LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

U1 - TESTE DE AUTOEVALUARE ȘI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Fie $G(n)$ numărul relațiilor de ordine parțială ce se pot defini pe o mulțime cu n elemente. Arătați că $G(3) = 19$.

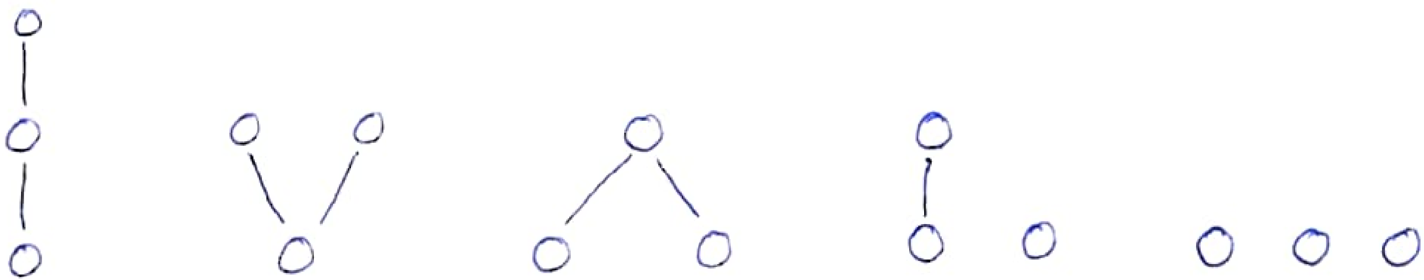
Rezolvare

R este o relație de ordine parțială pe M dacă:

(i) $(\forall)\, x \in M,\ xRx$

(ii) $(\forall)\, x, y, z \in M,\ xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

Diagramele Hasse pt. mulțimi cu 3 elemente:



$3! = 6$ $\qquad 3 \qquad 3 \qquad 3 \cdot 2 = 6 \qquad 1$

$G(3) = 6 + 3 + 3 + 6 + 1$

$G(3) = 19$

2. $x \le y \iff x \circ y = x$

$y \le z \iff y \circ z = y$

$x \overset{?}{\le} z \iff x \circ z = x$.

$x \circ z = (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y = x$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{y}$

Antisim. $x \le y$ și $y \le x \overset{?}{\Rightarrow} x = y$.

$x \le y \Rightarrow x \circ y = x$

$y \le x \Rightarrow y \circ x = y$

$\Rightarrow x = y$.

$\Rightarrow (A, \le)$ rel de ordine.

Dem $x \wedge y = x \circ y$.

Dem că $x \circ y \le x$

$x \circ y \le y$

și că $\forall z \in A$ minorant $\Rightarrow z \le x \circ y$.

Activate Windows

$x \circ y \le x \iff (x \circ y) \circ x = x \circ y$.

$(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x) = x \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ y = x \circ y$.

Analog $x \circ y \le y$

Fie $z \in A$ minorant al lui $\{x, y\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow z \le x \Rightarrow z \circ x = z$

$z \le y \Rightarrow z \circ y = z$

Trebuie $z \le x \circ y \iff z \circ (x \circ y) = z$.

$z \circ (x \circ y) = (z \circ x) \circ y = z \circ y = z$.

Activate Windo
Go to Settings to ac

TESTUL NR. 2

1. Este mulțimea N a numerelor naturale o latice completă față de relația de ordine definită de divizibilitate?

Rezolvare

Relația de divizibilitate este o relație de ordine pe mulțimea numerelor naturale. În această relație, 1 este minimul mulțimii numerelor naturale, iar 0 este maximul.

$(A, \leq)$ se numește latice completă dacă pentru orice familie $(x_i)_{i\in I}$ de elemente ale lui A, există $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ și $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$.

2. Fie A o mulțime dată, finită și P(A) mulțimea părților lui A. Să se găsească toate subalgebrele Boole ale mulțimii P(A), atunci când $A = \{x, y, z\}$

Rezolvare

Dacă card $A = n$, atunci card $P(A) = 2^n$

Dacă $A = \{x, y, z\}$ atunci card $A = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\}$

$M_1 = \{\emptyset, A\}$

$M_2 = \{\emptyset, A, \{x\}, \{y\}, \{z\}\}$

$M_3 = \{\emptyset, A, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$

$M_4 = \{\emptyset, A, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$

deci avem 4 subalgebre.

TEMĂ DE CONTROL

1. Fie G(n) numărul relațiilor de ordine parțială ce se pot defini pe o mulțime cu n elemente. Arătați că $G(4) = 219$.

Rezolvare

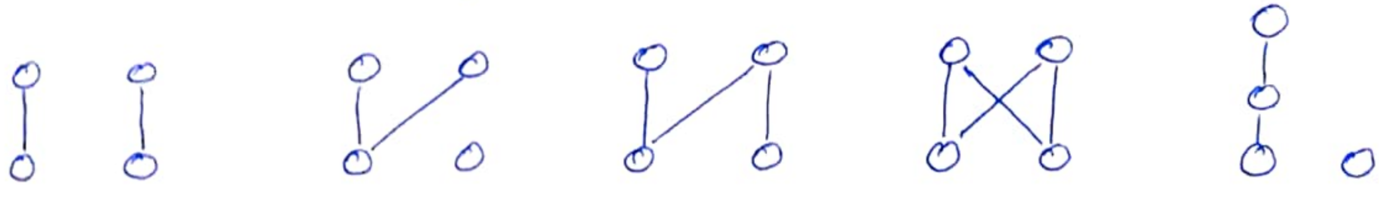
R este o relație de ordine parțială pe M dacă:

(i) $(\forall) x \in M, xRx$

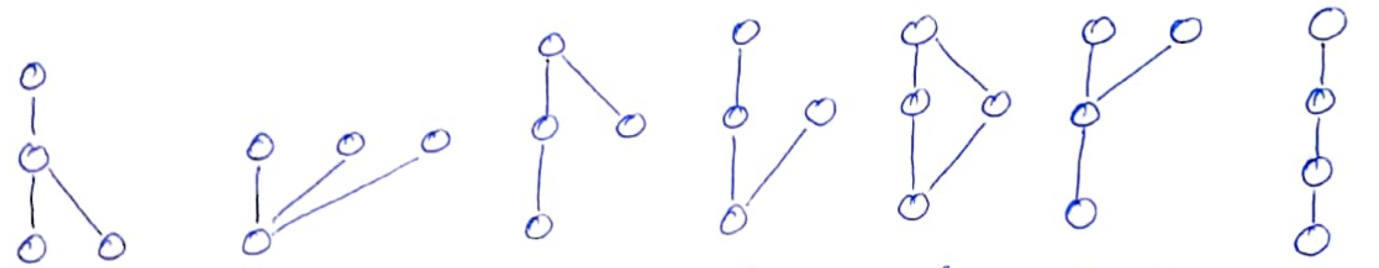
(ii) $(\forall) x, y, z \in M, xRy, yRz \Rightarrow xRz$

Diagramele Hasse pt. mulțimi cu 4 elemente:

1 $\qquad$ $A_4^2=12$ $\qquad$ $4\cdot C_3^2=12$ $\qquad$ 4



$C_4^2\cdot 2=12$ $\qquad$ $4\cdot C_3^2=12$ $\qquad$ $4\cdot C_3^2\cdot 2=24$ $\qquad$ $C_4^2=6$ $\qquad$ $A_4^3=24$



$4\cdot 3=12$ $\qquad$ 4 $\qquad$ $4\cdot C_3^2\cdot 2=24$ $\qquad$ $4\cdot C_3^2\cdot 2=24$ $\qquad$ $4\cdot C_3^2=12$ $\qquad$ $4\cdot 3=12$ $\qquad$ $4!=24$

$A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=12 \qquad A_4^3=\frac{4!}{1!}=6\cdot 4=24 \qquad C_3^2=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$

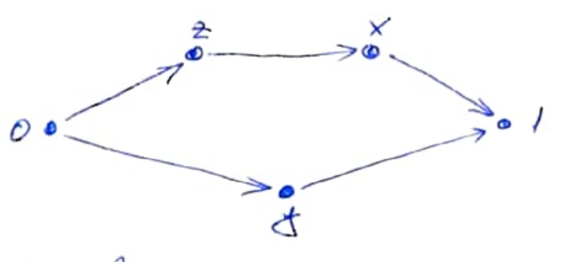
$C_4^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$

$G(4)=1+2\cdot 4+6+7\cdot 12+5\cdot 24$

$G(4)=15+84+120$

$G(4)=219$

2. Să se arate că laticea de mai jos nu este modulară:

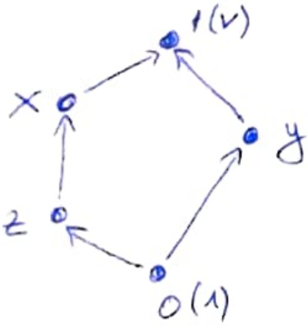


Rezolvare

O latice L este modulară dacă $(\forall)\, x, y, z \in L$ avem $x \le z \Rightarrow$
$\Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$

$\wedge$	0	x	y	z	1
0	0	0	0	0	0
x	0	x	0	z	x
y	0	0	y	0	y
z	0	z	0	z	z
1	0	x	y	z	1

$\vee$	0	x	y	z	1
0	0	x	y	z	1
x	x	x	1	x	1
y	y	1	y	1	1
z	z	x	1	z	1
1	1	1	1	1	1



Pentru cazul $z \leq x$ dacă L este modular avem:

$(\forall)\ z, x, y \in L$

$z \leq x \Rightarrow z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge y$

$\Rightarrow z \vee 0 = x \wedge y$

$\Rightarrow z = 0$ $\#\!\!\Rightarrow L$ nu este modulară

afirmatia este pentru $(\forall)\ z \in L$

3. Arătați că într-un inel comutativ A de caracteristică 2, mulțimea $\{x \mid x^2 = x\}$ formează un inel Boole care este subinel al lui A. (A are caracteristica 2 dacă $x + x = 0$, pentru orice x din A).

indicație: $B \subset A$ este subinel, dacă:

(i) $(\forall)\ x, y \in B$, $x + y \in B$;

(ii) $(\forall)\ x \in B$, $-x \in B$;

(iii) $(\forall)\ x, y \in B$, $xy \in B$;

(iv) $1 \in B$.

Rezolvare

A - inel comutativ de carac. 2 $(\forall\, x \in A,\ x + x = 0)$

$B = \{x \mid x^2 = x\}$ - inel Boole care este subinel al lui A?

$x+x=(x+x)^2 \Rightarrow x+x=x^2+x^2+x^2+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+x=x+x+x+x \Rightarrow x+x=0$

$\Rightarrow x=-x$

$\Rightarrow -x \in B$ (I)

$x+y=(x+y)^2 \Rightarrow x+y=x^2+y^2+xy+yx \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x+y=x+y+xy+yx \Rightarrow xy+yx=0 \\ x=-x\end{array}\right\} \Rightarrow xy-yx=0 \Rightarrow xy=yx$ (V)

$x+y=(x+y)^2 \Rightarrow x+y=x^2+y^2+xy+yx \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y=x^2+y^2 \Rightarrow x+y \in B$ (II)

$xy=(xy)^2=x^2y^2 \Rightarrow xy \in B$ (III)

$\left.\begin{array}{l}x=-x \Rightarrow x=(-1)x \\ x=-1\end{array}\right\} \Rightarrow -1=(-1)^2$

$\left.\begin{array}{l}x=1\cdot x \\ x=1\end{array}\right\} \Rightarrow 1=1^2 \Rightarrow 1 \in B$ (IV)

I + II + III + IV $\Rightarrow$ B subinel al lui A

V $\Rightarrow$ B inel Boole

4. Fie A o mulțime dată, finită și P(A) mulțimea părților lui A. Să se găsească toate subalgebrele Boole ale mulțimii P(A), atunci când $A=\{a, b, c, d, e\}$

Rezolvare

$A=\{a, b, c, d, e\}$

P(A) = mulțimea părților lui A

toate subalgebrele Boole ale mulțimii P(A)

P(A) - algebră Boole : $M_1 \vee M_2 = M_1 \cup M_2$

$M_1 \wedge M_2 = M_1 \cap M_2$

$\neg M = C_A(M) = A - M = \{x \mid x \in A \wedge x \notin M\}$

M' subalgebră a lui P(A) dacă:

$(\forall)\ x, y \in M' \Rightarrow x \wedge y \in M'$ și $x \vee y \in M'$

$x \in M' \Rightarrow \neg x \in M'$

$\text{Card } A = 5 \quad \text{Card } P(A) = 2^5 = 32$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\},$

$\{a, b\}, \ldots, \{d, e\},$

$\{a, b, c\}, \ldots, \{c, d, e\},$

$\{a, b, c, d\}, \ldots, \{b, c, d, e\}, A\}$

$M_0 = \{\emptyset, A\}$

$M_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, A\} = M_0 \cup \{a\} \cup C_A(\{a\})$

$M_2 = M_0 \cup \{b\} \cup C_A(\{b\})$

$M_3 = M_0 \cup \{c\} \cup C_A(\{c\})$

$M_4 = M_0 \cup \{d\} \cup C_A(\{d\})$

$M_5 = M_0 \cup \{e\} \cup C_A(\{e\})$

$M_6 = M_0 \cup \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{c, d, e\}\} =$

$= M_1 \cup M_2 \cup \{a, b\} \cup C_A(\{a, b\})$

$M_7 = M_1 \cup M_3 \cup \{a, c\} \cup C_A(\{a, c\})$

la fel ad - M_8 bd - M_{11} ce - M_{14}
ae - M_9 be - M_{12} de - M_{15}
bc - M_{10} cd - M_{13}

$M_{16} = M_0 \cup \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\},$
$\{b, c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, d, e\},$
$\{d, e\}\} = M_6 \cup M_7 \cup M_{10} \cup \{a, b, c\} \cup C_A(\{a, b, c\})$

$M_{17} = M_6 \cup M_8 \cup M_{11} \cup \{a, b, d\} \cup C_A(\{a, b, d\})$

la fel abe - M_{18} ade - M_{21} bde - M_{24}
acd - M_{19} bcd - M_{22} cde - M_{25}
ace - M_{20} bce - M_{23}

$M_{26} = M_0 \cup \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\},$
$\{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\},$
$\{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, e\}, \{c, d, e\}, \{b, d, e\}, \{b, c, e\},$

$\{a,d,e\}, \{a,c,e\}, \{a,b,e\}, \{d,e\}, \{c,e\}, \{b,e\}, \{a,e\}, \{e\}\} = P(A)$

$M_{27} = M_0 \cup \{\{a,b\}, \{c,d,e\}\} = M_0 \cup \{a,b\} \cup C_A(\{a,b\})$

la fel
ac - M_{28} bc - M_{31} cd - M_{34}
ad - M_{29} bd - M_{32} ce - M_{35}
ae - M_{30} be - M_{33} de - M_{36}

$36 + 1 =$ 37 subalgebre

5. După modelul exercițiului 8 de la probleme rezolvate, să se trateze cazul $n=4$ și $n=5$, pentru algebre Lukasiewicz.

Rezolvare

$n=4$ și $n=5$ pentru algebre Lukasiewicz

$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$

$\sigma_i\left(\frac{j}{n-1}\right) = \begin{cases} 0, & i+j < n \\ 1, & i+j \geq n \end{cases}$

$x \vee y = \max(x,y)$
$x \wedge y = \min(x,y)$
$\neg x = 1 - x$

$n=4$

$\wedge$	0	1/3	2/3	1
0	0	0	0	0
1/3	0	1/3	1/3	1/3
2/3	0	1/3	2/3	2/3
1	0	1/3	2/3	1

$\vee$	0	1/3	2/3	1
0	0	1/3	2/3	1
1/3	1/3	1/3	2/3	1
2/3	2/3	2/3	2/3	1
1	1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1/3	2/3
2/3	1/3
1	0

	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$	$\sigma_3(x)$
0	0	0	0
1/3	0	0	1
2/3	0	1	1
1	1	1	1

$n=5$

$\wedge$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	0	0	0	0
1/4	0	1/4	1/4	1/4	1/4
2/4	0	1/4	2/4	2/4	2/4
3/4	0	1/4	2/4	3/4	3/4
1	0	1/4	2/4	3/4	1

$\vee$	0	1/4	2/4	3/4	1
0	0	1/4	2/4	3/4	1
1/4	1/4	1/4	2/4	3/4	1
2/4	2/4	2/4	2/4	3/4	1
3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	1
1	1	1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1/4	3/4
2/4	2/4
3/4	1/4
1	1

	$\sigma_1(x)$	$\sigma_2(x)$	$\sigma_3(x)$	$\sigma_4(x)$
0	0	0	0	0
1/4	0	0	0	1
2/4	0	0	1	1
3/4	0	1	1	1
1	1	1	1	1

U2 - TESTE DE AUTOEVALUARE ȘI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Demonstrați că următoarea propoziție este o tautologie:
   $P = (A \to B) \vee (A \to \neg B)$;

   Rezolvare *TABELE DE ADEVĂR

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$A \to \neg B$	$(A \to B) \vee (A \to \neg B)$
a	a	a	f	f	a
a	f	f	a	a	a
f	a	a	f	a	a
f	f	a	a	a	a

$\left.\right\}$ toate adevărate $\Rightarrow$ tautologie

*TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este falsă

$f((A \to B) \vee (A \to \neg B)$

$f(A \to B)$

$f(A \to \neg B)$

$a\,A$

$f\,B$

$a\,A$

$f(\neg B)$

$a\,B$

$\otimes$

toate ramurile sunt contradictorii
$\Rightarrow$ presupunerea este falsă
$\Rightarrow a(P)$ în orice situație
$\Rightarrow P$ este tautologie

2. Demonstrați că următoarea propoziție este o contradicție:

$P = (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (A \to \neg A)$;

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

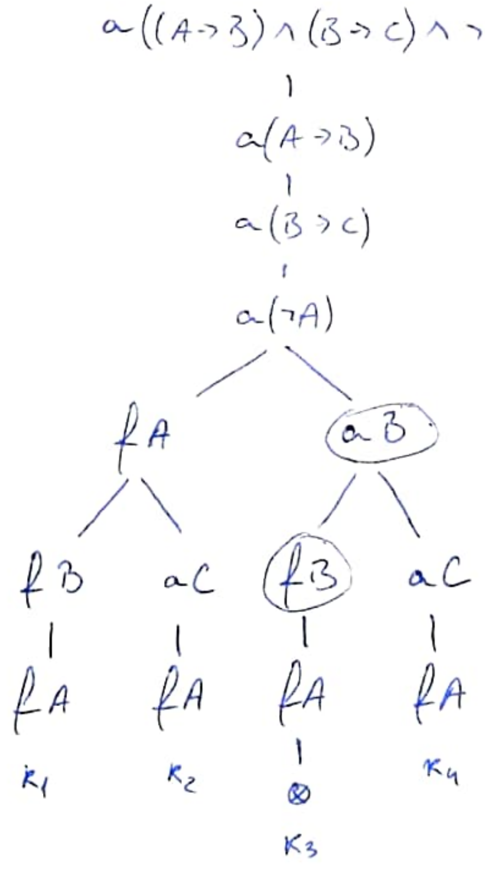
A	B	C	$\neg A$	$A \to B$	$B \to C$	$A \to \neg A$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (A \to \neg A)$
a	a	a	f	a	a	f	a	f
a	a	f	f	a	f	f	f	f
a	f	a	f	f	a	f	f	f
f	a	a	a	a	a	a	a	a
a	f	f	f	f	a	f	f	f
f	a	f	a	a	f	a	f	f
f	f	a	a	a	a	a	a	a
f	f	f	a	a	a	a	a	a

=> Avem cazuri în care P este adevărată => P <u>nu</u> este contradicție

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

$A \to \neg A = \neg A \Rightarrow P = (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge \neg A$



Avem ramuri care nu sunt contradictorii => P poate fi adevărată

=> P <u>nu</u> este contradicție

3. Demonstrați că următoarele propoziții sunt logic echivalente:

$A \vee (B \wedge C)$ și $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

$P = A \vee (B \wedge C)$

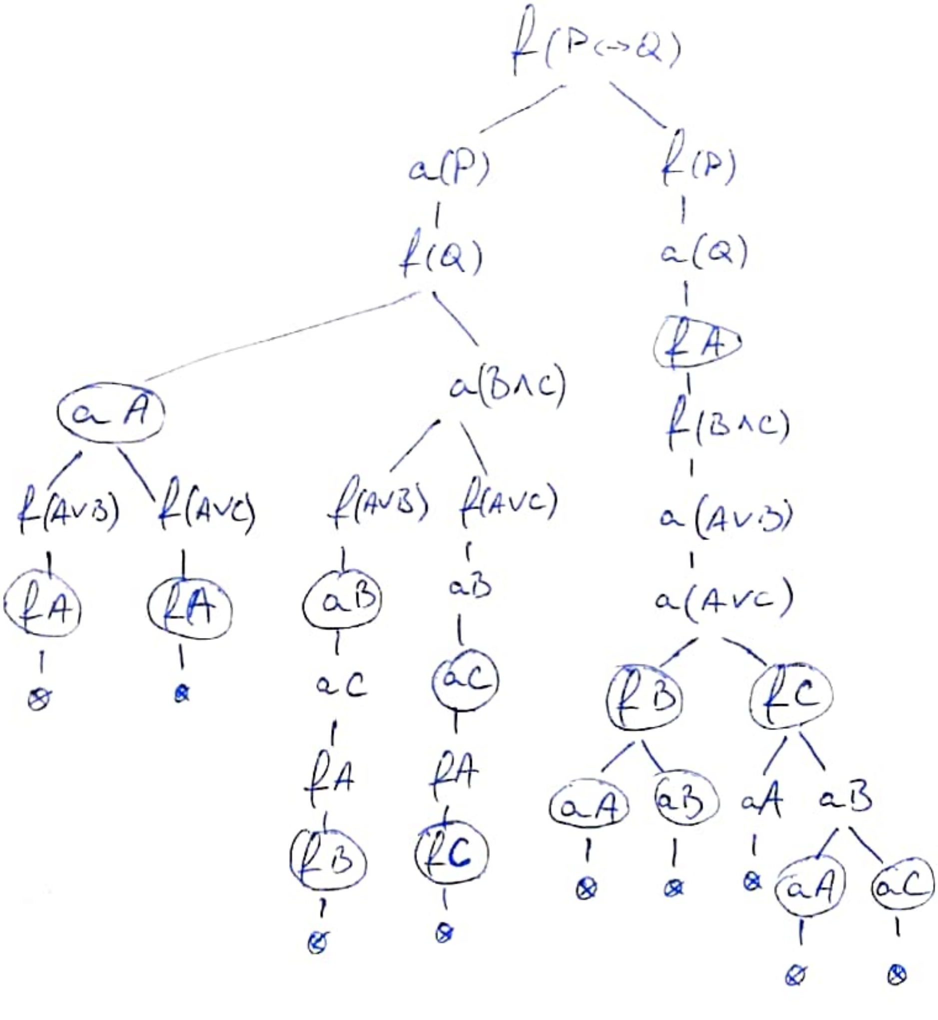
$Q = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

A	B	C	$B \wedge C$	P	$A \vee B$	$A \vee C$	Q	$P \leftrightarrow Q$
a	a	a	a	a	a	a	a	a
a	a	f	f	a	a	a	a	a
a	f	a	f	a	a	a	a	a
f	a	a	a	a	a	a	a	a
a	f	f	f	a	a	a	a	a
f	a	f	f	f	a	f	f	a
f	f	a	f	f	f	a	f	a
f	f	f	f	f	f	f	f	a

Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că cele 2 propoziții nu sunt logic echivalente



Toate ramurile sunt contradictorii =>
=> presupunerea este falsă
=> cele 2 propoziții sunt logic echivalente

TESTUL NR. 2

1. Demonstrați că următoarea propoziție este o tautologie:

$P = A \to \neg\neg A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

A	$\neg\neg A$	$A \to \neg\neg A$
a	a	a
f	f	a

} P este tautologie

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este falsă

$f(A \to \neg\neg A)$
- aA
- $f(\neg\neg A)$
- fA
- $\otimes$

Presupunerea este falsă
$\Rightarrow$ P este tautologie

2. Demonstrați că următoarea propoziție este o contradicție:

$P = (\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$(\neg A \vee (B \wedge \neg B))$	P
a	a	f	f	f	f	f
a	f	f	a	f	f	f
f	a	a	f	f	a	f
f	f	a	a	f	a	f

$\Rightarrow$ P este contradicție

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

$a((\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A)$

- $a(\neg A \vee (B \wedge \neg B))$
  - aA
    - $a(\neg A)$
      - fA
      - $\otimes$
    - $a(B \wedge \neg B)$
      - aB
      - $a(\neg B)$
      - fB
      - $\otimes$
- $f(\neg A \vee (B \wedge \neg B))$
  - fA
  - $f(\neg A)$
  - $f(B \wedge \neg B)$
  - aA
  - $\otimes$

Toate ramurile contradictorii $\Rightarrow$ presupunerea este falsă $\Rightarrow$ P este contradicție

3. Demonstrați că următoarele propoziții sunt logic echivalente:

$A \to B$ și $\neg B \to \neg A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

$P = A \to B$

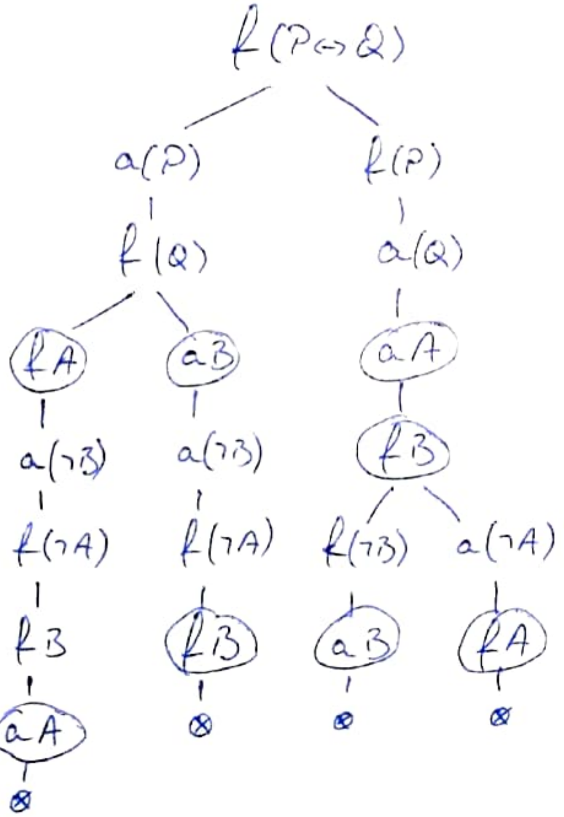
$Q = \neg B \to \neg A$

A	B	P	$\neg B$	$\neg A$	Q	$P \leftrightarrow Q$
a	a	a	f	f	a	a
a	f	f	a	f	f	a
f	a	a	f	a	a	a
f	f	a	a	a	a	a

Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că cele 2 propoziții nu sunt logic echivalente



Toate ramurile sunt contradictorii

=> presupunerea este falsă

=> cele 2 propoziții sunt logic echivalente $(a(P \leftrightarrow Q))$

TEMĂ DE CONTROL

1. Demonstrați că următoarea propoziție este o tautologie:

$P = ((A \land B) \to C \leftrightarrow (A \to (B \to C))$

Rezolvare

Aplicăm proprietatea $A \to B \equiv \neg A \lor B$

$P_1 = (A \land B) \to C = \neg(A \land B) \lor C = \neg A \lor \neg B \lor C$

$P_2 = A \to (B \to C) = \neg A \lor (B \to C) = \neg A \lor \neg B \lor C$

$P_1 \leftrightarrow P_2 \Rightarrow P$ este tautologie

* TABELE DE ADEVĂR

A	B	C	$A \land B$	$(A \land B) \to C$	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	P
a	a	a	a	a	a	a	a
a	a	f	a	f	f	f	a
a	f	a	f	a	a	a	a
f	a	a	f	a	a	a	a
a	f	f	f	a	a	a	a
f	a	f	f	a	f	a	a
f	f	a	f	a	a	a	a
f	f	f	f	a	a	a	a

$\Rightarrow$ P este tautologie

2. Demonstrați că următoarea propoziție este o contradicție:

$P = \neg(A \land B) \land (A \to B) \land A$

Rezolvare * TABELE DE ADEVĂR

A	B	$\neg(A \land B)$	$A \to B$	P
a	a	f	a	f
a	f	a	f	f
f	a	a	a	f
f	f	a	a	f

$\Rightarrow$ P este contradicție

* TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

a(P)

f(A∧B)

a(A→B)

a A

f A   f B

f A   a B

Toate ramurile sunt contradictorii

$\Rightarrow$ presupunerea este falsă

$\Rightarrow$ P este contradicție

3. Demonstrați că următoarele propoziții sunt logic echivalente:

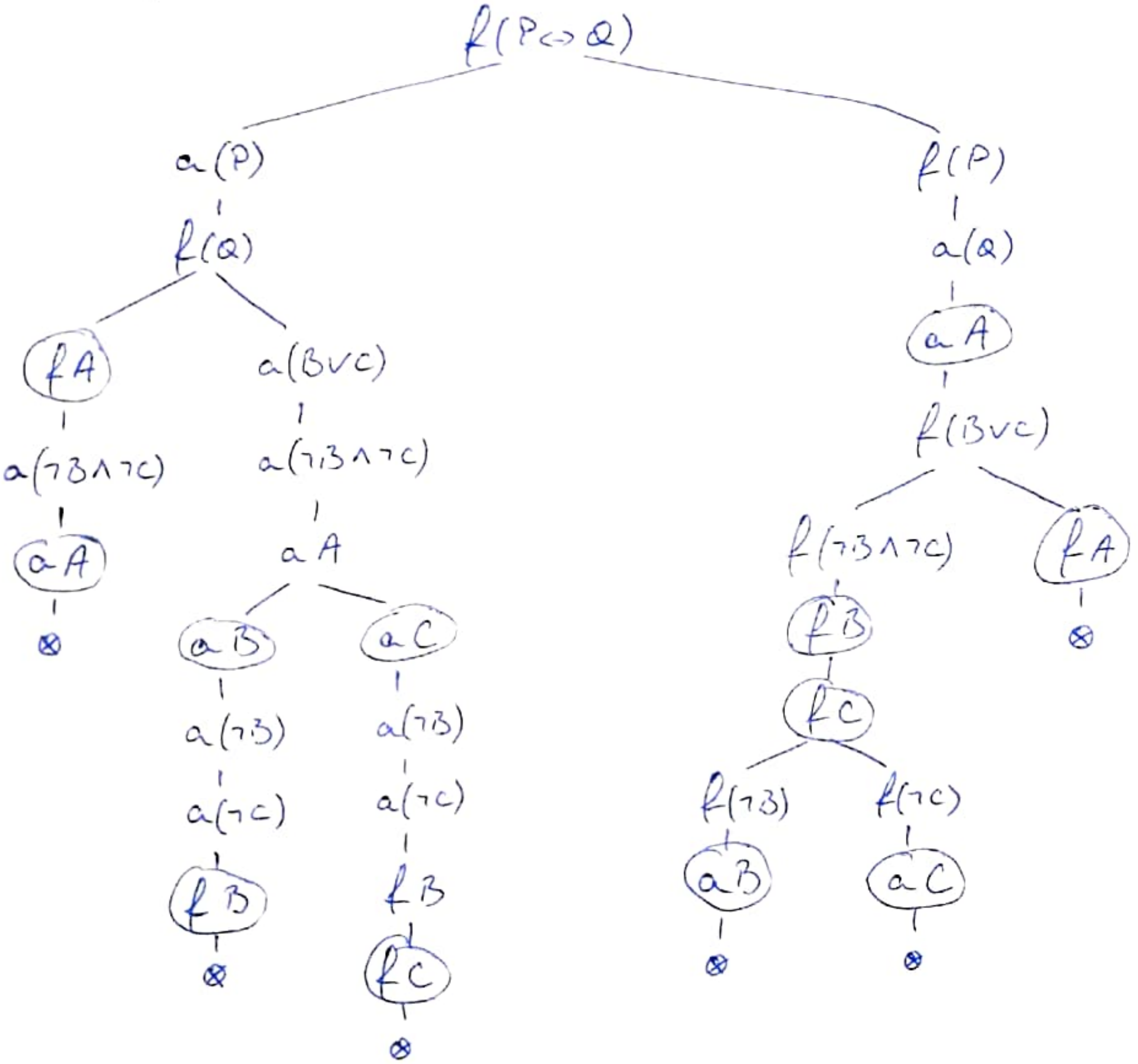
$A \to (B \vee C)$ și $(\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$

Rezolvare * TABLOURI SEMANTICE

$P = A \to (B \vee C)$

$Q = (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$ $\quad P \leftrightarrow Q$?

Presupunem că cele 2 propoziții nu sunt logic echivalente



Toate ramurile contradictorii $\Rightarrow$ Presupunerea este falsă $\Rightarrow a(P \leftrightarrow Q)$

$\Rightarrow$ Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

* TABELE DE ADEVĂR

A	B	C	¬A	¬B	¬C	B∨C	P	¬B∧¬C	Q	P⟺Q
a	a	a	f	f	f	a	a	f	a	a
a	a	f	f	f	a	a	a	f	a	a
a	f	a	f	a	f	a	a	f	a	a
f	a	a	a	f	f	a	a	f	a	a
a	f	f	f	a	a	f	f	a	f	a
f	a	f	a	f	a	a	a	f	a	a
f	f	a	a	a	f	a	a	f	a	a
f	f	f	a	a	a	f	a	a	a	a

Cele 2 propoziții sunt logic echivalente

4. Să se determine forma normal disjunctivă pentru propoziția:

$P = \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge C$

Rezolvare I.

	A	B	C	$A \vee B$	$\neg A \vee \neg B$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$	$\neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B))$	P	
*	a	a	a	a	f	f	a	a	* t_1
	a	a	f	a	f	f	a	f	
	a	f	a	a	a	a	f	f	
	f	a	a	a	a	a	f	f	
	a	f	f	a	a	a	f	f	
	f	a	f	a	a	a	f	f	
*	f	f	a	f	a	f	a	a	* t_7
	f	f	f	f	a	f	a	f	

$FND(P) = t_1 \vee t_7 = (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

conform $FND(F): (A_{11} \wedge \ldots \wedge A_{1m}) \vee (A_{21} \wedge \ldots \wedge A_{2m}) \vee \ldots \vee (A_{k1} \wedge \ldots \wedge A_{km})$.

II. $P = \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge C$

$P = (\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B)) \wedge C \equiv ((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \wedge C \equiv$

$\equiv ((\neg A \wedge \neg B) \neg C) \vee ((A \wedge B) \wedge C) \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C) = FND$

5. Aplicând metoda tablourilor semantice, să se verifice dacă următoarele propoziții sunt tautologii:

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

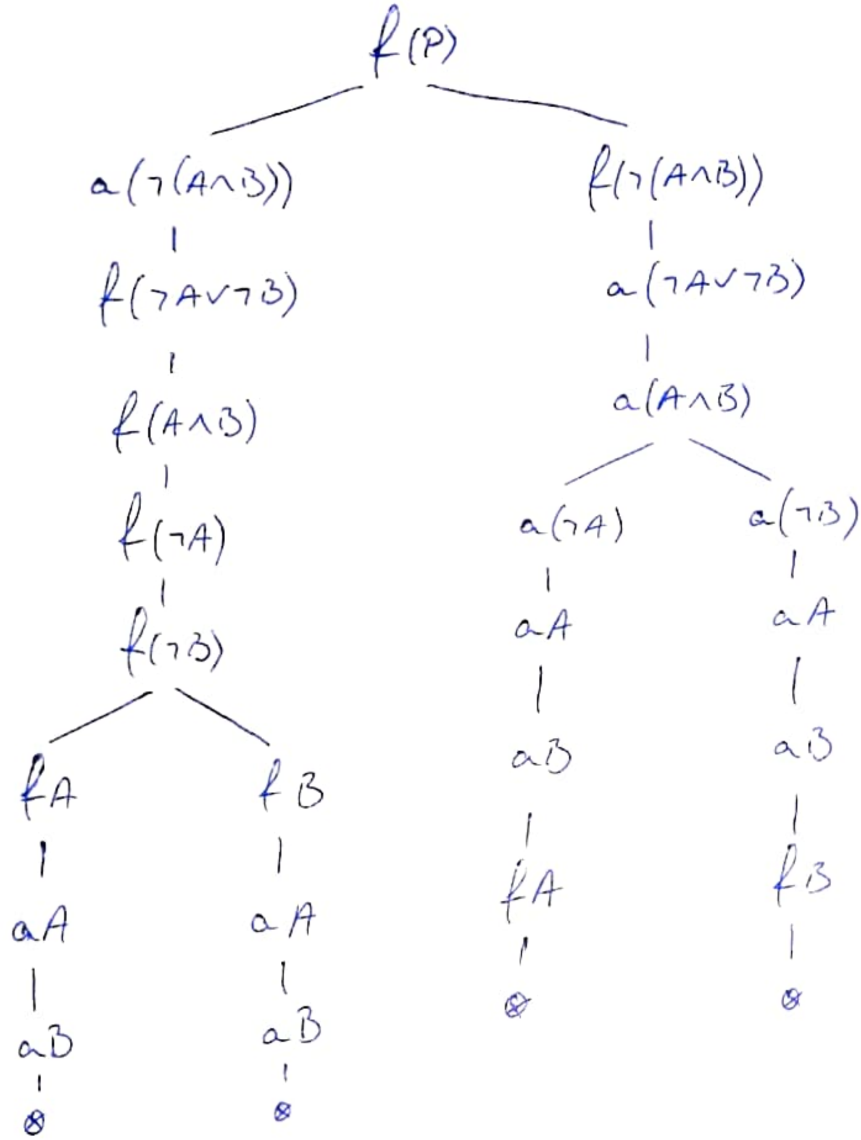
indicație: Se va folosi demonstrația Beth pentru $f(\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B))$

b) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \Leftrightarrow B$

indicație: Se va folosi demonstrația Beth pentru $f((A \wedge (A \rightarrow B)) \Leftrightarrow B)$

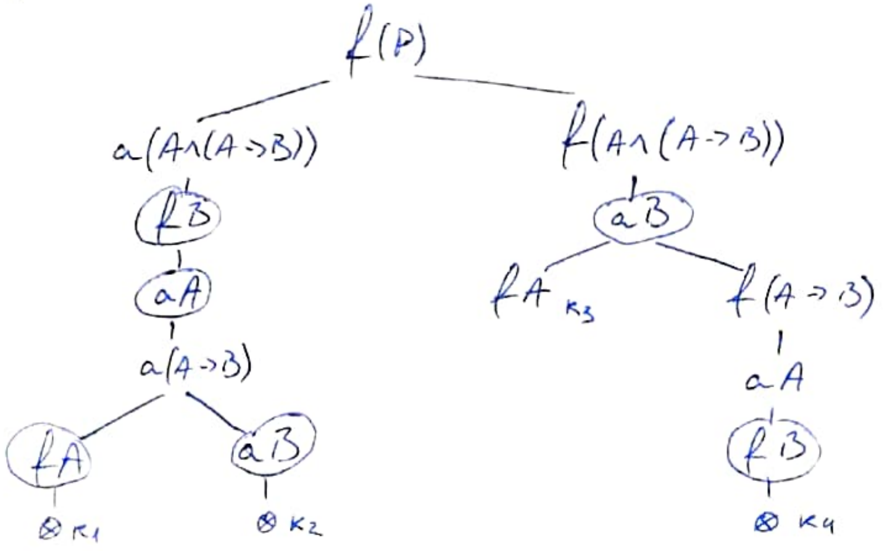
Rezolvare

a) $P = \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$



Toate ramurile sunt contradictorii => presupunerea este falsă => $a(P)$ => P este tautologie

b) $P = (A \wedge (A \to B)) \leftrightarrow B$



Pentru ramura K_3 presupunerea este adevărată => P nu este tautologie

TEMĂ SEMINAR

1. $K: [[(\neg A \wedge B) \to C] \vee D]$ este tautologie?

Rezolvare * TABLOURI SEMANTICE

Presupunem că propoziția este adevărată

- $a(K)$
  - $a((\neg A \wedge B) \to C)$
    - $f(\neg A \wedge B)$
      - $f(\neg A)$
        - $a A$
      - $f B$
    - $a C$
  - $a D$

Nu avem ramuri contradictorii

$\Rightarrow P$ este tautologie

U3 - TESTE DE AUTOEVALUARE ŞI TEME DE CONTROL

TESTUL NR. 1

1. Considerăm maşina Turing $M=(d,\lambda,s)$ definită astfel:

$D=\{(1,1),(0,2),(1,2),(0,3),(1,4)\}$.

$d(1,1)=1 \quad \lambda(1,1)=1 \quad s(1,1)=2$

$d(0,2)=0 \quad \lambda(0,2)=0 \quad s(0,2)=2$

$d(1,2)=1 \quad \lambda(1,2)=1 \quad s(1,2)=1$

$d(0,3)=0 \quad \lambda(0,3)=-1 \quad s(0,3)=3$

$d(1,4)=1 \quad \lambda(1,4)=0 \quad s(1,4)=4$

a) Să se scrie sub formă de tablou această maşină Turing.

b) Să se scrie calculul cu această maşină Turing care începe cu:

$(2,1):\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 0\ 0$

Rezolvare

a)

	0	1
1		1R2
2	002	1R1
3	0L3	
4		104

b) $(2,1):\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 0\ 0 \ldots$

$(3,2):\ 0\ 1\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 0\ 0 \ldots$

$(4,1):\ 0\ 1\ 1\ \underset{\uparrow}{0}\ 0\ 0 \ldots$ STOP

2. Fie alfabetul $\Lambda=\{A,B,C,\ldots,X,Y,Z\}$ şi F un algoritm Markov pe Λ. Fie $\Gamma=\Lambda\cup\{\alpha,\beta,\gamma\}$ şi fie F algoritmul Markov dat de următorul tablou de substituţie:

$\xi_i\xi_j\beta \to \xi_j\beta\xi_i$ (I)

$\alpha\xi_i \to \xi_i\beta\xi_i\alpha$ (II)

$\beta \to \gamma$ (III)

$\gamma \to$ (IV)

$\alpha \to \cdot$ (V)

$\to \alpha$ (VI)

unde $\xi_i\in\Lambda$ (deci ξ_i este una din literele $A,B,C,\ldots,X,Y,Z$)

Aplicaţi algoritmul F definit pe alfabetul Γ cuvântului $P=MA$ şi deduceţi care este $F(P)$.

Rezolvare

$P = MA$

$P = MA \xrightarrow{VI} \alpha MA \xrightarrow{II} M\beta M\alpha A \xrightarrow{II} M\beta MA\beta A\alpha \xrightarrow{I} M\beta A\beta MA\alpha \xrightarrow{2 ori}$
$\xrightarrow{III} M\gamma A\gamma MA\alpha \xrightarrow{IV\ 2 ori} MAMA\alpha \xrightarrow{V} MAMA.$

$\Rightarrow F(P) = PP \Rightarrow MAMA$

TEMĂ DE CONTROL

1. Se dă mașina Turing:

	0	1
1	1R2	
2	0R2	1R3
3	0L3	1R4
4	1R5	0L1

a) Să se scrie explicit această mașină Turing.
b) Să se determine calculul cu intrarea:
(2,3): 0 0 1 1 0 0 0 ...

Rezolvare

a) $D = \{(0,1), (0,2), (1,2), (0,3), (1,3), (0,4), (1,4)\}$

$d(0,1) = 1 \quad r(0,1) = 1 \quad s(0,1) = 2$
$d(0,2) = 0 \quad r(0,2) = 1 \quad s(0,2) = 2$
$d(1,2) = 1 \quad r(1,2) = 1 \quad s(1,2) = 3$
$d(0,3) = 0 \quad r(0,3) = -1 \quad s(0,3) = 3$
$d(1,3) = 1 \quad r(1,3) = 1 \quad s(1,3) = 4$
$d(0,4) = 1 \quad r(0,4) = 1 \quad s(0,4) = 5$
$d(1,4) = 0 \quad r(1,4) = -1 \quad s(1,4) = 1$

b) (2,3): 0 0 1 1 0 0 0 ...
(1,3): 0 0 1 1 0 0 0 ... STOP

2. Considerăm mașina Turing următoare:

M:

	0	1
1	1L2	0R1
2	102	

a) Să se scrie calculul cu intrarea:

$(2,1):\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ldots$

b) Să se determine $\underset{\bar{M}}{\overset{M}{\downarrow}}$ și să se scrie calculul cu această mașină Turing care începe cu intrarea dată la a).

Rezolvare

a) $(2,1):\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(3,1):\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(4,1):\ 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(3,2):\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(3,2):\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\ 0\ldots$ STOP

b) Aplicând definiția avem $S(M)=\{1,2\}$

$n=2$

$M_s(1,2)=(1,0,2)$

$\downarrow$

	0	1
1	1L2	0R1
2	102	102

$(2,1):\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(3,1):\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(4,1):\ 0\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(3,2):\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{0}\ 1\ 1\ 1\ 0\ldots$

$(3,2):\ 0\ 0\ \underset{\uparrow}{1}\ 1\ 1\ 1\ 0\ldots$ STOP

3. Fie alfabetul $\Lambda = \{A, B, C, \dots, X, Y, Z, -\}$ și F un algoritm Markov pe Λ. Fie $\Gamma = \Lambda \cup \{\alpha, \beta\}$ și fie F algoritmul Markov dat de următorul tablou de substituție:

$$\alpha\alpha \to \beta \quad (I)$$
$$\alpha \xi_i \xi_j \to \xi_j \alpha \xi_i \quad (II)$$
$$\beta\alpha \to \beta \quad (III)$$
$$\beta \xi_i \to \xi_j \beta \quad (IV)$$
$$\beta \to \cdot \quad (V)$$
$$\to \alpha \quad (VI)$$

unde $\xi_i \in \Lambda$ (deci ξ_i este una din literele $A, B, C, \dots, X, Y, Z$, sau $-$).
Aplicați algoritmul F definit pe alfabetul Γ cuvântului
P = ERAM-LEC-NAFETS și deduceți cine este $F(P)$.

Rezolvare

P = ERAM-LEC-NAFETS $\xrightarrow{VI}$ αERAM-LEC-NAFETS $\xrightarrow{II\ 14\ ori\ +\ VI\ 14\ ori}$

$\to \alpha S\alpha T\alpha E\alpha F\alpha A\alpha N\alpha -\alpha C\alpha E\alpha L\alpha -\alpha M\alpha A\alpha R\alpha E \to$

$\xrightarrow{VI} \alpha\alpha S\alpha T\alpha E\alpha F\alpha A\alpha N\alpha -\alpha C\alpha E\alpha L\alpha -\alpha M\alpha A\alpha R\alpha E \to$

$\xrightarrow{I} \beta S\alpha T\alpha E\alpha F\alpha A\alpha N\alpha -\alpha C\alpha E\alpha L\alpha -\alpha M\alpha A\alpha R\alpha E \to$

$\xrightarrow[13\ ori]{III+IV}$ STEFAN-CEL-MAREβ $\xrightarrow{V}$ STEFAN-CEL-MARE.

$\Rightarrow F(P) = P^{-1} \Rightarrow$ STEFAN-CEL-MARE