21.10.2021

Ecuații diferențiale liniare, de ordinul 1, omogene și neomogene

Forma generală: $y' + P(x)\cdot y + Q(x) = 0$, (1°) unde

$P, Q : I \to \mathbb{R}$, funcții continue

Ec. s.n. liniară pt. că funcția necunoscută y și derivata sa y' apar în ecuație la puterea întâi.

Dacă $Q(x) \neq 0$, ecuația se numește și neomogenă

$y' + P(x)\cdot y = 0$ (2°) = ecuația liniară și omogenă atașată ecuației neomogene, (1°)

Teoremă Soluția generală a ecuației diferențiale liniare și neomogene de ordinul întâi este suma dintre soluția generală a ecuației omogene atașate și o soluție particulară a ecuației neomogene.

Dem. Ecuația liniară, neomogenă, de ordinul 1:

$y' + P(x)\cdot y + Q(x) = 0$. (1°)

Ecuația liniară și omogenă de ordinul 1 atașată ecuației (1°):

$y' + P(x)\cdot y = 0$ (2°)

Fie $y_p : I \to \mathbb{R}$ o soluție particulară a ecuației neomogene, (1°): $\Rightarrow y_p'(x) + P(x)\cdot y_p(x) + Q(x) = 0, \ \forall x \in I$

Fie și y = sol. generală a ecuației omogene (2°)

Considerăm funcția $z = y + y_p$

$\Rightarrow z' = y' + y_p'$

$$\frac{dz}{dx} + P(x)\cdot z + Q(x) = y' + y_p' + P(x)(y + y_p) + Q(x)$$

$$= \underbrace{(y' + P(x)\cdot y)}_{=0} + \underbrace{(y_p' + P(x)\cdot y_p + Q(x))}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

Algoritmul general de integrare a ecuației (1°) (liniară și neomogenă) are 2 etape

Consecința

esențiale:

ⓐ Determinarea soluției generale a ecuației omogene asociate: $y' + p(x)\cdot y = 0$. (2°)

ⓑ Determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene, (1°): $y' + p(x)\cdot y + q(x) = 0$.

Uneori se cere și determinarea soluției particulare, în condiția că pentru $x = x_0 \in I$, să ia valoarea $y_0 = y(x_0)$ $\Leftrightarrow$ graficul soluției particulare a (1°) să treacă prin punctul $A(x_0; y_0)$.

Impunând această condiție soluției generale se va determina valoarea unică a constantei C

Rezolvare

ⓐ – asociem ecuația omogenă: $y' + p(x)\cdot y = 0$. $\Rightarrow$ ecuație cu variabile separabile; $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$

$y' = -p(x)\cdot y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -p(x) \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\cdot dy = -\int p(x)\,dx + K. \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\cdot dx + K. \Rightarrow$

$|y| = e^{-\int p(x)\cdot dx + K}$; $|y| = e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot e^{K}$

$\Rightarrow \boxed{y = C\cdot e^{-\int p(x)\,dx}}$ → soluția generală a ecuației omogene asociate

Sau, mai simplu:

$\int \frac{y'}{y}\cdot dy = -\int p(x)\,dx \Rightarrow \ln y = -\int p(x)\,dx + \ln C$

$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)\cdot dx + \ln C} \Rightarrow y = e^{-\int p(x)\cdot dx}\cdot e^{\ln C}$

; $y = C\cdot e^{-\int p(x)\cdot dx}$

Exemple

(1°) $y' + \frac{y}{x-2} = 0$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y' = -\frac{y}{x-2}$; $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x-2} \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\cdot dy = -\int \frac{1}{x-2}\cdot dx$

$\ln|y| = -\ln|x-2| + \ln C$; $\ln|y| = \ln \frac{C}{|x-2|}$

$\Rightarrow |y| = \frac{C}{|x-2|} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{C}{x-2}}$

(2) $3y'(x^2-1) - 2xy = 0$; $3y'(x^2-1) = 2xy$

$3 \cdot \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2-1} \Rightarrow 3 \cdot \ln y = \ln(x^2-1) + \ln C$

$\ln y = \frac{1}{3} \cdot \ln(x^2-1) + \frac{1}{3} \ln C$; $\ln y = \ln (x^2-1)^{\frac{1}{3}} \cdot C^{\frac{1}{3}}$

$\ln y = \ln K \cdot \sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow \boxed{y = K \cdot \sqrt[3]{x^2-1}}$ sol. gen. a ec. omogene date

(3) Determinarea unei soluții particulare pentru ecuația neomogenă.

Metoda generală pt rezolvarea acestei probleme este datorată lui Lagrange și se numește metoda „constantelor variabile" sau metoda „variației constantelor".

– se pornește de la soluția generală a ecuației omogene asociate:

$y = C \cdot e^{-\int P(x) \cdot dx}$ $\quad (y' + P(x) \cdot y = 0)$

– se presupune că C nu este constantă, ci este funcție tot de variabila x ; $C = C(x)$, și se pune condiția ca $y = C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx}$ să verifice ecuația neomogenă inițială $(y' + P(x) \cdot y + Q(x) = 0)$

$y' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + C(x) \cdot \left(e^{-\int P(x) dx}\right)'$ $\quad \left(\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \cdot u'(x)\right)$

$y' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x))$

$y' = C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x) dx}$

Înlocuim în ecuația neomogenă:

$C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} - \cancel{P(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx}} + \cancel{P(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int P(x) dx}} + Q(x) = 0$

$\Rightarrow C'(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} + Q(x) = 0.$

$c'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = -a(x) \quad / \cdot e^{\int p(x)dx}$

$$\boxed{c'(x) = -a(x) \cdot e^{\int p(x)dx}}$$

$\Rightarrow C(x) = -\int \left(a(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right) dx + K$

Inlocuim in soluția generală a ecuației omogene

$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} \cdot C(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(K - \int a(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right)$

= soluția generală a ecuației neomogene.

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(K - \int a(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right)}$$ sol. gen. a ec. liniare și neomogene

$y = \underbrace{K \cdot e^{-\int p(x)dx}}_{y_0} - \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int\left(a(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right) dx}_{y_p}$

$y_0 = K \cdot e^{-\int p(x)dx}$ = sol. gen. a ec. omogene asociate

$y_p(x) = -e^{-\int p(x)dx} \cdot \int\left(a(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right) dx$ = soluția particulară a ecuației neomogene, determinată prin metoda variației constantelor. (Lagrange)

De remarcat

① În ecuația obținută pt $c'(x)$ termenii care conțin pe $c(x)$ se reduc.

② pt obținerea soluției generale a ecuației omogene asociate a fost necesară o singură operație de calcul a unei primitive:

$\to e^{-\int p(x)dx}$; $y_0 = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$.

③ Pentru obținerea soluției generale a ec. neomogene sunt necesare două operații de calcul a două primitive:

$e^{-\int p(x)dx}$; $\int\left(a(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right) \cdot dx$

Aplicatii

(1°) $y' + y = 2\cdot e^x$; $y(0) = 1$. (Cauchy)

a) Ec. omogenă asociată: $y' + y = 0$

$y' = -y$; $\frac{y'}{y} = -1 \Rightarrow \ln y = -x + \ln c$

$y = e^{-x + \ln c}$; $y = e^{-x} \cdot e^{\ln c}$; $\boxed{y_0 = c\cdot e^{-x}}$

b) Sol. particulară a ecuației neomogene. (Lagrange)

- presupunem că $c = c(x)$ și punem condiția să verifice ecuația inițială:

$y' = (c(x)\cdot e^{-x})' = c'(x)\cdot e^{-x} - c(x)\cdot e^{-x}$

$\Rightarrow \underbrace{c'(x)\cdot e^{-x} - c(x)\cdot e^{-x}}_{y'} + \cancel{c(x)\cdot e^{-x}} = 2\cdot e^x \Rightarrow c'(x)\cdot e^{-x} = 2\cdot e^x$

$\Rightarrow c'(x) = 2\cdot e^{2x} \Rightarrow c(x) = \int 2\cdot e^{2x}\, dx = 2\cdot \int e^{2x}\, dx =$

$= 2\cdot \frac{e^{2x}}{2} + K = \boxed{e^{2x} + K = c(x)}$

$\Rightarrow y = c(x)\cdot e^{-x}$; $y = (K + e^{2x})\cdot e^{-x}$; $\boxed{y = K\cdot e^{-x} + e^x}$

$y_0 = K\cdot e^{-x}$; $y_p(x) = e^x$

$y_p' = e^x \Rightarrow y_p' + y_p = e^x + e^x = 2e^x$ ✓

$\Rightarrow \boxed{y(x) = K\cdot e^{-x} + e^x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow K + 1 = 1 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \boxed{y = e^x}$

(2°) $y' + 2xy - x^3 = 0$. Soluția problemei Cauchy $y(0) = \frac{e-1}{2}$

a) Ec. omogenă: $y' + 2xy = 0$; $y' = -2xy$

$\frac{y'}{y} = -2x$; $\ln y = -2\int x\,dx + \ln C$; $\ln y = -x^2 + \ln C$

$\Rightarrow y = e^{-x^2 + \ln C}$; $y = e^{\ln C}\cdot e^{-x^2}$; $\boxed{y_0 = C\cdot e^{-x^2}}$

b) $C = C(x) \Rightarrow y = C(x)\cdot e^{-x^2}$

$y' = c'(x)\cdot e^{-x^2} - C(x)\cdot 2x\cdot e^{-x^2}$

$\Rightarrow \underbrace{c'\cdot e^{-x^2} - 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2}}_{y'} + 2x\cdot c(x)\cdot e^{-x^2} = x^3$

$c'(x)\cdot e^{-x^2} = x^3$; $c'(x) = x^3\cdot e^{x^2} \Rightarrow c(x) = \int x^3\cdot e^{x^2}\, dx$

$c(x) = \int x^3\cdot e^{x^2}\, dx = \int x\cdot x^2\cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int x^2\cdot 2x\, e^{x^2}\, dx$

$\underline{x^2 = t} \Rightarrow 2x\, dx = dt$

$\Rightarrow c(t) = \frac{1}{2}\int t\cdot e^t\, dt$

$\int f(t)\cdot g'(t)\, dt = f(t)\cdot g(t) - \int f'(t)\cdot g(t)\, dt$ Formula de integrare prin „părți"

$\int t\, e^t\, dt$

$\left.\begin{cases} f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1 \\ g'(t) = e^t \Rightarrow g(t) = \int e^t\, dt = e^t \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int t\, e^t\, dt = t\cdot e^t - \int 1\cdot e^t\, dt = t e^t - e^t$

$\Rightarrow c(t) = \frac{1}{2}\cdot \int t e^t\, dt = \frac{1}{2}(t e^t - e^t)$

$\Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}(x^2\cdot e^{x^2} - e^{x^2}) + K_1$ $\boxed{c(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}(x^2 - 1) + K}$

$y_0 = c(x)\cdot e^{-x^2}$

$\Rightarrow y = [\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}(x^2-1) + K]\cdot e^{-x^2}$

$\boxed{y(x) = K\cdot e^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2-1)}$ $y_0 = K\cdot e^{-x^2}$

$y_1 = \frac{1}{2}(x^2-1)$

$y(0) = \frac{e-1}{2}$ condiția inițială Cauchy

$y(0) = K - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} \Rightarrow K = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{e}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{e}{2} = K}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{e}{2}\cdot e^{-x^2} + \frac{1}{2}(x^2-1)}$ = soluția problemei Cauchy

Temă: problemele propuse din Testele de autoevaluare și Teme de control din Unitatea de învățare nr. 1, paragrafele 5 și 6.

Ecuații diferențiale de ordinul 1 neliniare, reductibile la ecuații liniare

1° Ecuația lui Bernoulli

Forma generală: $y' + P(x)\cdot y + Q(x)\cdot y^{\alpha} = 0$, $\alpha \notin \{0;1\}$

dacă $\alpha = 0 \Rightarrow y' + P(x)\cdot y + Q(x) = 0$ - ec. lin. și neomogenă, de ord. 1 - studiată.

dacă $\alpha = 1 \Rightarrow y' + (P(x) + Q(x))\cdot y = 0$ - ec. liniară și omogenă, de ord. 1 - studiată.

$P, Q : I \to \mathbb{R}$, continue pe I - interval.

Rezolvare. În ipoteza $y \neq 0$, se împarte cu y^{α}

$\Rightarrow \dfrac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\cdot \dfrac{y}{y^{\alpha}} + Q(x) = 0$

$\dfrac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\left(\dfrac{1}{y^{\alpha-1}}\right) + Q(x) = 0$. Se face schimbarea de funcție necunoscută $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$

$\Rightarrow z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$; $z' = (1-\alpha)\cdot \dfrac{y'}{y^{\alpha}}$

$\Rightarrow \dfrac{y'}{y^{\alpha}} = \dfrac{z'}{1-\alpha}$. Ecuația devine:

$\dfrac{z'}{1-\alpha} + P(x)\cdot z + Q(x) = 0$. → ec. liniară de ordinul 1, neomogenă

$\Rightarrow z = C\cdot f(x) + g(x)$ $\quad z = y^{1-\alpha}$

dar $z = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$; $\quad C\cdot f(x) + g(x) \Rightarrow y^{1-\alpha} = C\cdot f(x) + g(x)$

Sol: $z = C\cdot f(x) + g(x)$

$y = \left(C\cdot f(x) + g(x)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Exemple ① $x y' - y - 3x y^3 = 0$. $| : y^3$; $\alpha = 3$

Ip. $y \neq 0$. Trebuie verificat dacă $y = 0$ este soluție singulară sau particulară! cu $y^3 \Rightarrow$

- se împarte ecuația

$\dfrac{x y'}{y^3} - \dfrac{1}{y^2} - 3x = 0$;

- Se face schimbarea de funcție $z = \frac{1}{y^2}$; $z = y^{-2}$
- Derivăm $\Rightarrow z' = -2 \cdot y^{-3} \cdot y'$; $z' = -\frac{2}{y^3} \cdot y' \Rightarrow \boxed{\frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}}$

$\Rightarrow x \cdot \left(-\frac{z'}{2}\right) - z = 3x$; $-\frac{x \cdot z'}{2} - z = 3x \quad / \cdot (-2)$

$x z' + 2z = -6x \, / : x$ ec. liniară, neomogenă, de ord. 1

$z' + \frac{2}{x} \cdot z = -6$. ec. omogenă asociată: $z' + \frac{2}{x} \cdot z = 0$; $z' = -\frac{2}{x} \cdot z$

a) ec. omogenă

$\frac{z'}{z} = -\frac{2}{x}$ $\qquad z' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x}$; $\frac{dz}{z} = -\frac{2}{x} \cdot dx$; $\int \frac{dz}{z} = -2 \int \frac{dx}{x} + \ln C$

$\ln z = -2 \ln x + \ln C$; $\ln z = \ln x^{-2} + \ln C$; $\ln z = \ln \frac{C}{x^2}$

$\Rightarrow \boxed{z = \frac{C}{x^2}}$ sol. gen. a ec. omogene în z.

Presupunem că $C(x) = C \Rightarrow z = \frac{C(x)}{x^2}$

$\Rightarrow z' = \frac{C'(x) \cdot x^2 - 2x \cdot C(x)}{x^4}$; $z' = \frac{x^2 \cdot C'(x) - 2 \cdot C(x)}{x^3}$

$z' + \frac{2}{x} \cdot z = -6$

$\frac{x^2 \cdot C'(x) - 2 \cdot C(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = -6 \quad / \cdot x^3$

$x^2 \cdot C'(x) - \cancel{2 \cdot C(x)} + \cancel{2 \cdot C(x)} = -6 \cdot x^3$

$x^2 \cdot C'(x) = -6x^3$; $C'(x) = -\frac{6}{x} \Rightarrow C(x) = -6 \cdot \ln x + K$

$\Rightarrow C(x) = -6 \ln x + K$

$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{x^2} \cdot C(x)$; $z(x) = \frac{K - 6 \ln x}{x^2}$; $\boxed{z(x) = \frac{K}{x^2} - \frac{6 \ln x}{x^2}}$

Dar $z(x) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z(x)}$

$\Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{1}{\frac{K}{x^2} - \frac{6 \ln x}{x^2}}}$

Ecuația Riccati.

Forma generală

$y' + \underbrace{p(x)\cdot y^2 + q(x)\cdot y}_{\text{polinom de grd. 2 în } y} + r(x) = 0$; $p, q, r : I \to \mathbb{R}$, cont.

Liouville a demonstrat (în 1841) că soluția generală a acestei ecuații nu se poate obține prin integrări de funcții elementare. Totuși soluția sa generală se poate obține dacă se cunosc:

a) o soluție particulară a ecuației

b) două soluții particulare ale ecuației

c) trei soluții particulare ale ecuației.

a) Presupunem că se cunoaște o soluție particulară, $y_1(x)$, a ecuației: $\Rightarrow y_1' + p(x)\cdot y_1^2 + q(x)\cdot y_1 + r(x) = 0$

Se recomandă schimbarea de funcție necunoscută.

$y = y_1 \pm \frac{1}{z}$ unde z = noua funcție necunoscută

Fie $y = y_1 - \frac{1}{z}$ $\Rightarrow y' = y_1' + \frac{z'}{z^2}$; $y^2 = y_1^2 - 2\frac{y_1}{z} + \frac{1}{z^2}$

$$y_1' + \frac{z'}{z^2} + p(x)\left(y_1^2 - 2\frac{y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + q(x)\left(y_1 - \frac{1}{z}\right) + r(x) = 0.$$

$$\underbrace{y_1' + p(x)\cdot y_1^2 + q(x)\cdot y_1 + r(x)}_{=0} + \frac{z'}{z^2} - p(x)\cdot\frac{2y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} - \frac{q(x)}{z} = 0$$

$\Rightarrow z' - p(x)\cdot z\cdot 2y_1 + p(x) - q(x)\cdot z = 0$

$z' - (2y_1\cdot p(x) + q(x))\cdot z + p(x) = 0$. $\to$ ecuație liniară neomogenă de ord. 1.

$z' + f(x)\cdot z + g(x) = 0$

sol sa generală va fi: $z = C\cdot\varphi(x) + \psi(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_1(x) - \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)}}.$$

Exemplu: Să se integreze ecuația, știind că $y_1 = \frac{2}{x}$ este

$x^2y' + x^2y^2 + xy - 4 = 0$

o soluție particulară a sa.

verificare: $x^2\left(-\frac{2}{x^2}\right) + x^2\cdot\frac{4}{x^2} + x\cdot\frac{2}{x} - 4 =$

$= -2 + 4 + 2 - 4 = 0$ ✓

Facem schimbarea de funcție $y = y_1 - \frac{1}{z}$

$y = \frac{2}{x} - \frac{1}{z}$; z = noua funcție necunoscută.

$y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{z'}{z^2}$

$x^2\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{z'}{z^2}\right) + x^2\left(\frac{4}{x^2} - 4\cdot\frac{1}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{z}\right) - 4 = 0$

$\cancel{-2} + \frac{x^2 \cdot z'}{z^2} + \cancel{4} - 4\frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cancel{2} - \frac{x}{z} - \cancel{4} = 0.$

$\frac{x^2 z'}{z^2} - 5\frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} = 0 \,/\cdot z^2 = x z' - 5xz + x^2 = 0 \,/ : x$

$z' - 5z + x = 0$. → ecuație liniară și neomogenă, de ordinul 1, în funcția necunoscută z:

$z = z_o + z_p$

z_o : $z' - 5z = 0$; $z' = 5z$; $\frac{z'}{z} = 5$; $z' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx} = 5$; $\frac{dz}{z} = 5\cdot dx$; $\int\frac{dz}{z} = 5\int dx + \ln C$

$\ln z = 5x + \ln C \Rightarrow z = e^{5x + \ln C}$; $\boxed{z = C\cdot e^{5x}}$

Sol. particulară a ec. neomogene:

pp $C = C(x) \Rightarrow z = C(x)\cdot e^{5x} \Rightarrow$

$z' = C'(x)\cdot e^{5x} + C(x)\cdot 5\cdot e^{5x}$

dar $z' - 5z + x = 0 \Rightarrow C'(x)\cdot e^{5x} + \cancel{5\cdot C(x)\cdot e^{5x}} - \cancel{5\cdot C(x)\cdot e^{5x}} + x = 0$

$C'(x)\cdot e^{5x} = -x \Rightarrow C'(x) = -x\cdot e^{-5x}$

$\Rightarrow C(x) = -\int x\cdot e^{-5x}\cdot dx$; $\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^{-5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \frac{-e^{-5x}}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow C(x) = f\cdot g - \int f'\cdot g\, dx$

$C(x) = -x\cdot\frac{e^{-5x}}{5} + \frac{1}{5}\int e^{-5x}\cdot dx = -\frac{x\cdot e^{-5x}}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{-5x}}{5} + K$

$C(x) = \frac{e^{-5x}}{5}\left(-x + \frac{1}{5}\right) + K \Rightarrow z(x) = C(x)\cdot e^{5x} =$

$= \frac{e^{-5x}}{5}\left(-x + \frac{1}{5}\right)\cdot e^{5x} + K\cdot e^{5x} = \left(-x + \frac{1}{5}\right)\cdot\frac{1}{5} + K\cdot e^{5x}$

$\Rightarrow z = K\cdot e^{5x} + \frac{1}{5}\left(-x + \frac{1}{5}\right) = z_o + z_p$

$\Rightarrow y = \frac{2}{x} - \frac{1}{z}$

③ Presupunem că se cunosc două soluții particulare ale ecuației Riccati: y_1 și y_2

Se face schimbarea de funcție: $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$

z = noua funcție necunoscută.

Dacă ecuația inițială a fost: $y' + P(x) \cdot y^2 + Q(x) \cdot y + R(x) = 0$

prin această schimbare se transformă în:

$z' + P(x)(y_1(x) - y_2(x)) \cdot z$ → ec. liniară și omogenă de ordinul 1 în z. Soluția se obține printr-o singură operație de integrare

$\frac{z'}{z} = P(x)(y_2 - y_1)$ → $\ln z = \int P(x)(y_2 - y_1) \cdot dx + \ln C$

$\Rightarrow \boxed{z = C \cdot e^{\int P(x)(y_2 - y_1) \cdot dx}}$

y se scoate din relația $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$.

Aplicație $x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0$.

$x^2 y' + x^2 y^2 - 4xy + 4 = 0 \quad /: x^2 \ (\neq 0)$

$y' + y^2 - \frac{4}{x} \cdot y + \frac{4}{x^2} = 0$; Ecuația are o soluție de forma $y = \frac{a}{x}$:

$y' = -\frac{a}{x^2} \Rightarrow -\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} - \frac{4}{x} \cdot \frac{a}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$

$a^2 - 5a + 4 = 0 \qquad \Delta = 25 - 16 = 9; \ a_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{x}; \ y_2 = \frac{4}{x}$

$\Rightarrow z = \frac{y - \frac{1}{x}}{y - \frac{4}{x}}$ ... etc sau cu varianta 1:

Temă: Ecuațiile Bernoulli și Riccati din Testele de antrenament și Temele de control.
- Vezi materiale de pe canalul E.D.S.D., An 2I

$\begin{cases} y = y_1 - \frac{1}{z} \\ y = \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \text{ sau} \\ y = \frac{4}{x} - \frac{1}{z} \quad \ldots \text{etc.} \end{cases}$