Automate finite nedeterministe (continuare)

3. Echivalența dintre gramaticile regulate și automatele finite nedeterministe

Există o legătură între automatele finite și gramatici? Un răspuns la această întrebare formează conținutul următoarei teoreme.

Teorema 3.1. Pentru orice gramatică regulată $\boldsymbol{G}$ se poate construi un automat finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$, care să accepte limbajul generat de gramatica $\boldsymbol{G}$, adică $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A_N})$. În acest caz, se spune că gramatica regulată $\boldsymbol{G}$ este echivalentă cu automatul finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$.

Demonstrație. Fie $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ o gramatică regulată şi X un simbol nou, adică $X \notin \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{T}$. Se construieşte automatul finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N} = \left(\boldsymbol{\Sigma_N}, \boldsymbol{Q_N}, \boldsymbol{\delta_N}, \{\boldsymbol{q_0^N}\}, \boldsymbol{F_N}\right)$, echivalent cu $\boldsymbol{G}$, unde:

- $\boldsymbol{\Sigma_N} = \boldsymbol{T}$;
- $\boldsymbol{Q_N} = \boldsymbol{N} \cup \{\boldsymbol{X}\}$;
- $\boldsymbol{q_0^N} = \boldsymbol{S}$;
- $\boldsymbol{F_N} = \{\boldsymbol{X}\}$
- funcția de tranziție $\boldsymbol{\delta_N}$ se definește pentru orice $B \in \boldsymbol{N}$ și orice $a \in \boldsymbol{\Sigma_N}$ astfel:
  - $\boldsymbol{\delta_N}(\{B\}, a) = \{C \in \boldsymbol{N} \mid B \to aC \in \boldsymbol{P}\} \cup \{X \mid B \to a \in \boldsymbol{P}\}$;
  - $\boldsymbol{\delta_N}(\{X\}, a) = \emptyset, \forall a \in \boldsymbol{\Sigma_N}$.

Se poate demonstra că $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A_N})$, adică gramatica $\boldsymbol{G}$ este echivalentă cu automatul $\boldsymbol{A_N}$.

Consecința 3.1. Pentru orice gramatică regulată $\boldsymbol{G}$ se poate construi un automat finit determinist $\boldsymbol{A_D}$ echivalent cu gramatica regulată $\boldsymbol{G}$, adică $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A_D})$.

Demonstrația rezultă în baza teoremei 3.1. și a teoremei 2.1. Astfel, în baza teoremei 3.1 există un automat finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$ echivalent cu gramatica regulată $\boldsymbol{G}$, iar în baza teoremei 2.1 există un automat finit determinist $\boldsymbol{A_D}$ echivalent cu automatul finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$, astfel încât:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A_D}).$$

Exemplul 3.1. Se consideră gramatica regulată $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$, unde:

- $\boldsymbol{N} = \{S, A, B\}$,

- $\boldsymbol{T} = \{a, b, c\}$,
- mulțimea producțiilor $\boldsymbol{P}$ conține următoarele producții/reguli:

$$S \rightarrow aA \mid bB \mid b \quad (1)$$
$$A \rightarrow aA \mid bB \mid b \quad (2)$$
$$B \rightarrow cB \mid c \quad (3)$$

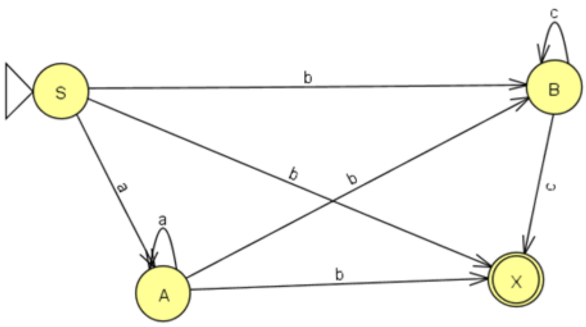
Conform demonstrației teoremei, automatul finit nedeterminist

$\boldsymbol{A_N} = (\boldsymbol{\Sigma_N}, \boldsymbol{Q_N}, \boldsymbol{\delta_N}, \{\boldsymbol{q_0^N}\}, \boldsymbol{F_N})$, echivalent cu $\boldsymbol{G}$, este definit astfel:

- $\boldsymbol{\Sigma_N} = \{a, b, c\} = \boldsymbol{T}$;
- $\boldsymbol{Q_N} = \{S, A, B, X\}$, unde $X \notin \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{T}$;
- $\boldsymbol{q_0^N} = S$;
- $\boldsymbol{F_N} = \{X\}$;
- funcția de tranziție $\boldsymbol{\delta_N}$ se definește în următorul tabel:

	$\boldsymbol{\delta_N}$	**a**	**b**	**c**
$\rightarrow$	$\{\boldsymbol{S}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$
	$\{\boldsymbol{A}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$
	$\{\boldsymbol{B}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{B, X\}$
$*$	$\{\boldsymbol{X}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

În baza celor de mai sus, reprezentarea grafică a automatului finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$ este:



Din reprezentarea grafică rezultă că limbajul acceptat de automatul finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$ este $\mathcal{T}(\boldsymbol{A_N}) = \{a^m b c^n \mid m, n \geq 0\}$.

Folosind consecința 3.1. se poate construi automatul finit determinist $\boldsymbol{A_D}$ echivalent cu gramatica regulată $\boldsymbol{G}$.

Astfel, plecând de la automatul finit nedeterminist $\boldsymbol{A_N}$ se construiește

$\boldsymbol{A_D} = (\boldsymbol{\Sigma_D}, \boldsymbol{Q_D}, \boldsymbol{\delta_D}, \boldsymbol{q_0^D}, \boldsymbol{F_N})$, astfel:

- $\boldsymbol{\Sigma_D} = \boldsymbol{\Sigma_N} = \{a, b, c\}$;
- $\boldsymbol{Q_D} = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{Q_N})$
- $\boldsymbol{q_0^D} = \{\boldsymbol{q_0^N}\}$;
- $\boldsymbol{F_D} = \{q \in \boldsymbol{Q_D} | q \cap \boldsymbol{F_N} \neq \emptyset\} =$

  $= \{\{X\}, \{X, S\}, \{X, A\}, \{X, B\}, \{X, A, B\}, \{X, A, S\}, \{X, B, S\}, \{X, A, B, S\}\}$;
- $\boldsymbol{\delta_D} : \boldsymbol{Q_D} \times \boldsymbol{\Sigma_D} \rightarrow \boldsymbol{Q_D}$, unde pentru α ∈ $\boldsymbol{Q_D}$ și $a \in \boldsymbol{\Sigma_D}$ are loc:

$$\boldsymbol{\delta_D}(\alpha, a) = \bigcup_{q \in \alpha} \boldsymbol{\delta_N}(q, a)$$

obținându-se următorul tabel:

	$\boldsymbol{\delta_D}$	***a***	***b***	***c***	**Etichetele noilor stări accesibile**
	$\boldsymbol{\emptyset}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
→	$\{\boldsymbol{S}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$	q_0
	$\{\boldsymbol{A}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$	q_1
	$\{\boldsymbol{B}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{X}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$	
	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{X}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$	
	$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\emptyset$	
*	$\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{B, X\}$	q_2
	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\{B, X\}$	
*	$\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X}\}$	$\{A\}$	$\{B, X\}$	$\{B, X\}$	

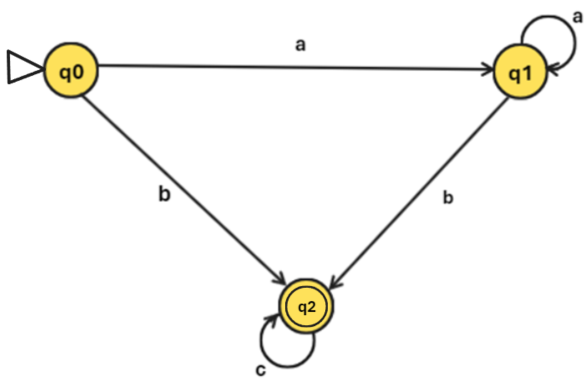
Etichetele q_0, q_1, q_2 se referă la elementele din coloana $\boldsymbol{\delta_D}$ şi permit, mai întâi, redenumirea stărilor accesibile ale automatului $\boldsymbol{A_D}$ şi apoi a întregului automat $\boldsymbol{A_D}$, astfel:

- $\boldsymbol{\Sigma_D} = \{a, b, c\}$;
- $\boldsymbol{Q_D} = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $\boldsymbol{F_D} = \{q_2\}$;

- funcția de tranziție $\boldsymbol{\delta_D}$ este definită în următorul tabel:

	$\boldsymbol{\delta_D}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\rightarrow$	$\boldsymbol{q_0}$	q_1	q_2	$\emptyset$
	$\boldsymbol{q_1}$	q_1	q_2	$\emptyset$
*	$\boldsymbol{q_2}$	$\emptyset$	$\emptyset$	q_2

În baza celor de mai sus, reprezentarea grafică a automatului finit determinist A_D este:



Se poate verifica că $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A_D}) = \{a^m bc^n |\, m, n \geq 0\}$. De exemplu:

$\boldsymbol{\delta_D}(q_0, \boldsymbol{abc}) = \boldsymbol{\delta_D}(\boldsymbol{\delta_D}(q_0, a), bc) = \boldsymbol{\delta_D}(q_1, \boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{\delta_D}(\boldsymbol{\delta_D}(q_1, b), c) = \boldsymbol{\delta_D}(q_2, c) =$

$=q_2 \in \boldsymbol{F_D}$ și deci *abc* $\in \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A_D})$.

Deoarece $\boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A_D}) = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$, gramatica regulată $\boldsymbol{G}$ este echivalentă cu automatul finit determinist $\boldsymbol{A_D}$.

La întrebarea de mai sus, dacă există o legătură între automatele finite și gramatici, un alt răspuns este dat de următoarea teoremă.

Teorema 3.2. Fie $\boldsymbol{A_D} = (\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{F})$ un automat finit determinist. Atunci există o gramatică regulată cu $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{\mathcal{T}}(\boldsymbol{A})$.

Demonstrație. Plecând de la automatul $\boldsymbol{A_D}$ construim gramatica regulată

$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$, astfel:

- $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Q}$;
- $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\Sigma}$;
- $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{q_0}$;
- $\boldsymbol{P} = \{A \rightarrow aB |\, \boldsymbol{\delta}(A, a) = B\} \cup \{A \rightarrow a |\, \boldsymbol{\delta}(A, a) \in \boldsymbol{F}\}$.

Lect. univ. dr. TATIANA-CORINA DOSESCU
Facultatea de Informatică
Universitatea Titu Maiorescu

Exemplul 3.2. Fie automatul finit determinist $\boldsymbol{A_D} = (\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{F})$, unde reprezentarea analitică a automatului ***A*** este:

- ***Σ*** = $\{0,1\}$;
- ***Q*** = $\{q_0, q_1, q_2\}$;
- ***F*** = $\{q_2\}$;
- funcția de tranziție ***δ*** este definită în următorul tabel:

	$\boldsymbol{\delta}$	**0**	**1**
→	$\boldsymbol{q_0}$	q_1	q_0
	$\boldsymbol{q_1}$	q_1	q_2
*	$\boldsymbol{q_2}$	q_2	q_2

Se construiește gramatica regulată $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ echivalentă cu automatul finit determinist $\boldsymbol{A_D}$.

Mai întâi, plecând de la tabelul funcției de tranziție, construim în baza demonstrației teoremei 3.2., mulțimea producțiilor ***P*** ce va conține următoarele producții/reguli:

- deoarece $\boldsymbol{\delta}(q_0, 0) = q_1$ se obține producția $q_0 \to 0q_1$, iar din $\boldsymbol{\delta}(q_0, 1) = q_0$ se obține producția $q_0 \to 1q_0$;

- deoarece $\boldsymbol{\delta}(q_1, 0) = q_1$ se obține producția $q_1 \to 0q_1$, din $\boldsymbol{\delta}(q_1, 1) = q_2$ se obține producția $q_1 \to 1q_2$ şi deoarece $\boldsymbol{\delta}(q_1, 1) = q_2 \in \boldsymbol{F}$ se obține și producția $q_1 \to 1$;

- deoarece $\boldsymbol{\delta}(q_2, 0) = q_2$ se obține producția $q_2 \to 0q_2$ și deoarece $\boldsymbol{\delta}(q_2, 0) = q_2 \in \boldsymbol{F}$ se obține și producția $q_2 \to 0$, din $\boldsymbol{\delta}(q_2, 1) = q_2$ se obține producția $q_2 \to 1q_2$ şi deoarece $\boldsymbol{\delta}(q_2, 1) = q_2 \in \boldsymbol{F}$ se obține și producția $q_2 \to 1$.

În concluzie, elementele gramaticii regulate ***G*** sunt:

- $\boldsymbol{N} = \{q_0, q_1, q_2\}$,
- ***T*** = $\{0,1\}$,
- ***S*** = q_0
- mulțimea producțiilor ***P*** conține următoarele producții/ reguli:

$$S \to 0q_1 |\ 1S \qquad (1)$$
$$q_1 \to 0q_1 |\ 1q_2 |\ 1 \qquad (2)$$
$$q_2 \to 0q_2 |\ 1q_2 |\ 0 |\ 1 \qquad (3)$$