Curs 7

Ecuații diferențiale liniare de ordinul n, omogene și neomogene, cu coeficienți variabili

Ecuații de tip Euler

$$a_0 \cdot x^n \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x \cdot y' + a_n \cdot y = f(x) \rightarrow y = y(x);\ x \neq 0$$

Metoda 1: Se face o schimbare de variabile independente $x = e^t$

$y = y(x)$; $y = (e^t)$ $\qquad$ y' = derivata lui y în raport cu x

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow \dot{y} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$x = e^t \rightarrow t = \ln x;\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

$$y'(x) = \dot{y} \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\ddot{y} \cdot e^{-t} - \dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot e^{-t} =$$

$$= e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left[e^{-2t} \cdot (\ddot{y} - \dot{y})\right] \cdot \frac{dt}{dx} = \left[-2 \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^{-2t}(\dddot{y} - \ddot{y})\right] e^{-t} =$$

$$= e^{-3t}(\dddot{y} - \ddot{y} - 2\ddot{y} + 2\dot{y}) = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$$

Înlocuind aceste derivate în ecuație se va obține o ecuație de ordin n DAR cu coeficienți constanți

---

Exemplu $\quad x^2 y'' - x y' + y = 0 \qquad x = e^t \rightarrow t = \ln x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \dot{y} \cdot e^{-t} \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \qquad y(x) = y(e^t)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot e^{-2t}$$

$$\overbrace{\cancel{e^{2t}} \cdot \cancel{e^{-2t}}}^{1}(\ddot{y} - \dot{y}) - \overbrace{\cancel{e^{t}} \cdot \cancel{e^{-t}}}^{-1} \cdot \dot{y} + y = 0 \rightarrow \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0 \qquad y = e^{zt}$$

$$\dot{y} = z \cdot e^{zt} \qquad \ddot{y} = z^2 \cdot e^{zt} \rightarrow z^2 \cdot e^{zt} - 2z \cdot e^{zt} + e^{zt} = 0$$

$$z^2 - 2z + 1 = 0 \qquad \text{Ec. caracteristică asociată}$$

$z_1 = z_2 = 1 \longrightarrow y_1 = e^t \; ; \; y_2 = t \cdot e^t$

$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^t \cdot t$

$y(x) = C_1 x + C_2 x \cdot \ln x$

$y = e^{2t} \iff y = (e^t)^2 \iff y = x^2$

$y' = z \cdot x^{z-1} \qquad y'' = z(z-1) \cdot x^{z-2} \qquad y''' = z(z-1)(z-2) \cdot x^{z-3}$

$x^2 y'' - x y' + y = 0 \longrightarrow x^2 \cdot z(z-1) \cdot x^{z-2} - x \cdot z \cdot x^{z-1} = 0$

$x^2 \left[z(z-1) - z + 1 \right] = 0 \longrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0 \longrightarrow z_1 = z_2 = 1$

$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0 \Rightarrow \begin{array}{l|l} y_1 = e^t & y_1 = x \\ y_2 = t \cdot e^t & y_2 = x \ln x \end{array}$

Dacă $z = \alpha + i\beta \longrightarrow \bar{z} = \alpha - i\beta \longrightarrow$ sunt soluții a ec. caracteristice

$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos\beta t + \sin\beta t)$

$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos\beta t - \sin\beta t)$

$t = \ln x$

$e^{\alpha t} = (e^t)^\alpha = x^\alpha$

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t \\ \bar{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \bar{y}_1(x) = x^\alpha \cdot \cos(\beta \cdot \ln x) \\ \bar{y}_2(x) = x^\alpha \cdot \sin(\beta \cdot \ln x) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{pmatrix}}_{\det = -1/2i \neq 0} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Exemplu | $x^3 \cdot y''' + 2x^2 \cdot y'' - xy' + y = 0$ Ecuație de tip Euler

$y = x^z \to y' = z \cdot x^{z-1} \quad y'' = z(z-1) \cdot x^{z-2} \quad y''' = z(z-1)(z-2) \cdot x^{z-3}$

$x^3 \cdot x^{z-3} \cdot z(z-1)(z-2) + z \cdot x^2 \cdot z(z-1) \cdot x^{z-2} - x \cdot z \cdot x^{z-1} + x^z = 0 \;\Big|: x^z$

$z(z-1)(z-2) + 2z(z-1) - z + 1 = 0$ ec. car. asociată

$(z-1)\left[z^2 - \cancel{2z} + \cancel{2z} - 1\right] = 0 \to (z-1)(z^2-1) = 0 \to (z-1)^2(z+1) = 0 \begin{cases} z_1 = z_2 = 1 \\ z_3 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y_1 = x \;; \\ y_2 = x\ln x \\ y_3 = \frac{1}{x} \end{cases} \qquad y_o = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{C_3}{x}$$

$(z-1)(z^2-1) = z^3 - z^2 - z + 1 = 0 \to \dddot{y} - \ddot{y} - \dot{y} + 1 = 0 \to x = e^{zt}$

$z_1 = z_2 = 1 \qquad y_1 = e^t \qquad y_2 = t \cdot e^t$

$z_3 = -1 \qquad y_1 = x \qquad y_2 = x \ln x$

Pentru ecuații neomogene

$y = y_o + y_p$

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$y_p = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$

y_p se determină prin variația constantei

$C_i = (C_i(x)) \qquad i = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ \vdots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0 \cdot x^n} \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1' = f_1(x) \\ \vdots \\ C_n' = f_n(x) \end{cases} \to \begin{cases} C_1(x) = \int f_1(x)\,dx + K_1 \\ \vdots \\ C_n(x) = \int f_n(x)\,dx + K_n \end{cases}$$

$$y = \underbrace{(K_1 y_1 + K_2 y_2 + \dots + K_n y_n)}_{y_o(x)} + \underbrace{y_1 \cdot \int f(x)\,dx + \dots + y_n \int f(x)\,dx}_{y_p(x)}$$

Sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul 1, omogene și neomogene

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\,y_1 + \dots + a_{1n}(x)\,y_n + f_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\,y_n + \dots + a_{nn}(x)\,y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$a_{ij}(x),\ f_i : I \to \mathbb{R}$ continue, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n} \qquad F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

$\dfrac{dy}{dx} = A(x)\cdot y + F(x)$ Sistem neomogen (1)

$\dfrac{dy}{dx} = A(x)\cdot y$ Sistem omogen (2)

O soluție a sistemului omogen: $\{y_1, \dots, y_n\}$ verifică sistemul (2)

$y_i \in C^1(I),\ i=\overline{1,n}$

O soluție a sistemului neomogen este suma dintre soluția generală lui (2) și sol. particulară a sistemului (1)

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix} \quad \dots \quad y_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$ FORMEAZĂ SFS DACĂ

$W(x) = \left(y_1, y_2, \dots, y_n \right)$ are $\det \neq 0$

Deci rezultă că $\{y_1, \dots, y_n\}$ este SFS

$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ Sol. generală a sistemului omogen