Curs 3 - Tema | Ex. a)

$y' + P(x)y + Q(x) = 0$

$3y'(x^2-1) - 2xy = 0 \Rightarrow$ OMOGENĂ

PAS 1 $\quad y' + P(x)y = 0 \to y' = -P(x)y \to \frac{y'}{y} = -P(x)$ $\qquad P(x) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{x}{x^2-1} \quad Q(x) = 0$

$3y'(x^2-1) - 2xy = 0 \to 3y' - \frac{2xy}{x^2-1} \to y' - \frac{2}{3} \cdot \frac{xy}{x^2-1} \to y' + \left[\frac{(-2)}{3} \cdot \frac{x}{x^2-1}\right] y = 0 \to y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{x^2-1} y \to \frac{y'}{y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{x^2-1}$

PAS 2

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{y'}{y}dx = \frac{2}{3}\underbrace{\int \frac{x}{x^2-1}dx}_{=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} \to \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \to \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2-1| + c} = \ln y = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \ln|x^2-1| = \ln y = \frac{1}{3}\ln|x^2-1| + \ln c \to \ln y = \ln|x^2-1|^{\frac{1}{3}} + \ln c \to y = (x^2-1)^{\frac{1}{3}} + C$$

$u = x^2-1$

$du = 2x$

Curs 3 - Temă | Ex b)

$y' + 2xy - x^3 = 0$ $\quad$ NEOMOGENĂ

$y' + 2xy = 0$ $\quad$ OMOGENĂ ASOCIATĂ

PAS 1 $\qquad P(x) = 2x$

$y' + 2xy = 0 \to y' = -2xy \to \frac{y'}{y} = -2x$

PAS 2

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int -2x\,dx \to \int \frac{y'}{y}dx = -2\int x\,dx \to \ln y = -\cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} \to \ln y = -x^2 + \ln c \to y = e^{-x^2 + \ln c} \to y = e^{-x^2} \cdot e^{\ln c} \to y = c \cdot e^{-x^2}$$

omogen

PAS 3 | Se face pentru că este o ecuație neomogenă

$C = C(x) \to y_{(x)} = c(x) \cdot e^{-x^2} \to y = e^{-x^2 + c(x)} \to y' = e^{-x^2 + c(x)} \cdot (c(x) - x^2)' \to y' = e^{-x^2 + c(x)} \cdot (c(x)' - 2x)$

Înlocuim y și y' în ecuația de start

$$y' + 2xy - x^3 = 0 \to e^{-x^2 + c(x)} \cdot (c(x)' - 2x) + 2x \cdot e^{-x^2 + c(x)} - x^3 = 0 \to c(x)' \cdot e^{-x^2 + c(x)} \cancel{- 2x \cdot e^{-x^2 + c(x)}} \cancel{+ 2x \cdot e^{-x^2 + c(x)}} - x^3 = 0 \to C(x)' \cdot e^{-x^2 + c(x)} - x^3 = 0$$

$$C(x)' \cdot e^{-x^2 + c(x)} = x^3 \to C(x)' = \frac{x^3}{e^{-x^2 + c(x)}} \to C(x) = \int \frac{x}{e^{-x^2 + c(x)}}dx + C$$

$$y = e^{-x^2 + c(x)} \to y = e^{-x^2 + \int \frac{x^3}{e^{-x^2 + c(x)}}dx}$$

particular

$$y(x) = \underbrace{C \cdot e^{-x^2}} - \underbrace{e^{-x^2 + \int \frac{x^3}{e^{-x^2 + c(x)}}dx}}$$

Soluție particulară a ecuației neomogene $y' + P(x) + Q(x) = 0$

Soluția generală a ecuației omogene $y' + P(x) = 0$