Ex 5.

$$\lim_{n} \log_{\frac{1}{10}} \frac{n+3}{10n+5} \Rightarrow \log_{\frac{1}{10}} \lim_{n} \frac{n+3}{10n+5} \Rightarrow \frac{\cancel{n}(1+3/n)}{\cancel{n}(10+5/n)} \Rightarrow \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10} = 1$$

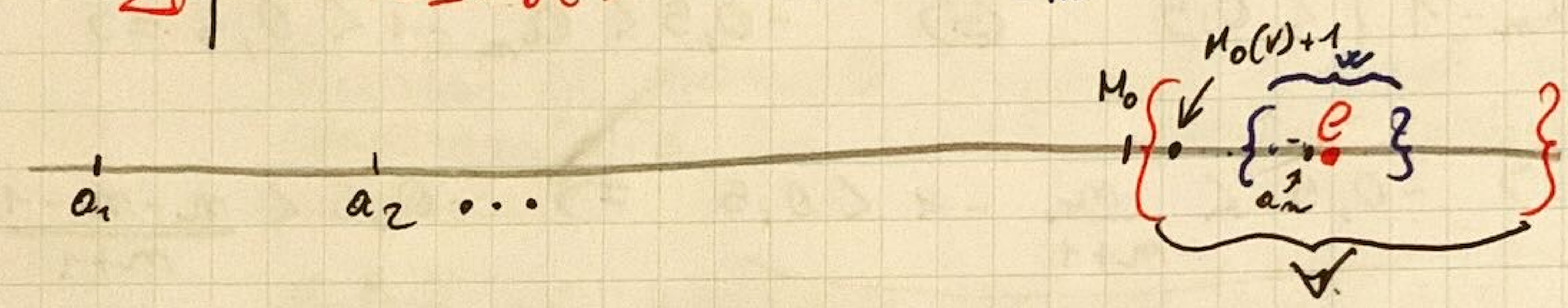
Secția 2 - Note

(Șir Cauchy de numere reale (sau șir fundamental))

Șir convergent:

Def.

1) Spunem că șirul $(a_n)_{n\in N} \in R$ este convergent și are limita $l \in R$, dacă $\forall V =$ vecinătate a lui l, există un număr natural n_0 care depinde de V, cu proprietatea că $\forall n \in N$ este $n \geq n_0(V)$ să avem $a_n \in V$.



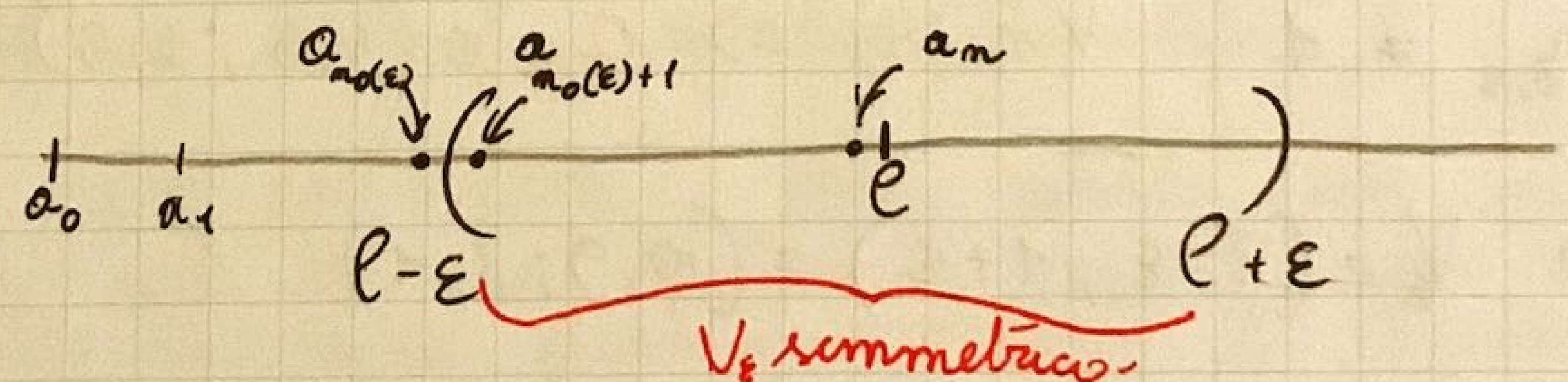
Def.

2) Spunem că șirul $(a_n)_{n\in N} \in R$ este convergent și are limita $l \in R$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un număr natural (rang) $n_0(\varepsilon)$ cu proprietatea că $\forall n > n_0(\varepsilon)$ să avem $|a_n - l| < \varepsilon$

Se scrie $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

$$|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \quad |+l$$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < a_n < \varepsilon + l$$



$\forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \forall V(\varepsilon) =$ Vecinătatea a lui l

$\exists n_0 \in N$, $n_0(\varepsilon) \in N \rightarrow$ a.i. $(\forall n > n_0(\varepsilon)) \Rightarrow a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

Exemplu: $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad n \in N$

$a_n > 0,\ \forall n \in N$: $a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1$

n	0	1	2	3	...	9
a_n	0	1/2	2/3	3/4	...	9/10

a_n $\quad 1$ $\quad n/(n+1)$

$n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2} \Rightarrow a_n \nearrow$

① $\varepsilon = 0,5$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \overset{\infty}{\underset{\infty}{=}} \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} = 1$

$\Rightarrow |a_n - 1| < 0,5 \Leftrightarrow -0,5 < a_n - 1 < 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0,5 < \frac{n}{n+1} - 1 < 0,5 \Rightarrow -0,5 < \frac{n-n-1}{n+1} < 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,5 < \frac{-1}{n+1} < 0,5$

$1 - 0,5 < \frac{n}{n+1} < 1 + 0,5 \Rightarrow 0,5 < \frac{n}{n+1} < 1,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,5 < \frac{n}{n+1} \Rightarrow 0,5(n+1) < n \Rightarrow 0,5 \cdot n + 0,5 < n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,5 < n - 1,5n \Rightarrow 0,5 < 0,5n \Rightarrow n > 1$

$n_\varepsilon = n_{0,5} = 1$ $\quad \forall n > 1 \Rightarrow a_n \in (0,5 ; 1,5)$

② $\varepsilon = 0,1 \Rightarrow V_\varepsilon = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = (0,9 ; 1,1)$

$|a_n - 1| < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < \frac{n}{n+1} - 1 < 0,1 \quad | +1 \Rightarrow$

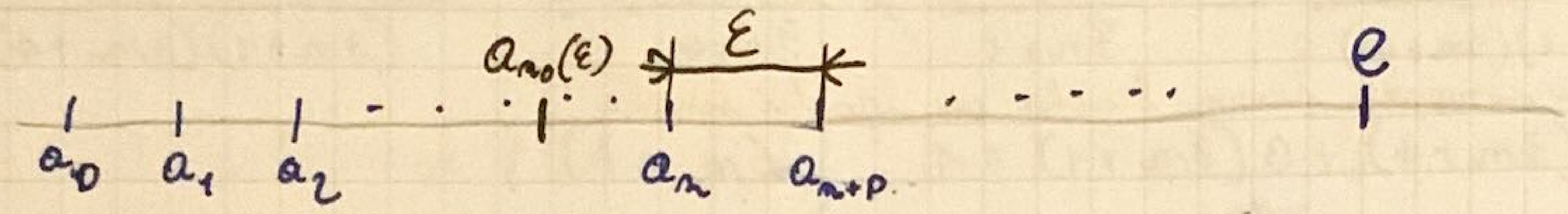
$\Rightarrow 0,9 < \frac{n}{n+1} < 1,1$

$0,9(n+1) < n \Rightarrow 0,9n + 0,9 < n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,9 < 0,1 \cdot n \Rightarrow n > \frac{0,9}{0,1} = 9$

$\forall x \geq 10 \Rightarrow a_n \in V_{0,9} = (0,9 ; 1,1)$

Șir cauchy: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește șir Cauchy dacă $(\forall)\, \varepsilon>0$, $(\exists)\, n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n>n_0(\varepsilon)$ și $(\forall)\, p\geq 1$, $p\in\mathbb{N}$, să avem $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$



Rezultatul fundamental demonstrat cu ajutorul șirului Cauchy este următorul.

↳ Un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir cauchy (fundamental)

⇓

Acesta se numește criteriul general de convergență a lui Cauchy pentru șiruri numerice.

Putem să precizăm natura unui șir, fără să știm limita, dacă este convergent sau nu

---

Exemplu: Arătați că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde

$$a_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

① este șir Cauchy (și să ② calculăm limita).

---

① (a_n) satisface definiția șirului Cauchy:

- Fie $\varepsilon>0$, ales arbitrar; Vom arăta că putem găsi întotdeauna un număr natural $n_0(\varepsilon)$ {care depinde de ε} începând de la care distanța dintre 2 termeni oarecare ai șirului poate fi făcută mai mică de orice $\varepsilon>0$.
- Punem condiția $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$, $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$ și $p\geq 1$ {arbitrar}

↳ $$|a_{n+p}-a_n|=\Bigg|\underbrace{\cancel{\frac{1}{1\cdot 4}}+\cancel{\frac{1}{4\cdot 7}}+\dots+\cancel{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}+\dots+\frac{1}{[3(n+p)-2][3(n+p)+1]}}_{a_{n+p}}\underbrace{-\cancel{\frac{1}{1\cdot 4}}-\cancel{\frac{1}{4\cdot 7}}-\dots-\cancel{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}}}_{a_n}\Bigg|$$

$$=\left|\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}+\frac{1}{(3n+4)(3n+7)}+\dots+\frac{1}{[3(n+p)-2][3(n+p)+1]}\right|<\varepsilon$$

• Dacă acum punem condiția $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, din această relație nu vom determina "rangul $n_0(\varepsilon)$ } care depinde doar de ε }, începând de la care $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $(\forall)$

Descompunere

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{A}{3n+1} + \frac{B}{3n+4} = \frac{A(3n+4)+B(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \Rightarrow$$

se descompune prima fracție în fracții simple

$$\Rightarrow A(3n+4) + B(3n+1) = 1, \ \{\forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Rightarrow 3An + 4A + 3Bn + B = 1$$

$$\Rightarrow n(3A+3B) + 4A + B = 1, \ \{\forall n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A+3B=0 \\ 4A+B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=\frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1/3 \\ A=1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4}\right)$$

Verificare: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3n+4-3n-1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(3n+1)(3n+4)} =$

$$= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$

• $$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{(3n+4)(3n+7)} + \dots + \frac{1}{[3n+3p-2][3n+3p+1]} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3n+1} - \cancel{\frac{1}{3n+4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{(3n+4)}} - \cancel{\frac{1}{(3n+7)}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{[3n+3p-5]}} - \cancel{\frac{1}{[3n+3p-2]}}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\cancel{\frac{1}{(3n+3p-2)}} - \frac{1}{(3n+3p+1)}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3n+1)} - \frac{1}{(3n+3p+1)}\right] < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n+1} - \cancel{\frac{1}{3n+3p+1}} + \cancel{\frac{1}{3n+3p+1}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+1} \quad (\forall) p \geq 1$$

$\Rightarrow$ Rezultă că $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$.

Din ultima rezulta că există că $n_0(\varepsilon)$ a.î. $\forall n > n_0(\varepsilon)$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $(\forall)\, p \geq 1$ și $n \geq N_0(\varepsilon)$

$\rightarrow$ (a_n) este șir Cauchy, deci (a_n) este convergent

$\frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon = -1 \cdot \frac{1}{9n+3} < \varepsilon \Rightarrow 9n+3 > \frac{1}{\varepsilon}$; $\Rightarrow 9n > \frac{1}{\varepsilon} - 3$

$\Rightarrow n > \frac{1}{9}\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$. notăm $n_0(\varepsilon) = \left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]\right\} \in \mathbb{N}$

Ex. $\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow n_0(0{,}1) = \left\{\frac{1}{9}[7]\right\} = \left[\frac{7}{9}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < 0{,}1$ este adevărată pentru $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq 1$

În final am arătat că pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon) \in \{\text{un rang}\}$ a.î. $\forall n > n_0(\varepsilon)$ și pentru $(\forall)\, p \geq 1$

$\Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ $\rightarrow$ (a_n) este șir cauchy, deci convergent.

OBS: pentru acest $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] \in \mathbb{N}$, am gasit că

$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3(3n+1)} < \varepsilon$ $\forall p \geq 1$

- Fie $n \geq n_0(\varepsilon)$ rezultă evident că $\rightarrow 3(3n+1) > 3(3n_0+1) \rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3(3n+1)} < \frac{1}{3(3n_0+1)} < \varepsilon$

- Deci $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, $\forall p \geq 1 \in \mathbb{N}$

Serii de numere reale

Exemplu:

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\in\mathbb{R}}$ un șir de numere reale. Cu ajutorul lui construim seria cu termenul general (a_n):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \{Serie\}$$

- Notăm $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (suma primilor n termeni).

Def. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă și are suma S dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale al seriei, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ este convergent și are limita S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad \{serie\ convergentă\}$$

① $$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+K}}}_{\text{Serie geometrică de rație } r = 1/2}$$

- $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$;

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = 2$$

- $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = ?$ $\Rightarrow = \left(\frac{r^n - 1}{r-1} = \frac{1-r^n}{1-r}\right)$

- $r^2 - 1 = (r-1)(r+1) \Rightarrow r + 1 = \frac{r^2-1}{r-1}$
- $r^3 - 1 = (r-1)(r^2+r+1) \Rightarrow 1 + r + r^2 = \frac{r^3-1}{r-1}$

General $r^n - 1 = (r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1) = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$

Caz mai general: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^1+\dots b^{n-1})$$

$$b=1$$

Exemplu.

Fie seria: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\dots$$
$$+\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}+\dots$$

Termenul general seriei este $\alpha_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

- $S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ Termenul general al șirului sumelor parțiale

- $S=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}S_n$; Am arătat că S_n este șir Cauchy, deci convergent.

?: Calculăm acum $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

- $n=1 \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)$
- $n=2 \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)$
- $n=3 \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$
- $n=n-1 \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}\right)$
- $n=n \to \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{3n+1}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\right\}$$

Din exemplele anterioare a rezultat că putem stabili natura unei serii numerice (și chiar și suma sa) utilizând doar definițiile (și cunoștințele despre șiruri).

Natura unei serii numerice se va stabili (de regulă) cu ajutorul unei criterii de convergență:

1) Criterii generale de convergență;
2) Criterii pentru serii cu termeni pozitivi
3) Criterii pentru serii cu termeni oarecare

---

① {Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru serii numerice}

TEOREMĂ

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul sumelor parțiale asociat $(S_n)_{n\in N}$ este șir Cauchy. $\Leftrightarrow$

$(\forall)\, \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0(\varepsilon) \in N$ a.î. $(\forall)\, n > n_0(\varepsilon)$ și $(\forall)\, p \geq 1,\ p \in N$

și avem:

$\hookrightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall n > n_0(\varepsilon), \forall p \geq 1$

- Din cauza generalității sale {fiind necesar și suficient}, în practică se aplică mai rar.

IMP. (De regulă, în aplicații, se utilizează criterii care sunt numai necesare sau numai suficiente de convergență/divergență

Exemple: Fie $p=1$ în criteriul lui Cauchy

$\Rightarrow (\forall)\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$(a_n)_n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; $|a_{n+1} - 0| < \varepsilon$ $(\forall)\varepsilon$

{Aceasta este o condiție doar necesară de convergență}, dar nu și suficientă.

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ } Seria Armonică

• $(a_n) = \frac{1}{n}$; $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$\Downarrow$

• $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim \frac{1}{n} = 0$ | Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

{Pentru această serie avem:

→ Condiția necesară de convergență, $a_n \to 0$ este asigurată

$\Rightarrow \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

→ Condiția nu este și suficientă →

$= \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Arătăm că șirul $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ nu este șir Cauchy

$\Rightarrow S_n$ nu este convergent.

• Pentru a obține negarea unei afirmații matematice se parcurg următorii pași:

1) Oricare → Există | $\forall \to \exists$

2) Există → Oricare | $\exists \to \forall$

3) Adevărul P → Non P | $P \to \neg P$

!!

Arătăm că S_n nu este șir Cauchy.

$\Leftrightarrow$ Trebuie că $(\exists)\,\varepsilon_0 > 0$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $(\exists)\, p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon_0$$

Dacă S_n ar fi fost șir Cauchy, atunci

$(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, p \geq 1$ a.î. avem $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

Fie $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ putem lua $p = n$, p există $\in \mathbb{N}$ $\rightarrow$

$$\rightarrow |S_{n+p} - S_n| = \left|1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right|$$

$$\rightarrow \left|\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

Pentru $p = n$, $\rightarrow |S_{2n} - S_n| = \dfrac{1}{n+1} + \dots + \dfrac{1}{n+n} >$

$$> \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n}}_{} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

Am arătat că $(\exists)\,\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ cu proprietatea că pentru $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $(\exists)\, p \in \mathbb{N}$ $(p = n)$ a.î.

$$|S_{n+p} - S_n| = |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_n \text{ nu este șir Cauchy}$$

Nu este convergent

$\rightarrow$ Deci... $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

$\hookrightarrow$ Seria armonică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ este divergentă

S_n este $\nearrow$ și divergent $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Natura unei serii numerice nu se schimbă dacă se adaugă sau suprimă un număr finit de termeni la seria respectivă.

Se schimbă doar valoarea sumei dacă seria este convergentă.

Dacă $\sum U_n$ și $\sum V_n$ sunt convergente și au sumele U respectiv V, atunci seriile

$\sum (U_n \pm V_n)$ și $\sum (\alpha \cdot U_n)$ sunt, de asemenea convergente și au sumele $U \pm V$, respectiv αU.

$$\sum (\alpha \cdot U_n \pm \beta V_n) \to \alpha \cdot U \pm \beta V \quad \{\text{linearitate}\}$$

End. L2