10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x^2+1}, & x\le 0 \\ \sqrt{x}-x^2, & x>0 \end{cases}$;

11) $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(e^x, 1+xe^x)$;

12) $f:(0,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1+x^2}\min(x,x^3)$;

13) $f:(0,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\max(x,x^2)$.

1.5.2. Schimbarea de variabilă

Înainte de a trece la expunerea acestei metode este necesară re alizarea conceptului de diferențială a unei funcții.

Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă, atunci am văzut în precedent că diferențiala lui f este egală cu produsul dintre deriva f și diferențiala argumentului, adică $df(x)=f'(x)\mathrm{d}x$.

În cele ce urmează se prezintă două tehnici de lucru care permit c larea integralelor unor funcții date, când acestea se pot aduce la o convenabilă.

Prima metodă de schimbare de variabilă

Are loc următorul rezultat:

> **Teoremă.** Fie I, J două intervale din $\mathbb{R}$ și fie $I\xrightarrow{\varphi}J\xrightarrow{h}\mathbb{R}$, două funcții cu proprietățile:
> 1) φ este derivabilă;
> 2) h admite primitive (H o primitivă a sa).
>
> Atunci funcția $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive pe I și mai mult
> $$\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = H(\varphi(x))+\mathcal{C}.$$

Demonstrație. Să observăm că $H\circ\varphi$ este o funcție derivabilă (fiind compunere de funcții derivabile). Trebuie să arătăm că $(H\circ\varphi$ $=(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$, ceea ce-i imediat dacă ținem seama de regula de deri a funcțiilor compuse, când avem:

$$(H\circ\varphi)'=H'(\varphi)\cdot\varphi'=h(\varphi)\cdot\varphi'=(h\circ\varphi)\cdot\varphi'.$$

Observații. 1) Spunem că φ este **funcția care schimbă variab** Uneori se înlocuiește formal $\varphi(x)=t$ și $\varphi'(x)\mathrm{d}x=dt$ în $\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathcal{I}$ când obținem $\int h(t)dt=\mathcal{I}_1$.

De fapt egalitatea $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ se obține din $\varphi(x)=t$ prin diferenți Acum integrala $\mathcal{I}_1$ este mai ușor de calculat. Din $\mathcal{I}_1$ obținem $\mathcal{I}$ înlocuirea lui t cu $\varphi(x)$.

Nu se poate pune egalitate între mulțimile $\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$ și $h(t)\mathrm{d}t$, deoarece prima este mulțimea primitivelor funcției $(h\circ\varphi)\cdot\varphi'$, ce sunt funcții definite pe I, în timp ce a doua mulțime reprezintă mitivele funcției h, care sunt funcții definite pe J.
iar dacă $I=J$, în general cele două mulțimi sunt distincte.
m spune că cele două integrale nedefinite sunt asociate una alteia.
ıcă notăm $\mathcal{I}=\int h(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$, atunci integrala asociată acesteia o tăm $\mathcal{I}_1=\int h(t)\mathrm{d}t$.

Tabel de integrale nedefinite

Nr. crt.	INTEGRALA NEDEFINITĂ
1	$\int\varphi^n(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1}+\mathcal{C},\ n\in\mathbb{N}$
2	$\int\varphi^a(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1}+\mathcal{C},\ a\neq-1,\ \varphi(I)\subset(0,\infty)$
3	$\int\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x=\ln\lvert\varphi(x)\rvert+\mathcal{C},\ \varphi(x)\neq0,\ x\in I$
4	$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a}+\mathcal{C},\ a>0,\ a\neq1$
5	$\int\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)-a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right\rvert+\mathcal{C}$ $\varphi(x)\neq\pm a,\ x\in I,\ a\neq0$
6	$\int\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{\varphi(x)}{a}+\mathcal{C},\ a\neq0$
7	$\int\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2-\varphi^2(x)}}\mathrm{d}x=\arcsin\dfrac{\varphi(x)}{a}+\mathcal{C},\ a>0,\ \varphi(I)\subset(-a,a)$
8	$\int\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}}\mathrm{d}x=\ln[\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}]+\mathcal{C},\ a\neq0$
9	$\int\dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\lvert\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}\rvert+\mathcal{C}$, $a>0,\ \varphi(I)\subset(-\infty,-a)$ sau $\varphi(I)\subset(a,\infty)$

Nr. crt.	INTEGRALA NEDEFINITĂ
10	$\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\cos\varphi(x) + \mathcal{C}$
11	$\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \sin\varphi(x) + \mathcal{C}$
12	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\varphi(x) + \mathcal{C}$, $\varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
13	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\varphi(x) + \mathcal{C},\ \varphi(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in$
14	$\int \mathrm{tg}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos\varphi(x)\rvert + \mathcal{C}$, $\varphi(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
15	$\int \mathrm{ctg}\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin\varphi(x)\rvert + \mathcal{C}$, $\varphi(x) \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in I$
16	$\int \mathrm{sh}\,\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\,\varphi(x) + \mathcal{C}$
17	$\int \mathrm{ch}\,\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\,\varphi(x) + \mathcal{C}$

Probleme rezolvate

Să se calculeze, utilizând prima metodă de schimbare de variabilă mitivele următoarelor funcţii:

1) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3},\ x \in \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R}$;

3) $f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $f(x) = \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg} x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $f(x) = 2x\sin(x^2+1)e^{\cos(x^2+1)},\ x \in \mathbb{R}$; 6) $f(x) = x^2 e^{x^3},\ x \in$

7) $f(x) = \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3 x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $f(x) = \sin x\cos^2 x,\ x \in$

9) $f(x) = \sin^3 x\cos^2 x,\ x \in \mathbb{R}$; 10) $f(x) = \sin^3 x,\ x \in \mathbb{R}$;

11) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 14) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}},\ x \in (0,1)$;

5) $f(x) = x\sqrt[3]{1-x^2},\ x \in \mathbb{R}$; 16) $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x},\ x > 0$;

7) $f(x) = \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$; 18) $f(x) = \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

9) $f(x) = \frac{x^2}{x^6+1},\ x \in \mathbb{R}$; 20) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + 3},\ x \in \mathbb{R}$;

1) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^8+1}},\ x \in \mathbb{R}$; 22) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}},\ x \in (-1,1)$;

3) $f(x) = x^3\sqrt{1-x^8},\ x \in (-1,1)$; 24) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^8-1}},\ x > 1$;

5) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; 26) $f(x) = \frac{1}{\cos x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

. 1) Fie funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to [\frac{11}{4}, \infty),\ \varphi(x) = x^2 + x + 3$. Avem $\varphi'(x) =$ $2x+1$. Deci $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+3} = h(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. De aici $(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi(x)}$, unde $\varphi(x) = t$. Luăm acum $h : [\frac{11}{4}, \infty) \to \mathbb{R},\ h(t) = \frac{1}{t}$.
primitivă a acestei funcţii este $H : \left[\frac{11}{4}, \infty\right) \to \mathbb{R},\ H(t) = \ln t$.

e aici

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\mathrm{d}x = H(\varphi(x)) + \mathcal{C} = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + \mathcal{C} = \ln(x^2+x+3) + \mathcal{C}.$$

bservaţie. Funcţia care schimbă variabila este φ. Punând $t = \varphi(x) =$ x^2+x+3 rezultă $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{d}x$ şi integrala asociată este

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln\lvert t\rvert + \mathcal{C}.$$

evenind la substituţie avem $\mathcal{I} = \ln(x^2+x+3) + \mathcal{C}$. □

) Fie $\varphi : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \varphi(x) = \cos x$ având $\varphi'(x) = -\sin x$. Deci $(x) = h(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{-\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}$, dă $h(\varphi(x)) = -\frac{1}{1+\varphi^2(x)}$, iar $: [-1,1] \to \mathbb{R},\ h(t) = -\frac{1}{1+t^2}$.

) primitivă a lui h este $H : [-1,1] \to \mathbb{R},\ H(t) = -\mathrm{arctg}t$.

şadar

$$\int f(x)\mathrm{d}x = H(\varphi(x)) + \mathcal{C} = -\mathrm{arctg}\varphi(x) + \mathcal{C} = -\mathrm{arctg}(\cos x) + \mathcal{C}$$

Observaţie. Dacă se notează $t = \varphi(x) = \cos x$, atunci prin diferen
$\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\sin x\mathrm{d}x$ şi integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = -\mathrm{arctg}t + \mathcal{C}.$$

Revenind la $\mathcal{I}$ avem $\mathcal{I} = -\mathrm{arctg}(\cos x) + \mathcal{C}$. □

3) Se consideră $\varphi : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0,1)$, $\varphi(x) = \sin x$ şi deci $\varphi'(x) = ($
Se scrie f sub forma:

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x} = h(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$= \dfrac{1-\varphi^2(x)}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$, iar de aici $h(\varphi(x)) = \dfrac{1-\varphi^2(x)}{\varphi(x)}$ unde $h : (0,1)$

$$h(t) = \frac{1-t^2}{t} = \frac{1}{t} - t.$$

O primitivă a lui h este $H : (0,1) \to \mathbb{R}$, $H(t) = \ln t - \dfrac{t^2}{2}$.

Deci $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = H(\varphi(x)) + \mathcal{C} = \ln(\sin x) - \frac{\sin^2 x}{2} + \mathcal{C}$. □

Observaţie. Notăm $t = \sin x$ şi deci $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\mathrm{d}x = \cos x\mathrm{d}x$ când

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} - t\right)\mathrm{d}t = \ln|t| - \frac{t^2}{2} + \mathcal{C}.$$

Revenim la substituţie şi obţinem: $\mathcal{I} = \ln(\sin x) - \dfrac{\sin^2 x}{2} + \mathcal{C}$.□

În aplicaţiile următoare vom nota $t = \varphi(x)$ şi înlocuim $\varphi'(x)\mathrm{d}x$ pri

4) Avem: $\displaystyle\mathcal{I} = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

Notăm $\mathrm{tg}x = t$ şi deci $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, când integrala asociată de

$\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + \mathcal{C}$. Deci $\mathcal{I} = \ln(\mathrm{tg}x) + \mathcal{C}$.□

5) Se pune $t = \cos(x^2+1)$ şi deci $\mathrm{d}t = -2x\sin(x^2+1)\mathrm{d}x$. Integ
asociată este $\mathcal{I}_1 = -\displaystyle\int e^t\mathrm{d}t = -e^t + \mathcal{C}$. Deci $\mathcal{I} = -e^{\cos(x^2+1)} + \mathcal{C}$. □

6) Notăm $t = x^3$ când $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$ şi deci integrala asociată este:
$\mathcal{I}_1 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int e^t\mathrm{d}t = \frac{1}{3}e^t + \mathcal{C}$. Aşadar $\mathcal{I} = \dfrac{1}{3}e^{x^3} + \mathcal{C}$. □

Avem:

$$= \int (\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3 x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}x(1+\mathrm{tg}^2 x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{tg}x \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$$

otăm $t = \mathrm{tg}x$ şi deci $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ când integrala asociată este:

$= \displaystyle\int t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + \mathcal{C}$. Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \mathcal{C}$.□

Se pune $t = \cos x$ când $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Deci integrala asociată este:

$= -\displaystyle\int t^2\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + \mathcal{C}$. În fine $\mathcal{I} = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + \mathcal{C}$. □

Se substituie $t = \cos x$ şi deci $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Funcţia se aduce la
rma: $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x\sin x = (1-\cos^2 x)\cos^2 \sin x$.
cum integrala asociată este:

$$= -\int (1-t^2)t^2\mathrm{d}t = -\int (t^2 - t^4)\mathrm{d}t = -\int t^2\mathrm{d}t + \int t^4\mathrm{d}t =$$

$-\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} + \mathcal{C}$. Deci $\mathcal{I} = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + \dfrac{\cos^5 x}{5} + \mathcal{C}$.□

)) Se scrie f sub forma: $f(x) = \sin x\sin^2 x = \sin x(1-\cos^2 x)$.
cum se substituie $t = \cos x$ şi deci $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Integrala asociată
te: $\mathcal{I}_1 = -\displaystyle\int (1-t^2)\mathrm{d}t = -\int \mathrm{d}t + \int t^2\mathrm{d}t = -t + \frac{t^3}{3} + \mathcal{C}$.

şadar $\mathcal{I} = \dfrac{\cos^3 x}{3} - \cos x + \mathcal{C}$.□

) Se prelucrează f sub forma

$(x) = \dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ şi se notează $t = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

e obţine $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + \mathcal{C}$ şi deci $\mathcal{I} = \ln\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \mathcal{C}$. □

2) Se ia f sub forma: $f(x) = \mathrm{tg}^2 x(1+\mathrm{tg}^2 x) = \mathrm{tg}^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
e notează $t = \mathrm{tg}x$ când $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Integrala asociată devine:

$_1 = \displaystyle\int t^2\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + \mathcal{C}$, iar $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathcal{C}$.□

3) Se aduce f la forma: $f(x) = \dfrac{\sin^2 x\sin x}{\cos x} = \dfrac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}$,

şi se notează $t = \cos x$ când $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$. Integrala asociată es[te]

$$\mathcal{I}_1 = -\int \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int t\mathrm{d}t = -\ln|t| + \frac{t^2}{2} + \mathcal{C}.$$

Deci $\mathcal{I} = -\ln(\cos x) + \dfrac{\cos^2 x}{2} + \mathcal{C}.\square$

14) Notăm $t = x\sqrt{x}$ şi de aici $\mathrm{d}t = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\mathrm{d}x$. Integrala asociată es[te]

$$\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{3}\arcsin t + \mathcal{C}.$$ Deci $\mathcal{I} = \dfrac{2}{3}\arcsin(x\sqrt{x}) + \mathcal{C}.\ \square$

15) Punem $t = 1 - x^2$ şi avem $\mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x$. Acum

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{1}{2}\int \sqrt[4]{t}\mathrm{d}t = -\frac{5}{12}t\sqrt[4]{t} + \mathcal{C}.$$

Deci $\mathcal{I} = -\dfrac{5}{12}(1-x^2)\sqrt[4]{1-x^2} + \mathcal{C}.\ \square$

16) Se ia $t = \ln x$ când $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Avem: $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int t^3\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + \mathcal{C}.$

Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\ln^4 x}{4} + \mathcal{C}.\square$

17) Punem $t = \mathrm{arctg}x$ şi deci $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Integrala asociată est[e]

$$\mathcal{I}_1 = \int t^5\mathrm{d}t = \frac{t^6}{6} + \mathcal{C}.$$ Deci $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{arctg}^6 x}{6} + \mathcal{C}.\ \square$

18) Se pune $t = \mathrm{tg}x$ când $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Avem: $\mathcal{I}_1 = \displaystyle\int e^t\mathrm{d}t = e^t +$

Deci $\mathcal{I} = e^{\mathrm{tg}x} + \mathcal{C}.\square$

19) Notăm $t = x^3$ când $\mathrm{d}t = 3x^2\mathrm{d}x$. Deci

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}t + \mathcal{C}.$$ De aici $\mathcal{I} = \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}(x^3) + \mathcal{C}.\ \square$

20) Punem $t = \sin^2 x$ şi de aici $\mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$. Aşadar

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}.$$

Deci $\mathcal{I} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{3}}\right) + \mathcal{C}.\square$

21) Din $t = x^4$ rezultă $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$ şi integrala asociată este:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{4}\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + \mathcal{C}.$$ Deci

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4}\ln(x^4+\sqrt{x^8+1}) + \mathcal{C}.\square$$

Se pune $t = x^4$ şi deci $\mathrm{d}t = 4x^3\mathrm{d}x$. Integrala asociată este:

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + \mathcal{C}.$$ De aici $\mathcal{I} = \dfrac{1}{4}\arcsin(x^4) + \mathcal{C}.\ \square$

Se face $t = x^4$. Avem $\mathcal{I}_1 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ etc.

Se pune $t = x^4$.

Avem $\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int (1+\mathrm{tg}^2 x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}.$

pune $t = \mathrm{tg}x$ şi deci $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$. Integrala asociată este:

$$= \int (1+t^2)\mathrm{d}t = t + \frac{t^3}{3} + \mathcal{C}.$$ De aici $\mathcal{I} = \mathrm{tg}x + \dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \mathcal{C}.\ \square$

$\mathcal{I} = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Notăm $t = \sin x$ şi rezultă

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathcal{C}.\square$$

robleme propuse

se calculeze, utilizând prima metodă de schimbare de variabilă, urmă[t]arele integrale nedefinite:

$\displaystyle\int (2x-1)^9\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$ 2) $\displaystyle\int x(2x-1)^9\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$

$\displaystyle\int \frac{x^3\mathrm{d}x}{(x-1)^{10}},\ x > 1;$ 4) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$

$\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^3+1},\ x > -1;$ 6) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+1},\ x \in \mathbb{R};$

$\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^6+4},\ x \in \mathbb{R};$ 8) $\displaystyle\int \frac{e^x\mathrm{d}x}{1+e^{2x}},\ x \in \mathbb{R};$

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x(3+e^{-x})},\ x \in \mathbb{R};$ 10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}\mathrm{d}x,\ x > 0;$

) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x,\ x \in \mathbb{R};$ 12) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{e^x-1},\ x > 0;$

) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{e^x+1},\ x > 0;$ 14) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x,\ x \geq 1;$

) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x},\ x > 1;$ 16) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)^3},\ x > 1;$

17) $\int \frac{\ln x \mathrm{d}x}{x(1-\ln^2 x)}$, $x > e$; 18) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}$, $x \in (1, e)$;

19) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(2x)}$, $x > \frac{1}{2}$; 20) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x - 2)}$, $x > e^2$;

21) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln^2 x+5)}$, $x > 0$; 22) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$, $x > 0$;

23) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$, $x \in (e^{-2}, e^2)$; 24) $\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{1+\sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

25) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; 26) $\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos^2 x - 4}$, $x \in \mathbb{R}$;

27) $\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$; 28) $\int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

29) $\int \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\cos^2 x - 4}$, $x \in \mathbb{R}$; 30) $\int \frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-\sin^4 x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

31) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(\mathrm{arctg}x+3)}$, $x \in \mathbb{R}$; 32) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(\mathrm{arctg}^2 x + \ldots}$
$\mathbb{R}$;

33) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}^2 x+5}}$, $x \in \mathbb{R}$;

34) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{4-\mathrm{arctg}^2 x}}$, $x \in (0,1)$;

35) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}x}}$, $x > 0$; 36) $\int \frac{\arcsin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$;

37) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$, $x \in (0,1)$; 38) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$, $x \in$

39) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin^2 x+1}}$, $x \in (-1,1)$;

40) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\arcsin^2 x}}$, $x \in (-1,1)$;

41) $\int \frac{(x-\sqrt{\mathrm{arctg}x})\mathrm{d}x}{1+x^2}$, $x > 0$; 42) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

43) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6-16}}$, $x > 2$; 44) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, $x > 0$;

45) $\int \frac{x+\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, $x \in (-1,1)$;

6) $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}x} + x\ln(x^2+1)+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

7)* $\int \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; 48) $\int \frac{\arcsin x\mathrm{d}x}{x^2}$, $x \in (0,1)$;

9) $\int x^5\sqrt{x^2-4}\mathrm{d}x$, $x > 2$; 50) $\int x^3\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

1) $\int \frac{\ln(1+e^x)-x}{1+e^x}\mathrm{d}x$.

doua metodă de schimbare de variabilă (facultativ)

Teoremă. Fie I, J intervale din $\mathbb{R}$ şi $I \xrightarrow{\varphi} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ două funcţii cu următoarele proprietăţi:

1) φ este bijectivă, derivabilă cu $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$;

2) funcţia $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive (fie H o primitivă a sa).

Atunci

a) funcţia f admite primitive;

b) funcţia $H \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă a lui f, adică

$$\int f(x)\mathrm{d}x = (H \circ \varphi^{-1})(x) + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Din 1) rezultă că φ^{-1} este derivabilă pe J. Cum H este o primitivă a lui h, rezultă H derivabilă pe I şi $H' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Pentru ca $H \circ \varphi^{-1}$ să fie o primitivă pentru f trebuie ca $(H \circ \varphi^{-1})' = f$. Mai întâi este clar că $H \circ \varphi^{-1}$ este derivabilă pe J (compunere de funcţii derivabile).

Avem: $(H \circ \varphi^{-1})'(x) = H'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) =$

$= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} =$

$= f(x)$, $x \in J$.

Observaţii. 1. Se spune că φ^{-1} este funcţia care schimbă variabila. Înlocuind formal $x = \varphi(t)$ şi $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ se trece de la integrala $\mathcal{I} = \int f(x)\mathrm{d}x$ la integrala asociată $\mathcal{I}_1 = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

2. În prima metodă se notează cu t o expresie ce conţine pe x, după care se calculează integrala asociată $\mathcal{I}_1$. În a doua metodă a substituţiei se pune x egal cu o expresie de t şi se trece la integrala asociată $\mathcal{I}_1$.

3. De remarcat că în cele două metode se face o substituţie în urma căreia se obţine o integrală asociată $\mathcal{I}_1$ mai uşor de calculat.

Probleme rezolvate

Să se calculeze, utilizând a doua metodă de schimbare de variab[ilă]... mitivele următoarelor funcţii:

1) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in (-a, a)$, $a > 0$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$, ...

3) $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$, $x > 0$; 4) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$, $x > 0$.

R. 1) Alegem $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-a, a)$, $\varphi(t) = a \sin t$, evident bi... (cu inversa $\varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a}$), derivabilă şi $\varphi'(t) = a \cos t \neq 0$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (deci se verifică cerinţa 1) din teoremă). Trebuie g... primitivă H pentru

$h(t) = (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t) = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t = a^2 \cos^2 t$.

Avem: $H \in \int h(t)\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\mathrm{d}t = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t =$

$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + \mathcal{C}$. Deci $\int f(x)\mathrm{d}x = H(\varphi^{-1}(x)) + \mathcal{C} =$

$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin \frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)}\right] + \mathcal{C} =$

$= \frac{a^2}{2}\left[\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + \mathcal{C} = \frac{1}{2}\left[a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right.$ ...

rezultat găsit la integrarea prin părţi. □

Observaţie. Dacă notăm formal $x = a \sin t$ cu $\mathrm{d}x = a \cos t\mathrm{d}t$, i... aici $\sin t = \frac{x}{a}$, sau $t = \arcsin \frac{x}{a}$, atunci integrala asociată este:

$\mathcal{I}_1 = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, a \cos t\mathrm{d}t = a^2 \int \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cdot \cos t)$ ...

Revenind la substituţie găsim

$\mathcal{I} = \frac{a^2}{2}\left[\arcsin \frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin \frac{x}{a}\right)}\right] + \mathcal{C} =$

$= \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + \mathcal{C}$. □

2) Alegem $\varphi : (1, \infty) \to (1, \infty)$, $\varphi(t) = t^6$, care este o funcţie bije... (cu inversa $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x} = t$), derivabilă pe $(1, \infty)$ şi $\varphi'(t) = 6t^5$ ... $t > 1$. Să construim primitiva H pentru funcţia $h(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ...

... $\frac{6t^5}{t^3 - t^2} = \frac{6t^3}{t-1}$. Deci $H \in \int h(t)\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t-1} =$

... $\int \frac{t^3 - 1 + 1}{t-1} = 6\int \frac{(t-1)(t^2+t+1)+1}{t-1}\mathrm{d}t =$

... $\int \left(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + \mathcal{C}$.

...um $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x} - 1) + \mathcal{C}$. □

...**servaţie.** Să remarcăm că în structura funcţiei apar $\sqrt{x}$ şi $\sqrt[3]{x}$ (deci ...licali de ordine diferite din aceeaşi expresie, aici x). Atunci se face ...stituţia $x = t^6$, unde exponentul 6 reprezintă cel mai mic multiplu ...nun al ordinelor radicalilor. Lucrând formal avem: $\mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$, ... $\sqrt[6]{x}$. Integrala asociată este:

... $= 6\int \frac{t^5\mathrm{d}t}{t^3 - t^2} = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t-1} = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6\ln(t-1) + \mathcal{C}$.

...venind la substituţie avem:

... $= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x} - 1) + \mathcal{C}$. □

... Substituim $x = t^2$ şi deci $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, iar $t = \sqrt{x}$. Integrala asociată ...e: $\mathcal{I}_1 = \int (\cos^2 t)2t\mathrm{d}t = 2\int t\frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \int (t + t\cos 2t)\mathrm{d}t =$

... $\frac{t^2}{2} + \int t\cos 2t\mathrm{d}t$, ultima integrală calculându-se prin părţi. Pentru ...easta punem $f(t) = t$, $g'(t) = \cos 2t$. De aici $f'(t) = 1$, $g(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$.

...em: $\int t\cos 2t\mathrm{d}t = \frac{t\sin 2t}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2t\mathrm{d}t = \frac{t\sin 2t}{2} + \frac{1}{4}\cos 2t + \mathcal{C}$.

...um: $\mathcal{I}_1 = \frac{t^2}{2} + \frac{t\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4} + \mathcal{C}$. Revenind la substituţie se obţine:

... $= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}{2} + \frac{\cos 2\sqrt{x}}{4} + \mathcal{C}$. □

... Se pune $x = \ln t$ şi deci $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$, $t = e^x$. Integrala asociată este:

... $= \int \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{1+t} = \int \frac{(1+t)-1}{1+t}\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t =$

... $t - \ln|1+t| + \mathcal{C}$.

...evenim la substituţie şi obţinem: $\mathcal{I} = e^x - \ln(1 + e^x) + \mathcal{C}$. □

... Se substituie $x = t^2 - 1$. De aici $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, $t = \sqrt{x+1}$. Integrala ...ociată este: $\mathcal{I}_1 = \int \frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathcal{C}$.

...eci $\mathcal{I} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1}\right| + \mathcal{C}$.

Probleme propuse

Să se calculeze, utilizând a doua metodă de schimbare de v substituţiile indicate, primitivele următoarelor funcţii:

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$, $x \geq 0$, $x = t^2$; 2) $f(x) = \dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$, $x \geq 0$,

3) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$, $x = \dfrac{1}{t}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (0,2)$, $x = 2\sin t$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$, $x > 1$, $x = \dfrac{1}{t}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x > \sqrt{2}$, $x = \dfrac{1}{t}$;

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x > 0$, $x = t^6$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x = -\ln t$;

9) $f(x) = x^2\sqrt{4-x^2}$, $x \in (-2,2)$, $x = 2\sin t$;

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$, $x > 0$, $x = 2\mathrm{tg}t$;

11) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in (0,1)$, $x = \sin^2 t$.

12) $f(x) = \underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x}}}_{n \text{ radicali}}$, $x \in (0,1)$, $x = 2\cos t$.

Integrarea funcţiilor raţionale

Definiţie. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, se nume raţională dacă $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde P, Q sunt funcţii polinom cu coeficienţi reali şi $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.