09.03.2022
Anul I TI

Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n peste corpul comutativ K și $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ și $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ două baze diferite ale lui V. Știm că orice vector $x \in V$ are două coordonate unice în fiecare dintre cele 2 baze.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ în $B_1 \Leftrightarrow x = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \dots + x_n \cdot u_n$

$x = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ în $B_2 \Leftrightarrow x = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \dots + y_n \cdot v_n$

Într-o scriere matriceală aceste relații devin:

$$x = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

$$x = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

Ne propunem să stabilim relațiile care permit calculul coordonatelor lui x în baza B_2 (cea nouă) în funcție coordonatele lui x în baza B_1 (cea veche). Pentru aceasta vom exprima mai întâi vectorii bazei noi, B_2, în funcție de vectorii bazei vechi, B_1: Avem relațiile:

$$\begin{cases} v_1 = a_{11} u_1 + a_{21} \cdot u_2 + \dots + a_{n1} \cdot u_n \\ v_2 = a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{n2} u_n \\ \dots \\ v_n = a_{1n} \cdot u_1 \, a_{2n} u_2 + \dots + a_{nn} u_n \end{cases} \quad (1^0)$$

Pentru fiecare vector v_i, $i = \overline{1,n}$ se rezolvă un sistem de n ecuații cu n necunoscute, acestea fiind coordonatele vectorului v_i în baza B_1:

$v_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots a_{ni})$, $i = \overline{1,n}$ se rezolvă un sistem pentru fiecare vector v_i de n ecuații cu n necunoscute.

Se recomandă metoda eliminării cu pivotare totală a lui Gauss. Marele avantaj îl constituie faptul că toate cele n sisteme se pot rezolva simultan, cu aceeași matrice a coeficienților.

Coordonatele vectorilor $v_1, v_2, \dots, v_n$ (ai bazei B_2) formează o matrice pătratică de dimensiune n care se numește matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2. Aceasta se notează, de obicei, cu T și se formează punând pe coloanele sale coordonatele vectorilor din baza $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ calculate în raport cu baza $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, obținute prin rezolvarea celor n sisteme (1°) pentru fiecare $i = \overline{1,n}$.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2°)$$
$$\quad\ \ \downarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$\quad\ \ v_1 \qquad v_2 \qquad\qquad v_n$$

Sistemul (1°) se poate scrie într-o formă matriceală astfel:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ sau:}$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot T \quad (3°)$$

Procedând analog putem exprima fiecare vector din baza B_1 în raport cu vectorii din baza B_2 și notăm cu S matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_1. ($B_2 \xrightarrow{S} B_1$) vom obține relația:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot S \quad (4°).$$

Înlocuim relația (3°) în (4°). Se obține

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot S \overset{(3°)}{=} (u_1, u_2, \dots u_n) \cdot T \cdot S \quad (5°)$$

-3-

Interpretarea relației (5) este următoarea:

- matricea produs $T \cdot S$ este matricea de trecere de la baza B_1, tot la B_1, deci este exact matricea unitate I_n. (aceasta este o consecință a unicității scrierii vectorilor unei baze în raport cu vectorii aceleiași baze.

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T \cdot S = I_n \Leftrightarrow \begin{cases} T \text{ este inversabilă și } T^{-1} = S \text{ și reciproc.} \\ S \text{ este inversabilă și } S^{-1} = T \end{cases}$

În final putem scrie:

$B_1 \xrightarrow{T} B_2 \;;\; \Leftrightarrow B_2 \xrightarrow{S} B_1 \Leftrightarrow B_1 \xrightarrow{TS} B_1 \;;\; TS = I_n$

Acum putem rezolva problema anunțată inițial:

- cum se schimbă coordonatele unui vector la schimbarea bazei:

$$x = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \quad \text{în baza } B_1$$

Același vector x, în baza B_2 se scrie astfel:

$$x = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i, \text{ în baza } B_2:$$

Utilizăm relația (3) de trecere de la B_1 la B_2:

$$x = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Din ultima egalitate rezultă:

$$/ \cdot T^{-1} \quad T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

→ coord. lui x în B_2

→ coord. lui x în B_1

Concluzii

1° Dacă T este matricea de trecere de la B_1 la B_2, atunci T este inversabilă și inversa sa, $T^{-1}=S=$ = matricea de trecere de la B_2 la B_1

$$\underbrace{(v_1, v_2, \dots, v_n)}_{B_2} = \underbrace{(u_1, u_2, \dots, u_n)}_{B_1} \cdot T \quad (3^\circ)$$

2° Matricea de trecere de la coordonatele unui vector oarecare $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ exprimat în baza inițială B_1, la coord. aceluiași vector $x=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, exprimate în noua bază B_2 este matricea $T^{-1}=S$ și are loc rel:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

x exprimat în baza B_2 — același x exprimat în baza B_1.

Aplicații

1° În spațiul vectorial $V=\mathbb{R}^3$, peste corpul $\mathbb{R}$ se dau vectorii:

$$B_1: \begin{cases} u_1=(1, 0, 1) \\ u_2=(2, 1, 3) \\ u_3=(1, 1, 1) \end{cases} \quad \text{și} \quad B_2: \begin{cases} v_1=(1, -1, 2) \\ v_2=(2, 0, 1) \\ v_3=(1, 1, 0) \end{cases}$$

a) Să se arate că fiecare sistem format din cei trei vectori formează o bază în $V=\mathbb{R}^3$

b) Să se det. matricea T de trecere de la B_1 la B_2 și matricea S de la B_2 la B_1

c) Să se determine coord. vectorului $w=(1, 1, 0)$, atât în baza B_1 cât și în baza B_2

d) Să se determine coord. vectorului w când se trece de la baza B_1 la baza B_2 prin relațiile de transformare a coordonatelor

a) B_1 = bază <=> $\{u_1, u_2, u_3\}$ sunt liniar independenți și sistem de generatori! $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$. = dim V. Dacă sunt liniar independenți → formează o bază.
<= matricea (u_1, u_2, u_3) este nesingulară

Fie combinația liniară nulă $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_3$
De aici tb să rezulte că $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

sistem omogen, de 3 ec. cu 3 necunoscute. Sist. admite numai sol banală
det $A \neq 0 \Leftrightarrow$ rang $A = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \overset{}{\underset{R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 3 = \text{rang } \bar{A} \Rightarrow$$ Sist. compatibil determinat $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ → formează liniar independenți

→ u_1, u_2, u_3 sunt și o bază.

Fie $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\} \Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

$\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sunt liniar independenți → $n = 3$ → formează o bază

c) Să se determine coord. lui w în baza B_1.
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w$.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 2 \end{matrix}$$

$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = w \sim$ $\underline{u_1 - u_2 + 2u_3 = w}$
verificare - exercițiu.

(b) pt a determina matricea de trecere de la B_1 la B_2, vom scrie toți vectorii din B_2 în funcție de vectorii bazei B_1.

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot u_1 + \alpha_{21} \cdot u_2 + \alpha_{31} \cdot u_3 = v_1 \\ \alpha_{12} \cdot u_1 + \alpha_{22} \cdot u_2 + \alpha_{32} u_3 = v_2 \\ \alpha_{13} \cdot u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{33} \cdot u_3 = v_3 \end{cases}$$

fiecare ec. presupune rezolv. unui sistem de 3 ec. cu 3 nec.

Fiecare sistem are aceeași matrice a coeficienților = matricea formată cu col. vect: $u_1, u_2, u_3 \Rightarrow$ cele 3 sisteme se pot rezolva simultan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{/ -1}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = (u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{T}$$

I_3 T

pt det matricei de trecere de la B_2 la B_1

M_1: se calculează $S = T^{-1}$

M_2: se rez. sistemul: $(v_1, v_2, v_3 \mid u_1, u_2, u_3)$

analog cu a doua cer.

(d) coord lui w când se trece de la B_1 la B_2

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>verificare.</u>

$w = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \beta_3 \cdot v_3$

$w = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0, 0, 1) \Rightarrow \boxed{w = v_3}$

Scanned with CamScanner