LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 9

FORME NORMALE ÎN LPr

- În **LP** există două forme echivalente ale unei propoziţii, **FNC** (Forma Normal Conjunctivă) şi **FND** (Forma Normal Disjunctivă).
- În contextul **LPr** există două forme suplimentare:

1. *Forma Normală Prenex* (**FNP)**
2. *Forma Normală Skolem* **(FNS)**.

FORME NORMALE PRENEXE

- Formula φ este o **formulă prenex**, pe scurt **FNP**, dacă φ este de forma:

$$\varphi : \qquad (Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)\sigma$$

unde fiecare Q_i, $i = 1,\ldots, n$, este unul din cuantificatorii $\forall$, $\exists$ şi σ este o formulă fără cuantificatori.

$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)$ se numeşte **prefixul** lui φ, iar σ se numeşte **matricea** lui φ.

FORME NORMALE PRENEXE

__**Exemplul 1**__**:** Următoarele fraze sunt în **FNP**:

- $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \to Q(x)]$
- $(\forall x)(\exists y)\ [Q(x, y) \vee P(x, y)]$

FORME NORMALE PRENEXE

Pentru a transforma o formulă sau o frază în **FNP**, pe lângă formulele utilizate în **LP**, în **LPr** folosim de asemenea următoarele formule:

(1) $(Qx)P(x) \vee G \leftrightarrow (Qx)\ [P(x) \vee G]$ unde x nu apare liberă în G

(2) $(Qx)P(x) \wedge G \leftrightarrow (Qx)\ [P(x) \wedge G]$ unde x nu apare liberă în G

(3) $\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$

(4) $\neg(\exists x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$

(5) $(\forall x)\mathrm{P}(x) \wedge (\forall x)G(x) \leftrightarrow (\forall x)[P(x) \wedge G(x)]$

(6) $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)G(x) \leftrightarrow (\exists x)[P(x) \vee G(x)]$

unde (Qx) este $(\forall x)$ sau $(\exists x)$.

(7) $(Q_1x)\mathrm{P}(x) \wedge (Q_2x)G(x) \leftrightarrow (Q_1x)(Q_2z)[P(x) \wedge G(z)]$

(8) $(Q_1x)P(x) \vee (Q_2x)G(x) \leftrightarrow (Q_1x)(Q_2\mathrm{z})[P(x) \vee G(z)]$

unde $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$ şi unde variabila z nu apare în $G(x)$ şi nu apare ca variabilă liberă în $P(x)$.

FORME NORMALE PRENEXE

Construcția unui FNP

Pasul 1: Eliminarea simbolurilor $\leftrightarrow$ şi $\rightarrow$ pe baza formulelor:

(1a) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

(1b) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Pasul 2: Transferarea negaţiei în faţa atomilor pe baza formulelor:

(2a) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(2b) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(2c) $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$

(2d) $\neg(\forall x)A \leftrightarrow (\exists x) \neg A$

(2e) $\neg(\exists x)A \leftrightarrow (\forall x) \neg A$

Pasul 3: Transferarea cuantificatorilor la stânga pe baza formulelor:

(3a) $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \leftrightarrow (\forall x)\ [A(x) \wedge B(x)]$

$(\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x) \leftrightarrow (\exists x)\ [A(x) \vee B(x)]$

(3b) $(Qx)A(x) \wedge B \leftrightarrow Q(x)\ [A(x) \wedge B]$

$(Qx)A(x) \vee B \leftrightarrow Q(x)\ [A(x) \vee B]$

unde x nu apare ca variabilă liberă în B în formulele (3b).

(3c) $(Q_1x)A(x) \vee (Q_2x)B(x) \leftrightarrow (Q_1x)(Q_2z)\ [A(x) \vee B(z)]$

$(Q_1x)A(x) \wedge (Q_2x)B(x) \leftrightarrow (Q_1x)(Q_2z)\ [A(x) \wedge B(z)]$

unde x nu apare ca variabilă liberă în B în formulele (3c), z nu apare în B şi nu apare ca o variabilă liberă în A, iar $B(z)$ este rezultatul înlocuirii fiecărei apariţii libere a lui x cu z.

FORME NORMALE PRENEXE

Exemplul 2:

φ: $(\forall x)P(x) \to (\exists x)R(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)R(x)$ (1b)

$\leftrightarrow (\exists\, x)\, \neg P(x) \vee (\exists x)R(x)$ (2d)

$\leftrightarrow (\exists x)[\neg P(x) \vee R(x)]$ (3a)

Exemplul 3:

φ: $(\forall x)(\forall y)[(\exists z)(P(x, z) \wedge P(y, z)) \to (\exists u)R(x, y, u)]$

$\leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[\neg(\exists z)(P(x, z) \wedge P(x, z)) \vee (\exists u)R(x, y, u)]$ (1b)

$\leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(\forall z)(\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z)) \vee (\exists u)R(x, y, u)]$ (2e,2b)

$\leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)[\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee (\exists u)R(x, y, z)]$ (3b)

$\leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)[\neg P(x, z) \vee \neg P(y, z) \vee R(x, y, u)]$ (3b)

FORME NORMALE SKOLEM

Teorema : Loewenheim, Skolem:

Pentru orice frază φ al ***LPr,*** *putem forma o frază universală φ * astfel încât:*

φ este realizabilă $\Leftrightarrow$ φ * este realizabilă.

FORME NORMALE SKOLEM

CONSTRUCȚIA UNUI FNS

Fie φ o frază a **LPr**.

Pasul 1:

Determinăm **FNP** a lui φ.

Pasul 2:

Eliminăm treptat fiecare cuantificator existenţial ($\exists y$), înlocuind fiecare apariţie a lui *y* printr-un simbol funcţional nou, neutilizat, *f*, cu argumente toate variabilele legate prin cuantificatori universali ce preced ($\exists y$). *f* se numeşte **funcţie Skolem** a formulei φ, pe scurt **FNS.**

FORME NORMALE SKOLEM

<u>Exemplul 4</u>: Fie fraza:

φ: $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)P(x, y, z, u)$

care este în **FNP.**

(1). Eliminăm $(\exists y)$ şi înlocuim y cu funcţia Skolem $f(x)$. Obţinem astfel fraza:

φ_1: $(\forall x)(\forall z)(\exists u)P(x, f(x), z, u)$

(2). Eliminăm $(\exists u)$ din φ_1 şi înlocuim u cu funcţia Skolem $g(x, z)$, deoarece $(\forall x)$, $(\forall z)$ precede $(\exists u)$. Obţinem astfel:

φ^*: $(\forall x)(\forall z)P(x, f(x), z, g(x, z))$

FORME NORMALE SKOLEM

Exemplul 5: **FNS** a formulei

φ: $(\exists y)(\forall x)(\forall z)\psi(x, y, z)$

este

φ^*: $(\forall x)(\forall z)\psi(x, c, z)$

unde c este o constantă deoarece funcţia Skolem f corespunzătoare nu are nici o variabilă ($(\exists y)$ este primul cuantificator al lui φ, deci y nu este determinată de nici o variabilă şi f este funcţia constantă c).

FORME NORMALE SKOLEM

Fie φ o frază în **LPr** în **FNS**:

$\varphi: \ (\forall x_1) \ldots (\forall x_l) A(x_1, \ldots, x_l)$ (*)

unde $A(x_1, \ldots, x_l)$ este conjuncţia:

$C_1(x_1, \ldots, x_l) \wedge \ldots \wedge C_k(x_1, \ldots, x_l)$

şi fiecare C_i, $1 \leq i \leq k$, este o disjuncţie de atomi sau de atomi negaţi în **LPr**.

Atunci φ este reprezentată conform teoriei mulţimilor ca mulţimea:

sau $S = \{C_1, \ldots, C_k\}$

Fiecare C_i este o clauză, S fiind mulţimea de clauze.

FORME NORMALE SKOLEM

Exemplul 6: Fraza:

$$(\forall x)(\forall z)[P_1(x, z) \wedge (P_2(x) \vee P_3(z)) \wedge P_4(z, x)]$$

se reprezintă ca mulţime de clauze prin:

$$S = \{\{P_1(x, z)\}, \{P_2(x), P_3(z)\}, \{P_4(z, x)\}\}$$

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Tablourile semantice din **LPr** sunt o extensie a tablourilor semantice din **LP,** care include cazuri suplimentare pentru cuantificatori.

Cu ajutorul tabloului semantic:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{a(\forall x)\phi(x)} \\ | \\ \boldsymbol{a\phi(c)} \end{array} \qquad \text{pentru oricare } \boldsymbol{c}$$

reprezentăm faptul că "pentru ca $(\forall x)\ \phi(x)$ să fie adevărată, $\phi(x)$ trebuie să fie adevărată pentru orice constantă c".

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Corespunzător, cu tabloul semantic

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{a}(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \\ | \\ \boldsymbol{a\phi}(\mathbf{c}) \ \text{ pentru c nou} \end{array}$$

reprezentăm faptul că "pentru ca $(\exists x)\phi(x)$să fie adevărată trebuie să existe o constantă *c*, care nu a apărut încă în tablou, astfel încât $\phi(c)$ să fie adevărată".

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

1	2
$a\,(\neg\sigma)$ $\mid$ $f\sigma$	$f\,(\neg\sigma)$ $\mid$ $a\sigma$

3	4	5	6
$a\,(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ / \\ $a\sigma_1$ $a\sigma_2$	$f\,(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ $\mid$ $f\sigma_1$ $\mid$ $f\sigma_2$	$a\,(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ $\mid$ $a\sigma_1$ $\mid$ $a\sigma_2$	$f\,(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ / \\ $f\sigma_1$ $f\sigma_2$
7 $a\,(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ / \\ $f\sigma_1$ $a\sigma_2$	**8** $f\,(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$ $\mid$ $a\sigma_1$ $\mid$ $f\sigma_2$	**9** $a\,(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ / \\ $a\sigma_1$ $f\sigma_1$ $\mid$ $\mid$ $a\sigma_2$ $f\sigma_2$	**10** $f\,(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$ / \\ $a\sigma_1$ $f\sigma_1$ $\mid$ $\mid$ $f\sigma_2$ $a\sigma_2$
11 $a\,(\forall x)\varphi(x)$ $\mid$ $a\varphi(c)$ pentru oricare c	**12** $f\,(\forall x)\varphi(x)$ $\mid$ $f\varphi(c)$ pentru c nou	**13** $a\,(\exists x)\varphi(x)$ $\mid$ $a\varphi(c)$ pentru c nou	**14** $f\,(\exists x)\varphi(x)$ $\mid$ $f\varphi(c)$ pentru oricare c

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Exemplu Să presupunem că dorim să demonstrăm că:

σ : $(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x)$

este logic adevărată, unde φ este o frază în **LPr**.

Începem cu un tablou care are $f\varphi$ ca origine:

	$f((\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\varphi(x))$	nod 1
tablou 8	$a(\forall x)\varphi(x)$	nod 2
	$f(\exists x)\varphi(x)$	nod 3
din nodul 3	$a\varphi(c)$ pentru oricare c	nod 4
din nodul 2	$f\varphi(c)$ pentru oricare c	nod 5
contradicţie între 4, 5	$\otimes$	

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Exemplu

$$f\ [(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \to (\forall x)Q(x))]$$

$$a(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$

$$f((\forall x)P(x) \to (\forall x\ (Q(x))$$

$$a(\forall x)P(x)$$

$$f(\forall x)Q(x)$$

$fQ(c_1)$ pentru un c_1 nou

$aP(c)$ pentru oricare c

$a(P(c) \to Q(c))$ pentru oricare c

$fP(c)$ $\qquad$ $aQ(c)$

$\otimes$ $\qquad$ $\otimes$

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Exemplul Fie fraza $(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$. Această frază nu este logic adevărată deoarece existenţa unui x pentru care $\varphi(x)$ este adevărată nu implică adevărul lui $\varphi(x)$ pentru orice x (de exemplu, existenţa lui $x > 3$ nu implică faptul că pentru orice x este adevărat $x > 3$).
Dar:

$f((\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\varphi(x))$

|

$a(\exists x)\varphi(x)$

|

$f(\forall x)\varphi(x)$

|

$a\varphi(c)$ pentru un c nou

|

$f\varphi(c)$ pentru un c nou

|

$\otimes$

În nodul 5 nu am fi avut dreptul să utilizăm aceeaşi constantă c ca în nodul precedent 4. Am "demonstrat" astfel că $(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$ este o frază logic adevărată, ceea ce, evident, nu este corect.

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Definiţia

(i) Un **TSC** este **contradictoriu** dacă toate ramurile lui sunt contradicţii.

(ii) O frază φ este **demonstrabilă Beth(respinsă Beth)** dacă există un **TSC** contradictoriu cu originea în *f*σ(*a*σ). Faptul că σ este demonstrabilă Beth se notează $\vdash_B \sigma$.

(iii) O frază σ este **demonstrabilă Beth** dintr-o mulţime de fraze *S* dacă există un **TSC** contradictoriu cu originea în *f*σ şi un nod următor *aP*, unde *P* este conjuncţia frazelor din *S*. Acest lucru se notează $S \vdash_B \sigma$.

TABLOURI SEMANTICE IN LPr

Exemplu.

nod 1 $\quad a[(\forall x)A(x, x) \wedge (\exists y)(\neg(A(y, y)) \vee B(y, y))]$

nod 2 $\quad a[(\forall x)A(x, x)]$

nod 3 $\quad a[(\exists y)(\neg A(y, y) \vee B(y, y)]$

pentru c_0 nou

nod 4 $\quad a[\neg A(c_0, c_0) \vee B(c_0, c_0)]$

de la 2 pentru orice c

$a[\neg A(c_0, c_0)]$	$a[B(c_0, c_0)]$
$f[A(c_0, c_0)]$	$a[A(c, c)]$
$a[A(c_0, c_0)]$	$aA(c_0, c_0)]$
$\otimes$	$aA(c_1, c_1)$
	...

din 2

În acest exemplu, ramura din stânga este contradictorie în timp ce ramura din dreapta continuă la infinit.

SEMINAR 9

Ex1: Să se transforme în FNP următoarele formule:

a) $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

b) $(\forall x)(\forall y)[[(\exists z)P(x,y) \wedge P(x,z)] \rightarrow (\exists u)Q(x,y,u)]$

c) $(\forall x)(\forall y)[(\exists z)P(x,y,z) \wedge [(\exists u)Q(x,u) \rightarrow (\exists u)Q(y,u)]]$

SEMINAR 9

Ex2: Să se determine *forma mulțime-teoretică* a următoarelor fraze:

a) $\sigma: (\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z)[(P(x,y) \lor \neg Q(x) \lor R(z))$
$\land(\neg P(x,y) \lor \neg Q(x)\ )\ \land(\neg P(x,y) \lor R(z))]$

b) $\sigma': \neg[(\forall x)(\exists y)\ [P(x,y) \rightarrow Q(y)]$

c) $\varphi: \neg[(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists y)(\forall z)Q(y,z)]$