UNITATEA DE ÎNVĂŢARE Nr. 3 –

INTEGRALE IMPROPRII. INTEGRALE CU PARAMETRII

Obiective urmărite:

1. Însuşirea noţiunilor fundamentale şi a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor din domeniul integralelor improprii şi al integralelor cu parametri;
2. Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
3. Formarea şi dezvoltarea deprinderilor şi aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată în soluţionarea problemelor de natură matematică şi de specialitate, precum şi formarea şi dezvoltarea unui raţionament riguros şi a abilităţilor de calcul rapid şi corect necesare pentru diferite aplicaţii.
4. Formarea şi dezvoltarea capacităţilor de abstractizare, generalizare şi sinteză;
5. Aplicarea cunostintelor dobandite la curs in alte domenii ale stiintei si practicii.

Rezumat:

În această unitate de învăţare sunt prezentate, pe parcursul a două lecţii, principalele noţiuni teoretice referitoare la integralele improprii de tipul I şi II şi la integralele cu parametri pe inteval compact, respectiv la integrale improprii cu parametri, precum şi algoritmii cei mai des întâlniţi pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestei unităţi de învăţare.

După parcurgerea celor două lecţii din cuprinsul unităţii de învăţare studenţii vor dobândi cunoştinţele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înţelege şi rezolva probleme specifice referitoare la :

- noţiunea de convergenţă a unei integrale improprii şi tipurile de integrale improprii;
- criterii de convergenţă pentru integrale improprii (din funcţii pozitive, din funcţii oarecare);
- legătura integralelor improprii cu serile numerice;
- integrale cu parametri pe interval compact şi integrale improprii cu parametri;
- noţiunile de convergenţă simplă şi uniformă pentru integrale improprii cu parametri;
- criterii de convergenţă simplă şi uniformă pentru integrale improprii cu parametri;
- propietăţiile de continuitate, derivabilitate, integrabilitate şi existenţă a primitivelor pentru o funcţie definită printr-o integrală cu parametru;
- integralele euleriene de prima şi a doua speţă: definiţii, proprietăţi, formule de calcul, relaţii de legătură, aplicaţii.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecţii sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule şi algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noţiunilor teoretice şi algoritmilor de rezolvare prezentaţi anterior;
- în finalul fiecărei lecţii este propus un test de autoevaluare şi la sfârşitul unităţii de

învăţare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate, ordonate după gradul lor de dificultate şi acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învăţare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unităţii de învăţare, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

- integrale improprii de speţa I şi II, integrale improprii convergente, divergente, absolut convergente, semiconvergente;
- integrale cu parametri pe interval compact, integrale improprii cu parametri, integrale euleriene de speţa I şi II.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor anunţate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare si a Temelor de control.

LECŢIA 1 - INTEGRALE IMPROPRII

1. Definiţii şi proprietăţi ale integralelor improprii

Este cunoscută noţiunea de integrală definită $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe $[a,b]$.

Există probleme care conduc la extinderea noţiunii de integrală definită.

Fie, astfel, $f:[0,+\infty)\to(0,1]$, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$. Aria porţiunii din plan cuprinsă între dreptele $x=0,\ x=u,\ y=0$ şi graficul funcţiei *f* este dată de relaţia $\int_0^u \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-u}$. Rezultă, în mod natural, aria cuprinsă între dreptele $x=0,\ y=0$ şi graficul funcţiei *f*, de forma: $\lim\limits_{u\to\infty}\int_0^u \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)=1$.

Dacă $f:[1,+\infty)\to(0,1]$, $f(x)=\frac{1}{x}$, atunci aria cuprinsă între dreptele $x=0,\ x=u,\ y=0$ şi graficul funcţiei f va fi $\int_1^u \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln u$. În acest caz, nu se mai poate da un sens natural noţiunii de arie a porţiunii plane cuprinsă între dreptele $x=0,\ y=0$ şi graficul lui *f*, deoarece $\lim\limits_{u\to\infty}\int_1^u \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\ln u=+\infty$.

Astfel de probleme conduc la studiul existenţei unor limite de forma $\lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lim\limits_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,\mathrm{d}x,\ \lim\limits_{u\to\infty}\int_{-u}^u f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definiţia 6.1.1. Fie $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,+\infty)$ şi fie $F(u)=\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$. Funcţia *f* este ***integrabilă*** pe $[a,+\infty)$, dacă există $\lim\limits_{u\to\infty}F(u)$ şi este finită. Notaţie. $\lim\limits_{u\to\infty}F(u)=\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Observaţia 6.1.2. Dacă funcţia f este integrabilă pe $[a,+\infty)$, spunem că ***integrala*** $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este ***convergentă***. În caz contrar, integrala este ***divergentă***.

Observaţia 6.1.3. În mod asemănător se definesc integralele

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

şi
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{u\to\infty}\int_{a}^{u} f(x)\mathrm{d}x .$$

Definiţia 6.1.4. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$ şi fie $F(u)=\int_{a}^{u} f(x)\mathrm{d}x$. Funcţia f este ***integrabilă*** pe $[a,b)$, dacă există $\lim_{u\nearrow b} F(u)$ şi este finită. Notaţie. $\lim_{u\nearrow b} F(u) = \int_{a}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$.

Observaţia 6.1.5. Dacă f este integrabilă pe $[a,b)$, spunem că ***integrala*** $\int_{a}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ este ***convergentă***. În caz contrar, ea este ***divergentă***.

Observaţia 6.1.6. În mod asemănător se definesc integralele $\int_{a+0}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\searrow a}\int_{u}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ şi $\int_{a+0}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$.

Observaţie. Integralele

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{a}^{b-0} f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{a+0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

se numesc ***integrale improprii***.

Exemplu:

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, & \text{pentru } x\in[0,1);\\ 0, & \text{pentru } x=1.\end{cases}$

$$\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\nearrow 1}\int_{0}^{u}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = \lim_{u\nearrow 1} 2\left(1-\sqrt{1-u}\right) = 2 .$$

Rezultă că funcţia f este integrabilă pe $[0,1)$, dar nu este integrabilă pe $[0,1]$, deoarece *f* este nemărginită în $x=1$.

Definiţia 6.1.7. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$ şi fie $F(u)=\int_{a}^{u} f(x)\mathrm{d}x$. Funcţia *f* este ***integrabilă*** pe $[a,b)$, dacă există $\lim_{u\nearrow b} F(u)$ şi este finită.

Notație. $\lim\limits_{u \nearrow b} F(u) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Teorema 6.1.8. Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Dacă $a < c < b$, atunci integralele $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi $\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ au aceeaşi natură.

Teorema 6.1.9. Fie $f, g:[a,b) \to \mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Dacă integralele $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ sunt convergente, atunci şi integrala $\int\limits_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\mathrm{d}x,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ este convergentă.

Criteriul lui Cauchy-Bolzano

Fie $F:[a,b) \to \mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit). $\lim\limits_{u \nearrow b} F(u)$ există şi este finită dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ b_0(\varepsilon) \in (a,b)$, astfel încât pentru orice $u',\ u''$ cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem $|F(u') - F(u'')| < \varepsilon$.

Criteriul lui Cauchy

Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Integrala $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ b_0(\varepsilon) \in (a,b)$, astfel încât pentru orice $u',\ u''$ cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem $\left|\int\limits_{u'}^{u''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Definiţia 6.1.10. Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Integrala $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte ***absolut convergentă***, dacă $\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ este convergentă.

Teorema 6.1.11. Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$. Dacă integrala $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Definiţia 6.1.12. O integrală improprie se numeşte ***semiconvergentă***, dacă ea este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Definiţia 6.1.13. **i)** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă. Integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte ***convergentă în sensul valorii principale Cauchy***, dacă şi numai dacă există $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a} f(x)\mathrm{d}x\in\mathbb{R}$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a} f(x)\mathrm{d}x$;

ii) Fie $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$, unde $a<c<b$ continuă. Integrala improprie $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte ***convergentă în sensul valorii principale Cauchy***, dacă şi numai dacă există $\lim_{u\searrow 0}\left[\int_a^{c-u} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+u}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right]\in\mathbb{R}$ şi avem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{u\searrow 0}\left[\int_a^{c-u} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+u}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right].$$

2. Integrale improprii din funcţii pozitive

Teorema 6.2.1 (Criteriul de comparaţie I). Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Dacă se verifică:

i) $0\le f(x)\le g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b)$ şi

ii) $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

Corolar 6.2.2. Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Dacă se verifică:

i) $0\le f(x)\le g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b)$ şi

ii) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă, atunci $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Teorema 6.2.3 (Criteriul de comparaţie II). Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (*b* finit sau infinit), integrabile pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Dacă se verifică:

i) $f(x)>0,\ g(x)>0,\ (\forall)\ x\in[a,b)$;

ii) $\lim\limits_{x\nearrow b}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A>0,\ A\neq\infty,$

atunci integralele $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ şi $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ au aceeaşi natură.

Observaţia 6.2.4. Un rol important în utilizarea criteriilor de comparaţie I şi II îl au integralele $I_1=\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^{\alpha}}$ şi $I_2=\int\limits_a^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}},\ a>0$.

Natura integralei I_1:

Pentru $\alpha\neq 1,\ I_1=\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^{\alpha}}=\lim\limits_{u\nearrow b}\int\limits_a^u\dfrac{\mathrm{d}x}{(b-x)^{\alpha}}=-\lim\limits_{u\nearrow b}\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^u=$

$$=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha<1;\\ +\infty, & \text{pentru } \alpha>1.\end{cases}$$

Pentru $\alpha=1,\ I_1=\int\limits_a^b\dfrac{\mathrm{d}x}{b-x}=\lim\limits_{u\nearrow b}\int\limits_a^u\dfrac{\mathrm{d}x}{b-x}=-\lim\limits_{u\nearrow b}\ln(b-x)\Big|_a^u=+\infty$.

Rezultă că I_1 este convergentă pentru $\alpha<1$ şi divergentă pentru $\alpha\geq 1$.

Natura integralei I_2: Pentru $\alpha\neq 1$,

$$I_2=\int\limits_a^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\lim_{u\to\infty}\int\limits_a^u\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{u\to\infty}x^{1-\alpha}\Big|_a^u=\begin{cases}\dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha>1;\\ \infty, & \text{pentru } \alpha<1.\end{cases}$$

Pentru $\alpha=1,\ I_2=\int\limits_a^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_a^u\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{u\to\infty}(\ln u-\ln a)=\infty$.

Rezultă că integrala I_2 este convergentă pentru $\alpha>1$ şi divergentă pentru $\alpha\leq 1$.

Teorema 6.2.5. Fie $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}_+,\ a>0$, integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,+\infty)$. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\cdot f(x)=A$, atunci:

i) dacă $\alpha>1$ şi $0\leq A<\infty$, integrala $\int\limits_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă;

ii) dacă $\alpha\leq 1$ şi $0<A\leq\infty$, integrala $\int\limits_a^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu:

Fie $I=\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$. Se consideră funcţia $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}}$ şi se calculează $\lim_{x\to\infty}x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}\cdot\ln x}{x^{3/2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}=0$ pentru un $\alpha=\frac{3}{2}-\varepsilon>1$, deci integrala este convergentă.

Teorema 6.2.6. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, integrabilă pe orice interval compact $[a,u]\subset[a,b)$. Dacă $\lim_{x\nearrow b}(b-x)^{\alpha}\cdot f(x)=A$, atunci:

i) dacă $\alpha<1$ şi $0\le A<\infty$, integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este convergentă;

ii) dacă $\alpha\ge 1$ şi $0<A\le\infty$, integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu:

Fie $I=\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$. Funcţia $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ este nemărginită în $x=1$.

$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru $\alpha=\frac{1}{2}<1$, deci integrala este convergentă.

3. Integrale improprii din funcţii oarecare

Criteriul lui Dirichlet

Fie $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Dacă:

i) funcţia *f* este continuă şi admite o primitivă *F* mărginită pe $[a,+\infty)$;

ii) funcţia *g* are derivata continuă pe $[a,+\infty)$;

iii) funcţia *g* este monoton descrescătoare pe $[a,+\infty)$;

iv) $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$,

atunci $\int_a^{\infty}f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$ este convergentă.

Exemple:

1) Integrala $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$, $\alpha>0$ este convergentă, deoarece verifică cerinţele Criteriului lui Dirichlet, pentru $f(x)=\sin x$ şi $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$.

2) Integralele lui Fresnel $\int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x, \int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x$ sunt convergente.

Demonstraţie. $\int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x + \int_1^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x$.

Integrala $\int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x$ este pe un interval compact. Pentru studiul convergenţei integralei improprii $\int_1^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x$, se face schimbarea de variabilă $x^2 = t$ şi avem $\int_1^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \sin x^2 \mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty} \int_1^{u^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$, iar integrala $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ verifică cerinţele Criteriului lui Dirichlet, deci este convergentă.

Similar se demonstrează convergenţa integralei $\int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x$.

4. Integrale improprii şi serii numerice

Fie $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice interval compact $[a,u] \subset [a,b)$ şi fie $a = b_0 < b_1 < ... < b_n < ... < b$ un şir cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Se defineşte seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x) \mathrm{d}x$.

Teorema 6.4.1. Dacă integrala $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$ este convergentă, atunci şi seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x) \mathrm{d}x$ este convergentă şi are loc egalitatea: $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x) \mathrm{d}x$.

Observaţii:

1) Pentru $f:[a,b) \to \mathbb{R}_+$, atunci este adevărată şi reciproca teoremei 6.4.1.

2) Dacă $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ nu păstrează semn constant pe $[a,b)$, atunci reciproca teoremei 6.4.1 nu se verifică întotdeauna.

Exemplu:

Seria $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x \mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty} \cos x \Big|_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} = 0$, deci este convergentă.

În acelaşi timp, integrala $\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin x \,\mathrm{d}x = \lim_{u\to\infty}\left(1-\cos u\right)$, care nu există.

Criteriul integral al lui Cauchy

Fie funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$, descrescătoare. Seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă, dacă şi numai dacă $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Exemplu

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$.

5. Probleme rezolvate

1 Să se studieze convergenţa şi, în caz afirmativ, să se calculeze următoarele integrale improprii:

a) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x,\ \lambda>0$; **b)** $\int_0^\infty x\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$; **c)** $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

d) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **e)** $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **f)** $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$; **h)** $\int_1^\infty x\cdot\cos x^2\mathrm{d}x$; **i)** $\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

j) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0$; **k)** $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\cdot\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;

l) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x,\ a>0$; **m)** $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$;

n) $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; **o)** $\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln^2 x}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $I=\lim_{u\to\infty}\int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}-\frac{1}{\lambda}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^u=\frac{1}{\lambda}$, deci integrala este convergentă;

b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{\pi}{2}$; d) $\dfrac{\pi^2}{8}$; e) $I=\lim\limits_{u\to\infty}\int\limits_0^u \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^u=\infty$, deci integrala este divergentă; f) divergentă; g) divergentă; h) divergentă;

$$\text{i) } I=\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=-\lim_{u\to\infty}\int_1^u\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^u=1-\cos 1;$$

$$\text{j) } I=\lim_{u\to\infty}\int_1^u\frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\int_1^u x^{-1-\alpha}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\int_1^u\frac{\left(x^{-\alpha}\right)'}{(-\alpha)}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\Big|_1^u-\int_1^u\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]=\lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{u^\alpha}-1\right)-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{u^\alpha}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2};$$

k) $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$;

$$\text{l) } I=\lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-ax}\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-ax}\cdot(-\cos x)'\,\mathrm{d}x=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(-e^{-ax}\cdot\cos x\Big|_0^u+\int_0^u\left(e^{-ax}\right)'\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(-e^{-ax}\cdot\cos x\Big|_0^u-a\cdot\int_0^u e^{-ax}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\lim_{u\to\infty}\left(1-e^{-au}\cdot\cos u-a\cdot e^{-au}\cdot\sin u-a^2\cdot I\right);$$

rezultă astfel că $I=\dfrac{1}{1+a^2}$;

$$\text{m) } I=\lim_{u\to\infty}\int_{-u}^u\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\int_{-u}^u\frac{\left(x^2\right)'\mathrm{d}x}{1+x^4}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}x^2\Big|_{-u}^u=0;$$

n) $I=\lim\limits_{u\searrow-1}\int\limits_u^0\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{u\searrow-1}\arcsin x\Big|_u^0=\lim\limits_{u\searrow-1}\left(-\arcsin u\right)=\dfrac{\pi}{2}$; o) $I=\dfrac{1}{\ln 2}$.

$\boxed{2}$ Să se studieze convergenţa integralelor:

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; **b)** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; **c)** $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$; **d)** $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$;

e) $\int_a^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, $a<b$; **f)** $\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **g)** $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$;

h) $\int_0^{\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx$; **i)** $\int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx$, $a \geq 0$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se consideră $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$; se calculează $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^4}=1$ pentru $\alpha=4>1$, deci conform teoremei 6.2.5 integrala este convergentă;

b) convergentă;

c) se consideră funcţia $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}}$ şi se calculează $\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)\cdot(1+x^2)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ pentru $\alpha=\frac{1}{3}<1$, deci integrala este convergentă, conform teoremei 6.2.6;

d) se consideră funcţia $f:(0,100]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}}$ şi se calculează $\lim_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=1$ pentru $\alpha=\frac{1}{5}<1$, deci integrala este convergentă;

e) convergentă;

f) convergentă;

g) se consideră funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(\sin x)$ şi se calculează

$$\lim_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=\lim_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot\ln(\sin x)=\lim_{x\searrow 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\alpha}\cdot(\sin x)^{\alpha}\cdot\ln(\sin x)=$$

$$=\lim_{x\searrow 0}(\sin x)^{\alpha}\cdot\ln(\sin x)=\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln(\sin x)}{(\sin x)^{-\alpha}}=0,$$

pentru $\alpha<1$, deci integrala este convergentă;

h) $\int\limits_0^{\infty} x^{a-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{1} x^{a-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\infty} x^{a-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=I_1+I_2$;

pentru integrala I_1, aceasta este improprie pentru $a<1$, se consideră funcţia $f:(0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^{a-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}$ şi se calculează $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot f(x)=$ $=\lim\limits_{x\searrow 0} x^{a+\alpha-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}<+\infty$, pentru $a+\alpha-1\ge 0$; deci $1>\alpha\ge 1-a$, de unde obţinem că integrala I_1 este convergentă pentru $a>0$; pentru integrala I_2 se consideră funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{a-1}\cdot\mathrm{e}^{-x}$ şi se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=0$ pentru $a+\alpha-1>0$, deci pentru $\alpha>1$ şi obţinem astfel convergenţa integralei $I=I_1+I_2$;

i) se consideră funcţia $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^{a-1}}{1+x}$, $a\ge 0$ şi se calculează $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\dfrac{x^{a-1}}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha+a-1}}{1+x}<+\infty$ pentru $\alpha+a-1\le 1$, deci pentru $1<\alpha\le 2-a$. Obţinem astfel convergenţa integralei pentru $a<1$ şi divergenţa ei pentru $a\ge 1$.

$\boxed{3}$ Să se calculeze integrala $\int\limits_0^{\infty}\min\left\{x^2,\dfrac{1}{x^2}\right\}\mathrm{d}x$.

Indicaţie de rezolvare:

Fie funcţia $f(x)=\min\left\{x^2,\dfrac{1}{x^2}\right\},\ x\in\mathbb{R}_+^*$. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{pentru } x\in(0,1];\\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{pentru } x\in(1,+\infty).\end{cases}$

Rezultă $\int\limits_0^{\infty}\min\left\{x^2,\dfrac{1}{x^2}\right\}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{1}x^2\mathrm{d}x+\int\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$.

$\boxed{4}$ Să se calculeze integrala $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{2\cdot[x]+3\cdot[x]^2+[x]^3}$.

Indicaţie de rezolvare:

Fie funcţia $f(x)=\dfrac{1}{2[x]+3[x]^2+[x]^3}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}_+^*$.

Pentru $n\le x<n+1$, avem $[x]=n$, iar

$$\int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{2n+3n^2+n^3}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{5}$ Să se calculeze integrala $I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}$.

Indicaţie de rezolvare:

$I = I_1 + I_2$, unde $I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$ şi $I_2 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Se demonstrează convergenţa ambelor integrale, de unde rezultă şi convergenţa integralei *I*.

Pentru integrala I_1 se face schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, deci $\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$ şi obţinem $I_1 = I_2$, deci $I = 2\cdot I_2$.

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^\infty (x+1)^{-1}\cdot\left(x^2-1\right)^{-1/2}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^\infty (x+1)^{-3/2}\cdot(x-1)^{-1/2}\mathrm{d}x = \int_2^\infty (x+1)^{-3/2}\cdot\left[(x+1)-2\right]^{-1/2}\mathrm{d}(x+1).$$

Se consideră $m=-3/2,\ n=1,\ p=-1/2\notin\mathbb{Z}$.

$\frac{m+1}{n} = -1/2\notin\mathbb{Z}$, dar $p+\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ şi se face substituţia $\frac{(x+1)-2}{x+1} = t^2$.

Rezultă $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ şi, în urma efectuării calculelor, obţinem $I_2 = 1$, deci $I = 2$.

$\boxed{6}$ Să se calculeze:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x$; **b)** $\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Indicaţie de rezolvare:

a) Funcţia $\sin(\cdot)$ este o funcţie impară, deci $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,\mathrm{d}x = 0$;

b) 0.

6. Test de autoevaluare

$\boxed{1}$ Să se arate că:

i) $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\infty} \frac{du}{\left(1+u^2\right)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$

ii) $I_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\infty} \frac{du}{\left(1+u^2\right)^{n+3/2}} =$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)};$$

iii) $\lim_{n\to\infty} I_{2n} = \lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = 0;$

iv) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ (formula lui Wallis).

Indicaţie de rezolvare:

i) $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx;$

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \cdot \sin x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \cdot (\cos x)'\,dx = \text{...etc.}$$

În final se obţine $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_{2n-2} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot I_0$ şi cum $I_0 = \frac{\pi}{2}$, rezultă că $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2};$

ii) se demonstrează similar cu punctul i);

iii) deoarece $0 < I_{2n+1} < I_{2n} < \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n} = \lim_{n\to\infty} I_{2n+1} = 0$$

iv) din inegalităţile $\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ rezultă

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\le\frac{\pi}{2},$$

iar prin trecere la limită obţinem formula lui Wallis.

$\boxed{2}$ Să se determine aria regiunii plane care se află în primul cadran, este mărginită de axa ox şi:

a) axa oy şi curba de ecuaţie $y\left(x^2+4\right)=8$;

b) dreapta $x=3$ şi curba de ecuaţie $yx^2=1+4y$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $A=\int\limits_0^{\infty}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=.........=2\pi$;

b) $A=\frac{1}{4}\cdot\ln 5$.

$\boxed{3}$ Să se calculeze $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}$, $\alpha\ne k\pi$ şi apoi să se deducă valorile integralelor:

i) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+1}$; **ii)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$; **iii)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$.

Indicaţie de rezolvare: Se descompune fracţia de sub integrală în fracţii simple:

$$\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}=\frac{Ax+B}{x^2-2x\cos\alpha+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x\cos\alpha+1}.$$ Se obţine:

$$\int\frac{x^2}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\cos\alpha}\cdot\left[\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}-\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2x\cos\alpha+1}\right].$$

Dar $x^2-2x\cos\alpha+1=(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$ şi cu schimbarea de variabilă $x=\cos\alpha+t\sin\alpha$ şi similar pentru $x^2+2x\cos\alpha+1=(x+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha$, obţinem:

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos\alpha+1\right).$$

$$\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+2x\cos\alpha+1}=-\operatorname{ctg}\alpha\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\cos\alpha+1\right).$$

Deci, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-2x^2\cos 2\alpha+1}=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

Valorile celor trei integrale se obţin dând valori convenabile parametrului α.

LECŢIA 8 - INTEGRALE CU PARAMETRI

1. Integrale cu parametri pe intervale compacte

Fie funcţia $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ integrabilă în raport cu *x* pe $[a,b]$ pentru orice parametru $t\in[c,d]$.

Integrala $J(t)=\int\limits_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este funcţie de parametrul $t\in[c,d]$ şi se numeşte ***integrală cu parametru***.

Teorema 7.1.1. Dacă funcţia $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă pe domeniul de definiţie, atunci integrala $J(t)=\int\limits_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este o funcţie continuă pe $[c,d]$.

Teorema 7.1.2. Dacă funcţia $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este continuă pe domeniul de definiţie şi funcţiile $u,v:[c,d]\to[a,b]$ sunt continue pe domeniul lor de definiţie, atunci integrala $J(t)=\int\limits_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\mathrm{d}x$ este o funcţie continuă pe $[c,d]$.

Teorema 7.1.3. Dacă funcţiile $f,\ \frac{\partial f}{\partial t}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt continue pe domeniul de definiţie, atunci integrala $J(t)=\int\limits_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este o funcţie derivabilă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$ şi se verifică: $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x$.

Teorema 7.1.4. Dacă funcţiile $f,\ \frac{\partial f}{\partial t}:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt continue pe domeniul de definiţie şi funcţiile $u,v:[c,d]\to[a,b]$ sunt derivabile pe $[c,d]$, atunci integrala $J(t)=\int\limits_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\mathrm{d}x$ este o funcţie derivabilă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$ şi se verifică: $J'(t)=\int\limits_{u(t)}^{v(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x+v'(t)\cdot f(v(t),t)-u'(t)\cdot f(u(t),t)$.

Teorema 7.1.5. *Fie funcţia* $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *continuă pe domeniul de definiţie. Atunci* $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$.

2. Integrale improprii cu parametri

Fie funcţia $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit), astfel încât integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $(\forall)\ t\in[c,d]$.

Definiţia 7.2.1. Integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$, ***converge uniform*** în raport cu $t\in[c,d]$, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ b_0(\varepsilon)\in(a,b)$, astfel încât pentru $(\forall)\ u\in(b_0(\varepsilon),b)$, să avem $\left|\int_a^u f(x,t)\mathrm{d}x-J(t)\right|<\varepsilon$, $(\forall)\ t\in[c,d]$.

Criteriul lui Cauchy de convergenţă uniformă.

Integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ ***converge uniform*** în raport cu $t\in[c,d]$, dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\ b_0(\varepsilon)\in(a,b)$, astfel încât pentru $(\forall)\ x',x''\in(b_0(\varepsilon),b)$, să avem $\left|\int_{x'}^{x''} f(x,t)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$, $(\forall)\ t\in[c,d]$.

Observaţie. Fie $a=b_0<b_1<...<b_k<...<b$ un şir crescător cu $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=b$. Cu ajutorul şirului considerat putem construi seria de funcţii:

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x,t)\mathrm{d}x+\int_{b_1}^{b_2} f(x,t)\mathrm{d}x+...+=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t),\ \text{unde}\ u_k(t)=\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x,t)\mathrm{d}x.$$

Teorema 7.2.2. Dacă integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$, unde $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$, atunci seria de funcţii $\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)$, unde

$u_k(t) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[c,d]$ şi are loc egalitatea $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x,t)\,\mathrm{d}x$.

Teorema 7.2.3. Fie funcţia $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$, atunci funcţia $J(t)$ este continuă pe intervalul $[c,d]$.

Teorema 7.2.4. Fie funcţia $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ continuă. Dacă:

i) $\frac{\partial f}{\partial t}$ există şi este continuă pe $[a,b)\times[c,d]$;

ii) integrala $J(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;

iii) integrala $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$,

atunci funcţia J este derivabilă pe $[c,d]$ şi are loc egalitatea: $J'(t)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$, iar $J':[c,d]\to\mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe domeniul său de definiţie.

Teorema 7.2.5. Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) f este continuă;

ii) integrala $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$. Atunci:

a) integrala $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$ este convergentă;

b) $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$.

Teorema 7.2.6. Fie funcţia $f:[a,b)\times[c,d)\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) f este continuă;

ii) integrala $\int\limits_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,v]$, $(\forall)\ v\in[c,d)$;

iii) integrala $\int\limits_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $x\in[a,u]$, $(\forall)\ u\in[u,b)$;

iv) integrala $\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$ sau $\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d |f(x,t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$ este convergentă.

Atunci $\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d |f(x,t)|\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t$.

Teorema 7.2.7 (***Criteriul lui Weierstrass***). Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$. Dacă:

i) $\int\limits_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x$ există pentru $(\forall)\ u\in[a,b)$ şi $(\forall)\ t\in[c,d]$;

ii) există o funcţie $g:[a,b)\to\mathbb{R}_+$, astfel încât $|f(x,t)|\le g(x)$, $(\forall)\ x\in[a,b)$, $(\forall)\ t\in[c,d]$;

iii) integrala $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă,

atunci integrala $\int\limits_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu $t\in[c,d]$.

Teorema 7.2.8 (Criteriul lui Abel). Fie funcţiile $f,g:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) f este continuă;

ii) $g(\cdot,t):[a,b)\to\mathbb{R}$ este monotonă pentru orice $t\in[c,d]$;

iii) există $M>0$, astfel încât

$$\left|\int\limits_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}x\right|\le M,\ (\forall)\ u\in[a,b),\ (\forall)\ t\in[c,d];$$

iv) există $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x,t)=0$ şi este uniformă în raport cu $t\in[c,d]$.

Atunci integrala $\int\limits_a^b f(x,t)\cdot g(x,t)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$.

Teorema 7.2.9 (Criteriul lui Leibniz)

Fie funcţiile $f,\ g:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) f este continuă;

ii) $g(\cdot,t):[a,b)\to\mathbb{R}$ este monotonă pentru orice $t\in[c,d]$;

iii) integrala $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$;

iv) există $M>0$, astfel încât $|g(x,t)|\le M,\ (\forall)\ x\in[a,b),\ (\forall)\ t\in[c,d]$.

Atunci integrala $\int_a^b f(x,t)\cdot g(x,t)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $t\in[c,d]$.

Observaţie. Criteriile lui Abel şi Leibniz se pot extinde prin înlocuirea intervalului $[c,d]$ cu o mulţime arbitrară $A\subset\mathbb{R}$.7.3 Integrale Euleriene

3. Integrala lui Euler de speţa a doua

Aceasta este definită pentru $p>0$, prin $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pentru a studia convergenţa integralei $\Gamma(p)$, se consideră descompunerea de forma $\Gamma(p)=\int_0^1 x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^\infty x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pentru $\int_0^1 x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, se consideră $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\alpha}\cdot x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\alpha+p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}<+\infty$, pentru $1>\alpha\ge 1-p$, deci pentru $p>0$. Rezultă convergenţa integralei $\int_0^1 x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Pentru integrala $\int_1^\infty x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, se va ţine seama de inegalitatea $\mathrm{e}^{x}>\dfrac{x^n}{n!}$, sau $\mathrm{e}^{-x}<\dfrac{n!}{x^n}$, de unde rezultă că $x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}<\dfrac{n!}{x^{n+1-p}}$.

Pentru $n>p$, folosind primul criteriu de comparaţie avem:

$$\int_1^\infty x^{p-1}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x<\int_1^\infty \frac{n!}{x^{n+1-p}}\mathrm{d}x \text{ şi cum } \int_1^\infty \frac{n!}{x^{n+1-p}}\mathrm{d}x=n!\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x^{n+1-p}}\mathrm{d}x$$

este convergentă pentru $n > p$, rezultă şi convergenţa integralei $\int\limits_1^{\infty} x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Am obţinut astfel convergenţa integralei $\Gamma(p)$.

Integrând prin părţi,

$$\int\limits_0^{\infty} x^{p-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \cdot \int\limits_0^{\infty} \left(x^p\right)' \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot x^p \cdot \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \cdot \int\limits_0^{\infty} x^p \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} \cdot \Gamma(p+1),$$

obţinem proprietatea $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$.

Aceasta conduce la

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdot \ldots \cdot (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p).$$

Pentru $p = 1$, avem $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$, de unde rezultă că $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Integrala lui Euler de prima speţă

Aceasta este definită prin $B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,\ p,\ q > 0$.

Pentru $p \geq 1,\ q \geq 1$, funcţia $f(x) = x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}$ este continuă pe compactul $[0,1]$, deci integrala are sens.

Pentru $p < 1$ sau $q < 1$, se studiază convergenţa integralei $B(p,q)$.

Dacă $p < 1$, integrala $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $1-p < 1$, deci pentru $p > 0$.

Dacă $q < 1$, integrala $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\mathrm{d}x$ este convergentă pentru $1-q < 1$, deci pentru $q > 0$. Am obţinut astfel convergenţa integralei $B(p,q)$.

Proprietăţi şi relaţii de legătură:

1) $B(p,q) = B(q,p),\ (\forall)\ p,\ q > 0$.

2) Între cele două integrale ale lui Euler se verifică relaţia $B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ (\forall)\ p,\ q > 0$.

3) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$, $(\forall)\ p\in(0,1)$.

Exemple:

1) Fie integrala $I=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^p}\,\mathrm{d}x,\ p>0$. Făcând schimbarea de variabilă $x^p=y$, rezultă $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{p}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y$, de unde rezultă: $I=\dfrac{1}{p}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{p}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)$.

2) Pentru $p=\dfrac{1}{2}$ avem $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Făcând schimbarea de variabilă $x=t^2$, obţinem $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Rezultă $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

În acelaşi timp, $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2$.

Astfel, $\left(\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2=\int_0^1 x^{-1/2}\cdot(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$. Pentru calculul integralei $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$ se face schimbarea de variabilă $x=\sin^2 t$, deci $\mathrm{d}x=2\sin t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$.

Rezultă că $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^{\pi/2}\dfrac{2\sin t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}}=\pi$ şi deci $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Am obţinut $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ numită **integrala Euler-Poisson**.

5. Probleme rezolvate

$\boxed{1}$ Să se calculeze integralele:

a) $J(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x,\ \alpha>1;$

b) $J(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x\right)\mathrm{d}x.$

Indicaţie de rezolvare:

a) fie funcţia

$$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x,\alpha)=\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\text{ continuă}$$

şi există $\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\sin^2 x}$ continuă pentru $\alpha>1$; rezultă că există $J'(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\mathrm{d}x=2\alpha\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2-\sin^2 x}$ şi se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arctg}t,\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$; obţinem

$$J'(\alpha)=2\alpha\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2+t^2\left(\alpha^2-1\right)}=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-1}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

şi rezultă că $J(\alpha)=\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)+C$, unde C este constanta de integrare;

$$C=J(\alpha)-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\alpha^2\cdot\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=$$

$$=2\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\ln\alpha\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=$$

$$=\pi\cdot\ln\alpha-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right),$$

deoarece $\int\limits_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}x=0$, rezultă din $\ln\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)\le\ln\left(1-\frac{\sin^2 x}{\alpha^2}\right)\le\ln 1;$

obţinem $C=\pi\cdot\ln\alpha-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)$ şi deci

$$J(\alpha)=\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)+\pi\cdot\ln\alpha-\pi\cdot\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)=\pi\cdot\ln\alpha;$$

b) fie funcţia $f(x,\alpha,\beta)=\ln\left(\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x\right)$ continuă pe domeniul său de definiţie.

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta)=\frac{2\alpha\cdot\sin^2 x}{\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial\beta}(x,\alpha,\beta)=\frac{2\beta\cdot\cos^2 x}{\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x}$$

sunt continue. Rezultă că există

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha,\beta)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha\cdot\sin^2 x}{\alpha^2\cdot\sin^2 x+\beta^2\cdot\cos^2 x}\mathrm{d}x,$$

pentru calculul căreia se face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} x=t$. Obţinem astfel $\frac{\partial J}{\partial\alpha}=\frac{\pi}{\alpha+\beta}$.

Similar obţinem că $\frac{\partial J}{\partial\beta}=\frac{\pi}{\alpha+\beta}$.

Astfel avem $J(\alpha,\beta)=\pi\cdot\ln(\alpha+\beta)+\varphi(\beta)$. Derivând ultima relaţie obţinută în raport cu variabila β, rezultă $\frac{\partial J}{\partial\beta}=\frac{\pi}{\alpha+\beta}+\varphi'(\beta)=\frac{\pi}{\alpha+\beta}$, deci $\varphi'(\beta)=0$, iar $\varphi(\beta)=C$. Pentru determinarea constantei C se consideră $J(1,1)=\pi\cdot\ln 2+C=0$, de unde $C=-\pi\cdot\ln 2$.

Rezultă astfel $J(\alpha,\beta)=\pi\cdot\ln(\alpha+\beta)-\pi\cdot\ln 2$.

$\boxed{2}$ Din calculul integralei

$$F(a,b)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x},\ a\neq 0,\ b\neq 0,$$

să se deducă valoarea integralei $G(a,b)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2}$.

Indicaţie de rezolvare:

Fie funcţia $f(x,a,b)=\frac{1}{a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x}$, care este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{-2a\cdot\cos^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial b}=\frac{-2b\cdot\sin^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2} \text{ continue.}$$

Rezultă existenţa pentru integralele $\dfrac{\partial F}{\partial a}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{-2a\cdot\cos^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial b}=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{-2b\cdot\sin^2 x}{\left(a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$.

Se observă că $\dfrac{1}{2a}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial a}(a,b)+\dfrac{1}{2b}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial b}(a,b)=-G(a,b)$, deci

$$G(a,b)=-\frac{1}{2a}\cdot\frac{\partial F}{\partial a}(a,b)-\frac{1}{2b}\cdot\frac{\partial F}{\partial b}(a,b).$$

Se calculează $F(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\cdot\cos^2 x+b^2\cdot\sin^2 x}$, făcând schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x=t$ şi obţinem $F(a,b)=\dfrac{\pi}{2ab}$.

Rezultă $G(a,b)=\dfrac{\pi}{4ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

3 Să se studieze convergenţa uniformă a următoarelor integrale improprii cu parametri:

a) $F(t)=\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin(tx)\mathrm{d}x,\ t\in\mathbb{R}$;

b) $F(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx)\mathrm{d}x}{1+x^2},\ t\in\mathbb{R}$;

c) $F(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;

Indicaţie de rezolvare:

a) $\left|f(x,t)\right|=\left|\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin(tx)\right|\le\mathrm{e}^{-x},\ (\forall)\ x\in[0,+\infty),\ (\forall)\ t\in\mathbb{R}$;

se consideră funcţia $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}_+,\ g(x)=\mathrm{e}^{-x}$; din convergenţa integralei improprii $\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ şi din $\left|f(x,t)\right|\le g(x),\ (\forall)\ x,t$, rezultă convergenţa uniformă a integralei $\displaystyle\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\cdot\sin(tx)\mathrm{d}x$;

b) uniform convergentă;

c) fie integrala $I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x,\ \alpha,\ \beta>0$ şi fie funcţia $f(x,\alpha,\beta)=\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{x}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, iar integrala $\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x,\ \alpha,\ \beta>0$ este convergentă; $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)$ este continuă şi integrala $\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$ este uniform convergentă în raport cu parametrul $\alpha>0$, deoarece $\left|\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)\right|\le\mathrm{e}^{-\beta x}$, iar integrala $\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}\,x$ este convergentă pentru orice $\beta>0$.

Astfel, există $\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\cdot\cos(\alpha x)\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. Integrând în raport cu α, obţinem $I(\alpha,\beta)=\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}+C$, unde $C=0$, deci $I(\alpha,\beta)=\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$.

În acelaşi timp, integrala $I(\alpha,\beta)$ este uniform convergentă în raport cu $\beta>0$ şi $\lim\limits_{\beta\to 0}I(\alpha,\beta)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x=F(\alpha)$, deci $F(\alpha)=\lim\limits_{\beta\to 0}\mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\pi}{2}$;

$\boxed{4}$ Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int\limits_0^{\infty}x^{2n}\cdot\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0$; **b)** $\int\limits_0^{\infty}x^m\cdot\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x,\ m,\ n\in\mathbb{N}$;

c) $\int\limits_0^{1}x^{p-1}\cdot\ln^n x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$; **d)** $\int\limits_0^{1}\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^{1}x\sqrt{x^3(1-x)}\mathrm{d}x$; **f)** $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_0^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,\ a>0$; **h)** $\int\limits_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^m}},\ n\in\mathbb{N},\ m>0$;

i) $\int\limits_0^{1}\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\mathrm{d}x,\ a,\ b>0,\ p>-1$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se face substituţia $ax^2 = t$, de unde rezultă că $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, iar integrala devine $I = \dfrac{1}{2a^{n+1/2}}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot t^{n-1/2}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2a^{n+1/2}}\cdot\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$;

b) se face substituţia $x^n = t$, deci $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$; integrala devine $I = \dfrac{1}{n}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot t^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n}\cdot\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$;

c) se face substituţia $x = \mathrm{e}^{-t}$, deci $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ şi obţinem $I = (-1)^n\cdot\dfrac{n!}{p^{n+1}}$;

d) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{1/2}\cdot(1-x)^{1/2}\mathrm{d}x = B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+1\right)}{2!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2} = \frac{1}{8}\cdot\pi;$$

e) $\dfrac{5\pi}{27}$;

f) se face substituţia $x^4 = \dfrac{t}{1-t}$ şi obţinem

$$I = \frac{1}{4}\cdot B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4};$$

g) $\dfrac{\pi a^4}{16}$;

h) se face substituţia $x^m = t$ şi obţinem

$$I = \frac{1}{m}\cdot\int_0^1 t^{\frac{1}{m}-1}\cdot(1-t)^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{m}\cdot B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right);$$

i) se face substituţia $t = \dfrac{x(1+p)}{x+p}$ şi se găseşte $I = \dfrac{B(a,b)}{p^b(p+1)^a}$.

6. Test de autoevaluare

$\boxed{1}$ Să se calculeze următoarele integrale cu parametri:

a) $I(a,b)=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x,\ a,\ b\geq 0$;

b) $I(\alpha)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;

c) $I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)\cdot\operatorname{arctg}(\beta x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \alpha,\ \beta>0$.

$\boxed{2}$ Să se deducă egalităţile:

a) $\int_0^\infty \frac{2t\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+t^2\right)^2}=-\frac{\pi}{2t^2},\ t>0$;

b) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{t}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\ln t,\ t>0$;

c) $\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{x}\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+t^2\right)$.

$\boxed{3}$ Să se calculeze următoarele integrale Euler:

a) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\ a,\ b>0$;

b) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}\,(1+x)}$;

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x,\ m,\ n>0$.

7. TEMĂ DE CONTROL

$\boxed{1}$ Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$ şi

$$g:(-1,1)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţia f şi să se precizeze mulţimea pe care are loc dezvoltarea.

b) Să se studieze natura integralei $I=\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ şi apoi să se calculeze valoarea sa.

c) Utilizând rezultatele obţinute, să se deducă sumele seriilor numerice $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$\boxed{2}$ Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\mathrm{d}t$. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei obţinute şi să se arate că $g(1)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k)}\right)$.

$\boxed{3}$ **a)** Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{pentru } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{pentru } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale şi diferenţiabilitatea funcţiei f în $(0,0)$.

b) Să se calculeze $I_n=\int_0^{\pi/2}\left[f\left(\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2}\right)\right]^n\mathrm{d}t$, pentru $n=2k$, $n=2k+1$.

c) Să se arate că şirul de funcţii $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $g_n(x)=\frac{1}{2n}\cdot f\left(x^2,n\right)$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ către o funcţie continuă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi să se calculeze $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$.

$\boxed{4}$ Se consideră funcţia $F:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ continuă în raport cu ansamblul variabilelor, cu proprietatea că există $\alpha,\ \beta,\ k\in\mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha\cdot F(u,v)+\beta\cdot F(v,u)=k,\ (\forall)\ u,\ v\in[-1,1]$.

a) Să se calculeze $I=\int_0^{\pi/2} F(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$.

b) Să se determine $\alpha,\ \beta,\ k\in\mathbb{R}^*$ pentru cazul particular $F(u,v)=\dfrac{u^2+2uv+2}{5+4uv}$, unde $u,v:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $u(x)=\sin x,\ v(x)=\cos x$.

Utilizând rezultatele obţinute anterior, să se calculeze valoarea integralei $J=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin^2 x+\sin 2x+2}{5+2\sin 2x}\mathrm{d}x$.

$\boxed{5}$ **(i)** Să se calculeze $\int_0^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

(ii) Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât integrala $\int_0^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-x+\lambda}$ să fie convergentă;

(iii) Fie $I_{k,n}=\int_0^1 x^k\cdot\ln^n x\,\mathrm{d}x$, unde $k,\ n\in\mathbb{N}$, $\left(I_{0,0}=1\right)$.

a) Să se arate că $I_{k,n}=-\dfrac{n}{k+1}\cdot I_{k,n-1},\ n\geq 1$.

b) Să se arate, folosind integrarea termen cu termen a seriilor de funcţii că $\int_0^1 x^x\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{k^k}$.

$\boxed{6}$ **a)** Să se găsească mulţimea din $\mathbb{R}$ pe care converge seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$ şi să se cerceteze convergenţa uniformă pe $[0,1]$.

b) Să se calculeze $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^n}{n}$ pentru x în mulţimea de convergenţă.

c) Folosind $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$, să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)^2}$.

d) Să se demonstreze convergenţa şi să se calculeze integrala $I=\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\ln(1+x)$ în jurul lui zero.

$\boxed{7}$ Fie integralele $y(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$ şi $z(t)=\int_0^\infty \frac{\cos tx}{(1+x^2)}\mathrm{d}x$, unde $t\in[0,+\infty)$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul *t*.

$\boxed{8}$ **S**ă se calculeze integrala $I(\alpha)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$.

$\boxed{9}$ Din calculul integralei $F(t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cdot\cos(tx)\,\mathrm{d}x$, să se obţină valoarea integralei $I=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\cdot\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{10}$ Ştiind că $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{e}^{-|a|}$, să se calculeze

$$F(a)=\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin(ax)}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x.$$

$\boxed{11}$ Să se găsească o relaţie între integralele $I_1=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^n}}$ şi $I_2=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}$, stabilind mai întâi condiţia pe care trebuie să o îndeplinească $n\in\mathbb{R}$, astfel ca I_1 şi I_2 să fie convergente.

$\boxed{12}$ Să se calculeze $I=\int_0^1 \ln(\Gamma(x))\,\mathrm{d}x$, unde $\Gamma(x)$ este funcţia lui Euler.

8. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE INVĂŢARE Nr. 3

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. **Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină,** *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Vol III**,** Editura Tehnică, Bucureşti, 1967
3. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
4. **M. Craiu, M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
5. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978, 1979, Editura ALL, 1993, 1994
6. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecţii de analiză matematică,* Editura ALL, 1993
7. **.......................................***Analiză matematică*, vol. II, Ediţia a III-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
8. **C. Udrea,** *Integrala Riemann pentru funcţii de variabilă vectorială,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
9. **M. Roşculeţ**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
10. **M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
11. **I. Sprinţu**, *Elemente de analiză matematică,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
12. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
13. **I. Sprinţu**, **V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferenţial şi integral,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2003
14. **D. M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bătineţu, V. Gârban**, *Analiză matematică, Exerciţii şi probleme*, Editura Militară, Bucureşti, 1992