Ecuații diferențiale de ordinul n

1°. Noțiuni introductive.

Definiție. Fie $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ o funcție reală, de $n+2$ variabile, $F : [a,b] \times E$, $E \subset R^{n+1}$, $[a,b] \subset R$ având argumentele variabila reală $x \in [a,b]$ și o funcție reală $y : [a,b] \to R$, împreună cu derivatele ei $y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Relația $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ se numește ecuație diferențială de ordinul n. Se numește soluție a acestei ecuații o funcție $\varphi(x)$, $\varphi : [a,b] \to R$, având derivate până la ordinul n inclusiv pe $[a,b]$ a.î. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots \varphi^{(n)}(x)) = 0$, $(\forall)\, x \in [a,b]$

Dacă $n = 1$, obținem ecuații diferențiale de ordinul I, care vor fi definite de relația $F(x, y, y') = 0$ (forma implicită) sau $y' = g(x, y)$, (forma explicită).

Exemple 1° Ecuația $y' = y + x$, $x \in R$

este o ecuație diferențială de ordin I. O soluție a sa este $y = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Funcția $y(x) = c \cdot e^x - x - 1$, unde c este o constantă arbitrară reprezintă o familie de soluții a ecuației date.

2°) Ecuația $y'' - y = x$, $x \in \mathbb{R}$ este o ec. dif. de ordinul II. Funcția $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$, cu C_1, C_2 constante arbitrare, reprezintă o familie de soluții ale ecuației date. Dînd valori particulare lui C_1 și C_2, vom obține soluții particulare.

În acest prim capitol ne vom ocupa de ecuații diferențiale de ordinul I.

Din exemplele de mai sus se observă că ecuațiile diferențiale admit familii de soluții care depind de constante arbitrare. Vom demonstra că numărul constantelor arbitrare ale soluției generale este egal cu ordinul ecuației diferențiale.

Vom spune că funcția $\varphi(x, c)$ este soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul I

(1°) $F(x, y, y') = 0$ dacă φ

verifică identic ecuația (1°):

$$F(x, \varphi(x, C), \varphi'_x(x, C)) \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

Soluția generală a unei ec. dif. poate fi dată parametric prin $x = \varphi(t, C)$, $y = \psi(t, C)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Se numește soluție particulară a ecuației $F(x, y, y') = 0$ o funcție $y = \varphi_0(x)$, $x \in [a, b]$, care se obține din soluția generală $y = \varphi(x, c)$ dând o valoare particulară constantei arbitrare C.

O soluție $y = \psi(x)$, $x \in [a, b]$ a ecuației $F(x, y, y') = 0$ care nu se obține din soluția generală pentru nici o valoare a constantei C se numește soluție singulară.

Ex: Ecuația $y = xy' + y'^2$ are ca soluție generală familia dreptelor $y = cx + c^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ecuația admite și soluția $y = -\frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ care reprezintă o parabolă și nu se obține din soluția generală pentru nici o valoare a lui C, fiind, deci o soluție singulară a ecuației.

2°. Condiții inițiale. Problema lui Cauchy

Fie ecuația diferențială (2°) $y' = f(x, y)$

unde f este continuă pe un domeniu plan D. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Fie soluția generală a ecuației diferențiale date, $y = \varphi(x)$. Ea reprezintă o familie de curbe incluse în domeniul D. Vom demonstra o teoremă de existență și unicitate care arată că în anumite condiții ecuația (2°) are o soluție unică al cărui grafic trece prin punctul $(x_0, y_0) \in D$.

Problema determinării soluției ecuației (2°) care pentru $x = x_0$ ia valoarea $y = y_0$, deci al cărui grafic trece prin $(x_0, y_0) \in D$, s.n. problema lui Cauchy iar condiția ca pentru $x = x_0$ soluția să ia valoarea $\varphi(x_0) = y_0$ s.n. condiție inițială.

<u>Exemplu</u>: Să se găsească soluția ec. dif. $y' = \cos x + x$ care trece prin punctul $(0, 2)$. Avem: $y = \int_0^x (\cos t + t)\,dt + C = \sin t \Big|_0^x + \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^x + C = \sin x + \frac{x^2}{2} + C$

Pentru $x_0 = 0 \Rightarrow y(0) = 2 = 0 + \frac{0^2}{2} + C \Leftrightarrow C = 2$

Deci soluția căutată este $y = \frac{1}{2} x^2 + \sin x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Obs.</u> Mulțimea soluțiilor unei ec. dif. de ord. I depinde de o

constantă arbitrară. Se poate arăta și invers, că orice familie de curbe plane, (3) $\varphi(x,y,C)=0$, $(x,y)\in D$ cu φ continuă și derivabilă parțial în D în raport cu x și y, verifică o ecuație dif. de ordinul întâi. Într-adevăr derivăm parțial în raport cu x:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Eliminând pe C între această relație și (3) rezultă

$\Phi(x,y,y')=0$, deci o ec. dif. de ordinul I.

<u>Exemplu</u>. Să se determine ecuația dif. verificată de familia de curbe: $y=x^n+Cx+1$, $x\in\mathbb{R}$

Derivăm în raport cu x. $\Rightarrow$

$$y'=nx^{n-1}+C \Rightarrow C=y'-nx^{n-1}$$

înlocuim în relația dată:

$$y=x^n+x(y'-nx^{n-1})+1$$

$$\boxed{y=xy'+(1-n)x^n+1}$$

<u>Teorema de existență și unicitate pentru ecuații diferențiale de ordinul I. Metoda aproximațiilor succesive</u>

$y'' - y = x$; $x \in \mathbb{R}$ → ec. dif. de ordinul doi.
$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$, $x \in \mathbb{R}$; C_1, C_2 = constante arbitrare; y = sol. generală a ecuației: $y'' - y = x$
$y' = C_1 e^x + C_2 \cdot (-e^{-x}) - 1$; $y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1$
$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
$\underbrace{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}_{y''} \underbrace{- C_1 e^x - C_2 e^{-x} + x}_{-y} = x \iff y'' - y = x$

Sol. gen. a ec. dif. de ord 2 depinde de două constante arbitrare, C_1 și C_2.
$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x$ reprezintă două familii de soluții ale ecuației. Dând valori particulare pt C_1 și C_2 se obțin soluții particulare ale ecuației.
Se demonstrează că numărul constantelor arbitrare din soluția generală este egal cu ordinul ecuației diferențiale.
Sol. gen. a ec: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ depinde de n constante arbitrare: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$
Soluție singulară a unei ecuații diferențiale — este acea soluție care nu se poate obține din soluția generală pentru nici o particularizare posibilă a constantelor din soluția generală.
Exemplu Fie ecuația $y = xy' + y'^2$ → o ecuație diferențială de ordinul 1, neliniară.
Soluția generală a sa este $y = C \cdot x + C^2$ unde C = constantă arbitrară. D.p.v. geometric, soluția generală este o familie de drepte ($y = mx + n$) dar și $y = -\frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, este soluție a ecuației.

$y = cx + c^2$; $y' = c$

$\Rightarrow cx + c^2 = cx + (c)^2 \Rightarrow$ ec. este verif. pt $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = cx + c^2$ este sol. generală a ecuației.

$y = -\frac{1}{4}x^2, x \in \mathbb{R}$; $y' = -\frac{2}{4}x$; $y' = -\frac{1}{2}x$

$y = xy' + y'^2$; $-\frac{1}{4}x^2 \overset{?}{=} \underline{x(-\frac{1}{2}x)} + (-\frac{1}{2}x)^2 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{4} \cdot x^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow$ ec. este verificată de $y = -\frac{x^2}{4}$ pt $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$ este soluție a ecuației.

D.p.v. geometric, soluția reprezintă o parabolă; expresia nu se poate obține din soluția generală, $y = cx + c^2$ (familie de drepte) pentru nici o valoare posibilă a constantei c

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$ este soluție singulară a ecuației.

Condiții inițiale. Problema lui Cauchy

a) Pt ec. dif de ordinul 1:

- forma implicită : $F(x, y, y') = 0$
- forma explicită : $y' = f(x, y)$; f este

o funcție continuă pe un domeniu D din plan. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Considerând și soluția generală a ecuației inițiale : $y = \varphi(x, c)$; c = ct arbitrară d.p.v. geometric ea reprezintă o familie de curbe incluse în domeniul D. În anumite condiții (numite condiții inițiale sau condițiile lui Cauchy) se poate demonstra o teoremei de existență și unicitate a soluției problemei care verifică aceste condiții inițiale.

$\Leftrightarrow$ problema determinării soluției ecuației $F(x, y, y') = 0$ sau $y' = f(x, y)$ care pentru $x = x_0$ ia valoarea $y = y_0$ $\Leftrightarrow$ soluția al cărui grafic trece prin punctul $(x_0, y_0) \in D$. În anumite ipoteze pe care le verifică funcțiile F, respectiv f, care definesc ecuația diferențială, soluția acestei probleme este unică.

Problema determinării soluției ecuației $F(x, y, y') = 0$ sau $y' = f(x, y)$ care pentru $x = x_0$ ia valoarea $y = y_0$, deci al cărui grafic trece prin punctul $(x_0, y_0) \in D$, se numește problema lui Cauchy, iar condiția ca pentru $x = x_0$ soluția să ia valoarea $\varphi(x_0) = y_0$ se numește condiție inițială.

③ Problema lui Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul n.

Fie ecuația diferențială de ordinul n:

(1°) $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$; $y : \mathring{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathring{I}$ interval.

Admitem că funcția F verifică ipotezele teoremei de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy pt ecuația (1°).

Soluția generală a ecuației (1°) depinde de n constante arbitrare esențiale și este dată de $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$; φ este o funcție de clasă $C^n(I)$ (continuă și derivabilă de n ori, cu toate derivatele continue pe I) și verif. ec. 1° în orice $x \in \mathring{I}$:

$F(x, \varphi(x, C_1, \dots C_n), \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \varphi''(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \dots \varphi^{(n)}(x, C_1, \dots C_n)) = 0$

în $(\forall)\ x \in \mathring{I}$.

<u>Definiție</u> Se numește problema Cauchy pentru ecuația (1°), problema determinării soluției (particulare) a ecuației, care verifică următoarele condiții, numite condițiile lui Cauchy sau condiții inițiale:

$$(2°)\quad \begin{cases} \varphi(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_0 \\ \varphi'(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_1 \\ \varphi''(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_2 \\ \dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = y_{n-1} \end{cases}$$

unde $x_0 \in \dot{I}$ și $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ sunt n numere date.

Necunoscutele acestui sistem sunt constantele $c_1, c_2, \dots, c_n$. În ipoteza existenței și unicității soluției problemei Cauchy, acest sistem este compatibil și unic determinat.

Se rezolvă sistemul (2°) și se obține soluția:

$$\begin{cases} c_1 = c_1(x_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}) \\ c_2 = c_2(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \vdots \\ c_n = c_n(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{cases} \quad (3°)$$

Soluția este unică.

Aceste valori se înlocuiesc în expresia soluției generale: $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, obținând astfel soluția unică a problemei (1°), cu condițiile inițiale (2°).

<u>Exemplu</u>. Să se determine soluția problemei Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul doi, cu condițiile Cauchy precizate:

$y'' - y = x \quad ; x \in \mathbb{R}.$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \underline{x_0 = 0.}$$

Soluția generală a ecuației:

$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} - x$; C_1 și C_2 sunt constante arbitrare.

S-a verificat că y este soluția generală a ecuației pt $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Aplicăm condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y(x) &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x \\ y'(x) &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = C_1 - C_2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2C_1 = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = 1} \Rightarrow C_2 = -C_1 ; \boxed{C_2 = -1}$$

$\Rightarrow y = e^x - e^{-x} - x$ = soluția problemei Cauchy

V $\begin{cases} y(0) = 1 - 1 = 0 \\ y'(0) = 1 + 1 - 1 = 1 \end{cases}$

Ecuații diferențiale de ordinul 1, rezolvate în raport cu y', integrabile prin metode elementare.

(1°) Ecuații care provin din anularea unei diferențiale totale:

$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$ unde P și Q sunt continue și au derivate parțiale de ordinul 1 continue într-un domeniu D din $\mathbb{R}^2$

$y = y(x) \rightarrow$ funcția necunoscută,

$y' = \dfrac{dy}{dx}$;

$P(x,y) \cdot dx = -Q(x,y) \cdot dy \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Leftrightarrow$

$$\boxed{y' = f(x,y)}$$

Dacă soluția ecuației scrisă sub forma:

$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$

(∃)? a funcții $F = F(x,y)$ și F este diferențiabilă și diferențiala sa este expresia dată?

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\cdot dy \Rightarrow$$

$$P(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ și } Q(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

conform criteriului lui Schwarz, dacă $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continue în D ⇒

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \Rightarrow \text{ Funcția } F(x,y) \text{ va}$$

fi dată de relația:

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\cdot dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\cdot dt$$

$(x_0,y_0) \in D$.

$$\Rightarrow dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy = P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy \Rightarrow$$

$dF(x,y) = 0 \Rightarrow \underline{F(x,y) = C}$ este soluția ecuației $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\, dy = 0$.

<u>Exemplu</u>: $\left(\sin y - \frac{2y}{x^3}\right)\cdot dx + \left(x\cdot \cos y + \frac{1}{x^2}\right)\cdot dy = 0$

Se cere soluția generală a ecuației.

$P(x,y) = \sin y - \frac{2y}{x^3}$; $Q(x,y) = x\cos y + \frac{1}{x^2}$

verificăm dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \frac{2}{x^3}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y - \frac{2}{x^3}$

Sol. generală : $F(x,y)$ cu proprietatea
$dF = P \cdot dx + Q\,dy$

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} \left(\sin y_0 - \frac{2y_0}{t^3}\right) \cdot dt +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \left(x\cos t + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dt = \sin y_0 \cdot t\Big|_{x_0}^{x} - 2y_0 \cdot \frac{t^{-2}}{-2}\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+ x \cdot \sin t\Big|_{y_0}^{y} + \frac{1}{x^2} \cdot t\Big|_{y_0}^{y} = \sin y_0 (x - x_0) + y_0\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right)$$

$$+ x(\sin y - \sin y_0) + \frac{1}{x^2}(y - y_0) =$$

$$= x\sin y + \frac{y}{x^2} - x_0 \sin y_0 - \frac{y_0}{x_0^2} - \cancel{x \cdot \sin y_0} - \cancel{\frac{y_0}{x^2}} +$$

$$+ \cancel{x \sin y_0} + \cancel{\frac{y_0}{x^2}} = \underbrace{x\sin y + \frac{y}{x^2}}_{F(x,y)} \underbrace{- x_0 \sin y_0}_{F(x_0,y_0)} =$$

$$\Rightarrow \boxed{x\sin y + \frac{y}{x^2} = c} \iff F(x,y) = c$$

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0 \rightarrow \text{ec. dată inițial.}$$