LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

CURS 4

UNITATEA DE ÎNVĂŢARE NR.2

LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- Logica s-a dezvoltat ca o ştiinţă independentă după 1920, prin reprezentaţii ei de marcă **Lukasiewicz** (1878-1956), **Lewis** (1883-1964), **Gödel** (1906-1978), **Tarski** (1901-1983), **Church** (1903-1995) şi **Kleene** (1909-1994).

LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

CALCULATORUL ŞI PRELUCRAREA SIMBOLURILOR LOGICE:

-programarea funcţională(McCarthy) utilizată în SUA

-programarea logică(Colmerauer şi Kowalski) utilizată în Europa.

CONECTORI LOGICI

- Formalizarea propoziţiilor logice şi matematice:

(1) Conjuncţia este formalizată prin $\wedge$.

Să presupunem că ştim următoarele două proprietăţi ale unui anume *x*:

A: “ $x>3$”

B: “ $x<10$”

Atunci ştim despre *x* că este mai mare decât 3 şi mai mic decât 10. Cu alte cuvinte, cunoaştem propoziţia:

$A \wedge B$: “$x > 3$ şi $x < 10$”,

ceea ce înseamnă “$3 < x < 10$”.

CONECTORI LOGICI

(2) Negaţia este formalizată cu ajutorul simbolului $\neg$.

C: "50 este divizibil cu 7"

$\neg C$: "50 nu este divizibil cu 7"

CONECTORI LOGICI

(3) Disjuncţia este reprezentată prin simbolul $\vee$.

D: “60 este multiplu de 6”.

E: “60 este multiplu de 5”.

$D \vee E$: “60 este multiplu de 6 sau 60 este multiplu de 5”.

CONECTORI LOGICI

(4) Implicaţia "dacă … atunci…" este reprezentată în logică prin "$\rightarrow$".

F: " numărul *a* este un multiplu de 10"

G: " numărul *a* este multiplu de 5 "

$F \rightarrow G$: "dacă *a* este multiplu de 10, atunci este multiplu de 5".

CONECTORI LOGICI

(5) “… dacă şi numai dacă …” se reprezintă prin simbolul de **echivalenţă** “$\leftrightarrow$”.

H: “ 16 este multiplu de 2”

I: “ 16 este număr par”

H $\leftrightarrow$ *I:* “16 este multiplu de 2 dacă şi numai dacă 16 este număr par”

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

Pentru fiecare limbaj formal există:

a) un **alfabet** ce conţine toate simbolurile limbajului;

b) o **sintaxă** care stabileşte cum sunt utilizate simbolurile şi care este forma corectă a propoziţiilor din limbaj;

c) o **semantică**, pe baza căreia se stabileşte interpretarea şi semnificaţia simbolurilor din limbaj.

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

Alfabetul limbajului logicii propoziţiilor conţine:

i. ***Simboluri propoziţionale***: *A*, A_1, A_2, ... , *B*, B_1, B_2 ...

ii. ***Conectori logici***: ∨ , ∧ , ¬ , → , ↔

iii. ***Virgule şi paranteze***: “, ” şi “(“ , ”)”.

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

Definiţia inductivă a propoziţiilor:

1. Simbolurile propoziţionale sunt propoziţii , numite *propoziţii atomice* sau *atomi*.
2. Dacă σ, τ sunt propoziţii, atunci expresiile

   $(\sigma \wedge \tau)$, $(\sigma \vee \tau)$, $(\sigma \rightarrow \tau)$, $(\sigma \leftrightarrow \tau)$, $(\neg\sigma)$ sunt de asemenea propoziţii numite *propoziţii compuse*.

3. Expresiile construite conform regulilor (i) şi (ii) sunt singurele expresii din limbaj care sunt propoziţii.

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

- **Exemplul 1**: Expresiile $\vee A \vee B$ şi $\leftrightarrow A$ nu sunt propoziţii.

- **Exemplul 2**: $(A \vee B)$ şi $((\neg A) \vee (B \leftrightarrow (\neg C))$ sunt propoziţii.

- **Exemplul 3**: Expresia E: $(\neg(A \wedge B) \to C)$ este o propoziţie.

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

- **Exemplul 4**: Se consideră propoziţia F în limbaj cotidian:

  F: *"Dacă nu plouă atunci merg la plimbare"*

  Consideram simbolurile propoziţionale auxiliare:

  A: *"Plouă"*

  B: *"Merg la plimbare"*

  atunci F devine $((\neg A) \to B)$, aceasta fiind o propoziţie.

  Dacă nu există riscul unei confuzii, parantezele pot fi omise:

  F: $\neg A \to B$

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

- **Observaţie:** Pentru a evita confuzia în cazul utilizării conectorilor în formule fără paranteze, considerăm $\neg$ ca având cea mai mare prioritate, $\vee$ şi $\wedge$ ca având prioritate mai mare decât $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$, şi $\leftrightarrow$ cu prioritate mai mare decât $\rightarrow$.

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIILOR

- **Exemplu**:

Formulele:

$\neg A \to B \vee C, \quad A \wedge B \to C, \quad A \to B \leftrightarrow C$

se citesc:

$(\neg A) \to (B \vee C), \quad (A \wedge B) \to C, \quad A \to (B \leftrightarrow C)$

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- ***Valorizări şi valori de adevăr***

O ***valorizare*** este orice funcţie:

$F : Q \to \{a, f\}$

unde Q este mulţimea de atomi din limbaj.

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

Mulţimii de valori de adevăr {*a, f*} îi asociem operatorii interni ~, ⊔ , ⊓ , ~> , <~> care corespund conectorilor logici ¬ , ∧ , ∨ , → şi ↔.

Operaţiile interne ~, ⊔ , ⊓ , ~> , <~> peste mulţimea {*a, f*} sunt definite de următoarele tabele:

	~
a	*f*
f	*a*

⊔	*a*	*f*
a	*a*	*a*
f	*a*	*f*

⊓	*a*	*f*
a	*a*	*f*
f	*f*	*f*

~>	*a*	*f*
a	*a*	*f*
f	*a*	*a*

<~>	*a*	*f*
a	*a*	*f*
f	*f*	*a*

Structura ({*a, f*}, ~, ⊓ , ⊔) cu operaţiile ~, ⊓ , ⊔ definite de tabelele de mai sus este o algebră booleană cu două valori.

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

Fie S mulţimea de propoziţii din limbajul logicii propoziţionale. Prin ***valorizare de adevăr*** sau ***valorizare booleană*** se înţelege funcţia:

$$V : S \to \{a, f\}$$

astfel încât, pentru orice $\sigma, \tau \in S$:

a) dacă σ este un atom, atunci $V(\sigma) \in \{a, f\}$

b) $V(\neg\sigma) = \sim V(\sigma)$

c) $V(\sigma \vee \tau) = V(\sigma) \sqcup V(\tau)$

d) $V(\sigma \wedge \tau) = V(\sigma) \sqcap V(\tau)$

e) $V(\sigma \to \tau) = V(\sigma) \sim> V(\tau)$

f) $V(\sigma \leftrightarrow \tau) = V(\sigma) <\sim> V(\tau)$

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- **Teorema 4.3.4:** *Pentru fiecare valorizare F există o unică valorizare de adevăr V, astfel încât V extinde F.*

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- **Exercitiul 1**: Fie S muţimea de propoziţii atomice $S = \{ A_1, A_2 \}$ şi F o valorizare pentru care:

$F(A_1) = a$ şi $F(A_2) = f$. Calculţi $V_F((A_1 \vee A_2) \rightarrow A_2)$, unde V_F este o valorizare de adevăr care extinde F.

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- O propoziţie σ din **LP** este ***logic adevărată***, sau ***tautologie***, dacă pentru orice valorizare de adevăr V, $V(\sigma) = a$. Acest lucru se notează $\vDash\sigma$. Vom scrie $\nvDash\sigma$ ca să indicăm că σ nu este o tautologie, adică există o valorizare de adevăr V pentru care $V(\sigma) = f$.
- O propoziţie σ este ***realizabilă*** sau ***verificabilă*** dacă există o valorizare de adevăr V, astfel încât $V(\sigma) = a$.
- O propoziţie σ se numeşte ***logic falsă*** sau ***neverificabilă*** sau ***contradicţie*** dacă pentru orice valorizare de adevăr V, $V(\sigma) = f$.

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- Două propoziţii σ şi τ cu proprietatea că $V(\sigma) = V(\tau)$ pentru orice valorizare de adevăr V se numesc ***logic echivalente*****.** Aceasta se notează $\sigma \equiv \tau$.

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- **Exercitiul 2**: Demonstrți că propoziţiile $A \vee \neg A$ şi $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ sunt tautologii.

SEMANTICĂ ÎN LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- **Exercitiul 3**: Demonstrați că propoziţia

  $K : [[(\neg A \wedge B) \rightarrow C] \vee D]$ este realizabilă.

TABELE DE ADEVĂR

- Propoziţiile compuse $\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ şi $A \leftrightarrow B$ au următoarele tabele de adevăr:

A	$\neg A$
a	f
f	a

A	B	$A \vee B$
a	a	a
a	f	a
f	a	a
f	f	f

A	B	$A \wedge B$
a	a	a
a	f	f
f	a	f
f	f	f

A	B	$A \rightarrow B$
a	a	a
a	f	f
f	a	a
f	f	a

A	B	$A \leftrightarrow B$
a	a	a
a	f	f
f	a	f
f	f	a

TABELE DE ADEVĂR

- **Exercitiul 4**: Construiți tabela de adevăr a propoziției $A \wedge B \to C$.

TABELE DE ADEVĂR

- **Exercitiul 5**: Demonstrați ca:

a) propoziţia $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ este o tautologie.

b) propozitia $(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ este nerealizabilă.

TABELE DE ADEVĂR

(i) O propoziţie este tautologie dacă şi numai dacă negaţia ei nu este realizabilă;

(ii) O propoziţie este realizabilă dacă şi numai dacă negaţia ei nu este o tautologie;

(iii) O propoziţie care este tautologie este realizabilă în timp ce o propoziţie realizabilă nu este neaparat tautologie;

(iv) Există anumite tautologii de bază ce sunt frecvent utilizate:

1. $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ Legea lui De Morgan
2. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ Legea lui De Morgan
3. $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$ Legea dublei negaţii
4. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ Legea contrapoziţiei
5. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ Prima lege a silogismului
6. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ A doua lege a silogismului
7. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$ Legea transportării
8. $A \vee \neg A$ Legea terţului exclus

MULŢUMESC!

SEMINAR 4

- **Ex1:** Stabiliţi care dintre expresiile următoare sunt propoziţii şi care nu sunt:

a) $(A \wedge B) \vee \neg$

b) $((A \wedge B)\ ) \vee (\neg C) \rightarrow D$

c) $(A \vee B) \vee \rightarrow C$

d) $A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \vee B)$

e) $(A \wedge B) \rightarrow A$

f) $(A_1 \wedge A_2) \leftrightarrow \neg A_3$

SEMINAR 4

Ex2: Reprezentaţi următoarele propoziţii prin simboluri atomice şi folosiţi aceste simboluri pentru a crea propoziţii compuse.

a) "12 se împarte cu 2"

"9 se împarte cu 3"

"11 se împarte cu 2"

b) "George este tată"

"George are un copil"

"Mary este tată"

"Mary are un copil"

SEMINAR 4

Ex3: Se dau următoarele propozitii atomice:

A_1: "3 este număr prim"

A_2: "15 se împarte cu 3"

A_3: "2 se împarte cu 3"

A_4: "13 se împarte cu 3"

a) Stabiliţi o valorizare *F* pentru propziţiile de mai sus.

b) Fie W_F valorizarea de adevăr care extinde pe *F*. Calculaţi $W_F((A_1 \wedge A_2) \rightarrow (A_3 \vee A_4))$.

SEMINAR 4

Ex4: Folosind valorizări de adevăr, demonstraţi că următoarele propoziţii sunt tautologii:

- a) $(A \wedge \neg A) \rightarrow A$
- *b)* b) $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow \neg B)$
- c) $A \rightarrow \neg\neg A$
- d) $[(A \wedge B) \rightarrow C] \leftrightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$

SEMINAR 4

Ex5: Folosind valorizări de adevăr, demonstraţi că următoarele propoziţii sunt contradicţii:

a) $A \wedge \neg A$

b) $(\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A$

c) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \wedge \neg C)$

d) $\neg(A \wedge B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge A$

SEMINAR 4

- **Ex6:** Completaţi următoarea tabelă de adevăr:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
a	a					
a	f					
f	a					
f	f					

SEMINAR 4

Ex7: Demonstraţi că următoarele propoziţii sunt logic echivalente:

- a) $\neg(A \wedge B)$ şi $\neg A \vee \neg B$
- b) $B \rightarrow A$ *şi* $\neg B \vee A$
- c) $A \leftrightarrow B$ şi $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

SEMINAR 4

Ex8: Folosind tabele de adevăr, demonstraţi că următoarele propoziţii sunt tautologii:

a) $A \lor B \leftrightarrow B \lor A$

b) $(A \lor B) \lor C \leftrightarrow A \lor (B \lor C)$

c) $(A \lor B) \land C \leftrightarrow (A \land C) \lor (B \land C)$

d) $A \leftrightarrow \neg \neg A$

e) $A \land (B \lor \neg B) \leftrightarrow A$

f) $\neg (A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$

SEMINAR 4

Ex9: Sa se arate prin tabele de adevăr că următoarele formule propoziţionale sunt tautologii:

1. $\neg p \to (p \to q)$
2. $(p \wedge q) \to p$
3. $(\neg p \wedge (p \vee q)) \to q$
4. $(p \wedge (p \to q)) \to q$

★ 5. $(\neg p \wedge (p \to q)) \to \neg q$