UNITATEA DE ÎNVĂŢARE Nr. 2 –
CALCUL DIFERENŢIAL ÎN $\mathbb{R}$ ŞI $\mathbb{R}^n$

Obiective urmărite:

1. Însuşirea noţiunilor fundamentale şi a algoritmilor specifici de rezolvare a problemelor din domeniul calculului diferenţial în $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^n$;
2. Formarea şi dezvoltarea bazei matematice a studenţilor pentru disciplinele fundamentale şi de specialitate din anii superiori;
3. Formarea şi dezvoltarea deprinderilor şi aptitudinilor de analiză logică, formulare corectă şi argumentare fundamentată în soluţionarea problemelor de natură matematică şi de specialitate, precum şi formarea şi dezvoltarea unui raţionament riguros şi a abilităţilor de calcul rapid şi corect necesare pentru diferite aplicaţii.
4. Formarea şi dezvoltarea capacităţilor de abstractizare, generalizare şi sinteză;
5. Aplicarea cunostintelor dobandite la curs in alte domenii ale stiintei si practicii.

Rezumat:

În această unitate de învăţare sunt prezentate, pe parcursul a două lecţii, principalele noţiuni teoretice referitoare la limite de funcţii vectoriale de variabilă vectorială, continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială, funcţii implicite, dependenţă funcţională, extremele libere şi condiţionate ale funcţiilor de mai multe variabile, precum şi algoritmii cei mai des întâlniţi pentru rezolvarea problemelor specifice referitoare la tematica acestui modul.

După parcurgerea celor două lecţii din cuprinsul unităţii de învăţare studenţii vor dobândi cunoştinţele teoretice şi îşi vor forma deprinderile practice cu ajutorul cărora vor putea recunoaşte, înţelege şi rezolva probleme specifice referitoare la tematica anunţată anterior.

Organizarea materialului este următoarea:

- la începutul fiecărei lecţii sunt prezentate pe scurt principalele rezultate teoretice, formule şi algoritmi de rezolvare pentru problemele specifice temei studiate;
- urmează un număr semnificativ de probleme rezolvate, care acoperă întreaga gamă a noţiunilor teoretice şi algoritmilor de rezolvare prezentaţi anterior;
- în finalul fiecărei lecţii este propus un test de autoevaluare şi la sfârşitul unităţii de învăţare una sau două teme de control, problemele propuse fiind variate, ordonate după gradul lor de dificultate şi acoperind întreaga tematică studiată în unitatea de învăţare respectivă.

Materialul trebuie parcurs în ordinea sa firească prezentată în cuprinsul unităţii de învăţare, inclusiv în porţiunea referitoare la aplicaţii. Metoda de studiu va fi cea specifică disciplinelor matematice, cu utilizarea expresă a adnotărilor făcute cu creionul pe tot parcursul textului. Se recomandă întocmirea unui caiet de probleme. Pentru fiecare tip de exerciţiu se recomandă identificarea algoritmului şi descompunerea acestuia în etape succesive. Se recomandă studierea soluţiilor problemelor rezolvate şi rezolvarea completă a problemelor propuse în testele de autoevaluare şi în temele de control propuse.

Cuvinte cheie:

Funcţie reală de variabilă vectorială, funcţie vectorială de variabilă vectorială, limite iterate, continuitate parţială, derivate parţiale, diferenţiabilitate, extreme libere şi extreme condiţionate, funcţii implicite şi extreme de funcţii implicite, dependenţă funcţională, transformări regulate.

Timp de studiu:

Timpul mediu necesar parcurgerii şi însuşirii noţiunilor teoretice, algoritmilor practici de rezolvare a problemelor, formării deprinderilor practice de rezolvare şi dobândirii competenţelor anunţate este de aproximativ 2-3 ore de studiu pentru fiecare lecţie, într-un ritm constant, pe toată durata semestrului. Se adaugă un timp mediu aproximativ egal pentru rezolvarea Testelor de autoevaluare si a Temelor de control.

LECŢIA 1 - FUNCŢII VECTORIALE. LIMITE. CONTINUITATE

1. Funcţii vectoriale. Limite. Continuitate

Definiţia 3.1.1. O funcţie $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^n$, se numeşte ***funcţie reală de variabilă vectorială*** $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$.

Definiţia 3.1.2. Fie *m* funcţii reale $f_1, f_2, ..., f_m$ definite pe o aceeaşi mulţime $X \subset \mathbb{R}^n$. Corespondenţa:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to \left(f_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ...,\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \right)$$

defineşte o funcţie $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ pe $X \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Se spune că *f* este o ***funcţie vectorială de variabilă vectorială***.

Definiţia 3.1.3. Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R}^m,\ X \subset \mathbb{R}^n$ şi *a* un punct de acumulare al mulţimii *X*. Se spune că un vector $b \in \mathbb{R}^m$ este ***limita funcţiei** f **în punctul*** *a* dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x \in X$, $x \neq a$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Notaţie: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Definiţia 3.1.4. Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R}^m,\ X \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in X$. Se spune că funcţia *f* este ***continuă în punctul*** *a* dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x \in X$, cu $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Dacă *a* este punct de acumulare al mulţimii *X*, atunci continuitatea funcţiei f în *a* este echivalentă cu:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ sau } \lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0.$$

Observaţii:

1) Dacă f este continuă în punctul a, există o vecinătate a lui a în care funcţia este mărginită.

2) Dacă f este continuă în punctul a, atunci funcţia $\|f\|$ este continuă în punctul a. Reciproca nu este adevărată în general.

3) Dacă f şi g sunt continue în punctul a, funcţiile $f+g$ şi $\lambda \cdot f$ sunt continue în a.

4) Dacă există $\lim_{x\to a} f(x)$ în $\mathbb{R}^m$ şi f nu este definită în punctul a, atunci f se poate prelungi prin continuitate în punctul a, punând condiţia $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

5) Fie funcţiile $f: X \to Y \subset \mathbb{R}^m$, $g: Y \to \mathbb{R}^p$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Dacă funcţia f este continuă în punctul $a \in X$, iar funcţia g este continuă în punctul $b = f(a) \in Y$, atunci funcţia compusă $g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ este continuă în punctul $a \in X$.

6) Fie funcţia reală $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$. Dacă f este continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) \neq 0$, există o vecinătate V a lui a, astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \cdot f(a) > 0$.

7) Fie funcţia vectorială $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ continuă în punctul $a \in X$ şi $f(a) \neq 0$. Atunci există o vecinătate V a lui a, astfel încât pentru $x \in V \cap X$ să avem $f(x) \neq 0$.

Definiţia 3.1.5. Fie $f: X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in X$. Fie submulţimea $X_i = \{x_i \in \mathbb{R} \mid (a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in X\} \subset X$. Pe aceasta, funcţia f este o funcţie f_i de o singură variabilă $x_i \in X_i$. Dacă f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$, spunem că f este ***continuă parţial în raport cu variabila*** x_i în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Teorema 3.1.6. O funcţie f continuă într-un punct $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Observaţie. Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată. Dacă o funcţie este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acel punct.

Exemplu

Fie funcţia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dacă $x = 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$, deci funcţia f este continuă în raport cu variabila y în punctul $(0,0)$.

Dacă $y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$, deci funcţia f este continuă în raport cu variabila x în punctul $(0,0)$.

În acelaşi timp, funcţia *f* nu este continuă în punctul $(0,0)$, deoarece pentru $x \to 0,\ y \to 0,$ cu $y^6 = m \cdot x,\ m \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{3m}{1+m^2}$, limită care depinde de parametrul real *m*, deci nu este unică.

Definiţia 3.1.7. Fie $f : X \to \mathbb{R}^m,\ X \subset \mathbb{R}^n$. Se spune că *f* este ***uniform continuă*** pe *X*, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi punctele $x,\ x' \in X$ cu $\|x - x'\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

Teorema 3.1.8. O funcţie *f* uniform continuă pe o mulţime *X* este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă.

Observaţii:

O funcţie vectorială continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$ este mărginită pe *I*.

O funcţie vectorială continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$ este uniform continuă pe *I*.

Pentru o funcţie vectorială continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$ există un punct $\xi \in I$, astfel încât $\|f(\xi)\| = \sup\limits_{x \in I} \|f(x)\|$.

O funcţie reală de variabilă vectorială, continuă pe un interval compact $I \subset \mathbb{R}^n$, îşi atinge marginile.

Exemple

1) Fie funcţia $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ definită pe discul $x^2 + y^2 \le R^2$. Aceasta este continuă pe domeniul ei de definiţie. Minimul funcţiei este atins în punctul $(0,0)$ şi are valoarea 0, iar maximul funcţiei este atins în orice punct (x,y) situat pe cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = R^2$ şi are valoarea *R*.

2) Funcţia $f(x,y)$ definită pe discul $x^2 + y^2 \le R^2$ prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^6}{x^2 + y^{12}}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu este uniform continuă pe domeniul de definiţie, deoarece nu este continuă în punctul $(0,0)$.

Observaţie. Vom particulariza, în continuare, noţiunea de continuitate uniformă pe $\mathbb{R}$.

Definiţia 3.1.9. Fie $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}$. Se spune că *f* este ***uniform continuă*** pe *X*, dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi punctele $x,\ x' \in X$ cu $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

Fie $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}$ şi *a* un punct de acumulare pentru mulţimea *X*.

Atunci există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x',\ x''\in X$, care verifică $|x'|<\delta(\varepsilon),\ |x''|<\delta(\varepsilon)$, să avem $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.

2. Derivate parţiale de ordinul I

Definiţia 3.2.1. Fie funcţia $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^2$ şi (a,b) un punct interior lui *X*. Se spune că:

f este ***derivabilă parţial*** în (a,b), ***în raport cu variabila*** *x*, dacă: $(\exists)\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}<+\infty$, iar limita se numeşte ***derivata parţială*** a lui *f* ***în raport cu*** *x* şi se notează $f'_x(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$;

f este ***derivabilă parţial*** în (a,b), ***în raport cu variabila*** *y*, dacă: $(\exists)\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}<+\infty$, iar limita se numeşte ***derivata parţială*** a lui *f* ***în raport cu*** *y* şi se notează $f'_y(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Observaţie. Dacă o funcţie este derivabilă parţial în raport cu variabila *x* în fiecare punct al mulţimii de definiţie *X*, spunem că funcţia este derivabilă parţial în raport cu *x* pe mulţimea *X*.

Exemplu

Funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ este derivabilă parţial în raport cu *x* şi cu *y* pe $\mathbb{R}^2$ şi $f'_x(x,y)=2x\cdot\mathrm{e}^{x^2+y^2},\ f'_y(x,y)=2y\cdot\mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

Definiţia 3.2.2. Fie funcţia $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^n$ şi $(a_1,a_2,...,a_n)$ un punct interior lui *X*. Funcţia *f* este ***derivabilă parţial în punctul*** $(a_1,a_2,...,a_n)$ ***în raport cu variabila*** x_k dacă:

$$(\exists)\quad \lim_{x\to x_k}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{k-1},x_k,a_{k+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_n)}{x_k-a_k}\ \text{şi este finită.}$$

Limita se numeşte ***derivata parţială a lui*** *f* ***în raport cu variabila*** x_k şi se notează $f'_{x_k}(a_1,a_2,...,a_n)$ sau $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a_1,a_2,...,a_n)$.

O funcţie $f(x_1,x_2,...,x_n)$ are *n* derivate parţiale.

Exemplu

Funcţia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\ln\left(1+x^2\cdot y^2\cdot z^2\right)$ are derivatele parţiale:

$$f'_x(x,y,z)=\frac{2x\cdot y^2\cdot z^2}{1+x^2\cdot y^2\cdot z^2},\ f'_y(x,y,z)=\frac{2y\cdot x^2\cdot z^2}{1+x^2\cdot y^2\cdot z^2},$$

$$f'_z(x,y,z)=\frac{2z\cdot y^2\cdot x^2}{1+x^2\cdot y^2\cdot z^2},\ (\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Observaţii

1) Dacă funcţia reală $f(x_1,x_2,...,x_n)$ este derivabilă parţial în raport cu variabila x_k în punctul $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, atunci *f* este continuă parţial în raport cu variabila x_k în punctul *a*.

2) Dacă funcţia reală $f(x_1,x_2,...,x_n)$ este derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă $x_1,x_2,...,x_n$ în punctul $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, atunci *f* este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte în punctul *a*.

Definiţia 3.2.3. Fie funcţia vectorială $f:X\to\mathbb{R}^m$, $X\subset\mathbb{R}^n$, componentele sale $f_1, f_2,..., f_m$ fiind funcţii reale derivabile parţial în raport cu fiecare variabilă $x_1,x_2,...,x_n$ într-un punct $(a_1,a_2,...,a_n)\in X$.

Derivata parţială a funcţiei f în raport cu x_k ***în punctul*** *a* este definită prin:

$$\lim_{x_k\to a_k}\frac{f(a_1,a_2,...,a_{k-1},x_k,a_{k+1},...,a_n)-f(a_1,a_2,...,a_n)}{x_k-a_k}$$

şi se notează cu $f'_{x_k}(a)$.

Observaţie

Dacă se consideră funcţia f raportată la o bază $e_1,\ e_2,...,\ e_m$, atunci:

$$f(x)=e_1\cdot f_1(x)+e_2\cdot f_2(x)+...+e_m\cdot f_m(x),\ x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Derivata sa parţială $f'_{x_k}(a)$ are componentele:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a_1,a_2,...,a_n),\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a_1,a_2,...,a_n),...,\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a_1,a_2,...,a_n).$$

Exemplu

Funcţia vectorială $\vec{f}(\vec{r})=\vec{i}\cdot\frac{x}{y^2+z^2+1}+\vec{j}\cdot\frac{y}{z^2+x^2+1}+\vec{k}\cdot\frac{z}{x^2+y^2+1}$ definită pe $\mathbb{R}^3$ are derivatele parţiale de forma:

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}(\vec{r})=\vec{i}\cdot\frac{1}{y^2+z^2+1}+\vec{j}\cdot\frac{-2xy}{\left(x^2+z^2+1\right)^2}+\vec{k}\cdot\frac{-2xz}{\left(x^2+y^2+1\right)^2};$$

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial y}(\vec{r})=\vec{i}\cdot\frac{-2xy}{\left(y^2+z^2+1\right)^2}+\vec{j}\cdot\frac{1}{\left(x^2+z^2+1\right)}+\vec{k}\cdot\frac{-2yz}{\left(x^2+y^2+1\right)^2};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(\vec{r}) = \vec{i} \cdot \frac{-2xz}{\left(y^2+z^2+1\right)^2} + \vec{j} \cdot \frac{-2yz}{\left(x^2+z^2+1\right)^2} + \vec{k} \cdot \frac{1}{\left(x^2+y^2+1\right)}.$$

3. Derivate parţiale de ordin superior. Diferenţiabilitate

Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^2$, derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă în parte, în punctele interioare ale lui *X*. Dacă $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sunt, la rândul lor, derivabile parţial în raport cu fiecare dintre variabile, atunci derivatele lor parţiale se numesc ***derivate parţiale de ordinul doi*** ale lui f şi se notează prin:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}.$$

Exemplu

Funcţia $f(x, y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$ definită pe $\mathbb{R}^2$ are derivatele parţiale:

$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2},\ f'_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2},$$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{2}{1+x^2+y^2} - \frac{4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{2}{1+x^2+y^2} - \frac{4y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2},$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{-4xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} = f''_{yx}.$$

f''_{xy}, f''_{yx} se numesc ***derivate parţiale mixte de ordinul al doilea***.

Criteriul lui Schwarz. Fie $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^2$ şi punctul $(x_0, y_0) \in X$. Dacă există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ într-o vecinătate *V* a lui (x_0, y_0) şi sunt continue în (x_0, y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Definiţia 3.2.4. $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^2$ şi (a, b) un punct interior al lui *X*. Atunci funcţia *f* este ***diferenţiabilă în punctul*** (a, b), dacă există $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ şi există o funcţie $\omega : X \to \mathbb{R}$ continuă şi nulă în (a, b), astfel încât:

$$f(x,y)-f(a,b)=\lambda\cdot(x-a)+\mu\cdot(y-b)+\omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

pentru $(\forall)\ (x,y)\in X$.

Observaţie. Dacă f este diferenţiabilă în punctul (a,b), atunci f admite derivate parţiale de ordinul întâi în (a,b) şi $\lambda=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\mu=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Definiţia 3.2.5. Fie funcţia $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^2$ şi (a,b) un punct interior lui *X*, astfel încât funcţia *f* admite derivate parţiale continue în (a,b).

$\mathrm{d}f(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot\mathrm{d}y$ se numeşte ***diferenţiala de ordinul I a funcţiei f în punctul*** (a,b).

Definiţia 3.2.6. Operatorul $\mathrm{d}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\mathrm{d}y$ care aplicat funcţiei f dă diferenţiala funcţiei f în punctul (x,y) se numeşte ***operatorul de diferenţiere***.

Criteriul lui Young. Fie $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^2$ şi punctul $(x_0,y_0)\in X$. Dacă există derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ într-o vecinătate *V* a punctului (x_0,y_0) şi sunt diferenţiabile în (x_0,y_0), atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$.

Observaţii:

Pentru o funcţie $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^n$ ***diferenţiala*** de ordinul întâi este:

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\mathrm{d}x_n,$$

iar ***operatorul de diferenţiere*** de ordinul întâi este:

$$\mathrm{d}=\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cdot\mathrm{d}x_n.$$

Pentru o funcţie vectorială $f:X\to\mathbb{R}^m,\ X\subset\mathbb{R}^n$, ***diferenţiala*** este:

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\mathrm{d}x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\mathrm{d}x_n.$$

Exemplu

Funcţia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este derivabilă parţial pe $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ şi: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

de unde rezultă că

$$\mathrm{d}f=\frac{x\cdot \mathrm{d}x+y\cdot \mathrm{d}y+z\cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Este diferenţiala funcţiei f pe $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

Definiţia 3.2.7. Diferenţiala unei funcţii de mai multe variabile se numeşte ***diferenţiala totală*** a funcţiei.

Teorema 3.2.8. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca diferenţiala unei funcţii $f:I\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ să fie identic nulă pe *I* este ca f să fie constantă pe *I*.

Teorema 3.2.9. Fie expresia diferenţială $E=P(x,y)\cdot \mathrm{d}x+Q(x,y)\cdot \mathrm{d}y$, unde funcţiile *P* şi *Q* sunt continue pe $I\subset\mathbb{R}^2$.

Dacă E este diferenţiala unei funcţii $f:I\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, pentru orice punct $(x,y)\in I$, atunci:

$$P(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x},\ Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y},\ (\forall)\ (x,y)\in I.$$

Teorema 3.2.10. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca diferenţiala unei funcţii $f:I\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ să fie identic nulă pe *I* este ca *f* să fie constantă pe intervalul *I*.

Teorema 3.2.11. Fie expresia diferenţială

$$P_1(x_1,...,x_n)\cdot \mathrm{d}x_1+P_2(x_1,...,x_n)\cdot \mathrm{d}x_2+...+P_n(x_1,...,x_n)\cdot \mathrm{d}x_n$$

cu funcţiile componente $P_k(x_1,...,x_n),\ k=1,2,...,n,$ continue pe $I\subset\mathbb{R}^n$. Dacă expresia diferenţială este diferenţiala unei funcţii $f:I\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pentru orice $(x_1,...,x_n)\in I$, atunci $P_1(x_1,...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\ P_n(x_1,...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Definiţia 3.2.12. Fie funcţia $f:X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^2$, derivabilă parţial de două ori în *X* şi cu derivatele parţiale de ordinul doi (deci, şi cele de ordinul întâi) continue. ***Diferenţiala de ordinul doi*** se notează cu $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ şi este definită prin:

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot \mathrm{d}x^2+2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot \mathrm{d}y^2.$$

Operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot \mathrm{d}x^2+2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot \mathrm{d}y^2=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\cdot \mathrm{d}y\right)^{(2)}$$

se numeşte ***operatorul de diferenţiere de ordinul doi***.

Definiţia 3.2.13. Fie funcţia $f : X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}^2$, care are în *X* toate derivatele parţiale de ordinul *n* continue. ***Diferenţiala de ordinul*** *n* a funcţiei f se notează cu $\mathrm{d}^n f(x, y)$ şi este definită prin:

$$\mathrm{d}^n f(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cdot \mathrm{d}x^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot \mathrm{d}x^{n-1} \cdot \mathrm{d}y + \ldots +$$

$$+ C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \cdot \mathrm{d}x^{n-k} \cdot \mathrm{d}y^k + \ldots + C_n^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \cdot \mathrm{d}y^n.$$

Operatorul $\mathrm{d}^n = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y \right)^{(n)}$ se numeşte ***operatorul de diferenţiere de ordinul*** *n*.

Derivatele şi diferenţialele funcţiilor compuse

1) Dacă funcţiile $u, v : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au derivate continue pe *X* şi dacă funcţia $f : Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale continue pe *Y*, atunci funcţia $F(x) = f(u(x), v(x)),\ (\forall)\ x \in X$, are derivata continuă pe *X* dată de:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

2) Dacă funcţiile $u, v : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ au derivate parţiale continue pe *X* şi dacă funcţia $f : Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale continue pe *Y*, atunci funcţia $F(x, y) = f[u(x, y), v(x, y)]$ are derivate parţiale continue pe *X*, date de:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

3) Diferenţiala funcţiei *F* este dată de:

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y.$$

Exemplu

Fie $F(x, y) = f(x^2 + y^2, 1 + xy)$ definită pe $\mathbb{R}^2$.

Considerând $u(x, y) = x^2 + y^2,\ v(x, y) = 1 + xy$ avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x.$$

Diferenţiala funcţiei *F* este

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y \right) \cdot \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot x \right) \cdot \mathrm{d}y.$$

Observaţie

Derivatele parţiale şi diferenţialele de ordin superior se calculează astfel:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right).$$

$$\mathrm{d}^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\mathrm{d}x^2+2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\mathrm{d}y^2.$$

4. Formula lui Taylor pentru funcţii de două variabile

Fie funcţia $f: X\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R}^2$, derivabilă de $n+1$ ori pe *X*, cu toate derivatele mixte egale şi fie (a,b) un punct interior lui *X*. Se consideră funcţia $F(t)=f\left[a+(x-a)\cdot t, b+(y-b)\cdot t\right],\ (x,y)\in X,\ t\in[0,1]$.

Deoarece *f* are derivate până la ordinul $n+1$ pe *X*, rezultă că şi *F* este derivabilă până la ordinul $n+1$ pe intervalul $[0,1]$, iar funcţiei *F* i se poate aplica formula lui Taylor stabilită pentru funcţiile de o variabilă. Rezultă că:

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}\cdot F'(0)+\frac{1}{2!}\cdot F''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot F^{(n)}(0)+R_n,$$

unde restul $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\cdot F^{(n+1)}(\theta),\ \theta\in(0,1)$.

Având în vedere că $F(1)=f(x,y),\ F(0)=f(a,b),\ F(t)=f(x(t),y(t))$, unde $x(t)=a+(x-a)\cdot t,\ y(t)=b+(y-b)\cdot t$ şi calculând derivatele de ordin superior ale lui *F* în punctul 0, se obţine formula:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\cdot f(a,b)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\cdot f(a,b)+R_n,$$

unde restul are expresia:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} \cdot f\left(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b)\right),$$

cu $\theta \in (0,1)$.

5. Extremele libere ale funcţiilor de mai multe variabile

Definiţia 3.3.1. Fie funcţia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi punctul $x_0 \in X$. Funcţia *f* are un ***minim local*** în x_0, dacă există o vecinătate *V* a lui x_0, astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$, $(\forall)\ x \in V$.

Punctul x_0 este punct de ***maxim local*** pentru funcţia *f*, dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $(\forall)\ x \in V$.

Teorema 3.3.2. Fie funcţia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ şi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ un punct interior lui *X*. Dacă:

funcţia f are un extremum în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$,

funcţia f are derivate parţiale în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$,

atunci derivatele parţiale ale lui f se anulează în punctul $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Observaţia 3.3.3. Punctele în care funcţia f poate avea extreme sunt date de soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Soluţiile sistemului se numesc ***puncte critice*** sau ***puncte staţionare***.

Pentru $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ punct critic pentru funcţia *f*, se notează

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right).$$

Atunci:

1) dacă toţi determinanţii

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ...,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt pozitivi, funcţia f are un minim în punctul respectiv;

2) dacă toţi determinanţii $\Delta_1^* = -\Delta_1,\ \Delta_2^* = \Delta_2, \ldots,\ \Delta_n^* = (-1)^n \cdot \Delta_n$ sunt pozitivi, funcţia f are un maxim în punctul respectiv.

Se poate preciza dacă un punct critic este de extrem, folosind semnul diferenţialei de ordinul doi.

Astfel:

dacă $\mathrm{d}^2 f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) > 0$, punctul $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ este de minim.

dacă $\mathrm{d}^2 f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) < 0$, punctul $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ este de maxim.

Exemple

1) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

deci punctul $(1,0)$ este punct critic pentru funcţia f.

Având în vedere că $\mathrm{d}^2 f(1,0) = 2 \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \mathrm{d}y^2 > 0$, rezultă că punctul $(1,0)$ este punct de minim.

2) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$. Pentru aceasta avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2;\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

deci punctul $(-1,0)$ este punct critic.

Având în vedere că $\mathrm{d}^2 f(-1,0) = 2 \cdot \mathrm{d}x^2 - 2 \cdot \mathrm{d}y^2$ nu are semn constant, punctul nu este de extrem.

6. Probleme rezolvate

$\boxed{1}$ Folosind criteriul Cauchy-Bolzano, să se cerceteze existenţa limitelor:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \cdot \sin\frac{1}{x},\ n \in \mathbb{N}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign} x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x+1}$.

Indicaţie de rezolvare:

pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, se caută $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru $(\forall)\ x', x''$, care respectă condiţia $|x'| < \delta(\varepsilon), |x''| < \delta(\varepsilon)$, să se verifice $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$; $|f(x') - f(x'')| = \left|(x')^n \cdot \sin\frac{1}{x'} - (x'')^n \cdot \sin\frac{1}{x''}\right| \le |x'|^n + |x''|^n < 2(\delta(\varepsilon))^n$ şi impunând ca $2(\delta(\varepsilon))^n < \varepsilon \Rightarrow 0 < \delta(\varepsilon) < \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}$ şi deci, conform teoremei Cauchy-Bolzano, limita există;

pentru $x' = \frac{1}{n} < \delta$ şi $x'' = -\frac{1}{n}$, $|x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = 2$, deci limita nu există;

pentru $x' = \frac{1}{2n\pi}$, $x'' = \frac{2}{(2n+1)\pi} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| = 1$, deci limita nu există.

$\boxed{2}$ Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \cdot \sin^2 x^2,\ x \in [0,\infty)$;

b) $f(x) = \ln x,\ x \in [\varepsilon, \mathrm{e}],\ \varepsilon > 0$; **c)** $f(x) = \ln x,\ x \in (0, \mathrm{e}]$;

d) $f(x) = \sin x^2,\ x \in \mathbb{R}$; **e)** $f(x) = \frac{x}{x+1} + x,\ x \in (0,\infty)$;

f) $f(x) = \frac{x}{x+1} + x,\ x \in (-1,\infty)$.

Indicaţie de rezolvare:

a) pentru $x_1 = \sqrt{2n\pi},\ x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, dar $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, deci funcţia nu este uniform continuă;

b) funcţia este continuă pe interval compact, deci este uniform continuă;

c) pentru $x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) \geq \ln 2,$$

deci funcţia nu este uniform continuă;

d) nu este uniform continuă;

e) pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar şi pentru $x_1, x_2 \in (0,\infty)$, pentru care $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow |x_1| < \delta_\varepsilon, |x_2| < \delta_\varepsilon$, se va obţine:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1}{x_1+1} + x_1 - \frac{x_2}{x_2+1} - x_2 \right| \leq$$

$$\leq |x_1 - x_2| + \left| \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \right| < 2 \cdot |x_1 - x_2| < 2\delta_\varepsilon$$

şi impunând condiţia $2\delta_\varepsilon < \varepsilon$, rezultă că funcţia este uniform continuă;

f) pentru $x_1 = -1 + \frac{1}{n}$, $x_2 = -1 + \frac{2}{n} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{n} \to 0$, dar $|f(x_1) - f(x_2)| \to \infty$, deci funcţia nu este uniform continuă.

$\boxed{3}$ Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor f_1, f_2, $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ definite pe $\mathbb{R}$ prin

$$f_1(x) = x \cdot \sin^2 x^2; \;\; f_2(x) = x \cdot \cos^2 x^2.$$

Indicaţie de rezolvare:

Pentru $x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \; x_2 = \sqrt{n\pi} \Rightarrow |x_1 - x_2| \to 0$, dar

$$|f_1(x_1) - f_1(x_2)| \to \infty,$$

deci funcţia f_1 nu este uniform continuă.

În mod asemănător se arată că nici funcţia f_2 nu este uniform continuă.

Funcţia $(f_1 + f_2)(x) = x$ şi este uniform continuă pe $\mathbb{R}$.

Se arată că funcţia $f_1 \cdot f_2$ nu este uniform continuă, considerând $x_1 = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{4}}, \; x_2 = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

$\boxed{4}$ Se consideră funcţia $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Să se calculeze limitele iterate $\lim\limits_{x \to 0}\left(\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)\right)$ şi $\lim\limits_{y \to 0}\left(\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)\right)$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x \to 0} 1 = 1, \;\; \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y \to 0}(-1) = -1.$$

$\boxed{5}$ Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}} \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^x$.

Indicaţie de rezolvare:

Se calculează limitele iterate şi ambele sunt egale cu e^k.

$\boxed{6}$ Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y^2 + \sin\left(x^3 + y^5\right)}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Să se arate că deşi funcţia are limite iterate în punctul $(0,0)$, ea nu are limită în acest punct.

Indicaţie de rezolvare:

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} \frac{x \cdot y^2 + \sin\left(x^3 + y^5\right)}{x^2 + y^4}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3}{x^2} = 0 \text{ şi}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot y^2+\sin\left(x^3+y^5\right)}{x^2+y^4}\right)=0,$$

deci limitele iterate există.

Pentru a se arăta că f nu are limită în origine, se consideră două perechi de şiruri convergente la zero, de forma:

$$\left(x_n,y_n\right),\ x_n=y_n^2 \text{ şi } \left(x_n^1,y_n^1\right),\ x_n^1=2\cdot y_n^1.$$

Pentru acestea avem:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n,y_n\right)=\frac{1}{2} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^1,y_n^1\right)=\frac{2}{5},$$

deci cele două limite sunt diferite.

$\boxed{7}$ Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Indicaţie de rezolvare:

Se demonstrează că pentru $(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru $(\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ pentru care $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta(\varepsilon)$, să rezulte

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon.$$

$$\|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta(\varepsilon)\Leftrightarrow |x|<\delta(\varepsilon) \text{ şi } |y|<\delta(\varepsilon).$$

Rezultă

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^3+y^3}\right|\cdot\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}{x^2+y^2}\right|=|x+y|\cdot\left|1-\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x+y|\le\frac{1}{2}|x|+\frac{1}{2}|y|<\delta(\varepsilon)<\varepsilon.$$

$\boxed{8}$ Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{y^2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{|x|}{y^2}}, & y\neq 0;\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

Să se studieze continuitatea în punctul $(0,0)$.

Indicaţie de rezolvare:

Se consideră şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

de forma $x_n = y_n^2,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$. Pentru acestea $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n^2, y_n)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\neq 0$, deci f nu este continuă în origine.

9 Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că f este continuă în raport cu *x* şi cu *y* în $(0,0)$, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în acest punct.

Indicaţie de rezolvare:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0) \text{ şi } \lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0),$$

deci f este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte.

Pentru a demonstra că f nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor, se consideră şirurile $x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$ şi $y_n=\dfrac{k}{n}\to 0$, pentru *k* real fixat.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\dfrac{k}{1+k^2}$, limită care depinde de *k*, deci *f* nu este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

10 Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi pentru următoarele funcţii:

a) $z=\mathrm{e}^{x-y^2}$; **b)** $z=\ln(x^2+y^2)$; **c)** $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

d) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; **e)** $z=x^y$; **f)** $z=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\dfrac{x}{y}$;

g) $u=x^y+y^z-2\cdot z^x$; **h)** $u=\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot\sin^2 z$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\cdot y\cdot \mathrm{e}^{x-y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2};$$

g) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}-2\cdot z^x\cdot\ln z,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot y^{z-1}+x^y\ln x,\ \frac{\partial u}{\partial z}=y^2\ln y-2x\cdot z^{x-1};$$

h) $\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot\sin^2 z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot\sin^2 z,$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{x^2+y^2}\cdot\sin 2z.$$

$\boxed{11}$ Pornind de la definiţie, să se calculeze:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$, dacă $f(x,y)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y}$;

b) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, dacă $f(x,y)=e^{\sin x\cdot y}$;

c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$, dacă $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)$, dacă $f(x,y)=x\cdot y\cdot\ln x,\ x\neq 0$;

e) $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,2),\ \frac{\partial f}{\partial y}(-2,2),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)$, dacă $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2\cdot y}$;

f) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, dacă $f(x,y)=x\cdot\sin(x+y)$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{f(x,0)-f\left(\frac{\pi}{4},0\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{y\to\pi/4}\frac{f\left(\frac{\pi}{4},y\right)-f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}{y-\frac{\pi}{4}}=\lim_{y\to\pi/4}\frac{\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{2}}-1}{y-\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=0\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(1,1)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)-\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)}{x-1},$$

unde:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,1)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,;$$

rezultă că $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{x-1}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)=1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,2)=-\frac{2}{3},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-2,2)=\frac{1}{3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)=-\frac{1}{9}\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

12 Să se arate că derivatele parţiale ale funcţiei:

$$\omega=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z\right)$$

verifică ecuaţia:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}.$$

Indicaţie de rezolvare:

Avem identitatea

$$x^3+y^3+z^3-3\cdot x\cdot y\cdot z=(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right),$$

de unde

$$\omega=\ln(x+y+z)+\ln\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$$

va avea derivatele parţiale: $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=\dfrac{1}{x+y+z}+\dfrac{2x-y-z}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2y-x-z}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}+\frac{2z-x-y}{x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz}$$

care, înlocuite în ecuaţia dată, o verifică.

$\boxed{13}$ Să se arate că funcţia

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\ y\neq 0\\ 0, & x=0 \text{ sau } y=0\end{cases}$$

nu este continuă în origine, dar admite derivate parţiale în origine.

Indicaţie de rezolvare:

Funcţia *f* nu este continuă în origine, deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=1\neq f(0,0)=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

$\boxed{14}$ Pornind de la definiţie, să se arate că următoarele funcţii sunt diferenţiabile în punctele indicate:

a) $f(x,y)=x^3+x\cdot y+y^2$ în punctul $(1,1)$;

b) $f(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2$ în punctul $(2,1)$.

Indicaţie de rezolvare:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3\cdot x^2+y\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=4$ şi

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2\cdot y\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=3$;

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=0$. Se caută o funcţie $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continuă şi nulă în punctul $(2,1)$, pentru care:

$$f(x,y)-f(2,1)=\omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\ .$$

Rezultă $\omega(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$, care este continuă pe $\mathbb{R}^2$ şi $\omega(2,1)=0$, deci funcţia *f* este diferenţiabilă în punctul $(2,1)$.

$\boxed{15}$ Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Să se arate că *f* admite derivate parţiale în origine, dar *f* nu este diferenţiabilă în acest punct.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$$

Dacă f este diferenţiabilă în punctul $(0,0)$, atunci există o funcţie $\omega:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continuă şi nulă în acest punct şi care verifică:

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)+\omega(x,y)\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$

De aici rezultă

$$\omega(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot|y|}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

care nu este continuă în origine. Deci, f nu este diferenţiabilă în origine.

$\boxed{16}$ Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

este continuă şi admite derivate parţiale în origine, dar nu este diferenţiabilă în acest punct.

$\boxed{17}$ Să se arate că derivatele parţiale de ordinul doi mixte ale funcţiei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=\begin{cases}y^2\cdot\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

nu sunt continue în origine şi totuşi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4\cdot x^3\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

de unde rezultă că derivatele parţiale mixte sunt egale.

Pentru a demonstra că nu sunt continue, se consideră şirurile de numere reale, convergente la zero $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, de forma $x_n = y_n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 \cdot x_n^4}{\left(2 \cdot x_n^2\right)^2} = 1 \neq 0$.

$\boxed{18}$ Să se calculeze diferenţialele de ordinul întâi şi al doilea pentru funcţiile:

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cdot \cos y$;

b) $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{e}^x \cdot \cos y \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \cdot \sin y \cdot \mathrm{d}y \quad \text{şi}$$

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \mathrm{d}y^2 =$$

$$= \mathrm{e}^x \cos y \cdot \mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{e}^x \sin y \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y - \mathrm{e}^x \cos y \cdot \mathrm{d}y^2;$$

$$\mathrm{d}f = y \cdot z \cdot \mathrm{d}x + x \cdot z \cdot \mathrm{d}y + x \cdot y \cdot \mathrm{d}z$$

şi

$$\mathrm{d}^2 f = 2 \cdot z \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2 \cdot y \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

$\boxed{19}$ Să se calculeze derivatele parţiale şi diferenţiala de ordinul *n* pentru funcţia $f(x,y) = \mathrm{e}^{ax+by}$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,y) = a^k \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{by}, \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x,y) = a^k \cdot b^{n-k} \cdot f(x,y).$$

Rezultă diferenţiala de ordinul *n*: $\mathrm{d}^n f = \mathrm{e}^{ax+by} \cdot (a \cdot \mathrm{d}x + b \cdot \mathrm{d}y)^n$.

$\boxed{20}$ Să se calculeze $\mathrm{d}f(1,1)$ şi $\mathrm{d}^2 f(1,1)$ pentru funcţiile:

a) $f(x,y) = x^2 - x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x - 5 \cdot y + 7$;

b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x \cdot y}$;

c) $f(x,y) = \ln x \cdot y$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}f(1,1) = 4 \cdot \mathrm{d}x - 2 \cdot \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}^2 f(1,1) = 2\mathrm{d}x^2 - 2\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + 4\mathrm{d}y^2;$$

$\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{e}\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y),\ \mathrm{d}^2 f(1,1)=\mathrm{e}\cdot\left(\mathrm{d}x^2+4\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\mathrm{d}y^2\right);$

$\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}^2 f(1,1)=-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2.$

21 Să se calculeze $\mathrm{d}f(3,4,5)$, dacă $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Indicaţie de rezolvare:

$\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, unde $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=-\dfrac{x\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\dfrac{y\cdot z}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}$.

Rezultă $\mathrm{d}f(3,4,5)=0,04(3\mathrm{d}x+4\mathrm{d}y-5\mathrm{d}z)$.

22 Să se calculeze $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ştiind că $f=f(u,v),\ u=u(x),\ v=v(x)$, pentru funcţiile:

a) $f(u,v)=u^v$; **b)** $f(u,v)=\sqrt{u^2+v^2}$; **c)** $f(u,v)=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se foloseşte regula de derivare a funcţiilor compuse, adică:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=v\cdot u^{v-1}\cdot u'+u^v\cdot\ln u\cdot v';$$

b) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot(u\cdot u'+v\cdot v')$;

c) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{u^2+v^2}\cdot(v\cdot u'-u\cdot v')$.

23 Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcţiile:

$f(u,v)=\ln\left(u^2+v\right)$, unde $u(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2},\ v(x,y)=x^2+y$;

$f(u,v)=\operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, unde $u(x,y)=x\cdot\sin y,\ v(x,y)=x\cdot\cos y$.

Indicaţie de rezolvare:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x};\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$, de unde rezultă:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2u}{u^2+v}\cdot\left(u^2+x\right)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{u^2+v}\cdot\left(4u^2y+1\right)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}=1$.

24 Fie $f = f(u,v)$, unde $u = x \cdot y$ şi $v = \dfrac{x}{y}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei f.

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(y \cdot \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} =$$

$$= \frac{u}{v} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Similar, se obţin rezultatele:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = u \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = uv \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{v^3}{u} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{2v^2}{u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}.$$

25 Să se calculeze $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x))$, pentru:

$\varphi(u,v) = u + uv,\ u(x) = \cos x,\ v(x) = \sin x$;

$\varphi(u,v) = \mathrm{e}^{u-2v},\ u(x) = x^2,\ v(x) = x^2 - 2$;

$\varphi(u,v) = u^v,\ u(x) = \sin x,\ v(x) = \cos x$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = (1+v) \cdot (-\sin x) + u \cdot \cos x = \cos 2x - \sin x$;

b) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (-2x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2+4}$;

c) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (\sin x)^{\cos x - 1} \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln(\sin x)\right)$.

26 Să se calculeze $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, dacă $f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x))$, pentru:

$$\varphi(u,v,w)=uvw,\ u(x)=x^2+1,\ v(x)=\ln x,\ w(x)=\operatorname{tg} x;$$

$$\varphi(u,v,w)=\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}},\ u(x)=R\cos x,\ v(x)=R\sin x,\ w(x)=h.$$

Indicaţie de rezolvare:

a) $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=$$
$$=2x\cdot\ln x\cdot\operatorname{tg} x+\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\operatorname{tg} x+\frac{\ln x}{\cos^2 x}\cdot\left(x^2+1\right);$$

b) $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0.$$

$\boxed{27}$ Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ pentru $f(x,y)=\varphi(u(x,y),v(x,y))$, unde:

$$f=\varphi(u,v),\ u(x,y)=x+y,\ v(x,y)=x^2+y^2;$$

$$f=\varphi(u,v),\ u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=\mathrm{e}^{x\cdot y}.$$

Indicaţie de rezolvare:

a) $$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+yv\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-2y\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+xv\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

$\boxed{28}$ Să se arate că:

a) $f(x,y)=y\cdot\varphi\left(x^2-y^2\right)$, unde φ este o funcţie derivabilă, verifică ecuaţia $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}\cdot f$;

b) $f(x,y)=x\cdot y+x\cdot\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcţie derivabilă, verifică ecuaţia $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cdot y+f$.

Indicaţie de rezolvare:

Se consideră $u(x,y)=x^2-y^2$, de unde rezultă că derivatele parţiale ale funcţiei f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot\varphi'\cdot(2x),\ \frac{\partial f}{\partial y}=\varphi+y\cdot\varphi'\cdot(-2y).$$

Înlocuite în ecuaţia dată conduc la $2y\cdot\varphi' - 2y\cdot\varphi' + \frac{\varphi}{y} = \frac{1}{y}\cdot\varphi$, deci ecuaţia este verificată.

29 Ce devine ecuaţia : $x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$,

dacă $f(x,y) = \varphi\left(xy, \frac{y}{x}\right)$?

Indicaţie de rezolvare:

Se consideră

$$u(x,y) = xy,\ v(x,y) = \frac{y}{x},\quad \text{de unde rezultă că:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2\cdot\frac{y^2}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + 2\cdot\frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$

şi ecuaţia devine $-2u\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$.

30 Folosind formula lui Taylor de ordinul doi, să se calculeze valoarea aproximativă pentru:

a) $\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98}$; **b)** $(0{,}95)^{2{,}01}$; **c)** $1{,}02\cdot 2{,}01^2\cdot 3{,}03^3$.

Indicaţie de rezolvare:

a) se consideră funcţia $f(x,y) = x^{1/2}\cdot y^{1/3}$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,1)$ pentru $h = 0{,}03$ şi $k = -0{,}02$; rezultă

$$\sqrt{1{,}03}\cdot\sqrt[3]{0{,}98} = f(1+h, 1+k) = f(1,1) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot k\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)\cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\cdot k^2\right) + R_2 \approx 1{,}0081;$$

b) se consideră funcţia $f(x,y) = x^y$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2)$; rezultă $h = -0{,}05,\ k = 0{,}01$ şi $f(0{,}95; 2{,}01) \approx 0{,}902$;

c) se consideră funcţia $f(x,y,z) = x\cdot y^2\cdot z^3$, care se dezvoltă după formula lui Taylor în punctul $(1,2,3) \Rightarrow h = 0{,}02,\ k = 0{,}01,\ \ell = 0{,}03$ şi $f(1{,}02; 2{,}01; 3{,}03) \approx 114{,}6159$.

31 Considerând $|x|,\ |y|,\ |z|$ suficient de mici, să se aproximeze funcţia $f(x,y,z) = (1+x)^{1/2}\cdot(1+y)^{-1/2}\cdot(1+z)^{-1/2}$.

$\boxed{32}$ Să se găsească punctele de extrem local pentru funcţiile:

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3 \cdot x \cdot y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

2) $f(x,y) = 3 \cdot x \cdot y^2 - x^3 - 15 \cdot x - 36 \cdot y + 9,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

3) $f(x,y) = y^4 - 8 \cdot y^3 + 18 \cdot y^2 - 8 \cdot y + x^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

Indicaţie de rezolvare:

1) Se determină punctele critice, care sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y = 0 \\ 3 \cdot y^2 - 3 \cdot x = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A}(0,0),\ \mathrm{B}(1,1) \text{ sunt punctele critice;}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3,$$

de unde rezultă, pentru punctul critic

$$\text{A(0,0):}\ \ \mathrm{d}^2 f(0,0) = -6\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

deci punctul nu este de extrem; pentru punctul critic

$$\text{B(1,1):}\ \ \mathrm{d}^2 f(1,1) = 6\mathrm{d}x^2 + 6\mathrm{d}y^2 - 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0,$$

deci punctul este de minim;

2) Punctele critice sunt A(2,3) şi $\mathrm{B}(-2,-3)$ şi nici unul dintre acestea nu este de extrem, deoarece $\Delta_1 = -6x,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix}$; rezultă $\Delta_2 < 0$, pentru ambele puncte critice, deci ele nu sunt de extrem;

3) Punctele critice sunt:

$$\mathrm{M}_1\left(1+\sqrt{2}, 2\right),\ \mathrm{M}_2\left(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}\right),\ \mathrm{M}_3\left(1+\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}\right),$$

$$\mathrm{M}_4\left(1-\sqrt{2}, 2\right),\ \mathrm{M}_5\left(1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}\right),\ \mathrm{M}_6\left(1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{3}\right);$$

dintre acestea, M_2 şi M_3 sunt puncte de minim, M_4 este punct de maxim, iar celelalte nu sunt puncte de extrem.

7. TEST DE AUTOEVALUARE

$\boxed{1}$ Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile indicate:

a) $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, unde φ este o funcţie derivabilă, verifică ecuaţia

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

b) $f(x,y,z)=\varphi\left(x\cdot y, x^2+y^2-z^2\right)$, unde φ este o funcţie derivabilă, verifică ecuaţia

$$xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

$\boxed{2}$ Să se calculeze $\mathrm{d}f$ şi $\mathrm{d}^2 f$, dacă:

$f(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, unde φ este de clasă C^2;

$f(x,y)=\varphi(x+y, x-y)$, unde φ este de clasă C^2;

$f(x,y,z)=\varphi\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)$, unde φ este de clasă C^2.

$\boxed{3}$ Să se scrie formula lui Taylor pentru funcţia $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ în punctul $(1,-1)$.

$\boxed{4}$ Să se determine punctele de extrem local pentru funcţiile:

a) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2\cdot x+4\cdot y-6\cdot z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

b) $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$,
$(x,y,z)\in(0,\pi)\times(0,\pi)\times(0,\pi)$;

c) $f(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{16},\ x>0,\ y>0,\ z>0$;

d) $f(x,y,z)=a\cdot x^2-b\cdot x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

LECŢIA 2 – FUNCŢII IMPLICITE. EXTREME CONDIŢIONATE

1. Funcţii implicite

Definiţia 3.4.1. Fie ecuaţia $F(x,y)=0$, unde $F: X\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. O funcţie $y=f(x)$ definită pe mulţimea $A\subset\mathbb{R}$, astfel încât pentru orice $x\in A$, $(x, f(x))\in X$ se numeşte ***soluţie în raport cu** y **a ecuaţiei*** $F(x,y)=0$ pe mulţimea *A*, dacă $F(x, f(x))\equiv 0$ pentru $x\in A$.

Definiţia 3.4.2. Funcţiile $y=f(x)$ definite cu ajutorul ecuaţiilor $F(x,y)=0$ se numesc ***funcţii implicite*** sau ***funcţii definite implicit***.

Observaţie. O ecuaţie $F(x,y)=0$ poate să aibă pe *A* mai multe soluţii sau nici una.

Exemple

Ecuaţia $x^2+y^2-1=0$ are în raport cu *y* o infinitate de soluţii definite pe $[-1,+1]$ prin funcţia:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},\ \alpha\le x\le\beta,\ \alpha\ge -1,\ \beta\le 1\\ -\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,+1]\setminus[\alpha,\beta]\end{cases}$$

deoarece fiecare verifică ecuaţia $x^2+y^2-1=0$.

Se observă că soluţiile nu sunt continue în punctul $x=\alpha$ sau $x=\beta$.

Ecuaţia $x^4+y^4+1=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ nu are nici o soluţie reală.

Ecuaţia $2x-3y+5=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$ are o singură soluţie, $f(x)=\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\cdot x$ pe $\mathbb{R}$

Teorema 3.4.3. Fie funcţia $F: X\times Y\to\mathbb{R},\ X\subset\mathbb{R},\ Y\subset\mathbb{R}$ şi (x_0,y_0) un punct interior lui $X\times Y$. Dacă:

1) $F(x_0,y_0)=0$,

2) $F(x,y),\ F'_x(x,y),\ F'_y(x,y)$ sunt continue pe o vecinătate $U\times V\subset X\times Y$ a lui (x_0,y_0),

3) $F'_y(x_0,y_0)\ne 0$, Atunci:

1) există o vecinătate $U_0\subset U$ a lui x_0 şi o vecinătate $V_0\subset V$ a lui y_0 şi există o unică funcţie $y=f(x): U_0\to V_0$, astfel încât $f(x_0)=y_0$ şi $F(x, f(x))\equiv 0$ pentru $x\in U_0$;

2) funcţia $f(x)$ are derivata continuă pe U_0 dată de:

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)};$$

3) dacă $F(x,y)$ are derivatele parţiale de ordinul *k* continue pe $U\times V$, atunci $f(x)$ are derivata de ordinul *k* continuă pe U_0.

Definiţia 3.4.4. Fie ecuaţia $F(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$, unde $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ este o funcţie reală de $n+1$ variabile definită pe o mulţime $X\subset\mathbb{R}^{n+1}$.

O funcţie $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ definită pe mulţimea $A\subset\mathbb{R}^n$ este ***soluţie în raport cu*** *y* a acestei ecuaţii, dacă pentru $(x_1,x_2,...,x_n)\in A$ avem:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,x_2,...,x_n))\equiv 0.$$

Teorema 3.4.5. Fie $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ o funcţie reală definită pe $X\times Y$, $X\subset\mathbb{R}^n$, $Y\subset\mathbb{R}$, $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$ un punct interior lui *X* şi y_0 un punct interior lui *Y*. Dacă:

1) $F(x_{10},x_{20},...,x_{n0},y_0)=0$,

2) funcţia $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ este continuă împreună cu derivatele parţiale F'_{x_1}, F'_{x_2},..., F'_{x_n}, F'_y pe o vecinătate $U\times V$ a punctului $(x_{10},x_{20},...,x_{n0},y_0)$,

3) $F'_y(x_{10},x_{20},...,x_{n0},y_0)\neq 0$,

atunci:

1) există o vecinătate $U_0\subset U$ a lui $x_0=(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$, o vecinătate $V_0\subset V$ a lui y_0 şi o unică funcţie $y=f(x_1,x_2,...,x_n):U_0\to V_0$, astfel încât $f(x_{10},x_{20},...,x_{n0})=y_0$ şi $F(x_1,x_2,...,x_n,f(x_1,x_2,...,x_n))\equiv 0$ pentru $x\in U_0$;

2) funcţia $f(x_1,x_2,...,x_n)$ are derivate parţiale continue în raport cu $x_i,\ i=1,2,...,n$ pe U_0 date de $f'_{x_i}=-\dfrac{F'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n)}{F'_y(x_1,x_2,...,x_n)},\ i=1,2,...,n$;

3) dacă $F(x_1,x_2,...,x_n,y)$ are derivate parţiale de ordinul *k* continue pe $U\times V$, atunci funcţia implicită $f(x_1,x_2,...,x_n)$ are derivate parţiale de ordinul *k* continue pe U_0.

2. Dependenţă funcţională

Definiţia 3.5.1. Fie $y_k=f_k(x_1,x_2,...,x_n),\ k=1,2,...,m$, *m* funcţii reale definite pe o mulţime $X\subset\mathbb{R}^n$. O funcţie reală $F(x_1,x_2,...,x_n)$ definită pe *X* ***depinde de funcţiile*** $f_1, f_2,..., f_m$ pe mulţimea *X*, dacă există o funcţie reală de *m* variabile $\Phi(y_1,y_2,...,y_m)$ definită pe o mulţime $Y\subset\mathbb{R}^m$, astfel încât pentru $x\in X$ să avem $F(x_1,x_2,...,x_n)\equiv\Phi(f_1(x_1,x_2,...,x_n),...,f_m(x_1,x_2,...,x_n))$.

Exemplu

Fie funcţiile $f,\ g,\ h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definite prin:

$$f(x,y,z)=x+y+z;\quad g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2;\quad h(x,y,z)=xy+yz+zx.$$

Avem $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\Rightarrow g\equiv f^2+2h$, deci g depinde de funcţiile f şi *h*.

Definiţia 3.5.2. Funcţiile $y_k = f_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ k = 1, 2, ..., m$, definite pe o mulţime $X \subset \mathbb{R}^n$ sunt ***în dependenţă funcţională pe o mulţime*** $A \subset X$, dacă cel puţin una dintre ele depinde de celelalte pe mulţimea *A*.

Teorema 3.5.3. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca *n* funcţii de *n* variabile independente $y_k = f_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ k = 1, 2, ..., n$, definite pe o mulţime $X \subset \mathbb{R}^n$, cu derivate parţiale continue pe *X*, să fie independente funcţional pe $A \subset X$ este ca determinantul funcţional:

$$\frac{D(y_1, y_2, ..., y_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

să fie identic nul pe *A*.

Definiţia 3.5.4. Funcţiile $f_1\left(x_1, ..., x_n\right),\ f_2\left(x_1, ..., x_n\right), ...,\ f_n\left(x_1, ..., x_n\right)$ definite pe o mulţime $X \subset \mathbb{R}^n$ se spune că sunt ***independente*** într-un punct $\left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\right) \in X$ dacă nici una din funcţii nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $\left(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}\right) \in X$.

Funcţiile $f_1\left(x_1, ..., x_n\right),\ f_2\left(x_1, ..., x_n\right), ...,\ f_n\left(x_1, ..., x_n\right)$ sunt ***independente*** pe *X* dacă sunt independente în orice punct interior al mulţimii *X*.

3. Extreme condiţionate

Fie $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ o funcţie reală definită pe o mulţime $X \subset \mathbb{R}^n$ şi un sistem de $p < n$ ecuaţii de forma:

$$\begin{cases} F_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ F_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ .... \\ F_p\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \end{cases}$$

funcţiile reale $F_1,\ F_2, ...,\ F_p$ fiind definite pe aceeaşi mulţime $X \subset R^n$.

Definiţia 3.6.1. Extremele funcţiei $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ când punctul $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ parcurge numai mulţimea *A* a soluţiilor sistemului (5.6.1) se numesc ***extremele funcţiei f condiţionate*** de sistem.

Teorema 3.6.2. Fie funcţia $\Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\right)$ de $n + p$ variabile definită de:

$$\Phi = f\left(x_1, ..., x_n\right) + \lambda_1 \cdot F_1\left(x_1, ..., x_n\right) + ... + \lambda_p \cdot F_p\left(x_1, ..., x_n\right)$$

şi $\left(a_1, a_2, ..., a_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_p\right)$ un punct staţionar liber al funcţiei Φ. Punctul $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ este punct staţionar al funcţiei $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ cu legăturile $F_1 = 0, F_2 = 0, ..., F_p = 0$.

Observaţie. Numerele $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ se numesc ***multiplicatorii lui Lagrange***.

Pentru a determina punctele de extrem ale unei funcţii $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ cu legăturile $F_1 = 0,\ F_2 = 0, ...,\ F_p = 0$ se procedează astfel:

1) se formează funcţia ajutătoare:

$$\Phi = f\left(x_1, ..., x_n\right) + \lambda_1 \cdot F_1\left(x_1, ..., x_n\right) + ... + \lambda_p \cdot F_p\left(x_1, ..., x_n\right);$$

2) cu $\lambda_1,\ \lambda_2, ...,\ \lambda_p$ parametri;

3) se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, ...,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \\ F_1 = 0,\ F_2 = 0,\ F_p = 0 \end{cases}$$

cu $n + p$ ecuaţii şi $n + p$ necunoscute;

4) dacă $\left(a_1, a_2, ..., a_n; \mu_1, \mu_2, ..., \mu_p\right)$ este o soluţie a acestui sistem, punctul $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ este punct staţionar condiţionat al funcţiei $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Punctele de extrem condiţionat ale funcţiei *f* se găsesc printre punctele staţionare condiţionate.

Pentru a stabili dacă punctele staţionare condiţionate sunt de extrem, se studiază diferenţa $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - f\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ pentru punctele care verifică sistemul $F_1 = 0,\ F_2 = 0, ...,\ F_p = 0$, de unde rezultă că avem:

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - f\left(a_1, a_2, ..., a_n\right) = \Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - \Phi\left(a_1, a_2, ..., a_n\right),$$

adică se studiază diferenţa:

$$E = \Phi\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - \Phi\left(a_1, a_2, ..., a_n\right).$$

Aplicând formula lui Taylor funcţiei $\Phi\left(x_1, ..., x_n\right)$ în punctul $\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$, avem $E = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{\partial^2 \Phi\left(a_1, ..., a_n\right)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j + R$, unde $x_i - a_i = \mathrm{d}x_i,\ i = 1, 2, ..., n$.

Semnul diferenţei *E* este dat de semnul formei pătratice:

$$\mathrm{d}^2\Phi\left(a_1, ..., a_n\right) = \sum \frac{\partial^2 \Phi\left(a_1, ..., a_n\right)}{\partial x_i \partial x_j} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j .$$

4. Probleme rezolvate

3.7.1 Să se calculeze $f'(1),\ f''(1)$ pentru funcţia implicită $y=f(x)$, definită prin ecuaţia $\left(x^2+y^2\right)^3-3\cdot\left(x^2+y^2\right)-2=0$, satisfăcând condiţia $f(1)=1$.

Indicaţie de rezolvare:

Se consideră funcţia $F(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^3-3\cdot\left(x^2+y^2\right)$ definită pe $\mathbb{R}^2$. Pentru ea există derivatele parţiale de ordinul întâi de forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=6x\cdot\left(x^2+y^2\right)^2-6x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=6y\cdot\left(x^2+y^2\right)^2-6y.$$

Pentru un punct $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, pentru care $F(x_0,y_0)=0$ şi $y_0\neq 0$, $x_0^2+y_0^2\neq 1$, se verifică ipotezele din teorema funcţiilor implicite şi putem scrie:

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{x}{y}\Rightarrow f'(1)=-1$$

$$f''(x)=\frac{\partial f'(x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=-\frac{1}{y^2}\left(y+\frac{x^2}{y}\right)\Rightarrow f''(1)=-2.$$

3.7.2 Se consideră funcţia $y=f(x)$ definită implicit prin relaţia $x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y=0,\ a>1$. Să se arate că $f''(x)=0$.

Indicaţie de rezolvare:

Fie $F(x,y)=x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y,\ a>1$, definită pe $\mathbb{R}^2$.

Există $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x+2ay,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y+2ax$.

Fie un punct $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, astfel încât $F(x_0,y_0)=0$ şi pentru care $y_0+ax_0\neq 0$. Derivatele parţiale de ordinul I ale lui *F* sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, deci şi pe o vecinătate $U\times V$ a punctului $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Astfel sunt îndeplinite condiţiile din teorema funcţiilor implicite şi este asigurată existenţa funcţiei $f:U_0\to V_0,\ U_0\subset U,\ V_0\subset V$ şi a derivatei sale.

Deoarece $y=f(x)$ trebuie să verifice $x^2+y^2+2\cdot a\cdot x\cdot y=0,\ a>1$, rezultă că $x^2+f^2(x)+2a\cdot x\cdot f(x)=0$. Derivând aceasta, vom obţine:

$$2\cdot x+2f(x)\cdot f'(x)+2a\cdot f(x)+2a\cdot x\cdot f'(x)=0\Rightarrow f'(x)=-\frac{x+a\cdot f(x)}{a\cdot x+f(x)}.$$

Derivând ultima relaţie obţinută, rezultă:

$$f''(x)=\frac{a^2-1}{[a+f(x)]^3}\cdot\left[x^2+f^2(x)+2a\cdot x\cdot f(x)\right]=0 \Rightarrow f''(x)=0.$$

3.7.3 Să se determine punctele de extrem pentru funcţiile implicite $y=f(x)$ definite prin:

1) $x^2-2\cdot x\cdot y+5\cdot y^2-2\cdot x+4\cdot y+1=0$;

2) $x^3+y^3-3\cdot x^2\cdot y-3=0$;

3) $y^2+2\cdot y\cdot x^2-4\cdot x-3=0$;

Indicaţie de rezolvare:

1) $f'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\dfrac{2x-2y-2}{-2x+10y+4}$, unde s-a considerat

$$F(x,y)=x^2-2\cdot x\cdot y+5\cdot y^2-2\cdot x+4\cdot y+1 .$$

Se obţine sistemul:

$$\begin{cases}2x-2y-2=0;\\ x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0,\end{cases}$$

care are soluţiile $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

În acelaşi timp,

$$f''(x)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x-2y-2}{2x-10y-4}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y-1}{x-5y-2}\right)=$$

$$=\frac{(1-f'(x))(x-5f(x)-2)-(x-f(x)-1)(1-5f'(x))}{(x-5f(x)-2)^2}\Rightarrow f''(1)=-1<0,$$

deci punctul 1 este de maxim, iar $f''\left(\frac{1}{2}\right)=1>0$, deci punctul $\frac{1}{2}$ este de minim.

2) $f'(x)=-\dfrac{3x^2-6xy}{3y^2-3x^2}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6xy=0\\ x^3+y^3-3x^2y-3=0\end{cases}\Rightarrow \mathrm{A}\left(0,\sqrt[3]{3}\right),\ \mathrm{B}(-2,-1)$

sunt soluţiile sistemului;

$$f''(x)=\frac{2y^3+2x^2y-2xy^2+2x\left(x\cdot y-x^2-y^2\right)\cdot y'}{\left(x^2-y^2\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(0)=\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\ f''(-2)=-\frac{2}{3},$$

deci 0 este punct de minim, iar -2 este punct de maxim;

3) fie

$$F(x,y)=y^2+2yx^2-4x-3\Rightarrow f'(x)=-\frac{2xy-2}{y+x^2},$$

de unde se obţine sistemul:

$$\begin{cases} xy=1 \\ y^2+2yx^2-4x-3=0 \end{cases}$$

cu soluţiile $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},2\right)$;

$$f''(x)=-2\cdot\frac{\left(f(x)+xf'(x)\right)\left(f(x)+x^2\right)-\left(xf(x)-1\right)\left(f'(x)+2x\right)}{\left(f(x)+x^2\right)^2}$$

şi deoarece $f''\left(\frac{1}{2}\right)<0$, rezultă că punctul $x=\frac{1}{2}$ este de maxim. Punctul $x=-1$ nu este de extrem, deoarece diferenţiala de ordinul doi a lui F este $\mathrm{d}^2F(-1,-1)=-4\mathrm{d}x^2-2\mathrm{d}y^2-8x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ nu păstrează semn constant;

3.7.4 Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ pentru funcţia $z=f(x,y)$ definită implicit prin $x\cos y+y\cos z+z\cos x-1=0$, satisfăcând condiţia $f(1,0)=0$.

Indicaţie de rezolvare:

Fie funcţia $F(x,y,z)=x\cos y+y\cos z+z\cos x-1$ definită pe $\mathbb{R}^3$.

Rezultă: $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\cos y-z\cdot\sin x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\cos z-x\cdot\sin y$,

$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=\cos x-y\cdot\sin z$ şi sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

Se consideră punctul $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0,y_0,z_0)=0$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Astfel, funcţia F şi derivatele sale parţiale de ordinul I sunt continue într-o vecinătate a lui $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, fiind îndeplinite condiţiile din teorema funcţiilor implicite şi putem scrie: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$,

de unde rezultă:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\cos y-z\sin x}{-y\sin z+\cos x},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{-x\sin y+\cos z}{-y\sin z+\cos x},$$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=-\frac{1}{\cos 1},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)=-\frac{1}{\cos 1}$.

3.7.5 Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi ale funcţiei implicite $z=f(x,y)$, definite prin:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$;

b) $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Indicaţie de rezolvare:

a) fie $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$, se scriu derivatele parţiale de ordinul I ale lui *F*, care sunt continue pe $\mathbb{R}^3$ şi se consideră un punct $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0,y_0,z_0)=0$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$; astfel, funcţia *F* şi derivatele sale parţiale de ordinul I sunt continue şi pe o vecinătate a lui $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ şi sunt verificate condiţiile din teorema funcţiilor implicite, rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}\right)=\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}\frac{\left(y^2-b^2\right)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}\right)=\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{\left(x^2-a^2\right)}{z^3};$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}\right)=-\frac{c^4}{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{x\cdot y}{z^3};$$

b)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-1}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-1}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x\cdot y}{z^3}.$$

3.7.6 Să se calculeze $\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}^2 z$ pentru funcţia implicită $z=f(x,y)$ definită prin: $x^2+y^2+z^2=a^2$;

Indicaţie de rezolvare:

Fie $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2$, derivatele sale parţiale de ordinul I sunt $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=2y$ şi $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=2z$, care sunt continue pe $\mathbb{R}^3$; se consideră un punct $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, pentru care $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $z\neq 0$; funcţia F şi derivatele sale parţiale de ordinul I sunt continue şi pe o vecinătate a lui $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, fiind astfel verificate condiţiile din teorema funcţiilor implicite; rezultă:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{z};$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{z}\cdot(x\cdot\mathrm{d}x+y\cdot\mathrm{d}y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right)=\frac{y^2-a^2}{z^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z}\right)=\frac{x^2-a^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z}\right)=-\frac{xy}{z^3},$$

de unde se obţine:

$$\mathrm{d}^2z=\frac{y^2-a^2}{z^3}\cdot\mathrm{d}x^2-2\frac{xy}{z^3}\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y+\frac{x^2-a^2}{z^3}\cdot\mathrm{d}y^2.$$

3.7.7 Funcţiile $u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y)$ sunt definite implicit prin relaţiile $u+v=x+y,\ x\cdot u+y\cdot v=1$. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$.

Indicaţie de rezolvare:

Derivând în raport cu *x* cele două relaţii, obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u+v)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial}{\partial x}(x\cdot u+y\cdot v)=u+x\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u+y}{y-x},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u+x}{x-y}.$$

Derivând cele două relaţii în raport cu *y*, obţinem: $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{v+y}{y-x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v+x}{x-y}$.

3.7.8 Fie funcţia compusă $z=f(x,y)$, definită de $z=u^3+v^3$, în care funcţiile $u(x,y)$ şi $v(x,y)$ sunt definite implicit prin relaţiile $u+v^2=x$, $u^2+v^2=y$. Să se calculeze

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Indicaţie de rezolvare:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=3u^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=3u^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+3v^2\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Diferenţiind relaţiile de definiţie, obţinem:

$$\mathrm{d}u+2\cdot v\cdot\mathrm{d}v=\mathrm{d}x,\ 2\cdot u\cdot\mathrm{d}u+2\cdot v\cdot\mathrm{d}v=\mathrm{d}y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mathrm{d}u=\frac{1}{1-2u}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y),\ \mathrm{d}v=-\frac{u}{v(1-2u)}\cdot\mathrm{d}x+\frac{1}{2v(1-2u)}\cdot\mathrm{d}y.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1-2u},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{1-2u},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{u}{v(1-2u)},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2v(1-2u)}$$

şi deci: $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3u(u-v)}{1-2u},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{(1-2u)}\cdot\left(-3\cdot u^2+\frac{3}{2}\cdot v\right).$$

3.7.9 Să se calculeze $\mathrm{d}z$, dacă $z=u\cdot v,\ x=\mathrm{e}^{u+v},\ y=\mathrm{e}^{u-v}$.

Indicaţie de rezolvare:

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}(u\cdot v)=v\cdot\mathrm{d}u+u\cdot\mathrm{d}v.$$

Diferenţiind relaţiile care definesc pe $u(x,y)$ şi $v(x,y)$, obţinem:

$$\mathrm{d}x=(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)\cdot\mathrm{e}^{u+v},\ \mathrm{d}y=(\mathrm{d}u-\mathrm{d}v)\cdot\mathrm{e}^{u-v}\ .$$

Rezultă $\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right),\ \mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right)$, de unde:

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{2x}(u+v)\mathrm{d}x+\frac{1}{2y}(v-u)\mathrm{d}y.$$

3.7.10 Fie funcţia $z=f(x,y)$ definită implicit prin $z\cdot\mathrm{e}^z=x\cdot\mathrm{e}^x+y\cdot\mathrm{e}^y$. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}$, dacă $u=\frac{x+z}{y+z}$.

Indicaţie de rezolvare:

Diferenţiind relaţia de definiţie a funcţiei implicite $z=f(x,y)$, obţinem:

$$(z+1)\cdot\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{d}z=(x+1)\cdot\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{d}x+(y+1)\cdot\mathrm{e}^y\cdot\mathrm{d}y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mathrm{d}z=\frac{x+1}{z+1}\cdot\mathrm{e}^{x-z}\cdot\mathrm{d}x+\frac{y+1}{z+1}\cdot\mathrm{e}^{y-z}\cdot\mathrm{d}y.$$

În acelaşi timp avem

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\left(\frac{x+z}{y+z}\right) = \frac{(y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)-(x+z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)}{(y+z)^2} =$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2}\left\{\left[(y+z)+(y-x)\frac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\right]\cdot \mathrm{d}x + \left[-(x+z)+(y-z)\frac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\right]\cdot \mathrm{d}y\right\}.$$

Rezultă: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{(y+z)^2}\left[(y+z)+(y-x)\dfrac{x+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{x-z}\right]$

şi $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{(y+z)^2}\left[-(x+z)+(y-z)\dfrac{y+1}{z+1}\cdot \mathrm{e}^{y-z}\right].$

3.7.11 Fie funcţiile $f(x,y,z) = x+y+z$, $g(x,y,z) = x-y+z$ şi $h(x,y,z) = 4\cdot(x\cdot y + y\cdot z)$ definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se cerceteze dependenţa funcţională a acestor funcţii.

Indicaţie de rezolvare:

Matricea funcţională a lui Jacobi: $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4(x+z) & 4y \end{pmatrix}$ are rangul doi, deci cele trei funcţii sunt dependente funcţional. Două dintre funcţii, *f* şi *g*, sunt independente funcţional, iar a treia, *h*, este dependentă funcţional de acestea.

3.7.12 Să se cerceteze dependenţa funcţională a funcţiilor:

a) $y_1 = \dfrac{a\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $y_2 = \dfrac{b\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ definite pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

b) $y_1 = x+y+z,\ y_2 = x^2+y^2+z^2 - x\cdot y - y\cdot z - x\cdot z$

şi

$y_3 = x^3+y^3+z^3 - 3\cdot x\cdot y\cdot z$ definite pe $\mathbb{R}^3$;

c) $y_1 = \dfrac{1}{(x-y)(x-z)}$, $y_2 = \dfrac{1}{(y-z)(y-x)}$, $y_3 = \dfrac{1}{(z-x)(z-y)}$, $x \neq y \neq z$

Indicaţie de rezolvare:

a) Matricea lui Jacobi este: $\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} ay^2 & -axy \\ -bxy & bx^2 \end{pmatrix}$ şi are rangul 1; funcţiile sunt dependente funcţional: $\left(\dfrac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2}{b}\right)^2 = 1$;

b) $y_3 = y_1 \cdot y_2$;

c) $y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

5.7.13 Să se determine extremele funcţiei $f(x,y) = x^2 + y^2 - y - x$ condiţionate de $x + y = 1$.

Indicaţie de rezolvare:

Se consideră funcţia lui Lagrange:

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y), \text{ unde } g(x,y) = x + y - 1.$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 - y - x + \lambda \cdot (x + y - 1).$$

Se rezolvă sistemul de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 \cdot x - 1 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 \cdot y - 1 + \lambda = 0; \\ x + y = 1, \end{cases}$$

de unde se obţin soluţiile: $\lambda = 0,\ x = y = \dfrac{1}{2}$.

Deoarece $\mathrm{d}^2 L\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \mathrm{d}x^2 + 2 \cdot \mathrm{d}y^2 > 0$, punctul $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ este de minim.

3.7.14 Să se determine extremele legate pentru funcţiile:

a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ a > b > c > 0$;

c) $f(x,y,z) = x + 2y - 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16$;

d) $f(x,y,z) = x + y + z,\ x - y + z = 2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

Indicaţie de rezolvare:

a) Se consideră $L(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 9\right)$ şi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot \lambda \cdot x = 0 \\ -2 + 2 \cdot \lambda \cdot y = 0 \\ 2 + 2 \cdot \lambda \cdot z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = -\dfrac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2};$$

se obţin punctele $\mathrm{A}(1,-2,2),\ \mathrm{B}(-1,2,-2)$ şi se determină

$$\mathrm{d}^2L = 2\lambda \mathrm{d}x^2 + 2\lambda \mathrm{d}y^2 + 2\lambda \mathrm{d}z^2,$$

de unde rezultă că punctul A este de maxim, iar B de minim;

b) $\lambda_1 = -a^2 \Rightarrow \mathrm{A}(a,0,0),\ \mathrm{B}(-a,0,0)$ sunt puncte de maxim,

$\lambda_2 = -c^2 \Rightarrow \mathrm{C}(0,0,c),\ \mathrm{D}(0,0,-c)$ sunt puncte de minim;

c) $\lambda_1 = -\frac{3}{8} \Rightarrow \mathrm{A}\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)$ este punct de maxim;

$\lambda_2 = \frac{3}{8} \Rightarrow \mathrm{B}\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right)$ este punct de minim;

d) Se consideră

$$L(x,y,z) = x + y + z + \lambda(x - y + z - 2) + \mu\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)$$

şi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda + 2\mu \cdot x = 0 \\ 1 - \lambda + 2\mu \cdot y = 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu \cdot z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\lambda+1}{2\mu}; \\ y = \dfrac{\lambda-1}{2\mu}; \\ z = -\dfrac{\lambda+1}{2\mu}; \end{cases}$$

rezultă $\lambda_1 = \frac{1}{3},\ \mu_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{A}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ punct de maxim şi $\lambda_2 = -1,\ \mu_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\mathrm{B}(0,-2,0)$ punct de minim.

5. Schimbări de variabile şi de funcţii. Probleme rezolvate

$\boxed{3.7.15}$ Ce devin ecuaţiile următoare dacă se fac schimbările de variabilă indicate?

a) $x^3 \cdot y''' + x \cdot y' - y = 0,\ x = \mathrm{e}^t;$

b) $(x+1)^3 \cdot y'' + 3(x+1)^2 \cdot y' + (x+1) \cdot y = \ln(x+1),\ \ln(x+1) = t;$

c) $\left(1 - x^2\right) \cdot y'' - x \cdot y' + \omega^2 \cdot y = 0,\ x = \cos t;$

d) $\left(1 + x^2\right)^2 \cdot y'' + 2x\left(1 + x^2\right) \cdot y' + y = 0,\ x = \mathrm{tg}\, t;$

Indicaţie de rezolvare:

a)

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t},\ y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-t} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t};$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2t}\right] \cdot \mathrm{e}^{-t} = \left(\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-3t};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuaţia dată, se va obţine noua ecuaţie:

$$\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y = 0;$$

b) $\ln(x+1) = t \Rightarrow x + 1 = \mathrm{e}^t \Rightarrow x = \mathrm{e}^t - 1;$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-t}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \cdot \mathrm{e}^{-2t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{e}^{-2t};$$

înlocuind derivatele lui y în ecuaţia dată, se obţine noua ecuaţie:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = t \cdot \mathrm{e}^{-t};$$

c) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 \cdot y = 0;$

d) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0;$

3.7.16 Ce devin ecuaţiile următoare dacă se schimbă funcţia după cum urmează:

a) $x \cdot y' - y(\ln x \cdot y - 1) = 0,\ y = \frac{z}{x};$

b) $x^2 \cdot y'' + 4x \cdot y' + \left(2 - x^2\right) \cdot y = 4x,\ y = \frac{z}{x^2};$

Indicaţie de rezolvare:

a) $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{z' \cdot x - z}{x^2} \Rightarrow x \cdot z' - z \ln z = 0;$

b) $z'' - z = 4x;$

$\boxed{3.7.17}$ În ecuaţia $y''(1+y^2)-2(1+y)\cdot(y')^2-(1+y^2)=0$, unde y este o funcţie de x, se face schimbarea $y=\operatorname{tg} z$. Să se găsească ecuaţia verificată de $z(x)$.

Răspuns: $z''-2(z')^2-\cos^2 z=0$.

$\boxed{3.7.18}$ Ce devin următoarele ecuaţii dacă se schimbă rolul variabilelor?

a) $y''+x\cdot(y')^3=0$;

b) $y''-(y')^2+2x\cdot(y')^3$.

Indicaţie de rezolvare:

a) $y'=\dfrac{1}{x'},\ y''=-\dfrac{x''}{(x')^3}\Rightarrow x''-x=0$ este noua ecuaţie;

b) $x''+x'-2x=0$.

$\boxed{3.7.19}$ În ecuaţiile care urmează să se facă schimbările indicate la fiecare

a) $x\cdot y\cdot y''-x\cdot(y')^2+y^2=0,\ \begin{cases} x=\mathrm{e}^t; \\ y=\mathrm{e}^u, \end{cases}\ u=u(t)$;

b) $2\cdot y''+(x+y)(1-y')^3=0,\ \begin{cases} x-y=u; \\ x+y=v(u); \end{cases}$

c) $(1-x^2)\cdot y''-3\cdot x\cdot y'+(a^2-1)\cdot y=0,\ \begin{cases} x=\sin t; \\ y=\dfrac{z}{\cos t}, \end{cases}\ z=z(t)$;

Indicaţie de rezolvare:

a) $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^u\right)\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^t\right)}=\mathrm{e}^{u-t}\cdot u'$;

$$y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{u-t}\cdot u'\right)\cdot\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{u-2t}\cdot\left[u''+(u')^2-u'\right];$$

efectuând înlocuirile, obţinem ecuaţia: $u''-u'+\mathrm{e}^t=0$;

b) $v''+v=0$;

c) $z''+a^2\cdot z=0$;

$\boxed{3.7.20}$ Luând u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuaţii:

a) $y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=x,\ v=x^2+y^2$;

b) $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=0,\ u=x,\ v=\dfrac{y}{x}$;

c) $\left(x+y\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\left(x-y\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

Indicaţie de rezolvare:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y};$

rezultă că $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+2\cdot x\dfrac{\partial z}{\partial v},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2\cdot y\dfrac{\partial z}{\partial v}\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$ este ecuaţia transformată;

b) $u\cdot\dfrac{\partial z}{\partial u}-z=0;$

c)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

$\boxed{\textbf{3.7.21}}$ Luând pe u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuaţii:

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=3\cdot x+y,\ v=x+y;$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cos x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\sin^2 x\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\sin x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ \begin{cases}u=\sin x+x-y;\\ v=x-\sin x+y;\end{cases}$

c) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ \dfrac{x}{y}=u,\ x\cdot y=v;$

d) $x\cdot y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2\cdot y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=x,\ v=\dfrac{y}{x};$

e) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=2\cdot x+y,\ v=y.$

Indicaţie de rezolvare:

a)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=3\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(3\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(3\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= 9\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Înlocuind, se obţine ecuaţia $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$;

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$;

c) $2\cdot v\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} = 0$;

d) $v\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$;

e) $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

6. TEST DE AUTOEVALUARE

$\boxed{1}$ Să se determine extremele funcţiei $z = f(x, y)$, definită implicit prin:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 6 \cdot z - 11 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - x \cdot z - y \cdot z + 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z - 2 = 0$.

$\boxed{2}$ Să se arate că funcţiile:

$$y_1 = x + y + z,\ y_2 = x^3 + y^3 + z^3 + 6 \cdot x \cdot y \cdot z$$

şi

$$y_3 = x \cdot y(x + y) + y \cdot z(y + z) + z \cdot x(z + x)$$

sunt dependente funcţional pe $\mathbb{R}^3$. Care este relaţia de dependenţă?

$\boxed{3}$ Să se determine extremele funcţiei $f(x, y)$ cu legăturile indicate:

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$;

b) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$;

c) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2,\ x^2 - y^2 = 1$;

d) $f(x,y) = x \cdot y,\ x + y = 1$;

e) $f(x,y) = x + 2 \cdot y,\ x^2 + y^2 = 5$.

$\boxed{4}$ Să se determine valoarea maximă şi valoarea minimă pentru:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + 1,\ x^2 + y^2 \le 1$;

b) $f(x,y) = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x \cdot y + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1$.

$\boxed{5}$ Să se transforme în coordonate polare, făcând înlocuirile: $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$, următoarele expresii:

a) $E = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

b) $E = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$;

c) $E = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

d) $E = x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cdot x \cdot y \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

7. TEMĂ DE CONTROL

$\boxed{1}$ Să se scrie formula lui Taylor pentru:

a) $f(x,y)=-x^2+2\cdot x\cdot y+3\cdot y^2-6\cdot x-2\cdot y-4$ în punctul $(-2,1)$;

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot y-y\cdot z-4\cdot x-3\cdot y-z+4$

în punctul $(1,1,1)$.

$\boxed{2}$ Să se determine extremele funcţiei:

a) $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12\cdot x\cdot y+2\cdot z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;

b) $f(x,y,z)=x\cdot y^2\cdot z^3\cdot(7-x-2\cdot y-3\cdot z),\ x\cdot y\cdot z\neq 0$;

c) $f(x,y,z)=\left(x+z^2\right)\cdot e^{x\left(y^2+z^2+1\right)},\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$\boxed{3}$ Să se arate că dacă funcţia $z=f(x,y)$ este definită implicit prin $(y+z)\cdot\sin z-y\cdot(x+z)=0$, atunci este satisfăcută ecuaţia:

$$z\cdot\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

$\boxed{4}$ Fie funcţiile

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2,\ g(x,y,z)=2\cdot x+y-2\cdot z$$

şi

$$h(x,y,z)=3\cdot x^2+2\cdot x\cdot y-12\cdot x\cdot z-18\cdot z\cdot y$$

definite pe $\mathbb{R}^3$. Să se arate că:

funcţiile *f*, *g* şi *h* nu sunt independente în origine;

există o vecinătate a punctului $M_0(-1,0,1)$ pe care *f* depinde de *g* şi *h*.

$\boxed{5}$ Presupunând pe *u* şi *v* ca noi variabile independente şi pe *w* ca o nouă funcţie, să se transforme în noile variabile următoarele ecuaţii:

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)\cdot z,\text{ dacă }\begin{cases}u=x^2+y^2;\\ v=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y};\\ w=\ln z-(x+y);\end{cases}$$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2, \text{ dacă } \begin{cases} u=x; \\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}; \\ w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}; \end{cases}$$

$$(x\cdot y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y\cdot z, \text{ dacă } \begin{cases} u=y\cdot z-x; \\ v=x\cdot z-y; \\ w=x\cdot y-z; \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}, \text{ dacă } \begin{cases} u=\dfrac{x}{y}; \\ v=x; \\ w=x\cdot z-y; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \text{ dacă } \begin{cases} u=x+y; \\ v=x-y; \\ w=x\cdot y-z. \end{cases}$$

6 Ce devine expresia $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ în coordonate sferice $x=r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ y=r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z=r\cdot\cos\varphi$?

8. BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ PENTRU UNITATEA DE INVĂŢARE Nr. 2

1. **I. Colojoară**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. **M. Craiu, V. V. Tănase**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
3. **M. Craiu, M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976
4. **N. Donciu, D. Flondor**, *Algebră şi analiză matematică*. Culegere de probleme, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978, 1979
5. **I. P. Elianu**, *Principii de analiză matematică*. Calcul diferenţial, Editura Academiei Militare, Bucureşti, 1976
6. **P. Flondor, O. Stănăşilă**, *Lecţii de analiză matematică*, Editura ALL, 1993
7. **..**, *Manual de Analiză matematică*, vol. I, Ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
8. **E. Popescu**, *Analiză matematică. Structuri fundamentale*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 1998
9. **M. Roşculeţ**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973
10. **M. Roşculeţ**, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968
11. **I. Sprinţu**, *Elemente de analiză matematică*, Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2001
12. **O. Stănăşilă**, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
13. **I. Sprinţu**, **V. Garban**, *Analiză matematică I. Calcul diferenţial şi integral,* Editura Academiei Tehnice Militare, Bucureşti, 2003