02.12.2021
An 2 ZI

Sisteme de ecuații diferențiale liniare, de ordinul 1

Definiție Un sistem de ecuații diferențiale de forma:

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\cdot y_1 + a_{12}(x)\cdot y_2 + \dots + a_{1n}(x)\cdot y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)\cdot y_1 + a_{22}(x)\cdot y_2 + \dots + a_{2n}(x)\cdot y_n + f_2(x) \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\cdot y_1 + a_{n2}(x)\cdot y_2 + \dots + a_{nn}(x)\cdot y_n + f_n(x), \end{cases}$$

unde $a_{ij}, f_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,n}$ sunt funcții continue pe I, iar $y_1, y_2, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile și au derivatele continue pe I, se numește sistem de ecuații diferențiale liniare, de ordinul 1, neomogen. $x \in I$ este variabila independentă, iar $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt funcțiile necunoscute. Dacă toate funcțiile $f_1, f_2, \dots, f_n$ (termenii liberi ai sistemului) sunt toate nule, atunci sistemul se numește omogen, de n ecuații cu n funcții necunoscute.

Sistemul se mai poate scrie, sub o formă condensată și astfel:

$$(2^\circ)\quad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\cdot y_j(x) + f_i(x), \quad (\forall)\, i=\overline{1,n}$$

Astfel: definim vectorii $Y=[y_1, y_2, \dots, y_n]^t$ și $F(x)=[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^t$ și matricea $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{1\le i,j\le n}$, sistemul (1) se poate scrie sub o formă matriceală astfel:

$$(3)\quad \frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x) \quad \text{— sistemul neomogen } (1^\circ)$$

$$(4^\circ)\quad \frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y \quad \text{= sistemul omogen asociat}$$

O soluție a sistemului (1) pe intervalul I va fi un vector format din n funcții, $y_1, y_2, \dots, y_n$, de clasă C^1 pe I, și care verifică sistemul în orice punct $x \in I$.

Teorema 1. Fie sistemul de n ecuații diferențiale, cu n funcții necunoscute, de ordinul 1, omogen:

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y, \quad x \in I.$$

Mulțimea soluțiilor sale este un subspațiu vectorial finit dimensional al spațiului vectorial infinit dimensional $C^1(I)$

Fie: $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}$; $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}$; $\dots$ $Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$ n soluții liniar independente ale sistemului omogen

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y.$$

Atunci orice soluție a sistemului omogen poate fi exprimată ca o combinație liniară cu coeficienți constanți, $C_1, C_2, \dots, C_n$ a celor n soluții, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, care formează o bază a spațiului soluțiilor:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \dots C_nY_n; \quad Y = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k; \quad C_k \in \mathbb{R},\ k=\overline{1,n}$$

Y, scrisă sub această formă se numește soluția generală a sistemului omogen.

Din aceasta se poate obține o soluție particulară a sistemului omogen prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, \dots, C_n$, în urma impunerii unui set de condiții inițiale sub forma:

$$Y(x_0) = Y_0 = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

unde $x_0 \in I$, iar $y_{10}, y_{20}, \dots y_{n0}$ sunt valorile inițiale ale funcțiilor necunoscute

<u>Definiție</u> n soluții $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ale sistemului omogen $\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y$ sunt liniar independente pe I, dacă determinantul matricei $\Delta(x) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ este diferit de zero pe I. Matricea $\Delta(x)$,

$$\Delta(x) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{array} \end{array}$$

se numește matrice fundamentală de soluții a sistemului omogen.

Soluția generală a sistemului omogen se scrie, desfășurat, astfel:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Delta(x)\cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = y_{11}\cdot c_1 + y_{12}\cdot c_2 + \dots + y_{1n}\cdot c_n \\ y_2 = y_{21} c_1 + y_{22} c_2 + \dots + y_{2n} c_n \\ \text{---------------------------} \\ y_n = y_{n1} c_1 + y_{n2}\cdot c_2 + \dots + y_{nn} c_n \end{cases}$$

<u>Exemplu</u>. Fie sistemul omogen, de 2 ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} (1-xe^x)\cdot \frac{dy_1}{dx} = -e^x y_1 + y_2 \\ (1-xe^x)\cdot \frac{dy_2}{dx} = e^x\cdot y_1 - x e^x y_2 \end{cases}$$

$1 - x\cdot e^x \neq 0$ pe $\mathbb{R}$. Împărțim cu factorul $1-xe^x \neq 0$.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -\frac{e^x}{1-xe^x}\cdot y_1 + \frac{1}{1-xe^x}\cdot y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{e^x}{1-xe^x}\cdot y_1 - \frac{xe^x}{1-xe^x}\cdot y_2 \end{cases} ; \quad \frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Un sistem fundamental de soluții pentru acest sistem este format din vectorii:

$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}$; $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ verificare - prin calcul; exercițiu!

$\det \Delta(x) = \det(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = 1 - xe^x \neq 0.$

Soluția generală a sistemului va fi: o combinație liniară, cu coeficienți constanți arbitrari a vectorilor Y_1 și Y_2, care formează sistemul fundamental de soluții al spațiului soluțiilor.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (Y_1, Y_2) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + xc_2 \\ c_1 e^x + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

<u>Teorema:</u> Matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen, $W(x) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ satisface ecuația diferențială matriceală:

$$\frac{dW}{dx} = A(x) \cdot W(x)$$

<u>Dem</u>

$$\frac{dW}{dx} = \left(\frac{dY_1}{dx}, \frac{dY_2}{dx}, \dots \frac{dY_n}{dx}\right).$$

$$A(x) \cdot W(x) = A(x) \cdot (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \left(A(x) \cdot Y_1, A(x) \cdot Y_2, \dots; A(x) \cdot Y_n\right)$$

Identificând pe coloane, se obține:

$$\begin{cases} \dfrac{dY_1}{dx} = A(x) \cdot Y_1 \\ \dfrac{dY_2}{dx} = A(x) \cdot Y_2 \\ \dots \\ \dfrac{dY_n}{dx} = A(x) \cdot Y_n \end{cases}$$

Th este dem. pt că $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, fiecare, este soluție a sistemului omogen, $\dfrac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y$

Sisteme neomogene. Soluția generală și metoda variației constantelor

Fie sistemul liniar, neomogen, de n ecuații, cu n funcții necunoscute, scris sub formă matriceală: și sistemul omogen asociat:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x), \\ \frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y \end{cases}$$

Teoremă. Soluția sistemului neomogen este suma dintre soluția generală a sistemului omogen asociat și a soluției particulare a sistemului neomogen: $Y = Y_0 + Y_p$

Dem. Fie $Y_p(x)$ o soluție particulară a sistemului neomogen $\Rightarrow \frac{dY_p}{dx} = A(x)\cdot Y_p + F(x)$, $(\forall)\, x \in I$.

Facem schimbarea de funcție (vectorială) necunoscută $Y = U + Y_p$; U = noua funcție (vectorială) necunoscută.

Înlocuim în sistemul omogen:

$$\frac{d}{dx}(U + Y_p) = A(x)\cdot(U + Y_p) + F(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dY_p}{dx} = A(x)\cdot U + A(x)\cdot Y_p + F(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dU}{dx} = A(x)\cdot U \Leftrightarrow$$ Funcția vectorială U este soluția generală a sistemului omogen asociat.

Dacă se cunoaște soluția generală a sistemului omogen asociat, atunci o soluție particulară a sistemului neomogen se poate determina prin metoda variației constantelor (Lagrange).

Teoremă. Fie sistemul neomogen: și sistemul omogen asociat.

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x)$$

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y$$

Fie Y_0 soluția generală a sistemului omogen căruia se cunoaște matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen, $W(x) = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ și $Y_0 = W(x)\cdot C$. Soluția particulară a sistemului neomogen este dată de relația:

$$Y_1(x) = W(x)\cdot C(x), \text{ unde } \frac{dC(x)}{dx} = (W(x))^{-1}\cdot F(x)$$

Dem. – Se urmărește exact algoritmul parcurs la ecuațiile liniare (de ordinul 1, respectiv n)

Fie $W(x) = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$, $\det W(x) \neq 0$ pe I (matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen)

$Y_0 = W(x)\cdot C$; $C = [C_1, C_2, \dots, C_n]^t$.

$Y_0 = Y_1\cdot C_1 + \dots + Y_n\cdot C_n = W(x)\cdot C$. nu e un vector cu

Presupunem că vectorul C nu are toate componentele constante, și că acestea sunt funcții oarecare independente ; $Y_0 = W(x)\cdot C(x)$. Punem condiția ca acest Y_0 să verifice sistemul neomogen : $\frac{dY_0}{dx} = \frac{dW(x)}{dx}\cdot C(x) + W(x)\cdot \frac{dC(x)}{dx}$. Înlocuim în sistemul neomogen:

$$\frac{dW(x)}{dx}C(x) + W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx} = A(x)\cdot\underbrace{W(x)\cdot C(x)}_{Y_0} + F(x)$$

$$\left[\frac{dW(x)}{dx} - A(x)\cdot W(x)\right]\cdot C(x) + W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx} = F(x)$$

Cum $W(x)$ este matrice fundamentală de soluții, și deci verifică sistemul omogen $\Rightarrow \frac{dW}{dx} - A\cdot W = O_n$

$\Rightarrow W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx} = F(x)$. Iar $W(x)$ are $\det(W(x)) \neq 0$ $\Rightarrow W(x)$ este inversabilă. Înmulțim la stg cu $(W(x))^{-1}$ $\Rightarrow \underbrace{(W(x))^{-1}\cdot W(x)}_{I_n}\cdot\frac{dC(x)}{dx} = W^{-1}(x)\cdot F(x)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dC(x)}{dx} = W^{-1}(x)\cdot F(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \int (W^{-1}(x) \cdot F(x))\, dx + K \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_\emptyset(x) = W(x) \cdot C(x) = \underbrace{W(x) \cdot \int W^{-1}(x) \cdot F(x)\, dx}_{Y_p(x)} + \underbrace{W(x) \cdot K}_{Y_\emptyset(x)}.$$

Exemplu. Fie sistemul de 2 ecuații cu 2 necunoscute, liniar și neomogen, anterior:

$$\begin{cases} y_1' = -\dfrac{e^x}{1 - x e^x} \cdot y_1 + \dfrac{1}{1 - x e^x} \cdot y_2 + 1 \\ y_2' = \dfrac{e^x}{1 - x e^x} \cdot y_1 - \dfrac{x e^x}{1 - x e^x} \cdot y_2 + e^x \end{cases} ; F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}$$

$W(x) = [Y_1, Y_2] = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix}$ → matricea fundamentală de soluții. $\det W(x) = 1 - x e^x \neq 0$ pe $\mathbb{R}$. $\Rightarrow (\exists) W^{-1}(x)$

$$(W(x))^t = \begin{pmatrix} 1 & e^x \\ x & 1 \end{pmatrix} ; \quad W^*(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -e^x & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{\det W(x)} \cdot W^*(x) = \frac{1}{1 - x e^x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -e^x & 1 \end{pmatrix}.$$

$$W^{-1}(x) \cdot F(x) = \frac{1}{1 - x e^x} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -e^x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - x e^x} \begin{pmatrix} 1 - x e^x \\ -e^x + e^x \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{W^{-1}(x) \cdot F(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \int W^{-1}(x) \cdot F(x)\, dx = \int \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot dx = \begin{pmatrix} \int 1 \cdot dx \\ \int 0 \cdot dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(x) = W(x) \left[\int W^{-1}(x) \cdot F(x)\, dx + K \right] = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + K_1 + x K_2 \\ e^x (x + K_1) + K_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} K_1 + x K_2 \\ K_1 e^x + K_2 \end{pmatrix}}_{Y_\emptyset} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x e^x \end{pmatrix}}_{Y_p} = Y_\emptyset + Y_p$$

$$Y_\emptyset = W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + x c_2 \\ c_1 e^x + c_2 \end{pmatrix} ; \quad Y_p = \begin{pmatrix} x \\ x e^x \end{pmatrix}$$

Pentru sistemul dat să se determine și soluția problemei Cauchy cu condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y_1(0)=0 \\ y_2(0)=1 \end{cases} ; \begin{cases} y_1(x)=C_1+xC_2+x \\ y_2(x)=C_1e^x+C_2+xe^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(0)=C_1=0 \\ y_2(0)=C_1+C_2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x)=x+x=2x \\ y_2(x)=1+xe^x \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} y_1(x)=2x \\ y_2(x)=1+xe^x \end{cases}}$$

<u>Construcția unui sistem de ecuații diferențiale, liniar și omogen, de ordinul 1, de sistem fundamental de soluții dat</u> (de n ec. cu n nec.)

Știm că mulțimea soluțiilor unui astfel de sistem este un spațiu vectorial n-dimensional și o bază a sa este formată din n soluții liniar independente. ⇒ n+1 soluții <u>vor fi liniar dependente</u>.

Presupunem că se dă o bază a spațiului soluțiilor ⇔ o matrice fundamentală de soluții:

$$W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{pmatrix} \text{ și } \det W \neq 0.$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \dots & Y_n \\ Y_1 & Y_2 & & \end{array}$$

Fie $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ o a-n+1 soluție a sistemului! ⇒

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{dy_k}{dx} & \frac{dy_{k1}}{dx} & \frac{dy_{k2}}{dx} & \dots & \frac{dy_{kn}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pentru orice } k=1,2,\dots,n$$

Aceste n relații reprezintă cele n ecuații ale sistemului căutat.

Să se formeze sistemul omogen de 2 ecuații, de ordinul 1, care admite următorul sistem fundamental de soluții: $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}$; $Y_2 = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$

- verificăm că Y_1 și Y_2 formează un sistem fundamental de soluții $\det(Y_1, Y_2) \neq 0$

$$\det\begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix} = \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$k=1: \begin{vmatrix} y_1' & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1' = 2y_2$$

$$k=2: \begin{vmatrix} y_2' & -2\cos 2x & -2\sin 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_2' = -2y_1$$

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Sisteme de ecuații diferențiale liniare, omogene, cu coeficienți constanți

Forma generală:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} ; \quad \frac{dY}{dx} = A \cdot Y$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = \overline{1,n}$

Pentru un astfel de sistem se poate determina un sistem fundamental de soluții, respectiv un sistem fundamental de soluții, deci soluția sa generală.

Se caută soluții de forma: $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\A_n\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda x}$
(la fel ca la ecuațiile de ordinul n cu coeficienți constanți); $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ și λ sunt constante.

Cond. ca Y să verifice sistemul omogen:

$$\frac{dY}{dx}=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\ \vdots\\y_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\lambda\\A_2\lambda\\ \vdots\\A_n\lambda\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda x}.$$

$$\begin{pmatrix}A_1\lambda\\A_2\lambda\\ \vdots\\A_n\lambda\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda x}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\A_n\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda x}\quad /:e^{\lambda x}$$

$$\begin{cases}A_1\lambda=a_{11}\cdot A_1+a_{12}\cdot A_2+\dots+a_{1n}\cdot A_n\\A_2\lambda=a_{21}\cdot A_1+a_{22}\cdot A_2+\dots+a_{2n}\cdot A_n\\ \cdots\cdots\cdots\\A_n\lambda=a_{n1}\cdot A_1+a_{n2}\cdot A_2+\dots+a_{nn}\cdot A_n\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\cdot A_1+a_{12}\cdot A_2+\dots+a_{1n}\cdot A_n=0\\a_{21}\cdot A_1+(a_{22}-\lambda)\cdot A_2+\dots+a_{2n}\cdot A_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\\a_{n1}\cdot A_1+a_{n2}\cdot A_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)\cdot A_n=0\end{cases}$$

Am obținut un sistem omogen (algebric) de n ecuații cu necunoscutele $A_1, A_2, \dots, A_n$ și λ. Acesta admite întotdeauna soluția banală: $A_1=A_2=\dots=A_n=0$, corespunzătoare soluției nule pt sist. de ec. diferențiale. Pe noi ne interesează, însă, soluțiile nenule ale sistemului algebric, acestea conducând la soluții nenule pt sist de ec. diferențiale.
C.N.S. ca acest sistem algebric să admită și soluții nenule este ca determinantul matricii coeficienților să fie egal cu zero

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-r \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad \underline{\det(A - r I_n) = 0}$$

$\Rightarrow \Delta(r)$ = polinomul caracteristic al matricei A, a coeficienţilor sistemului; $\Rightarrow (r_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic al matricei A, deci valorile proprii ale matricei A.

$\Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ sunt coordonatele vectorilor proprii corespunzători valorilor proprii ale matricei A.

- Algoritmul de rezolvare.

1° Se calculează polinomul caracteristic al matricei A a coeficienţilor sistemului; $\varphi_A(r) = \det(A - rI_n) = 0$

2° Se determină rădăcinile polinomului caracteristic, deci valorile proprii ale matricei A

3° Pentru fiecare valoare proprie se determină coordonatele vectorului propriu corespunzător:

$$r_1 \to \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} \Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} \cdot e^{r_1 x}; \dots; r_n \to \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} \to Y_n = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix} \cdot e^{r_n x}$$

- Soluţia generală a sistemului de ec. dif. va fi:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1, & Y_2, & \dots, & Y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Caz 1 Acest algoritm corespunde cazului când valorile proprii ale matricei A sunt reale şi distincte: $r_1 \ne r_2 \ne \dots \ne r_n$; $r_i \in \mathbb{R}$.

Cazul 2 o rădăcină, $r = r_i$ este reală şi multiplă, de ordinul p. În acest caz, pt sistemul de ecuaţii dif. se caută soluții de forma:

$$Y_i = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} \cdot e^{r_i x},$$

unde polinoamele $P_k(x)$, $k=\overline{1,n}$ au gradul $p-1$ și coeficienții vectori nedeterminați. Punând condiția ca Y_i să verifice sistemul omogen de ec. diferențiale, se vor face identificările astfel încât în final să rămână numai p constante în exprimarea soluției finale.
Soluția Y_i care corespunde val. proprii de ordinul p, r_i, va arăta astfel:

$$Y_i(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} \cdot A_1 \cdot e^{r_i x} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} \cdot A_2 \cdot x \cdot e^{r_i x} + \dots \begin{pmatrix} \alpha_{1p} \\ \alpha_{2p} \\ \vdots \\ \alpha_{np} \end{pmatrix} \cdot A_p \cdot x^{p-1} \cdot e^{r_i x}$$

Cazul 3 Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ și $r_2 = \alpha - i\beta$ $\Rightarrow$ lor le vor corespunde Y_1 și Y_2 soluții în sist. fundamental și se recomandă ca în loc de Y_1 și Y_2 să se aleagă soluțiile: $\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$; $\bar{Y}_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2i}$, care au toate coordonatele nr. reale.

Cazul 4 Cazul rădăcinilor complex-conjugate multiple se tratează similar ca la ecuațiile cu coef. constanți.

Scanned with CamScanner