Serii numerice

Fie $(a_n)_n \in \mathbb{R}$ un nr. de numere reale. Cu ajutorul lui

seria cu termenul general (a_n):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

↳ suma ∞ de termeni

Notăm $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

↳ suma primilor n termeni

Definitie

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ → este convergentă; → are suma S $\Longleftrightarrow$ șirul numerelor parțiale al său: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ este convergent și are limita S

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Exemple

1 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\dots$

Seria geometrică de rație $r=\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n\to\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots = 2$$

$$\begin{cases} 1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = ? \quad \left(= \frac{r^n-1}{r-1} = \frac{1-r^n}{1-r}\right) \\ r^2-1 = (r-1)(r+1) \Rightarrow r+1 = \frac{r^2-1}{r-1} \\ r^3-1 = (r-1)(r^2+r+1) \Rightarrow 1+r+r^2 = \frac{r^3-1}{r-1} \\ \dots \\ r^n-1 = (r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+\dots+r+1) \Rightarrow 1+r+r^2+\dots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1} \end{cases}$$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\dots$

$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+ab^{n-1})$

$b=1$

2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} =$$

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\frac{1}{(3n+1)(3n+n)}+\dots$$

Termenul general al seriei este $\alpha_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ = termenul general al șirului numerelor parțiale

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ $\longrightarrow$ Am arătat că (S_n) este șir CAUCHY deci convergent.

Calculăm $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right), \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$n=1$: $\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)$

$n=2$: $\frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)$

$n=3$: $\frac{1}{7\cdot 10} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{7}}-\cancel{\frac{1}{10}}\right)$

$\dots$

$k=n-1$: $\frac{1}{(3n-5)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{3n-5}}-\cancel{\frac{1}{3n-2}}\right)$

$k=n$: $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\cancel{\frac{1}{3n-2}}-\frac{1}{3n+1}\right)$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}$$

Din exemplele anterioare a rezultat că putem stabili natura unei serii numerice și chiar și suma sa, utilizând doar definițiile și cunoștințele despre șiruri.

Natura unei serii numerice se va stabili de regulă, cu ajutorul unor criterii de convergență:

- criterii generale de convergență
- criterii pentru serii cu termeni pozitivi
- criterii pentru serii cu termeni oarecare

Criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru serii numerice

Teorema Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă

$\Longleftrightarrow$

șirul sumelor parțiale asociat, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy

$\Longleftrightarrow$

$$(\forall)\ \varepsilon>0, \quad (\exists)\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ a.î.}$$
$$(\forall)\ n \geq n_0(\varepsilon) \text{ și } (\forall)\ p\geq 1,\ p\in\mathbb{N},$$

să arătăm: $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow$

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon,$$
$$(\forall)\ n\geq n_0(\varepsilon),\ (\forall)\ p\geq 1$$

Din cauza generalității sale (fiind un criteriu necesar și suficient), în practică se aplică mai rar de regulă, în aplicații se utilizează criterii sunt numai necesare sau numai suficiente de convergență sau divergență.

Exemple

Fie $p=1$ în criteriul lui Cauchy $\Leftrightarrow$

$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ și $(\forall)\ n>n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_{n+1}|<\varepsilon \Leftrightarrow (a_n)_n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

$|a_{n+1}-0|<\varepsilon,\ (\forall)\ \varepsilon$

Aceasta este o condiție doar necesară de convergență, dar nu și suficientă.

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ldots$

– numită seria armonică

$a_n=\frac{1}{n}$; $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$; iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$

Pentru seria armonică avem:

→ condiția necesară de convergență $a_n\to 0$ este asigurată

$\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty} 0$

→ condiția nu este și suficientă

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Arătăm că șirul $S_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ nu este șir Cauchy $\Leftrightarrow$

(S_n) nu este convergent

Pentru a obține negarea unei afirmații matematice, se parcurg următorii pași:

1. „oricare" se transformă în „există"
2. „există" se transformă în „oricare"
3. adevărul p se transformă în „non p"

Arătăm că $(\exists)\ \varepsilon_0 > 0$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\exists)\ p \in \mathbb{N}$ a.î. $S_{n+p} - S_n \geq \varepsilon_0$

Dacă (S_n) ar fi fost șir Cauchy, atunci pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ p \geq 1$, să avem

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Fie $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ putem lua $p = n$, exista $p \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p}$$

pentru $p = n \Rightarrow |S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} >$

$$> \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Am arătat că $(\exists)\ \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ cu proprietatea că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $(\exists)\ p \in \mathbb{N}$ $(p = n)$ a.î.

$|S_{n+p} - S_n| = |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ NU este şir Cauchy

$\Rightarrow$ S_n nu este convergent

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty \Leftrightarrow$

Seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ este divergentă

$S_n \nearrow$ şi divergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Obs **1** Natura unei serii numerice nu se schimbă dacă se adaugă sau suprimă un nr finit de termeni. (Se schimbă numai valoarea sumei dacă seria este convergentă)

2 Dacă $\sum u_n$ şi $\sum v_n$ sunt convergente şi u sumele lor, respectiv v, atunci seriile $\sum(u_n \pm v_n)$ şi $\sum(\alpha \cdot u_n)$ sunt de asemenea convergente şi au sumele $u \pm v$, respectiv din $\sum(\alpha \cdot u_n \pm \beta \cdot v_n) \rightarrow$

$\rightarrow \alpha \cdot u \pm \beta \cdot v$ (liniaritate)