- 12.11.2021 -

• Exerciții •

exercitiul 1

fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$

form. gen $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$

→ conform T1 a lui Abel ∀ serie are un $S(x)$

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (ce nu are x)

raza de convergentă conform lui Cauchy - Hadamand

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right|$$

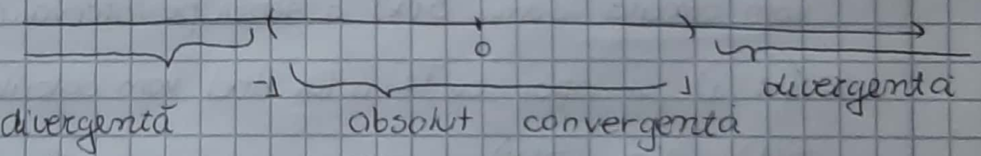
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{n+1}{(-1)^n} \right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

I = interval de convergenta - $J = (-\rho, \rho) \Rightarrow J = (-1, 1)$

T1 a lui Abel pt ∀ $x \in J \Rightarrow$ seria este absolut convergentă

↳ pt ∀ x cu proprietatea $|x| > 1$ seria este divergentă



+ pentru $x = 1$ $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$

→ serie numerică alternată (seria armonică alternată)

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serie alternată dacă $a_n = \frac{1}{n}$ este de nr pozitive descrescător și convergent la zero atunci seria este convergentă.

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$, $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$
↳ descrescător

⇒ seria e convergentă ⇒ $x = 1$ este punct de convergență

+ pentru $x = -1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{-1}{n}$

$= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} + \dots = -\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots}_{\text{seria armonica - divergentă}}\right)$

$\Rightarrow x = -1$ punct de divergentă

$\Rightarrow$ multimea de convergentă $A = (-1, 1]$

verificam dacă pt $x = 1$ seria este abs. convergenta sau semiconvergentă

$\hookrightarrow$ seria modulelor $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots}_{\text{seria armonica divergentă}}$

$\Rightarrow$ seria obtinuta pt $x = 1$ nu este abs. convergentă

$\Rightarrow$ seria e semiconvergenta

! daca e convergenta clar nu abs. conv

calculăm suma seriei pt $x = 1$

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

vom calcula suma $S(x)$ a seriei pe intervalul de convergentă $x \in (-1, 1)$ si apoi cu T_2 a lui Abel vom calcula $S(1)$

$$S(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} S(x)$$

$S(x)$ = continua la stânga

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

folosim teorema de derivabilitate $S(x)$ este o functie derivabila pe intervalul de convergenta și suma seriei derivatelor este egala cu derivata sumei

Seria initiala si seria derivatelor au aceasi raza de convergenta $\Rightarrow$ $S'(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots\right)'$

$$S'(x) = \underbrace{1 - \frac{2x}{2} + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1} + \dots}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Seria geometrică de $r = -x$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$S'(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} \; ; \; b_n = (-1)^{n-1}$$

calculam raza de convergenta

$$\searrow \rho_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{(-1)^n}\right| \Rightarrow \rho_1 = 1$$

$\Rightarrow$ intervalul de conv $(-1, 1)$ $\quad \rho_1 = \rho$

pt derivate

pt $x = \pm 1$ seria este divergentă (pt derivate)

explicatie
$$\begin{cases} S(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots = 0 \\ S(-1) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \infty \end{cases}$$

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - x + x^2 + \dots + (-x)^{n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (-1)^n \cdot x^n}{1 + x} = \frac{1}{1+x}$$

formula de suma geom.

$$\begin{cases} x \in (-1, 1) \\ \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \end{cases}$$

sir exponential.

$S'(x) = \frac{1}{1+x}$ adevarată pt $\forall x \in (-1, 1)$

$$S(x) = \int \frac{1}{1+x} \cdot dx + C = \ln(1+x) + C \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + C.$$

$$\ln(1+x) + C = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots$$

$\forall x \in (-1, 1)$

pt $x = 0 \Rightarrow \ln 1 + C = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\hookrightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

Scanned with CamScanner

conform T2 a lui Abel $\Rightarrow$ pt $x = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} S(x) = S(1) = \ln 2$$

$\Rightarrow$ pt $x = 1$ avem $1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \ln 2$

↳ suma seriei armonice alternate.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

prin derivate se obține $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots$

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{n-2} + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \dots + (-1)^n \cdot (n-1) x^{n-2} + \dots$$

① $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$

$J = (-1, 1)$ $\quad x \in (-1, 1) \Rightarrow -x \in (-1, 1)$

$\Rightarrow$ înlocuind pe x cu $-x$ vom obține

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad \forall x \in (-1, 1)$$

② $-\ln(1-x) = \ln(1-x)^{-1} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$\ln \frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

adunăm 1 și 2

$$\ln(1+x) + \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots + 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Serii Taylor și serii Mac-laurin.

Definiție

Fie $a \in \mathbb{R}$. Se num serie Taylor o serie de puteri ale lui $(x-a)$

O serie de forma $\sum_{0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a)^1 + \dots + a_n (x-a)^n + \dots$

Cu substituția $y = x-a$ se obține seria de puteri ale lui $y \Rightarrow$

$\sum_{0}^{\infty} a_n \cdot y^n = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n + \dots$

Fie ρ = raza sa de convergență a seriei $\Rightarrow$

$-\rho < y < \rho$ $\qquad y = x-a$

$-\rho < x-a < \rho \quad | + a$

$a-\rho < x < \rho + a \Rightarrow x \in (a-\rho, a+\rho)$

- Toate proprietățile seriilor de puteri se mențin și pt seriile Taylor

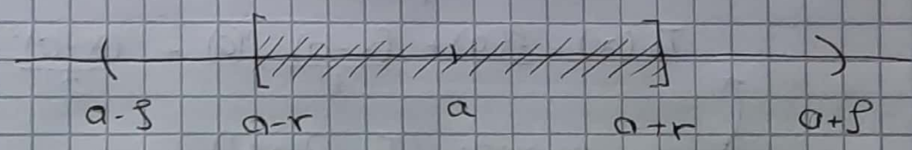
↳ Pt $\forall$ serie Taylor $\sum_{0}^{\infty} a_n (x-a)^n$:

1) $\exists\ \rho$, cuprins $0 \le \rho \le \infty$ numit raza de convergență

aî : a) seria este absolut convergentă pe $(a-\rho, a+\rho)$

b) seria este divergentă pentru $|x-a| > \rho$ (în afara interval)

c) pt $\forall\ r$, $0 \le r \le \rho$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[a-r, a+r] \subset (a-\rho, a+\rho)$



2) raza de convergența a seriei lui Taylor este dată de teorema Cauchy - Hadaman

$$\longrightarrow \rho = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

3) Suma seriei Taylor este funcție continuă pe intervalul de convergență $(a-\rho, a+\rho)$

4) Suma seriei Taylor e o funcție derivabilă de K ori

pe intervalul de convergență și derivata să de ...
pe intervalul de convergență și derivata să de ... egală cu suma seriei derivatelor de ordin k $\forall k \in \mathbb{N} ; k \geq 1$

! pt $a=0$ se obține cazul particular al seriilor de puteri analizate anterior

Dezvoltari în serie

Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in J$. Fie $f: J \to \mathbb{R}$ o funcție pe infinit derivabilă în punctul a. ($a \in J$) Vom considera seria Taylor următoare:

$$f(a) + \frac{(x-a)}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{n}(a)$$

$$a_n = \frac{(x-a)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

seria se numește seria Taylor a funcției f în punctul a ($a \in J$) care are proprietățile de la 1 la 4 (de mai sus)

Termenul general al șirului nr parțiale al acestei serii este $T_n(x)$ dat de expresia

$$T_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{n}(a)$$

se numește ($T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) se numesc polinoamele lui Taylor de gradul n ale puterilor lui $(x-a)$

șirul acestor polinoame $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ = șirul sumelor parțiale al seriei Taylor și este convergent pe mulțimea A (de convergență) către un polinom T ; $T_n \xrightarrow[n \to \infty]{x \in A} T$.

Aceste polinoame sunt exact polinoamele lui Taylor din formula lui Taylor asociată funcției f în punctul $x=a$

Se demonstrează că formula lui Taylor asociate funcției f în punctul $x=a$ este:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{n}(a) + \underbrace{R_n(x)}_{\text{rest}}$$

aceasta are loc pentru $x \in J$ (pe care e definită funcția)

↳ R_n = restul formulei lui Taylor al funcției f în punctul $x=a$ și are diverse forme; cea mai cunoscute fiind cea dată de Lagrange $R_1(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$

$\theta \in (0,1)$

Are loc următorul rezultat

Teorema. Seria Taylor a lui f în punctul a este convergentă într-un punct $x \in A \cap I$ și are ca sumă valoarea $f(x)$ a funcției f în punctul x $\Leftrightarrow$ valorile în punctul x ale resturilor $R_n(x)$ formează un șir $R_n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la zero.

$\longrightarrow$ $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad x \in J$

↳ În acest caz vom scrie că $f(x) = T(x)$ unde $T(x)$ = suma seriei Taylor asociate funcției f pe intervalul $A \cap I$

!! pt $a=0$ obținem seria numită Mac-Laurine asociată funcției f:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^{n}(0) + \dots$$

↳ $x \in J \cap A$

Scanned with CamScanner