Curs - V. Gârban   Pagini curs: 4 - 19.   00000001

Curs 1.

16/02/2022   FAI-C-1

- Sisteme Algebrice Liniare de m ecuații cu n variabile necunoscute

I (1) $n=m$

Forma generală a sistemului:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(2) Forma Matriceală a sistemului:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

$A \cdot X = B$

(3) Forma vectorială a sistemului:

$x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_n \cdot P_n = P_0$; $P_1, P_2, \dots, P_n$ coloana matricei coefficentilor

P_0 = coloana termen liber.

Algoritmul de rezolvare presupune calculul a $n+1$ determinanți de ordinul n și, apoi, a n operații de împărțire. {Cramér}

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$ $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ $x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$

$\Delta = \det(A) \neq 0$

Δx_i = det. matricei care se obține din A prin înlocuirea coloanei x_i cu vectorul termenilor liberi
$i = 1..n$

~~Exercițiu~~. Ex.

Cramer

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

De reținut! (*)

Teorema de compatibilitate {Cramer}

Sistemul (1), de n ecuații cu n necunoscute, este compatibil (soluție unică)

$\Updownarrow$

Determinantul matricei A a coeficienților sistemului este $\det(A) \neq 0$

$\Updownarrow$

Matricea coeficienților sistemului este ne-singulară (inversabilă)

Metoda lui Gauss

Se transformă sistemul (1) într-un sistem "extrem de simplu" (formă diagonală) printr-un șir de operații simple care presupun calcule numai de înmulțire și scădere.

4. $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 \cdots = B_1 \\ 0 \quad \alpha_{22}x_2 \cdots = B_2 \\ 0 \\ 0 \quad \cdots 0 \quad \alpha_{nn}x_n = B_n \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = B_1/\alpha_{11} \\ x_2 = B_2/\alpha_{22} \\ \vdots \\ x_n = B_n/\alpha_{nn} \end{matrix}$

Numerele α_{ii} $i=\overline{1,n}$ se numesc PIVOȚI și în ipoteza $\det(A) \neq 0$, $\alpha_{ii} \neq 0$.

II Sisteme omogenee de n ecuații cu n necunoscute

Un astfel de sistem se caracterizează prin faptul că toți termenii liberi din membrul drept sunt nuli.

$AX = O_n$ $\quad \det(A) \neq 0$

În ipoteză $\exists A^{-1}$, se calculează A^{-1} și se înmulțește la stânga cu A^{-1}

Matrice inversă

$A^{-1} \cdot / A \cdot X = O_n$

$\Downarrow$

$(A^{-1} \cdot A) X = O_n$

$\Downarrow$

$I_n \cdot X = O_n \Rightarrow X = O_n$

Sistemul are soluție unică.

$x_1 = \cdots = x_n = 0$, numită soluția banală dacă sunt admise numai soluții banale, atunci el se numește sistem unic compatibil determinat.

Dacă admite soluții nebanale, se numește sistem compatibil nedeterminat

Un sistem omogen admite soluții nebanale dacă $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n$

$n - \operatorname{rang} A =$ nr. necunoscutelor secundare

$n = \operatorname{rang} A =$ nr. necunoscutelor principale.

Ex.

Gauss.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Algoritm}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

III Cazul sistemelor cu m ecuații și n necunoscute

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad AX = B \ (2)$$

Presupunem că $r < m < n$

Precizări suplimentare:

1 Def: se numește minor de ordinul r al matricei A, det. unei matrice pătratice obținută prin intersecția a r linii și coloane din A. $\Rightarrow r \le \min(m,n)$

Numărul minorilor de ordinul r din matricea $A(m,n) = C_m^r \cdot C_n^r$

2 Def: Se numește rangul matricei A (și se notează rang(A)) numărul natural r care îndeplinește următoarele condiții:

1. $0 \le r \le \min(m,n)$
2. $\exists$ în A un minor de ordinul r nenul
3. Orice număr de ordinul $r+1$ este nul

Pentru calculul rangului, nu este recomandabilă metoda minorilor (numărul acestora ar fi mare).

Metoda cea mai rapidă, simplă și eficientă este metoda lui Gauss; permite transformarea succesivă lui A într-o altă matrice care are același rang (cu cel al lui A), de formă:

Teorema de comp. a lui Kronecker-Capelli

Sistemul (1) este compatibil $\Leftrightarrow$ rangul matricei coeficienților (A) este egal cu rangul matricei extinse a sistemului (1)

$rang(A) = rang(\bar{A})$

$\bar{A} = A|B$

Matricea Nulă $\Rightarrow rang = 0$

Ex.

$$A_{m,n} \simeq E_{m,n,r} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \\ \text{col } r \end{array} \rightarrow rang\ A = r$$

Matricea A se transformă recursiv până se ajunge la $E_{m,n,2}$ prin operații care nu modifică valoarea rangului:

1. Schimbarea ordinul liniilor sau coloanelor
2. Înmulțirea unei linii sau coloane cu un factor nenul
3. Înmulțirea unei linii sau coloane cu un factor (nenul sau nenul) oarecare spre a o aduna la o altă linie. Analog pentru coloane.

Regula dreptunghiului

$a_{11} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$

Descrierea operatorilor.

1 Fie $A_{m,n}$ o matrice nenulă, cu $a_{11} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, se poate interschimba linia (coloana) 1 cu altă linie (coloană) care aduce pe prima poziție (1,1) un element nenul.

2 Se efectuează operațiile care permit obținerea pe prima coloană, sub PIVOT, a tuturor elementelor egale cu 0.

3 Linia 1 se înmulțește cu $(-a_{i1})$

4 Linia i se înmulțește cu a_{11}, $i = 2,3 \dots m$

5 Elementul a_{ij} se va înlocui cu: $a_{11} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$

Rezultat

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & \vdots \\ 0 & & \\ 0 & a_{m2}^{(1)} \dots & a_{m,n}^{(1)} \end{bmatrix}$$

- linia 1 neschimbată
- coloana 1, sub PIVOT sunt 0.
- celelalte elemente se calculează cu regula dreptunghiului

6 Repeat again cu sub-matricea fără linia și coloana rezolvată

Exemplu Calculul rangului cu Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & 1 & -11 & -10 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & 14 & 12 & 12 \\ 0 & -8 & -2 & -8 & -10 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & 0 & -14 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & O \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right]$$

rang $A = 3$

OBS: În probleme în care se cere rezolvarea sistemelor de m ecuații cu n necunoscute, este recomandat să se efectueze transformări asupra liniilor.