Curs 6

$A_n(y)=f(x)$

$$A_n(y) \to \underbrace{\left(a_0(x)\frac{d^m}{dx^m}+\dots+a_{m-1}(x)\frac{d}{dx}+a_m(x)\right)}_{\text{Operator diferențial liniar de ordin } n}(y)=f(x) \to a_0(x)y^{n}+\dots+a_{m-1}(x)y^{m-1}+a(x)y'=f(x) \quad (1^\circ)$$

$A_n(y)=0$ OMOGENĂ

$A_n(y)=f(x)$ Neomogenă

Soluția generală a ecuației neomogene ① este egală cu suma dintre Sol. generala a ecuației omogenă asociată ($A_n(y_0)=0$) și o soluție particulară a ecuației neomogene

$y=y_\emptyset+y_p$

$W(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0 \to B(y_1,y_2,\dots,y_n) \Rightarrow y_\emptyset=C_1y_1+\dots+C_ny_n$

$W(y,y_1,\dots,y_n)=0 \Rightarrow A_n(y)=0$

Determinarea unei soluții particulare pentru ecuația Neomogenă $A_n(y)=f(x)$ | metoda variației constantelor

$A_n(y)=f(x)$ și $y_\emptyset=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ $\quad B=\{y_1,\dots,y_n\}$ $\quad W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$

$C_1=C_1(x),\dots,C_n=C_n(x)$; Se pune când $y=C_1(x)y_1+\dots+C_n(x)y_n$ Să verifice ecuația neomogenă $A_n(y)=f(x)$

Se obține următoarea:

$$S\begin{cases} C_1'y_1+\dots+C_n'y_n=0\\ C_1'y_1'+\dots+C_n'y_n'=0\\ \dots\\ C_1'y_1^{(n-2)}+\dots+C_n'y_n^{(n-2)}=0\\ C_1'y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=\frac{f(x)}{a_0(x)}\end{cases}$$

n ecuații cu n necunoscute → $C_1',C_2',\dots,C_n'$

Sistemul are soluție unică: $\det(S)\neq 0$

$$\det(S):\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n\\ y_1' & y_2' & & y_n\\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & & y_n^{n-1}\end{vmatrix}=W(y_1,y_2,\dots,y_n)\neq 0$$

→ Sistemul are soluție unică!

$$\begin{cases}C_1'(x)=f_1(x)\\ C_2'(x)=f_2(x)\\ \dots\\ C_n'(x)=f_n(x)\end{cases} \Rightarrow \quad C_1(x)=\int f_1(x)\,dx+K_1,\ \dots,\ C_n(x)=\int f_n(x)\,dx+K_n$$

$$\to y(x)=C_1(x)y_1+\dots+C_n(x)y_n \Rightarrow y(x)=\underbrace{K_1y_1+\dots+K_ny_n}_{\substack{y_\emptyset(x)\\ \text{Soluția generală}}}+\underbrace{y_1\cdot\int f_1(x)\,dx+\dots+y_n\cdot\int f_n(x)\,dx}_{\substack{y_p(x)\\ \text{Soluția particulară}}}$$

Teorema de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy pentru ec. neomogenă

Fie dată ecuația $A_n(y)=f(x)$, atunci există și este unică o soluție a sa care verifică următoarele condiții inițiale:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_1\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}\end{cases}$$

unde $x_0\in I$ și $y_0,y_1,\dots,y_{n-1}$ sunt n numere date

$$y=K_1y_1+\dots+K_ny_n+y_p(x) \to \begin{cases}K_1y_1(x_0)+\dots+K_ny_n(x_0)=y_0\\ K_1y_1'(x_0)+\dots+K_ny_n'(x_0)=y_1\\ K_1y_1^{n-1}(x_0)+\dots+K_ny_n^{n-1}(x_0)=y_{n-1}\end{cases}$$

Sistem algebric de n ecuații cu n necunoscute: $K_1,K_2,\dots,K_n$, neomogen

$\det(S)=W(y_1(x_0),\dots,y_n(x_0))\neq 0$

$\Rightarrow (\exists)!\ K_1,K_2,\dots,K_n$

Exemplu: Fie ecuația $\boxed{y''-5y'+6y=0}$ are coeficienți constanți $\quad \boxed{y(0)=1 \quad y'(1)=0}$

Se caută soluții de forma $y=e^{zx}$

$y'=z\cdot e^{zx}$; $y''=z^2\cdot e^{zx} \to (z^2-5z+6)e^{zx}=0$: $e^{zx}\neq 0$

$z^2-5z+6=0$ → ecuație caracteristică asociată ec. dif. omogene.

$z_1=2 \quad z_2=3 \quad \to \begin{cases}y_1=e^{2x}\\ y_2=e^{3x}\end{cases} \to W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}e^{2x} & e^{3x}\\ 2e^{2x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}=e^{5x}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=e^{5x}\neq 0$

$\longrightarrow y=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{3x}$

$y'(x)=2C_1\cdot e^{2x}+3C_2\cdot e^{3x}$

$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2=1\\ y'(0)=2C_1+3C_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}C_1=3\\ C_2=-2\end{matrix}$ → $y=3e^{2x}-2e^{3x}$ Soluție problemei Cauchy

---

Principiul superpoziției (suprapunerii efectelor)

Fie ecuația $A_n(y)=f(x)$ → ec. diferențială liniară de ordin n

$f(x)$ poate fi suma mai multor funcții

$A_n(y)=f_1(x)+\dots+f_k(x) \to y_p=y_{p_1}(x)+\dots+y_{p_k}(x)$

$$\left[\begin{matrix}A_n(y)=f_1(x) \to y_{p_1}(x)\\ \vdots\\ A_n(y)=f_k(x) \to y_{p_k}(x)\end{matrix}\right] \to y_p=y_{p_1}(x)+\dots+y_{p_k}(x)$$

Ecuații diferențiale liniare, de ordin n, omogene și neomogene, cu coeficienți constanți

$a_0y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\dots+a_ny'+a_ny=f(x)$ $\quad a_i$ = constante $\in \mathbb{R},\mathbb{C}$; f = continuă pe $\mathbb{R}$

$y=y_\emptyset+y_p$ $\quad (\exists)$ o metodă generală pt. determinarea unui SFS pt. ecuația omogenă.

$a_0y^n+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ $\quad$ EULER: $y=e^{zx}$

$y'=z\cdot e^{zx} \dots \to y^n=z^n\cdot e^{zx}$

$e^{zx}\cdot(a_0z^n+\dots+a_{n-1}z+a_n)=0 \mid : e^{zx}\neq 0 \to \underbrace{a_0z^n+\dots+a_{n-1}z+a_n}_{K_n(z)}=0$

$K_n(z)$: se numește ec. caracteristică asociată ecuației omogene $K_n(z)$

Rezolvând ecuația, se pot obține următoarele soluții:

1) $K_n(z)=0$ Toate soluțiile sunt reale și distincte $z_1\neq z_2\neq\dots\neq z_n$ Aceste soluții ne corespund următoarele soluții pentru ec. omogenă

$y_1=e^{z_1x}\ \dots\ y_n=e^{z_nx}$ L i pe $\mathbb{R}$.

$$W(y_1,\dots,y_n)=\begin{vmatrix}e^{z_1x} & \dots & e^{z_nx}\\ z_1e^{z_1x} & \dots & z_ne^{z_nx}\\ \dots & & \\ z_1^{n-1}e^{z_1x} & \dots & z_n^{n-1}e^{z_nx}\end{vmatrix}=e^{z_1+z_2+\dots+z_n}\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ z_1 & z_2 & \dots & z_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1}\end{vmatrix}}_{\text{Vandermonde}}=e^{-\frac{a_1}{a_0}x}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(z_j-z_i)\neq 0 \Rightarrow B=\{y_1,\dots,y_n\} \Rightarrow \underbrace{\boxed{y=C_1\cdot e^{z_1x}+\dots+C_ne^{z_nx}}}_{\text{Soluție generală}}$$

Exemplu: $y'''-2y''-y'+2y=0$ $\quad y=e^{zx} \to z^3-2z^2-z+2=0$

$\hookrightarrow z^2(z-2)-(z-2)=0 \to (z-2)(z^2-1)=0$ $\quad z_1=-1 \quad z_2=1 \quad z_3=2$ $\quad y_\emptyset=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{x}+C_3\cdot e^{2x}$

---

2) $K_n(z)=0$ are rădăcini reale și multiple

$z=z_1\in\mathbb{R}$, multiplă de ordin K $(K>1)$

Fiecare rădăcină multiplă a ecuației îi corespunde în SFS al ecuației un număr de K soluții unde K = ordin multiplicitate al rădăcinii; $\forall$ rădăcină multiplă

$\Rightarrow y_1=e^{z_1x}$; $\quad y_2=x\cdot e^{z_1x}$; $\quad y_3=x^2\cdot e^{z_1x}$; $\dots$; $\quad y_K=x^{K-1}\cdot e^{z_1x}$

Exemplu: $y'''-6y''+12y'-8y=0$ $\quad y=e^{zx} \to z^3-6z^2+12z-8=0$

	z^3	z^2	z^1	z^0	
	1	-6	12	-8	
2	1	-4	4	(0)	Soluție 1
2	1	-2	(0)		Soluție 2

$\Rightarrow (z-2)(z^2-4z+4)=(z-2)^3$

$z_1=z_2=z_3=2$ $\quad y_1=e^{2x} \quad y_2=x\cdot e^{2x} \quad y_3=x\cdot e^{2x}$

$y=C_1e^{2x}+C_2\cdot x\cdot e^{2x}+C_3\cdot x^2\cdot e^{2x}$

3) $K_n(z)$ are rădăcini complex conjugate simple, $z_{1,2}=\alpha\pm i\cdot\beta$ $\quad i^2=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases}y_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x\\ y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x\end{cases} \to \begin{cases}\bar{y}_1=e^{(\alpha+i\beta)x}\\ \bar{y}_2=e^{(\alpha-i\beta)x}\end{cases} \to \begin{cases}y_1=\dfrac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}\\ y_2=\dfrac{\bar{y}_1-\bar{y}_2}{2}\end{cases}$$

4) $K_n(z)$ are rădăcini complex conjugate multiple; $\alpha\pm i\beta$ → rădăcină de ordin K

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\quad y_3=x\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\quad \dots \quad y_{2K-1}=x^{K-1}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\quad y_4=x\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x$ $\quad \dots \quad y_{2K}=x^{K-1}\cdot e^{\alpha x}\cos\beta x$