Equaţii Clairaut

O ecuaţie de ordinul întâi este de tip Clairaut dacă se poate scrie sub forma:

$$y(x) + x \cdot y' - y = 0 \qquad (1)$$

unde y este funcţie derivabilă pe (a,b)

Pentru rezolvarea acestor ecuaţii se folosesc formulele de derivare a unei funcţii compuse şi produs şi obţinem:

$$y + y' + x \cdot y' - y' = 0 \text{, adică}$$

$$y'(x) \cdot y' + x \cdot y'' = 0 \text{, de ex } y' = 0 \text{ şi}$$

$$y'(x) \cdot (y'(x) + x) = 0 \qquad (x \neq 0)$$

Obţinem două ecuaţii diferenţiale din care se mai pot scrie ecuaţii:

1) $\text{Dacă } y' = 0 \Rightarrow y = C$ şi din ec. (1) obţinem sol.

generală

$$y = x \cdot C + y(x) = C \cdot x + y(x) \quad C \in \mathbb{R}$$

2) $\text{Dacă } y'(x) + x = 0 \Rightarrow y' = -x \Rightarrow y = \frac{-x^2}{2} + C$ şi din ec. (1) obţinem şi pe aceasta ca sol. singulară şi sol. generală a ecuaţiei Clairaut

$$\begin{cases} x = -y'(x) \\ y = -x \cdot y'(x) + y(x) \end{cases} \quad p \in (a,b) \subset \mathbb{R}$$

Din ult. de mai sus rezultă că singurul punct determinant este de ordinul cel mai mare al funcţiei $y(x)$ din Clairaut (1), pentru $x \neq 0$.

Pasul 1. y' trebuie continuă.

Pasul 2. y'' nu poate fi egal cu 0.

Pasul 3. Se scrie $y'(x) = -x$ şi se obţine $y = \frac{-x^2}{2} + C$

Ex. Se determine ec. eff.

$$y - y' - x \cdot y' = 0 \qquad (1)$$

Rezolvare:

Pasul 1. Se scrie în forma $(y)' + x \cdot y' - y = 0$

care este $x \neq 0$ şi de tip Clairaut $y'(x) = 0$ şi se derivează:

$$y' + y'' + x \cdot y'' - y' = 0$$

$$y'' + x \cdot y'' = 0$$

Pasul 2. Se scrie $y'' + x \cdot y'' = 0$ şi se obţine

$$y'' = -x \cdot y'' \Rightarrow y'' = -1$$

Pasul 3. Se scrie $y'' = -1$ şi se obţine $y = \frac{-x^2}{2} + C$

Din cele de mai sus rezultă că singurul punct determinant este $x = 0$

Dacă $x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ şi din ec. (1) obţinem sol. singulară şi sol. generală a ec. Clairaut

$$\begin{cases} x = -y'(x) \\ y = -x \cdot y'(x) + y(x) \end{cases} \quad p \in (a,b) \subset \mathbb{R}$$

Ex. Se determine ec. eff.

$$y - y' - x \cdot y' = 0 \qquad (1)$$

Rezolvare:

Pasul 1. Se scrie în forma $(y)' + x \cdot y' - y = 0$ care este $x \neq 0$ şi de tip Clairaut $y'(x) = 0$ şi se derivează:

$$y' + y'' + x \cdot y'' - y' = 0$$

$$y'' + x \cdot y'' = 0$$

Pasul 2. Se scrie $y'' + x \cdot y'' = 0$ şi se obţine

$$y'' = -x \cdot y'' \Rightarrow y'' = -1$$

Pasul 3. Se scrie $y'' = -1$ şi se obţine $y = \frac{-x^2}{2} + C$

Din cele de mai sus rezultă că singurul punct determinant este $x = 0$

Dacă $x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ şi din ec. (1) obţinem sol. singulară şi sol. generală a ec. Clairaut

$$\begin{cases} x = -y'(x) \\ y = -x \cdot y'(x) + y(x) \end{cases} \quad p \in (a,b) \subset \mathbb{R}$$

Rezultat:

Pasul 1. Se scrie ecuaţia în forma $y = x \cdot y' + y'(x)$ şi se derivă:

$$y' = y' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y'$$

Pasul 2. Se scrie $y' = y' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y'$ şi se obţine

$$y'' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y' = 0$$

Pasul 3. Se scrie $y'' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y' = 0$ şi se obţine

$$y'' \cdot (x + y'(x)) = 0$$

Din cele de mai sus rezultă $y'' = 0$ şi $x + y'(x) = 0$

Pasul 4. Se scrie $y'' = 0$ şi se obţine $y' = C$

Pasul 5. Se scrie $x + y'(x) = 0$ şi se obţine

$$y = -\frac{x^2}{2} + C$$

Din cele de mai sus rezultă $y = -\frac{x^2}{2} + C$ şi din ec. (1) obţinem sol. singulară şi sol. generală a ecuaţiei Clairaut

$$\begin{cases} x = -y'(x) \\ y = -x \cdot y'(x) + y(x) \end{cases} \quad p \in (a,b) \subset \mathbb{R}$$

Ex. Se determine ec. eff.

$$y - y' - x \cdot y' = 0 \qquad (1)$$

Rezolvare:

Pasul 1. Se scrie în forma $(y)' + x \cdot y' - y = 0$ care este $x \neq 0$ şi de tip Clairaut $y'(x) = 0$ şi se derivează:

$$y' + y'' + x \cdot y'' - y' = 0$$

$$y'' + x \cdot y'' = 0$$

Pasul 2. Se scrie $y'' + x \cdot y'' = 0$ şi se obţine

$$y'' = -x \cdot y'' \Rightarrow y'' = -1$$

Pasul 3. Se scrie $y'' = -1$ şi se obţine $y = \frac{-x^2}{2} + C$

Din cele de mai sus rezultă $y = \frac{-x^2}{2} + C$ şi din ec. (1) obţinem sol. singulară şi sol. generală a ecuaţiei Clairaut

$$\begin{cases} x = -y'(x) \\ y = -x \cdot y'(x) + y(x) \end{cases} \quad p \in (a,b) \subset \mathbb{R}$$

Rezultat:

Pasul 1. Se scrie ecuaţia în forma $y = x \cdot y' + y'(x)$ şi se derivă:

$$y' = y' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y'$$

Pasul 2. Se scrie $y' = y' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y'$ şi se obţine

$$y'' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y' = 0$$

Pasul 3. Se scrie $y'' + x \cdot y'' + y'(x) \cdot y' = 0$ şi se obţine

$$y'' \cdot (x + y'(x)) = 0$$

Din cele de mai sus rezultă $y'' = 0$ şi $x + y'(x) = 0$

Pasul 4. Se scrie $y'' = 0$ şi se obţine $y' = C$

Pasul 5. Se scrie $x + y'(x) = 0$ şi se obţine

$$y = -\frac{x^2}{2} + C$$

Din cele de mai sus rezultă $y = -\frac{x^2}{2} + C$ şi din ec. (1) obţinem sol. singulară şi sol. generală a ecuaţiei Clairaut

$$\begin{cases} x = -y'(x) \\ y = -x \cdot y'(x) + y(x) \end{cases} \quad p \in (a,b) \subset \mathbb{R}$$

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

Introducere

Ec. dif. liniare de ordinul n, sunt ec. de $f = \text{cos.}$ liniarizate, derivate de funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şi variabilă x care au forma:

$$y^{(n)}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + y_{n-1}(x) \cdot y_1 + y_n(x) \cdot y = b(x) \quad (1)$$

unde $a_1(x), \ldots, y_n(x)$ şi $b(x)$ sunt funcţii definite şi continue pe (a,b) şi $y_1, \ldots, y_n$ sunt funcţii necunoscute şi y şi (x) este derivabilă de n ori pe (a,b)

Dacă $b(x)$ este funcţia nulă pe (a,b) şi notăm $b(x) = 0, \forall x \in (a,b)$ ec. se numesc ec. fără un cazul în care b_n nu este funcţia nulă pe (a,b) ec. (1) se numesc ec. neomogene şi ecuaţia se numesc ec. omogene.

Pentru ec. omogene y şi (x) este de ordinul cele mai mare al funcţiei $y(x)$ din ec. (1)

Ec. omogene sunt de forma:

$$y^{(n)}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + y_{n-1}(x) \cdot y_1 + y_n(x) \cdot y = 0 \quad (2)$$

Un sistem de funcţii reale $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ este dependent pe (a,b) dacă $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nu toţi nuli astfel ca $\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) + \ldots + \alpha_n \cdot y_n(x) = 0, \forall x \in (a,b)$

Dacă nu $\Rightarrow$ sistem independent

Ex. Se determine sistem dependent şi sistem independent

$$y_1(x) = 2x \quad y_2(x) = x^2 \quad y_3(x) = 3x^2$$

$$\alpha_1 \cdot 2x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot 3x^2 = 0$$

$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 2x + \alpha_3 \cdot 6x = 0$$

$$\alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 6 = 0$$

$$\alpha_2 = -3\alpha_3$$

$$\alpha_1 \cdot 2x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot 3x^2 = 0$$

$$\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 2x + \alpha_3 \cdot 6x