Sisteme de Ecuații diferențiale, liniare, de ordin 1

FORMA GENERALĂ |

$$(1^\circ)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\cdot y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$a_{ij}, f_i : I \to \mathbb{R}$, continue pe I

$i=\overline{1,n}$ linie
$j=\overline{1,n}$ coloană

Fie $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}}$ | Fie $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ | Fie $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ Funcții perturbatoare

$$(2^\circ)\ \frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x)$$

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

Dacă $F(x)=0 \longrightarrow \dfrac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y$ Sistem omogen (asociat lui 1°)

Dacă $F(x)\neq 0 \longrightarrow \dfrac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y$ Sistem neomogen (asociat lui 1°)

O soluție a sistemului 1° este un vector format din n funcții,

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$; $y_i : I \to \mathbb{R}$, derivabile pe I și care verifică sistem în orice punct în I. SOL GENERALĂ

TEOREMA 1 | Fie sistemul omogen $\dfrac{dY}{dx} = A(x)\cdot y + F(x)$; Mulțimea soluțiilor sale este un spațiu vectorial de dimensiune n (= un sub-spațiu vectorial al spațiului infinit dimensional al funcțiilor de clasă C^1 pe I)
O bază a acestui spațiu este formată din n soluții ale sistemului omogen

$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}$ ---- $Y_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$; matricea $W = \begin{pmatrix} Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$

MATRICEA FUNDAMENTALĂ DE SOLUȚII

MFS

$\{Y_1, \dots, Y_n\}$ = bază a spațiului soluțiilor dacă sunt L.I

$$\Updownarrow$$

$W(x) = (Y_1, \dots, Y_n)$ este nesingulară $\Rightarrow \det(W(x)) \neq 0$

→ Soluția generală a sistemului omogen este o combinație liniară cu coeficienți arbitrari a celor n componente ale bazei

$$Y = C_1 \cdot Y_1 + \dots + C_n \cdot Y_n$$

$$Y = W(x) \cdot C = (Y_1, \dots, Y_n) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Din această soluție generală, se poate obține o soluție particulară a sistemului rezolvând o problemă de tip Cauchy:

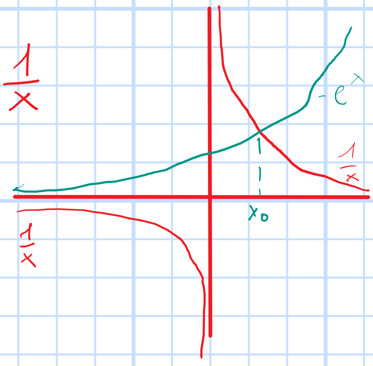
$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} \quad x_0 \in I \quad (3^\circ)$$

Impunând aceste condiții, se va obține un sistem algebric cu n ecuații cu n necunoscute acestea fiind constantele $C_1, \dots, C_2$

Exemplu

$$\begin{cases} (1 - xe^x) \dfrac{dy_1}{dx} = -e^x \cdot y_1 + y_2 \\ (1 - xe^x) \dfrac{dy_2}{dx} = e^x \cdot y_1 - xe^x \cdot y_2 \end{cases}$$

$1 - xe^x = 0 \in \mathbb{R}$ $\qquad e^x = \frac{1}{x}$



$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{e^x \cdot y_1}{(1 - xe^x)} + \dfrac{y_2}{(1 - xe^x)} \\ \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{e^x \cdot y_1}{(1 - xe^x)} - \dfrac{x e^x}{(1 - xe^x)} \cdot y_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix} \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix}; \ \det \Delta(x) \neq 0$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \Delta(x) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + xC_2 \\ e^x C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

TEOREMĂ | Matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen verifică ecuația:

$$\frac{dW}{dx} = A(x) . W(x)$$

Sisteme Neomogene

$$\frac{dY}{dx} = A(x)\cdot Y + F(x) \quad (1^\circ)$$

TEOREMĂ | Soluția generală a sistemului (1°) este suma dintre soluția generală a sistemului omogen și soluția particulară a sistemului (1°)

$$\boxed{Y = Y_0 + Y_p}$$

Determinarea soluției particulare unui sistem neomogen

1) Se aplică metoda variației constantei

$$W(x) = (Y_1, \dots, Y_n)$$

$$Y_0 = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n \longrightarrow C_i = C_i(x) \longrightarrow Y = C_1(x)Y_1 + \dots + C_n(x)Y_n = W(x)\cdot C(x)$$

Punem condiția ca acest Y să verifice sistemul neomogen

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx}\left(W(x)\cdot C(x)\right) = \frac{dW(x)}{dx}\cdot C(x) + W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{dW}{dx}\cdot C(x) + W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx} = A(x)\cdot W(x)\cdot C(x) + F(x)$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\frac{dW}{dx} - A(x)\cdot W(x)\right)}_{0}\cdot C(x) + W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx} = F(x) \longrightarrow W(x)\cdot\frac{dC(x)}{dx} = F(x) \Big/ \cdot (W(x)^{-1})$$

$$\rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = (W(x))^{-1}\cdot F(x) \quad \rightarrow \quad C(x) = \int W(x)^{-1}\cdot F(x)\,dx + K$$

$$C(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ \vdots \\ C_n(x) \end{pmatrix} = \int W^{-1}(x)\cdot F(x)\,dx \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$$

Construcția unui sistem de ecuații diferențiale, de ordin 1, liniar și omog. de sistemul fundamental dat

Fie $W(x) = (Y_1(x), \dots, Y_n(x))$ MFS $\to \det(W(x)) \neq 0$

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

MFS

Fie $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ o a $n+1$ soluție a sistemului $\to$ $(Y, Y_1, \dots, Y_n) = LD$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{dy_k}{dx} & & \frac{dy_{kn}}{dx} \\ y_{11} & & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{nn} & & y_{nn} \end{bmatrix}_{(n+1, n+1)} = 0 \qquad K = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ex.

Să se formeze sistemul omogen de 2 ecuații de ordin 1 care admite următorul SFS.

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}$$

1° Verificăm că $\det(W(x)) \neq 0$

$$\det(W(x)) = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} = \cos^2 2x + \sin^2 x = 1$$

$$K=1: \begin{bmatrix} y_1' & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow y_1' = 2y_2$$

$$K=2: \begin{bmatrix} y_2' & -2\cos 2x & -2\sin 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow y_2' = -2y_1$$

$$\to \begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Metode de rezolvare pentru sistemele de ecuații omogenee cu coeficienți constanți

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} \cdot y_1 + \dots + a_{1n} y_n \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1} \cdot y_1 + \dots + a_{nn} y_n \end{cases} ; \quad \frac{dY}{dx} = A \cdot Y \qquad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$$

Pentru un astfel de sistem, se poate determina întotdeauna o soluție generală

Se caută soluții de forma:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{z_1 x} \\ \vdots \\ e^{z x} \end{pmatrix} \qquad z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R} \qquad \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} z_1 \cdot e^{z_1 x} \\ \vdots \\ z_n e^{z_n x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \cdot e^{z_1 x} \\ \vdots \\ z_n \cdot e^{z_n x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{z_1 x} \\ \vdots \\ e^{z_n x} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \cdot e^{z_1 x} \\ \vdots \\ z_n \cdot e^{z x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot e^{z_1 x} + \dots + a_{1n} \cdot e^{z_n x} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot e^{z_1 x} + \dots + a_{nn} \cdot e^{z_n x} \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{zx} ; \quad \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot z \\ \vdots \\ A_n \cdot z \end{pmatrix}$$

Pentru sistemul omogen, vom căuta soluții de forma

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdot z \\ \vdots \\ A_n \cdot z \end{pmatrix} \cdot e^{zx} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{zx} \quad \Big| : e^{zx}$$

Am obținut un sistem omogen cu n ecuații și n necunoscute

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdot z \\ \vdots \\ A_n \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot A_1 + \dots + a_{1n} \cdot A_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot A_1 + \dots + a_{nn} \cdot A_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (a_{11} - z) \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + \dots + a_{1n} \cdot A_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot A_1 + a_{n2} \cdot A_2 + \dots + (a_{nn} - z) \cdot A_n = 0 \end{cases}$$

ADMITE SOLUȚIA BANALĂ $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$

Acest sistem admite și sol. nenule $\Leftrightarrow$ det $\underbrace{\text{matricei coeficienților}}_{\Delta(z)}$ [SIS. COMP. NED.]

$$\Delta(z) = \begin{pmatrix} a_{11}-z & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-z \end{pmatrix} = 0$$

$\det(A - z I_n) = 0$ POL. CARAC. LUI A

OBTINEM VALORIILE PROPII

$\hookrightarrow z_1, z_2, \dots, z_n$

$A_1, \dots, A_n$ sunt coordonatele vectorului propriu pentru valoarea proprie z.

Cu fiecare $\underbrace{\text{pereche}}_{\text{Vector - Valoare proprie}}$, se scrie câte o soluție a sistemului

1) Calculare pol. caracteristic a matricei A
2) Rezolvare ecuației $\det(A - z \cdot I_n) = 0$ și se obțin valori proprii lui A
3) Pentru fiecare valoare proprie, se calculează vectorul propriu corespunzator
4) Pentru fiecare pereche, se scrie soluția corespunzatoare a sistemului $y = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{zx}$