SERII NUMERICE - STUDIU NATUREI SALE

<TEOREMĂ 1>

O serie infinită $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă $\Leftrightarrow$ șirul sumelor parțiale este convergent

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{S_n} + \dots$

S_n = Șirul sumelor parțiale

Limita șirului sumelor parțiale (S_n) S reprezintă suma seriei

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Dacă $\exists S$ -> Seria este convergentă

Dacă $\nexists S$ -> Seria este divergentă/oscilantă

<TEOREMA 2>

Pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ să fie convergent, este necesar {dar nu și suficient} ca termenii săi să formeze un șir convergent către 0, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dacă șirul format cu termenii unei serii nu este către 0, seria este divergentă

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ div.

SERII CU TERMENI POZITIVI

<PRIMUL CRITERIU - MONOTONIE> 1

L Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit. Dacă este nemărginit, este divergentă. Limita este suma seriei

<CRITERII DE COMPARAȚIE> 2

1) Fie $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{A}$ și $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{B}$ două serii. Dacă există un număr N aî $\forall n > N$ avem $a_n \leq b_n$

↳ Dacă seria B este convergentă ⟶ Seria A este convergentă și $A \leq B$

↳ Dacă seria A este divergentă ⟶ Seria B este divergentă

2) {La limită} Fie $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{A}$ și $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{B}$ două serii aî să existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$

↳ Dacă $\ell \in (0, +\infty)$ atunci cele două serii au aceeași natură

↳ Dacă $\ell = 0$ și B este convergentă, A este convergentă

↳ Dacă $\ell = +\infty$ și B este divergentă, A este divergentă

3) Fie $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{A}$ și $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{B}$ două serii. Dacă începând de la un rang $n > N$ avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n = N+1, \dots$$

↳ Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă -> A este convergentă

↳ Dacă seria A este divergentă -> B este divergentă

<CRITERIUL RADICAL/RĂDĂCINII {CAUCHY}> 3.1 CRITERIU SUFICIENT

↳ Fie o serie $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{A}$; Dacă există un număr N astfel încât $\forall n > N$ să avem

↳ $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ CONVERGENTĂ

↳ $\sqrt[n]{a_n} > q > 1$ DIVERGENTĂ

COROLAR: Fie A. Presupunem că există $\ell = \sqrt[n]{a_n}$

↳ $\ell < 1$ CONVERGENTĂ

↳ $\ell > 1$ DIVERGENTĂ

↳ $\ell = 1$ INCERT

<CRITERIUL RAPORTULUI {DIALEMBERT}> 3.2 CRITERIU SUFICIENT

↳ Fie o serie $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{A}$; Dacă există un număr N aî $\forall n > N$ avem

↳ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ $q \in (0,1)$ -> CONVERGENTĂ

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$ $q \in [1,\infty)$ -> DIVERGENTĂ

COROLAR

Fie o serie A, presupunem că există $\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$

↳ $\ell < 1$ CONV.

↳ $\ell > 1$ DIV.

↳ $\ell = 1$ INCERTITUDINE

<CRITERIUL LOGARITMIC> 3.3 CRITERIU SUFICIENT

↳ Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; Dacă începând de la un anumit rang N, aveme inegalitățile

↳ $\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} > 1$ $\forall n > N$ CONV.

↳ $\frac{\log \frac{1}{a_n}}{\log n} < 1$ $\forall n > N$ DIV.

<CRITERIUL RAABE-DUHAMEL> 4 DE FOLOSIT CÂND UNA DIN CRITERIILE SUF. SUNT INCERTE

↳ Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A). Dacă există un număr N aî $\forall n > N$ avem

↳ $n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geq \lambda > 1$ CONV

↳ $n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \leq \lambda < 1$ DIV

COROLAR

Fie A. Presupunem că există $\ell = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$

↳ $\ell > 1$ CONV

↳ $\ell < 1$ DIV.