

Gramatici (exerciții)

Exercițiul 3.1. Se dau următoarele limbaje formale:

- a) $L_1 = \{a^n \mid n \geq 1\}$;
- b) $L_2 = \{a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 1\}$;
- c) $L_3 = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$.

Pentru fiecare limbaj să se construiască gramatica care îl generează și să se precizeze tipul gramaticii și tipul limbajului, conform clasificării lui Chomsky.

Răspuns.

- a) $G_1 = (\{S\}, \{a\}, S, \{S \rightarrow aS, S \rightarrow a\})$, gramatică regulată, limbaj regulat.
- b) $G_2 = (\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow AA, A \rightarrow aAb, A \rightarrow ab\})$, gramatică independentă de context, limbaj independent de context.
- c) $G_3 = (\{S, B\}, \{a, b\}, S, \{S \rightarrow aSBa, S \rightarrow aba, aB \rightarrow Ba, bB \rightarrow bb\})$, gramatică dependentă de context, limbaj dependent de context.

Se știe că o gramatică $G = (N, T, S, P)$ este **gramatică regulată** dacă orice producție a sa este fie de forma $A \rightarrow aB$, fie de forma $A \rightarrow a$ cu $A, B \in N$ și $a \in T$.

Propoziția 3.1. Fie o gramatică $G = (N, T, S, P)$ în care producțiile au forma $A \rightarrow a$, fie au forma $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n B$ cu $A, B \in N$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in T$. Atunci $G = (N, T, S, P)$ este o gramatică regulată.

Demonstrație (pe scurt).

Construim G' o gramatică regulată cu $L(G') = L(G)$ astfel:

- Producțiile $A \rightarrow a$ se păstrează;
- Producția $A \rightarrow a_1 a_2 \dots a_n B$:
 - i. Dacă $n = 1$, producția se păstrează
 - ii. Dacă $n \geq 2$, este înlocuită cu $A \rightarrow a_1 X_1, X_1 \rightarrow a_2 X_2, \dots, X_{n-1} \rightarrow a_n B$, unde X_1, X_2, \dots, X_{n-1} sunt neterminale noi.

Exercițiul 3.2. Să se construiască gramatica regulată echivalentă cu gramatica $G = (N, T, S, P)$, unde $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b, c\}$, iar mulțimea producțiilor P este următoarea:

$$S \rightarrow aA|bB \quad (1)$$

$$A \rightarrow b|abcB \quad (2)$$

$$B \rightarrow abA \quad (3)$$

Rezolvare.

Se introduc X_1, X_2, X_3 neterminalele noi, iar producțiile sunt:

$$S \rightarrow aA|bB \quad (1)$$

$$A \rightarrow b \quad (2)$$

$$A \rightarrow aX_1 \quad (3)$$

$$X_1 \rightarrow bX_2 \quad (4)$$

$$X_2 \rightarrow cB \quad (5)$$

$$B \rightarrow aX_3 \quad (6)$$

$$X_3 \rightarrow bA \quad (7)$$

Propoziția 3.2. Fie o gramatică $G = (N, T, S, P)$ în care producțiile au forma $A \rightarrow Bb$, fie de forma $A \rightarrow a$ cu $A, B \in N$ și $a, b \in T$. Atunci există G' o gramatică regulată cu $L(G') = L(G)$.

Demonstrație (pe scurt).

Construim G' o gramatică regulată cu $L(G') = L(G)$ astfel:

Fie S' un nou neterminal, care este simbol inițial în G' . Se fac următoarele transformări:

- Producția $A \rightarrow a$ se transformă astfel:
Se introduce $S' \rightarrow aA$;
Dacă $A = S$ atunci se adaugă și $S' \rightarrow a$;
- Producția $A \rightarrow Ba$ se transformă în $B \rightarrow aA$;
- Producția $S \rightarrow Aa$: se introduce și $A \rightarrow a$.

Exercițiul 3.3. Să se aplice transformările de la propoziția 3.2. pentru gramatica $G = (N, T, S, P)$, unde $N = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, cu mulțimea producțiilor P :

$$S \rightarrow Aa|b \quad (1)$$

$$A \rightarrow Sb|a \quad (2)$$