Problema

Se da o multime de puncte si trebuie gasita o functie continua si diferentiabila care sa se "potriveasca" acestor puncte.
Abordari

- Se pune conditia ca graficul functiei sa treaca prin punctele date. Acest caz se numeste interpolare.
- Se pune conditia ca graficul functiei sa aproximeze cat mai bine punctele date adica se cauta o functie (polinom, exponentiala, logaritmica, etc) al carei grafic sa treaca cat mai aproape de punctele date. Acest caz se numeste regresie.

Interpolare: O solutie directa

Se dau n puncte $(x_i, y_i)_{i=1,2,...,n}$. Se cauta o functie=polinom de gradul $n-1$ al carei grafic sa treaca prin aceste puncte.

Se cauta f de forma $f(x) = a_{n-1}x_i^{n-1} + a_{n-2}x_i^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ astfel incat $f(x_i) = y_i$ pentru orice $i = 1, 2, ..., n$.

Se pun conditiile:

$$a_{n-1}x_i^{n-1} + a_{n-2}x_i^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = y_i$$

pentru orice $i = 1, 2, ..., n$. Am obtinut un sistem de n ecuatii cu n necunoscute care se poate rezolva cu metode directe sau iterative.

Polinomul de interpolare Lagrange

Sa pp ca se dau punctele (x_0, y_0), (x_1, y_1) si (x_2, y_2).

Vrem sa gasim un polinom de grad 2 de forma

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

care sa treaca prin cele trei puncte.
a_0, a_1 si a_2 se determina din conditia ca graficul lui $f(x)$ sa treaca prin cele 3 puncte.

$$f(x_i) = y_i$$

.

- $i = 0$ implica $y_0 = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \longrightarrow a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$
- $i = 1$ implica $y_1 = a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \longrightarrow a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$
- $i = 0$ implica $y_2 = a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \longrightarrow a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

Deci $f(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \prod_{j=0, j \neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Date $n+1$ puncte $(x_i, y_i)_{i=0,1,2,\ldots,n}$, polinomul de interpolare Lagrange de ordin n este:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Polinomul de interpolare Newton-Cotes

Sa pp ca se dau punctele (x_0, y_0), (x_1, y_1) si (x_2, y_2).

Vrem sa gasim un polinom de grad 2 de forma

$$N_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

care sa treaca prin cele trei puncte.
a_0, a_1 si a_2 se determina din conditia ca graficul lui $f(x)$ sa treaca prin cele 3 puncte.

$$f(x_i) = y_i$$

.

- $i = 0$ implica $y_0 = a_0 \longrightarrow a_0 = y_0$
- $i = 1$ implica $y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \longrightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
- $i = 0$ implica
  $y_2 = a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \longrightarrow a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}]$

Notam

$$g(x_i) = y_i$$

numite diferente divizate de ordin 0

$$g(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

numita diferenta divizate de ordin 1 in nodurile x_0 si x_1.

$$g(x_2, x_1, x_0) = \frac{g(x_2, x_1) - g(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}$$

numita diferenta divizate de ordin 2 in nodurile x_0, x_1 si x_2.

Observam ca $N_2(x) = N_1(x) + g(x_2, x_1, x_0)(x - x_0)(x - x_1)$
Generalizand:

$$g(x_n, ..., x_1, x_0) = \frac{g(x_n, ..., x_1) - g(x_{n-1}, ..., x_0)}{x_n - x_0}$$

numita diferenta divizate de ordin n in nodurile x_0, x_1,..., x_n.
Observam ca
$N_n(x) = N_{n-1}(x) + g(x_n, ..., x_1, x_0)(x - x_0)...(x - x_{n-1})$. unde
$N_n(x)$=polinomul de interpolare Newton de ordin n.

Regresie

Se dau n puncte $(x_i, y_i)_{i=1,2,\ldots,n}$.

Se pune conditia ca graficul functiei sa aproximeze cat mai bine punctele date adica se cauta o functie al carei grafic sa treaca cat mai aproape de punctele date.

Regresie liniara = aproximarea punctelor prin graficul unei drepte

$$y = a_0 + a_1 x$$

Notam $y_i^a prox = a_0 + a_1 x_i$ valorile aproximative ale dreptei in punctele x_i adica (x_i, y_i) este aproximat prin punctul de pe dreapta (x_i, y_i^{aprox}).

Metoda celor mai mici patrate: suma patratelor erorilor

$$S = \sum_{1}^{n} (y_i^{aprox} - y_i)^2$$

trebuie sa fie minima.

Metoda celor mai mici patrate

$$S = \sum_{1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$$

S este minima cand $\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$.

Pornind de la aceste conditii se determina a_0 si a_1.

Trebuie rezolvat sistemul de ecuatii

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

Sistemul se rezolva f. usor si se determina a_0 si a_1.
Dreapta care aproximeaza bine punctele date este $y = a_0 + a_1 x$.