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{1,1}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{1,2}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{1,n}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx}\right) \end{pmatrix}_{r=r_0}, \dots, Y_{0m} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{1,1}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx}\right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{1,n}\left(r\right) \cdot \mathrm{e}^{rx}\right) \end{pmatrix}_{r=r_0}.$$

Exemplul 3.4.5

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x + y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \quad x + z \end{cases}; \text{ soluția generală.}$$

Căutăm soluții de forma: $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{rt}$.

Se obține ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 & 0 \\ 3 & 1-r & -1 \\ 1 & 0 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(r-2)^3 = 0.$$

Deci, $r_1 = r_2 = r_3 = 2$.

Complemenții algebrici corespunzători elementelor primei linii din matricea $(A - rI_3)$ sunt: $\Gamma_{11}(r) = (r-1)^2$; $\Gamma_{12}(r) = -4 + 3r$; $\Gamma_{13}(r) = r - 1$.

Soluțiile din sistemul fundamental corespunzătoare valorii proprii $r = 2$, multiplă, de ordinul 3, vor fi:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,1}(r) \cdot \mathrm{e}^{rt} \\ \Gamma_{1,2}(r) \cdot \mathrm{e}^{rt} \\ \Gamma_{1,3}(r) \cdot \mathrm{e}^{rt} \end{pmatrix}_{r=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t};$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\Gamma_{1,1}(r) \cdot \mathrm{e}^{rt}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\Gamma_{1,2}(r) \cdot \mathrm{e}^{rt}\right] \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\Gamma_{1,3}(r) \cdot \mathrm{e}^{rt}\right] \end{pmatrix}_{r=2} = \begin{pmatrix} 2 + t \\ 3 + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2t};$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\Gamma_{1,1}(r)\cdot \mathrm{e}^{rt}\right] \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\Gamma_{1,2}(r)\cdot \mathrm{e}^{rt}\right] \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\Gamma_{1,3}(r)\cdot \mathrm{e}^{rt}\right] \end{pmatrix}\right|_{r=2} = \begin{pmatrix} 2+4t+\ t^2 \\ 6t+2t^2 \\ 2t+\ t^2 \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{2t}.$$

Soluția generală a sistemului va fi

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(Y_1, Y_2, Y_3\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3,$$

de unde:

$$\begin{cases} x(t) = \left[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + (c_2 + 4c_3)t + c_3 t^2\right]\cdot \mathrm{e}^{2t} \\ y(t) = \left[2c_1 + 3c_2 + (2c_2 + 6c_3)t + 2c_3 t^2\right]\cdot \mathrm{e}^{2t} \\ z(t) = \left[c_1 + c_2 + (c_2 + 2c_3)t + c_3 t^2\right]\cdot \mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

3.5 Sisteme neomogene cu coeficienți constanți

Forma generală:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A\cdot Y + F(x), \tag{3.5.1}$$

unde $A = \left[a_{i,j}\right]_{1\le i,j\le n}$ şi $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$, cu $f_i : I \to \mathbb{R}$ continue pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$.

Soluția generală a unui astfel de sistem este, conform ***teoremei 3.3.1***, suma dintre soluția generală a sistemului omogen asociat şi o soluție particulară a sistemului neomogen.

Matricea A a coeficienților sistemului este o matrice constantă şi deci, conform § **3.4**, se poate determina întotdeauna soluția generală a sistemului omogen asociat, $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A\cdot Y$.

În plus, conform cu rezultatul exprimat prin ***teorema 3.3.2*** se poate determina întotdeauna o soluţie particulară a sistemului neomogen (**3.5.1**), prin metoda variaţiei contantelor.

Aceasta are forma:

$$Y_p(x)=W(x)\int W^{-1}(x)F(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathbf{(3.5.2)}$$

unde $W(x)$ este matricea fundamentală de soluţii a sistemului omogen asociat, iar $F(x)$ este vectorul coloană al termenilor liberi ai sistemului neomogen (**3.5.1**).

Menţionăm că dacă ordinul sistemului omogen este mare, atunci calculele pentru determinarea soluţiei particulare a sistemului neomogen devin laborioase, deoarece sunt necesare următoarele operaţii:

– calculul inversei matricei fundamentale de soluţii şi efectuarea produsului $W^{-1}(x)\cdot F(x)$;

– efectuarea celor n cuadraturi din $\int W^{-1}(x)F(x)\,\mathrm{d}x$ şi a produsului dintre matricea $W(x)$ şi rezultatul celor n cuadraturi pus sub formă vectorială.

Există cazuri frecvent întâlnite în aplicaţii când soluţia particulară a sistemului neomogen poate fi determinată prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi (sau a identificării). Aceste cazuri sunt dictate de forma funcţiilor $f_1, f_2, ..., f_n$ care formează vectorul „termen liber”, F, al sistemului neomogen.

a) Sisteme de ecuaţii diferenţiale pentru care:

$$F(x)=\begin{pmatrix} P_{1,m_1}(x) \\ P_{2,m_2}(x) \\ \vdots \\ P_{n,m_n}(x) \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mathbf{(3.5.3)}$$

unde $P_{i,m_i}(x)$, $i=\overline{1,n}$, sunt polinoame de gradul $m_i \in \mathbb{N}$, $m_i \geq 0$, $i=\overline{1,n}$, şi α nu este valoare proprie a matricei A a coeficienţilor sistemului omogen.

În acest caz pentru soluţia particulară a sistemului neomogen (**3.5.1**) se propune un vector de forma:

$$Y_p(x)=\begin{pmatrix} Q_{1,m}(x) \\ Q_{2,m}(x) \\ \vdots \\ Q_{n,m}(x) \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \mathbf{(3.5.4)}$$

unde $Q_{i,m}(x)$ sunt polinoame de gradul m, cu coeficienți nedeterminați, iar $m = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{m_i\}$.

Dacă α este rădăcină multiplă de ordinul k a ecuației caracteristice $\det(A - rI_n) = 0$, atunci se propune, pentru $Y_p(x)$, un vector de forma:

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} Q_{1,m}(x) \\ Q_{2,m}(x) \\ \vdots \\ Q_{n,m}(x) \end{pmatrix} \cdot x^k \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}. \qquad \textbf{(3.5.5)}$$

În ambele situații coeficienții polinoamelor $Q_{i,m}(x)$, $i = \overline{1,n}$ (în număr total de $n(m+1)$) se determină prin metoda identificării, după înlocuirea lui $Y_p(x)$ în sistemul neomogen (**3.5.1**).

b) Sisteme de ecuații diferențiale pentru care:

$$F(x) = \begin{pmatrix} P_{1,m_1}(x) \\ P_{2,m_2}(x) \\ \vdots \\ P_{n,m_n}(x) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + \begin{pmatrix} Q_{1,r_1}(x) \\ Q_{2,r_2}(x) \\ \vdots \\ Q_{n,r_n}(x) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \qquad \textbf{(3.5.6)}$$

unde $P_{i,m_i}(x)$ şi $Q_{i,r_i}(x)$ sunt polinoame de gradul m_i, respectiv r_i, $i = \overline{1,n}$.

Conform aceloraşi precizări de la punctul **a)** soluția particulară a sistemului neomogen (**3.5.1**) se va propune de forma:

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} P^*_{1,m}(x) \\ P^*_{2,m}(x) \\ \vdots \\ P^*_{n,m}(x) \end{pmatrix} \cdot x^k \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + \begin{pmatrix} Q^*_{1,m}(x) \\ Q^*_{2,m}(x) \\ \vdots \\ Q^*_{n,m}(x) \end{pmatrix} \cdot x^k \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \qquad \textbf{(3.5.7)}$$

unde $P^*_{i,m}(x)$ şi $Q^*_{i,m}(x)$, $i = \overline{1,n}$, şi $m = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{m_i, r_i\}$, iar k este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $r = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ a ecuației caracteristice, $\det(A - rI_n) = 0$. (Dacă $r = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ nu este valoare proprie a matricei A, atunci se va lua $k = 0$ în forma lui $Y_p(x)$).

c) Dacă vectorul termen liber $F(x)$ al sistemului neomogen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A \cdot Y + F(x)$ este o sumă de s vectori, fiecare dintre aceştia având aceeaşi structură

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_s(x), \tag{3.5.8}$$

atunci soluția particulară căutată pentru sistemul neomogen va fi de forma:

$$Y_p(x) = Y_{p,1}(x) + Y_{p,2}(x) + \dots + Y_{p,s}(x), \tag{3.5.9}$$

unde $Y_{p,k}(x)$, $k = \overline{1,s}$, este soluție particulară a sistemului neomogen:

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = A \cdot Y + F_k(x),\ k = \overline{1,s}\ \text{(principiul superpoziției).}$$

Observația 3.5.1

Un sistem liniar de forma:

$$\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,n}y_n + f_1(x) \\ x\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \dots + a_{2,n}y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x\dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{n,n}y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{3.5.10}$$

se numeşte sistem diferențial liniar de tip Euler. Prin schimbarea de variabilă independentă $|x| = \mathrm{e}^t$ acesta se transformă într-un sistem cu coeficienți constanți pentru care se poate determina întotdeauna soluția generală.

BIBLIOGRAFIE

1. Barbu, V., *Ecuații diferențiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985

2. Bătinețu-Giurgiu, M.; Lambadarie, D., *Sisteme dinamice*, Editura A.T.M., Bucureşti, 1993

3. Bourbaki, N., *Éléments de mathématique*. *Topologie générale*, ch. 9 (1958), ch. 10 (1960), Hermann, Paris

4. Cartan, H., *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967

5. Craiu, M.; Tănase, V. V., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

6. Démidovitch, B. et Maron, I., *Éléments de calcul numerique*, Editions Mir, Moscva, 1973

7. Flondor, D.; Donciu, N., *Algebră şi analiză matematică*, Culegere de probleme, vol. II, Editura ALL, Bucureşti, 1994

8. Halanay, A., *Ecuații diferențiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972

9. Hartman, Ph., *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley, New York, 1964

10. Ionescu, D. V., *Ecuații diferențiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964, Ediția a doua, 1972

11. Mirică, Şt., *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*, Universitatea din Bucureşti, Bucureşti, 1989

12. Olariu, V.; Stănăşilă, T., *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale, Culegere de probleme*, Editura tehnică, Bucureşti, 1982

13. Rogai, E., *Exerciții şi probleme de ecuații diferențiale şi integrale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1965

14. Roşculeț, M., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984

15. Teodorescu, N.; Olariu, V., *Ecuații diferențiale şi cu derivate parțiale*, vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978

16. Udrişte, C., *Aplicații de algebră, geometrie şi ecuații diferențiale*, Editura Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1993

17. Udrişte, C.; Radu, C.; Dicu, C.; Mălăncioiu, O., *Algebră, geometrie şi ecuații diferențiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982

18. Udrişte, C.; Radu, C.; Dicu, C.; Mălăncioiu, O., *Probleme de algebră, geometrie şi ecuații diferențiale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981