Curs V. Gorban

23/03/2022

Curs 6

Aplicații liniare și operatori liniari

Def: Fie V și W două spații vectoriale peste același corp K al scalarilor.

Se numește aplicație liniară definită în V cu valori în W o funcție $f: V \to W$ cu proprietățile:

a) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ ADITIVITATE

b) $f(\alpha u) = \alpha \cdot f(u)$ OMOGENEITATE

$\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in K$

Dacă sunt a și b $\to$ APLICAȚIE LINIARĂ

Cele 2 proprietăți se pot scrie într-una singură:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)$$ Condiția de liniaritate

Exemplu 1 Operatorile de derivare și integrare (în sensul primitivelor) sunt aplicații liniare.

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = (\alpha f)' + (\beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$
$$= \alpha D(f) + \beta D(g)$$

$$\int(\alpha f + \beta g) = \int \alpha f\, dx + \int \beta g\, dx =$$
$$= \alpha \cdot \int f \cdot dx + \beta \cdot \int g \cdot dx$$

Exemplu 2 $m=1$, $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$, $W = \mathcal{M}_{(m,1)}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^m$ și $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$

$f(x) = A \cdot X = y$; $A \cdot X = y$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $X \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f(X) = A \cdot X$

Matricea A este matricea asociată aplicației liniare f în raport cu bazele $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ din $\mathbb{R}^n$ și $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ din $\mathbb{R}^m$

Matricea A asociată aplicației liniare f astfel definită se obține astfel: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $f(X) = A \cdot X$

- Dacă $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ și $(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) \in \mathbb{R}^m$ atunci vectorii $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ se vor exprima fiecare în mod unic în raport cu vectorii bazei din $\mathbb{R}^m$, astfel:

$$1^\circ \quad \begin{cases} f(u_1) = \alpha_{11} v_1 + \ldots + \alpha_{m1} \cdot v_m \\ \vdots \\ f(u_n) = \alpha_{1n} v_1 + \ldots + \alpha_{mn} \cdot v_m \end{cases}$$

Coordonatele vectorilor $f(u_1) \ldots f(u_n) \in \mathbb{R}^m$ se vor scrie pe coloanele matricei $A \Leftrightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ f(u_1) & \cdots & f(u_n) \end{array}$$

= matricea asociată aplicației liniare f în raport cu bazele B_1 din $\mathbb{R}^n$ și respectiv B_2 din $\mathbb{R}^m$.

Folosind matricea A, relații 1° se scriu, condensat, astfel:

$$2^\circ \quad (f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \cdot A$$

Matricea A este unică și este determinată de cele 2 baze din $\mathbb{R}^n$ respectiv $\mathbb{R}^m$

Deci oricărei aplicații liniare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ îi corespunde o unică matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și reciproc, orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ definește o aplicație liniară de la $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Această aplicație (corespondență) este bijectivă și "se traduce" prin următoarea formulare:

Există un izomorfism între mulțimea aplicațiilor liniare notate astfel: $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

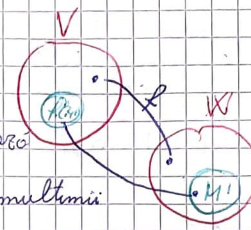
În cazul particular $m = n$, atunci $\Rightarrow$

Există un izomorfism între mulțimea endomorfismelor $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și mulțimea matricelor pătratice $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

1° Nucleul

Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară



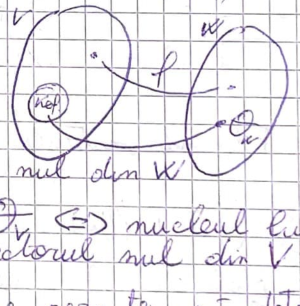
Fie M' o sub-mulțime din W. Se notează cu $f^{-1}(M') \overset{def}{=} \{u \in V \mid f(u) \in M'\}$. Această mulțime se numește pre-imaginea sub-mulțimii M' din W prin aplicația f

Se demonstrează că dacă M' este sub-spațiu vectorial în W, atunci și prin imaginea sa, $f^{-1}(M')$ din V este sub-spațiu în V

Def: Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară. Se numește Nucleul aplicației f și se notează cu $\text{Ker} f$, ~~...~~ pre-imaginea sub-spațiului nul al lui W.

$$\text{Ker} f = f^{-1}(\{\theta_W\}) \qquad \theta_W = \text{originea } (O_W)$$

$$\text{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = \theta_W\}$$



Proprietăți

a) $\text{Ker} f$ este sub-spațiu în V $\Leftrightarrow$ este pre-imaginea sub-spațiului nul din W

b) f este injectivă $\Leftrightarrow$ $\text{Ker} f = \theta_V$ $\Leftrightarrow$ nucleul lui f este format numai din vectorul nul din V

Relația $\text{Ker} f = \{u \in V \mid f(u) = \theta_W\}$ ne permite să determinăm nucleul aplicației liniare f și anume $\Leftrightarrow$

este soluția sistemului omogen

$$f(u) = \theta_W$$

2 Imaginea

Dacă $M \subset V$, atunci imaginea lui M prin aplicația f se definește astfel:

$$f(M) = \{y \in W \mid y = f(x),\ x \in M\}$$

Dacă M este sub-spațiu în V, atunci $f(M)$ este sub-spațiu în W.

În particular, luând $M = V$, atunci $f(M) = f(V)$ și se numește Imaginea aplicației liniare f

$Im\, f = f(V) = \{ v = f(u) \mid u \in V \}$

Proprietăți:

a) $Im\, f = f(V)$ este sub-spațiu în W

b) f este surjectivă $\Leftrightarrow$ $Im\, f = f(V) = W$

Dacă V și W sunt spații vectoriale finit generate, să considerăm $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ o bază în V și $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ o bază în W

Fie A matricea asociată lui f în raport cu cele 2 baze

Din cele prezentate anterior, rezultă că $Im\, f$ este sub-spațiul din W generat de vectorii:

$\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ (transformații vectorilor bazei B_1 prin f)

$Im\, f = Sp[f(u_1), \dots, f(u_n)]$

coloanele acestor vectori sunt întocmai coloanei matricei A

$\Rightarrow$ $Dim\, Sp[f(u_1) \dots f(u_n)] =$ rangul A

mai rezultă că o bază pentru $Im\, f$ este formată din vectorii L.I. din mulțimea de generatori ai lui $Im\, f$

Se mai demonstrează și următoarea: (TEOREMA RANGULUI)

$Dim\, V = Dim\, Ker f + Dim\, Im\, f$

Formula de schimbare a matricei unei aplicații liniare la schimbarea bazelor

Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o AL. Fie $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ o bază în $\mathbb{R}^n$

$B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ o bază în $\mathbb{R}^m$

Vectorii $f(u_1), \dots, f(u_n) \in \mathbb{R}^m$ se vor exprima fiecare în mod unic, în raport cu elementele bazei din $\mathbb{R}^m$

Astfel avem:

$$(1^\circ) \begin{cases} f(u_1) = \alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{m1} v_m \\ \vdots \\ f(u_n) = \alpha_{1n} v_1 + \dots + \alpha_{mn} v_m \end{cases}$$

Coordonatele vectorilor $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\} \in \mathbb{R}^m$ se scriu pe coloanele matricei A care este matricea asociată aplicației f în raport cu cele 2 baze

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$\qquad f(u_1) \qquad\qquad f(u_n)$

Relațiile (1°) se scriu condensat astfel:

$$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_m) \cdot A$$

Ne propunem să găsim formula prin care se schimbă matricea A atunci când se schimbă bazele atât în $\mathbb{R}^n$ (spațiu Domeniu f) cât și în $\mathbb{R}^m$ (spațiu codomeniu f).

Fie $B_1' = \{u_1', \dots, u_n'\}$ și $B_2 = \{v_1', \dots, v_m'\}$ alte 2 baze în $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{R}^m$.

Trecerea de la B_1 la B_1' în $\mathbb{R}^n$ se face prin intermediul matricei T: $B_1 \xrightarrow{T} B_1'$ iar trecerea de la B_2 la B_2' în $W = \mathbb{R}^m$ se face prin intermediul matricei S (nu T^{-1}). Avem relațiile

$$(u_1', \dots, u_n') = (u_1, \dots, u_n) \cdot T \longrightarrow \mathbb{R}^n : T \in M_n(\mathbb{R})$$
$$(v_1', \dots, v_m') = (v_1, \dots, v_m) \cdot S \longrightarrow \mathbb{R}^m : S \in M_m(\mathbb{R})$$

Fie B matricea asociată tranformării liniare f în raport cu bazele B_1' și B_2'

Se demonstrează că are loc relația:

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$(f(u_1'), \dots, f(u_n')) = (v_1', \dots, v_m') \cdot B$$

OBS1 Dacă $f: V \to V$ ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

$\Leftrightarrow$ atât în spațiul de definiție (plecare), cât și în spațiul de sosire, se va lua aceeași nouă bază și în consecință $\Leftrightarrow S = T$

$$\Rightarrow B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$