1 Elemente de combinatorica

Multimi finite

A = multime finita ordonata cu n elemente daca fiecarui element i se asociaza un numar de ordine de la 1 la n a.i. fiecarui element diferit din A sa ii corespunda un numar de ordine diferit.

Permutari

$$P_n = n!$$

Aranjamente

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinari

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

sau

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}$$

Formula de recurenta pentru calculul numarului de combinari

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Triunghiul lui Pascal

$$C_n^0 = C_n^n = 0$$

n=0							1						
n=1						1		1					
n=2					1		2		1				
n=3				1		3		3		1			
n=4			1		4		6		4		1		
n=5		1		5		10		10		5		1	
n=6	1		6		15		20		15		6		1

Binomul lui Newton

$$(a+b)=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n$$

Proprietatile binomului lui Newton

1. $(a+b)^n$ dezvolta n+1 termeni, iar coeficientii dezvoltati sunt $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ si sunt in numar de n+1.

2. Deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$ rezulta faptul ca termenii de pe pozitii simetrice (opuse) au coeficientii egali.

3. In dezvoltare, puterile lui a scad de la n la 0, iar puterile lui b cresc de la 0 la n.

4. Coeficientii cresc, apoi descresc. Daca n este par (de forma n = 2m), atunci coeficientul termenului din mijloc, C_{2m}^m, este cel mai mare. Daca n este impar (de forma n = 2m + 1), atunci coeficientii ambilor termeni din mijloc, C_{2m+1}^m si C_{2m+1}^{m+1}, sunt cei mai mari si egali intre ei.

2 Extensii si generalizari

Aranjamente cu repetitii

Fie A o multime diferita de multimea vida. Se numeste cuvant cu elemente din A, un sistem finit ordonat de elemente din A scris astfel: $a_1a_2...a_k$. In acest caz, k se numeste lungimea cuvantului. Cuvantul care nu are niciun element din A se numeste cuvant vid si are k = 0

Spunem ca doua cuvinte din A, respectiv $a_1a_2...a_s$ si $b_1b_2...b_k$ sunt egale daca au aceeasi lungime, deci s = k si $a_i = b_i$, oricare ar fi i, $1 \leq i \leq k$

pentru k = 2, cuvintele se numesc perechi ordonate
pentru k = 3, cuvintele se numesc triplete
pe caz general, pentru k = n, cuvintele se numesc k-upluri ordonate

Elementele $a_1, a_2, ..., a_k$ se numesc componente ale cuvantului $a_1a_2...a_k$.

Fie $N_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ multimea primelor k numere naturale si A o multime oarecare.
Fie $f : N_k -> A; f(i) = a_i, 1 \leq 1 \leq k$, adica fiecarui numar i din N_k ii corespunde, prin f, un element a_i din A.

Se numeste $F(N_k, A)$ multimea tuturor functiilor f Se numeste $Cuv_k(A)$ multimea cuvintelor de lungime k cu elemente din A

Teorema: Fie N_k si A definite mai sus. Rezulta ca exista o bijectie intre $F(N_k, A)$ si $Cuv_k(A)$.

$$B_k = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} -> kelemente$$

$$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} -> nelemente$$

$$Rezulta\ \ F(N_k, A) -> n^k elemente$$

Notam cu $Inj(K)$ multimea tuturor functiilor injective definitie pe N_k cu valori in A.

$$Inj(k) \subset F(N_k, A)$$

Notam $A_k(A)$ multimea tuturor aranjamentelor (fara repetitie) de cele n elemente ale lui A, luate cate k.

Fie $\rho : F(N_k, A) -> Cuv_k(A)$. De aici rezulta $\rho(Inj(N_k, A)) \subset Cuv_k(A)$ este de lungime k, formata cu elemente din A si ale carui componente nu se repeta.
De aici rezulta $\bar{\rho} : Inj(N_k, A) -> A_n(A)$ $\bar{\rho}(f) = a_1 a_2 ... a_k$, unde $f(i) = a_i, 1 \leq i \leq k$

Teorema: $\bar{\rho} : Inj(N_k, A) -> a_k(A)$ este bijectiva.

Permutari fara repetitie

Fie A o multime nevida cu n elemente si fie α un cuvant cu elemente din A.

$m_i(\alpha)$ = numarul care arata de cate ori intra elementul a_i in α. Daca $a_i \notin \alpha$, atunci $m_i(\alpha) = 0$.

Sistemul de numere $m_1 m_2 ... m_n$ se numeste tipul lui x si vom spune ca α este de tip $m_1 m_2 ... m_n$
Exemplu: Fie $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ si $\alpha = a_1 a_2 a_3 a_1 a_2$.
De aici rezulta ca α este de tip (2, 2, 1, 0)

Doua cuvinte de acelasi tip pot sa difere doar prin ordinea componentelor.

Pentru un tip de cuvant dat, orice cuvant cu elemente din A cu acelasi tip se numeste permutatie de acest tip.

Notam $P(m_1, m_2, ..., m_n)$ numarul permutarilor cu repetitie de tip $(m_1, m_2, ..., m_n)$.

$$P(m_1, m_2, ..., m_n) = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)!}{m_1! m_2! ... m_n!}$$

Combinari cu repetitie

Sistemul de numere naturale $(k_1, k_2, ...k_n)$ cu proprietatea ca $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$ se numeste combinare cu repetitie de n elemente luate cate k, iar numarul lor se noteaza cu $\bar{C}_n^k$

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

Formula unui produs de binoame. Binomul lui Newton. Puterea m a unei sume de n termeni.

$$\prod_{i=1}^{n}(a+b_1) = (a+b_1)(a+b_2) + ... + (a+b_n)$$

3 Grafuri

Se numeste graf ansamblul format dintr-o multime X si o aplicatie $\Gamma : X -> P(X)$ si se noteaza cu $G = (X, \Gamma)$.

Elementele lui X se numesc **varfuri** ale lui G.

Daca $x \in X$ si $y \in \Gamma(x)$, atunci varful x este legat de varful y prin-un **arc** orientat de la x la y si notat cu **(x,y)**.

In acest caz, varful x se numeste originea sau extremitatea initiala a arcului, iar varful y se numeste extremitatea finala sau extremitatea terminala a arcului.

Tipuri de varfuri:

1. **Izolat** daca varful nu este extremitate a niciunui arc.
2. **Nod** daca varful este extremitate a mai mult de 2 arce.
3. **Bucla** daca extremitatea initiala coincide cu extremitatea finala.

Un graf G este complet determinat de multimea X si multimea U. Multimea U este multimea tuturor arcelor din graful G.

Multimea U este complet determinata de aplicatia Γ, iar aplicatia Γ este complet determinata de multimea U.

Astfel, $G = (X, \Gamma) = (X, U)$

Drum

Se numeste drum un sir de arce $(u_1, u_2, ..., u_k)$ cu proprietatea ca extremitatea terminala a unui arc u_i coincide cu extremitatea initiala a arcului urmator u_{i+1}.

Un drum se poate defini si ca o succesiune de varfuri: $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$

Intre doua varfuri oarecare din G pot exista mai multe drumuri sau niciunul.

Tipuri de drumuri:

1. **Simplu** daca parcurge o singura data fiecare arc.
2. **Compus** daca parcurge cel putin un arc mai mult de o singura data.
3. **Elementar** daca trece o singura data prin fiecare varf al sau.
4. **Neelementar** daca trece mai mult de o data prin cel putin un varf al sau.

Un drum de la x la x se numeste **circuit**.

Tipuri de circuite:

1. **Simplu** daca parcurge o singura data fiecare arc.
2. **Compus** daca parcurge cel putin un arc mai mult de o singura data.
3. **Elementar** daca trece o singura data prin fiecare varf al sau.
4. **Neelementar** daca trece mai mult de o data prin cel putin un varf al sau.

Lungimea unui drum este data de numarul de arce din componenta sa.

Un drum elementar care trece prin toate varfurile lui G se numeste **Drum Hamiltonian**.

Un drum u' se numeste **subdrum** al unui drum u daca varfurile consecutive din u' sunt consecutive si in u.

G'= (X, U') se numeste **graf partial** al lui G = (X, U), cu $U' \subset U$. Acesta se obtine prin suprimarea unor arce din G, dar cu aceleasi varfuri.

$G'(X', \Gamma')$ se numeste **subgraf** al lui G, unde $X' \subset X$, iar $\Gamma'(x) = \Gamma(x) \cap X'$, oricare ar fi $x \in X'$. Un subgraf se obtine prin suprimarea unor varfuri si a tuturor arcelor care au una din extremitati in varfurile suprimate.

Tipuri de grafuri:

1. **Complet** daca oricare ar fi $x, y \in X, x \neq y$, exista un arc (x, y) si (y, x).
2. **Simetric** daca pentru orice arc $(x, y) \in U$, exista si arcul $(y, x) \in U$.
3. **Antisimetric** daca exista cel putin un arc $(x, y) \in U$ pentru care nu exista si $(y, x) \in U$.
4. **Simplu** daca impartim $X = X_1 \cup X_2$, cu $X_1, X_2 \neq \emptyset$, si $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ si orice arc de forma $(x, y) \in U$, cu $x \in X_1$ si $y \in X_2$.
E multa matematica, asa ca va spun si pe romana. Un graf este simplu daca putem imparti X in doua submultimi cu elemente diferite, si luand orice element x din prima submultime si orice element y din a doua submultime, arcul (x, y) exista in graf.
5. **Tare conex** daca oricare ar fi $x, y \in X, x \neq y$, exista un drum de la x la y.

Fie x un varf din X. Notam cu $C(x) \subset X$ multimea ce contine pe x si toate varfurile $y \in X$ pentru care exista un circuit care trece prin varfurile x si y.

C(x) se numeste componenta tare conexa a lui G.

Astfel daca $y \in C(x)$, atunci exista un drum de la x la y si un drum de la y la x.

Teorema: Un graf se numeste tare conex daca si numai daca are o singura componenta conexa.

$$C(x_i) \neq \emptyset$$

$$C(x_i) \neq C(x_j) \ rezulta \ C(x_i) \cap C(x_j) = \emptyset$$

$$\underset{x_i \in X}{U} C(x_i) = X$$

Notiuni de neorientare

Se numeste muchie o pereche neordonata de varfuri $x, y \in X, x \neq y$, se noteaza cu [x, y] si nu tine cont de sens/directie.

Notam cu $\bar{U}$ multimea tuturor muchiilor dintr-un graf.

Subtipuri de grafuri

1. **Neorientat** daca toate legurile dintre varfuri sunt muchii.
2. **Orientat** daca legaturile dintre varfuri sunt arce

Unui graf orientat simetric i se poate asocia un graf neorientat, iar (x, y) impreuna cu (y, x) devin [x, y]

Unui graf neordientat i se pot asocia mai multe grafuri orientate.

Fie G un graf neorientat, se numeste gradul varfului x numarul muchiilor care au o extremitate in x si se noteaza cu g(x). Daca g(x) = 0, atunci varful x este izolat.

Intr-un graf neorientat cu m muchii, suma gradelor tuturor varfurilor este 2m.

Lant

Un sir de muchii se numeste lant daca fiecare muchie $\bar{u}_i$ este legata printr-o extremitate de $\bar{u}_{i-1}$ si prin cealalta extremitate de $\bar{u}_{i+1}$.

Un lant se poate defini si printr-o succesiune de varfuri $[x_1, x_2, ...x_k]$

Tipuri de lanturi:

1. **Simplu** daca parcurge o singura data fiecare muchie.
2. **Compus** daca parcurge cel putin o muchie mai mult de o singura data.
3. **Elementar** daca trece o singura data prin fiecare varf al sau.
4. **Neelementar** daca trece mai mult de o data prin cel putin un varf al sau.

Un lant in care varful initial coincide cu varful final se numeste **ciclu**.

Tipuri de cicluri:

1. **Simplu** daca parcurge o singura data fiecare muchie.
2. **Compus** daca parcurge cel putin o muchie mai mult de o singura data.
3. **Elementar** daca trece o singura data prin fiecare varf al sau.
4. **Neelementar** daca trece mai mult de o data prin cel putin un varf al sau.

Un graf este conex daca pentru fiecare dintre varfurile $x, y \in X, x \neq y$ exista cel putin un lant de la x la y.

Fie C(x) multimea formata din $x \in X$ si toate celelalte varfuri $y \in X$ legate prin lanturi de x. C(x) se numeste componenta conexa a lui G.

$\bar{U}$ se numeste partitie a lui X.

Asadar, daca exista mai multe submultimi distincte $C(x_i)$ ale lui X, atunci acestea formeaza o partitie a lui X.

$$C(x_i) \neq \emptyset$$

$$C(x_i) \neq C(x_j) \;\; => \;\; C(x_i) \cap C(x_j) = \emptyset$$

$$\underset{x_i \in X}{U} C(x_i) = X$$

Teorema: Un graf este conex daca si numai daca are o singura componenta conexa.

Spunem ca varful y se numeste **succesor** al varfului x, sau ca varful x se numeste **predecesor** al varfului y, daca exista in G un drum de la x la y.

Daca drumul respectiv este format din k arce, spunem ca y este **succesorul de ordin k** al lui x sau ca x este **predecesorul de ordin k** al lui y.

$\Gamma^k(x)$ este multimea succesorilor de ordin k ai lui x

$\Gamma^{-k}(x)$ este multimea predecesorilor de ordin k ai lui x

$G^k(X, \Gamma^k)$ se numeste graful succesorilor de ordin k ai lui G

Se numeste inchiderea tranzitiva a varfului x multimea $\hat{\Gamma}(x) = U_{k=0}^{\inf}\Gamma^0(x)$

Se numeste inchiderea tranzitiva inversa a varfului x multimea $\hat{\Gamma}^{-1}(x) = U_{k=0}^{\inf}\Gamma^0(x)$

$\hat{\Gamma}(x)$ reprezinta multimea formata din x si toti succesorii sai din G.

$\hat{\Gamma}^{-1}(x)$ reprezinta multimea formata din x si toti predecesorii sai din G

$\hat{G}(X, \hat{\Gamma})$ se numeste inchiderea tranzitiva a lui G

Daca pentru orice $x \in X$ are loc relatia $\hat{\Gamma}(x) = x$, atunci graful este tare conex si reciproc.

Teorema: Intr-un graf finit fara circuite exista cel putin un varf fara succesori si cel putin un varf fara predecesori.

Impartirea unui graf pe nivele
La fiecare nivel se noteaza toate varfurile fara predecesori si se reconstruieste graful cu aceste varfuri suprimate. Se repeta procesul pentru fiecare nivel pana cand se ajunge la ultimul varf. Varfurile suprimate la fiecare nivel reprezinta varfurile nivelului respectiv.

4 Matrici booleene asociate unui graf

Fie $A = (a_{ij})$, cu a_{ij} :

$$\begin{cases} 1, (x_i, x_j) \in U \\ 0, (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

Daca A este simetrica ($a_{ij} = a_{ji}$), atunci graful sau asociat este simetric si reciproc.

Daca $a_{ij} = 1, oricare\ ar\ \ fi\ \ x_i, x_j \in X$, atunci G este un graf plin.

Daca pentru orice $a_{ij} = 1$ exista $a_{ji} = 0$, atunci G este un graf antisimetric

Daca pentru orice $a_{ij} = 0$ exista $a_{ji} = 1$, atunci G este un graf complet.

G este neconex daca matricea A asociata are forma diagonala pe blocuri sau daca poate fi adusa la forma diagonala prin renumerarea varfurilor (echivalent cu permutarea liniilor si coloanelor)

Se numeste **grad de emisie**, **grad de iesire** sau **grad local exterior** al unui varf $x \in X$ si se noteaza cu $g^+(x)$, numarul arcelor care au extremitatea initiala in x.

Se numeste **grad de receptie**, **grad de intrare** sau **grad local interior** al unui varf $x \in X$ si se noteaza cu $g^-(x)$, numarul arcelor care au extremitatea finala in x.

$$U^+(x) = \{(x, y) \in U \mid y \in \Gamma(x)$$
$$U^-(x) = \{(y, x) \in U \mid x \in \Gamma(y)$$
$$g^+(x) = card(U^+(x))$$
$$g^-(x) = card(U^-(x))$$
$$g(x) = g^+(x) + g^-(x)$$

Subtipuri de varfuri:

1. **Punct de emisie** daca $g^+(x) > 0$ si $g^-(x) = 0$
2. **Punct de receptie** daca $g^+(x) = 0$ si $g^+(x) > 0$
3. **Punct intermediar** daca $g^+(x) > 0$ si $g^-(x) > 0$
4. **Punct izolat** daca $g^+(x) = 0$ si $g^-(x) = 0$

Se numeste **Retea de transport** un graf orientat, conex, fara bucle, cu urmatoarele proprietati:

1. $x_0 \in X$ este singurul varf fara predecesori, de tip sursa si se numeste **intrarea in retea**
2. $x_n \in X$ este singurul varf fara succesori, de tip destinatie si se numeste **iesirea din retea**
3. exista $C : U- > N^+$ care asociaza fiecarui arc $(x_i, x_j) \in U$ un numar pozitiv

$C(u_{ij}) = c_{ij}$ se numeste capacitatea arcului (x_i, x_j)

O retea de transport se noteaza prin $R(X, U, C, x_0, x_n)$

Matricea drumurilor asociata unui graf

Se numeste matricea drumurilor, matricea conexa terminala asociata lui G. Se noteaza cu $T = (t_{ij})$, cu t_{ij}:

$$\begin{cases} 1, \ Daca\ exista\ drum\ de\ la\ x_i\ la\ x_j \\ 0, \ Daca\ nu\ exista\ drum\ de\ la\ x_i\ la\ x_j \end{cases}$$

Matricea booleana A poate determina un singur graf, dar matricea T poate fi asociata mai multor grafuri.

5 Algoritmul lui Y. C. Chen

1. Fie $a_{1i_1}, a_{1i_2}, ..., a_{1i_m}$ elemente diferite de 0 de pe prima linie a matricei booleene asociata A. Adunam boolean liniile $i_1, i_2, ..., i_n$ la linia 1.

2. Daca in urma efectuarii operatiei de la pasul 1, au aparut elemente noi diferite de 0 pe prima linie, fie acestea $a_{1j_1}, a_{1j_2}, ..., a_{1j_m}$, adunam boolean liniile $j_1, j_2, ..., j_k$ la linia 1.

3. Se repeta pasul 2 pana cand se ajunge la una din urmatoarele situatii:

a. Toate elementele liniei 1 sunt egale cu 1

b. Nu se mai pot genera alte elemente egale cu 1 pe linia 1

4. Se repeta pasii 1, 2 si 3 pentru fiecare linie din matrice. In final, se obtine matricea terminal conexa T.

6 Puterea unui varf

Se numeste puterea de atingere a lui x_i si se noteaza cu $p(x_i)$ numarul maxim de varfuri care pot fi atinse plecand de la x_i.

$$p(x_i) = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}, i = 1, 2, ..., n$$

Si reprezinta suma tuturor elementelor din linia x_i din matricea T.

Putem calcula puterile de atingere ale tuturor varfurilor lui G insumand elementele nenule de pe liniile corespunzatoare din T.

Permutand liniile lui T astfel incat puterile de atingere ale varfurilor sa fie in ordine descrescatoare, si ulterior permutand si coloanele in aceeasi ordine, obtinem matricea T'.

Daca $p(x_{k_1}) \geq p(x_{k_2}) \geq p(x_{k_3}) \geq ... \geq p(x_{k_n})$, atunci obtinem ordinea descrescatoare a varfurilor $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$

Fie σ o permutare acestei ordonari:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

Teorema: Matricea T^{-1} obtinuta folosind procedeul de mai sus se numeste matrice superior triunghiulara.

Teorema (Y. C. Chen: Un graf G cu n varfuri, orientat si fara circuite, contine un drum hamiltonian daca si numai daca numarul elementelor diferite de 0 din matricea conexa terminala T este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$

Teorema: Daca intr-un graf G orientat si fara circuite exista un drum hamiltonian, acesta este unic.

7 Algoritm de gasire a Drumului Hamiltonian

1. Fie G un graf. Se contruiesc matricele A si T. Daca numarul elementelor diferite de 0 din matricea T este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$, atunci in graful G exista un drum hamiltonian si acesta este unic.

2. Se construieste matricea T'

3. Drumul hamiltonian se citeste din matricea T' prin succesiunea arcelor corespunzatoare elementelor egale cu 1 aflate deasupra diagonalei principale.

8 Adunarea matricelor booleene

$$a \bigoplus b = max(a, b)$$

Fie A si B doua matrice booleene de ordin n.

Atunci $c_{ij} = a_{ij} \bigoplus b_{ij}$ si $C = A \bigoplus B$

Fie $G_1 = (X, \Gamma_1) si G_2 = (X, \Gamma_2)$

$G = G_1 \bigvee G_2 = (X, \Gamma_1 \bigvee \Gamma_2)$, unde $(\Gamma_1 \bigvee \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x)$ si se numeste **graficul reuniune**.

$H = G_1 \bigwedge G_2 = (X, \Gamma_1 \bigwedge \Gamma_2)$, unde $(\Gamma_1 \bigwedge \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$ si se numeste **graficul intersectie**.

(x, y) arc in G daca si numai daca (x, y) arc in G_1 sau G_2
(x, y) arc in H daca si numai daca (x, y(arc in G_1 si G_2

Fie $G_1 = (X, U_1)$ si $G_2 = (X, U_2)$.

$G = G_1 \bigvee G_2 = (X, U_1 \cup U_2)$
$H = G_1 \bigwedge G_2 = (X, U_1 \cap U_2)$

Daca $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ atunci graful H are toate elementele izolate

Fie A_1 si A_2 matricele booleene asociate lui G_1 si G_2
Atunci $A_1 \bigoplus A_2$ este matricea booleana atasata lui $G = G_1 \cup G_2$

9 Inmultirea matricelor booleene

$$a \bigotimes b = min(a, b)$$

$$a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus ... \bigoplus a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Fie A si B doua matrice booleene de ordin n.

Atunci $c_{ij} = \sum_{k}^{\cdot}(a_{ik} \bigotimes b_{kj}) = \sum_{k}^{\cdot} a_{ik}b_{kj}$ si $C = A \bigotimes B$

Fie $G_1 = (X, \Gamma_1)$ si $G_2 = (X, \Gamma_2)$

Spunem ca $G = (X, \Gamma)$ este prodosul de compozitie al lui G_1 si G_2 su scriem:
$G = G_2 \circ G_1 = G_2G_1, \Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1 = \Gamma_2\Gamma_1$

$(\Gamma_2\Gamma_1) = \Gamma_2(\Gamma_1(x))$

Fie $G = (X, \Gamma)$. Numim reciproc al lui G pe $G^{-1} = (X, \Gamma^{-1})$, unde
$\Gamma^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in \Gamma(x)\} = \{x \in X \mid (x, y) \in U\}$

Reperul sagital al lui G^{-1} se obtine din reperul sagital al lui G, prin inversarea directiei arcelor.

Teorema: Produsul de compozitie al grafurilor este asociativ

Teorema: $G_1 = (X, \Gamma_1)$ si $G_2 = (X, \Gamma_2)$ si $G = (X, \Gamma)$ produsul lor de compozitie, unde $G = G_2G_1$ si $\Gamma = \Gamma_2\Gamma_1$.
Atunci: $(G_2G_1)^{-1} = G_1^{-1}G_2^{-1}$

Teorema: Fie A si B doua matrice booleeene atasate lui G_1 si G_2.
Atunci: $C = A \bigotimes B$ este matricea booleana asociata lui $G = G_2G_1$

Definitie:Fie graful $G = (X, \Gamma)$ si A matricea booleana atasata lui. Definim:
$A^{k^{\cdot}}$ = puterea k-booleana a lui A
$A^{k^{\cdot}} = A \bigotimes A \bigotimes A \bigotimes ... \bigotimes A$ de k ori

Teorema: Fie A si B doua matrice booleana de dimensiune n. $A \bigotimes B$, respectiv AB, produsul boolean si produsul obisnuit al celor doua matrice.
Atunci $A \bigotimes B$ se obtine din AB prin inlocuirea tuturor valorilor nenule cu 1.

Metoda de aflare a numarului de drumuri de lungime n de la x_i la x_j (Asta este adaugata de mine pentru simplificarea metodei de rezolvare)
Pentru a afla numarul drumurilor de lungime n de la varful x_i la varful x_j, calculati matricea A^n. Valoarea termenului a_{ij} din matrice este egal cu numarul drumurilor de lungime n de la varful x_i la varful x_j

10 Matricea booleana a inchiderii tranzitivitatii

$\hat{A} = I \bigoplus A$, unde I este matricea unitate

Cu alte cuvinte, matricea $\hat{A}$ se obtine prin inlocuirea tuturor elementelor de pe diagonala principala din A cu 1. Se obtine din G prin adaugarea de bucle la fiecare varf.

Patratul boolean al lui $\hat{A}$ este: $\hat{A}^{2^{\cdot}} = I \bigoplus A \bigoplus A^{2^{\cdot}}$

Pe caz general, $\hat{A}^{r^{\cdot}} = I \bigoplus A \bigoplus A^{2^{\cdot}} \bigoplus ... \bigoplus A^{r^{\cdot}}$

sau, $\hat{A}^{(r+1)^{\cdot}} = \hat{A}^{r^{\cdot}} \bigoplus A^{(r+1)^{\cdot}}$

Procedeul poate fi realizat pana cand $\hat{A}^{(k+1)^{\cdot}} = \hat{A}^{k^{\cdot}}$.

Matricea $\hat{A}^{k^{\cdot}}$ ne arata, pentru fiecare $x \in X$, succesorii de ordin k ai lui x.

11 Grafuri cu arce valorizate. Drumul de lungime minima. Drumul de lungime maxima. Drumul de valoare minima. Drumul de valoare maxima

Fie arcul (x, y). Notam cu l(x, y) costul sau valoare arcului.

Fie $u = (x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ un drum. Notam cu l(u) valoarea drumului. l(u) = suma valorilor tuturor arcelor din drumul u.

Matematic, asta inseamna $l(u) = \sum\limits_{r=1}^{k-1} l(x_{i_r}, x_{i_{r+1}})$

Orice subdrum al unui drum optim, este un drum optim.

Algoritm pentru detectarea drumului de lungime minima dintre doua varfuri ale unui graf

1. Se noteaza cu 0 varful initial

2. Se noteaza cu 1 toate varfurile spre care are arc varful initial si care nu sunt deja notate.

3. Se aplica pasul 2 pentru varfurile notate in pasul anterior si varfurile noi se noteaza cu n+1, n fiind numarul cu care sunt notate nodurile de unde pleaca arcele. Se aplica pana cand este notat si varful final.

4. Dupa ce varful final a fost notat, se deseneaza varful respectiv. Daca varful final nu a putut fi notat, inseamna ca nu exista drum de la varful initial la varful final si se termina algoritmul.

5. Daca varful final a fost notat cu k, se deseneaza varfurile care au fost notate cu k-1

6. Se repeta pasul 5 pentru noile varfuri desenate pana este desenat primul varf.

7. Folosind noul graf desenat, se alege drumul de lungime minima.

Algoritmul Bellman-Ford pentru gasirea drumului de valoare minima

Nu am idee cum sa explic in scris momentan, asa ca ma puteti intreba personal si va pot explica.

Algoritmul Bellman-Ford pentru gasirea drumului de valoare maxima

Nu am idee cum sa explic in scris momentan, asa ca ma puteti intreba personal si va pot explica.

Algoritmul Bellman-Kalaba pentru gasirea drumului de valoare minima

Nu am idee cum sa explic in scris momentan, asa ca ma puteti intreba personal si va pot explica.

Algoritmul Bellman-Kalaba pentru gasirea drumului de valoare maxima

Nu am idee cum sa explic in scris momentan, asa ca ma puteti intreba personal si va pot explica.