

CURS 7

Funcții

O *funcție* este un set de instrucțiuni, grupate sub un nume unic, care efectuează o prelucrare specifică a unor date în momentul în care este apelată.

Funcțiile sunt utilizate pentru a modulariza codul dintr-un program, prin împărțirea sa în subprograme (i.e., funcții) care execută fiecare o singură prelucrare bine definită. În plus, funcțiile permit o reutilizare simplă și sigură a codului, prin organizarea lor în module și pachete.

În limbajul Python sunt predefinite mai multe funcții care sunt des utilizate în programe, cum ar fi funcții de conversie (`int`, `str`, `bool` etc.), funcții matematice (`min`, `max`, `sum` etc.), funcții pentru crearea unei colecții (`list`, `dict`, `set` etc.) ș.a.m.d. O listă completă a tuturor funcțiilor predefinite din limbajul Python poate fi consultată aici: <https://docs.python.org/3/library/functions.html>.

O funcție poate fi definită de către un utilizator folosind cuvântul cheie `def`, astfel:

```
def nume_funcție(parametrii formali)
    instrucțiuni
```

Parametrii formali sunt utilizați în antetul unei funcții pentru a preciza datele sale de intrare într-un mod abstract (formal). *Parametrii actuali* ai unei funcții sunt expresii ale căror valori sunt asociate parametrilor formali în momentul apelării unei funcții.

Parametrii formali ai unei funcții pot fi de mai multe tipuri în limbajul Python:

- *parametri simpli* au, de obicei, un caracter pozițional, respectiv în momentul apelării unei funcții trebuie să fie înlocuiți cu același număr de parametri efectivi, compatibili ca tipuri de date:

```
def suma(x, y):
    return x + y

# apelare pozițională
s = suma(3, 7)
print("s =", s)

# apelare prin nume
s = suma(y=7, x=3)
print("s =", s)
```

În acest exemplu, parametri formali ai funcției `suma` sunt `x` și `y`, iar constantele `3` și `7` sunt parametri efectivi. Deoarece în limbajul Python nu se precizează explicit tipurile

de date ale parametrilor formali, compatibilitatea dintre ei și parametrii efectivi poate fi, în unele cazuri, o noțiune destul de vagă. Astfel, în acest exemplu, parametrii efectivi ai funcției pot fi și două șiruri de caractere sau două liste, dar nu pot fi, de exemplu, un număr și un șir de caractere! De asemenea, se observă faptul că parametrii simpli permit și apelarea prin nume.

- *parametri cu valori implicite* sunt utilizați dacă se dorește inițializarea lor cu niște valori implicite, care vor fi utilizate în momentul apelării funcției cu un număr de parametri efectivi mai mic decât numărul parametrilor formali:

```
def suma(x=0, y=0):
    return x + y

s = suma()           # x = 0 și y = 0
print("s =", s)      # s = 0

s = suma(7)          # x = 7 și y = 0
print("s =", s)      # s = 7

s = suma(y=19)        # x = 0 și y = 19
print("s =", s)      # s = 19

s = suma(7, 10)       # x = 7 și y = 10
print("s =", s)      # s = 17
```

Atenție, dacă antetul unei funcții conține și parametri simpli și parametri cu valori implicite, parametrii poziționali trebuie să fie precizați primii, pentru a evita ambiguitățile care pot să apară în momentul apelării funcției! De exemplu, dacă funcția se mai sus ar avea antetul `suma(x=0, y)`, atunci apelul `s = suma(7)` ar putea fi interpretat fie ca `s = suma(7, y)` și ar fi incorect (parametrului `y` nu i-ar fi asociat niciun parametru efectiv), fie ca `s = suma(0, 7)` și ar fi corect. În schimb, antetul `suma(x, y=0)` nu va mai genera nicio ambiguitate în cazul apelului `s = suma(7)`, putând fi interpretat doar ca `s = suma(7, 0)`.

În limbajul Python, se pot defini foarte simplu și funcții cu *număr variabil de parametri*, care sunt utile când nu se poate preciza numărul exact de parametri ai unei funcții. De exemplu, în același program putem să avem nevoie de o funcție care să calculeze suma a două numere și de o funcție care să calculeze suma a trei numere. Deoarece în limbajul Python nu se pot defini două funcții cu același nume și număr diferit de parametri (de fapt, se pot defini, dar compilatorul o va lua în considerare doar pe ultima definită și orice apelare a primei funcții definite va fi semnalată ca eroare), înseamnă că ar trebui să definim două funcții cu nume diferite, dar care sunt foarte asemănătoare din punct de vedere al prelucrărilor efectuate.

Definirea unei funcții cu număr variabil de parametri se realizează adăugând simbolul `*` înaintea unui parametru, ceea ce indică faptul că parametrul respectiv va conține, sub forma unui tuplu, un număr oarecare de parametri efectivi. De exemplu, o funcție cu număr variabil de parametri care calculează suma acestora se poate defini și apela astfel:

```
def suma(*args):
    sa = 0
    for x in args:
        sa = sa + x
    return sa
s = suma()
print("s =", s)           #s = 0

s = suma(7)
print("s =", s)           #s = 7

s = suma(1, 2, 3, 4)      #s = 10
print("s =", s)

lista = [x for x in range(1, 11)]
s = suma(*lista)
print("s =", s)           #s = 55
```

Evident, o funcție poate să aibă un singur parametru variabil, iar eventualii parametri existenți după el trebuie să fie precizați explicit, prin numele lor, în momentul apelării funcției (deoarece ei nu mai pot fi accesați pozițional, fiind precedați de un număr necunoscut de parametrii). De exemplu, următoarea funcție calculează suma parametrilor variabili care sunt cel puțin egali cu valoarea minim:

```
def suma(*valori, minim):
    sv = 0
    for x in valori:
        if x >= minim:
            sv = sv + x
    return sv

s = suma(7, minim=5)       #s = 7
print("s =", s)

s = suma(1, 2, 3, minim=10) #s = 0
print("s =", s)

lista = [x for x in range(1, 11)]
s = suma(*lista, minim=8)
print("s =", s)           #s = 27
```

Dacă în exemplul de mai sus nu vom preciza explicit valoarea parametrului minim (de exemplu, scriind `s = suma(1, 2, 3, 10)`), atunci se va semnală o eroare de tipul `TypeError` (pentru exemplul considerat aceasta va fi `TypeError: suma() missing 1 required keyword-only argument: 'minim'`).

Bineînțeles, dacă o funcție cu număr variabil de parametri are și parametri simpli și parametri cu valori implicite, atunci trebuie respectată și regula ca parametrii simpli să fie scriși înaintea celor cu valori implicite! De exemplu, următoarea funcție `suma` calculează suma parametrilor variabili cuprinși între valorile `minim` și `maxim` care sunt și multipli ai numărului `t`:

```
def suma(t, *valori, minim=0, maxim=100):
    sv = 0
    for x in valori:
        if minim <= x <= maxim and x % t == 0:
            sv = sv + x
    return sv

s = suma(7, 14, 19, 21, -56)           #s = 35
print("s =", s)

s = suma(7, 14, 19, 21, -56, minim=-100)  #s = -21
print("s =", s)

s = suma(7, 14, 19, 21, -56, minim=-100, maxim=0)  #s = -56
print("s =", s)
```

Datorită operației implicite de împachetare a mai multor valori sub forma unui tuplu, o funcție poate să furnizeze mai multe valori. Astfel, o instrucțiune de forma `return a, b` este echivalentă cu `return (a, b)`, așa cum se poate observa din următorul exemplu:

```
def suma_prod(x, y):
    return x + y, x * y

s, p = suma_prod(3, 7)
print("s =", s, "\tp =", p)

(s, p) = suma_prod(3, 7)
print("s =", s, "\tp =", p)

t = suma_prod(3, 7)
print("s =", t[0], "\tp =", t[1])
print("Suma si produsul:", *t)
```

Observați faptul că la apelarea funcției se poate utiliza operația de despachetare a unui tuplu, complementară celei de împachetare utilizată în instrucțiunea `return`!

Modalități de transmitere a parametrilor

În limbajele C/C++ transmiterea unui parametru efectiv către o funcție se poate realiza în două moduri:

- *transmitere prin valoare*: se transmite o copie a valorii parametrului efectiv, deci modificările efectuate asupra parametrului respectiv în interiorul funcției NU se reflectă și în exteriorul său;
- *transmitere prin adresă/referință*: se transmite adresa parametrului efectiv, deci modificările efectuate asupra parametrului respectiv în interiorul funcției se reflectă și în exteriorul său.

În limbajul Python, orice parametru efectiv al unei funcții este o referință către un obiect (i.e., nu se transmite obiectul în sine, ci o referință spre el) care se transmite implicit prin valoare (i.e., se transmite o copie a referinței respective), deci modificarea referinței respective în interiorul funcției nu se va reflecta în exteriorul său. Din acest motiv, mecanismul de transmitere a parametrilor către o funcție în limbajul Python se numește *transmitere prin referință la obiect (call by object reference)*.

Exemplul 1:

Funcția	Executarea programului	Rezultat
<pre>def functie(t): t = 100 # Pas 3 x = 7 # Pas 1 functie(x) # Pas 2 print("x =", x)</pre>		<pre>x = 7</pre>

Explicație: După pasul 2, variabilele x și copie_x vor conține aceeași referință (spre obiectul 7), dar după pasul 3 doar copie_x se va modifica (va conține referința obiectului 100), deoarece x este o referință transmisă prin valoare.

Exemplul 2:

Funcția	Executarea programului	Rezultat
<pre>def functie(t): t = t.upper() # Pas 3 x = "test" # Pas 1 functie(x) # Pas 2 print("x =", x)</pre>		<pre>x = test</pre>

Explicație: vezi exemplul anterior!

Exemplul 3:

Funcția	Executarea programului	Rezultat
<pre>def functie(t): t.append(100) # Pas 3 x = [1, 2, 3] # Pas 1 functie(x) # Pas 2 print("x =", x)</pre>		<pre>x = [1, 2, 3, 100]</pre>

Explicație: După pasul 2, variabilele `x` și `copie_x` vor conține aceeași referință, iar după pasul 3 conținutul listei se va modifica prin intermediul referinței din `copie_x` (însă fără a modifica referința listei!), deci variabila `x` va putea accesa lista modificată.

Exemplul 4:

Funcția	Executarea programului	Rezultat
<pre>def functie(t): t = t + [100] # Pas 3 x = [1, 2, 3] # Pas 1 functie(x) # Pas 2 print("x =", x)</pre>		<pre>x = [1, 2, 3]</pre>

Explicație: După pasul 2, variabilele `x` și `copie_x` vor conține aceeași referință (spre lista `[1, 2, 3]`), dar la pasul 3 operatorul de concatenare (+) va crea o nouă listă `[1, 2, 3, 100]`, deci după pasul 3 doar `copie_x` va conține referința noii liste. Practic, deși o listă este mutabilă, elementul 100 a fost adăugat într-o manieră specifică obiectelor imutabile!

În concluzie, mecanismul de *transmitere prin referință la obiect* a parametrilor efectivi către o funcție în limbajul Python utilizează transmiterea prin valoare a referințelor parametrilor efectivi (copii ale referințelor lor, deci modificarea acestora nu va fi vizibilă în exteriorul funcției) și acționează astfel:

- dacă obiectul asociat referinței este *imutabil*, atunci modificarea parametrului respectiv în interiorul funcției nu se va reflecta în exteriorul funcției deoarece conținutului obiectului asociat referinței nu poate fi modificat (din cauza imutabilității), iar crearea unei referințe noi nu se va reflecta în exteriorul funcției (din cauza transmiterii prin valoare a referinței);
- dacă obiectul asociat referinței este *mutabil*, atunci modificarea parametrului respectiv în interiorul funcției se va reflecta în exteriorul funcției deoarece nu se va modifica referința obiectului, ci doar conținutul său.

Atenție la exemplul 4 de mai sus, deoarece acolo nu se modifică direct conținutul obiectului mutabil de tip listă, ci se creează un nou obiect (tot o listă mutabilă) care conține noua listă și se atribuie referința sa copiei referinței parametrului!

Variabile locale și globale

O variabilă definită în interiorul unei funcții se numește *variabilă locală* și este vizibilă (i.e., poate fi utilizată) doar în interiorul funcției respective.

O variabilă definită în afara oricărei funcții se numește *variabilă globală* și este vizibilă în tot modulul respectiv (i.e., poate fi utilizată în interiorul oricărei funcții).

Exemplu:

```
def afisare():
    print("x = ", x)      # se va utiliza variabila globală x,
                        # deoarece nu există o variabilă locală x
x = 100
afisare()                # x = 100
```

Dacă într-o funcție există definită o variabilă locală având același nume cu o variabilă globală, atunci, implicit, se va utiliza variabila locală în interiorul funcției:

```
def afisare():
    x = 200
    print("x = ", x)      # se va utiliza variabila locală x
x = 100
afisare()                # x = 200
print("x = ", x)         # x = 100 (variabila globală)
```

Dacă într-o funcție există definită o variabilă locală având același nume cu o variabilă globală, atunci putem utiliza variabila globală precizând în interiorul funcției acest lucru:

```
def afisare():
    global x
    print("x = ", x)      # se va utiliza variabila globală x
    x = 200
x = 100
afisare()                # x = 100
print("x = ", x)         # x = 200
```

Atenție, dacă în exemplul de mai sus ar lipsi declararea `global x`, atunci ar fi generată eroarea `UnboundLocalError: local variable 'x' referenced before assignment`, deoarece definirea unei variabile locale `x` prin `x=200` va determina interpretatorul să nu mai caute o variabilă globală cu numele `x`! Același lucru se va întâmpla și în exemplul următor:

```
def f():
    x = x + 100           # eroare!
    print("x = ", x)
```

```
x = 200
f()
print("x = ", x)
```

În acest caz, eroarea apare deoarece interpretatorul consideră faptul că o instrucțiune de atribuire de forma "x =" reprezintă o declarație prin inițializare a unei variabile locale x, dar, evident, expresia $x + 100$ nu poate fi evaluată, variabila locală x nefiind inițializată!

Funcții imbricate

În limbajul Python putem defini o funcție în interiorul altei funcții, așa cum se poate observa din exemplul următor:

```
def combinari(n, k):
    def factorial(x):
        p = 1
        for i in range(1, x+1):
            p = p * i
        return p

    return factorial(n) // (factorial(k) * factorial(n-k))

print(combinari(5, 3))
```

O funcție g definită în interiorul unei funcții f este locală funcției f, deci funcția g poate fi apelată doar în interiorul funcției f (i.e., funcția g este o funcție auxiliară pentru f).

O funcție imbricată are acces implicit la parametrii funcției în care este definită și la variabilele sale locale:

```
def calcul(x, y):
    n = 2
    def medie(k):
        return (x**n + y**n) / k

    return medie(2)

print("m = ", calcul(3, 4))           # m = 12.5
```

Atenție, deși o funcție imbricată are acces implicit la variabilele locale ale funcției în care este definită, ea nu le poate modifica deoarece va fi generată o eroare de tipul `UnboundLocalError`. Pentru a utiliza o variabilă locală într-o funcție imbricată, variabila locală trebuie declarată în interiorul funcției imbricate folosind cuvântul cheie `nonlocal`:


```
def f():
    n = 100
    def aux():
        nonlocal n
        n = n * 2

    aux()
    return n

print(f())          # 200
```

Practic, prin utilizarea cuvântului cheie `nonlocal` pentru declararea unei variabile în interiorul unei funcții imbricate îi cerem interpretatorului să caute definirea variabilei respective în cel mai apropiat spațiu de nume exterior funcției imbricate, mai puțin în cel global (pentru a accesa variabilele globale se folosește cuvântul cheie `global`, așa cum deja am menționat):

```
incr = 100
def f():
    n = 7
    incr = 10

    def g():
        nonlocal incr, n
        n = n + incr
        return n

    def h():
        global incr
        nonlocal n
        n = n + incr
        return n

    print("nonlocal incr:", g())    # nonlocal incr: 17
    print("global incr:", h())      # global incr: 117

f()
```

În limbajul Python, o funcție poate să returneze o funcție imbricată, așa cum se poate observa din exemplul următor:

```
def putere(baza):

    def paux(exponent):
        return baza ** exponent

    return paux
```

```
putere10 = putere(10)

print(type(putere10))      # <class 'function'>
print(putere10.__name__)   # paux
print(putere10(3))         # 1000
```

Practic, `putere10` este o referință spre funcția `paux` particularizată pentru `baza = 10`, deci poate fi utilizată la fel ca orice altă funcție.

Transmiterea unei funcții ca parametru al altei funcții (callback)

Există mai multe situații în care este necesar să utilizăm *mecanismul de callback*, respectiv să transmitem o funcție f ca parametru al unei funcții g , astfel încât funcția g să poată apela funcția f când acest lucru este necesar. De exemplu, notificările utilizate în aplicațiile mobile utilizează un mecanism asemănător mecanismului de callback, respectiv o aplicație de tip server înregistrează faptul că un anumit utilizator a acceptat să primească notificări și în momentul în care apare un anumit eveniment pe server (de exemplu, când sunt depuși sau retrași bani dintr-un cont bancar), server-ul îi trimite utilizatorului respectiv o notificare. De asemenea, mecanismul de callback este intens utilizat în programarea interfețelor grafice, respectiv sistemul de operare primește o funcție pe care să o apeleze în momentul apariției unui anumit eveniment (e.g., apăsarea unui buton, închiderea unei ferestre, selectarea unei opțiuni dintr-o listă etc.).

Mecanismul de callback mai este utilizat și în *programarea generică*, respectiv în scrierea unor funcții care realizează prelucrări generice ale unei funcții a cărei expresie nu este cunoscută (e.g., reprezentarea grafică a unei funcții, calculul unei integrale etc.).

În continuare, vom prezenta o funcție generică pentru calculul unor sume. De exemplu, să considerăm următoarele 3 sume:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \\ S_2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \\ S_3 &= e^1 + e^2 + \dots + e^n \end{aligned}$$

Evident, putem să definim câte o funcție pentru calculul fiecărei sume, dar această soluție nu este scalabilă. Putem observa cu ușurință faptul că toate cele 3 sume au următoarea formă generală:

$$S_k = \sum_{i=1}^n f_k(i)$$

unde prin $f_k(i)$ am notat termenul de rang i al sumei S_k pentru $k \in \{1, 2, 3\}$, deci, pentru sumele de mai sus, termenii generali sunt $f_1(i) = \frac{1}{i}$, $f_2(i) = i^2$ și $f_3(i) = e^i$. Astfel, putem scrie o funcție generică pentru calculul unei astfel de sume, care va avea parametrii n și f_k , unde f_k va fi o funcție care implementează termenul general al unei anumite sume:

```

import math

def suma_generica(n, fk):
    s = 0
    for i in range(1, n+1):
        s = s + fk(i)
    return s

def fk_1(i):
    return 1/i

def fk_2(i):
    return i**2

n = 10
s = suma_generica(n, fk_1)
print("Suma 1:", s)                                # Suma 1: 2.9289682539682538

s = suma_generica(n, fk_2)
print("Suma 2:", s)                                # Suma 2: 385

s = suma_generica(n, math.exp)
print("Suma 3:", s)                                # Suma 3: 34843.77384533132

```

Observați faptul că putem apela funcția `suma_generica` utilizând pentru termenul general și funcții predefinite!

Sortarea colecțiilor de date

În limbajul Python, colecțiile pot fi sortate crescător folosind funcția predefinită `sorted`, care furnizează o listă cu elementele colecției respective sortate crescător:

- `sorted([2, 1, 5, 2, 1, 4]) = [1, 1, 2, 2, 4, 5]`
- `sorted((2, 1, 5, 2, 1, 4)) = [1, 1, 2, 2, 4, 5]`
- `sorted({2, 1, 5, 2, 1, 4}) = [1, 2, 4, 5]`
- `sorted({"d": 2, "a": 1, "f": 0, "b": 3 }) = ['a', 'b', 'd', 'f']`

Observați faptul că, indiferent de tipul colecției sortate (i.e., listă, tuplu sau mulțime), rezultatul este furnizat sub forma unei liste, iar în cazul unui dicționar funcția va furniza doar o listă a cheilor dicționarului sortate crescător. Dacă dorim să obținem perechile unui dicționar sortate crescător în funcție de chei, trebuie să sortăm o listă cu tuplele corespunzătoare intrărilor sale:

```
sorted({"d": 2, "a": 1, "b": 3, "f": 0}.items()) = [('a', 1), ('b', 3), ('d', 2), ('f', 0)]
```

În cazul sortării unui șir de caractere, funcția `sorted` va returna o listă formată din caracterele șirului, ordonate crescător:

```
sorted("exemplu") = ['e', 'e', 'l', 'm', 'p', 'u', 'x']
```

Dacă este necesar, putem să transformăm lista de caractere furnizată de metoda `sorted` înapoi într-un șir de caractere, folosind metoda `join`, astfel:

```
"".join(sorted("exemplu")) = "eelmpux"
```

Observație: O listă poate fi sortată direct, prin rearanjarea elementelor sale în ordine crescătoare, folosind metoda `sort` din clasa `list`:

```
L = [2, 1, 5, 2, 1, 4]
L.sort()
print("L =", L)           # L = [1, 1, 2, 2, 4, 5]
```

Dacă ulterior nu mai avem nevoie de lista inițială, atunci se recomandă utilizarea metodei `sort` în locul funcției `sorted`, deoarece nu utilizează memorie suplimentară!

Deoarece funcția `sorted` și metoda `sort` din clasa `list` au aceiași parametrii opționali, în continuare vom prezenta doar funcția `sorted`, deoarece ea poate fi utilizată pentru orice structură de date iterabilă.

Pentru a realiza o sortare descrescătoare a elementelor unei structuri de date iterabile, parametrul opțional `reverse` al funcției `sorted` trebuie setat la valoarea `True`:

- `sorted([2, 1, 5, 2, 1, 4], reverse=True) = [5, 4, 2, 2, 1, 1]`
- `"".join(sorted("exemplu", reverse=True)) = "xupmlee"`

Evident, sortarea unei structuri de date iterabile se poate realiza doar în cazul în care elementele sale sunt comparabile, altfel se va genera o eroare de tipul `TypeError`. De exemplu, în cazul apelului `sorted([100, -10, "12345", 70])` se va genera eroarea `TypeError: '<' not supported between instances of 'str' and 'int'`!

Dacă o listă este formată din tuple-uri comparabile, atunci acestea vor fi sortate în ordine lexicografică. De exemplu, prin apelul `sorted([('g', 1), ('f', 7), ('b', 3), ('a', 2), ('f', 0), ('b', 1)])` se va obține lista `[('a', 2), ('b', 1), ('b', 3), ('f', 0), ('f', 7), ('g', 1)]`, în care tuple-urile au fost sortate în ordinea crescătoare a primelor componente, iar în cazul în care acestea erau egale în ordinea crescătoare a componentelor secundare. În cazul unei liste de șiruri de caractere, sortarea se va realiza folosind tot ordinea lexicografică. De exemplu, prin apelul `sorted(["prune", "mere", "ananas", "pere", "mango"])` se va obține lista `["ananas", "mango", "mere", "pere", "prune"]`.

Pentru realizarea unor sortări complexe, eventual bazate pe mai multe criterii, putem să asociem fiecărui element al unei colecții o *cheie* pe bază căreia să se realizeze operația de sortare. Acest lucru se realizează folosind parametrul opțional `key` al funcției `sorted`,

respectiv atribuindu-i acestuia numele unei funcții care asociază unui element al colecției cheia dorită. De exemplu, pentru a sorta crescător numerele dintr-o listă în funcție de sumele cifrelor lor, vom folosi pentru parametrul opțional `key` funcția `sumaCifre`, care calculează suma cifrelor unui număr natural `nr`:

```
def sumaCifre(nr):
    return sum([int(c) for c in str(nr)])

L = [30, 27, 111, 71, 101, 107, 12, 81, 202, 18]
print(sorted(L, key=sumaCifre))
```

În urma executării programului, se va afișa următoarea listă (am evidențiat grupurile de numere care au aceeași sumă a cifrelor):

[101, 30, 111, 12, 202, 71, 107, 27, 81, 18]
 2 3 4 8 9

Practic, funcția `sumaCifre` a fost apelată pentru fiecare element al listei înainte ca acesta să fie comparat cu alte elemente, iar valoarea obținută (cheia elementului) a fost utilizată în comparații în locul numărului respectiv!

Deoarece funcția `sorted` implementează o *metodă de sortare stabilă*, în lista sortată se va păstra ordinea relativă din lista inițială a elementelor cu chei egale. De exemplu, în lista inițială, numărul 27 se afla înaintea numărului 81, iar numărul 81 se afla înaintea numărului 18, iar această ordine relativă este păstrată și în lista sortată.

Dacă dorim să sortăm numerele din listă în ordinea crescătoare a sumelor cifrelor lor, iar în cazul în care sumele cifrelor sunt egale să le sortăm crescător după valorile lor, atunci vom asocia fiecărui număr un tuplu format din suma cifrelor sale și el însuși:

```
def sumaCifre(nr):
    sc = sum([int(c) for c in str(nr)])
    return sc, nr

L = [30, 27, 111, 71, 101, 107, 12, 81, 202, 18]

print("L =", sorted(L, key=sumaCifre))
```

Astfel, se va afișa lista [101, 12, 30, 111, 202, 71, 107, 18, 27, 81], deoarece cheile asociate elementelor listei inițiale [30, 27, 111, 71, 101, 107, 12, 81, 202, 18] au fost tuplurile (3, 30), (9, 27), (3, 111), (8, 71), (2, 101), (8, 107), (3, 12), (9, 81), (4, 202), (9, 18), iar sortarea elementelor listei a fost realizată comparând lexicografic aceste tupluri!

Observație: Pentru a sorta descrescător o colecție în funcție de o cheie numerică `k` este suficient să folosim cheia `-k`. De exemplu, pentru a sorta numerele dintr-o listă în ordinea descrescătoare a sumelor cifrelor lor, iar în cazul în care sumele cifrelor sunt egale să le sortăm descrescător după valorile lor, atunci vom utiliza următoarea funcție pentru chei:

```
def sumaCifre(nr):
    sc = sum([int(c) for c in str(nr)])
    return sc, -nr
```

Funcția utilizată pentru a calcula cheia unui element poate fi și o funcție predefinită. De exemplu, putem utiliza funcția predefinită `len` pentru a sorta o listă de șiruri de caractere în ordinea crescătoare a lungimilor lor:

```
L = ["prune", "pere", "ananas", "mere", "mango"]
print(sorted(L, key=len)) # ['pere', 'mere', 'prune', 'mango', 'ananas']
```

În continuare, vom mai prezenta câteva exemple de sortări complexe:

- a) Să se sorteze o listă de numere naturale astfel încât numerele pare sortate crescător să fie poziționate înaintea celor impare sortate descrescător.

Pentru a realiza această sortare, vom asocia fiecărui număr natural `nr` cheia `(0, nr)` dacă el este par, respectiv cheia `(1, -nr)` dacă el este impar. Practic, prima componentă a cheii este chiar restul împărțirii numărului `nr` la 2 (i.e., paritatea sa), iar cea de-a doua componentă este utilizată pentru a sorta crescător sau descrescător numerele cu aceeași paritate!

```
def paritate(nr):
    return nr % 2, nr if nr % 2 == 0 else -nr

L = [int(x) for x in input("Lista: ").split()]
L = sorted(L, key=paritate)
print("Lista sortata:", L)
```

De exemplu, dacă lista inițială este `[52, 27, 111, 71, 101, 17, 107, 12, 18]`, atunci, după sortare, se va obține lista `[12, 18, 52, 111, 107, 101, 71, 27, 17]`.

- b) Considerăm o listă care conține informații despre mai mulți studenți, respectiv pentru fiecare student se cunoaște numele, grupa și nota obținută la examenul de admitere. Să se sorteze studenții în ordinea crescătoare a grupelor, în fiecare grupă studenții să fie sortați descrescător după nota obținută la examenul de admitere, iar în cazul unor note egale studenții să fie sortați alfabetic.

Vom considera faptul că informațiile despre fiecare student sunt memorate într-un tuplu, astfel:

```
L = [( "Popescu Ion", 131, 9.25),
      ( "Ionescu Ana", 133, 8.75),
      ( "Popa Marian", 131, 9.85),
      ( "David Maria", 132, 8.95),
      ( "Gheorghe Ana", 131, 9.85),
      ( "Popescu Anca", 132, 9.15),
```

```
("Corbu Florin", 133, 8.05),
("Gheorghe Dan", 132, 9.15)]
```

Cheia asociată unui student va consta din componentele tuplului respectiv, în ordinea specificată în criteriile de sortare:

```
def cheie_student(t):
    return t[1], -t[2], t[0]

S = sorted(L, key=cheie_student)
print(*S, sep="\n")
```

După sortarea listei, studenții vor fi afișați în următoarea ordine:

```
("Gheorghe Ana", 131, 9.85)
("Popa Marian", 131, 9.85)
("Popescu Ion", 131, 9.25)
("Gheorghe Dan", 132, 9.15)
("Popescu Anca", 132, 9.15)
("David Maria", 132, 8.95)
("Ionescu Ana", 133, 8.75)
("Corbu Florin", 133, 8.05)
```

- c) Să se sorteze șirurile de caractere dintr-o listă *L* în ordinea descrescătoare a lungimilor prefixelor maxime comune cu un șir dat *s*. De exemplu, dacă lista este *L* = ["apasator", "apartament", "exemplu", "ars", "test", "aparator", "amic"] și *s* = "aparator", atunci lista sortată va fi *L* = ["aparator", "apartament", "apasator", "ars", "amic", "exemplu", "test"].

Pentru a determina prefixul maximal comun a două șiruri, vom considera, pe rând, toate prefixele unuia dintre șiruri, în ordinea descrescătoare a lungimilor, și vom verifica dacă el este prefix și pentru cel de-al doilea șir:

```
def prefixMaxim(s, t):
    for i in range(len(s), 0, -1):
        if t.startswith(s[:i]):
            return i
    return 0
```

Evident, funcția se poate optimiza din punct de vedere al complexității computaționale considerând prefixele celui mai scurt șir dintre cele două!

Din păcate, funcția `prefixMaxim` are 2 parametri, deci nu o putem utiliza pentru a furniza cheile asociate șirurilor din listă (funcția ar trebui să aibă un singur parametru, respectiv un element al listei)! Totuși, putem să rezolvăm această problemă folosind funcții imbricate, respectiv definim funcția `prefixMaxim` cu un singur parametru, șirul dat *s*, și în interiorul său definim o funcție auxiliară `pmax` cu un singur parametru *t*, care va determina prefixul maximal comun dintre șirurile *s* și *t*, iar funcția `prefixMaxim` va returna funcția `pmax`:

```
def prefixMaxim(s):
    def pmax(t):
        for i in range(len(s), 0, -1):
            if t.startswith(s[:i]):
                return i, s[:i]
        return 0, t

    return pmax
```

Astfel, prin apelul `prefixMaxim(s)`, vom obține o funcție cu un singur parametru, care va determina lungimea prefixului comun maximal dintre un șir oarecare `t` (parametrul funcției) și șirul dat `s`, iar această funcție poate fi utilizată pentru a furniza cheia asociată unui element:

```
L = ["apasator", "apartament", "exemplu", "ars", "test",
     "aparator", "amic"]
s = "aparator"

L.sort(key=prefixMaxim(s), reverse=True)
print(L)
```

Cum ar trebui să modificăm funcția `prefixMaxim` astfel încât șirurile având aceeași lungime a prefixului comun maximal să fie sortate alfabetic?

În încheiere, menționăm faptul că funcția `sorted` și metoda `sort` implementează algoritmul de sortare *Timsort*, care a fost creat special în 2002 de Tim Peters pentru a fi implementat în limbajul Python (<https://en.wikipedia.org/wiki/Timsort>). Algoritmul *Timsort* este derivat din algoritmi de sortare prin interclasare (*Mergesort*) și sortare prin inserție (*Insertion sort*), având complexitatea $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ în cazul cel mai defavorabil.

Funcții recursive

În general, prin *recursivitate* se înțelege proprietatea unor noțiuni de a se defini prin ele însele. De exemplu, numerele naturale poate fi definite recursiv folosind următoarele două axiome ale lui Peano (https://en.wikipedia.org/wiki/Peano_axioms): "Zero este un număr natural." și "Succesorul oricărui număr natural este tot un număr natural."

În programare, o *funcție recursivă* este o funcție care se autoapelează, direct sau indirect.

Deoarece recursivitatea indirectă (i.e., o funcție `f` apelează o funcție `g`, iar funcția `g` apelează, la rândul său, funcția `f`) este foarte rar utilizată în programare (de exemplu, pentru a calcula media aritmetico-geometrică: https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic-geometric_mean), în continuare vom prezenta doar recursivitatea directă.

Un exemplu clasic de funcție recursivă îl reprezintă calculul factorialului unui număr natural n (i.e., $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$), folosind următoarea relație de recurență:

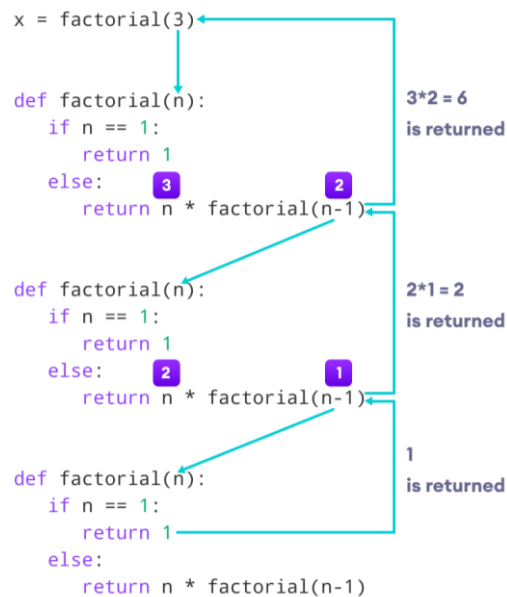
$$n! = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 1 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$$

O funcție care implementează în limbajul Python relația de recurență de mai sus este următoarea:

```
def factorial(n):
    if n == 1:
        return 1
    return n * factorial(n - 1)
```

În momentul apelării unei funcții, *contextul de apel* asociat (numele, variabilele locale, parametrii, adresa de revenire etc.) se salvează în stiva alocată programului, iar în momentul terminării executării sale, contextul de apel este eliminat din stivă.

De exemplu, pentru apelul `f = factorial(3)`, stiva programului (reprezentată invers) va avea următoarea evoluție (sursa imaginii: <https://www.programiz.com/python-programming/recursion>):



Observație: Orice funcție recursivă trebuie să conțină, pe lângă componenta recurentă (care conține autoapelurile), și o condiție de oprire (care nu conține niciun autoapel) realizabilă. În caz contrar, în momentul apelării sale, se va produce o recursivitate "infinită", care va conduce la depășirea numărului maxim de apeluri recursive permis (implicit, acesta este egal cu 1000) și la apariția unei erori. De exemplu, în cazul apelului `f = factorial(1000)`, se va afișa următoarea eroare:

```

def factorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorial(n - 1)

print(factorial(1000))

```

Traceback (most recent call last):
 File "C:/Users/Ours/OneDrive - unibuc.ro/Desktop/Test_Python/Test_curs.py", line 16, in <module>
 print(factorial(1000))
 File "C:/Users/Ours/OneDrive - unibuc.ro/Desktop/Test_Python/Test_curs.py", line 13, in factorial
 return n * factorial(n - 1)
 File "C:/Users/Ours/OneDrive - unibuc.ro/Desktop/Test_Python/Test_curs.py", line 13, in factorial
 return n * factorial(n - 1)
 File "C:/Users/Ours/OneDrive - unibuc.ro/Desktop/Test_Python/Test_curs.py", line 13, in factorial
 return n * factorial(n - 1)
 [Previous line repeated 995 more times]
 File "C:/Users/Ours/OneDrive - unibuc.ro/Desktop/Test_Python/Test_curs.py", line 11, in factorial
 if n == 0:
 RecursionError: maximum recursion depth exceeded in comparison
 Process finished with exit code 1

Numărul maxim de apeluri recursive care pot fi salvate pe stivă poate fi modificat astfel:

```

import sys

def factorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * factorial(n - 1)

rmax = sys.getrecursionlimit()
print("Numarul maxim de apeluri recursive initial:", rmax)

sys.setrecursionlimit(5000)
rmax = sys.getrecursionlimit()
print("Numarul maxim de apeluri recursive modificat:", rmax)

n = 1000
print(str(n) + "! = " + str(factorial(n)))

```

Numarul maxim de apeluri recursive initial: 1000
 Numarul maxim de apeluri recursive modificat: 5000
 1000! = 402387260077093773543702433923003985719374864210714632543799910429938512398629028592044208486969404800479988610197196058631666872994808558901323
 Process finished with exit code 0

În continuare, vom prezenta câteva exemple clasice de funcții recursive:

a) *Șirul lui Fibonacci* este definit prin următoarea relație de recurență:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 0 \\ 1, & \text{dacă } n = 1 \\ f_{n-2} + f_{n-1}, & \text{dacă } n \geq 2 \end{cases}$$

O implementare directă a acestei relații, care va furniza valoarea termenului de rang n a șirului lui Fibonacci, este următoarea funcție recursivă:

```
def fibo(n):
    if n <= 1:
        return n
    return fibo(n-2) + fibo(n-1)
```

Pentru $n \geq 40$ se observă faptul că timpul de executare este destul de mare și crește în raport cu valoarea lui n . În capitolul următor, dedicat complexității computaționale, se va demonstra faptul că numărul de apeluri recursive efectuate este exponențial în raport cu n , aceasta fiind cauza timpului mare de executare. O implementare eficientă se poate obține iterativ:

```
def fibo(n):
    if n <= 1:
        return n

    a, b = 0, 1
    for i in range(n):
        a, b = b, a+b
    return a
```

- b) *Algoritmul lui Euclid* permite determinarea celui mai mare divizor comun a două numere întregi nenule a și b prin împărțiri repetate, respectiv: cât timp restul împărțirii lui a la b este nenul înlocuim a cu b și b cu restul împărțirii lui a la b , iar ultimul rest nenul obținut va fi $\text{cmmdc}(a, b)$. De exemplu, pentru $a = 120$ și $b = 18$, cel mai mare divizor comun se va calcula astfel:

a		b		a % b
120		18		12
18	←	12	←	6
12	←	6	←	0
6	←	0	←	

Ultimul rest nenul este egal cu 6, deci vom obține $\text{cmmdc}(120, 18) = 6$. Se observă faptul că ultimul rest nenul este egal cu ultimul împărțitor, deci o variantă de implementare iterativă a acestui algoritm este următoarea:

```
def cmmdc(a, b):
    r = a % b
    while r != 0:
        a, b = b, r
        r = a % b
    return b
```

Analizând algoritmul, putem deduce foarte ușor următoarea formulă de recurență pentru calculul celui mai mare divizor comun a două numere întregi:

$$cmmdc(a, b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } b = 0 \\ cmmdc(b, a \% b), & \text{dacă } b \neq 0 \end{cases}$$

Implementarea acestei relații de recurență printr-o funcție recursivă este foarte simplă:

```
def cmmdc(a, b):
    if b == 0:
        return a
    return cmmdc(b, a%b)
```

Observăm faptul că funcțiile au complexități egale, respectiv numărul de iterații este aproximativ egal cu numărul de autoapeluri.

- c) *Calculul sumei cifrelor unui număr natural* se poate realiza folosind următoarea relație de recurență:

$$sc(n) = \begin{cases} n, & \text{dacă } n < 10 \\ n \% 10 + sc(n // 10), & \text{dacă } n \geq 10 \end{cases}$$

Implementarea acestei relații de recurență printr-o funcție recursivă este banală:

```
def sc(n):
    if n < 10:
        return n
    return n%10 + sc(n//10)
```

Ce relație există între numărul de autoapeluri din varianta recursivă și numărul de iterații din varianta iterativă?

- d) *Suma elementelor dintr-o listă* se poate defini recursiv ca fiind suma dintre primul element al listei și suma elementelor din restul listei dacă lista este nevidă, respectiv 0 dacă lista este vidă:

```
def suma_lista(L):
    if len(L) == 0:
        return 0
    return L[0] + suma_lista(L[1:])
```

Într-un mod similar se poate calcula și suma elementelor strict pozitive dintr-o listă:

```
def sumapoz_lista(L):
    if len(L) == 0:
        return 0
    if L[0] > 0:
        return L[0] + sumapoz_lista(L[1:])
    else:
        return sumapoz_lista(L[1:])
```

e) Frecvența unei litere într-un șir de caractere se poate calcula recursiv astfel:

```
def frecventa(litera, sir):
    if len(sir) == 0:
        return 0
    return int(sir[0] == litera) + frecventa(litera, sir[1:])
```

f) Din numărul 4 se poate obține orice număr natural nenul aplicând în mod repetat următoarele operații:

1. împărțirea numărului la 2;
2. adăugarea cifrei 4 la sfârșitul numărului;
3. adăugarea cifrei 0 la sfârșitul numărului.

De exemplu, numărul 101 se poate obține prin șirul de operații $4 \rightarrow 40 \rightarrow 404 \rightarrow 202 \rightarrow 101$, iar numărul 133 prin șirul de operații $4 \rightarrow 2 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 84 \rightarrow 42 \rightarrow 424 \rightarrow 212 \rightarrow 106 \rightarrow 1064 \rightarrow 532 \rightarrow 266 \rightarrow 133$.

Pentru a afișa șirul de operații prin care se poate obține un număr natural nenul din numărul 4, vom aplica asupra sa operațiile inverse operațiilor date:

- 1'. înmulțirea numărului cu 2;
- 2'. eliminarea ultimei cifre, dacă aceasta este 4;
- 3'. eliminarea ultimei cifre, dacă aceasta este 0.

De exemplu, pentru numărul 101 vom obține următorul șir de operații $101 \rightarrow 202 \rightarrow 404 \rightarrow 40 \rightarrow 4$.

```
def numar4(n):
    if n != 4:
        if n % 10 == 0 or n%10 == 4:
            numar4(n//10)
        else:
            numar4(2*n)
            print(" ->", n, end="")
    else:
        print(4, end="")
```

Încheiem prezentarea funcțiilor recursive menționând faptul că, în general, acestea consumă multă memorie (pentru salvarea contextelor de apel), sunt mai greu de depanat decât funcțiile iterative și, de multe ori, necesită un timp de executare mai mare. Din aceste motive, se recomandă utilizarea unei funcții recursive doar în cazul în care complexitatea sa computațională este echivalentă cu cea a variantei iterative, dar implementarea sa este mai simplă.

Generatori

Un *generator* este un tip de funcție a cărei execuție nu se termină în momentul în care returnează o valoare, ceea ce îi permite furnizarea mai multor valori într-o manieră secvențială (i.e., sub forma unui *iterator*). Un exemplu de generator predefinit în limbajul Python este `range`, care furnizează valorile întregi dintr-un anumit interval una câte una. Pentru a returna valori în mod repetat, un generator folosește instrucțiunea `yield` în locul instrucțiunii `return`:

```
def generator_numere_pare(n):
    x = 0
    while x <= n:
        yield x
        x += 2
```

Valorile furnizate de un generator pot fi accesate secvențial, folosind, de exemplu, o instrucțiune `for`:

```
for x in generator_numere_pare(100):
    print(x, end=" ")
```

O altă posibilitate de accesare secvențială a valorilor furnizate de un generator o reprezintă utilizarea funcției `next(iterator, [valoare_implicită])`, care permite, în general, accesarea următoarei valori dintr-un iterator sau furnizarea unei valori implicite, precizată prin parametrul opțional `valoare_implicită`, în momentul în care iteratorul nu mai conține nicio valoare:

```
nr_pare = generator_numere_pare(100)
x = next(nr_pare, -1)
while x != -1:
    print(x, end=" ")
    x = next(nr_pare, -1)
```

Practic, pentru a putea furniza mai multe valori într-o manieră secvențială, contextul de apel al unui generator nu este eliminat de pe stiva programului în momentul executării unei instrucțiuni `yield`. Astfel, după revenirea dintr-un apel, un generator îți poate continua executarea din starea în care se afla înaintea apelului respectiv!

Instrucțiunea `return` vidă poate fi utilizată pentru a întrerupe executarea unui generator:

```
def generator_numere_pare(n):
    x = 0
    while True:
        yield x
        if x == n:
            return
        x += 2
```

Un generator poate rula "la infinit", așa cum se poate observa din următorul exemplu:

```
def generator_numere_pare():
    x = 0
    while True:
        yield x
        x = x + 2
```

Evident, în acest caz nu se pot utiliza modalitățile de accesare a valorilor furnizate menționate anterior, ci accesarea acestora trebuie să fie întreruptă explicit:

<pre>for x in generator_numere_pare(): print(x, end=" ") if x == 100: break</pre>	<pre>nr_pare = generator_numere_pare() x = next(nr_pare, -1) while x <= 100: print(x, end=" ") x = next(nr_pare, -1)</pre>
---	---

Întreruperea accesării valorilor furnizate de un generator infinit nu va conduce la oprirea sa, așa cum se poate observa din următorul exemplu (se vor afișa numerele pare de la 0 la 20):

```
nr_pare = generator_numere_pare()
for x in nr_pare:
    print(x, end=" ")
    if x == 10:
        break

for x in nr_pare:
    print(x, end=" ")
    if x == 20:
        break
```

Pentru a întrerupe forțat executarea unui generator, infinit sau nu, trebuie apelată metoda `close` (se vor afișa doar numerele pare de la 0 la 10):

```
nr_pare = generator_numere_pare()
for x in nr_pare:
    print(x, end=" ")
    if x == 10:
        break

nr_pare.close()

for x in nr_pare:
    print(x, end=" ")
    if x == 20:
        break
```

În concluzie, un generator reprezintă o modalitate foarte simplă de creare a unui iterator în limbajul Python. În plus, generatorii permit o utilizare eficientă a memoriei, valorile fiind furnizate secvențial.