de repetat → spații vectoriale (sem II)
→ integrale, derivate, primitive

(ș.) φ ⇒ Soluția ecuației
⇒ o funcție

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN N

Def Fie $F \to E \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o funcție reală de $n+2$ variabile

se numește ec. diferențială de ordinul n, definită de funcția F, o relație de forma: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, unde $x \in I$,

y este o funcție definită pe $I \to \mathbb{R}$ — interval

$y', y'', \dots y^{(n)}$ sunt derivatele sale până la ordinul n

(ș.)

Se numește soluție a ecuației 1 o funcție $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de n ori derivabilă pe I și care verifică ecuația 1 și $(\forall)\ x \in I$

$n \to$ ordinul ecuației

$\varphi : I \to \mathbb{R}$; $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$, $\forall (x) \in I$

Se numește ecuație

$F(x, y, y') = 0$ o ec. dif de ordinul 1 sub forma implicită

$y' = f(x, y) = 0$ ———— explicită

$\boxed{y' = y + x}$ ① ⇒ o soluție a sa este $\boxed{y = e^x - x - 1}$ ②, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$y' = e^x - 1$ ⇒ $e^x - 1 \overset{?}{=} e^x - x - 1 + x$ înlocuim în ① expresia ②

și $y = c \cdot e^x - 1$ este de asemenea soluție ⇓

$\downarrow$ $y' = e^x - x - 1 + x$ (A)

fiind o constantă arbitrară

$y' = c \cdot e^{x} - x - 1$ se numește soluție generală a ec. $y' = y + x$

este de ordin 2, pt. că y este secund

2. $y'' - y = x$; $\longrightarrow$ ec. dif. de ordin 2

x. se numește variabila index

funcția vec ;

$(e^{x})' = e^{x}$ $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ $c' = 0$ $x' = 1$

$y' = (c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x} - x)' = (c_1 \cdot e^{x})' + (c_2 \cdot e^{-x})' - x' = c_1 e^{x} + c_2(-1 \cdot e^{-x}) - 1$

$e^{-1 \cdot x} \Rightarrow e^{kx} = k \cdot e^{kx}$

$y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x} - x$ este soluția generală a ec. 2

$y' = c_1 e^{x} - c_2 \cdot e^{-x} - 1$

$y'' = c_1 e^{x} + c_2 \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow \underbrace{c_1 e^{x} + c_2 e^{x}}_{y''} - c_1 \cdot e^{x} - c_2 \cdot e^{x} \overset{?}{=}$

$x_1(y)$ o

$\boxed{(y')' = (c_1 \cdot e^{x})' - (c_2 \cdot e^{-x}) - (1)' = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-x} - 0}$

Prin aceste exemple deducem că o ec. dif. admite sol. care depind de constante arbitrare.

Nr. const. arb. din sol generală este = cu ordinul ecuației diferențiale

Particularizăm constantele arbitrare $\Rightarrow$ Soluțiile particulare

Prin particularizarea const. arbit. din sol. generală se obțin soluțiile particulare

exp: $y = 2e^{x} - 3e^{-x} - x \Rightarrow$ Soluție particulară $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$

O soluție $y = \varphi(x)$ a ec. care nu se obține prin nicio particularizare posibilă a constantelor din ec. generală se numește soluția singulară a ecuației

$y = \varphi(x)$; $\exists x : y = xy' + y'^2$

soluția generală a ec. este $y = Cx + C^2$

constanta arbitrară

$y' = c$; $Cx + C^2 = xC + C^2$

Familia de soluții generale d.p.d.v. geometric, este o fam. de drepte $(y = mx + n)$

Fie funcția $y = \frac{1}{4} x^2$? soluție? $\Rightarrow y' = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{x}{2}$

$x^c = c \cdot x^{c-1}$

$(c \cdot f)' = c \cdot (f)'$

parabolă d.p.d.v. geometric

$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \overset{!}{=} -\frac{x^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-2x^2 + x^2}{4} = -\frac{x}{4} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow$ și ea este soluție, dar nu se poate obține din sol. generală pt. nicio particularizare a constantei C

$\Downarrow$

aceasta este soluție singulară