LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 10

MAȘINI TURING

MAȘINI TURING

- Mașini Turing
- Funcții calculabile Turing

MAȘINI TURING

-Conceptul a fost introdus de ***Alan Turing*** *în 1936.*

-Apariţia maşinii care-i poartă numele este dată de încercarea de a rezolva una dintre problemele celebre propuse de *David Hilbert, Entscheidungs problem* ***„este matematica*** **decidabilă ?”** Cu alte cuvinte, există un algoritm care, pornind de la o descriere formală a unei probleme matematice, să poată determina valoarea de adevăr a problemei.

Nu se cere nici să se justifice răspunsul şi nici să producă o demonstraţie.

-Problema a fost rezolvată, independent, de Alonzo Church (utilizând lambda-calculul) şi de Alan Turing. Răspunsul dat de Turing şi demonstrat cu ajutorul maşinii construite de el, este **negativ.**

MAȘINI TURING

Descrierea intuitivă a maşinii Turing

-Considerăm o bandă semiinfinită **B** şi un dispozitiv automat **CS**(citeşte/scrie) care are un număr finit de stări.

-Banda B este împărţită în celule, iar automatul CS se mişcă faţă de banda B cu câte un pas (corespunzător unei celule) înainte şi înapoi.

-Vom interzice deplasarea lui CS spre stînga, atunci când se află în dreptul primei celule. Dispozitivul CS se va numi **cap de citire-scriere.**

MAȘINI TURING

Descrierea intuitivă a maşinii Turing

Etapa 1: Capul de citire-scriere CS citeşte ce este scris pe celula din dreptul său, după care poate şterge şi scrie alte caractere sau poate să lase ceea ce a fost.

Etapa 2: Capul de citire - scriere CS se mută la stînga, la dreapta sau rămîne pe loc.

Etapa 3: Maşina trece în altă stare sau rămîne în aceeaşi stare.

Aceste trei etape formează un <u>**pas de calcul.**</u>

MAȘINI TURING

O ***bandă*** este un şir a_1, a_2, a_3...... în care fiecare a_k, este 0 sau 1.

O ***poziţie a benzii*** este formată dintr-o pereche (j, k) cu j, $k \in N^+$ şi dintr-o bandă

$$(j, k): \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3, \ldots\ldots, a_j \ldots$$

j reprezintă *poziţia* capului de citire-scriere, iar **k** este *starea* pentru această poziţie a benzii.

Exemplul 1:

(3, 2): 1 1 1 1 0 1 0 ....

Semnul de citire-scriere se află în dreptul celulei a treia, iar starea este 2.

MAȘINI TURING

O ***maşină Turing*** este un triplet ordonat de funcţii (d, p, s) care au acelaşi domeniu de definiţie D, unde D este o mulţime finită de perechi de forma (i, k) cu $i \in \{0,1\}$ şi $k \in N^+$ iar cele trei funcţii sunt precizate astfel:

$d : D \rightarrow \{0, 1\}$

$p : D \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

$s : D \rightarrow N^+$

Dacă $M = (d, p, s)$, atunci *domeniul* DomM al maşinii Turing M este D.

MAŞINI TURING

Exemplul 2: Considerăm maşina Turing M = (d, p, s) definită astfel:

D = { (1, 2) }

d(1, 2) = 0, p(1, 2) = -1, s(1, 2) = 4

Dacă avem o poziţie a benzii **t**:

(3, 2): 1 1 1 1 0 1 0 ....

Atunci dacă aplicăm o dată maşina vom obţine o nouă poziţie a benzii:

(2, 4): 1 1 0 1 0 1 0 .....

MAŞINI TURING

Exemplul 3:

Tabelul următor:

	0	1
1	1L2	0R1
2	1O2	

reprezintă maşina Turing M = (d, p, s) definită astfel:

Dom M = { (0, 1), (1, 1), (0, 2) }

d(0, 1) = 1, p(0, 1) = - 1, s(0, 1) = 2,

d(1, 1) = 0, p(1, 1) = 1 , s(1, 1) = 1,

d(0, 2) = 1, p(0, 2) = 0, s(0, 2) = 2.

MAȘINI TURING

Ex 1: Sa se efectueze un calcul cu mașina Turing de mai sus pentru poziția benzii:

(2, 1): 0 1 0 0 0 0............

MAȘINI TURING

Pentru a avea o scriere prescurtată a unei benzi vom nota:

$\underbrace{0\ 0 \ldots 0}_{\text{n ori}}$ cu 0^n ; $\qquad$ $\underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{\text{n ori}}$ cu 1^n

De exemplu, banda:

0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 ......

se va scrie:

$0 \quad 1^3 \quad 0^2 \quad 1^4$

suprimând ultimii 0 care apar.

MAȘINI TURING

Definiţie: Fie $X \subseteq (N^+)^k$. Vom nota cu $R_X : (N^+)^k \to \{1, 2\}$ funcţia definită astfel:

$$R_X(n_1, \ldots\ldots, n_k) = \begin{cases} 1, & dacă \quad (n_1, \ldots, n_k) \in X \\ 2, & dacă \quad (n_1, \ldots, n_k) \notin X. \end{cases}$$

Vom spune că relaţia X este calculabilă Turing dacă R_X este calculabilă Turing.

MAŞINI TURING

<u>Exemplul4:</u> Fie X = mulţimea numerelor impare. Atunci:

$$R_X(n) = \begin{cases} 1, & dac\breve{a} \quad n \text{ } este \text{ } impar \\ 2, & dac\breve{a} \quad n \text{ } este \text{ } par \end{cases}$$

Considerăm maşina Turing următoare:

	0	1
1	**1L2**	**0R2**
2	**103**	**0R1**

Această maşină Turing poate calcula funcţia R_X . Scrieti un calculul pentru n = 3 şi n = 2.

MAȘINI TURING

<u>Exemplul 5:</u> Fie $X = \{m \in N^{+} / m \geq 2\}$. Atunci:

$$R_X(m) = \begin{cases} 1, & dacă \quad \mathrm{m} \geq 2 \\ 2, & dacă \quad \mathrm{m}=1 \end{cases}$$

Considerăm maşina Turing următoare:

	0	1
1		**1R2**
2	**1L5**	**0R3**
3	**0L4**	**0R3**
4	**0L4**	**1O5**

Această maşină Turing poate calcula funcţia R_X . Scrieti un calculul pentru m = 3 si m=1.

MAȘINI TURING

Fie M o maşină Turing şi $g : (N^{+})^{k} \rightarrow N^{*}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $(n_1,\ldots,n_k) \in (N^{+})^{k}$ există un calcul (în raport cu M) care are intrarea:

$$(2,\ 1):\ 0\ \underset{n_1\ \text{ori}}{1\,1\ldots1}\ 0\ \underset{n_2\ \text{ori}}{1\,1\ldots1}\ 0 \ldots 0\ \underset{n_k\ \text{ori}}{1\,1\ldots1}\ 0\ \ 0 \ldots$$

şi ieşirea de foma:

$$(k,\ \ell):\ \underbrace{0\ 0\ldots0}_{(k-1)\ \text{ori}}\ \underset{t\ \text{ori}}{1\ 1\ldots1}\ \ 0 \quad 0 \ldots\ldots.$$

unde $t = g(n_1,\ldots,n_k)$. Spunem în acest caz că funcţia **g** este ***calculabilă Turing*** şi că M *calculează* pe g.

MAŞINI TURING

Exemplul 6: Vom arăta acum că funcţia f(n) = 2, pentru orice $n \in N^+$, este calculabilă Turing cu maşina Turing

	0	1
1	1L2	0R1
2	1O2	

Într-adevăr, avem următorul calcul cu M:

(2, 1): 0 1^n 0 0 ....

(3, 1): 0 0 1^{n-1} 0 0...

(4, 2): 0 0 1^{n-2} 0 0...

....

(n+1, 2): 0^n 1 1 0 0 0

MAȘINI TURING

Caz particular n =3

(2, 1):	0	1	1	1	0	0	0....
(3, 1):	0	0	1	1	0	0	0....
(4, 1):	0	0	0	1	0	0	0....
(5, 1):	0	0	0	0	0	0	0....
(4, 2):	0	0	0	0	1	0	0....
(4, 2):	0	0	0	1	1	0	0....

MAȘINI TURING

Propoziţia 1: Următoarele funcţii sunt calculabile Turing:

(i) funcţia sumă: Sum (m, n) = m + n.

(ii) proiectiile $pr_n^i(m_1, \ldots\ldots m_n) = m_i$.

(iii) funcţia constantă: $Ct_k^d(n_1, \ldots n_k) = d$.

(iv) funcţia predecesor :

$$\mathrm{Pred}(m) = \begin{cases} m-1 & \text{daca } m \geq 2 \\ 1 & \text{daca } m=1 \end{cases}$$

MAŞINI TURING

Dem: (i) Considerăm, maşina Turing:

	0	1
1		0R2
2	1L3	1R2
3	0R4	1L3

Următorul şir este un calcul al lui **m + n** cu ajutorul acestei maşini Turing:

$(2, 1)$: $0 \quad 1^m \quad 0 \quad 1^n$

$(3, 2)$: $0 \quad 0 \quad 1^{m-1} \quad 0 \quad 1^n$

....

$(m+2, 2)$: $0 \quad 0 \quad 1^{m-1} \quad 0 \quad 1^n$

$(m+1, 3)$: $0 \quad 0 \quad 1^{m-1} \quad 1 \quad 1^n$

....

$(2, 3)$: $0 \quad 0 \quad 1^{m+n}$

$(3, 4)$: $0 \quad 0 \quad 1^{m+n}$

MAȘINI TURING

Ex 2: Efectuați calculul pentru m=2 și n=3.

MAȘINI TURING

Ex 3: Demonstrați (ii) pentru cazul n=4 și i=3 cu mașina Turing

	0	1
1	0R2	0R1
2	0R3	0R2
3	0R4	1R3
4	0L5	0R4
5	0L5	1L6
6	0R7	1L6

MAȘINI TURING

Ex 4: Scrieți calculul valorii Ct_3^2 in punctul (2,1,1) cu mașina Turing

	0	1
1	0R2	0R1
2	1L3	0R1
3	1O3	