**11.** a) Arătați că funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sqrt{x-1}$ are pe $(1,\infty)$ o primitivă de forma $F(x)=P(x)\sqrt{x-1}$, unde $P(x)$ este o funcție polinomială de gradul trei care se va preciza.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $G$ să fie o primitivă a lui $g$ în cazurile:

i) $g,G:\left(-\frac{1}{3},\infty\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{1+3x}, G(x)=(ax+b)\sqrt{1+3x}$;

ii) $g,G:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x\ \ +1}}, G(x)=(ax+b)\sqrt{x+1}$;

iii) $g,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}, G(x)=(ax+b)\sqrt{x^2+1}$.

c) Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $G$ să fie o primitivă a lui $g$ în cazurile:

i) $g,G:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=x\sqrt{3-2x}, G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$;

ii) $g,G:(-\infty,4)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{1}{2}(5x+4)\sqrt{4-x}, G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{4-x}$;

iii) $g,G:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{5x}{2}\sqrt{x+2}, G(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x+2}$;

iv) $g,G:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\ln^2 x, G(x)=x(a\ln^2 x+b\ln x+c)$;

v) $g,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^2e^x, G(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

**12.** Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, G(x)=x^2|x-a|-|x-b|$ să fie primitiva unei funcții $g;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

**13.** Dată fiind o funcție $g$ să se determine o primitivă $G$ a lui $g$ al cărei grafic să conțină punctul A, în cazurile:

*a)* $g(x)=4x^3-2x+3, A(1,3)$; *b)* $g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}, A(1,0)$; *c)* $g(x)=\sin x+\cos 2x, A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$;

*d)* $g(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^3}, A(-2,0)$.

**14.** Fie $f:I\to\mathbb{R}, 0\in I$, o funcție impară. Arătați că o primitivă $F:I\to\mathbb{R}$ pe $I$ a lui $f$ este funcție pară.

Dacă $f$ este pară, atunci o primitivă $F:I\to\mathbb{R}, F(0)=0$, pe $I$ a lui $f$ este impară.

**15.** a) Arătați că funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\mathrm{tg}x)$ este derivabilă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și calculați $f'(x)$.

b) Deduceți o primitivă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru funcția $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

**16.** a) Arătați că există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{a\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{b\cos x}{1+\sin x}, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

2) Care este greutatea şoarecelui după 5 săptămâni?

**24.** Un elev şi-a depus suma de 1000 € într-o bancă cu dobânda compusă continuă de 5 %. Câţi bani va avea în cont după 5 ani şi care este dobânda câştigată în această perioadă?

**25.** Să se calculeze următoarele integrale: 1) $\int dx, x\in\mathbb{R}$; 2) $\int \pi dx$; 3) $\int x^3dx, x\in\mathbb{R}$;

4) $\int \frac{1}{x^2}dx, x>0$; 5) $\int x\sqrt{x}dx, x\geq 0$; 6) $\int (x^2-3x)dx, x\in\mathbb{R}$; 7) $\int x^2(x-2)dx, x\in\mathbb{R}$;

8) $\int (x-1)^2(x^2+5)dx, x\in\mathbb{R}$; 9) $\int \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)dx, x<0$; 10) $\int \left(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}\right)dx, x>0$;

11) $\int \left(\frac{1}{3}-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}\right)dx, x\geq 0$; 12) $\int \frac{(x^2-2)^2}{x^3}dx, x>0$; 13) $\int \frac{dx}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$;

14) $\int \frac{x^2dx}{x^2+1}$; 15) $\int \left(\frac{1-x}{x^2}\right)^2dx, x>0$; 16) $\int (2^x-3e^x)dx, x\in\mathbb{R}$; 17) $\int 2^{2x}e^xdx, x\in\mathbb{R}$;

18) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx, x\in\mathbb{R}$; 19) $\int \frac{dx}{x^2-9}, x\in(-3,3)$; 20) $\int \frac{x^2}{x^2-9}dx, x>3$; 21) $\int \frac{dx}{4x^2-9}$, $x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$; 22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}, x\in\mathbb{R}$; 23) $\int \frac{\sqrt{x^2+25}+3}{\sqrt{x^2+25}}dx, x\in\mathbb{R}$; 24) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$; 25) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}, x\in(-4,4)$; 26) $\int \frac{\left(\sqrt{x^2+9}-5\right)dx}{x^2+9}, x\in\mathbb{R}$; 27) $\int \frac{(3-x^2)dx}{\sqrt{16-x^2}}, x\in(-4,4)$;

28) $\int \frac{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^4-4}}dx, x>\sqrt{2}$; 29) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$; 30) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx, x\in\mathbb{R}$;

31) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x+1}dx, x\in\mathbb{R}$; 32) $\int \frac{13x^2+2}{(4x^2+1)(9x^2+1)}dx$; 33) $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx, x\in\mathbb{R}$;

34) $\int \frac{1-\sin^3x}{\sin^2x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 35) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx, x\in\mathbb{R}$; 36) $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

37) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 38) $\int \mathrm{tg}^2x\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 39) $\int (1+\mathrm{tg}^2x)dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

40) $\int \left(2\sin^2\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}\right)dx, x\in\mathbb{R}$; 41) $\int \frac{dx}{\sin(x+2)\sin(x+3)}, \sin(x+k)\neq 0, k=2,3$;

42) $\int \arcsin(\sin x)dx, x\in[0,2\pi]$; 43) $\int \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}2x\cdot\mathrm{tg}3x\,dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

## Problema existenţei primitivelor. Funcţii care admit primitive

**1.** Arătaţi că funcţiile de mai jos admit primitive pe domeniile de definiţie şi determinaţi o primitivă pentru fiecare funcţie.

## 1.5 METODE DE CALCUL ALE PRIMITIVELOR

Acest paragraf conține câteva reguli și sfaturi pentru integrare. Nu este p[...] să formulăm un set de reguli prin care orice funcție să poată fi integrată. Metodel[e] [...] vor urma ne vor permite, în general, nu să integrăm direct ci să transformăm func[ția] [...] integrat astfel încât ca să ia forma unor integrale standard așa cum apar în tabe[lul] [...] integrale uzuale.

### 1) Metoda integrării directe (prin formule)

Această metodă utilizează integralele nedefinite din tabelul cu integrale prec[edent] [...] operațiile cu acestea (sumă și înmulțirea cu scalari).

**Exerciții rezolvate**

**Să se calculeze integralele următoare:**

**1.** $I=\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx, x<0.$

**R.** Avem $I=\int x^2dx+\int 2xdx+\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}+x^2+\ln(-x)+\mathcal{C}.$

**2.** $I=\int\frac{x-3}{x^5}dx, x>0.$

**R.** $I=\int\left(\frac{x}{x^5}-\frac{3}{x^5}\right)dx=\int\frac{dx}{x^4}-3\int\frac{dx}{x^5}=\int x^{-4}dx-3\int x^{-5}dx=-\frac{1}{3x^3}+\frac{3}{4x^4}+\mathcal{C}.$

**3.** $I=\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx, x\geq 0.$

**R.** Se obține: $I=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{4}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+$

$+\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\mathcal{C}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+\mathcal{C}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+\mathcal{C}.$

**Observație.** Am scris radicalii ca puteri cu exponent raționali și am aplicat formula

$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\mathcal{C}, \alpha\neq-1.$

**4.** $I=\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx, x>0.$

**R.** Se obține:

$$I=\int\left(2x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\mathcal{C}=4x^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}+$$

$$+\mathcal{C}=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\mathcal{C}.$$

**5.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}},x\in\mathbb{R}.$

**R.** Se scrie $I$ sub forma $I=\int\frac{dx}{2\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)+\mathcal{C}.$

**6.** $I=\int\frac{dx}{9x^2-4},x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$

**R.** Avem: $I=\int\frac{dx}{9\left[x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{2}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x+\frac{2}{3}}\right|+\mathcal{C}=\frac{1}{12}\cdot\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+$

$$+\mathcal{C}=\frac{1}{12}\ln\left(\frac{2-3x}{3x+2}\right)+\mathcal{C}.$$

**7.** $I=\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}},x\in\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right).$

**R.** Se scrie $I$ astfel:

$$I=\int\frac{dx}{3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{4}{3}}+\mathcal{C}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{4}+\mathcal{C}.$$

**8.** $I=\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$

**R.** Avem:

$$I=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+\mathcal{C}$$

**9.** $I=\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx,x\in(-1,1).$

**R.** Avem: $I=\int\frac{2dx}{1+x^2}-\int\frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\operatorname{arctg} x-3\arcsin x+\mathcal{C}.$

**10.** $I=\int\left(2e^x-3^x\right)dx,x\in\mathbb{R}.$

**R.** Se obține: $I=2\int e^x dx-\int 3^x dx=2e^x-\frac{3^x}{\ln 3}+\mathcal{C}.$

**11.** $I=\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^4}dx, x>0$.

**R.** Găsim: $I=\int \frac{x^4-2x^2+1}{x^4}dx=\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4}=x-$

$-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+\mathcal{C}$.

**12.** $I=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx, x\in\mathbb{R}$.

**R.** Avem: $I=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int(1-\sin x)dx=\int dx-\int \sin x dx=$

$=x+\cos x+\mathcal{C}$.

**13.** $I=\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**R.** Se obține: $I=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\sin x dx=-\operatorname{ctg} x+\cos x+\mathcal{C}$.

**14.** $I=\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx, x\in(-1,1)$.

**R.** Găsim: $I=\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\right)dx=-\int\frac{dx}{x^2-1}-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\arcsin x+\mathcal{C}=$

$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)-\arcsin x+\mathcal{C}$.

**15.** $I=\int\frac{3+\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}dx, x\in\mathbb{R}$.

**R.** Avem: $I=\int\left(\frac{3}{x^2+4}+\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}\right)dx=3\int\frac{dx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\mathcal{C}$.

## Exerciții propuse

**Să se calculeze integralele nedefinite ale următoarelor funcții:**

1) $f(x)=x^2-2x+3, x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=x+\frac{5}{x}, x<0$; 3) $f(x)=2x-\frac{3}{x}+\sqrt{x}, x>0$;
4) $f(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)^2, x\ge 0$; 5) $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}, x>0$; 6) $f(x)=x-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}, x<0$;
7) $f(x)=x-3\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}, x\ge 0$; 8) $f(x)=\frac{x-1}{x^3}, x<0$; 9) $f(x)=x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}, x\ge 0$;
10) $f(x)=\frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}, x>0$; 11) $f(x)=\frac{9-x}{3+\sqrt{x}}, x\ge 0$; 12) $f(x)=x-3e^x, x\in\mathbb{R}$;

13) $f(x)=\frac{1}{x}-2^x+\frac{1}{x^2}-3^x, x>0$; 14) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^3}, x<0$; 15) $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$, $x>0$; 16) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}, x>2$; 17) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}, x<-2$; 18) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}, x>2$;

19) $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}, x>2$; 20) $f(x)=\frac{1}{3x^2-4}, x>\frac{2}{\sqrt{3}}$; 21) $f(x)=\frac{1}{x^2+4}, x\in\mathbb{R}$;

22) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}, x\in\mathbb{R}$; 23) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x^2+4}, x\in\mathbb{R}$; 24) $f(x)=\frac{1}{3x^2+5}, x\in\mathbb{R}$;

25) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}, x\in(-3,3)$; 26) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}, x\in(-3,3)$; 27) $f(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, x>2$; 28) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}, x>2$; 29) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x^2-5}}, x>\frac{\sqrt{5}}{2}$;

30) $f(x)=\frac{2x^2+3}{(x^2-1)(x^2+4)}, x>1$; 31) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-3}+1}{x^2-3}, x>\sqrt{3}$;

32) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 33) $f(x)=-\frac{2}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

34) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}, x\in\mathbb{R}$; 35) $f(x)=\mathrm{tg}^2x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 36) $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$; 37) $f(x)=\frac{\sin x}{3\sin x+4\cos x}, g(x)=\frac{\cos x}{3\sin x+4\cos x}, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**2) Metoda intergrării prin părţi**

**Intergrala nedefinită şi diferenţiala**

Un rol deosebit de important în calculul integral îl joacă diferenţiala unei funcţii. Fie $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, o funcţie derivabilă şi $x_0\in I$. Funcţia $f$ este derivabilă în $x_0$ dacă există şi este finită limita (raportului) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)\in\mathbb{R}$. Aceasta înseamnă că pentru $h$ mic, $h\neq 0$, raportul $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se poate aproxima cu numărul $f'(x_0)$, adică putem scrie $f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$, unde membrul stâng se notează de obicei cu $\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0)$ ($\Delta f$ îl citim: delta $f$) şi reprezintă creşterea lui $f$ de la $x_0$ la $x_0+h$ (Fig. 7).