-1-

Derivate parțiale și diferențiale 26.11.2021

Fie $f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y)$

Derivatele parțiale de ordinul întâi:

$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

$f'_x \begin{cases} f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{cases}$; $f'_y \begin{cases} f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$

Derivatele parțiale mixte, de ordinul 2 sunt și egale dacă sunt continue (criteriul lui Schwarz)

Diferențiala de ordinul unu:

$f(x)$, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $df(x) = f'(x) \cdot dx$; $f'(x) = \frac{df}{dx}$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$$

$f(x,y): E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiala de ordinul 1 pentru funcția:

$f(x,y) = \ln(x^2 + y^3 + xy^2)$; $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + y^2}{x^2 + y^3 + xy^2} ; \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2 + 2xy}{x^2 + y^3 + xy^2}$$

$$df(x,y) = \frac{2x + y^2}{x^2 + y^3 + xy^2} \cdot dx + \frac{3y^2 + 2xy}{x^2 + y^3 + xy^2} \cdot dy.$$

Diferențiale de ordin superior

Definiție: Fie $f: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție care are într-o vecinătate a unui punct interior $(a,b) \in E$ toate derivatele parțiale de ordin superior până la n $(n \geq 2)$ și toate acestea sunt și continue în punctul (a,b). Vom spune că f este de n ori diferențiabilă în (a,b)

Definiția se poate extinde la toată mulțimea E

diferențiala de ordinul 2 ($m=2$) a lui f pe E este dată de expresia:

$$d^2f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot(dy)^2$$

$$d^2f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^{(2)}(f(x,y))$$

expresia $\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^{(2)}$ se numește operator de diferențiere de ordinul 2.

Analog se definește operatorul de diferențiere de ordinul m, prin expresia:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^{(m)} = \Big(C_m^0\cdot\frac{\partial^m}{\partial x^m}\cdot(dx)^m + C_m^1\frac{\partial^m}{\partial x^{m-1}\partial y}\cdot$$

$$\cdot(dx)^{m-1}\cdot dy + \dots C_m^k\frac{\partial^m}{\partial x^k\partial y^{m-k}}(dx)^k\cdot dy^{(m-k)} + \dots$$

$$\dots + C_m^m\frac{\partial^m}{\partial y^m}\cdot(dy)^m\Big)$$

Exemplu Fie funcția

$f(x,y) = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$; $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiala de ordinul 2 ale funcției f pe $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 81\cdot x^2 - 108xy + 36y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = -54x^2 + 72xy - 24y^2$$

$$\left.\begin{aligned} f''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = -108x + 72y \\ f''_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = -108x + 72y \end{aligned}\right\} = "$$

$$f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = 72x - 48y.$$

$$f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 162x - 108y;\quad f''_{y^2} = \cancel{72}x - 48y$$

$d^2 f(x,y) = f''_{x^2}\cdot(dx)^2 + 2 f''_{xy}\cdot dx\,dy + f''_{y^2}\cdot(dy)^2 =$

$= (162x - 108y)\cdot(dx)^2 + 2(-108x + 72xy)\cdot dx\,dy +$

$+ (72x - 48y)(dy)^2$ = formă pătratică de ordinul doi, în dx și dy.

Diferențiala totală exactă a unei funcții de două variabile

Dacă $u(x,y)$ este o funcție de două variabile și $du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy$ este diferențiala sa de ordinul 1, prin egalarea cu 0 a acestei expresii se obține:

$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy = 0$, numită ecuație diferențială care provine din anularea unei diferențiale de ordinul 1 a funcției $u(x,y)$.

Întrebare: dându-se această egalitate se poate găsi funcția $u(x,y)$.

Pentru o singură variabilă echivalentul ar fi: dacă $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, se poate determina funcția f? Răspuns: DA și

$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = \operatorname{arctg} x + C$

Expresia $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ s.n. ecuație diferențială de ordinul 1. (calculul primitivelor în clasa a $\underline{XII}$-a)

Pentru a putea rezolva ecuația:

$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$

ar trebui să știm că expresia din membrul stâng este, într-adevăr, diferențiala exactă a unei funcții de 2 variabile

Condiţia necesară şi suficientă ca o expresie de forma $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy = 0$ să fie diferenţiala exactă a unei funcţii de două variabile: $du = P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy$, e ca

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

dacă are loc această relaţie, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ şi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

Cum $\frac{\partial^2 u}{\partial x y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Dacă este îndeplinită această condiţie $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\Rightarrow$ expresia $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy$ este diferenţiala totală a unei $u(x,y)$, iar funcţia $u(x,y)$ se determină din relaţia:

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\cdot dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\cdot dt$$

, $(\forall)(x_0,y_0) \in E$.

<u>Exemplu</u> Să se arate că expresia: $(x^2+2xy-y^2)\cdot dx + (x^2-2xy-y^2)\cdot dy$ este a diferenţiala totală a unei funcţii $u(x,y)$, a cărei expresie se cere.

$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy$; $(\exists)\, u(x,y)$ a.î.

$du(x,y) = (x^2+2xy-y^2)\cdot dx + (x^2-2xy-y^2)\cdot dy$?

dacă $\exists$, $u(x,y) = ?$

$P(x,y) = x^2+2xy-y^2$; $Q(x,y) = x^2-2xy-y^2$.

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (?)

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x-2y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x-2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)$ funcția u a cărei diferențială este expresia dată și se calculează cu relația:

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\cdot dt$$

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} (t^2+2t\cdot y_0-y_0^2)\cdot dt +$$

$$+\int_{y_0}^{y} (x^2-2xt-t^2)\cdot dt \Rightarrow$$

$$u(x,y)-u(x_0,y_0) = \frac{t^3}{3}\Big|_{x_0}^{x} + 2y_0\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{x_0}^{x} - y_0^2\cdot t\Big|_{\cancel{y_0}}^{\cancel{x}} +$$

$$+ x^2\cdot t\Big|_{y_0}^{y} - 2x\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{y_0}^{y} - \frac{t^3}{3}\Big|_{y_0}^{y} = \frac{1}{3}(x^3-x_0^3) +$$

$$+y_0(x^2-x_0^2) - y_0^2(x-x_0) - x(y^2-y_0^2) - \frac{1}{3}(y^3-y_0^3) +$$

$$+x^2(y-y_0) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - \frac{y^3}{3} + x^2y + (\cancel{x^2y_0} - \cancel{xy_0^2}$$

$$+\cancel{xy_0^2} - \cancel{x^2y_0}) + (-\frac{x_0^3}{3} - x_0^2y_0 + x_0y_0^2 + \frac{y_0^3}{3})$$

$$\Rightarrow u(x,y) - u(x_0,y_0) = \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + x^2y - \frac{y^3}{3}\right) - \left(\frac{x_0^3}{3} - x_0y_0^2 + x_0^2y_0 - \frac{y_0^3}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x^2y - \frac{y^3}{3}} \quad \boxed{u(x,y) = c} \text{ ; sol ec. dif.}$$

verificare $\frac{\partial u}{\partial x} = x^2+2xy-y^2$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2-2xy-y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2-y^2+2xy = P(x,y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy+x^2-y^2$

Cazul a trei variabile

O expresie diferențială de forma:
$P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz$ este diferențiala totală exactă a unei funcții de trei variabile, $u(x,y,z)$, dacă au loc relațiile:
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

permutări circulare cu funcțiile P, Q, R, și cu variabilele x, y, z:
$$P \to Q \to R \; ; \quad x \to y \to z$$

Aplicații

1° Să se calculeze diferențialele de ordinul doi pentru funcțiile următoare:

a) $u(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 5y + 7$

b) $u(x,y,z) = e^{xyz}$

c) $u(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

d) $u(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$

$$d^2(u(x,y,z)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz\right)^{(2)} u(x,y,z) =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot(dy)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(dz)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot dx\, dy +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\, dx\, dz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\, dy\, dz .$$

2° Să se arate că următoarele diferențiale sunt diferențiale totale exacte:

a) $\dfrac{y\cdot dx - x\cdot dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy \; ; \; \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

b) $(x^2 - 2yz)\cdot dx + (y^2 - 2xz)\cdot dy + (z^2 - 2xy)\cdot dz$

c) $\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)\cdot dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(-\frac{xy}{z^2}\right)\cdot dz$

$$u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\cdot dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\cdot dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt$$

Formula lui Taylor pentru funcții de două variabile

Pentru funcții de o singură variabilă am avut formula: $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)) \; ; \; \theta \in (0,1)$$

Fie $f: E \to \mathbb{R}$ cu derivate parțiale continue până la ordinul $n+1$, inclusiv pe E și (a,b) un punct interior lui E; $E \subset \mathbb{R}^2$.

Se demonstrează că pentru f are loc următoarea dezvoltare:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2 \cdot (x-a)(y-b) \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} + (y-b)^2 \cdot \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\right]$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n)} (f(a,b)) + R_n(x,y)$$

unde $R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(n+1)} f(a + \theta_1(x-a), b + \theta_2(y-b))$

Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Pentru funcții de o singură variabilă:

$f: I \to \mathbb{R}$, de cel puțin de 2 ori derivabilă și $a \in I$.

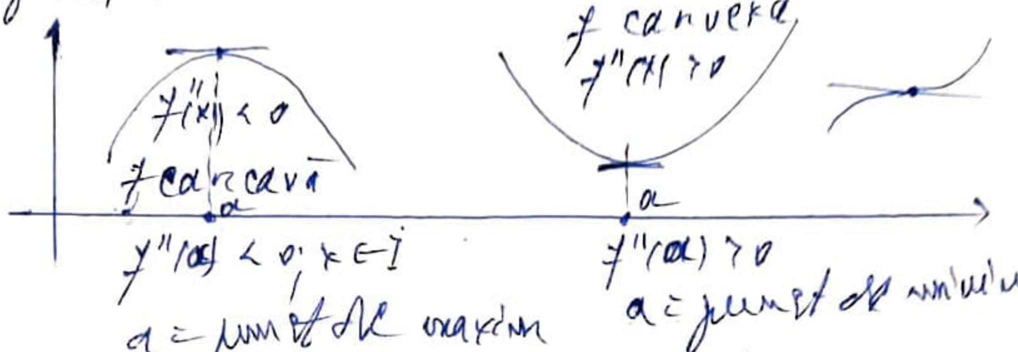
Punctele de extrem local ale lui f se află printre punctele critice ale lui f.

Punctele critice erau rădăcinile ale derivatei $f'(x) = 0 \Rightarrow$

- se calcula $f'(x)$ și se rezolva ec. $f'(x) = 0$
$\Rightarrow$ se află toate punctele critice
- pentru a selecta punctele de extrem local dintre punctele critice se calcula derivata a -II- a a lui f și semnul

aceasta în fiecare punct critic

- dacă $f''(a) < 0 \Rightarrow x_0 = a$ = punct de maxim local.
- dacă $f''(a) > 0 \Rightarrow x_0 = a$ = punct de minim local

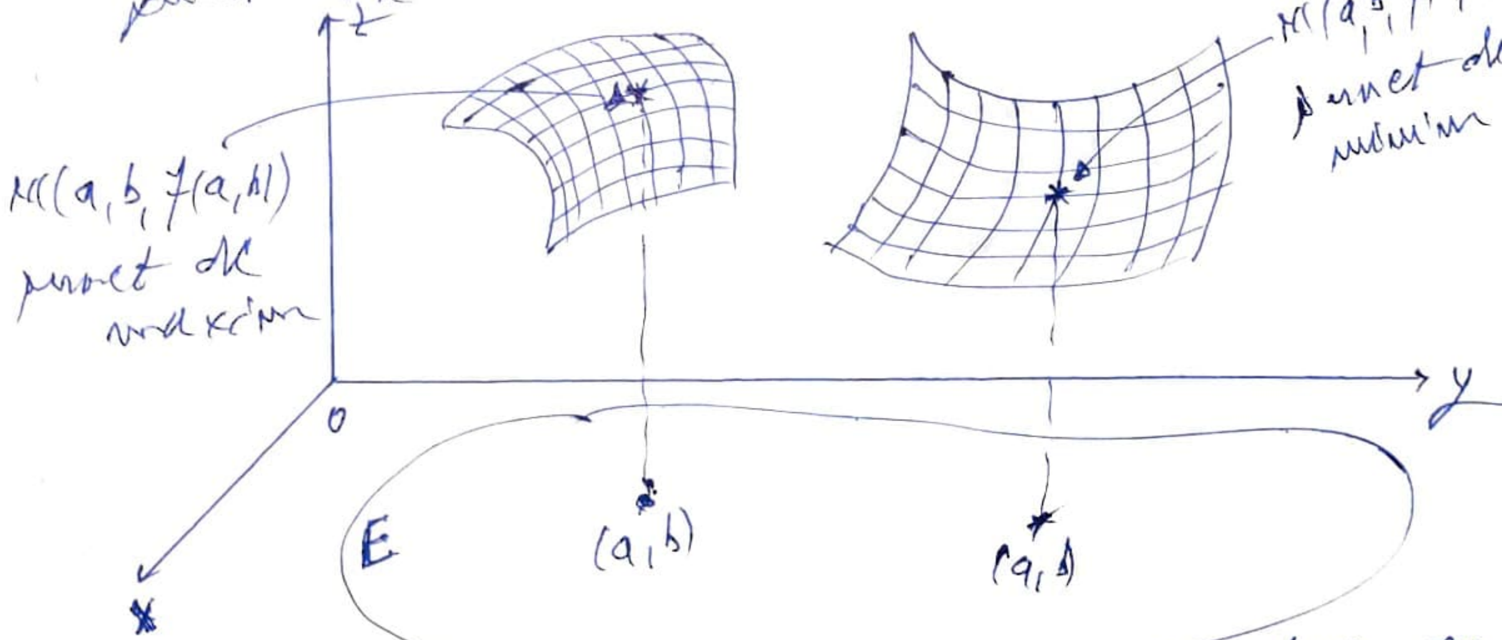


Cazul funcțiilor de două variabile

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de 2 variabile

Definiție Un punct $(a,b) \in E$ se numește punct de maxim (minim) local al funcției $f(x,y)$ dacă există o vecinătate V a lui (a,b) a.î. pentru orice $(x,y) \in V \cap E$ să avem $f(x,y) \le f(a,b)$ (respectiv $f(x,y) \ge f(a,b)$).

Punctele (a,b) din definiție se numesc puncte de extrem local ale lui f.



Propoziția 1 Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale într-un punct de extrem local $(a,b) \in \text{Int}(E)$ al domeniului E al lui f atunci derivatele parțiale se anulează în acest punct; $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

Propoziția este o generalizare a teoremei lui Fermat (XI-a)

Definiție. Un punct interior $(a,b) \in \text{Int}E$ se numește punct staționar al funcției f dacă f este diferențiabilă în (a,b) și diferențiala sa este nulă în acest punct: $df(a,b)=0$

$$df(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot dy$$

$$df(a,b)=0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0.$$

Deci $(a,b)\in \text{Int}E$ este punct staționar al lui f dacă f este diferențiabilă în (a,b) și $df(a,b)=0$.

Propoziția nr 2

Orice punct de extrem local $(a,b)\in \text{Int}E$ în care f este diferențiabilă este punct staționar al lui f.

Reciproca nu este adevărată: există puncte staționare care nu sunt puncte de extrem local. Punctele staționare ale funcției f care nu sunt puncte de extrem local se numesc puncte șa ale lui f.

Din considerentele anterioare rezultă că dacă f este definită pe o mulțime deschisă $E\subset\mathbb{R}^2$ și f este diferențiabilă pe E, atunci punctele staționare ale lui f sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \implies \text{condițiile necesare de extrem.}$$

Mai rezultă că punctele de extrem local se află printre punctele staționare. Pentru a identifica punctele de extrem local dintre punctele staționare trebuie să analizăm „condițiile suficiente" de extrem. Acestea se obțin cu ajutorul derivatelor parțiale de ord. II

- Este necesar ca f să aibă derivate parțiale de ordinul doi cel puțin pe o vecinătate a punctului staționar (a,b)
- Se calculează toate derivatele parțiale de ordinul doi ale lui f în (a,b) și se consideră matricea:

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

se numește matricea jacobiană a lui f în (a,b).

Se demonstrează următoarele rezultate:

(1°) Dacă $\Delta = \det H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 > 0$ atunci punctul staționar (a,b) este punct de extrem local al lui f, și anume:

a) Dacă $f''_{x^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) > 0$, atunci (a,b) este punct de minim local

b) Dacă $f''_{y^2}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) < 0$, atunci (a,b) este punct de maxim local.

(2°) Dacă $\det H = f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 < 0$, atunci (a,b) nu este punct de extrem local.

Dacă $\det H = 0$, nu putem afirma nimic despre (a,b)

Exemplu Să se determine extremele funcției $f(x,y) = xy(a-x-y)$; $a>0$; $f(x,y) = axy - x^2y - xy^2$

(1°) C.N.E.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ay - 2xy - y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ax - x^2 - 2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(a-2x-y)=0 \\ x(a-x-2y)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=\frac{a}{3} \\ y=\frac{a}{3} \end{cases} \rightarrow \text{2 puncte staționare}$$

② C.S.E. $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y}_{a_{11}}$; $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x}_{a_{22}}$; $\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a-2x-2y}_{a_{12}=a_{21}}$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & a-2x-2y \\ a-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$P_1 : H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\ \Delta_2 = \det H = -a^2 \end{cases}$ $\rightarrow (0,0)$ nu este punct de extrem

$P_2 : H\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2a}{3} & -\frac{a}{3} \\ -\frac{a}{3} & -\frac{2a}{3} \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = -\frac{2a}{3} < 0$

$\Delta_2 = \det H = \frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3} > 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow P_2\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ este punct de maxim local.

Valoarea maximă a lui f în P_2 este

$$f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}\left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^2}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}$$

$$f_{max} = \frac{a^3}{27}$$

suplimentar

Cazul funcțiilor de n variabile

Fie $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathring{E}$

Punctul de maxim (minim) local se definește analog ca în cazul funcțiilor de două variabile.

Analog se definește și punctul staționar și punctul șa.

Pentru determinarea punctelor staționare ale lui f:

C.N.E. – se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \\ b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \\ \dots \end{cases} = \text{punctele staționare.}$$

Pentru a stabili care dintre punctele staționare sunt și puncte de extrem local, analizăm

C.S.E. $\Rightarrow$ <u>Pentru fiecare punct staționar</u> se calculează <u>derivatele parțiale de ordinul doi</u>:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (\forall)\, i, j = \overline{1, n}$$

– Se construiește matricea lui Jacobi (Hessiana) a lui f în fiecare punct staționar:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, (\forall)\, i \neq j \to \text{matrice simetrică}$$

– Se calculează determinanții următori:

$$\Delta_1 = \alpha_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det H$$

Se demonstrează următoarele:

1° Dacă toți $\Delta_i > 0$, $(\forall)\, i = \overline{1, n}$, atunci $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ este punct de minim.

2° Dacă $\Delta_1^* = -\Delta_1 > 0$; $\Delta_2^* = (-1)^2 \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n^* = (-1)^n \Delta_n > 0$ atunci punctul $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ este punct de maxim.

3° Dacă nu sunt îndeplinite toate cazurile de la 1° și 2°, atunci $a = (a_1, \dots, a_n)$ nu este punct de extrem local.

Val. lui f în punctul de extrem este $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Tema Ex 32 → manual, pag 99
Ex 4: a), c), d) – 4 — pag 100

Aplicații

(1°) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul I și diferențiala de ordinul I pentru funcțiile:

a) $u(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$ b) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial u}{\partial x}}$

$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{0+\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \boxed{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})} = \frac{\partial u}{\partial y}}$

$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy$

b) $u(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; $(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$du(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\cdot dx + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot dy.$

(2°) Să se determine punctele de extrem local ale funcției: $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

a) C.N.E.

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 - 15 = 0 \;/ :3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \;/\cdot 6 \\ xy = 6 \;/\cdot 5 \end{cases}$ sistem omogen $x\neq 0, y\neq 0$

$\begin{cases} -6y^2 + 6x^2 = -30 \\ 5xy = 30 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \;/ :y^2 \neq 0$

ec. omogenă de gr. 2

$\Rightarrow 6\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\cdot\frac{x}{y} - 6 = 0$

$\frac{x}{y} = t \Rightarrow 6t^2 + 5t - 6 = 0$ $\quad \Delta = 25 + 4 \cdot 36 = 169 = 13^2$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{12} = \begin{cases} t_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ t_2 = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2} \end{cases}$

(1) $\begin{cases} xy = 6 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

pt $x = 2 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$; $A(2,3)$

pt $x = -2 \Rightarrow -2y = 6$; $y = -3$ $\quad B(-2,-3)$

(2) $\begin{cases} xy = 6 \\ \frac{x}{y} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = -9$ → nu are soluții reale.

- Am găsit două puncte staționare

Condițiile suficiente de extrem: pentru fiecare punct staționar calculăm $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 - 15$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36$ $\qquad H = \begin{pmatrix} -6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6y$

$A(2,3) \Rightarrow H(2,3) = \begin{pmatrix} -12 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = -12$

$\Delta_2 = \det H = -144 - 324 = -468 < 0$

→ $\Delta_1 < 0$; $\Delta_2 < 0$ → A nu este punct de extrem

$B(-2,-3)$; $H(-2,-3) = \begin{pmatrix} +12 & -18 \\ -18 & -12 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 = +12 > 0$

$\Delta_2 = -144 - 324 = -468 < 0$

B → nu este punct de extrem.

$d^2 f(A) = \frac{1}{\Delta_1} \cdot \eta_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \eta_2^2 > 0$ → punct de minim

dacă $d^2 f(A) = \frac{1}{\Delta_1^*} \cdot \eta_1^2 + \frac{\Delta_1^*}{\Delta_2^*} \eta_2^2 < 0$ → punct de maxim

(2) Să se determine extremele funcției:

$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

C.N.E: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0 \,|:3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x = 0 \,|:2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4y = 0 \\ 6x + y = 0 \Rightarrow y = -6x \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + 4\cdot(-6x) = 0 \ ; \ x^2 - 24x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ x_2 = 24 \Rightarrow y_2 = -144 \end{cases}$

$x(x-24) = 0$

$A(0, 0, -1) \ ; \ B(24, -144, -1)$ = două puncte staționare.

- C.S.E.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \ ; \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ ; \ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$

- $A(0, 0, -1) \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = -144$

$\Delta_3 = \det H = -288$

$\Delta_1 = 0 \Rightarrow A$ nu este punct de extrem.

$B(24, -144, -1) \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \Delta_1 = 144 > 0 \\ \Delta_2 = 288 - 144 = 144 \\ \Delta_3 = 2 \cdot 144 = 288 \end{cases} \Rightarrow \Delta_i > 0, (\forall) i = \overline{1,3}$

$\Rightarrow B(24, -144, -1)$ este punct de minim local

$f_{min} = f(24, -144, -1) \ldots$