ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE OMOGENE ȘI NEOMOGENE CU COEFICIENȚI VARIABILI DE ORDINUL N

→ sunt de 2 tipuri → Euler
→ Cauchy

Noi facem:

EULER $a_0 \cdot x^n \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot x \cdot y' + a_n \cdot y = f(x)$

$a_i, \ i = \overline{0,n}$ sunt constante $x \neq 0$

$f : I \to \mathbb{R}$ → continuă pe $\mathring{I} \subset \mathbb{R}$

Soluția generală a ecuației: y ;

$$y = y_0 + y_p$$

y_0 → sol. generală a ec. neomogene

y_p → sol. particulară

$A_n(y) = 0$; se caută soluții de forma: $y = x^r$

r → un nr. care se va determina

$$y' = r \cdot x^{r-1}$$
$$y'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$$
$$y''' = r(r-1)(r-2) \cdot x^{r-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} = r(r-1)(r-2) \cdot \ldots (r-n+1) \cdot x^{r-n}$$

$$\Rightarrow x^r \left[r(r-1)\ldots(r-n+1) \cdot a_0 + r(r-1)\ldots(r-n+2) \cdot a_1 + \ldots + a_{n-1} \cdot r \cdot a_n \right] = 0$$

⇓

ecuația caracteristică asociată ecuației omogene

⇓

este o ecuație polinomială de gradul n în r

$$r_1, r_2, \dots r_n$$

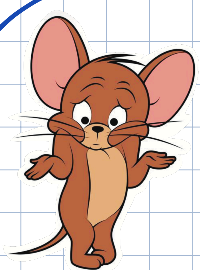
$$r_1 \neq r_2 \neq \dots \neq r_n \ ; \ r_i \in \mathbb{R} \ , \ i = \overline{1,n}$$

Fiecărei rădăcini a ecuației caracteristice, îi corespunde o soluție a ecuației diferențiale omogene
$$\begin{cases} r_1 \longrightarrow x^{r_1} \\ r_2 \longrightarrow x^{r_2} \\ \dots \\ r_n \longrightarrow x^{r_n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0 = C_1 \cdot x^{r_1} + C_2 \cdot x^{r_2} + \dots + C_n \cdot x^{r_n}$$

Pentru o soluție particulară a ecuației neomogene, se recomandă metoda variației constantelor.

Exemplu 1



$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0 \quad \leftarrow \text{ec de ordinul 2}$$

Vom căuta soluții de forma $y = x^r$

$$\Rightarrow y' = r \cdot x^{r-1}$$
$$y'' = r(r-1)\, x^{r-2}$$

$$x^2 \cdot x^{r-2} \cdot r(r-1) + x \cdot x^{r-1} \cdot r - x^3 = 0 \quad \Big| : r$$

$$r(r-1) + r - 1 = 0$$

$$(r-1)(r+1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^1 \\ y_2 = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0 = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \frac{1}{x}$$

Exemplu 2

Să se determine ecuația diferențială de ordin 2, care admite funcțiile $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$ ca sistem fundamental de soluții

a) $W(y_1, y_2) \neq 0$

b) $W(y, y_1, y_2) = 0$

a) $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \neq 0$$

b) $W(y, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$

$$= \begin{vmatrix} y & x & \frac{1}{x} \\ y' & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ y'' & 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$= y''(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} + y' \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix}$$

$$+ y(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$-\frac{2}{x}\cdot y'' - y'\cdot\frac{2}{x^2} + y\cdot\frac{2}{x^3} = 0 \quad \Big|\, -x^3$$

$$2x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

$$\boxed{x^2 y'' + xy' = y = 0}$$

Cazul 2

Ecuația caracteristică are rădăcini reale și multiple

$$r_1 = r_2 = \alpha \quad ; \quad \begin{cases} y = x^r \\ y_1 = x^\alpha \\ y_2 = ? \end{cases}$$

Se face o schimbare de variabilă independentă $\longrightarrow$ $x = e^t$; $\frac{dx}{dt} = e^t$

$$y' = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{derivata în raport cu } x} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{e^t} = e^{-t}\cdot\dot{y}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\cdot\dot{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\cdot\dot{y}\right)\cdot\frac{dt}{dx} =$$

$\longrightarrow$ depinde numai de t

$$= e^{-t}\left(-e^{-t}\cdot\dot{y} + e^{-t}\cdot\ddot{y}\right) = (\ddot{y}-\dot{y})\cdot e^{-2t} = y''(x)$$

$(\dot{y})' = \ddot{y}$ $\longrightarrow$ derivata în raport cu t

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}) + e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y} - y = 0$$

$$\ddot{y}-\dot{y}+\dot{y}-y=0$$

$$\ddot{y} - y = 0$$
$$y = e^{rt}$$
$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1 \quad \begin{cases} r_1 = 1 \Rightarrow y_1 = e^{t} = x \\ r_2 = -1 \Rightarrow y_2 = e^{-t} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = r \cdot e^{rt} \\ \ddot{y} = r^2 \cdot e^{rt} \\ y = e^{rt} \end{cases}$$

Dacă avem o rădăcină dublă?

$$x = e^{t} \; ; \quad \Rightarrow t = \ln x$$

$$r_1 = r_2 = \alpha$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha t} \\ y_2 = t \cdot e^{\alpha t} \end{cases} \qquad e^{\alpha t} = (e^{t})^{\alpha} = x^{\alpha}$$

Soluțiile ecuației în variabila x sunt: $y_1 = x^{\alpha}$

$y_2 = (\ln x) \cdot x^{\alpha}$

Cazul 3

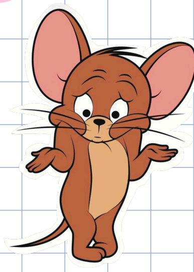
Ecuația caracteristică are rădăcini complex conjugate simple:
(pt. ecuația în variabila t)

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta \longrightarrow y_1 = e^{(\alpha + i\beta)\cdot t} \\ r_2 = \alpha - i\beta \longrightarrow y_2 = e^{(\alpha - i\beta)\cdot t} \end{cases}$$

pt. ecuația în x: $y_1 = e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{i \beta \cdot t} \longrightarrow x^{\alpha} \cdot \cos(\beta \cdot \ln x)$

$y_2 = e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-i\beta t} \longrightarrow x^{\alpha} \cdot \sin(\beta \cdot \ln x)$

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL 1 LINIARE, OMOGENE ȘI NEOMOGENE



Def Este un sistem de forma:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)\cdot y_1 + a_{12}(x)\cdot y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\cdot y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)\cdot y_1 + a_{22}(x)\cdot y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\cdot y_n + f_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)\cdot y_1 + a_{n2}(x)\cdot y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\cdot y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} ; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

din (1) $\Rightarrow$ $\dfrac{dy}{dx} = A(x)\cdot y + F(x)$ (1)

Dacă $F(x) \equiv 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = A(x) \cdot y$ (2) se numește sistemul omogen asociat sistemului neomogen

O soluție a sistemului (1) pe intervalul $\dot{I}$ va fi un vector format din cele n funcții $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ de clasă C_1 pe intervalul $\dot{I}$ și care verifică sistemul în $\forall$ punct din $\dot{I}$

? funcțiile $y_1 \ldots y_n$ + derivatele lor de ordin 1 $\rightarrow$ sunt continue pe I

Teoremă

$\rightarrow$ mulțimea soluțiilor sistemului omogen $\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y$ este un spațiu vectorial n dimensional

Fie $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix} \ldots Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$, n soluții liniar independente ale sistemului omogen

? o bază a spațiului vectorial al soluțiilor $\Rightarrow$

$\forall$ soluție a sist. omogen, poate fi exprimată ca o combinație liniară cu coef. constanți $(C_1, C_2, \ldots C_n)$ al celor n soluții

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2 + \ldots + C_n \cdot Y_n$$

$$= (Y_1, Y_2, \ldots Y_n) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = W(x) \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \rightarrow$$ matricea fundamentală de soluții a sistemului omogen

Din această soluție se poate obține o sol. particulară a sist. omogen prin particularizarea constantelor $(C_1, C_2, \dots C_n)$, în urma impunerii unui set de condiții inițiale

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} ; \ x_0 \in I$$

valorile inițiale ale funcțiilor necunoscute în $x_0 \in I$

Se obține soluția generală desfășurată a sistemului omogen

$C \rightarrow$ constanta funcție

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cdot y_{11} + C_2 y_{12} + \dots + C_n y_{1n} \\ y_2 = C_2 \cdot y_{21} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{2n} \\ \dots \\ y_n = C_n \cdot y_{n1} + C_n y_{n2} + \dots + C_n y_{nn} \end{cases}$$

Exemplu

$$(1 - x \cdot e^x) \cdot \frac{dy_1}{dx} = -e^x \cdot y_1 + y_2$$

$$(1 - x \cdot e^x) \frac{dy_2}{dx} = e^x \cdot y_1 + y_2$$

cu $1 - x e^x \neq 0$ pe $\mathbb{R}$

Soluția

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{x} \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$ este sol. a sistemului ($1 - xe^{x} \neq 0$)

SISTEME NEOMOGENE ȘI METODA VARIAȚIEI CONSTANTELOR

Fie:

(1) $\dfrac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y + F(x)$ ← neomogen $\longrightarrow Y_p$

(2) $\dfrac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y$ ← omogen asociat $\longrightarrow Y_\phi$

$\boxed{\text{Teoremă}}$ Sol. gen. a sist. (1) este suma dintre sol. generată a sist. general asociat 2 și o soluție particulară a sist. neomogen (1)

$$Y = Y_\phi + Y_p$$

Determinarea unei sol. particulare a sist. neomogen prin metoda variației constantelor.

(se urmărește exact algoritmul parcurs la ec. lin. de ordinul 1 și ordinul n

1 Se scrie sol. gen. a sist. neomogen

$Y_\phi = W(x) \cdot C(x) \longrightarrow$ să verifice sistemul neomogen

$\dfrac{dY_\phi}{dx} = \dfrac{dW(x)}{dx} \cdot C(x) + W(x) \cdot \dfrac{dC(x)}{dx} \longrightarrow$ înlocuim în sistemul neomogen

$$\frac{dW}{dx} \cdot C(x) + W(x) \cdot \frac{dC(x)}{dx} = A(x) \cdot W(x) \cdot C(x) + F(x)$$

$$\underbrace{\left(\frac{dW}{dx} - A(x) \cdot W(x)\right)}_{\substack{0 \\ \text{matricea} \\ \text{nula}}} \cdot C(x) + W(x) \cdot \frac{dC(x)}{dx} = F(x)$$

$$\Downarrow$$

$$W(x) \cdot \frac{dC(x)}{dx} = F(x) \quad \Big| \cdot (W(x))^{-1}$$

$$\det W(x) \neq 0 \Rightarrow \exists\, (W(x))^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(W(x))^{-1} \cdot W(x)}_{I_n} \cdot \frac{dC(x)}{dx} = (W(x))^{-1} \cdot F(x) \Leftrightarrow \frac{dC(x)}{dx} = (W(x))^{-1} \cdot F(x)$$

$$\Rightarrow C(x) = \int (W(x))^{-1} \cdot F(x)\, dx + K$$

$$\Rightarrow Y = W(x) \cdot C(x) = \underbrace{W(x) \cdot K}_{\substack{\text{sol. gen.} \\ \text{a ec. omogene}}} + \underbrace{W(x) \cdot \int (W(x))^{-1} \cdot F(x)\, dx}_{\substack{\text{sol. particulară} \\ \text{a ec. neomogene,} \\ \text{obținută prin metoda} \\ \text{ct. variabile}}}$$

Construcția unui sistem omogen de ecuații diferențiale

Știm că mulțimea soluțiilor sistemului omogen are o structură de spațiu vectorial n dimensional și o bază a sa este formată din n soluții liniar independente $\Rightarrow$ n+1 soluții vor fi liniar dependente

Pp. că se dă o bază a spațiului soluțiilor

$$W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ Y_1 & Y_2 & & Y_n \end{array} \end{array}$$

$$\det W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \neq 0$$

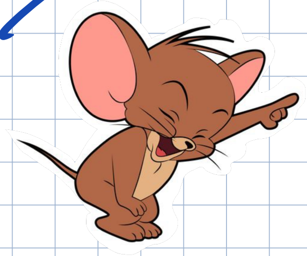
Fie acum a $(n+1)$ soluție a sistemului omogen, notată $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Punem condiția ca Y și $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ să fie liniar dependent
determinantul de $(n+1)$ trb. să fie $= 0$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{dy_k}{dx} & \frac{dy_{k1}}{dx} & \frac{dy_{k2}}{dx} & \cdots & \frac{dy_{kn}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & \vdots & & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_k & y_{k1} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{pmatrix} = 0$$

Cele n relații care se obțin reprezintă ecuațiile sistemului căutat

Exemplu



Fie $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}$

$Y_2 = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ 1 Verificam ca Y_1 și Y_2 formează un sist. liniar independent

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix} = \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$$

adică este primul sistem

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

pt. $k=1$:

$$\begin{vmatrix} y_1' & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y_1' = 2y_2$$

pt $k=2$:

$$\begin{vmatrix} y_2' & -2\cos 2x & -2\sin 2x \\ y_1 & \cos 2x & \sin 2x \\ y_2 & -\cos 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y_2' = -2y_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE, LINIARE ȘI OMOGENE CU COEF. CONSTANȚI

Forma generală:
$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots \; a_{2n}y_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots \; a_{nn}y_n$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \; ; \; A = (a_{ij}) \; ; \; \frac{dY}{dx} = A \cdot Y$$

Pt. un astfel de sistem se poate determina întotdeauna un sist. fundamental de soluții și soluția generală.

Pt. astfel de sisteme se caută soluții de forma:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \quad ; \quad A_i \text{ constante}, \; \forall i = \overline{1,n}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} rA_1 \\ r \cdot A_2 \\ \vdots \\ r \cdot A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \quad ; \quad Y' = A \cdot Y$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdot r \\ A_2 \cdot r \\ \vdots \\ A_n r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \Big| ; e^{rx}$$

$$A_1 \cdot r = a_{11} \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + \dots + a_{1n} A_n$$
$$A_2 \cdot r = a_{21} \cdot A_1 + a_{22} \cdot A_2 + \dots + A_{2n} \cdot A_n$$
$$\dots$$
$$A_n r = a_{n1} \cdot A_1 + a_{n2} \cdot A_2 + \dots + a_{nn} \cdot A_n$$

$$(a_{11} - r) \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + \dots + a_{1n} \cdot A_n = 0$$
$$a_{21} \cdot A_1 + (a_{22} - r) \cdot A_2 + \dots + A_{2n} \cdot A_n = 0$$
$$\dots$$
$$a_{n1} \cdot A_1 + a_{n2} A_n + \dots + (a_{nn} - r) \cdot A_n = 0$$

sistem omogen de ec. cu $(n+1)$ necunoscute $A_1, A_2, \dots A_n$ și r

Sol. necesară și suficientă ca acest sistem să admită soluții nenule este ca det. său să fie $= 0$

$\det(A - r I_n) = 0 \Rightarrow$ polinomul caracteristic al matricei A $\to$ polinom de gradul n $\Rightarrow$ va avea n rădăcini

$$\det(A - r I_n) = \varphi_A(r) = 0$$

$\hookrightarrow (r_i)_{i=\overline{0,n}} \to$ valorile proprii ale matricei A

ele pot fi

1. reale
   - distincte
   - multiple
2. complexe
   - simple
   - multiple

Pentru fiecare valoare proprie se determină vectorul corespunzător

$$r_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} = V_1 \qquad \Rightarrow \qquad Y_1 = V_1 \cdot e^{r_1 x} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} \cdot e^{r_1 x}$$

Valoarea 1

$$\Rightarrow \Delta(x) = (Y_1, Y_2, \ldots Y_n) = (V_1, V_2, \ldots V_n) \cdot \begin{pmatrix} e^{r_1 x} \\ e^{r_2 x} \\ \vdots \\ e^{r_n x} \end{pmatrix}$$

carte: ... by Eliferie Rogai
"Ecuații diferențiale ...."

Exemplu

Metoda valorilor și vectorilor proprii

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 4z \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} = y + 4z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dy}{dx} \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} A_1 \cdot e^{rx} \\ A_2 \cdot e^{rx} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot r \cdot e^{rx} \\ A_2 \cdot r \cdot e^{rx} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \cdot r \\ A_2 \cdot r \end{pmatrix} \cdot e^{rx} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \quad \Big| : e^{rx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 r = A_1 + 4A_2 \\ A_2 r = A_1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(r-1) + 4A_2 = 0 \\ A_1 + (1-r)\cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

sistem omogen, de 2 ecuații, de 2 necunoscute, cu soluții nenule

$$\Leftrightarrow \det(A - rI_2) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-r & 4 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-r)^2 - 4 = 0$$

$$(1-r-2)(1-r+2) = 0$$

$r_1 = -1$

$r_2 = 3$

valorile proprii ale lui A

$$r_1 = -1; \quad \begin{cases} 2A_1 + 4A_2 = 0 \quad |:2 \\ A_1 + 2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 = -2A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

$$r_2 = 3; \quad \begin{cases} -2A_1 + 4A_2 = 0 \quad |:2 \\ A_1 - 2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 - 2A_2 = 0 \\ \Downarrow \\ A_1 = 2A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A_2 \Rightarrow Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

$$W(x)\{Y_1, Y_2\} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} & 2e^{3x} \\ e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix};$$

$$\det W(x) = -4e^{2x} \neq 0$$

Soluția generală
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2e^{-x} & 2e^{3x} \\ e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{3x} \\ y_2 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x} \end{cases} \quad (*)$$

Metoda 2

Transformarea sistemului într-o singură ec. de ord 2

derivăm încă o dată una din ecuații

$$\begin{cases} y' = y + 4z \\ z' = y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'' = y' + 4z' \\ z' = y + z \end{cases} \Rightarrow$$

$$y'' = y' + 4(y + z)$$
$$y'' = y' + 4y + 4z$$
$$y' = y + 4z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4z = y' - y$$
$$\Downarrow$$
$$y'' = y' + 4y + y' - y$$
$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

$$\Rightarrow y = e^{rx} \Rightarrow y' = r \cdot e^{rx} \;;\; y'' = r^2 \cdot e^{rx}$$
$$(r^2 - 2r - 3) \cdot e^{rx} = 0 \;;\; \underline{r^2 - 2r - 3 = 0}$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12$$
$$r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

$$z = \frac{1}{4}(y' - y) = \frac{1}{4}\left(-C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 \cdot e^{3x} - C_1 \cdot e^{-x} - C_2 e^{3x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2C_1 \cdot e^{-x} + 2C_2 \cdot e^{3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}\right) = z$$