07.10.2022.

Metode de calcul a primitivelor
Integrarea prin părți clasa a-XII-a

Teoremă Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$, I interval funcții derivabile și cu derivatele continue. Atunci funcțiile $f'\cdot g$ și $f\cdot g'$ admit primitive pe I și între ele există relația:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Dem. f, g sunt derivabile $\Rightarrow$ f și g sunt și continue pe I $\Rightarrow$ $f'\cdot g$ și $f\cdot g'$ sunt continue $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $f'\cdot g$ și $f\cdot g'$ admit primitive pe I

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \Rightarrow f\cdot g' = (f\cdot g)' - f'\cdot g \Rightarrow$$

$$\int f\cdot g'\,dx = \int (f\cdot g)'\,dx - \int f'\cdot g\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Obs. ① Formula se va aplica atunci când expresia de sub integrala de calculat nu se află în tabelul primitivelor imediate și expresia de sub integrală se poate scrie sub forma $f\cdot g'$
② Uneori este necesar să se aplice formula în mod succesiv (de mai multe ori).

Exemple
① $I = \int x\cdot \ln x\,dx$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

(2) $I = \int x^3 \cdot \ln^2 x \, dx$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^3 \Rightarrow g(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - \int 2 \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx$$

$$I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} \underbrace{\int x^3 \cdot \ln x \cdot dx}_{J}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^3 \Rightarrow g(x) = \frac{x^4}{4} \end{array}\right| \Rightarrow J = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32} + C.$$

(3) $I = \int \frac{x \cdot \ln x}{(1+x^2)^2} \cdot dx$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{(1+x^2)^2}$$

$$x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x \cdot dx = dt$$

$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx}$ = diferențiala unei funcții

$$I_t = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow I_x = \boxed{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = g(x)}$$

$$\Rightarrow I = (\ln x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$$

Se va continua la primitivele funcțiilor raționale.

(4) $I = \int (x^3+5x^2-2)\cdot e^x \, dx$

$\begin{cases} f(x) = x^3+5x^2-2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2+10x \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x \end{cases}$

$I = e^x(x^3+5x^2-2) - \underbrace{\int (3x^2+10x)\cdot e^x \, dx}_{I_1}$

$I_1 = \int (3x^2+10x)\cdot e^x \, dx$

$\begin{cases} f(x) = 3x^2+10x \Rightarrow f'(x) = 6x+10 \\ g'(x) = e^x \end{cases}$ $\Rightarrow I_1 = e^x(3x^2+10x) - \underbrace{\int (6x+10)\cdot e^x \, dx}_{I_2}$

$I_2 = \int (6x+10)e^x \, dx$

$\begin{cases} f(x) = 6x+10 \Rightarrow f'(x) = 6 \\ g'(x) = e^x ; \; g(x) = e^x \end{cases}$ $I_2 = (6x+10)e^x - \int 6\cdot e^x \, dx$

$I_2 = (6x+10)\cdot e^x - 6e^x = \boxed{6x\cdot e^x + 4e^x = I_2}$

$I_1 = e^x(3x^2+10x) - 6xe^x - 4e^x = e^x(3x^2+4x-4)$

$\Rightarrow I = e^x(x^3+5x^2-2) - e^x(3x^2+4x-4)$

$\boxed{I = e^x(x^3+2x^2-4x+2) + C}$

Obs pt o primitivă de forma:

$I = \int e^x \cdot P_n(x) \, dx$; $P_n(x)$ = polinom de gradul n constatăm că rezultatul final este de forma $I_n = e^x \cdot Q_n(x)$ unde $Q_n(x)$ este un polinom tot de grad n

presupunem, în ex nostru, că

$I = e^x(\underbrace{ax^3+bx^2+cx+d}_{Q(x)})$

$\Rightarrow \int e^x(x^3+5x^2-2)\, dx = e^x(ax^3+bx^2+cx+d)$

$\Rightarrow e^x(x^3+5x^2-2) = e^x(ax^3+bx^2+cx+d) + e^x(3ax^2+2bx+c) \,/ : e^x$

$\Rightarrow x^3+5x^2-2 = ax^3+x^2(b+3a)+x(c+2b)+(d+c)$

Din identificare rezultă:

$\begin{cases} \boxed{a=1} \\ b+3a=5 \\ c+2b=0 \\ c+d=-2 \end{cases}$ $\left| \Rightarrow b=5-3=2 \right.$ $\boxed{b=2}$ $\Big\} \Rightarrow c=-2b$ $\boxed{c=-4}$ $\Big\} d=-2+4 \Rightarrow \boxed{d=2}$

$\Rightarrow j = e^x(x^3+2x^2-4x+2)$

5° $I = \int x \cdot \arcsin x \cdot dx, \; x \in (-1,1)$

$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{J}$

Fie $J = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\begin{cases} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$J = -x\sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx}_{A}$

Fie $A = \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$\Rightarrow A = \arcsin x - J \Rightarrow \boxed{A + J = \arcsin x}$ (1°)

$J = -x\sqrt{1-x^2} + A \Leftrightarrow \boxed{-A + J = -x\sqrt{1-x^2}}$ (2°)

Facem un sistem cu relațiile (1°) și (2°):

$\begin{cases} A + J = \arcsin x \\ -A + J = -x\sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right)}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} J; \; \boxed{I = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}}$

$$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$J = x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot dx$$

$$J = \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

$$\begin{cases} I = \frac{x^2}{2} \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot J \\ J = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \cdot dx \end{cases}$$

(6) $I_1 = \int e^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot dx$; $I_2 = \int e^{\arcsin x} \cdot dx$

$x \in (-1,1)$

$$I_1 = \int e^{\arcsin x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$f(x) = e^{\arcsin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow g(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$$

$$I_1 = -e^{\arcsin x} \cdot \sqrt{1-x^2} - \int \frac{e^{\arcsin x}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \left(-\cancel{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$$

$$I_1 = -e^{\arcsin x} \cdot \sqrt{1-x^2} + \underbrace{\int e^{\arcsin x} \cdot dx}_{I_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 - I_2 = -e^{\arcsin x} \cdot \sqrt{1-x^2}} \quad (1^0)$$

$$I_2 = \int e^{\arcsin x}\, dx$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{\arcsin x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = x \cdot e^{\arcsin x} - \underbrace{\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x\, dx}_{I_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 + I_2 = x \cdot e^{\arcsin x}} \quad (2)$$

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = -e^{\arcsin x} \cdot \sqrt{1-x^2} \\ I_1 + I_2 = x \cdot e^{\arcsin x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) \\ I_2 = \dfrac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) \end{cases}}$$

(7) $$I = \int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \cdot dx$$

$$\begin{cases} f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} \\ g'(x) = \sin \beta x \Rightarrow g(x) = \int \sin \beta x\, dx = -\dfrac{\cos \beta x}{\beta} \end{cases}$$

$$I = -\frac{e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \underbrace{\int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx}_{J}$$

$$\boxed{I - \frac{\alpha}{\beta} \cdot J = -\frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta}} \quad (1)$$

$$J = \int e^{\alpha x} \cos \beta x\, dx$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x}$$

$g'(x) = \cos \beta x$; $g(x) = \int \cos \beta x \, dx = \frac{\sin \beta x}{\beta}$

$$\Rightarrow J = \frac{e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \underbrace{\int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \, dx}_{I}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot I + J = \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta}} \quad (2°)$$

$$\left.\begin{cases} I - \frac{\alpha}{\beta} J = - \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \cdot I + J = \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} \end{cases}\right\} \Rightarrow I \text{ și } J$$

Formulă de recurență

$$I_n = \int \ln^n x \cdot dx$$

$f(x) = \ln^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

$$I_n = x \cdot \ln^n x - n \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln^{n-1} x \cdot dx$$

$$\boxed{I_n = x \cdot \ln^n x - n I_{n-1}}$$