Seminar 9

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică în R. Să se determine $T: R^3 \to R^3$ cu matricea asociată în B_c pe A.

b) Vectori și valori proprii lui T.

c) Posibilitatea de a diagonaliza pe A

a) $T(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)$

b) $f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) \to \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda) - 3 - 2(3+\lambda) - 5(2+\lambda)$

$= (4-\lambda^2)(3+\lambda) + 3 - 6 - 2\lambda - 10 - 5\lambda$

$= 12 + 4\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 - 13 - 7\lambda =$

$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$

$\Rightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \to (\lambda+1)^3 = 0$ $\qquad$ $\lambda = -1$ cu $M.A = 3$

$\lambda = -1$

$$(A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$ $\to$ Sistem Compatibil simplu nedeterminat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & +2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Gauss} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\alpha_1 = -Y$

$\alpha_2 = -Y$

$\alpha_3 = Y$

$$V_\lambda = \{(-Y, -Y, Y), Y \in \mathbb{R}\} = \{Y(-1,-1,1), Y \in \mathbb{R}\}$$

M.G = 1

$$= Sp((\underbrace{-1,-1,1}_{v_1}))$$

c) A diagonalizabilă $\Leftrightarrow$ $R_i = n_i = \dim V_\lambda$

$R = 3 \neq n = \dim V_\lambda = 1$ } A NU d.

Ex 2. $v_1 = (2,5,3)$ $v_2 = (3,8,-1)$ $v_3 = (1,2,-2)$ $\in \mathbb{R}^3$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ bază în $\mathbb{R}^3$ și să se exprime coordonatele lui $u = (16,1,9)$ în această bază

$$\det\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 160 \neq 0 \rightarrow \underbrace{\{v_1, v_2, v_3\}}_{B_1} \text{ bază în } \mathbb{R}^3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 16 \\ 5 & -8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

Gauss

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 16 \\ 5\alpha_1 - 8\alpha_2 + 2\alpha_3 = 1 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \qquad u_{B_1} = (3, 2, 1)$$

Ex λ? astfel să fie compatibil și să se afle soluția

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & \lambda \\ 3 & -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 6 & 6 & \lambda + 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{array}\right) \rightarrow \lambda = 4 \rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A|b$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + z + t = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} z = \alpha \quad t = \beta \\ x = 1 - \alpha - \beta \\ y = 1 - \alpha \end{array}$$

$$S = \{(1 - \alpha - \beta, 1 - \alpha, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Ex.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -24 \\ 3 & -2 & -27 \\ -3 & 2 & 33 \end{pmatrix}$$