03.12.2021

Elemente de calcul integral

(I) Primitive

Definiție Fie $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I = interval. Spunem că funcția f admite primitive pe I dacă există o funcție $F: I \to \mathbb{R}$, cu proprietățile:

a) F este derivabilă pe I

b) $F'(x) = f(x)$, $(\forall) x \in I$.

Mulțimea primitivelor funcției f se numește integrala nedefinită a lui f și se notează prin:

$$\int f(x) \cdot dx = \{F: I \to \mathbb{R} \mid F \text{ este primitivă a lui } f\}.$$

Dacă f admite primitive pe I, atunci f admite o infinitate de primitive pe I și oricare două primitive diferă între ele printr-o constantă: $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C \Leftrightarrow (F(x)+C)' = f(x)$, $(\forall) C$ = constantă.

Tabloul primitivelor funcțiilor elementare

Proprietăți și rezultate fundamentale

(1°) O funcție continuă, $f: I \to \mathbb{R}$, admite primitive pe I.

(2°) Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I atunci f are proprietatea lui Darboux pe I (Dacă $f: I \to \mathbb{R}$, este derivabilă pe I, atunci și derivata sa, $f': I \to \mathbb{R}$, are proprietatea lui Darboux pe I, (chiar dacă nu este continuă pe I)) deci o condiție necesară ca o funcție f să admită primitive pe I este ca funcția f să aibă P.D. pe I.

(3°) Dacă f nu are P.D pe $I \Rightarrow f$ nu admite primitive pe I.

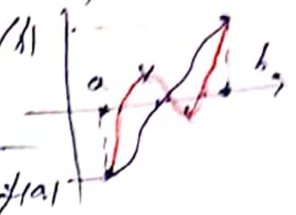
(4°) Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ și f și g admit primitive pe I. Atunci:

a) $f+g$ admite primitive pe I și

$\int (f(x)+g(x))\cdot dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (aditivitate)

b) $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\cdot f$ admite primitive și

$\int (\alpha\cdot f(x))dx = \alpha\cdot\int f(x)dx$ (omogenitate) ⇒ o constantă „iese" de sub integrală



(analog cu $(\alpha\cdot f(x))' = \alpha\cdot f'(x)$)

Def. O aplicație aditivă și omogenă se numește aplicație liniară.

a) și b) se pot scrie într-o singură relație

$$\int (\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\cdot dx = \alpha\cdot\int f(x)dx + \beta\cdot\int g(x)dx$$

⟺ proprietatea de liniaritate a integralei

$(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))' = \alpha\cdot f'(x)+\beta\cdot g'(x)$ → proprietate de liniaritate a derivatei.

Metode de calcul a primitivelor

1° Metoda integrării directe (prin formule, cu ajutorul tabelului primitivelor)

a) $\int (x-3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\cdot dx = \int x\,dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\cdot dx + \int x^{\frac{1}{3}}dx$

$= \frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{x^2}{2} - 2\cdot x\sqrt{x} + \frac{3}{4}\cdot x\sqrt[3]{x} + C$

b) $\int \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int\left[\sqrt[3]{\frac{x^3}{x}} - 3\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)\right]dx =$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{6}})\cdot dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{5}{3}} - 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + C =$

$= \frac{3}{5}\cdot x^{\frac{5}{3}} - 3\cdot\frac{6}{7}\cdot x^{\frac{7}{6}} + C$

Uneori funcțiile de sub integrală trebuie să mai fie prelucrate pentru a fi aduse la forma din tabelul primitivelor imediate.

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{4}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-x^2}} =$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$= \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{3} \cdot \arcsin \frac{3x}{2} + C$

d) $\int \frac{\sqrt{x^2-3}+1}{x^2-3} \cdot dx = \int \left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2-3} + \frac{1}{x^2-3} \right) dx =$

$= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{1}{x^2-(\sqrt{3})^2} \right) dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| +$

$+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C$

e) $\int \frac{3+\sqrt{x^2+4}}{x^2+4} \cdot dx = \int \frac{3}{x^2+4} dx + \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+4} \cdot dx =$

$3 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{3}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$

2° Metoda integrării prin părți

Această metodă, ca și metodele de schimbare de variabilă se utilizează atunci când expresia de sub integrală nu se regăsește în tabelul primitivelor imediate sau este un produs de funcții.

Teoremă: Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabile, cu derivate continue pe I. Atunci funcțiile $f \cdot g'$ și $f' \cdot g$ admit primitive pe I și are loc relația: $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \iff$

$\int (f(x) \cdot g(x))'\,dx = \int (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x))\,dx$

$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$

$\Rightarrow \boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx}$

Alegerea funcțiilor f și g' din integrala de calculat se face urmărind ca integrala din membrul drept la care se ajunge aplicând formula de integrare prin părți să fie mai ușor de calculat decât cea inițială.
Uneori metoda se aplică succesiv, de mai multe ori.

Exemple. a) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x$

$I = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx = x^2 e^x - \int \underline{2x \cdot e^x} dx$

$I = x^2 e^x - 2\int x e^x dx.$

$J = \int x e^x dx$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$J = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

$\Rightarrow I = \int x^2 e^x = x^2 \cdot e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

b) $I = \int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx$

$f(x) = \ln^2 x \Rightarrow f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$
$g'(x) = x^3 \Rightarrow g(x) = \int x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4}$

$\Rightarrow I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - 2\int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x dx$

$I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int x^3 \ln x \cdot dx}_{J}$

$J = \int x^3 \cdot \ln x\, dx$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = x^3 \Rightarrow g(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

$\Rightarrow J = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx$
$= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$
$= \underbrace{\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{x^4}{16}}$

$\Rightarrow I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \cdot \ln x + \frac{x^4}{32} + C$

c) $I = \int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x\, dx$; $J = \int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \cdot dx$

$I = \int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x\, dx$

$f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x}$

$g'(x) = \sin \beta x \Rightarrow g(x) = \int \sin \beta x \, dx = -\frac{\cos \beta x}{\beta}$

$\Rightarrow I = -e^{\alpha x} \cdot \frac{\cos \beta x}{\beta} - \int \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(-\frac{\cos \beta x}{\beta}\right) \cdot dx$

$$I = -e^{\alpha x} \cdot \frac{\cos \beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \underbrace{\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \, dx}_{J}$$

$$\boxed{I - \frac{\alpha}{\beta} \cdot J = -\frac{e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x}{\beta}} \quad (1^{\circ})$$

Fie $J = \int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \cdot dx$

$f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x}$

$g'(x) = \cos \beta x \, ; \; g(x) = \int \cos \beta x \, dx = \frac{1}{\beta} \cdot \sin \beta x$

$$J = \frac{e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \underbrace{\int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x \cdot dx}_{I}$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot I + J = \frac{e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}{\beta}} \quad (2^{\circ})$$

$$\begin{cases} I - \frac{\alpha}{\beta} \cdot J = -\frac{e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \cdot I + J = \frac{e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x}{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = \ldots \\ J = \ldots \end{cases}$$

Aplicație – metoda relațiilor de recurență pentru calculul primitivelor

ⓐ Să se stabilească formula de recurență pentru integrala: $I_n = \int \ln^n x \cdot dx$

$I_n = \int \ln^n x \cdot 1 \cdot dx \qquad n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \ln^n x \Rightarrow f'(x) = n \cdot (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \int 1 \cdot dx = x$

$$I_n = x \cdot \ln^n x - \int n \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln^{n-1} x \cdot x \, dx$$

$$I_n = x \cdot \ln^n x - n \underbrace{\int \ln^{n-1} x \cdot dx}_{I_{n-1}}$$

$$\boxed{I_n = x \cdot \ln^n x - n \cdot I_{n-1}}$$

Ex: $I_5 = \int \ln^5 x \cdot dx$

$$\left.\begin{array}{l} I_5 = x \cdot \ln^5 x - 5 \cdot I_4 \\ I_4 = x \cdot \ln^4 x - 4 I_3 \\ I_3 = x \cdot \ln^3 x - 3 I_2 \\ I_2 = x \cdot \ln^2 x - 2 I_1 \\ I_1 = x \ln x - 1 \cdot I_0 = x \ln x - x \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 \Rightarrow I_3 \Rightarrow I_4 \Rightarrow I_5$$

(b) $I_n = \int \frac{1}{\sin^n x} \cdot dx$

$$I_n = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^{n-2} x} = \sin^{-n+2} x \Rightarrow f'(x) = (-n+2) \cdot \sin^{-n+1} x \cdot \cos x$$
$$= (2-n) \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow g(x) = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow I_n = + \frac{1}{\sin^{n-2} x} \cdot \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) - \int (2-n) \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} \cdot \left(-\frac{\cos x}{\sin x}\right) \cdot dx$$

$$I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} \cdot dx$$

$$I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \cdot \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^n x} \cdot dx$$

$$I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \cdot \left(I_n - I_{n-2}\right)$$

Scanned with CamScanner

$$I_n(1+n-2) = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + (n-2)\cdot I_{n-2} \quad /: n-1$$

$$\boxed{I_n = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\cdot I_{n-2}}$$

Ex! $I_{10} = \int \frac{1}{\sin^{10}x}\cdot dx \ldots\ldots$

ⓒ $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx$; $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; $K_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx = \int x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$

$f(x) = x^{n-1} \Rightarrow f'(x) = (n-1)\cdot x^{n-2}$

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $g(x) = \sqrt{x^2+a^2}$ $\quad (\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$I_n = x^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+a^2} - \int (n-1)\cdot x^{n-2}\cdot\sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

$$I_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}(x^2+a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$$

$$I_n = x^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\cdot\left(\underbrace{\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx}_{I_n} + a^2\cdot\underbrace{\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+a^2}} dx}_{I_{n-2}}\right)$$

$$I_n(1+n-1) = x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - (n-1)\cdot a^2\cdot I_{n-2} \quad /: n$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n}\cdot x^{n-1}\cdot\sqrt{x^2+a^2} - \frac{n-1}{n}\cdot a^2\cdot I_{n-2}}$$

Ex J_n ; K_n ;

Metoda 1 de schimbare de variabilă

Se utilizează când expresia de sub integrală este un produs de 2 funcții, de o formă specială.

<u>Teoremă</u> Fie funcțiile $u: I \to J$ și $f: J \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) u este derivabilă pe I;

b) f admite primitive pe J. Fie F o primitivă a sa pe J $(F'(t) = f(t), \forall t \in J)$

Atunci: a) Funcția $(f \circ u) \cdot u'$ admite primitive pe I;

b) $\int f(u(x)) \cdot u'(x) \cdot dx = F(u(x)) + C$

Funcția u este funcția care schimbă variabila.

<u>Algoritm de aplicare.</u>

Avem de calculat primitiva unei funcții de forma: $f(u(x)) \cdot u'(x)$:

$I = \int f(u(x)) \cdot \underbrace{u'(x) \cdot dx}$;
$$\begin{tikzcd} x \in I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f \circ u"'] & J \ni u(x) = t \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \ni f(u(x)) \end{tikzcd}$$

1° Se identifică, sub integrală, funcțiile u', u și f ținând seama de <u>faptul că u' este un factor în această expresie.</u>

2° Se face schimbarea de variabilă $u(x) = t$ și se calculează diferențiala acestei relații

$u(x) = t \iff du(x) = dt \iff \underline{u'(x) \cdot dx = dt}$

3° Se asociază o altă integrală (auxiliară) în variabila t, astfel:

$$I_t = \int f(t) \cdot dt = F(t) + C$$

4° Se revine la variabila inițială, se:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$, q.e.d.

Schema operațiilor:

$$I_x = \underbrace{\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx}_{:I\to\mathbb{R}} \xrightarrow[u(x)=t]{} I_t = \underbrace{\int f(t)\,dt}_{:J\to\mathbb{R}} = \underbrace{F(t)+C}_{:J\to\mathbb{R}} \Rightarrow \underbrace{F(u(x))+C}_{:I\to\mathbb{R}}$$

Aplicații

a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x + 3)}$

$u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $u(x) = \operatorname{arctg} x + 3$; $f(t) = \frac{1}{t}$

$u'(x) = (\operatorname{arctg} x + 3)' = \frac{1}{1+x^2}$; $u'(x)\cdot dx = dt$

$u(x) = t \iff \operatorname{arctg} x + 3 = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = dt$

$I_t = \int \frac{1}{t}\cdot dt = \ln t + C$

$\Rightarrow I_x = \ln(\operatorname{arctg} x + 3) + C$

b) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^3}$; $x > 1$;

$u'(x) = \frac{1}{x}$; $u(x) = 1+\ln x$; $f(t) = \frac{1}{t^3}$

$u(x) = t \iff (1+\ln x) = t \Rightarrow u'(x)\cdot dx = \frac{1}{x}\cdot dx = dt$

$I_t = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}\,dt = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} + C$

$\Rightarrow I_x = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+\ln x)^2} + C$

c) $I_x = \int x^3\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = \int x^2\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot x\cdot dx$

$u(x) = \underline{x^2+1 = t} \Rightarrow u'(x)\cdot dx = 2x\cdot dx = dt$

$I_x = \frac{1}{2}\int x^2\cdot\sqrt{x^2+1}\cdot\underbrace{2x\,dx} \Rightarrow x^2 = t-1$

$I_t = \frac{1}{2}\int (t-1)\cdot\sqrt{t}\cdot dt = \frac{1}{2}\int (t\sqrt{t} - \sqrt{t})\,dt = \frac{1}{2}\int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{5}\cdot t^2\sqrt{t} - \frac{1}{3}\,t\sqrt{t} + C$

$\Rightarrow I_x = \frac{1}{5}(x^2+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{3}(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1} + C$

A doua metodă de schimbare de variabilă

Constatăm că prima formulă de schimbare de variabilă, în acest caz avem de calculat o primitivă de forma: $I_x = \int f(u(x))dx$ (lipsește factorul $u'(x)$ sub integrală)

Teorema: Fie funcțiile $u: I \to J$ și $f: J \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

a) u este continuă și bijectivă pe I, iar inversa sa, $u^{-1}: J \to I$ este derivabilă și are derivata continuă pe J;

b) $f: J \to \mathbb{R}$ este continuă pe J

Atunci: a) $f(u)$ admite primitive pe I

b) dacă $F: I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f(t) \cdot (u^{-1}(t))'$ pe I, atunci

$$\int f(u(x))\,dx = F(u(x)) + C$$

Practic: ① se face schimbarea de variabilă $u(x) = t$; $u: I \to J$

② se deduce $x = u^{-1}(t)$; $u^{-1}: J \to I$

③ se calculează $dx = (u^{-1}(t))' \cdot dt$

④ se calculează $I_t = \int f(t) \cdot u^{-1\prime}(t)\,dt = F(t) + C$

⑤ se revine la variabila inițială:

$$\int f(u(x))dx = F(u(x)) + C$$

De regulă, aplicând această metodă se obține primitive din funcții raționale în variabila t.

Exemple a) $I_x = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \cdot dx$

$e^x = t \Rightarrow x = \ln t$ $\;\; \Rightarrow dx = (\ln t)' \cdot dt$

$(u(x) = t \Leftrightarrow x = u^{-1}(t))$ $\;\; dx = \frac{1}{t} \cdot dt.$

$I_t = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c$

$\Rightarrow \boxed{I_x = \operatorname{arctg} e^x + c}$

② $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \cdot dx$; $\sqrt[6]{x} = t$; $u(x) = t \Rightarrow x = t^6$

$x^{\frac{1}{6}} = t$ $\;\; (x = u^{-1}(t))$

$\Rightarrow dx = 6t^5 \cdot dt$ $\;\; \boxed{dx = 6t^5 \cdot dt}$ $\;\; \sqrt{t^6} = t^3 ; \sqrt[3]{t^6} = t^2$

$f(t) = \frac{t^3}{t^3 - t^2} \Rightarrow I_t = \int \frac{t^3}{t^3 - t^2} \cdot 6t^5\, dt =$

$= 6 \int \frac{t^6}{t-1}\, dt = 6 \int \frac{t^6 - 1 + 1}{t-1}\, dt = 6\left(\int \frac{t^6 - 1}{t-1} dt + \int \frac{dt}{t-1} \right)$

$t^6 - 1 = (t-1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$

$= 6\left(\int (t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)\, dt + \ln|t-1| \right) =$

$= 6\left(\frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \right) + 6 \ln|t-1| + c$

se înlocuiește t cu $\sqrt[6]{x} \Rightarrow I_x$.

③ $I_x = \int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} \cdot dx$; $\sqrt[3]{x-1} = t \Rightarrow x - 1 = t^3 ; x = t^3 + 1$

$dx = 3t^2 dt \Rightarrow I_t = \int \frac{t^3 + 1}{t} \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^4 + t)\, dt$

$= 3\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) + c$; se înlocuiește t cu $\sqrt[3]{x-1}$

④ $I_x = \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x\, dx$

$\cos x = t \Rightarrow (-\sin x) \cdot dx = dt$

$I_t = -\int (1 - t^2) \cdot t^2 \cdot dt = \int (t^4 - t^2) \cdot dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + c$

$\Rightarrow \boxed{I_x = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c}$