05.01.2023

Aplicații la rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare și omogene, cu coeficienți constanți

An 2 ZI (2022–2023)

Fie sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 4z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

y, z = funcții necunoscute; x = variabila independentă

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}; \quad \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix}$$ vom căuta soluții de forma

$$Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx}; \quad Y = \begin{pmatrix} A_1 \cdot e^{rx} \\ A_2 \cdot e^{rx} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot r \cdot e^{rx} \\ A_2 \cdot r \cdot e^{rx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} \cdot e^{rx}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \; \Big/ : e^{rx} \iff$$

$$\begin{pmatrix} A_1 r \\ A_2 r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_1 r = A_1 + 4A_2 \\ A_2 r = A_1 + A_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} A_1(1-r) + 4A_2 = 0 \\ A_1 + (1-r)A_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistem omogen de 2 ec. cu 2 necunoscute (A_1 și A_2); sistemul admite întotdeauna soluția banală: $A_1, A_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ soluția a sist. de ec. dif. Un astfel de sistem admite și soluții nenule $\iff \det S = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{pmatrix} = 0 \iff \det(A - rI_2) = 0$$

$\iff$ polinomul caracteristic al matricei coeficienților sistemului trebuie să fie nul.

- 2 -

$\det(A - r I_2) = 0 \iff$ polinomul caracteristic al matricei A, a coeficienților sistemului este identic nul. $\Rightarrow r_1$ și r_2, rădăcinile polinomului caracteristic sunt tocmai valorile proprii ale matricei A.

$\begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \iff (1-r)^2 - 4 = 0 ; (1-r-2)(1-r+2) = 0$

$(-r-1)(3-r) = 0 \iff \boxed{r_1 = -1 \text{ și } r_2 = 3}$

Pentru fiecare valoare proprie a sistemului se determină vectorii proprii corespunzători:

Pt: $r = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2A_1 + 4A_2 = 0 \,/ :2 \\ A_1 + 2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 + 2A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -2A_2$

$Y_1 = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} -2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \cdot A_2$

Pt $r = 3 \Rightarrow \begin{cases} -2A_1 + 4A_2 = 0 \,/ :(-2) \\ A_1 - 2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 - 2A_2 = 0 ; A_1 = 2A_2$

$Y_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} \cdot A_2$

$\Rightarrow \begin{cases} Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \\ Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} \end{cases}$

$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = (Y_1, Y_2) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot Y_1 + c_2 \cdot Y_2$

$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} & 2e^{3x} \\ e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \cdot c_1 + 2e^{3x} \cdot c_2 \\ c_1 e^{-x} + e^{3x} \cdot c_2 \end{pmatrix}$

În continuare vom prezenta o metodă a cărei esență mai simplă de determinare a coordonatelor vectorilor proprii care corespund fiecărei valori proprii a matricei coeficienților sistemului:

Se demonstrează că A_1 și A_2 (coordonatele vectorilor proprii pentru fiecare valoare proprie) sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie ale matricei $A - r I_2$. (în cazul general ale matricei $A - r I_n$)

$$A - r I_2 = \begin{pmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (1-r) = 1-r$$
$$\Gamma_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1.$$

	$\Gamma_{11}(r)$	$\Gamma_{12}(r)$
	compl. alg. al lui $a_{11}-r$	compl. alg. al lui a_{12}
	$1-r$	-1
$r_1 = -1$	$A_1 = 2$	$A_2 = -1$
$r_2 = 3$	$A_1 = -2$	$A_2 = -1$

$r_1 = -1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$r_2 = 3 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$Y_1 = V_1 \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}; \quad Y_2 = V_2 \cdot e^{3x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$$

soluția sistemului:

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 \cdot e^{-x} - 2C_2 \cdot e^{3x} \\ -C_1 \cdot e^{-x} - C_2 \cdot e^{3x} \end{pmatrix}$$

Obs Dacă y și z sunt soluții ale sistemului inițial, atunci și $-y$ și $-z$ sunt, de asemenea soluții ale acelui și sistem. (semnul „-" poate fi considerat înglobat în constantele de integrale)

2°) Să se determine soluția generală a sistemului liniar, omogen, de 3 ecuații cu 3 necunoscute și coeficienți constanți:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 8y + 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x + 14y - 6z \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 14 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

→ Se caută soluții de forma: $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot e^{rt}$

Se va obține: $(A - rI_3) \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = sistem omogen, de 3 ecuații cu 3 necunoscute $\Leftrightarrow A_1, A_2, A_3$.
Acesta admite și soluții nenule $\Leftrightarrow$ $\det(A - rI_3) = 0 \Leftrightarrow \varphi_A(r) = 0$ = polinomul caracteristic al matricei A → $r_1, r_2, \dots, r_n$ sunt valorile proprii ale matricei A.

$$\det(A - rI_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -8 & 4 \\ -1 & 5-r & -2 \\ -3 & 14 & -6-r \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - rI_3) = (r+1)(r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 2 \end{cases}$$

⇒ val proprii sunt reale și distincte.

⇒ coordonatele vectorilor proprii corespunzători fiecărei valori proprii sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $(A - rI_3)$

$$\frac{A_1}{\Gamma_{11}(r)} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}(r)} = \frac{A_3}{\Gamma_{13}(r)}$$

$$\Gamma_{11}(r) = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5-r & -2 \\ 14 & -6-r\end{vmatrix} = (r-5)(r+6)+28 = r^2+r-2$$

$$\Gamma_{12}(r) = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6-r\end{vmatrix} = (-1)(r+6-6) = -r$$

$$\Gamma_{13}(r) = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5-r \\ -3 & 14\end{vmatrix} = -14+15-3r = 1-3r$$

	$\Gamma_{11}(r)$ compl. algebric al lui $3-r$	$\Gamma_{12}(r)$ compl. alg. al lui -8	$\Gamma_{13}(r)$ compl. alg. al lui 4	
valoarea proprie	r^2+r-2	$-r$	$1-3r$	
$r_1=-1$	-2	1	4	$\leftarrow V_1$
$r_2=1$	0	-1	-2	$\leftarrow V_2$
$r_3=2$	4	-2	-5	$\leftarrow V_3$

$$Y_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}\cdot e^{-t} = \begin{pmatrix}-2e^{-t}\\e^{-t}\\4e^{-t}\end{pmatrix};\quad Y_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot e^{t} = \begin{pmatrix}0\\-e^{t}\\-2e^{t}\end{pmatrix}$$

$$Y_3 = V_3\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-5\end{pmatrix}\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix}4e^{2t}\\-2e^{2t}\\-5e^{2t}\end{pmatrix};\quad W = (Y_1, Y_2, Y_3) =$$

= matricea fundamentală de soluții. → sol. gen. a sistemului

$$Y = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = W\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = (Y_1, Y_2, Y_3)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1\cdot Y_1 + c_2\cdot Y_2 + c_3\cdot Y_3$$

$$Y = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2e^{-t} & 0 & 4e^{2t}\\ e^{-t} & -e^{t} & -2e^{2t}\\ 4e^{-t} & -2e^{t} & -5e^{2t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2c_1e^{-t} & & +4c_3e^{2t}\\ c_1e^{-t} & -c_2e^{t} & -2c_3e^{2t}\\ 4c_1e^{-t} & -2c_2e^{t} & -5c_3e^{2t}\end{pmatrix}$$

cazul valorilor proprii multiple și complex conjugate — data viitoare