LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 5

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- Tabela de adevăr a propoziției $(A \wedge B) \rightarrow C$ este:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \rightarrow C$
a	a	a	a	a
a	a	f	a	f
a	f	a	f	a
f	a	a	f	a
a	f	f	f	a
f	a	f	f	a
f	f	a	f	a
f	f	f	f	a

- Se obs. că pentru F(A)=a, F(B)=a, F(C)=a, obținem V_F $((A \wedge B) \rightarrow C)$ =a, deci putem spune că validitatea propoziției $(A \wedge B) \rightarrow C$ a fos o consecință a faptului că orice propziție din $S = \{ A, B, C \}$ a luat valoarea de adevăr *a*.

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- Fie S o mulţime de propoziţii. O propoziţie σ se numeşte ***consecinţă a lui S*** (notată cu $\boldsymbol{S \models \sigma}$) dacă pentru orice valorizare de adevăr V, pentru care $V(\varphi) = a$ oricare ar fi $\varphi \in S$, putem deduce că $V(\sigma) = a$.

Mulţimea $Con(S) = \{\sigma \mid S \models \sigma\}$ este mulţimea tuturor consecinţelor lui S.

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- **<u>Exemplul 1:</u>** Fie $S = \{A \wedge B, B \rightarrow C\}$ o multime de propoziţii. Atunci propoziţia C este o consecinţă a lui S, adică $S \models C$.

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- O mulţime de propoziţii S este (semantic) ***consistentă***, ***realizabilă*** sau ***verificabilă*** dacă există o valorizare de adevăr care să verifice orice propoziţie din S. Formal:

  consistent(S) $\Leftrightarrow$ (există o valorizare V)[(pentru orice $\sigma \in S$)($V(\sigma) = a$)]

- Faptul că S este consistentă se notează cu $V(S) = a$.

- S este ***inconsistentă***, ***irealizabilă*** sau ***neverificabilă*** dacă pentru orice valorizare de adevăr există cel puţin o propoziţie nerealizabilă în S:

  inconsistent(S) $\Rightarrow$ (pentru orice V)[(exista $\sigma \in S$)($V(\sigma)$ = f)]

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- **<u>Exemplul 2:</u>** Mulţimea de propoziţii $S = \{A \wedge \neg B, A \rightarrow B\}$ este inconsistentă.

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- O valorizare de adevăr ce satisface o mulţime de propoziţii *S* se numeşte ***interpretare*** a lui *S*. Mulţimea tuturor interpretărilor lui *S* se notează cu *Int(S)*, unde:

  $Int(S) = \{V \mid V$ valorizare de adevăr şi pentru orice $\sigma \in S$, $V(\sigma) = a\}$

CONSECINȚE ȘI INTERPRETĂRI

- **<u>Corolarul 4.5.8:</u>** *Pentru mulţimile de propoziţii S, S_1, S_2 avem:*

1) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow Con(S_1) \subseteq Con(S_2)$
2) $S \subseteq Con(S)$
3) $Taut \subseteq Con(S)$, pentru orice mulţime de propoziţii S
4) $Con(S) = Con(Con(S))$
5) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow Int(S_2) \subseteq Int(S_1)$
6) $Con(S) = \{ \sigma | \ V(\sigma) = a, \text{ pentru orice } V \in Int(S)\}$
7) $\sigma \in Con(\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}) \Leftrightarrow \sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\sigma_n \rightarrow \sigma)..) \in Taut$

FORME NORMALE

- Un ***literal*** este un atom sau negația unui atom.

Exp: $\neg A$, B, $\neg C$ sunt literali.

- Se numește ***clauză conjunctivă*** o conjuncție de literali: $L_1 \wedge L_2 \wedge L_3 \wedge \ldots \wedge L_n \wedge \ldots$
- Se numește ***clauză disjunctivă*** o disjuncție de literali: $L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee \ldots \vee L_n \vee \ldots$
- O ***formă normală conjunctivă FNC*** este o conjuncție de clauze disjunctive: $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge \ldots \wedge C_n \wedge \ldots$, C_i = clauze disjunctive.
- O ***formă normală disjunctivă FND*** este o disjuncție de clauze conjunctive: $C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee \ldots \vee C_n \vee \ldots$, C_i = clauze conjunctive.

FORME NORMALE

- ***Exercițiul 1:*** Să se construiască un FND și un FNC pentru propoziția *A* cunoscându-se tabela de adevăr redusă:

p	q	*A*
a	a	f
a	f	a
f	a	f
f	f	a

FORME NORMALE

- ***Exercițiul 2:*** Același enunt pentru:

A	B	C	F
a	a	a	a
a	a	f	f
a	f	a	f
a	f	f	f
f	a	a	a
f	a	f	f
f	f	a	f
f	f	f	f

ALGORITM DE NORMALIZARE

1) $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$;
2) $(A \leftrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$;
3) $\neg(\neg A) \equiv A$;
4) $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$;
5) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$;
6) $(A \wedge (B \vee C) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
7) $(A \vee (B \wedge C) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$;
8) $\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$;
9) $\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$
10) $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B} \vee \ldots) \equiv \mathrm{A}$;
11) $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{B} \wedge \ldots) \equiv \mathrm{A}$;

ALGORITM DE NORMALIZARE

- ALGORITM:

Pas 1: Se folosesc formulele 1 și 2;

Pas 2: Se folosesc formulele 3, 4 și 5;

Pas 3: Pentru a obține un FND se folosește 6 iar pentru aobține un FNC se folosește 7.

ALGORITM DE NORMALIZARE

- ***Exercițiul 3***: Să se obțina un FNC pentru:

$(A \vee B) \rightarrow (\neg B \wedge \mathrm{A})$.

- ***Exercițiul 4***: Dezvoltați în FNC propoziția *S*:

S: $\neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge \mathrm{C}$

ALGORITMUL DE DECIZIE PRIN FORME NORMALE

- **Var 1**: Se aduce formula F la un FNC. Dacă FNC validă, atunci F validă.

  În caz contrar se aduce F la un FND. Dacă FND nerealizabilă, atunci F nerealizabilă.

  În caz contrar F contingentă.

ALGORITMUL DE DECIZIE PRIN FORME NORMALE

- **Var 2**: Se aduce formula F la un FNC. Dacă FNC validă, atunci F validă.

  În caz contrar se aduce $\neg$ F la un FNC. Dacă FNC validă, atunci F nerealizabilă.

  În caz contrar F contingentă.

ALGORITMUL DE DECIZIE PRIN FORME NORMALE

- **Var 3**: Se aduce formula F la un FND. Dacă FND nerealizabilă, atunci F nerealizabilă.

  În caz contrar se aduce $\neg$ F la un FND. Dacă FND nerealizabilă, atunci F validă.

  În caz contrar F contingentă.

ALGORITMUL DE DECIZIE PRIN FORME NORMALE

- Exercițiul 5: Folosind algoritmul de decizie prin forme normale, să se stabilească validitatea propoziției:

  P: $((A \to B) \to A) \to A$

MULŢUMESC!

SEMINAR 5

Ex1: Folosind legile lui De Morgan, negati urmatoarele propozitii:

1. *Radu este bogat si fericit.*
2. *Ana vine pe jos sau ia autobuzul catre Universitate.*
3. *Ovidiu se va angaja in industrie sau va preda in invatamant.*
4. *Anca stie C si logica computationala.*

SEMINAR 5

- **Ex2:** Determinaţi dacă fiecare set de propoziţii este consistent sau inconsistent:

1. $p \to \neg p,\ \neg p \to \neg p,\ p \wedge p,\ p \vee p$
2. $p \vee q,\ p \to r,\ q \to r$
3. $p \vee q,\ q \vee r,\ r \to \neg p$
4. $p \to (q \vee r),\ r \to \neg p,\ p \to \neg q$

SEMINAR 5

- **Ex3:** Arataţi ca $\neg$ *q este consecinţă logică pentru* $\{p, p \rightarrow \neg q\}$.

SEMINAR 5

- **Ex4:** Dacă $S=\{A \vee B, A \rightarrow C\}$, demonstraţi ca

$S \models B \vee C$.

SEMINAR 5

- **Ex4:** Dacă S= $\{A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, (A \vee B) \wedge (C \vee D)\}$, demonstraţi că $S \not\models (A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

SEMINAR 5

- **Ex5:** Scrieţi în LP propoziţiile următoare şi stabiliţi care dintre mulţimi sunt consistente:

  S_1: *Martorul era speriat sau, dacă John s-a sinucis, s-a găsit o scrisoare. Dacă martorul era speriat, atunci john s-a sinucis.*

  S_2: *Dragostea este oarbă şi fericirea este la îndemână sau, dragostea este oarbă şi femeile sunt mai inteligente decât bărbaţii. Dacă fericirea este la îndemână , atunci dragostea nu este oarbă. Femeile nu sunt mai inteligente decât bărbaţii.*

SEMINAR 5

- **Ex6:** Exprimaţi în FNC şi FND formulele:

a) $\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \wedge B)$

b) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

SEMINAR 5

- **Ex7:** Să se determine forma normal conjunctivă pentru propoziţia:

$P = \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \wedge C$

SEMINAR 5

- **Ex8:** Folosind forme normale, stabiliţi validitatea propoziţiei:

$$[(p \vee q) \wedge r] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

SEMINAR 5

- **Ex9:** Să se arate că

  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ *este o tautologie.*