09.12.2021

Aplicatii pregătitoare pentru lucrarea de control

(1°) Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + 4y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases}$$

→ sistem de ordinul 1, liniar, omogen, de 2 ecuații, cu două funcții necunoscute, cu coeficienți constanți.

Vom căuta soluții de forma:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} A_1 e^{rx} \\ A_2 e^{rx} \end{pmatrix} ; \begin{cases} y_1 = A_1 \cdot e^{rx} \\ y_2 = A_2 \cdot e^{rx} \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot r\, e^{rx} \\ A_2 \cdot r \cdot e^{rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} \cdot e^{rx}$$

$$\begin{cases} A_1 r \cdot e^{rx} = A_1 \cdot e^{rx} + 4A_2 \cdot e^{rx} & /: e^{rx} \\ A_2 r \cdot e^{rx} = A_1 \cdot e^{rx} + A_2 \cdot e^{rx} & /: e^{rx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot r = A_1 + 4A_2 \\ A_2 \cdot r = A_1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(1-r) + 4A_2 = 0 \\ A_1 + A_2(1-r) = 0 \end{cases} =$$

= sistem algebric, liniar, omogen, cu 2 ecuații și 2 necunoscute (A_1 și A_2). Sistemul are soluția banală $A_1 = A_2 = 0$. $\Rightarrow y_1 = y_2 = 0$ de care nu ne interesează decât soluția nulă evidentă fără rezolvare.

Conform teoremei lui Cramer, C.N.S. ca acest sistem omogen să aibă și soluții nenule este ca determinantul coeficienților săi să fie nul. $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det(A - r I_2) = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = matricea coeficienților sistemului

$\det(A - r I_2)$ = polinomul caracteristic al matricei A; $\Rightarrow r_{1,2}$ = valorile proprii ale matricei coeficienților

$\begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0$; $(1-r)^2-4=0$; $(1-r-2)(1-r+2)=0$

$(3-r)(-1-r)=0$ $(r-3)(r+1)=0 \Rightarrow \boxed{r_1=-1 \text{ și } r_2=3}$

$\begin{cases} A_1(1-r)+4A_2=0 \\ A_1+(1-r)A_2=0 \end{cases}$ A_1 și A_2 sunt coordonatele vectorului propriu corespunzătoare fiecărei valori proprii:

1° $\underline{r=-1}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2A_1+4A_2=0 \; /:2 \\ A_1+2A_2=0 \end{cases} \Rightarrow A_1+2A_2=0 \Rightarrow A_1=-2A_2$

$V_1=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ +1 \end{pmatrix}\cdot A_2 \Rightarrow \boxed{Y_1=\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}}$

2° $\underline{r=3}$ $\Rightarrow \begin{cases} -2A_1+4A_2=0 \; /:(-2) \\ A_1-2A_2=0 \end{cases} \Rightarrow A_1-2A_2=0$; $A_1=2A_2$

$V_2=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot A_2 \Rightarrow \boxed{Y_2=\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{3x}}$

Y_1 și Y_2 formează baza spațiului vectorial al soluțiilor sistemului. ($\det(Y_1, Y_2)\neq 0$) Ex!

Soluția generală a sistemului va fi

$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=(Y_1,\ Y_2)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=c_1\cdot Y_1+c_2\cdot Y_2=$

$=\begin{pmatrix} -2e^{-x} & 2e^{3x} \\ e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2e^{-x}\cdot c_1+2e^{3x}\cdot c_2 \\ c_1e^{-x}+c_2\cdot e^{3x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y_1=-2e^{-x}\cdot c_1+2\cdot e^{3x}\cdot c_2 \\ y_2=c_1e^{-x}+c_2\cdot e^{3x} \end{cases}$

o problemă de tip Cauchy $\Rightarrow$ să se determine soluția sistemului cu condițiile inițiale:

$y_1(0)=0$ și $y_2(0)=1$

- se det. soluția generală a sistemului;
- se impun condițiile lui Cauchy:

$\begin{cases} -2c_1+2c_2=0 \\ c_1+c_2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} -c_1+c_2=0 \\ c_1+c_2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2c_2=1 \\ c_1=c_2 \end{cases}$; $c_1=c_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-e^{-x}+e^{3x} \\ y_2=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot e^{3x} \end{cases}$

Metoda a-II-a (metoda eliminării)

Metoda permite transformarea sistemului (de ordinul 1) într-o singură ecuație dif. (de ordinul 2)
(ordinul ecuației este egal cu nr. necunoscutelor)

Fie sistemul:

$$\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z \end{cases} \quad \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

→ Se derivează una din ecuații

(1) $\Rightarrow \left.\begin{matrix} y'' = 2y' - z' \\ \text{dar } z' = y + 2z \end{matrix}\right\} \rightarrow y'' = 2y' - y - 2z$

$y'' - 2y' + y = -2z$

din prima ecuație $\Rightarrow z = 2y - y'$. →

$y'' - 2y' + y + 2(2y - y') = 0$; $y'' - 2y' + y + 4y - 2y' = 0$

$y'' - 4y' + 5y = 0$ → ec. dif. liniară, omogenă de ordinul 2, cu coef. ct.

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = r \cdot e^{rx}$; $y'' = r^2 \cdot e^{rx}$

$e^{rx}(r^2 - 4r + 5) = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 5 = 0$ = ecuația caracteristică asociată ec. diferențiale

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$y_1 = e^{2x} \cdot \cos x$; $y_2 = e^{2x} \cdot \sin x$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$;

$$\boxed{\begin{aligned} y &= C_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + C_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x \\ z &= -C_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + C_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin x \end{aligned}}$$

din: $z = 2y - y'$.

Ecuații cu variabile separate:

$$p(x)\cdot dx + q(y)\cdot dy = 0 \quad ; \quad y' = \left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{p(x)}{q(y)}$$

$$\int p(x)\,dx + \int q(y)\,dy = c$$

$$(1+y^2) + xyy' = 0 \; ; \quad y(1) = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \; ; \quad 1+y^2 = -xy\cdot\frac{dy}{dx} \quad \Big| :(1+y^2)$$

$$1 = -\frac{xy}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx} \; ; \quad -\frac{dx}{x} = \frac{y}{1+y^2}\cdot dy$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{y}{1+y^2}\cdot dy \; ; \quad -\ln x = \frac{1}{2}\int\frac{2y}{1+y^2}\cdot dy$$

$$-\ln x = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C$$

$$2\ln\frac{1}{x} = \ln(1+y^2) + \ln C$$

$$\ln\frac{1}{x^2} = \ln C(1+y^2) \iff C(1+y^2) = \frac{1}{x^2} \; ; \quad y^2+1 = \frac{K}{x^2}$$

$$x = 1 \; ; \; y(1) = 0 \; ; \quad 0+1 = \frac{K}{1} \Rightarrow K = 1 \; ; \quad \boxed{y^2+1 = \frac{1}{x^2}}$$

Ec. cu var. separabile:

$$P(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + Q(y)\cdot P_1(x)\cdot dy = 0 \quad \Big| : P_1(x)\cdot Q_1(y) \neq 0$$

$$\frac{P(x)}{P_1(x)}\cdot dx + \frac{Q(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = 0$$

$$\int\frac{P(x)}{P_1(x)}\cdot dx + \int\frac{Q(y)}{Q_1(y)}\cdot dy = C$$

Ec. Riccati

$$x^2\cdot y' + x^2y^2 = 2(xy-1) \; ; \quad y_1(x) = \frac{1}{x}$$

Forma generală: $y' + \underbrace{P(x)\cdot y^2 + Q(x)\cdot y + R(x)}_{\text{polinom de gr. 2 în } y} = 0$

Dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației, ex: $y = y_1(x)$, prin schimbarea de funcție necunoscută dată de relația:

$$y = y_1(x) - \frac{1}{z(x)},$$

ecuația se transformă într-o ecuație liniară și neomogenă, rezolvabilă cum.

$y_1 = \frac{1}{x} \rightarrow y_1' = -\frac{1}{x^2}$ $\quad \left(\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} \right)$

$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 2\left(x \cdot \frac{1}{x} - 1\right)$

$-1 + 1 = 2(1-1)$; $0 = 0$, $\rightarrow y_1 = \frac{1}{x}$ este soluție

Fie $y = y_1(x) - \frac{1}{z}$; $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$

$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{z'}{z^2}$; $y^2 = \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2}$

$x^2\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{z'}{z^2}\right) + x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) = 2x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) - 2$

$\cancel{-1} + \frac{x^2 \cdot z'}{z^2} \cancel{+1} \cancel{- \frac{2x}{z}} + \frac{x^2}{z^2} \cancel{-2} \cancel{+\frac{2x}{z}} \cancel{+2} = 0$

$\frac{x^2 \cdot z'}{z^2} + \frac{x^2}{z^2} = 0 \;/\cdot \frac{z^2}{x^2} \Rightarrow z' + 1 = 0$

$z' = -1 \Rightarrow z = \int -1 \cdot dx + C$; $\boxed{z = -x + C}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{1}{x} - \frac{1}{C - x}$ $\quad \boxed{y = \frac{C - 2x}{x(C-x)}}$

$\boxed{(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'}$

Ec. Bernoulli

$2x^2 \cdot y' - 4xy = y^2$; $y(1) = 1$.

$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha$; $\alpha \notin \{0, 1\}$

$\boxed{\alpha = 2}$; $\frac{y'}{y^\alpha} + P(x) \cdot \frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x)$. Fie $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha}$

$\Rightarrow z' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$; $\frac{z'}{1-\alpha} = \frac{y'}{y^\alpha} \Rightarrow$

$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x) \cdot z = Q(x) \rightarrow$ ec. liniară, neomogenă, de ordin 1.

$2x^2 \cdot \frac{y'}{y^2} - 4x \cdot \frac{1}{y} = 1$; $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$

$2x^2 \cdot (-z') - 4x \cdot z = 1 \;/ \cdot (-1)$

$2x^2 z' + 4x \cdot z + 1 = 0$. $\rightarrow$ ec. liniară, neomogenă, de ordin 1 ; in $z(x)$

$z = z_0 + z_p$

z_0 : $2x^2 z' + 4x \cdot z = 0 \;/ : 2x$ $\quad x z' + 2z = 0$

$x z' = -2z$; $\frac{z'}{z} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \int \frac{z'}{z} \cdot dx = -2\int \frac{1}{x}\, dx$

$\ln z = -2 \ln x + \ln C$

$\ln z = \ln \frac{1}{x^2} + \ln C$; $\ln z = \ln \frac{C}{x^2} \Rightarrow$

$$\boxed{z_0 = \frac{C}{x^2}}$$

z_p se det. prin met. variației constantelor

Se pp: $C = C(x) \Rightarrow z = \frac{C(x)}{x^2}$. Se cere să verifice ec. neomogenă: $z' = \frac{C'(x) \cdot x^2 - 2x \cdot C(x)}{x^4}$

$z' = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}$; $2x^2 z' + 4xz + 1 = 0$

$2x^2\left(\frac{C'}{x^2} - \frac{2C}{x^3}\right) + 4x \cdot \frac{C}{x^2} + 1 = 0$

$2C' - \cancel{\frac{4C}{x}} + \cancel{\frac{4C}{x}} + 1 = 0$; $2C' + 1 = 0$

$C' = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{C(x) = -\frac{x}{2} + K}$.

$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{x}{2} + K\right)$; $z(x) = \frac{K}{x^2} - \frac{1}{2x}$

$z = z_0 + z_p$; $z_0 = \frac{K}{x^2}$; $z_p = -\frac{1}{2x}$

$$\boxed{z(x) = \frac{K}{x^2} - \frac{1}{2x}}$$

$z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$; $\boxed{y = \frac{1}{\frac{K}{x^2} - \frac{1}{2x}}}$

$y(1) = \frac{1}{K - \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow K - \frac{1}{2} = 1$; $\boxed{K = \frac{3}{2}}$

$y = \frac{1}{\frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x}} = \frac{1}{\frac{3-2x}{2x^2}}$; $\boxed{y = \frac{2x^2}{3-2x}}$