

Automate finite nedeterministe

1. Definiția automatului finit nedeterminist

Automatul finit nedeterminist este o generalizare a automatului finit determinist, deoarece dintr-o anumită stare poate să treacă într-o mulțime nevidă de stări.

Definiția 1.1. Se numește **automat finit nedeterminist** cvintuplul $A = (\Sigma, Q, \delta, \{q_0\}, F)$, unde:

1. Σ se numește **alfabetul de intrare**;
2. Q se numește **mulțimea stărilor** și este o mulțime finită și nevidă;
3. $\delta : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ se numește **funcția de tranziție**;
4. $q_0 \in Q$ reprezintă **starea inițială**;
5. $F \subseteq \mathcal{P}(Q)$ și se numește **mulțimea stărilor finale**,
 $\mathcal{P}(Q)$ fiind mulțimea părților lui Q .

Ca și la automatul finit determinist, funcția de tranziție se poate prelungi pe mulțimea $\mathcal{P}(Q) \times \Sigma^*$ obținându-se funcția $\bar{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ unde:

$$\begin{cases} \bar{\delta}(\{q\}, \varepsilon) = \{q\}, \forall q \in Q \\ \bar{\delta}(\{q\}, wa) = \bigcup_{y \in \bar{\delta}(\{q\}, w)} \bar{\delta}(\{y\}, a), \forall q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{cases}$$

Pentru simplificarea scrierii, în continuare se va nota $\bar{\delta}$ tot prin δ .

Ca și la automatul finit determinist se poate scrie:

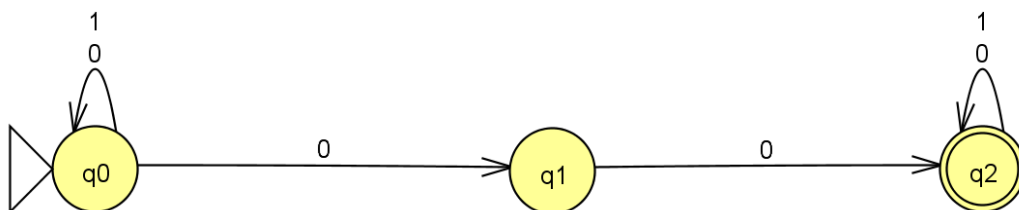
$$\delta(\{q\}, ay) = \delta(\delta(\{q\}, a), y), \forall q \in Q, a \in \Sigma, y \in \Sigma^*. \quad (**)$$

Observația 1.1. Un automat finit determinist se poate considera ca un caz particular de automat finit nedeterminist, în care toate mulțimile nevide ce intervin au un singur element.

Definiția 1.2. Limbajul acceptat de automatul finit nedeterminist $A = (\Sigma, Q, \delta, \{q_0\}, F)$ este $\mathcal{T}(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$, iar cuvântul $w \in \Sigma^*$ este **acceptat** de A dacă $\delta(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset$.

Și un automat finit nedeterminist poate fi reprezentat analitic și grafic, folosind un graf finit orientat, analog modului în care este reprezentat un automat finit determinist.

Exemplul 1.1. Graful finit orientat de mai jos este reprezentarea grafică a automatului finit nedeterminist $A = (\Sigma, Q, \delta, \{q_0\}, F)$ care acceptă toate șirurile binare care conțin subșirul 00.



Se pot verifica următoarele afirmații: $w_1 = 1101001 \in \mathcal{T}(A)$, iar $w_2 = 10101 \notin \mathcal{T}(A)$.

Mai întâi, se construiește reprezentarea analitică a automatului A , astfel:

- $\Sigma = \{0, 1\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $F = \{q_2\}$;
- funcția de tranziție δ este definită în următorul tabel:

δ	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	\emptyset
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

Folosind relația $(**)$ de mai sus se verifică relația $w_1 = 1101001 \in \mathcal{T}(A)$:

$$\begin{aligned}
 \delta(\{q_0\}, 1101001) &= \delta(\delta(\{q_0\}, 1), 101001) = \delta(\{q_0\}, 101001) = \\
 &= \delta(\delta(\{q_0\}, 1), 01001) = \delta(\{q_0\}, 01001) = \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 1001) = \\
 &= \delta(\{q_0, q_1\}, 1001) = \delta(\delta(\{q_0, q_1\}, 1), 001) = \\
 &= \delta(\delta(\{q_0\}, 1), 001) \cup \delta(\delta(\{q_1\}, 1), 001) = \delta(\{q_0\}, 001) \cup \emptyset = \\
 &= \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 01) = \delta(\{q_0, q_1\}, 01) = \\
 &= \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 1) \cup \delta(\delta(\{q_1\}, 0), 1) = \delta(\{q_0, q_1\}, 1) \cup \delta(\{q_2\}, 1) = \\
 &= \delta(\{q_0\}, 1) \cup \delta(\{q_1\}, 1) \cup \{q_2\} = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\} \cap F = \{q_2\} \neq \emptyset,
 \end{aligned}$$

de unde rezultă că $w_1 = 1101001 \in \mathcal{T}(A)$.

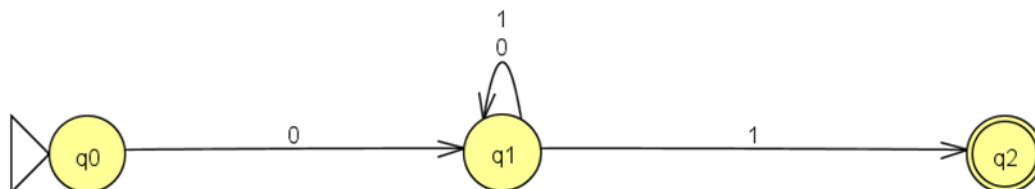
Cuvântul w_2 nu este acceptat de automatul A , într-adevăr are loc:

$$\begin{aligned}
 \delta(\{q_0\}, 10101) &= \delta(\delta(\{q_0\}, 1), 0101) = \delta(\{q_0\}, 0101) = \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 101) = \\
 &= \delta(\{q_0, q_1\}, 101) = \delta(\delta(\{q_0\}, 1), 01) \cup \delta(\delta(\{q_1\}, 1), 01) = \\
 &= \delta(\{q_0\}, 01) \cup \emptyset = \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 1) = \delta(\{q_0, q_1\}, 1) =
 \end{aligned}$$

$$= \delta(\{q_0\}, 1) \cup \delta(\{q_1\}, 1) = \{q_0\} \cup \emptyset = \{q_0\} \cap F = \emptyset,$$

de unde rezultă că $w_2 = 10101 \notin \mathcal{T}(A)$.

Exemplul 1.2. Graful finit orientat de mai jos este reprezentarea grafică a automatului finit determinist $A = (\Sigma, Q, \delta, \{q_0\}, F)$ care acceptă toate șirurile binare care încep cu 0 și se termină cu 1.



Se pot verifica următoarele afirmații: $w_1 = 01101 \in \mathcal{T}(A)$, iar $w_2 = 01010 \notin \mathcal{T}(A)$.

Mai întâi, se construiește reprezentarea analitică a automatului A , astfel:

- $\Sigma = \{0, 1\}$;
- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $F = \{q_2\}$;
- funcția de tranziție δ este definită în următorul tabel:

	δ	0	1
\rightarrow	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	\emptyset
	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
*	$\{q_2\}$	\emptyset	\emptyset

Folosind relația (**) de mai sus se verifică relația $w_1 = 01101 \in \mathcal{T}(A)$:

$$\begin{aligned}
 \delta(\{q_0\}, 01101) &= \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 1101) = \delta(\{q_1\}, 1101) = \delta(\delta(\{q_1\}, 1), 101) = \\
 &= \delta(\{q_1, q_2\}, 101) = \delta(\delta(\{q_1\}, 1), 01) \cup \delta(\delta(\{q_2\}, 1), 01) = \\
 &= \delta(\{q_1, q_2\}, 01) \cup \emptyset = \delta(\delta(\{q_1\}, 0), 1) \cup \delta(\delta(\{q_2\}, 0), 1) = \\
 &= \delta(\{q_1\}, 1) \cup \emptyset = \{q_1, q_2\} \cap F = \{q_2\} \neq \emptyset,
 \end{aligned}$$

de unde rezultă $w_1 = 01101 \in \mathcal{T}(A)$.

Cuvântul w_2 nu este acceptat de automatul A , într-adevăr are loc:

$$\begin{aligned}
 \delta(\{q_0\}, 01010) &= \delta(\delta(\{q_0\}, 0), 1010) = \delta(\{q_1\}, 1010) = \delta(\delta(\{q_1\}, 1), 010) = \\
 &= \delta(\{q_1, q_2\}, 010) = \delta(\delta(\{q_1\}, 0), 10) \cup \delta(\delta(\{q_2\}, 0), 10) = \\
 &= \delta(\{q_1\}, 10) \cup \emptyset = \delta(\delta(\{q_1\}, 1), 0) = \delta(\{q_1, q_2\}, 0) = \delta(\{q_1\}, 0) \cup \delta(\{q_2\}, 0) = \\
 &= \{q_1\} \cup \emptyset = \{q_1\} \cap F = \emptyset,
 \end{aligned}$$

de unde rezultă că $w_2 = 01010 \notin \mathcal{T}(A)$.

2. Echivalența dintre automatele finite deterministe și automatele finite nedeterministe

Definiția 2.1. Două automate finite A_1 și A_2 sunt **echivalente** dacă acceptă același limbaj, adică:

$$\mathcal{T}(A_1) = \mathcal{T}(A_2).$$

Conform observației 1.1, ar fi plauzibil să existe un limbaj acceptat de un automat finit nedeterminist, dar care să nu fie acceptat de un automat finit determinist. Următoarea teoremă *contrazice această impresie* (S. Marcus).

Mai întâi, trebuie spus că există un procedeu prin care unui automat finit nedeterminist A_N i se poate atașa în mod unic un automat finit determinist A_D .

Teorema 2.1. Automatul finit nedeterminist A_N este echivalent cu automat finit determinist A_D atașat, adică:

$$\mathcal{T}(A_N) = \mathcal{T}(A_D).$$

Observația 2.1. În baza teoremei se poate afirma că nu există un limbaj acceptat de un automat finit nedeterminist și care să nu fie acceptat de automatul finit determinist atașat.

În continuare este prezentat procedeu prin care se construiește automatul finit determinist $A_D = (\Sigma_D, Q_D, \delta_D, q_0^D, F_D)$, atașat automatului finit nedeterminist

$$A_N = (\Sigma_N, Q_N, \delta_N, \{q_0^N\}, F_N).$$

Plecând de la automatul finit nedeterminist A_N se obține automatul finit determinist A_D , astfel:

- $\Sigma_D = \Sigma_N$;
- $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$;
- F_D este mulțimea acelor părți ale lui Q_N care conțin cel puțin câte o stare din F_N , adică:

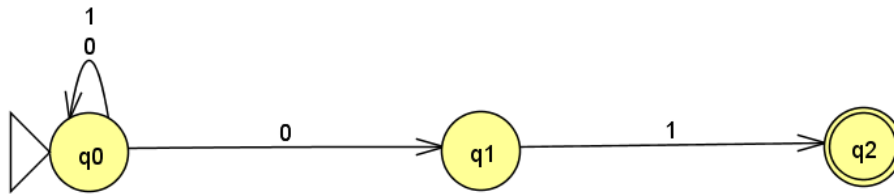
$$F_D = \{q \in Q_D \mid q \cap F_N \neq \emptyset\};$$

- funcția de tranziție $\delta_D : Q_D \times \Sigma_D \rightarrow Q_D$, unde pentru $\alpha \in Q_D$ și $a \in \Sigma_D$ are loc:

$$\delta_D(\alpha, a) = \bigcup_{q \in \alpha} \delta_N(q, a).$$

- $q_0^D = \{q_0^N\}$;

Exemplul 2.1. Graful finit orientat de mai jos este reprezentarea grafică a automatului finit nedeterminist $A_N = (\Sigma_N, Q_N, \delta_N, \{q_0^N\}, F_N)$ care acceptă şirurile binare ce se termină în 01.



Folosind procedeul de mai sus se va construi automatul finit determinist A_D echivalent şi ataşat lui A_N .

Mai întâi, se construieşte reprezentarea analitică a automatului A_N , astfel:

- $\Sigma_N = \{0,1\}$;
- $Q_N = \{q_0^N, q_1, q_2\}$;
- $F_N = \{q_2\}$;
- funcţia de tranziţie δ este definită în următorul tabel:

	δ	0	1
→	$\{q_0^N\}$	$\{q_0^N, q_1\}$	$\{q_0^N\}$
	$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
*	$\{q_2\}$	\emptyset	\emptyset

Automatul finit determinist $A_D = (\Sigma_D, Q_D, \delta_D, q_0^D, F_D)$, echivalent şi ataşat lui A_N se construieşte astfel:

- $\Sigma_D = \Sigma_N = \{0,1\}$;
- $Q_D = \mathcal{P}(Q_N) = \mathcal{P}(\{q_0^N, q_1, q_2\})$;
- $F_D = \{\{q_2\}, \{q_0^N, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0^N, q_1, q_2\}\}$;
- funcţia de tranziţie δ_D este definită în următorul tabel:

δ_D	0	1	
\emptyset	\emptyset	\emptyset	<i>A</i>
$\{q_0^N\}$	$\{q_0^N, q_1\}$	$\{q_0^N\}$	<i>B</i>
$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$	<i>C</i>
$\{q_2\}$	\emptyset	\emptyset	<i>D</i>
$\{q_0^N, q_1\}$	$\{q_0^N, q_1\}$	$\{q_0^N, q_2\}$	<i>E</i>
$\{q_0^N, q_2\}$	$\{q_0^N, q_1\}$	$\{q_0^N\}$	<i>F</i>
$\{q_1, q_2\}$	\emptyset	$\{q_2\}$	<i>G</i>
$\{q_0^N, q_1, q_2\}$	$\{q_0^N, q_1\}$	$\{q_0^N, q_2\}$	<i>H</i>

Etichetele *A, B, ..., H* se referă la elementele din coloana δ_D și permit, mai întâi, redenumirea stărilor automatului A_D și apoi a întregului automat A_D , astfel:

- $\Sigma_D = \{0,1\}$;
- $Q_D = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$;
- $F_D = \{D, F, G, H\}$;
- funcția de tranziție δ_D este definită în următorul tabel:

δ_D	0	1
A	A	A
B	E	B
C	A	D
D	A	A
E	E	F
F	E	B
G	A	D
H	E	F

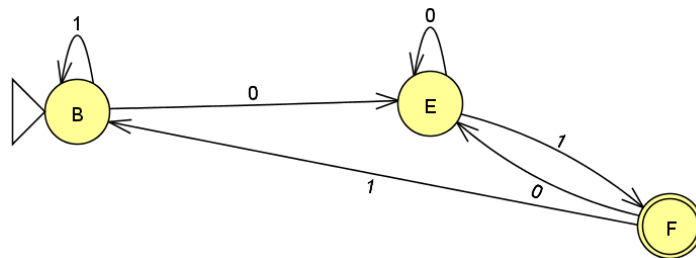
Observația 2.2. Automatul finit determinist obținut A_D echivalent cu A_N conține și stări inaccesibile, la care nu se poate ajunge plecând de la starea inițială **B**. Aceasta permite o simplificarea a automatului A_D prin eliminarea stărilor inaccesibile.

Într-adevăr, stările accesibile plecând de la starea inițială **B** sunt **E** și **F**, iar stările inaccesibile sunt **A**, **C**, **D**, **G** și **H**. Prin urmare, eliminând stările inaccesibile se obține următoarea formă simplificată a automatului finit determinist **A_D**:

- $\Sigma_D = \{0,1\}$;
- $Q_D = \{B, E, F\}$;
- $F_D = \{F\}$;
- funcția de tranziție δ_D este definită în următorul tabel:

	δ_D	0	1
→	B	E	B
	E	E	F
*	F	E	B

Reprezentarea grafică a automatului finit determinist **A_D** este următoarea:



Folosind reetichetarea $q_0 = B, q_1 = E, q_2 = F$ și $\delta_D = \delta$, definiția automatului finit determinist **A_D** devine:

- $\Sigma_D = \{0,1\}$;
- $Q_D = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $F_D = \{q_2\}$;
- funcția de tranziție δ este definită în următorul tabel:

	δ	0	1
→	q₀	q ₁	q ₀
	q₁	q ₁	q ₂
*	q₂	q ₁	q ₀

Să se verifice următoarele afirmații: $w_1 = 01101 \in \mathcal{T}(A_D)$, iar $w_2 = 01010 \notin \mathcal{T}(A_D)$.

Verificarea directă este următoarea:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, 01101) &= \delta(\delta(q_0, 0), 1101) = \delta(q_1, 1101) = \delta(\delta(q_1, 1), 101) = \\ &= \delta(q_2, 101) = \delta(\delta(q_2, 1), 01) = \delta(q_0, 01) = \delta(\delta(q_0, 0), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2 \in F\end{aligned}$$

și deci $w_1 \in \mathcal{T}(A_D)$.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, 01010) &= \delta(\delta(q_0, 0), 1010) = \delta(q_1, 1010) = \delta(\delta(q_1, 1), 010) = \\ &= \delta(q_2, 010) = \delta(\delta(q_2, 0), 10) = \delta(q_1, 10) = \delta(\delta(q_1, 1), 0) = \delta(q_2, 0) = q_1 \notin F\end{aligned}$$

și deci $w_2 \notin \mathcal{T}(A_D)$.

Știind că automatele A_N și A_D sunt echivalente, verificarea indirectă consta în a verifica care dintre cele două cuvinte se termină în 01. Cum w_1 verifică condiția, iar w_2 nu o verifică, rezultă că numai $w_1 \in \mathcal{T}(A_D)$.

Temă.

1. Determinați automatele finit deterministe echivalente cu automatele finit nedeterministe din exemplele 1.1 și 1.2.
2. Se consideră automatul finit determinist $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, unde $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_0, q_1, q_2\}$, iar funcția de tranziție δ este dată în următorul tabel:

δ	0	1
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_0
q_3	q_3	q_3

- a) Arătați că $w_1 = 01001011 \in T(A)$ dar $w_2 = 10100010 \notin T(A)$.
- b) Reprezentați graficul automatul A .
- c) Descrieți, pe scurt, limbajul acceptat de către automatul A .