DETERMINANȚI

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$ Determinant de ordin 2

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinant de ordin 3 | SARRUS

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) - (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}) - (a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{11})$$

Determinant de ordin 3 | TRIUNGHI

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot (7) + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (16) + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot (29) =$$

$$= -21 + 58 = 37$$

Metodă pentru Matrici de ordin superior ($\times \geq 3$)

Proprietăți:

- $\det A = \det A^t$
- Dacă elementele unei linii sau coloane sunt 0 $\rightarrow \det A = 0$
- Dacă într-un det schimb 2 linii (sau coloane) între ele, valoarea det obținut este egală cu opusul det inițial.
- Dacă 2 linii (sau coloane) sunt egale $\rightarrow \det A = 0$
- Dacă înmulțim o linie (sau o coloană) a unui det cu un scalar α, atunci valoarea det obținut este $\alpha \cdot$ det inițial.
- Dacă elementele a 2 linii (sau coloane) sunt proporționale, valoarea det este 0.
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot \det A$
- Det unei matrici triunghiulare este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală.
- $\det I_n = 1$
- $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ & & \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{in} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

15/02/2022

MATRICI

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}_{m\times n}(K)$$

OBS: ADUNAREA / SCĂDEREA ÎNTRE MATRICI SE FACE CÂND SUNT DE ACELAȘI TIP.

Proprietăți

- $A+B = B+A$ COMUTATIVITATE $\quad A-B \neq B-A$
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ ASOCIATIVITATE
- $A + O_n = O_n + A = A$ $\quad O_n$ element neutru
- $A + (-A) = O_n$ OPUSUL

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ ADUNARE

$$2\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 10 & 12 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad -3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & -15 & -18 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$ ÎNMULȚIRE CU SCALAR

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ 0 & 14 & 32 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,p} = \mathcal{M}_{m,p}$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad C\cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

• Dacă o linie (sau coloană) este combinație liniară a celorlalte linii (sau coloane) ale det, atunci -> det = 0.

• Dacă la o linie sau coloană a unui determinant adunăm elementele altei linii (sau coloane), înmulțite (eventual) cu același număr, valoarea det nu se schimbă.

Ex.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_2 + (-4)C_3 \to C_2}{\overset{C_1 + (-5)C_3 \to C_1}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 8 & -2 \\ -16 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 13 & 8 \\ -16 & -7 \end{vmatrix} = 37$$

Inversa unei Matrici

$A \in M_{n\times n}(K)$. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$ Condiția necesară

Algoritm:

1. $\det A \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$
2. Calc A^t
3. Calc A^* din A^t
4. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$

Ex. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

1) $\det A = 37 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

2) $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

3) $a^*_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10$

$a^*_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$

$a_{21}^* = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -11$

$a_{22}^* = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$

$a_{23}^* = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 13$

$a_{31}^* = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$

$a_{32}^* = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -29$

$a_{33}^* = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$

$A^* = \begin{bmatrix} 10 & -7 & -8 \\ -11 & 16 & 13 \\ 15 & -29 & -12 \end{bmatrix}$

4) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{37} & -\frac{7}{37} & -\frac{8}{37} \\ -\frac{11}{37} & \frac{16}{37} & \frac{13}{37} \\ \frac{15}{37} & -\frac{29}{37} & -\frac{12}{37} \end{bmatrix}$