Aplicații la rezolvarea sistemelor liniare și omogene, cu coeficienți constanți de ecuații diferențiale

Metoda valorilor și vectorilor proprii. Cazul valorilor proprii multiple.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1n} \cdot y_n \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

Se caută soluții de forma $Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rt}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \\ \vdots \\ A_n r \end{pmatrix} \cdot e^{rt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rt} \quad / : e^{rt}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - r) \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + \dots + a_{1n} \cdot A_n = 0 \\ a_{21} \cdot A_1 + (a_{22} - r) A_2 + \dots + a_{2n} \cdot A_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot A_1 + a_{n2} \cdot A_2 + \dots + (a_{nn} - r) \cdot A_n = 0 \end{cases}$$

→ sistem omogen de n ec. cu n necunoscute $A_1, A_2, \dots A_n$. Acest sistem admite soluții nenule $\Leftrightarrow$ determinantul matricei coeficienților este nul:

$\det(A - r I_n) = 0 \Leftrightarrow \varphi_A(r) = 0$ polinomul caracteristic al matricei A.

$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_1 \cdot r + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0.$

Se rezolvă ecuația $\varphi_A(r) = 0 \Rightarrow$ are n rădăcini $r_1, r_2, \dots r_n$ - valorile proprii ale matricei coeficienților. Pentru fiecare valoare proprie se determină vectorul propriu corespunzător

1) valori proprii reale și distincte.

$$r = r_1 \to \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} = V_1 \; ; \Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} \cdot e^{r_1 t}$$

- - - - - -

$$r = r_n \to \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} = V_n \Rightarrow Y_n = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} \cdot e^{r_n \cdot t}$$

Soluția generală a sistemului:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1, & Y_2, & \dots & Y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

2) valori proprii reale și multiple

coordonatele vectorilor proprii sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $(A - rI_n)$. $\Rightarrow$

$$\frac{A_1}{\Gamma_{11}(r)} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}(r)} = \dots = \frac{A_n}{\Gamma_{1n}(r)}.$$

Dacă $r = r_0$ este valoare proprie multiplă de ordinul $\underline{m}$ $(m > 1)$, se poate demonstra că soluțiile din sistemul fundamental de soluții al sistemului omogen se pot obține astfel:

$$Y_{01} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(r) \cdot e^{rx} \\ \Gamma_{12}(r) \cdot e^{rx} \\ \vdots \\ \Gamma_{1n}(r) \cdot e^{rx} \end{pmatrix}_{r=r_0} ; \quad Y_{02} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{11}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{12}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma_{1n}(r) \cdot e^{rx}\right) \end{pmatrix}_{r=r_0} \dots$$

$$Y_{0m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{11}(r) \cdot e^{rx}\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}}\left(\Gamma_{1n}(r) \cdot e^{rx}\right) \end{pmatrix}_{r=r_0}.$$

Exemplu.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 2z \end{cases}$$

$x(t)$; $y(t)$, $z(t)$ = funcțiile necunoscute

$t \in \mathbb{R}$ = variabila independentă

Se caută soluții de forma: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot e^{rt} \rightarrow$

$$(A - r I_3) \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varphi_r(t) = 0$$

= condiția ca sistemul să admită soluții nenule

$$\det(A - r I_3) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 & 1 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 0 & -1 & 2-r \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-r)(r-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = r_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{r.d. dublă}$$

$$\Gamma_{11}(r) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ -1 & 2-r \end{vmatrix} = (1-r)(2-r) - 1 = r^2 - 3r + 1$$

$$\Gamma_{12}(r) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2-r \end{vmatrix} = r - 2$$

$$\Gamma_{13}(r) = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1-r \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

pt $r = 1$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r^2-3r+1) \cdot e^{rt} \\ (r-2) \cdot e^{rt} \\ (-1) \cdot e^{rt} \end{pmatrix}_{r=1} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot e^{t} \\ (-1) \cdot e^{t} \\ (-1) \cdot e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ -e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$$

pt $r = 2$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r^2-3r+1) \cdot e^{rt} \\ (r-2) \cdot e^{rt} \\ (-1) \cdot e^{rt} \end{pmatrix}_{r=2} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot e^{2t} \\ 0 \cdot e^{2t} \\ -1 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\left((r^2-3r+1) \cdot e^{rt}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left((r-2) \cdot e^{rt}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}\left((-1) \cdot e^{rt}\right) \end{pmatrix}_{r=1} = \begin{pmatrix} (2r-3) \cdot e^{rt} + t(r^2-3r+1) \cdot e^{rt} \\ 1 \cdot e^{rt} + t(r-2) \cdot e^{rt} \\ (-1) \cdot t \cdot e^{rt} \end{pmatrix}_{r=1}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t - e^t \cdot t \\ e^t - te^t \\ -t e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1-t) \cdot e^t \\ (1-t) \cdot e^t \\ -t \cdot e^t \end{pmatrix} = Y_3.$$

Soluția generală a sistemului:

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1, Y_2, Y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t & -e^{2t} & (-1-t) \cdot e^t \\ -e^t & 0 & (1-t) \cdot e^t \\ -e^t & -e^{2t} & -t \cdot e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

Exemplul 2 Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x \quad + z \end{cases}$$

căutăm soluții de forma:

$$Y = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot e^{rt}$$

Se va afla ecuația caracteristică:

$$\det(A - r I_3) = \begin{vmatrix} 4-r & -1 & 0 \\ 3 & 1-r & -1 \\ 1 & 0 & 1-r \end{vmatrix} = -(r-2)^3 = 0$$

$\Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 2$ → rădăcină triplă pt

ec. caracteristică.
complemenții algebrici ai elementelor din linia 1:

$$\Gamma_{11}(r) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 0 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2$$

$$\Gamma_{12}(r) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = -(3-3r+1) = -(4-3r) = 3r-4.$$

$$\Gamma_{13}(r) = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1-r \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r-1.$$

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \\ \Gamma_{12}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \\ \Gamma_{13}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 \cdot e^{\lambda t} \\ (3\lambda-4)\cdot e^{\lambda t} \\ (\lambda-1)\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2\cdot e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1-\lambda)^2\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(3\lambda-4)\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda-1)\cdot e^{\lambda t}\right] \end{pmatrix}_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda)\cdot(-1)\cdot e^{\lambda t} + t\cdot e^{\lambda t}(1-\lambda)^2 \\ 3\cdot e^{\lambda t} + (3\lambda-4)\cdot t\, e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} + (\lambda-1)\cdot t\, e^{\lambda t} \end{pmatrix}_{\lambda=2}$$

$$\Rightarrow Y_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + t e^{2t} \\ 3e^{2t} + 2t e^{2t} \\ e^{2t} + t e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+t)\cdot e^{2t} \\ (3+2t)\cdot e^{2t} \\ (1+t)\cdot e^{2t} \end{pmatrix} \checkmark$$

$$Y_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\Gamma_{12}(\lambda)\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[\Gamma_{13}(\lambda)\cdot e^{\lambda t}\right] \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix} \left[2\lambda-2 + t(\lambda-1)^2\right]\cdot e^{\lambda t} \\ 3\cdot e^{\lambda t} + t e^{\lambda t}(3\lambda-4) \\ e^{\lambda t} + (\lambda-1) t e^{\lambda t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 2t(\lambda-1) + t\left[2\lambda-2+t(\lambda-1)^2\right] \\ 3t + t\left(3 + t(3\lambda-4)\right) \\ t + t e^{\lambda t} + t^2(\lambda-1) \end{pmatrix}\cdot e^{\lambda t}\Bigg|_{\lambda=2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2t+t^2+2t \\ 3t+2t^2+3t \\ t+t^2+t \end{pmatrix}\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} t^2+4t+2 \\ 2t^2+6t \\ t^2+2t \end{pmatrix}\cdot e^{2t} = Y_3(t) \checkmark$$

$$Y = \left(Y_1, Y_2, Y_3\right)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(3) Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$ și soluția problemei Cauchy: $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

metoda transformării sistemului într-o ecuație dif de ordinul doi:

- se derivează ec. (1):

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + 4\dot{y} \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \ddot{x} = \dot{x} + 4(x+y) \\ \ddot{x} = \dot{x} + 4x + 4y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

din prima ecuație $\Rightarrow \dot{x} - x = 4y$

$\ddot{x} = \dot{x} + 4x + (\dot{x} - x)$; $\ddot{x} = \dot{x} + 4x + \dot{x} - x$

$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0 \rightarrow x = e^{rt} \Rightarrow \dot{x} = re^{rt}$; $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$

$(r^2 - 2r - 3) \cdot e^{rt} = 0 \quad | : e^{rt}$

$r^2 - 2r - 3 = 0 \rightarrow$ ecuația caracteristică atașată ec. dif. omogene.

$\Delta = 4 + 12 = 16 \rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} = -3 \end{cases} \rightarrow \boxed{x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}}$$

din prima ecuație $\rightarrow 4y = \dot{x} - x$

$y = \frac{1}{4}(\dot{x} - x) = \frac{1}{4}(-C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{3t})$

$y = \frac{1}{4}(-2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t})$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{3t} \end{cases}$$

problema Cauchy:

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y(0) = -\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$2C_1 = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{2};\ C_2 = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow -C_1 + C_2 = 0$; $C_1 = C_2$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{3t}) \\ y(t) = +\frac{1}{4}(-e^{-t} + e^{3t}) \end{cases}$$