

Gramatici (exerciții)

Exercițiul 3.1. Se dau următoarele limbaje formale:

a) $L_1 = \{a^n \mid n \geq 1\}$;

b) $L_2 = \{a^n b^m a^m b^m \mid n, m \geq 1\}$;

c) $L_3 = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$.

Pentru fiecare limbaj să se construiască gramatica care îl generează și să se precizeze tipul gramaticii și tipul limbajului, conform clasificării lui Chomsky.

Răspuns: a) $G_1 = (\{S\}, \{a\}, S, \{S \rightarrow a, S \rightarrow aS\})$ gram. regulată

b) $G_2 = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow AA, A \rightarrow aAb, A \rightarrow ab\})$ limbaj regulat
gram. independentă de context

c) $G_3 = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow SS, S \rightarrow b\})$ limbajul

$w = a^2 b a^2 \in L_3$

$S \xrightarrow{(1)} aSa \xrightarrow{(1)} aaSaa \xrightarrow{(2)} aaSSaa \xrightarrow{(3)}$

$\xrightarrow{(3)} aabSaa \xrightarrow{(3)} aabbaa = a^2 b a^2 \in L_3$

$G'_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSBa, S \rightarrow aBa, aB \rightarrow Ba, bB \rightarrow bb\})$
gram. dependentă de context

Se știe că o gramatică $G = (N, T, S, P)$ este **gramatică regulată** dacă orice producție a sa este fie de forma $A \rightarrow aB$, fie de forma $A \rightarrow a$ cu $A, B \in N$ și $a \in T$.

Propoziția 3.1. Fie o gramatică $G = (N, T, S, P)$ în care producțiile au forma $A \rightarrow a$, fie au forma $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n B$ cu $A, B \in N$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in T$. Atunci $G = (N, T, S, P)$ este o gramatică regulată.

Demonstrație (pe scurt).

Construim G' o gramatică regulată cu $L(G') = L(G)$ astfel:

- Producțiile $A \rightarrow a$ se păstrează;
- Producția $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n B$:
 - Dacă $n = 1$, producția se păstrează
 - Dacă $n \geq 2$, este înlocuită cu $A \rightarrow a_1 X_1, X_1 \rightarrow a_2 X_2, \dots, X_{n-1} \rightarrow a_n B$, unde X_1, X_2, \dots, X_{n-1} sunt neterminale noi.

Exercițiul 3.2. Să se construiască gramatica regulată echivalentă cu gramatica $G = (N, T, S, P)$, unde $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b, c\}$, iar mulțimea producțiilor P este următoarea:

$S \rightarrow aA \mid bB$ (1)

$A \rightarrow b \mid abcB$ (2)

$B \rightarrow abA$ (3)

$G' = (N', T, S, P')$, unde P' :

$S \rightarrow aA \mid bB$

$A \rightarrow b$

$A \rightarrow aX_1$

$N' = N \cup \{X_1, X_2, X_3\}$

$B \rightarrow aX_3$

$X_1 \rightarrow bX_2$

$X_2 \rightarrow cB$

$X_3 \rightarrow bA$

Propoziția 3.2. Fie o gramatică $G = (N, T, S, P)$ în care producțiile au forma $A \rightarrow Bb$,

fie de forma $A \rightarrow a$ cu $A, B \in N$ și $a, b \in T$. Atunci există G' o gramatică regulată cu $L(G') = L(G)$.

Demonstrație (pe scurt)

Construim G' o gramatică regulată cu $L(G') = L(G)$ astfel:

Fie S' un nou neterminal, care este simbol inițial în G' . Se fac următoarele

transformări:

- Producția $A \rightarrow a$ se transformă astfel:
Se introduce $S' \rightarrow aA$;
Dacă $A = S$ atunci se adaugă și $S' \rightarrow a$;
- Producția $A \rightarrow Ba$ se transformă în $B \rightarrow aA$;
- Producția $S \rightarrow Aa$: se introduce și $A \rightarrow a$.

3.3. Rezolvare:

$S' \rightarrow bS$

$S' \rightarrow b$

$S' \rightarrow aA$

$A \rightarrow a$

$S \rightarrow bA$

$G' = (\{S', S, A\}, \{a, b\}, S', P')$

Exercițiul 3.3. Să se aplice transformările de la propoziția 3.2. pentru gramatica

$G = (N, T, S, P)$, unde $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, cu mulțimea producțiilor P :

$S \rightarrow Aa \mid b$ (1)

$A \rightarrow Sb \mid a$ (2)

Ex. 3.4 Fie gram. $G = (N, T, S, P)$ următoare:

$S \rightarrow aB \mid bB \mid bC$

$B \rightarrow b$

$D \rightarrow a \mid aC$

Să se elimine neterminalele nefolosite

$M_0 = \{B, D\}$

$M_1 = \{B, D\} \cup \{S\} = \{S, B, D\}$

$M_2 = \{S, B, D\}$

neterminalele nefol. sunt $N \setminus M_2 = \{C\}$