Aplicații recapitulative pentru lucrarea de control

05.12.2021

Anii ID; 14-16 - LC

(1°) Să se construiască ecuația diferențială liniară și omogenă care are soluțiile particulare indicate:

$y_1 = x;\ y_2 = x^2$.

→ mulțimea soluțiilor unei ec. dif. liniare și omogene de ordinul n, are o structură de spațiu vectorial de dimensiune n, egală cu ordinul ecuației.

→ O bază a acestui spațiu este formată din n funcții liniar independente, fiecare funcție fiind soluție a ecuației.

$$\Longleftrightarrow W(y_1, y_2, \dots, y_n) \overset{def}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

(wronskianul celor n soluții)

$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, $(c_i)_{i=\overline{1,n}}$ = constante arbitrare, este soluția generală a ecuației dif de ordinul n

→ pentru a forma ecuația dif de ordinul n care are această bază a spațiului soluțiilor se pune ~~condiția~~ condiția ca n+1 funcții = $\{y\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ să fie liniar dependente

$$\Longleftrightarrow W(y, y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv 0; \quad \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Exemplu

$B = \{x, x^2\}$; $x \in \mathbb{R}^*$ $(x \neq 0)$

$W(x, x^2) \neq 0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$$ sunt independente pe $\mathbb{R}^*$.

– determinarea ecuației cerute

$W(y, x, x^2) \equiv 0$ pe $\mathbb{R}^*$; y = necunoscuta ecuației diferențiale.

$w(y, x, x^2) = \begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix} \equiv 0$. Dezvoltăm det. după coloana 1:

$y''\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} + y'\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + y\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$y''(2x^2 - x^2) - y'(2x - 0) + y(2-0) = 0$

$\boxed{x^2\cdot y'' - 2x\cdot y' + 2y = 0}$ $B = \{y_1 = x; y_2 = x^2\}$.

Sol. gen. a ecuației va fi: $y = C_1\cdot x + C_2\cdot x^2$

(2°) Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul n, liniară și omogene, cu coeficienți constanți:

$a_0\cdot y^{(n)} + a_1\cdot y^{(n-1)} + a_2\cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\cdot y' + a_n\cdot y = 0$

Euler: căutăm soluții de forma: $y = e^{rx}$

$y' = r\cdot e^{rx}$; $y'' = r^2\cdot e^{rx}$ ... ; $y^{(n)} = r^n\cdot e^{rx}$

$e^{rx}\cdot(a_0\cdot r^n + a_1\cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1}\cdot r + a_n) = 0$. $/ e^{rx} \neq 0$

$a_0\cdot r^n + a_1\cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1}\cdot r + a_n = 0$ = ecuația caracteristică asociată ecuației diferențiale = ecuație polinomială de gradul n.

Cazul 1: $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_n$; $r_i \in \mathbb{R}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$

Fiecărei răd. a ec. caracteristice îi corespunde o sol. a ec. dif. în sistemul fundamental.

$y_1 = e^{r_1 x}$; $y_2 = e^{r_2 x}$, ..., $y_n = e^{r_n\cdot x}$. Acestea formează baza spațiului soluțiilor. => Sol. gen. a ec. va fi $y = C_1\cdot e^{r_1 x} + C_2\cdot e^{r_2 x} + \dots + C_n\cdot e^{r_n x}$

Cazul 2. Fie că răd. $r_0 \in \mathbb{R}$, și multiplă de ordinul p. Lui r_0 îi vor corespunde p soluții ale ec. dif. în sistemul fundamental de sol.:

$y_1 = e^{r_0 x}$; $y_2 = x\cdot e^{r_0 x}$; $y_3 = x^2\cdot e^{r_0 x}$ ... ; $y_p = x^{p-1}\cdot e^{r_0 x}$.

Și fiecare rădăcină multiplă a ec. caract. se procedează analog

cazul 3: ec. caracteristică are răd. complex conjugate simple.

$r_1 = \alpha + i\beta$; $r_2 = \alpha - i\beta$ → lor le corespund soluțiile: $y_1 = e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x$; $y_2 = e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$

cazul 4: ec. caract. are răd. complex conj. multiple de ord. p:

$r_1 = \alpha + i\beta$ și $r_2 = \alpha - i\beta$ → răd. de ord. p.

Lor le vor corespunde soluțiile ec. dif.:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, & y_2 = x\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x \;\dots\; y = x^{p-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x \\ \bar{y}_1 = e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x; & \bar{y}_2 = x\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x \;\dots;\; \bar{y}_p = x^{p-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x \end{cases}$$

Exemple:

Să se rez. ec. dif.:

1° $y'' + 5y' + 4y = 0$; $y = e^{rx} \Rightarrow r^2 + 5r + 4 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$; $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$r^2 + 5r + 4$: $\Delta = 25 - 16 = 9$; $r_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow y_1 = e^{-x}$; $y_2 = e^{-4x}$ = sistemul fundamental de soluții

$\Rightarrow y = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot e^{-4x}$

Soluția unei probleme Cauchy:

c.i: $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\quad y'(x) = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 1 \rightarrow C_1 = 1 - C_2 \\ y'(0) &= -C_1 - 4C_2 = 1 \\ (+)\; / \; & -3C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = -\tfrac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3},\quad C_2 = -\tfrac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{3}\cdot e^{-x} - \frac{2}{3}\cdot e^{-4x}}$$

2° $y'' + 6y' + 9y = 0$

$y = e^{rx} \Rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0$; $\Delta = 36 - 36 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-6}{2} = -3$; $r_1 = r_2 = -3$

$\Rightarrow y_1 = e^{-3x}$; $y_2 = x\cdot e^{-3x} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2\cdot x\cdot e^{-3x}}$

(3) $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y = e^{rx} \to r^2 + 2r + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$; $r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$\alpha = -1$; $\beta = 1$

$\Rightarrow y_1 = e^{-x} \cdot \cos x$; $y_2 = e^{-x} \cdot \sin x$ $\to$ sist. fundamental de sol.

$\Rightarrow y_0 = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 \cdot e^{-x} \sin x$

Riccati

$y' + \frac{1}{x^3-1} \cdot y^2 - \frac{x^2}{x^3-1} \cdot y - \frac{2x}{x^3-1} = 0$ $\quad y_1 = -x^2$

$-2x + \frac{x^4}{x^3-1} - \frac{x^2}{x^3-1} \cdot (-x^2) - \frac{2x}{x^3-1} =$

$\frac{2x^4}{x^3-1} - 2x\left(1 + \frac{1}{x^3-1}\right) = \frac{2x^4}{x^3-1} - 2x \cdot \frac{x^3}{x^3-1} = 0$ ✓

Se face schimbarea de funcție necunoscută

$y = y_1 - \frac{1}{z}$; $y = -x^2 - \frac{1}{z}$; $y' = -2x + \frac{z'}{z^2}$

$y^2 = \left(x^4 + \frac{2x^2}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$

$-2x + \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^3-1}\left(x^4 + \frac{2x^2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{x^2}{x^3-1} \cdot \left(-x^2 - \frac{1}{z}\right) - \frac{2x}{x^3-1} = 0$

$\underbrace{-2x + \frac{x^4}{x^3-1} - \frac{x^2}{x^3-1} \cdot (-x^2) - \frac{2x}{x^3-1}}_{=0} + \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x^3-1} \cdot \frac{2x^2}{z} + \frac{1}{x^3-1} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{x^2}{x^3-1} \cdot \frac{1}{z} = 0 \quad / \cdot z^2$

$z' + z\left(\frac{2x^2}{x^3-1} + \frac{x^2}{x^3-1}\right) + \frac{1}{x^3-1} = 0 \iff$

$$\boxed{z' + z \cdot \frac{3x^2}{x^3-1} = -\frac{1}{x^3-1}}$$ $\to$ ec. liniară și neomogenă în f. nec. z.

$z = z_0 + z_p$

Ec. omogenă atașată: $z' + z \cdot \frac{3x^2}{x^3-1} = 0$ $\to$ ec. cu variabile separabile:

$\frac{z'}{z} = -\frac{3x^2}{x^3-1}$; $\int \frac{z'}{z} dx = -\int \frac{3x^2}{x^3-1} \cdot dx$

$\ln z = -\ln(x^3-1) + \ln C \Rightarrow \boxed{z_0 = \frac{C}{x^3-1}}$

Pt aflt unei soluții particulare a ec. neomogene se aplică metoda variației constantelor:

- se pp că $C = C(x)$
- se pune cond. ca $z_0 = \frac{C(x)}{x^3-1}$ să verifice ecuația neomogenă

$$z_0' = \frac{C'(x)(x^3-1) - C(x)\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{C'(x)}{x^3-1} - C(x)\cdot\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}$$

Înlocuim în ec. neomogenă:

$$\frac{C'(x)}{x^3-1} - \cancel{C(x)\cdot\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}} + \cancel{\frac{3x^2}{x^3-1}\cdot\underbrace{\frac{C(x)}{x^3-1}}_{z(x)}} = -\frac{1}{x^3-1}$$

$$\frac{C'(x)}{x^3-1} = -\frac{1}{x^3-1} \Rightarrow C'(x) = -1 \Rightarrow \boxed{C(x) = x + K}$$

$$\Rightarrow z = \frac{C(x)}{x^3-1} = \frac{x+K}{x^3-1} = \boxed{\frac{K}{x^3-1} + \frac{x}{x^3-1} = z(x)}$$

Revenim la substituția inițială:

$$y = -x^2 - \frac{1}{z} \quad ; \quad z(x) = \frac{K+x}{x^3-1} ; \boxed{\frac{1}{z} = \frac{x^3-1}{K+x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -x^2 - \frac{x^3-1}{K+x}}$$

Bernoulli

$x y' + y = -x^2 y^2$ $\qquad y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^\alpha \Big/ : y^\alpha \quad \alpha \notin \{0,1\}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^\alpha} + P(x)\cdot\frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x)$$

; se face schimbarea de funcție:

$z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$; $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$

$$\boxed{\frac{z'}{1-\alpha} = \frac{y'}{y^\alpha}}$$

Ecuația devine:

$$\boxed{\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)\cdot z = Q(x)}$$

$\Rightarrow$ ec. liniară, de ord. 1, neomogenă ; $z = z(x)$ f. nec.

$$\boxed{\left(\frac{1}{y(x)}\right)' = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}}$$

$xy' + y = -x^2y^2 \,/\, :y^2$ Obs. că $y=0$ este soluție. Vom verifica dacă este particulară sau singulară.

$x\cdot\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = -x^2$; $\boxed{z = \frac{1}{y}} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$; $\frac{y'}{y^2} = -z'$

$-x\cdot z' + z = -x^2$; $\boxed{xz' - z = x^2}$ → ec. lin. și neomogenă de ord. 1.

$z = z_0 + z_p$ → sol. partic. a ec. neomogene

z_0 → sol. gen. a ec. omogene asociate

a) Ec. omogenă: $xz' - z = 0$; $xz' = z$; $z' = \frac{dz}{dx}$

$x\cdot\frac{dz}{dx} = z$; $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ $\left(\frac{z'}{z} = \frac{1}{x}\right)$

$\ln z = \ln x + \ln C$; $\boxed{z = C\cdot x}$ → sol. gen. a ec. omogene.

b) pt. z_p: Met. var. constantelor: $C = C(x)$ → punem cond. să verif. ec. neomogenă

$\Rightarrow z(x) = x\cdot C(x)$ → Înloc. în ec. neomogenă:

$z' = 1\cdot C(x) + x\cdot C'(x)$

$x\cdot(C(x) + x\cdot C'(x)) - x\cdot C(x) = x^2$

$\cancel{x\cdot C(x)} + x^2\cdot C'(x) - \cancel{x\cdot C(x)} = x^2$

$x^2\cdot C'(x) = x^2 \Rightarrow C'(x) = 1 \Rightarrow \boxed{C(x) = x + K}$

$\Rightarrow z(x) = (x+K)\cdot x$; $\boxed{z(x) = x^2 + K\cdot x}$ — sol. gen. a ec. lin. și neomogene în noua funcție z.

Dar $z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$

$$\boxed{y = \frac{1}{x(x+K)}}$$