19.11.2021

Funcții vectoriale de variabilă vectorială. An 1 Ai

1° Spațiul $\mathbb{R}^n$

Prin $\mathbb{R}^n$ vom înțelege produsul cartezian

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1,n}$; x s.n. punct în $\mathbb{R}^n$.

1.a Structura algebrică a lui $\mathbb{R}^n$.

Pe $\mathbb{R}^n$ vom defini operația de adunare a punctelor din $\mathbb{R}^n$ astfel: dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ definim adunarea pe $\mathbb{R}^n$ astfel:

$$x + y \overset{def}{=} (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \Rightarrow \text{suma pe}$$

componente (suma pe coordonate)

Proprietățile adunării din $\mathbb{R}^n$:

1° $x+y = y+x$; (comutativitate)

2° $(x+y)+z = x+(y+z)$: asociativitate

3° $x + 0_n = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$; $0_n = (0, 0, \dots, 0)$ = elementul nul din $\mathbb{R}^n$.

4° $x + (-x) = 0_n$; $(-x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ = opusul punctului x.

Deci $(\mathbb{R}^n, +)$ = grup comutativ (grup abelian)

Înmulțirea cu scalari a elementelor din $\mathbb{R}^n$

Pentru $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ și $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se definește produsul $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$ (toate componentele lui x se înmulțesc cu nr. α)

Proprietăți

1° $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

2° $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$

3° $\alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$

4° $1\cdot x = x$, 1 = elementul neutru față de înmulțirea din $\mathbb{R}$.

Împreună cu cele două operații $\mathbb{R}^n$ are o structură de spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ al scalarilor. De aceea punctele lui $\mathbb{R}^n$ se mai numesc și vectori din $\mathbb{R}^n$, iar coordonatele $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale vectorului $x \in \mathbb{R}^n$ se mai numesc și componentele sau parametrii directori ai lui x.

Norma în $\mathbb{R}^n$.

În $\mathbb{R}^n$ se definește norma unui vector $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ și se notează cu $\|x\|$, o aplicație definită pe $\mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}_+$ astfel:

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ prin $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

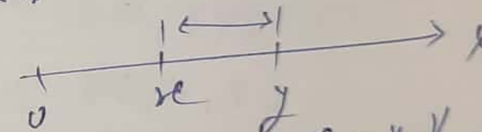
(norma euclidiană.)

Proprietățile normei:
$\|x\| = 0 \iff x = 0_n$

1° $\|x\| \geq 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$ și
2° $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$; $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$
3° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului)

Cu ajutorul normei se definește în $\mathbb{R}^n$ distanța dintre două puncte x și y la fel cum s-a definit în $\mathbb{R}$ distanța cu ajutorul modulului:

în $\mathbb{R}$: $d(x, y) = |y - x|$



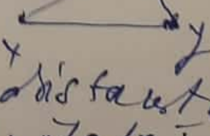
în $\mathbb{R}^n$: $d(x, y) = \|x - y\| = \|x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n\| =$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

= distanța euclidiană

Proprietățile distanței în $\mathbb{R}^n$ rezultă din proprietățile normei:

1° $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ și $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2° $d(x, y) = d(y, x)$
3° $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $(\forall)\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$
(inegalitatea triunghiului)



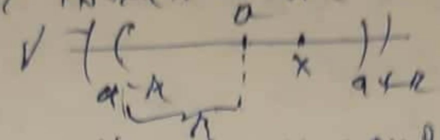
Cu ajutorul noțiunilor de normă și distanță se definește și noțiunea de vecinătate în $\mathbb{R}^n$

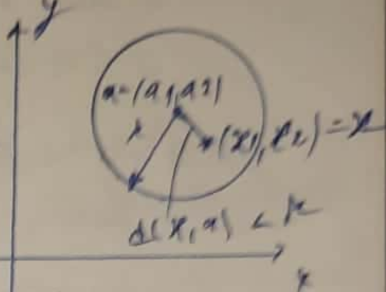
Definiție Se numește sferă deschisă de centru $a \in \mathbb{R}^n$ și rază $r > 0$, mulțimea:

$V_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) = \|x-a\| < r \}$.

$x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2} < r$

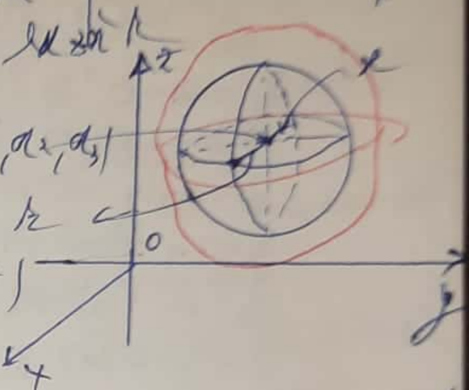
în $\mathbb{R}$: $V_r(a)$ este intervalul deschis $(a-r, a+r)$





în $\mathbb{R}^2$: $V_r(a)$ este discul de centru a și rază r;

în $\mathbb{R}^3$: $V_r(a)$ este interiorul sferei cu centrul în $a=(a_1, a_2, a_3)$ și de rază r



Mulțimea $B_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \le r \}$ se numește sferă închisă (bila închisă) de centru a și rază $r > 0$.

Definiție Se numește vecinătate a unui punct $a \in \mathbb{R}^n$ orice mulțime $W \subset \mathbb{R}^n$ care conține o sferă $V_r(a)$; $a \in V_r(a) \subset W$.

Obs Se mai pot defini și alte norme în $\mathbb{R}^n$, ca aplicații respectiv distanțe în $\mathbb{R}^n$, cu proprietățile 1°, 2°, 3° din definițiile normei și distanței prezentate anterior.

1° $\|x\|_1 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

2° $\|x\|_\infty \overset{def}{=} \sup_{i=1}^{n} |x_i|$.

Între cele trei norme (inclusiv $\|\cdot\|_2$) există relația: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \iff$

$$\sup_{i=1}^{n} |x_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$\Rightarrow$ cele trei norme generează aceeași topologie pe $\mathbb{R}^n$.

Funcții vectoriale de variabilă vectorială

Definiția 1 O funcție $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ se numește funcție reală de variabilă vectorială.

$x \in X$ și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

Definiția 2 Fie funcțiile reale $f_1, f_2, \dots, f_m$ definite pe aceeași mulțime $X \subset \mathbb{R}^n$. Corespondența

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow \left(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n) \dots f_m(x_1, \dots, x_n)\right)$$

care asociază unui punct $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, un punct $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^m$ definește o funcție $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $f: X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, numită funcție vectorială de variabilă vectorială.

Noțiunile de limită și continuitate pentru aceste funcții se definesc la fel ca pentru funcțiile reale de variabilă reală, cu mențiunea că în acele definiții modulul se înlocuiește cu norma.

Definiția 1 Fie funcția $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și a un punct de acumulare al mulțimii X. Vom spune că un vector $b \in \mathbb{R}^m$ este limita funcției f în punctul a dacă pentru $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)$ un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru $\forall\, x \in X$, $x \neq a$, cu proprietatea $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Se scrie $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Definiția 2 Fie funcția $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ și $a \in X$. Spunem că f este continuă în punctul a (în raport cu ansamblul variabilelor) dacă $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta(\varepsilon) > 0$ a.î. pentru orice $x \in X$ cu proprietatea $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ să avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Se scrie $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, în ipoteza că a este punct de acumulare al lui X

Se mai poate scrie: $\lim_{x \to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$.

Proprietatile functiilor continue studiate in clasa a-XI-a raman valabile si pentru functiile reale sau vectoriale de variabila vectoriala. In acest caz se mai adauga proprietati referitoare la continuitatea partiala in raport cu una din variabile.

Derivate partiale de ordinul 1

Vom prezenta notiunile pentru o functie reala de doua variabile si apoi vom face generalizarile specifice pentru functiile vectoriale de variabila vectoriala.

Definitia 1 Fie $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si (a,b) un punct interior al lui X ($f = f(x,y)$).

Vom spune ca functia f este derivabila partial in punctul (a,b) in raport cu variabila x dacă exista si este finita limita:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} < +\infty$$

(Analogie cu $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ – clasa a XI-a)

Limita se numeste derivata partiala a lui f in raport cu x in punctul (a,b) si se noteaza

$f'_x(a,b)$ sau $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} < +\infty$ $\left(\frac{df(a)}{dx} = f'(x) - \text{a } \overline{XI}\right)$

∂ ∂

Analog se defineste derivata partiala a lui f in raport cu variabila y in punctul (a,b):

$(\exists)$ si este finita limita:

$$\lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b} = f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) < +\infty$$

Definitiile se pot extinde la intreaga multime de definiție a funcției f: dacă funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila x în fiecare punct al mulțimii X, vom spune că funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila x pe toată mulțimea X.

Dacă avem o funcție reală de variabilă reală: $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a=(a_1, a_2, \dots a_n) \in \operatorname{Int} X$:

<u>Definiție</u> Fie $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in \operatorname{Int} X$. Spunem că f este derivabilă parțial în punctul $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ în raport cu variabila x_k, $1 \le k \le n$, dacă există și este finită limita:

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots a_n)}{x_k - a_k}$$

$$= f'_{x_k}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) < +\infty.$$ Se numește derivata parțială a lui f, în raport cu variabila x_k, în punctul $a=(a_1, \dots, a_k, \dots a_n)$

Analog definiția derivatei parțiale în raport cu fiecare variabilă x_k, $k=\overline{1,n}$ se poate extinde pe toată mulțimea X (în punctele sale interioare)

Derivata parțială se calculează numai în raport cu variabila menționată, toate celelalte variabile fiind tratate drept constante, calculul se face respectând toate regulile de derivare cunoscute din clasa a XI-a.

Se recomandă repetarea tabelului cu derivatele funcțiilor elementare, care se învață din clasa a XI-a. De asemenea, repetarea regulilor de calcul ale operațiilor cu funcții derivabile (suma, produs, raport, putere)

Exemple

1° Fie funcția $u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$; $u(x,y) = \ln(x^2+y^3)$
Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul 1 ale funcției u și să se arate că aceasta verifică ecuația cu derivate parțiale de ordinul 1:

$$y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{5xy^2}{x^2+y^3} = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\left(u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}. \right)$$

$$\left(f(x) = \ln(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x) \right)$$

$$u(x,y) = \ln(x^2+y^3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^3) = \frac{2x}{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^3) = \frac{3y^2}{x^2+y^3}$$

$$y^2 \cdot \frac{2x}{x^2+y^3} + x \cdot \frac{3y^2}{x^2+y^3} - \frac{5xy^2}{x^2+y^3} = \frac{2xy^2+3xy^2-5xy^2}{x^2+y^3} = 0$$

2° Fie $u(x,y) = x^2 + \operatorname{arctg}(x^2+y^3)$; $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Același enunț ca la ex. 1, pentru ecuația:

$$3y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2x \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - 6xy^2 = 0.$$

$$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+u^2(x)} \cdot u'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \frac{1}{1+(x^2+y^3)^2} \cdot (2x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+(x^2+y^3)^2} \cdot (3y^2)$$. Ecuația devine:

$$3y^2\left(2x + \frac{2x}{1+(x^2+y^3)^2}\right) - 2x \cdot \frac{3y^2}{1+(x^2+y^3)^2} - 6xy^2 =$$

$$= \cancel{6xy^2} + \frac{\cancel{6xy^2 - 6xy^2}}{1+(x^2+y^3)^2} - \cancel{6xy^2} = 0$$

Temă – exercițiile postate pe Classroom

Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiabilitate

Fie funcția $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă în parte, în punctele interioare ale mulțimii X. Fie $f'_x(x,y)$ și $f'_y(x,y)$ derivatele parțiale de ordinul 1 ale lui f pe toată mulțimea X. Acestea la rândul lor pot fi derivabile parțial în raport cu fiecare dintre variabilele lor, x și y. Derivatele lor parțiale (ale lui $f'_x(x,y)$ și $f'_y(x,y)$) se numesc derivate parțiale de ordinul doi ale lui f și se notează astfel:

$$f'_x(x,y) \to \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}(f'_x) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) \to \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \\ \frac{\partial}{\partial y}(f'_y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = f''_{y^2} \end{cases}$$

Exercițiu: Să se scrie derivatele parțiale de ordinul 1 și de ordinul 2 ale unei funcții de 3 variabile

$f(x,y,z) \Rightarrow$ 3 d.p. de ord. 1 și 9 d.p. de ord. 2

Analog se pot defini derivate parțiale de ordin 3, 4, 5, ... n, ...

Derivatele parțiale f''_{xy} și f''_{yx} pentru o funcție de două variabile se numesc derivatele parțiale mixte, de ordinul 2 ale funcției f.

În general f''_{xy} și f''_{yx} nu sunt egale.

La fel, f'''_{x^2y}, f'''_{xyx} și f'''_{yx^2} (d.p. mixte, de ordinul 3) este f. în care derivata în raport cu x este făcută de 2 ori, dar în ordini diferite și în raport cu y numai o dată. In general, acestea nu sunt egale. Există criterii care dau condiții suficiente ca aceste derivate mixte să fie egale.

Criteriul lui Schwarz

Dacă funcția $f(x,y): X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale mixte de ordinul doi, f''_{xy} și f''_{yx}, într-o vecinătate V a unui punct interior $(a,b) \in \text{int} X$ și dacă f''_{xy} și f''_{yx} sunt continue în punctul (a,b), atunci ele sunt și egale în punctul (a,b) : $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$

Criteriul se poate extinde la toată mulțimea de definiție a funcției f și la orice ordin al derivatelor parțiale.

Diferențiabilitate

Definim conceptul pentru o funcție de două variabile și apoi îl generalizăm.

Definiție: Fie $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ și $(a,b) \in \text{int} X$. Spunem că funcția f este diferențiabilă în punctul (a,b) dacă există două numere $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și o funcție $\omega: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuă și nulă în (a,b), astfel încât:

$$f(x,y) - f(a,b) = \lambda(x-a) + \mu(y-b) + \omega(x,y)\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

Se demonstrează că dacă f este diferențiabilă în (a,b), atunci f are derivate parțiale de ordinul 1 în (a,b) și $\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$; $\mu = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Dacă (x,y) este suficient de apropiat de (a,b)

$$\Rightarrow f(x,y) - f(a,b) \simeq (x-a)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Funcția liniară de două variabile:

$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$ se numește diferențiala lui f în punctul (a,b) și se notează prin $df(a,b)(x,y) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$

Se exprimă relația dintre creșterea funcției, $f(x,y) - f(a,b)$ și creșterile argumentelor $(x-a)$, și $(y-b)$ când argumentul lui f, (x,y), variază din punctul (a,b) până în punctul (x,y).

Dacă f'_x și f'_y există și sunt continue pe toată mulțimea X, atunci diferențiala lui f (de ordinul 1) se va scrie astfel:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$$

La funcțiile de o singură variabilă avem relația:

$$df(x) = f'(x)\cdot dx \iff f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$df(x)$ = produsul dintre derivata funcției și diferențiala argumentului.

Dacă $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = funcție de n variabile,
atunci: $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n$

Expresia notată astfel: $d = \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2$ se numește operatorul de diferențiere de ordinul 1. Aplicat funcției f, va da diferențiala de ordinul 1 a lui f:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)(f) \iff df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$$

Dacă f este o funcție de n variabile, atunci:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

Exemplu. Fie $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Funcția f este derivabilă parțial în orice punct din $R^3 \setminus (0,0,0)$ și derivatele parțiale de ordinul 1 sunt: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Diferențiala lui f într-un punct $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, este: $df(x,y,z) = \frac{x\cdot dx + y\cdot dy + z\cdot dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Vom continua cu derivate parțiale și diferențiale de ordin superior.

Probleme cu derivate partiale

1) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2\setminus(0,0)\to\mathbb{R},\ u(x,y)=\ln\left(x^2+y^3\right)$. Să se calculeze derivatele parţiale de
ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I: $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{5xy^2}{x^2+y^3}=0,\quad \forall(x,y)\in R^2\setminus(0,0)$

2) Fie funcţia $u:R^2\to R,\ u(x,y)=-y^2+e^{x^3-y^2}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I :

$$2y\frac{\partial u}{\partial x}+3x^2\frac{\partial u}{\partial y}+6x^2y=0,\quad \forall(x,y)\in R^2.$$

3) Fie funcţia $u:R^2\to R,\ u(x,y)=e^{x^2+y^3}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I :

$$3y^2\frac{\partial u}{\partial x}-(2x+y)\frac{\partial u}{\partial y}+3y^3\cdot u(x,y)=0.$$

4) Fie funcţia $u:R^2\to R,\ u(x,y)=e^{3x+2y}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I :

$$\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}+3u=0$$

Să se arate că funcţia $u=u(x,y)$ verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial u}{\partial y}-u=0,\quad \forall(x,y)\in R^2.$$

5) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2\setminus(0,0)\to\mathbb{R},\ u(x,y)=\ln\left(x^3+y^2\right)$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I : $(2y+1)\dfrac{\partial u}{\partial x}-3x^2\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{3x^2}{x^3+y^2}=0$.

6) Să se arate că funcţia funcţia $u:\mathbb{R}^2\setminus(0,0)\to\mathbb{R},\ u(x,y)=\ln\left(x^3+y^3\right)$ verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 1 :

$$2y^2\frac{\partial u}{\partial x}-x^2\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{3x^2y^2}{x^3+y^3}=0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y)\neq(0,0).$$

7) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ u(x,y)=e^{ax+by}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul II ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-(a-b)^2\cdot u(x,y)=0,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

8) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y)=x^2+\sin\left(x^2+y^4\right)$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I : $2y^3\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}-4xy^3=0$.

9) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y)=x^2+arctg\left(x^2+y^3\right)$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I : $3y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-2x\dfrac{\partial u}{\partial y}-6xy^2=0$.

10) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y)=\dfrac{y^2}{1+x^2}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I :

$$\left(1+x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+(xy+1)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2y}{1+x^2}=0.$$

11) Fie funcţia $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u(x,y)=x^2+e^{x^2-y^3}$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei u şi să se arate că acestea verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul I :

$$3y^2\frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial y}-6x^2y=0,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

12) Sa se arate ca derivatele partiale de ordinul I ale functiei $w(x,y,z)=\ln\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ verifica ecuatia:

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z},\quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3_*.$$

13) Sa se arate ca derivatele partiale de ordinul I ale functiei $w(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ verifica ecuatia : $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=2w(x,y), x\neq 0$.

14) Sa se arate ca derivatele partiale de ordinul I ale functiei $w(x,y)=e^{\frac{y}{x}}\left(x^2-y^2\right)$ verifica ecuatia : $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=2w(x,y), x\neq 0$.