!! Ecuații diferențiale de ordinul 1 neliniare, reductibile la ecuații liniare

Ecuația liniară ordin 1: $y' + P(x)\cdot y + Q(x) = 0$, $P, Q \in C(I)$ liniare

$Q(x) \neq 0 \to$ ecuație ne-omogenă

$Q(x) = 0 \to$ ecuație omogenă

(1) Ecuații de tip Bernoulli

$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^{\alpha}$, $\alpha \notin \{0, 1\}$ | $\alpha = 0$ $y' + P(x)y = Q(x)$; $\alpha = 1$ $y' + [P(x) - Q(x)]y = 0$

Algoritm: (1°) Se împarte ecuația cu y^{α} $(y \neq 0)$

$\hookrightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\cdot \frac{1}{y^{\alpha-1}} = Q(x)$ Fie $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}}$ sau $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\cdot y^{1-\alpha-1}\cdot y'$

$\hookrightarrow z' = (1-\alpha)\cdot \frac{y'}{y^{\alpha}} \Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha}$ $\Rightarrow \frac{z'}{1-\alpha} + P(x)\cdot z = Q(x) \to$ ec. liniară, neomogenă, cu necunoscuta = funcția z

$\hookrightarrow z = C\cdot f(x) + g(x)$

$\hookrightarrow z = y^{1-\alpha} \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Ex. $xy' - y = 3x\cdot y^3$ $\alpha = 3$ obs că $y=0$ este soluție

Dacă $y \neq 0 \Rightarrow x\cdot \frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = 3x$

$\hookrightarrow z = \frac{1}{y^2}$; $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2\cdot y^{-3}\cdot y'$

$\hookrightarrow z' = -\frac{2}{y^3}\cdot y' \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = \frac{z'}{-2}$

$\hookrightarrow x\cdot\left(-\frac{z'}{2}\right) - z = 3x \quad | \cdot(-1)$

$\hookrightarrow \frac{xz'}{2} + z = -3x$

$\hookrightarrow xz' + 2z = -6x$ Ecuație liniară neomogenă, ordin 1;

a) Ecuația omogenă asociată $\to xz' + 2z = 0$ ec. cu soluții separabile

$\hookrightarrow xz' = -2z$; $\frac{z'}{z} = -\frac{2}{x}$

$\hookrightarrow \int \frac{z'}{z}\,dx = -2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = -2\ln x + \ln c \Rightarrow \ln z = \ln \frac{C}{x^2} \Rightarrow z = \frac{C}{x^2}$

Se aplică metoda constantelor variabile (Lagrange)

$C = C(x) \to z = \frac{C(x)}{x^2} \to z' = \frac{C'(x)\cdot x^2 - 2x\cdot C(x)}{x^4}$

$$z' = \frac{x\cdot C'(x) - 2C(x)}{x^3}$$

↳ $xz' + 2z = -6x$

↳ $\frac{xC'(x) - 2C(x)}{x^2} + \frac{2C(x)}{x^2} = -6x$

↳ $x \cdot C'(x) = 6x^3 \to C'(x) = -6x^2 \to C(x) = -6 \cdot \int x^2 \cdot dx + K$

↳ $C(x) = -6 \cdot \frac{x^3}{3} + K \to C(x) = K - 2x^3$

↳ $z = \frac{C(x)}{x^2} \Rightarrow z = \frac{K - 2x^3}{x^2}$; $z = \frac{K}{x^2} - 2x$; $\frac{1}{y^2} = \frac{K}{x^2} - 2x = \frac{K - 2x^3}{x^2}$

↳ $\boxed{y^2 = \frac{x^2}{K - 2x^3}}$ Forma implicată → $y = 0$ soluție singulară

Aplicații {Teme}

① $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$; $y \geq 0$; $x \neq 0$

② $y' = \frac{y}{x} - 2xy^2$; Soluția problemei Cauchy $y(1) = 1$

③ $xy' + y = -x^2y^2$; Soluția problemei Cauchy $y(1) = 1$

④ $2x^2y' - 4xy = y^2$; Soluția problemei Cauchy $y(1) = 1$

⑤ $y' + \frac{2}{x} \cdot y = \frac{\ln x}{y^3}$

⑥ $y' + y \cdot tg\, x = y^2$

⑦ $xy' - y = 3xy^3$ Rezolvată

---

② Ecuații de tip Riccati

$y' + P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 = 0$ Polinom grad 2 în y

Soluția generală acestei ecuații nu se poate obține prin operații de integrare elementară; Totuși, se poate obține în următoarele cazuri particulare

i) Se cunoaște o sol. particulară, $y_1(x)$, a ecuației;
ii) Se cunosc 2 sol particulare, $y_1(x)$ și $y_2(x)$, ale ecuației;
iii) Se cunosc 3 sol particulare, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$, ale ecuației;

i) Fie $y_1(x)$ sol. particulară a ecuației $\Rightarrow y_1' + P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 = 0 \; \forall x$

Se face schimbarea de funcție necunoscută dată de relația: $y = y_1 \pm \frac{1}{z}$

z = numa funcției necun. se recomandă $y = y_1 - \frac{1}{z}$

$y' = y_1' - (z^{-1})' = y_1' - (-z^{-2} \cdot z') = y_1' + \frac{z'}{z^2} \to y_1' + \frac{z'}{z^2} + P(x) + Q(x)(y_1 - \frac{1}{z}) + R(x)(y_1^2 - 2\frac{y_1}{z} + \frac{1}{z^2})$

$(y_1' + P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2) + \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{z}Q(x) - \frac{2y_1}{z}R(x) + \frac{1}{z^2}R(x) = 0 \; / \cdot z^2$

$z' - zQ(x) - 2y_1 R(x) \cdot z + R(x) = 0 \to z' - (2y_1 \cdot R(x) + Q(x)) z + R(x)) = 0$

ecuație liniară neomogenă ordin 1

$z = C \cdot f(x) + g(x)$

$\Rightarrow y = y_1 - \frac{1}{C \cdot f(x) + g(x)}$

Ex.

$x^2 \cdot y' + x^2 y^2 + xy - 4 = 0 \qquad y_1 = \frac{2}{x}$ este soluție particulară

$y' = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2} \to x^2 \cdot \left(-\frac{4}{x^2}\right) + \cancel{x^2} \cdot \frac{4}{\cancel{x^2}} + \cancel{x} \cdot \frac{2}{\cancel{x}} - 4 = -2 + 4 + 2 - 4 = \underline{0}$

$y = y_1 - \frac{1}{z} \to y' = y_1' + \frac{z'}{z^2} \to y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{z'}{z^2} \to y = \frac{2}{x} - \frac{1}{z}$

$x^2\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{z'}{z^2}\right) + x^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{z}\right) - 4 = 0$

$= \cancel{-2} + \frac{x^2 z'}{z^2} \cancel{+4} - \frac{4x}{z} + \frac{x^2}{z^2} \cancel{+2} - \frac{x}{z} \cancel{-4} = 0 \quad / \cdot z^2$

$\Rightarrow x^2 z' - 4xz + x^2 - xz = 0$

$\Rightarrow x^2 z' - 5xz + x^2 = \quad / : x^2 \quad \Rightarrow \underline{z' - \frac{5}{x} \cdot z + 1 = 0}$ Ec. liniară neom. ord. 1

Ec. omogenă $z' - \frac{5}{x} z = 0 \; ; \to z' = \frac{5}{x} z \; ; \; \frac{z'}{z} = \frac{5}{x} \; ; \int \frac{z'}{z} dx = \int \frac{5}{x} dx + \ln C$

$\ln z = 5 \cdot \ln x + \ln C \; ; \; \ln z + \ln x^5 + \ln C \to z_0 = C \cdot x^5$

Metoda constantelor variabile: $C = C(x) \Rightarrow z = x^5 \cdot C(x) \Rightarrow z' = 5x^4 \cdot C(x) + x^5 \cdot C'(x)$

$\hookrightarrow 5x^4 C(x) + x^5 \cdot C'(x) - \frac{5}{x} C(x) x^5 + 1 = 0 \; ; \; \cancel{5x^4 C(x)} + x^5 C'(x) - \cancel{5x^4 C(x)} + 1 = 0$

$\hookrightarrow x^5 C'(x) = -1 \; ; \; C'(x) = -\frac{1}{x^5} \; ; \; C'(x) = -x^{-5}$

$\hookrightarrow C(x) = -\int x^{-5} dx + K = -\frac{x^{-4}}{-4} K \to C(x) = K + \frac{1}{4x^4} \to \boxed{C(x) = K + \frac{1}{4x^4}}$

$\hookrightarrow z = C(x) \cdot x^5 \; ; \; z = x^5\left(K + \frac{1}{4x^4}\right) \; ; \; \boxed{z = Kx^5 + \frac{x}{4}}$

$\hookrightarrow y = y_1 - \frac{1}{z} \; ; \; y = \frac{2}{x} - \frac{1}{Kx^5 + \frac{x}{4}}$

ii) 2 sol particulare

schimbarea de funcție $\Rightarrow z = \dfrac{y - y_1}{y - y_2}$

$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \Rightarrow z' + P(x)\left(y_1(x) - y_2(x)\right) \cdot z = 0$ ec. liniară omogenă în z

$\hookrightarrow \dfrac{z'}{z} = -(y_2 - y_1) \cdot P(x)$

$\hookrightarrow \ln z = -\int (y_2 - y_1) P(x)\, dx + \ln K$

Temă:

$x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0 \rightarrow x^2 y' + x^2 y^2 - 4xy + 4 = 0 /: x^2 \rightarrow y' + y^2 - \dfrac{4}{x} y + \dfrac{4}{x^2} = 0$

$y_{particular} = \dfrac{a}{x} \rightarrow -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{4}{x} \cdot \dfrac{a}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0 \rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 < \begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \end{matrix}$

$y_1 = \dfrac{1}{x} \quad y_2 = \dfrac{4}{x}$
