Temă de control pentru U.I nr. 2

1. Să se construiască ec. dif. liniare și omogene care au soluțiile particulare indicate:

1. $y_1 = e^{-x}$; $y_2 = xe^{-x}$; $y_3 = \sin x$; $y_4 = \cos x$

Verificăm dacă soluțiile sunt liniar independente:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' & y_1''' \\ y_2 & y_2' & y_2'' & y_2''' \\ y_3 & y_3' & y_3'' & y_3''' \\ y_4 & y_4' & y_4'' & y_4''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} \\ xe^{-x} & e^{-x}-xe^{-x} & -2e^{-x}+xe^{-x} & 3e^{-x}-xe^{-x} \\ \sin x & \cos x & -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x & -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{c_1+c_2\to c_1 \\ c_2+c_3\to c_2 \\ c_3+c_4\to c_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & 3e^{-x}-xe^{-x} \\ \sin x+\cos x & -\sin x+\cos x & -\sin x-\cos x & -\cos x \\ -\sin x+\cos x & -\sin x-\cos x & \sin x-\cos x & \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+1}\cdot e^{-x} \begin{vmatrix} e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \\ \sin x+\cos x & -\sin x+\cos x & -\sin x-\cos x \\ -\sin x+\cos x & -\sin x-\cos x & \sin x-\cos x \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1+c_2\to c_1 \\ c_2+c_3\to c_2}}{=}$$

$$= -e^{-x} \begin{vmatrix} 0 & 0 & e^{-x} \\ 2\cos x & -2\sin x & -\sin x-\cos x \\ -2\sin x & -2\cos x & \sin x-\cos x \end{vmatrix} = -e^{-x}\cdot(-1)^{1+3}e^{-x}\cdot$$

$$\cdot(-4\cos^2 x - 4\sin^2 x) = -(e^{-x})^2\cdot(-4)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{=1} = 4(e^{-x})^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' & y''' & y^{(4)} & y^{(5)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & y_1''' & y_1^{(4)} & y_1^{(5)} \\ \vdots \\ y_4 & y_4' & y_4'' & y_4''' & y_4^{(4)} & y_5^{(5)} \end{vmatrix} = 0 \text{ pt. a afla ec. dif. liniar omogenă}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y-y' & y'-y'' & y''-y''' & y'''-y^{(4)} & y^{(4)}-y^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-x} \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & 4e^{-x}+xe^{-x} \\ \sin x+\cos x & -\sin x+\cos x & -\sin x-\cos x & -\sin x-\cos x & \sin x \\ -\sin x+\cos x & -\sin x-\cos x & \sin x-\cos x & \sin x-\cos x & \cos x \end{vmatrix} =$$

$$-e^{-x} \begin{vmatrix} y-y'' & y'-y''' & y''-y^{(4)} & y'''-y^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-x} \\ 2\cos x & -2\sin x & -2\sin x-2\cos x & -\sin x-\cos x \\ -2\sin x & -2\cos x & 2\sin x-2\cos x & \sin x-\cos x \end{vmatrix} = 0$$

$$-(e^{-x})^2 \begin{vmatrix} y-y'+y'''+y^{(4)} & y'-y''' & y''-y^{(4)} \\ 0 & -2\sin x & -2\sin x-2\cos x \\ 0 & -2\cos x & 2\sin x-2\cos x \end{vmatrix} = 0$$

$C_1 - C_2 + C_3 \to C_1$

$$-e^{-2x}\left(y-y'+y'''+y^{(4)}\right)\left(-4\sin^2 x + \cancel{4\sin x\cos x} - \cancel{4\sin x\cos x} - 4\cos^2 x\right) =$$

$$4e^{-2x}\left(y-y'+y'''+y^{(4)}\right) = 0.$$

2. $y_1 = \ln x$, $y_2 = x\ln x$

Verificăm dacă soluțiile sunt liniar ~~omogene~~ independente

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln x & \frac{1}{x} \\ x\ln x & \ln x + 1 \end{vmatrix} = (\ln x)^2 + \cancel{\ln x} - \cancel{\ln x} \neq 0 \ (\forall)\ x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \\ y_2 & y_2' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \ln x & \frac{1}{x} & -\frac{1}{x^2} \\ x\ln x & \ln x + 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 0$$

$$y \cdot \frac{1}{x^2} + y'' \ln x(\ln x + 1) + y' \frac{\ln}{x} - y'' \ln x - y' \frac{\ln}{x} +$$

$$+ y \frac{\ln x + 1}{x^2} = 0 \Rightarrow \underline{y\left(\frac{\ln x + 2}{x^2}\right) - 2y' \frac{\ln}{x} + y'' \ln^2 x = 0},$$

2. Să se determine un sistem fundamental de soluții pentru ecuațiile diferențiale liniare și omogene următoare și să se scrie soluția generală a fiecăreia:

$$2.\ x(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0, \text{ cu } y_1 = \frac{(x-1)^2}{x}$$

coeficienții fiind polinoame încercăm să găsim o soluție de forma:

$$y_2(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2' = nx^{n-1} + (n-1)b_1 x^{n-2} + \ldots \\ y_2'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)b_1 x^{n-3} + \ldots \end{cases}$$

Pt. a determina n (gradul polinomului soluție):

$$y_2 = \text{sol. a ecuației} \Rightarrow x(x-1)y_2'' + (x-2)y' - y = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - x)\left[n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)b_1 x^{n-3} + \ldots\right] +$$

$$+ (x-2)\left[n x^{n-1} + (n-1)b_1 x^{n-2} + \ldots\right] -$$

$$- x^n - b_1 x^{n-1} - b_2 x^{n-2} - \ldots = 0$$

Luăm coeficientul termenului de grad maxim și îl egalăm cu 0: $n(n-1) + n - 1 = 0 \Rightarrow (n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow n = \pm 1 \Rightarrow n = 1$, pt. că trebuie să fie natural (grad de polinom).

$$\Rightarrow y_2 = x + b_1 \Rightarrow \{ y_2' = 1 \ ; y_2'' = 0$$

Pt. a determina pe b_1:

$$y_2 = \text{sol. a ecuației} \Rightarrow x(x-1) \cdot y_2'' + (x-2)y_2' - y = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 - (x + b_1) = 0 \Rightarrow b_1 = -2 \Rightarrow y_2 = x - 2$$

Verificăm că soluțiile, $y_1 = \frac{(x-1)^2}{x}$ și $y_2 = x-2$, sunt liniar independente:

$$\begin{vmatrix} x-2 & \frac{(x-1)^2}{x} \\ 1 & \frac{x^2-x-1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{(x-2)(x^2-x-1)}{x^2} - \frac{\cancel{x}(x-1)^2}{x} = \frac{-x^2-2x-1}{x^2}$$

$$= -\frac{(x+1)^2}{x^2} \neq 0 \ (\forall)\, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

3. Să se determine soluția generală și soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare și omogene, cu coeficienți constanți:

1. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Se observă că: $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$ și $-\cos x$ verifică ecuația $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - C_3 \sin x - C_4 \cos x$ soluția generală

Verificare:

$\cancel{C_1 \sin x} + \cancel{C_2 \cos x} - \cancel{C_3 \sin x} - \cancel{C_4 \cos x} +$ $\quad \rightsquigarrow y$

$+2(-\cancel{C_1 \sin x} - \cancel{C_2 \cos x} + \cancel{C_3 \sin x} + \cancel{C_4 \cos x}) +$ $\quad \rightsquigarrow 2 \cdot y''$

$+ \cancel{C_1 \sin x} + \cancel{C_2 \cos x} - \cancel{C_3 \sin x} - \cancel{C_4 \sin x} = 0$ $\quad \rightsquigarrow y^{(4)}$

2. $y''' + y' + 1 = 0$

Fie ecuația caracteristică:

~~Fie sol. $y = e^{rx}$ $\Rightarrow (r^2+r+1)e^{rx} = 0 \Leftrightarrow$~~ $r^2 + r + 1 = 0$,

$$\Rightarrow r_{1,2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta} i$$

Fie soluția: $\boxed{y = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = C_1 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

3. $y''' - 5y'' + 17y' - 13 = 0$

Fie ecuația caracteristică: $r^3 - 5r^2 + 17r - 13 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^3 - r^2 - 4r^2 + 4r + 13r - 13 = 0 \Rightarrow r^2(r-1) - 4r(r-1) + 13(r-1) = 0$

$\Rightarrow (r-1)(r^2 - 4r + 13) = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\, i}{2} = 2 \pm 3i$

$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$

5. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

Fie ecuația caracteristică: $r^4 + 8r^2 + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (r^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2}^2 = -4 = 4i^2$ și $r_{3,4}^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow \begin{cases} r_{1,2} = \cancel{\pm} 2i \\ r_{3,4} = -2i \end{cases}$

$\beta, \alpha = 0$

$\Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 \cancel{x} \cos 2x + C_4 \cancel{x} \cos 2x$