07.01.2022

An 2 ID

Aplicații la sisteme de ecuații diferențiale liniare, omogene, de ordinul 1, cu coeficienți constanți

Forma generală:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{cases} \rightarrow \frac{dY}{dx} = A \cdot Y \quad ; A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

Pentru un astfel de sistem se poate determina întotdeauna un sistem fundamental de soluții, deci soluția sa generală.

Se caută soluții de forma: $Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx}$

$(A_i)_{i=1,n}$, și r sunt constante care se vor determina.

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot r \\ A_2 \cdot r \\ \vdots \\ A_n \cdot r \end{pmatrix} \cdot e^{rx}$$ Înlocuind în sistem, se va obține:

$$\begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \\ \vdots \\ A_n r \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} e^{rx} \quad \Big| : e^{rx}$$

$$\begin{cases} A_1 r = a_{11} \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + \dots + a_{1n} \cdot A_n \\ A_2 r = a_{21} \cdot A_1 + a_{22} \cdot A_2 + \dots + a_{2n} \cdot A_n \\ \dots \\ A_n \cdot r = a_{n1} \cdot A_1 + a_{n2} \cdot A_2 + \dots + a_{nn} \cdot A_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - r) \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + \dots + a_{1n} \cdot A_n = 0 \\ a_{21} \cdot A_1 + (a_{22} - r) \cdot A_2 + \dots + a_{2n} A_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot A_1 + a_{n2} \cdot A_2 + \dots + (a_{nn} - r) \cdot A_n = 0 \end{cases}$$

Am obținut un sistem algebric, omogen, de n ecuații cu n necunoscute.
Acest sistem admite întotdeauna soluția nulă
$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$, $\Rightarrow Y = O_{n,1}$
Acest sistem admite și soluții nenule $\Longleftrightarrow$ determinantul matricei sistemului este nul.

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A - rI_n) = 0 \Leftrightarrow$ polinomul caracteristic al matricei A $\leftrightarrow$ rădăcinile $(r_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt tocmai valorile proprii ale matricei A. $\Rightarrow$
$A_1, A_2, \dots A_n$ sunt coordonatele vectorului propriu al unei valori proprii a matricei A.

<u>Algoritmul de rezolvare</u>:

(1°) Se calculează polinomul caracteristic al matricei A a coeficienților sistemului;
$$\varphi_A(r) = \det(A - rI_n) = 0$$
(2°) Se determină rădăcinile polinomului caracteristic, deci valorile proprii ale matricei A
(3°) pentru fiecare valoare proprie se determină coordonatele vectorului propriu corespunzător

$$r_1 \to \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix}; \Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} \cdot e^{r_1 x} \dots\dots$$

$$r_n \to \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow Y_n = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} \cdot e^{r_n \cdot x}$$

Soluția generală a sistemului va fi:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(Y_1, Y_2, \dots Y_n \right) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Pot apărea următoarele situații:

(a) valorile proprii ale matricii A sunt reale și distincte

(b) Există valori proprii reale și multiple.

(c) ∃ valori proprii complex conjugate simple

(d) ∃ valori proprii complex conjugate multiple

(5) $r = r_i$ este valoare proprie multiplă, de ordinul $p > 1$. Se vor căuta soluții prin metoda coeficienților nedeterminați, de forma:

$$Y_i = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} \cdot e^{r_i \cdot x}$$

unde polinoamele $P_k(x)$, $k = \overline{1,n}$ au gradul $p-1$ și coeficienți nedeterminați.

Punând condiția ca Y_i de această formă să verifice sistemul omogen de ecuații diferențiale, se vor face identificările a.î. să rămână, în final numai p constante arbitrare în exprimarea soluției finale. Soluția Y_i care corespunde valorii proprii r_i, multiplă de ordinul p, va arăta astfel:

$$Y_i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot e^{r_i x} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot x \cdot e^{r_i x} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix} \cdot A_p \cdot x^{p-1} \cdot e^{r_i x}$$

$A_1, A_2, \dots A_p$ joacă rolul constantelor din sol. gen.

Cazul (c) dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ și $r_2 = \alpha - i\beta$, iar le vor corespunde Y_1 și Y_2 soluții cu coeficienți complecși în sistemul fundamental. Se recomandă ca în loc de Y_1 și Y_2 să se utilizeze soluțiile
$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$ și $\bar{Y}_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2i}$, care au toate coordonatele nr. reale.

Cazul (d) dacă răd. complex conjugate sunt multiple, se va proceda ca în cazul răd. reale și multiple.

Exemple

(1°) Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$$

y și z = funcțiile necunoscute
x = variabila independentă
sistemul are coeficienți ct.

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

vom căuta soluții de forma: $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} A_1 e^{rx} \\ A_2 e^{rx} \end{pmatrix}$

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 r \cdot e^{rx} \\ A_2 \cdot r \cdot e^{rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} \cdot e^{rx}.$$ Se înlocuiește:

$$\begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \quad \Big| : e^{rx} (\neq 0)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + 4A_2 \\ A_1 + A_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_1 r = A_1 + 4A_2 \\ A_2 r = A_1 + A_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (1-r) \cdot A_1 + 4A_2 = 0 \\ A_1 + (1-r) \cdot A_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ sistem omogen de 2 ecuații cu 2 necunoscute
sist. admite și soluții nenule $\iff \det(A - rI_2) = 0$

$(1-r)^2-4=0$; $(1-r-2)(1-r+2)=0$; $(-1-r)(3-r)=0$

$\Rightarrow r_1=-1$ și $r_2=3$ → reale și distincte!

Calculul vectorilor proprii:

$r_1=-1 \Rightarrow \begin{cases}(1-r)\cdot A_1+4A_2=0\\ A_1+(1-r)A_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2A_1+4A_2=0 \,|:2\\ A_1+2A_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow A_1+2A_2=0$; $A_1=-2A_2$; $V_1=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2A_2\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot A_2$

$V_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Y_1=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot e^{-x}}$

$r=3 \Rightarrow \begin{cases}-2A_1+4A_2=0 \,|:-2\\ A_1-2A_2=0\end{cases} \Rightarrow A_1-2A_2=0$; $A_1=2A_2$

$V_2=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2A_2\\A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot A_2$

$\Rightarrow \boxed{Y_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot e^{3x}}$; $\Delta(x)=(Y_1, Y_2)=\begin{pmatrix}-2e^{-x} & 2e^{3x}\\ e^{-x} & e^{3x}\end{pmatrix}$

$Y=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\Delta(x)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=c_1Y_1+c_2Y_2$

$Y=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e^{-x} & 2e^{3x}\\ e^{-x} & e^{3x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2c_1e^{-x}+2c_2e^{3x}\\ c_1e^{-x}+c_2e^{3x}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}y=-2c_1e^{-x}+2c_2e^{3x}\\ z=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}\end{cases}}$ = soluția generală a sistemului!

Problema de tip Cauchy. Pentru sistemul dat să se determine soluția care verifică următoarele condiții inițiale: $y(0)=6$; $z(0)=3$.

$\begin{matrix}y(0)=\\ z(0)=\end{matrix}\begin{cases}-2c_1+2c_2=6\\ c_1+c_2=3 \,|\cdot 2\end{cases}$ $\begin{cases}-2c_1+2c_2=6\\ 2c_1+2c_2=6\end{cases}$
$\overline{\quad / \quad 4c_2=12} \Rightarrow \boxed{c_2=3.}$

$\Rightarrow \boxed{c_1=0} \Rightarrow \begin{cases}y(x)=6\cdot e^{3x}\\ z(x)=3\,e^{3x}\end{cases}$

Obs. Se poate demonstra că în general, coordonatele vectorului propriu pentru o valoare proprie r a matricei A a coeficienților, sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $A - r I_n$

$$\frac{A_1}{\Gamma_{11}(r)} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}(r)} = \dots = \frac{A_n}{\Gamma_{1n}(r)} \; ; \; \Gamma_{1j},\ j = \overline{1,n}$$

sunt complemenții algebrici ai elementelor matricei $A - r I_n$ din prima linie a

$$A - r I_2 = \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{pmatrix} \; ; \quad \Gamma_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (1-r) = 1-r$$
$$\Gamma_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$\frac{A_1}{1-r} = \frac{A_2}{-1}$$

valoarea proprie ↓	$\Gamma_{11}(r)$ compl. alg. al lui $a_{11}-r$	$\Gamma_{12}(r)$ compl. alg. al lui a_{12}	
	$1-r$	-1	
$r_1 = -1$	2	-1	$\rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$r_2 = 3$	-2	-1	$\rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \; ; \; Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$ = baza spațiului vectorial al soluțiilor. Soluția generală a sistemului:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -2e^{3x} \\ -e^{-x} & -e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \\ -C_1 e^{-x} - C_2 e^{3x} \end{pmatrix}$$

Exemplul 2. Soluția generală a sistemului:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 8y + 4z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = -3x + 14y - 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 14 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pt. acest sistem se caută soluții de forma:

$$Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot e^{rt} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-r & -8 & 4 \\ -1 & 5-r & -2 \\ -3 & 14 & -6-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sînt admise soluții nenule $\Leftrightarrow \det(A - rI_3) = 0$.

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} -1-r & -8 & 4 \\ 2-r & 5-r & -2 \\ 5-r & 14 & -6-r \end{vmatrix} ; \quad -2C_1 + C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -8 & -2+2r \\ -1 & 5-r & 0 \\ -3 & 14 & -r \end{vmatrix}$$

$$-3L_2 + L_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -8 & -2+2r \\ -1 & 5-r & 0 \\ 0 & -15+3r+14 & -r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-r & -8 & -2+2r \\ -1 & 5-r & 0 \\ 0 & -1+3r & -r \end{vmatrix}$$

$(3-r)(r^2-5r)$

$$= (3-r)(5-r)(-r) + (1-3r)(-2+2r) + 8r =$$

$$= 3r^2 - 15r - r^3 + 5r^2 - 2 + \cancel{2r} + \cancel{6r} - 6r^2 + \cancel{8r} =$$

$$= -r^3 + 2r^2 + r - 2 = 0 \ \Big| \cdot (-1) \Rightarrow r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0.$$

$$r^2(r-2) - (r-2) = 0 \Rightarrow (r-2)(r^2-1) = 0$$

$$r_1 = -1; \quad r_2 = 1; \quad r_3 = 2$$

$$A - rI_3 = \begin{pmatrix} 3-r & -8 & 4 \\ -1 & 5-r & -2 \\ -3 & 14 & -6-r \end{pmatrix}$$

complementii algebrici ai elem. din linia nr. 1 ai lui $A - rI_3$:

$$\Gamma_{11} = \begin{vmatrix} 5-r & -2 \\ 14 & -6-r \end{vmatrix} = (r+6)(r-5) + 28 = r^2 - 5r + 6r - 30 + 28 = \boxed{r^2 + r - 2 = \Gamma_{11}}$$

$$\Gamma_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6-r \end{vmatrix} = (-1)(+6+r-6) = \boxed{-r = \Gamma_{12}}$$

$$\Gamma_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5-r \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = -14 + 3(5-r) = -14 + 15 - 3r = \boxed{1 - 3r = \Gamma_{13}}$$

Valoarea proprie	$\Gamma_{11}(r)$	$\Gamma_{12}(r)$	$\Gamma_{13}(r)$	
	r^2+r-2	$-r$	$1-3r$	
$r_1=-1$	-2	1	4	$\to V_1$
$r_2=1$	0	-1	-2	$\to V_2$
$r_3=2$	4	-2	-5	$\to V_3$

$$Y_1=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_1 = V_1\cdot e^{-t}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}\cdot e^{-t}=\begin{pmatrix}-2e^{-t}\\e^{-t}\\4e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$Y_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_2=V_2\cdot e^{t}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot e^{t}=\begin{pmatrix}0\\-e^{t}\\-2e^{t}\end{pmatrix}$$

$$Y_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_3=V_3\cdot e^{2t}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}\cdot e^{2t}=\begin{pmatrix}4e^{2t}\\-2e^{2t}\\-5e^{2t}\end{pmatrix}$$

Sol gen a sistemului: $Y=C_1\cdot Y_1+C_2\cdot Y_2+C_3\cdot Y_3$

$$Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_1 & Y_2 & Y_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}.$$

<u>Metoda 2</u> Metoda transformării sistemului de n ecuații de ordinul 1, într-o singură ecuație de ordinul n, cu coeficienți constanți.

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2y+z\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=y+2z\end{cases}$$

→ se derivează una dintre cele 2 ecuații: prima: $\Rightarrow y''=2y'+z'$

→ se utilizează a doua ecuație, din care se exprimă z': $\Rightarrow z'=y+2z$

$\Rightarrow y'' = 2y' + y + 2z$

Din prima ecuație se exprimă $\underline{z = y' - 2y}$

$\Rightarrow y'' - 2y' - y = 2(y' - 2y)$

$y'' - 2y' - y - 2y' + 4y = 0$

$y'' - 4y' + 3y = 0 \quad ; \quad y = e^{rx} \Rightarrow y' = r \cdot e^{rx}; y'' = r^2 \cdot e^{rx}$

$(r^2 - 4r + 3) \cdot e^{rx} = 0 \,/ : e^{rx} \Rightarrow \underline{r^2 - 4r + 3 = 0}$.

Ecuația caracteristică: $\Delta = 16 - 12 = 4$

$r_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} r_1 = 1 \rightarrow y_1 = e^x \\ r_2 = 3 \rightarrow y_2 = e^{3x} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}}$

Se calculează lui z folosind o relația anterioară, dedusă din prima ecuație:

$z = y' - 2y \quad ; \quad y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$

$z = y' - 2y = \underline{C_1 e^x} + \underline{3C_2 e^{3x}} - \underline{2C_1 e^x} - \underline{2C_2 e^{3x}}$

$\boxed{z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}}$

Sol. gen a sistemului:

$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} \end{cases}$ Problema Cauchy: $\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$

Exerciții (Temă)

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$\varphi_A(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$

$\dfrac{A_1}{\Gamma_{11}(\lambda)} = \dfrac{A_2}{\Gamma_{12}(\lambda)} = \dfrac{A_3}{\Gamma_{13}(\lambda)}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\varphi_A(\lambda) = (-\lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 4)$

Cazul valorilor proprii multiple.

Metoda 1 → metoda coef. nedeterminati (pag. 3)

Coordonatele vectorului propriu care corespunde unei valori proprii r_k sunt proporționale cu complementii algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $(A - r I_n)$.

$$\frac{A_1}{\Gamma_{11}(r)} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}(r)} = \cdots = \frac{A_n}{\Gamma_{1n}(r)} \; ; \; V = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Dacă valoarea proprie $r = r_0$ este multiplă, de ordinul m, se poate arăta că soluțiile sistemului care corespund acestei valori proprii se pot alcătui astfel:

$$Y_{01} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(r) \cdot e^{rx} \\ \Gamma_{12}(r) \cdot e^{rx} \\ \vdots \\ \Gamma_{1n}(r) \cdot e^{rx} \end{pmatrix}_{r = r_0} ; \; Y_{02} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{11}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{12}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{1n}(r) \cdot e^{rx}\right) \end{pmatrix}_{r = r_0} \cdots$$

$$\cdots Y_{0m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{11}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{12}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{1n}(r) \cdot e^{rx}\right) \end{pmatrix}_{r = r_0}$$

Exemplu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = x + z \end{cases}$$

căutând soluții de forma $Y = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot e^{rt}$ se alcătuiește ecuația caracteristică:

$$\det(A - r I_3) = \begin{vmatrix} 4-r & -1 & 0 \\ 3 & 1-r & -1 \\ 1 & 0 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(r-2)^3 = 0 \; ; \; r_1 = r_2 = r_3 = 2$$

Calculăm complemenții algebrici ai elem. din linia 1 a matricei $(A-\lambda I_3)$:

$$\Gamma_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \underline{(1-\lambda)^2} \;;\; \Gamma_{12}(\lambda) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(3-3\lambda+1) = \underline{3\lambda-4} \;;\; \Gamma_{13}(\lambda) = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\lambda-1}.$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \\ \Gamma_{12}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \\ \Gamma_{13}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2\cdot e^{\lambda t} \\ (3\lambda-4)\cdot e^{\lambda t} \\ (\lambda-1)\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1-\lambda)^2\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(3\lambda-4)\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda-1)\cdot e^{\lambda t}\right] \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda)\cdot(-1)\cdot e^{\lambda t} + (1-\lambda)^2\cdot t\cdot e^{\lambda t} \\ 3\cdot e^{\lambda t} + (3\lambda-4)\cdot t\cdot e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} + (\lambda-1)\cdot t\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[(2\lambda-2) + t(\lambda-1)^2\right] e^{\lambda t} \\ \left[3+t(3\lambda-4)\right]\cdot e^{\lambda t} \\ \left[1+(\lambda-1)\cdot t\right]\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} (2+t)\cdot e^{2t} \\ (3+2t)\cdot e^{2t} \\ (1+t)\cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\left[2\lambda-2+t(\lambda-1)^2\right]\cdot e^{\lambda t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\left[3+t(3\lambda-4)\right]\cdot e^{\lambda t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\left[1+(\lambda-1)\cdot t\right]\cdot e^{\lambda t}\right) \end{pmatrix}_{\lambda=2} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 2+2t(\lambda-1)+t\left[(2\lambda-2)+t(\lambda-1)^2\right] \\ 3t+t\left(3+t(3\lambda-4)\right) \\ t+t\left(1+(\lambda-1)\cdot t\right) \end{pmatrix}_{\lambda=2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2t+t^2+2t \\ 3t+2t^2+3t \\ t+t^2+t \end{pmatrix}\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} t^2+4t+2 \\ 2t^2+6t \\ t^2+2t \end{pmatrix}\cdot e^{2t}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\cdot Y_1 + C_2\cdot Y_2 + C_3\cdot Y_3$$

Ecuații de tip Euler.

(1°) $x^2 y'' + x y' - y = 0$; $x > 0$.

M 1 Se face schimbarea de variabilă independentă $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ ......etc.

M 2 Se caută soluții de forma

$$y = x^r$$

$$\Rightarrow y' = r \cdot x^{r-1} ; \; y'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$$

$$x^2 \cdot x^{r-2} \cdot r(r-1) + x \cdot r \cdot x^{r-1} - x^r = 0$$

$$x^r [r(r-1) + r - 1] = 0 \,/ : x^r \Rightarrow r^2 - r + r - 1 = 0$$

$r^2 - 1 = 0 \rightarrow$ ecuația caracteristică asociată ecuației lui Euler.

$$(r-1)(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 1 ; \; r_2 = -1 .$$

$$\Rightarrow y_1 = x^1 = x ; \; y_2 = x^{-1} = \frac{1}{x} ; \; B = \left\{ x, \frac{1}{x} \right\}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \frac{1}{x}}$$

(2°) Problema Cauchy în cond. inițiale:

$$\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \qquad y'(x) = C_1 - \frac{1}{x^2} \cdot C_2$$

$$\begin{matrix} y(1) \\ y'(1) \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = C_1 = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}}$$

(3°) Să se determine ecuația diferențială care admite drept sistem fundamental de soluții funcțiile $y_1 = x$ și $y_2 = \frac{1}{x}$ - cele 2 funcții și se verifică faptul că sunt liniar independente $\Rightarrow$

$W(y_1, y_2) \neq 0$; $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \neq 0.$

b) Ecuația căutată se obține din condiția ca 3 soluții ale ecuației să fie liniar dependente: $\Rightarrow W(y, y_1, y_2) = 0.$

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} y & x & \frac{1}{x} \\ y' & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ y'' & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y'' \cdot \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} - y' \cdot \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} + y \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$y''\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) - y'\left(\frac{2}{x^2}\right) + y \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) = 0$$

$$-\frac{2}{x} \cdot y'' - \frac{2}{x^2} \cdot y' + \frac{2}{x^3} \cdot y = 0 \Big/ \cdot \left(-\frac{x^3}{2}\right)$$

$$\boxed{x^2 y'' + x y' - y = 0}$$