Algoritmica grafurilor

Elemente combinatorică

Combinatorica este o parte din teoria mulțimilor ce se ocupă cu studiul mulțimilor finite și ordonate.

Mulțimi ordonate = mulțime finită pe care s-a definit o ordine de dispunere a elementelor sale.

Permutări de n elemente

Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$ mulțime finită cu n elemente.

Această mulțime se poate ordona în mai multe moduri, obținând mulțimi ordonate diferite, ce se deosebesc între ele, numai prin ordinea elementelor.

Aceste mulțimi se numesc permutări de n elemente și se notează cu

$$P = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$

Demonstrație

Def: Funcție injectivă

O fct. $f: A \to B$, se numește injectivă dacă $(\forall)\, x_1 \neq x_2$ din $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ din B.
La valori diferite ale argumentului corespund valori diferite ale funcției.

Def Funcție surjectivă

O fct. $f: A \to B$, se numește surjectivă dacă $(\forall)\, y \in B$ (codomeniu) $\Rightarrow (\exists)\, x \in A$ (domeniu) astfel încât $f(x) = y$.

Notații

B = mulțimea în care funcția ia valori.
$f(A)$ = imaginea funcției f = $Im f = \{y \in B \mid y = f(x), x \in A\}$
$f(A)$ = mulțimea valorilor funcției
În general $f(A) \subset B$

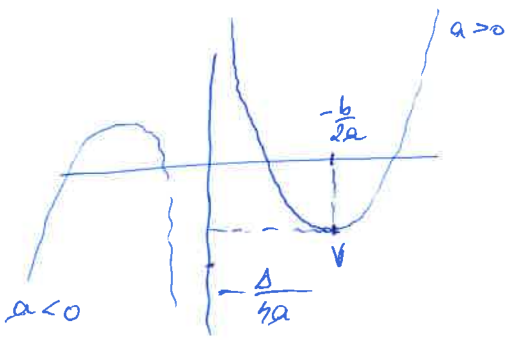
Exemple

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$f: \mathbb{R} \to \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$



Dacă $(\exists)\, y \in B$ a.î. pt. $(\forall) x \in A \Rightarrow f(x) \neq y \Rightarrow f$ nu este surjectivă.

Fie $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \to \{1, 2, 3, \dots, n\}$ – cerem ca funcția să fie injectivă

$\Rightarrow (\forall)\, i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(i) & \dots & f(j) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \quad (\forall)\, i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$$

Cum în domeniul de definiție Δf $(\forall)\, i \neq j$, din ipoteza, din ipoteza de injectivitate $\Rightarrow f(i) \neq f(j) \Rightarrow (\forall)\, i \neq j) \Leftrightarrow$ pe linia valorilor f se află toate elementele din $\{1, 2, 3, ---, n\}$, eventual permutate între ele.

Def

Dacă funcția f definită pe o mulțime finită cu n elemente cu valori în ea însăși este injectivă, atunci ea este și surjectivă, deci bijectivă.

Funcția f astfel definită realizează o permutare a mulțimii de definiție.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & - - - & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & - - - - & f(n) \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ n & n-1 & n-2 & - - - - & 1 \end{array}$$

Vrem să determinăm numărul tuturor funcțiilor bijective (deci al permutărilor) definite pe mulțimea $(1, 2, ---- n) \longrightarrow (1, 2, --- n)$

Numărul funcțiilor bijective = nr. funcțiilor injective $= P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots\, n = n!$

Aranjamente și combinări de n elemente luate câte k.

Combinări de n elemente luate câte k, $1 \leq k \leq n$

Fie A o mulțime cu n elemente $A = \{1, 2, 3, ---- n\}$

Se numește combinare de n elemente luate câte k, orice submulțime neordonată formată din k elemente extrase din mulțimea A.

$$f : \{1, 2, 3, --- K\} \rightarrow \{1, 2, 3, ---, k, -- n\}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ---- & k \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & ---- & f(k) \end{pmatrix}$$

În modul de definire al acestei funcții, în ipoteza că elementele codomeniului sunt așezate în crescătoare sau descrescătoare, rezultă că orice combinare de n luate câte k, poate fi identificată cu, fie o funcție strict crescătoare, fie o funcție strict descrescătoare, definită pe $\{1, 2, ---, k\} \longrightarrow \{1, 2, 3, ----, n\}$

Def Aranjamente de n elemente luate câte k

Prin A_n^k se înțelege, submulțimile ordonate formate din k elemente, extrase dintr-o mulțime de n elemente.

$$f : \{1, 2, 3, ----, k\} \longrightarrow \{1, 2, 3, -k, -, n\}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & k \\ f(1) & f(2) & f(3) & f(k) \end{pmatrix}$$ - cerem ca f să fie injectivă

$\Rightarrow$ Aranjamentele sunt combinări permutate $\Rightarrow$ $\boxed{A_n^k = C_n^k \cdot P_k}$

	C_n^k	A_n^k
$k=1$	$C_3^1 : \{1\}, \{2\}, \{3\}$	$A_3^1 : \{1\}, \{2\}, \{3\}$
$k=2$	$C_3^2 : \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$	$A_3^2 : \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,1\}, \{3,1\}, \{3,2\}$
$k=3$	$C_3^3 : \{1,2,3\}$	$A_3^3 = P_3 : \{1,2,3\}, \{2,1,3\}, \{3,1,2\}, \{1,3,2\}, \{2,3,1\}, \{3,2,1\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

Considerăm funcția $f \to \{1,2,3, \dots, k, \dots n\}$

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(k) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ n & n-1 & n-2 & & n-k+1 \end{pmatrix}$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\dots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Exemplu

$$A_{2x}^{y-2} = 8 \cdot C_{2x}^{y-3}$$

Formula combinărilor complementare

$$\begin{bmatrix} C_n^k = C_n^{n-k} \\ C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \end{bmatrix} \qquad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Binomul lui Newton

Recapitulare

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \dots + C_\alpha^n \cdot x^n + \dots$$

Deci pt. n termeni

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n \cdot b^n$$

având $n+1$ termeni.

$$\left.\begin{aligned} C_n^0 &= C_n^n \\ C_n^1 &= C_n^{n-1} \\ &\vdots \\ C_n^k &= C_n^{n-k} \end{aligned}\right\}$$ – coeficienții egal depărtați de extreme sunt egali.

Termenul general al binomului

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} b^k$$

Deducem că:

$$a = b = 1 \Rightarrow \boxed{2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}$$

$$A = \{1,2,3, \dots, n\}$$

$$C_n^0 = \emptyset$$

$$C_n^1 = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{n\} = n$$

$$C_n^2 = \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{1,n\}, \{2,1\} \dots \{n-1, n\} = \frac{n\cdot(n-1)}{2} \text{ elemente}$$

Pentru $a=1$ și $b=-1 \Rightarrow$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots$$

$$2^n = 2(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots) \Leftrightarrow \boxed{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}}$$

$$\boxed{C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}}$$

Def Numărul total de submulțimi cu număr par elemente (sau impar) este egal cu 2^{n-1} elemente.

Extensii și generalizări ale acestor concepte

Aranjamente cu repetiție

Fie: $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}$

Def Se numește cuvânt cu elemente din A, un șir finit și ordonat de elemente din A, scris astfel $a_1a_2\dots a_k$. k reprezintă lungimea cuvântului și cuvântul care nu conține nici un element din A se numește cuvântul vid.

$a_1a_2a_3\dots a_s = b_1b_2b_3\dots b_k$ sunt egale dacă $s=k$ și toate componentele 2 câte 2 sunt egale.

Deosebiri dintre noțiunea de cuvânt și noțiunea de mulțime

- la o mulțime nu contează ordinea în care sunt scrise elementele;
- la un cuvânt, ordinea este esențială;
- două cuvinte formate din aceleași elemente, dar așezate în ordine diferită au semnificații diferite (ex: acar ≠ arac ; amară ≠ arama)
- toate elementele unei mulțimi sunt distincte, în timp ce într-un cuvânt elementele se pot repeta.

Exercițiu: $f:\{1,2,3,\dots,k\}\to\{1,2,3,\dots,n\}$

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & k\\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(k)\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow\\ n & n & n & & n\end{matrix}$$

$f:A\to B$

număr funcții $\Rightarrow n^k = (card(B))^{card(A)}$

Să se rezolve următoarea problemă:

B $\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{cifre}}$ $\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{litere}}$

9 10 10 25 25 25

$= 9\cdot 10\cdot 10$ $\quad 25\cdot 25\cdot 25 \Rightarrow 25^3\cdot 900$

Def Fie mulțimea A cu n elemente și $k\in\mathbb{N}$. Cuvintele de lungime k, formate cu elemente din A, se numesc aranjamente cu repetiție de n elemente luate câte k și se notează cu $\bar{A}_n^k = n^k$, unde k poate fi $<n$, $=n$ sau $>n$.

Permutări cu repetiție

Fie A cu n elemente. $A=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}$

α = cuvânt cu elemente din A

$n_i(\alpha)$ = număr ce arată de câte ori intră elementul a_i în compunerea cuvântului α

$(n_1, n_2, n_3, \dots, n_n)$ = tipul cuvântului α

$(n_1(\alpha), n_2(\alpha), \dots, n_n(\alpha))$

Două cuvinte de același tip pot diferi unul de altul prin ordinea componentelor.

Def Permutare cu repetiție de un tip dat

Pentru un tip de cuvinte dat, orice cuvânt construit cu elemente din mulțimea A, și care are același tip, se numește permutare cu repetiție de acest tip.

Exemplu $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ și tipul cuvântului $(2,3,0,1)$

$$\left.\begin{matrix} a_1a_1a_2a_4a_2a_2\\ a_2a_2a_1a_2a_1a_4\end{matrix}\right\}\text{ permutări cu repetiție de tipul } (2,3,0,1)$$

Se cere: Câte cuvinte de tipul dat se pot construi cu tipul dat?

Numărul permutărilor cu repetiție de tipul $n_1, n_2 \dots n_n$ se notează cu $P(n_1, n_2, n_3 \dots n_n)$.
Se demonstrează că numărul permutărilor cu repetiție de tipul $n_1, n_2 \dots n_n$

$$\boxed{P(n_1, n_2 \dots n_n) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_n)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_n!}}$$

Combinări cu repetiție

Ne propunem să determinăm numărul tipurilor diferite pe care le pot avea cuvintele de lungime k, construite cu elementele unei mulțimi A de l elemente:

$$K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_n = K$$

$$\begin{bmatrix} 6 & = a+6 \\ & = 5+1 \\ & = 4+2 \\ & = 3+3 \\ & = 2+4 \\ & = 1+5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 & = 6+4 \\ & 5+5 \\ & 4+6 \end{bmatrix}$$

K poate fi $>=<$ n

$(\forall)$ ar fi sist. de nr. nat. k_1, k_2, k_n cu prop. că $\sum_1^n k_i = k$, $(\exists)$ cel puțin un cuvânt de lung. k și de tipul dat construit cu elem. din A care are n elemente.

Def Sistemul de numere naturale $k_1, k_2 \dots k_n$, cu proprietatea $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ se numesc combinări cu repetiție de n elemente luate câte k și se notează cu

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Exemple

$$(x_1 + x_2 + \dots x_n)^n = \sum P(n_1, n_2, \dots, n_n) \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_n^{n_n}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_n = n$$

Aplicație

1. $$(x+y+z)^3 = \sum_{n_1+n_2+n_3=3} P(n_1, n_2, n_3) \cdot x^{n_1} \cdot y^{n_2} \cdot z^{n_3}$$

$$(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$$

$$P(3,0,0) \cdot x^3 + P(0,3,0) \cdot y^3 + P(0,0,3) \cdot z^3 + P(2,1,0) \cdot x^2 y + P(2,0,1) \cdot x^2 z + P(1,2,0) \cdot x y^2 + P(0,2,1) \cdot y^2 z + P(1,0,2) \cdot x z^2 + P(0,1,2) \cdot y z^2 + P(1,1,1) \cdot xyz$$

2. $$(x+y+z)^4$$

$$P(1,2,1) = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!}$$

(4,0,0) (1,0,3)
(0,4,0) (0,1,3)
(0,0,4) (2,2,0)
(3,1,0) (2,0,2)
(3,0,1) (0,2,2)
(1,3,0) (2,1,1)
(0,3,1) (1,2,1)
(1,1,2)

Exemplu

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n$$

$$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + n \cdot C_n^n$$

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \cdot x + \dots + nC_n^n \cdot x^{n-1}$$

pt. $x=1 \Rightarrow n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$

Exemplu

$$\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} = S_n$$

$$\int_0^1 (1+x)^n \cdot dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n)\, dx$$

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = C_n^0 \cdot x \Big|_0^1 + C_n^1 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \dots + C_n^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$$

Definiție graf. Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime finită de puncte.

$\Gamma : X \to \mathcal{P}(x)$ – este o aplicație care asociază fiecărui element din mulțimea X o submulțime a X.

$\mathcal{P}$ – mulțimea tuturor submulțimilor lui x, având 2^n submulțimi.

X – mulțimea vârfurilor grafului

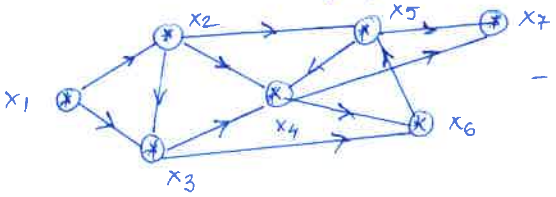
Perechea $G = (X, \Gamma)$ se numește graf finit. = reprezentare analitică

$G = (X, U)$; U { mulțimea $= \{x_i, x_j\}$ cu proprietatea că ($\exists$) un arc între vf. x_i și x_j unde $i, j = \overline{1,n}\}$ – reprezentare geometrică a lui G

Mulțimea A = mulțimea arcelor grafului.

Arcele pot fi < orientate / neorientate $\quad G = (X, A)$

$G = (X, \Gamma)$ = graf orientat $\quad G = (X, U)$ = graf neorientat



– reprezentare geometrică a grafului G

$G = (X, A)$ $\quad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (\exists) \text{ în } G\ (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{dacă } (\nexists)\ x_i, x_j \in G \end{cases}$

$$A(a_{ij}) = \begin{array}{c|ccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & & & & & & & \\ x_4 & & & & & & & \\ x_5 & & & & & & & \\ x_6 & & & & & & & \\ x_7 & & & & & & & \end{array}$$

– Reprezentare matriceală (matricea de adiacență)

Matricea drumurilor asociată unui graf

$T = (t_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, unde $t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } (\exists) \text{ un drum } x_i, x_j \\ 0 & \text{dacă } (\nexists) \text{ un drum } x_i, x_j \end{cases}$

Fie A matricea de adiacență a grafului G. Un vârf $x \in X$, se numește punct de intrare în graf dacă toate arcele au o extremitate în punctul x, nu-s arce cu originea în x.

$g^+(x)$ = numărul arcelor care au originea în punctul x

$g^-(x)$ = numărul arcelor care au extremitatea în punctul x.

x = punct de intrare în graf dacă $g^+(x) > 0$ și $g^-(x) = 0$

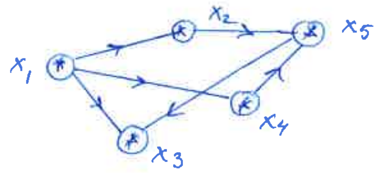
x = punct de ieșire din graf dacă $g^+(x) = 0$ și $g^-(x) \ge 0$

Dacă $g^+(x), g^-(x) > 0 \Rightarrow x$ = punct intermediar sau nod

Dacă $g^+(x) = g^-(x) = 0 \Rightarrow x$ = vârf izolat

Numărul $g^+(x)$ = suma elementelor din linia lui x } în matricea de adiacență
$g^-(x)$ = suma elementelor din coloana lui x

Graf 5 vârfuri



$$A=\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & g^+(x_i) \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
g^-(x_i) & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 7
\end{array}$$

x_1 - vârf de intrare în graf

x_3 - vârf de ieșire din graf

Algoritmul lui Chen pentru determinarea drumurilor unui graf pornind de la matricea de adiacență

Adunarea booleană $+: \{0,1\} \to \{0,1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

PAS 1 Fie linia 1 din A. Notăm cu $a_{1i_1}, a_{1i_2} \dots a_{1i_m}$ elementele egale cu 1 de pe linia 1

$L_1 : (0\ 1\ 1\ 1\ 0)$; $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 1 \Rightarrow j \in \{2,3,4\}$ = coloanele pe care ∃ "1" în A

PAS 2 Se adună la linia 1, liniile $i_1, i_2, \dots, i_m$ din A

$$\begin{array}{lccccc}
L_1: & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
L_2: & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
L_3: & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
L_4: & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\Sigma & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array} \Leftarrow \text{adunare booleană}$$

PAS 3 Se compară rezultatul obținut cu L_1, de la care am plecat. Dacă în linia rezultată apar și alte elemente egale cu 1, fie acestea $a_{1j_1}, a_{1j_2}, a_{1j_3} \dots a_{1j_k}$.

PAS 4 Se adună liniile $j_1, j_2, \dots, j_k$ la linia 1 anterioară (linia sumă)

$$\begin{array}{lccccc}
\Sigma: & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
L_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\Sigma & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array} \Leftarrow \text{compar rezultatul nou obținut.}$$

Dacă nu se modifică atunci pot trece la linia următoare L_2.

PAS 5 Se adună liniile $j_1, j_2, \dots, j_k$ la linia 1 anterioară. Se repetă pașii anteriori (2,3,4) până se ajunge la una din situațiile:

a) toate elementele liniei 1 sunt egale cu 1

b) nu se mai generează alte elemente = 1 pe linia 1, față de etapa anterioară.

$$T=\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & P(x_i) \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

PAS 6 Pașii 1, 2, 3, 4, 5 se repetă pentru fiecare linie

$j =$ 1 2 3 4 5

L_2: 0 0 0 1 1 + L_4 L_5

L_4: 0 0 0 0 1

L_5: 0 0 1 0 0

$L_2' =$ 0 0 1 1 1 + L_3

$L_3 =$ 0 0 0 0 0

L_2'' 0 0 1 1 1 ⇐ nu s-au mai generat și se trece în T

$L_3 =$ 0 0 0 0 0 ⇐ o pune tot – o transformă direct în T

$L_4 =$ 0 0 0 0 1 + L_5

L_5 0 0 1 0 0

L_4' 0 0 1 0 1 + L_3

L_3 0 0 0 0 0

L_4'' 0 0 1 0 1 ⇐ o trec în T

L_5: 0 0 1 0 0 ⊕ L_3

L_3: 0 0 0 0 0

L_5' 0 0 1 0 0 ⇐ o trec în T

Definiție: Se numește puterea de atingere a unui vârf x_i, numărul maxim de vârfuri la care se ajunge pornind din x_i.

Se notează cu $P(x_i)$ și este egal cu $\sum_{j=1}^{n} t_{ij}$ (suma elementelor din matricea lui x_i, în matricea drumurilor T)

Observație: Dacă pe parcursul aplicării algoritmului Chen, este necesar ca la o linie să adunăm o linie L_i cu $1<i<k-1$, adică o linie deja prelucrată, se adună L_i din matricea T, adică L_i final, crescând astfel viteza algoritmului.

Teorema 1: Dacă graful G cu n vârfuri este un graf orientat și fără circuite, conține un drum Hamiltonian, atunci acesta este unic.

Teorema 2: Un graf cu n vârfuri, orientat și fără circuite, conține un drum Hamiltonian dacă și numai dacă numărul elementelor egale cu 1 din matricea drumurilor este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$.

Teorema 3: Fie G un graf finit, orientat, și fără circuite, cu n vârfuri și T matricea drumurilor. Matricea T', obținută din T prin ordonarea liniilor în ordinea descrescătoare a puterii de atingere și apoi și prin ordonarea coloanelor în același mod, este o matrice superior triunghiulară.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & P(x_i) \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\
x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\Rightarrow T' =
\begin{array}{c|ccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 & x_3 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Dacă în matricea T inițială, toate elementele de pe diagonala principală sunt $= 0$, atunci graful respectiv este fără circuite.

Dacă $(\exists) t_{ii} = 1 \Rightarrow$ în graf $\exists$ buclă în x_i

Dacă $(\exists) t_{ii} = 1$ și $t_{ll} = 1$ atunci în G $(\exists)$ un circuit care conține nodurile x_i și x_l

ALGORITMUL DE DETERMINARE A UNUI DRUM HAMILTONIAN:

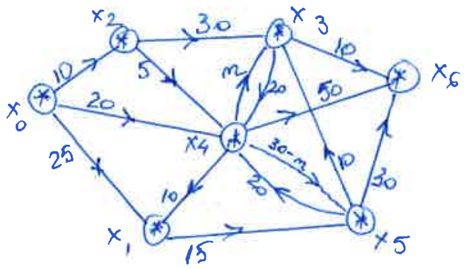
- se determină matricea drumurilor T
- graful trebuie să fie orientat și fără circuite
- se calculează puterea de atingere a fiecărui nod (Σ elem. pe linii)
- construim matricea T', prin reordonarea liniilor și apoi coloanele în ordine descrescătoare a puterii de atingere.

Drumul Hamiltonian se citește în matricea T' prin succesiunea arcelor corespunzătoare elementelor egale cu "1" aflate deasupra diagonalei principale.

Astfel: $dH = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_3)\}$

ALGORITMICA GRAFURILOR 06.05.2018 ①

Ex. Să se determine drumul de valoare minimă de la x_0 la x_6 în graful următor folosind alg lui FORD.



pt. $m=10$

FAZA I

Vf x_j (x_i,x_j)	$l(x_i,x_j)$	ETAPA 0 $\lambda_j^{(0)}$	$\lambda_j^{(0)}-\lambda_i^{(0)}$	ETAPA I $\lambda_j^{(1)}$	$\lambda_j^{(1)}-\lambda_i^{(1)}$	ETAPA II $\lambda_j^{(2)}$	$\lambda_j^{(2)}-\lambda_i^{(2)}$	ETAPA III $\lambda_j^{(3)}$	$\lambda_j^{(3)}-\lambda_i^{(3)}$
Vf x_6 (x_3,x_6)	10	$\lambda_6^{(0)}=50$ $(x_0x_2x_3x_6)$	$\lambda_6^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=10$	$\lambda_6^{(1)}=50$	$\lambda_6^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=20$ *	$\lambda_6^{(2)}=40$	$\lambda_6^{(2)}-\lambda_3^{(2)}=15$ *	$\lambda_6^{(3)}=35$	$\lambda_6^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=10$
(x_4,x_6)	50		$\lambda_6^{(0)}-\lambda_4^{(0)}=30$		$\lambda_6^{(1)}-\lambda_4^{(1)}=35$		$\lambda_6^{(2)}-\lambda_4^{(2)}=25$		$\lambda_6^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=20$
(x_5,x_6)	30		$\lambda_6^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=10$		$\lambda_6^{(1)}-\lambda_5^{(1)}=10$		$\lambda_6^{(2)}-\lambda_5^{(2)}=5$		$\lambda_6^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=0$
Vf x_5 (x_1,x_5)	15	$\lambda_5^{(0)}=40$ $(x_0x_1x_5)$	$\lambda_5^{(0)}-\lambda_1^{(0)}=15$	$\lambda_5^{(1)}=40$	$\lambda_5^{(1)}-\lambda_1^{(1)}=15$	$\lambda_5^{(2)}=35$	$\lambda_5^{(2)}-\lambda_1^{(2)}=10$	$\lambda_5^{(3)}=35$	$\lambda_5^{(3)}-\lambda_1^{(3)}=10$
(x_4,x_5)	20		$\lambda_5^{(0)}-\lambda_4^{(0)}=20$		$\lambda_5^{(1)}-\lambda_4^{(1)}=25$ *		$\lambda_5^{(2)}-\lambda_4^{(2)}=20$		$\lambda_5^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=20$
Vf x_4 (x_0,x_4)	20	$\lambda_4^{(0)}=20$ (x_0x_4)	$\lambda_4^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=20$	$\lambda_4^{(1)}=15$	$\lambda_4^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=15$	$\lambda_4^{(2)}=15$	$\lambda_4^{(2)}-\lambda_0^{(2)}=15$	$\lambda_4^{(3)}=15$	$\lambda_4^{(3)}-\lambda_0^{(3)}=15$
(x_2,x_4)	5		$\lambda_4^{(0)}-\lambda_2^{(0)}=10$ *		$\lambda_4^{(1)}-\lambda_2^{(1)}=5$		$\lambda_4^{(2)}-\lambda_2^{(2)}=5$		$\lambda_4^{(3)}-\lambda_2^{(3)}=5$
(x_3,x_4)	20		$\lambda_4^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=-20$		$\lambda_4^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=-15$		$\lambda_4^{(2)}-\lambda_3^{(2)}=-10$		$\lambda_4^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=-10$
(x_5,x_4)	20		$\lambda_4^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=-20$		$\lambda_4^{(1)}-\lambda_5^{(1)}=-25$		$\lambda_4^{(2)}-\lambda_5^{(2)}=-20$		$\lambda_4^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=-20$
Vf x_3 (x_2,x_3)	30	$\lambda_3^{(0)}=40$	$\lambda_3^{(0)}-\lambda_2^{(0)}=30$	$\lambda_3^{(1)}=30$	$\lambda_3^{(1)}-\lambda_2^{(1)}=20$	$\lambda_3^{(2)}=25$	$\lambda_3^{(2)}-\lambda_2^{(2)}=15$	$\lambda_3^{(3)}=25$	$\lambda_3^{(3)}-\lambda_2^{(3)}=15$
(x_4,x_3)	10		$\lambda_3^{(0)}-\lambda_4^{(0)}=20$ *		$\lambda_3^{(1)}-\lambda_4^{(1)}=15$ *		$\lambda_3^{(2)}-\lambda_4^{(2)}=10$		$\lambda_3^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=10$
(x_5,x_3)	10		$\lambda_3^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=0$		$\lambda_3^{(1)}-\lambda_5^{(1)}=-10$		$\lambda_3^{(2)}-\lambda_5^{(2)}=-10$		$\lambda_3^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=-10$
Vf x_2 (x_0,x_2)	10	$\lambda_2^{(0)}=10$	$\lambda_2^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=10$	$\lambda_2^{(1)}=10$	$\lambda_2^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=10$	$\lambda_2^{(2)}=10$	$\lambda_2^{(2)}-\lambda_0^{(2)}=10$	$\lambda_2^{(3)}=10$	$\lambda_2^{(3)}-\lambda_0^{(3)}=10$
Vf x_1 (x_0,x_1)	25	$\lambda_1^{(0)}=25$	$\lambda_1^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=25$	$\lambda_1^{(1)}=25$	$\lambda_1^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=25$	$\lambda_1^{(2)}=25$	$\lambda_1^{(2)}-\lambda_0^{(2)}=25$	$\lambda_1^{(3)}=25$	$\lambda_1^{(3)}-\lambda_0^{(3)}=25$
(x_4,x_1)	10		$\lambda_1^{(0)}-\lambda_4^{(0)}=5$		$\lambda_1^{(1)}-\lambda_4^{(1)}=10$		$\lambda_1^{(2)}-\lambda_4^{(2)}=10$		$\lambda_1^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=10$
Vf x_0		$\lambda_0^{(0)}=0$		$\lambda_0^{(1)}=0$		$\lambda_0^{(0)}=0$		$\lambda_0^{(3)}=0$	

ETAPA I

$$\lambda_4^{(1)}=\lambda_2^{(0)}+l(x_2,x_4)=10+5=15$$

$$\lambda_3^{(1)}=\lambda_4^{(0)}+l(x_4,x_3)=20+10=30$$

ETAPA II

$$\lambda_6^{(2)}=\lambda_3^{(1)}+l(x_3,x_6)=30+10=40$$

$$\lambda_5^{(2)}=\lambda_4^{(1)}+l(x_4,x_5)=15+20=35$$

$$\lambda_3^{(2)}=\lambda_4^{(1)}+l(x_4,x_3)=15+10=25$$

ETAPA III

$$\lambda_6^{(3)}=\lambda_3^{(2)}+l(x_3,x_6)=25+10=35$$

FAZA II

$$\mu = (x_0, \ldots, \underset{\substack{\| \\ x_0}}{x_\ell}, \underset{\substack{\| \\ x_2}}{x_k}, \underset{\substack{\| \\ x_4}}{x_j}, \underset{\substack{\| \\ x_3}}{x_i}, x_6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_6^{(3)} - \lambda_i^{(3)} = \ell(x_i, x_6) \Rightarrow i = 3 \\ &\lambda_3^{(3)} - \lambda_j^{(3)} = \ell(x_j, x_3) \Rightarrow j = 4 \\ &\lambda_4^{(3)} - \lambda_k^{(3)} = \ell(x_k, x_4) \Rightarrow k = 2 \\ &\lambda_2^{(3)} - \lambda_\ell^{(3)} = \ell(x_\ell, x_2) \Rightarrow \ell = 0 \end{aligned}\right\} \quad \mu = (x_0, x_2, x_4, x_3, x_6); \quad val\,\mu = 35.$$

ALGORITMUL LUI BELLMAN - KALABA – pentru determinarea valorii minime între 2 vârfuri ale unui graf.

FAZA I

$v_i^{(k)}, i = \overline{0, n-1}, \quad v_n^{(k)} = 0$

$v_i^{(k)}$ – valoarea unui drum (minimă), de la x_i la x_n, format din cel mult $(k+1)$ arce.

Se scrie matricea

$$C = (C_{ij})_{i,j}$$

Elementele sunt: $$C_{ij} = \begin{cases} \infty, & (x_i, x_j) \notin U \\ 0, & i = j \\ \ell(x_i, x_j), & (x_i, x_j) \in U \end{cases}$$

ETAPA 0 Se scriu valorile $v_i^{(0)} = C_{in}, \; i = \overline{0, n-1}, \; v_n^{(0)} = 0$

ETAPA I Se determină valorile $v_i^{(1)}, (\forall) i$, ca fiind valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_n, formate din cel mult 2 arce.

$$v_i^{(1)} = \min_{j=0}^{n} (C_{ij} + v_j^{(0)}), \; (\forall) i = \overline{0, n}$$

ETAPA II Se determină valorile $v_i^{(2)}$ ca fiind valoarea minimă a drumurilor de la x_i la x_n formate din cel mult 3 arce.

$$v_i^{(2)} = \min_{j=0}^{n} (C_{ij} + v_j^{(1)}), \; (\forall) i = \overline{0, n}$$

Se continuă acest procedeu până când în ETAPA k, avem că
$$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)}$$

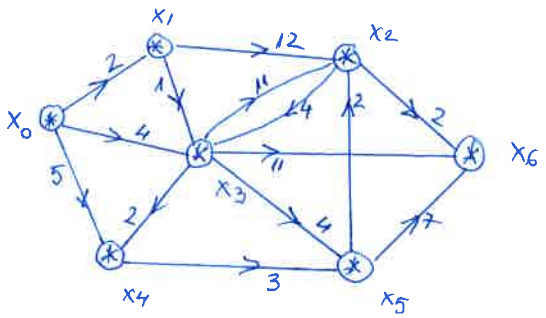
FAZA II Determinarea drumului optim

Presupunem că $\mu = (x_0, x_i, x_j, \ldots, x_n)$. Se începe determinarea de la început către capăt.

Indicele i se determină din relația $v_0 = C_{0i} + v_i$;

Indicele j se determină din relația $v_i = C_{ij} + v_j$;

Se continuă până când se ajunge la x_n.



$$
C = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \overset{C_{i6}}{\Downarrow} x_6 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 2 & \infty & 4 & 5 & \infty & \infty \\
\infty & 0 & 12 & 1 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 0 & 4 & \infty & \infty & 2 \\
\infty & \infty & 11 & 0 & 2 & 4 & 11 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & \infty \\
\infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{array} \right) \end{array}
$$

ETAPA I Valorile sunt optimizate pentru $i \in \{0, 1, 4, 5\}$

ETAPA II Valorile sunt optimizate pentru $i \in \{0, 3, 4\}$

ETAPA III Valorile sunt optimizate pentru $i \in \{0, 1\}$

ETAPA IV Valorile sunt optimizate pentru $i \in \{0\}$

ETAPA 0 $\Rightarrow V_0 = (\infty, \infty, 2, 11, \infty, 7, 0) = C_{i6}$

$V_1 = (15, 12, 2, 11, 10, 4, 0)$

$V_2 = (14, 12, 2, 8, 7, 4, 0)$

$V_3 = (12, 9, 2, 8, 7, 4, 0)$

$V_4 = (11, 9, 2, 8, 7, 4, 0)$

$V_5 = (11, 9, 2, 8, 7, 4, 0)$

ETAPA 0 Transcriem coloana C_{i6} în: $V_0 = (\infty, \infty, 2, 11, \infty, 7, 0)$

$v_0^{(0)} = C_{06} = \infty$; $v_1^{(0)} = C_{16} = \infty$; $v_2^{(0)} = C_{26} = 2$; $v_3^{(0)} = C_{36} = 11$; $v_4^{(0)} = C_{46} = \infty$; $v_5^{(0)} = C_{56} = 7$; $v_6^{(0)} = C_{66} = 0$

ETAPA 1

$v_0^{(1)} = \min\limits_{j=0}^{6} (C_{0j} + v_j^{(0)}) = \min(L_{x_0} + V_0) = \min(0+\infty, 2+\infty, \infty+2, 4+11, \underline{5+\infty}, \infty+7, \infty+0) \overset{\min}{=} 15$

$v_1^{(1)} = \min\limits_{j=0}^{6} (C_{1j} + v_j^{(0)}) = \min(L_{x_1} + V_0) = \min(0+\infty, 0+\infty, 12+2, \underline{1+11}, \infty+\infty, \infty+7, \infty+0) = 12$

$v_2^{(1)} = \min\limits_{j=0}^{6} (C_{2j} + v_j^{(0)}) = \min(L_{x_2} + V_0) = \min(\infty+\infty, \infty+\infty, \underline{0+2}, 4+11, \infty+\infty, \infty+7, \underline{2+0}) = 2$

$v_3^{(1)} = \min\limits_{j=0}^{6} (C_{3j} + v_j^{(0)}) = \min(L_{x_3} + V_0) = \min(\infty+\infty, \infty+\infty, 11+2, \underline{0+11}, 2+\infty, \underline{4+7}, \underline{11+0}) = 11$

$v_4^{(1)} = \min\limits_{j=0}^{6} (C_{4j} + v_j^{(0)})$ $\min(L_{x_4} + V_0) = 10$

$v_5^{(1)} = \min\limits_{j=0}^{6} (C_{5j} + v_j^{(0)}) = \min(L_{x_5} + V_0) = 4$

$v_6^{(1)} = 0$

$V_1 = (15, 12, 2, 11, 10, 4, 0)$

ETAPA II $V_2 = (14, 12, 2, 8, 7, 4, 0)$

ETAPA III $V_3 = (12, 9, 2, 8, 7, 4, 0)$

ETAPA IV $V_4 = (11, 9, 2, 8, 7, 4, 0)$

ETAPA V $V_5 = (11, 9, 2, 8, 7, 4, 0) \Rightarrow$ STOP $V_4 = V_5$

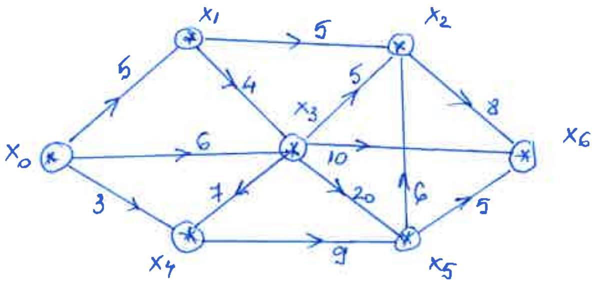
FAZA II

$$\mu = (x_0, \overset{x_1}{\overset{\parallel}{x_i}}, \overset{x_3}{\overset{\parallel}{x_j'}}, \overset{x_5}{x_k''}, \overset{x_2}{\overset{\parallel}{x_l}}, x_m = x_6 = x_6)$$

$$\begin{cases} V_0 = \min(C_{0i} + V_i) = \min(\underline{\underline{0+11}}, \underline{\underline{2+9}}, \infty+2, 4+8, 5+7, \infty+4, \infty+0) = 11 \Rightarrow i=1 \\ \qquad \cancel{i=0} \quad i=1 \Rightarrow ok \\ V_1 = \min(L_{x_1} + V_4) = \min(\infty+11, \underline{\underline{0+9}}, 12+2, \underline{\underline{1+8}}, \infty+7, \infty+4, \infty+0) = 9 \Rightarrow j=3 \\ \qquad \cancel{j=1} \quad j=3 \Rightarrow ok \\ V_3 = \min(L_{x_3} + V_4) = \min(\infty+11, \infty+9, 11+2, \underline{\underline{0+8}}, 2+7, \underline{\underline{4+4}}, 11+0) = 8 \Rightarrow k=5 \\ \qquad \cancel{k=3} \quad k=5 \\ V_5 = \min(L_{x_5} + V_4) = \min(\infty+11, \infty+9, \underline{\underline{2+2}}, \infty+8, \infty+7, \underline{\underline{0+4}}, 7+0) = 4 \Rightarrow l=4 \\ \qquad l=2 \quad \cancel{l=5} - \text{ocupat} \\ V_2 = \min(L_{x_2} + V_4) = \min(\infty+11, \infty+9, \underline{\underline{0+2}}, 4+8, \infty+7, \infty+4, \underline{\underline{2+0}}) \Rightarrow m=6 \\ \qquad m=2 \quad \cancel{m=6} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu = (x_0, x_1, x_3, x_5, x_2) \Rightarrow$ valoarea minimă a lui $\mu = 11$

EX Să se drumul de valoare maximă de la x_0 la x_6 în graful următor:



ETAPA I

$\lambda_6^{(1)} = \lambda_3^{(0)} + l(x_3, x_6) = 9 + 10 = 19$

$\lambda_6^{(1)} = \lambda_5^{(0)} + l(x_5, x_6) = 26 + 5 = 31$

$\lambda_5^{(1)} = \lambda_3^{(0)} + l(x_3, x_5) = 9 + 20 = 29$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_3^{(0)} + l(x_3, x_2) = 9 + 5 = 14$

$\lambda_2^{(1)} = \lambda_5^{(0)} + l(x_5, x_2) = 26 + 6 = 32$

ETAPA II

$\lambda_6^{(2)} = \lambda_2^{(1)} + l(x_2, x_6) = 32 + 8 = 40$

$\lambda_6^{(2)} = \lambda_5^{(1)} + l(x_5, x_6) = 29 + 5 = 34$

$\lambda_2^{(2)} = \lambda_5^{(1)} + l(x_5, x_2) = 29 + 6 = 35$

ETAPA III

$\lambda_6^{(3)} = \lambda_2^{(2)} + l(x_2, x_6) = 35 + 8 = 43$

FAZA I

Vf x_j	(x_i, x_j)	$\ell(x_i,x_j)$	ETAPA 0 $\lambda_j^{(0)}$	$\lambda_j^{(0)}-\lambda_i^{(0)}$	ETAPA 1 $\lambda_j^{(1)}$	$\lambda_j^{(1)}-\lambda_i^{(1)}$	ETAPA II $\lambda_j^{(2)}$	$\lambda_j^{(2)}-\lambda_i^{(2)}$	ETAPA III $\lambda_j^{(3)}$	$\lambda_j^{(3)}-\lambda_i^{(3)}$
Vf. x_6	(x_2,x_6)	8	$\lambda_6^{(0)}=18$	$\lambda_6^{(0)}-\lambda_2^{(0)}=8$	$\lambda_6^{(1)}=31$	$\lambda_6^{(1)}-\lambda_2^{(1)}=-1$ *	$\lambda_6^{(2)}=40$	$\lambda_6^{(2)}-\lambda_2^{(2)}=15$ *	$\lambda_6^{(3)}=43$	$\lambda_6^{(3)}-\lambda_2^{(3)}=8$
	(x_3,x_6)	10	(x_0,x_1,x_2,x_6)	$\lambda_6^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=9$ *		$\lambda_6^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=22$		$\lambda_6^{(2)}-\lambda_3^{(2)}=31$		$\lambda_6^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=34$
	(x_5,x_6)	5		$\lambda_6^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=-8$ *		$\lambda_6^{(1)}-\lambda_5^{(1)}=2$ *		$\lambda_6^{(2)}-\lambda_5^{(2)}=11$		$\lambda_6^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=14$
Vf. x_5	(x_3,x_5)	20	$\lambda_5^{(0)}=26$	$\lambda_5^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=17$ *	$\lambda_5^{(1)}=29$	$\lambda_5^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=20$	$\lambda_5^{(2)}=29$	$\lambda_5^{(2)}-\lambda_3^{(2)}=20$	$\lambda_5^{(3)}=29$	$\lambda_5^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=20$
	(x_4,x_5)	9	(x_0,x_3,x_5)	$\lambda_5^{(0)}-\lambda_4^{(0)}=10$		$\lambda_5^{(1)}-\lambda_4^{(1)}=13$		$\lambda_5^{(2)}-\lambda_4^{(2)}=13$		$\lambda_5^{(3)}-\lambda_4^{(3)}=13$
Vf. x_4	(x_0,x_4)	3	$\lambda_4^{(0)}=16$	$\lambda_4^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=16$	$\lambda_4^{(1)}=16$	$\lambda_4^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=16$	$\lambda_4^{(2)}=16$	$\lambda_4^{(2)}-\lambda_0^{(2)}=16$	$\lambda_4^{(3)}=16$	$\lambda_4^{(3)}-\lambda_0^{(3)}=16$
	(x_3,x_4)	7	(x_0,x_1,x_3,x_4)	$\lambda_4^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=7$		$\lambda_4^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=7$		$\lambda_4^{(2)}-\lambda_3^{(2)}=7$		$\lambda_4^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=7$
Vf. x_3	(x_0,x_3)	6	$\lambda_3^{(0)}=9$	$\lambda_3^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=9$	$\lambda_3^{(1)}=9$	$\lambda_3^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=9$	$\lambda_3^{(2)}=9$	$\lambda_3^{(2)}-\lambda_0^{(2)}=9$	$\lambda_3^{(3)}=9$	$\lambda_3^{(3)}-\lambda_0^{(3)}=9$
	(x_1,x_3)	4	(x_0,x_1,x_3)	$\lambda_3^{(0)}-\lambda_1^{(0)}=4$		$\lambda_3^{(1)}-\lambda_1^{(1)}=4$		$\lambda_3^{(2)}-\lambda_1^{(2)}=4$		$\lambda_3^{(3)}-\lambda_1^{(3)}=4$
Vf. x_2	(x_1,x_2)	5	$\lambda_2^{(0)}=10$	$\lambda_2^{(0)}-\lambda_1^{(0)}=5$	$\lambda_2^{(1)}=32$	$\lambda_2^{(1)}-\lambda_1^{(1)}=27$	$\lambda_2^{(2)}=35$	$\lambda_2^{(2)}-\lambda_1^{(2)}=30$	$\lambda_2^{(3)}=35$	$\lambda_2^{(3)}-\lambda_1^{(3)}=30$
	(x_3,x_2)	5	(x_0,x_1,x_2)	$\lambda_2^{(0)}-\lambda_3^{(0)}=1$ *		$\lambda_2^{(1)}-\lambda_3^{(1)}=23$		$\lambda_2^{(2)}-\lambda_3^{(2)}=26$		$\lambda_2^{(3)}-\lambda_3^{(3)}=26$
	(x_5,x_2)	6		$\lambda_2^{(0)}-\lambda_5^{(0)}=-16$ *		$\lambda_2^{(1)}-\lambda_5^{(1)}=3$ *		$\lambda_2^{(2)}-\lambda_5^{(2)}=6$		$\lambda_2^{(3)}-\lambda_5^{(3)}=6$
Vf. x_1	(x_0,x_1)	5	$\lambda_1^{(0)}=5$	$\lambda_1^{(0)}-\lambda_0^{(0)}=5$	$\lambda_1^{(1)}=5$	$\lambda_1^{(1)}-\lambda_0^{(1)}=5$	$\lambda_1^{(2)}=5$	$\lambda_1^{(2)}-\lambda_0^{(2)}=5$	$\lambda_1^{(3)}=5$	$\lambda_1^{(3)}-\lambda_0^{(3)}=5$
Vf. x_0			$\lambda_0^{(0)}=0$		$\lambda_0^{(1)}=0$		$\lambda_0^{(2)}=0$		$\lambda_0^{(3)}=0$	

FAZA II

Drumul optim $\mu=(\underset{x_0}{x_0}, \underset{x_1}{x_m}, \underset{x_3}{x_\ell}, \underset{x_5}{x_k}, \underset{x_2}{x_j}, x_i, x_6)$

$\lambda_6^{(3)}-\lambda_i^{(3)}=\ell(x_i,x_6) \Rightarrow i=2$ $\qquad$ $\lambda_3^{(3)}-\lambda_\ell^{(3)}=\ell(x_\ell,x_3) \Rightarrow \ell=1$

$\lambda_2^{(3)}-\lambda_j^{(3)}=\ell(x_j,x_2) \Rightarrow j=5$ $\qquad$ $\lambda_1^{(3)}-\lambda_m^{(3)}=\ell(x_m,x_1) \Rightarrow m=0$

$\lambda_5^{(3)}-\lambda_k^{(3)}=\ell(x_k,x_5) \Rightarrow k=3$ $\qquad$ $\Rightarrow \mu=(x_0,x_1,x_3,x_5,x_2,x_6)$; val $\mu=43$

$$C=\begin{array}{c|ccccccc} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_0 & 0 & 5 & -\infty & 6 & 3 & -\infty & -\infty \\ x_1 & -\infty & 0 & 5 & 4 & -\infty & -\infty & -\infty \\ x_2 & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 8 \\ x_3 & -\infty & -\infty & 5 & 0 & 7 & 20 & 10 \\ x_4 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 9 & -\infty \\ x_5 & -\infty & -\infty & 6 & -\infty & -\infty & 0 & 5 \\ x_6 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{array}$$

ETAPA I $\quad V_0=(-\infty, -\infty, 8, 10, -\infty, 5, 0)$ $\quad i=\{0,1,3,4,5\}$

ETAPA II $\quad V_1=(16, 14, 8, 25, 14, 14, 0)$ $\quad i=\{0,1,3,4\}$

ETAPA II $\quad V_2 = (31, 29, 8, 34, 23, 14, 0) \quad i = \{0, 1, 3\}$

ETAPA III $\quad V_3 = (40, 38, 8, 34, 23, 14, 0) \quad i = \{40\}$

ETAPA IV $\quad V_4 = (43, 38, 8, 34, 23, 14, 0)$

ETAPA V $\quad V_5 = (43, 38, 8, 34, 23, 14, 0)$

<u>STOP</u> $\quad V_5 = V_4$

<u>FAZA II</u>

$$\mu = (x_0, \overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{x_i}}, \overset{x_3}{\overset{\shortparallel}{x_j}}, x_4, x_\ell, \overset{x_6}{\overset{\shortparallel}{x_n}}, x_6)$$

$$V_0^{(5)} = \max(L_{x_0} + V_4) = \max(\underset{\cancel{i=0}}{\underline{0+43}}, \underset{i=1}{\underline{5+38}}, -\infty+8, 6+34, 3+23, -\infty+14, -\infty+0) = 43 \Rightarrow i = 1$$

$$V_1^{(5)} = \max(L_{x_1} + V_4) = \max(-\infty+43, \underset{\cancel{j=1}}{\underline{0+38}}, 5+8, \underset{j=3}{\underline{4+34}}, -\infty+23, -\infty+14, -\infty+0) = 38 \Rightarrow j = 3$$

$$V_3^{(5)} = \max(L_{x_3} + V_4) = \max(-\infty+43, -\infty+38, 5+8, \underset{k=3}{\underline{0+34}}, 7+23, \underset{k=5}{\underline{20+14}}, 10+0) = 34 \Rightarrow k = 5$$

$$V_5^{(5)} = \max(L_{x_5} + V_4) = \max(-\infty+43, -\infty+38, \underset{\ell=2}{\underline{6+8}}, -\infty+34, -\infty+23, \underset{\cancel{\ell=5}}{\underline{-\infty+14}}, 8+0) = 14 \Rightarrow \ell = 2$$

$$V_2^{(5)} = \max(L_{x_2} + V_4) = \max(-\infty+43, -\infty+38, \underset{\cancel{n=2}}{\underline{0+8}}, -\infty+34, -\infty+23, -\infty+14, \underset{n=6}{\underline{8+0}}) = 8 \Rightarrow n = 6$$

$$\mu = (x_0, x_1, x_3, x_5, x_2, x_6) \quad ; \quad \text{val. } \mu = 43$$

ELEMENTE COMBINATORICĂ

EX. Să se calculeze suma: $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$

I Prima metodă:

Știm că:
$$\begin{cases} C_n^k = C_n^{n-k} \\ C_n^0 = C_n^n = 1 \\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \end{cases}$$

$$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n \quad (+)$$
$$S = C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \dots + C_n^n$$
$$2S = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + \dots + nC_n^n = n\underbrace{(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n)}_{2^n}$$
$$\Rightarrow 2S = n \cdot 2^n \Leftrightarrow \boxed{S = n \cdot 2^{n-1}}$$

II Metoda a doua

Știm că:
$$\begin{cases} (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n \\ (a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \dots - C_n^n b^n \end{cases}$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

Am dezvoltat tot ne binomul după metoda lui Newton.

Derivăm

$$n(1+x)^{n-1} = 0 + C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + nC_n^n x^{n-1}$$

pt. $x=1 \Rightarrow n(1+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n \Rightarrow \boxed{S = n \cdot 2^{n-1}}$

Ex: $S = \frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n$$

Integrăm
$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) dx$$
$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = C_n^0 x\Big|_0^1 + C_n^1 \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \dots + C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

pt. $x=1 \Rightarrow \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} \Rightarrow S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Ex: $S = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n = \underbrace{C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n}_{n \cdot 2^{n-1}} + \underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}_{2^n} =$

$= n \cdot 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1}(n+2) \Rightarrow \boxed{S = 2^{n-1}(n+2)}$

Ex: $S = 2C_n^1 - 4C_n^2 + 6C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} 2n C_n^n = 2(C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} n C_n^n)$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

Derivăm

FORMULA
$$(\varphi^n)' = n \cdot \varphi^{n-1} \cdot \varphi'$$

$$n(1-x)^{n-1} \cdot (-1) = 0 - C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + (-1)^n n C_n^n x^{n-1}$$

pt. $x=1 \Rightarrow S = 0 - C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + (-1)^n n C_n^n \; / \cdot (-1)$

$$\Rightarrow 0 = C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n-1} n C_n^n \Rightarrow \boxed{S = 2 \cdot 0 = 0}$$

CARACTERISTICI

Fie $f: A \to B$ Cardinalul $|A| = k$ și $|B| = n$

- numărul tuturor funcțiilor $f: A \to B$ este n^k
- numărul funcțiilor injective $f: A \to B$ este A_n^k
- numărul funcțiilor strict crescătoare $f: A \to B$ este C_n^k
- pt. caz particular $|A| = |B| = k$; numărul funcțiilor bijective $f: A \to B$ este P_k

Ex. Fie $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ și $B=\{b_1,b_2,b_3,\ldots,b_{10}\}$, cu proprietatea că $a_i\neq b_j$, pt. $\forall i,j$.

Să se afle:

a) Care este numărul tuturor funcțiilor $f:A\to B$?

R: $|A|=4$; $|B|=10$ $\Rightarrow$ 10^4

b) Care este numărul funcțiilor bijective $f:A\to B$? R: $P_{10}=10!$

c) Care este numărul funcțiilor injective $f:A\to B$? R: $A_n^k=A_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=7\cdot8\cdot9\cdot10$

d) Câte submulțimi are $A\cup B$?

R: $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,\ldots,b_{10}\}$ $|A\cup B|=14$

$\Rightarrow$ nr. submulțimilor este $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$ $\Rightarrow$ R: 2^{14}

TEORIE

Fie $A\neq\emptyset$, $a_1,a_2,a_3\ldots a_k\in A$ și $a_1a_2\ldots a_k$ un cuvânt

DEFINIȚIE Cuvintele de lungime k cu elemente din A, se numesc aranjamente cu repetiție de n luate câte k.

$$\boxed{\overline{A_n^k}=n^k}$$

Fie $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ și α un cuvânt cu elemente din A.

Notăm cu $m_i(\alpha)$ numărul de apariții a elementelor a_i în cuvântul α.

Notăm cu $m_1,m_2,m_3\ldots m_n$ tipul unui cuvânt.

Pentru un tip de cuvânt dat, orice cuvânt cu elemente din A de acel tip, se numește permutare cu repetiție

$$P(m_1,m_2,\ldots,m_n)=\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\ldots\cdot m_n!}$$

Ex. Fie $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$

$\alpha_1=a_2a_1a_2a_4a_5a_3a_1$ lungime $\alpha_1=7$

$(2,2,1,1,1)$ = tipul cuvântului

$\alpha_2=a_1a_1a_2a_2a_3a_4a_5$ $(2,2,1,1,1)$ = tipul cuvântului

Câte cuvinte de tipul $(2,2,1,1,1)$ se pot forma pe domeniul A?

$$P(2,2,1,1,1)=\frac{(2+2+1+1+1)!}{2!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!}=\frac{7!}{2\cdot2}=\frac{7!}{4}=3\cdot2\cdot5\cdot6\cdot7$$

DEFINIȚIE Sistemele de numere naturale de forma $(k_1,k_2,\ldots k_n)$ cu $k_1+k_2+\ldots+k_n=k$, se numesc combinări cu repetiție de n elemente luate câte k.

$$\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k$$

Ex. În câte moduri se pot permuta literele cuvântului "MATEMATICA"?

$\{M,A,T,E,I,C\}$ $(2,3,2,1,1,1)$ – tip cuvântului

$$P(2,3,2,1,1,1)=\frac{(2+3+2+1+1+1)!}{2!\cdot3!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!}=\frac{10!}{2!\cdot3!\cdot2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot2\cdot3\cdot2}=5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$$

Ex. Câte grupuri de 5 litere se pot forma folosind doar literele a,b,c?

$$\overline{C_3^5}=C_{3+5-1}^5=C_7^5=\frac{7!}{2!\cdot5!}=\frac{\cancel{6}^3\cdot7}{\cancel{2}}=21$$

Ex: Câte cuvinte de 5 litere se pot forma cu a,b,c?

$$\overline{A_3^5}=3^5$$

Ex. Câte soluții de tipul $(x_1, x_2, \underbrace{x_3}_{n})$ are ecuația $x_1 + x_2 + \underbrace{x_3}_{n} = \overset{k}{5}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

$$\overline{C}_3^5 = C_7^5 = 21$$

Ex: O aplicabilitate a permutărilor cu repetiție este următoarea:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)^m = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} P(m_1, m_2, \dots, m_n)\cdot a_1^{m_1}\cdot a_2^{m_2}\cdot \ldots \cdot a_n^{m_n}$$, unde $m, n > 2$

Folosind formula de mai sus să se dezvolte $(x+y+z+t)^3$

$$(x+y+z+t)^3 = \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=3} P(m_1, m_2, m_3, m_4)\cdot x^{m_1}\cdot y^{m_2}\cdot z^{m_3}\cdot t^{m_4}$$

Cine sunt acești m-uri?

$$P(1,3) = \begin{cases}(3,0,0,0)\\(0,3,0,0)\\(0,0,3,0)\\(0,0,0,3)\end{cases} = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4$$

$$P(1,1,2) = \begin{cases}(2,1,0,0) & (1,2,0,0) & (0,1,2,0) & (0,0,2,1)\\(2,0,1,0) & (1,0,2,0) & (0,1,0,2) & (0,0,1,2)\\(2,0,0,1) & (1,0,0,2) & (0,2,1,0) & \\ & & (0,2,0,1) & \end{cases} = \frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!} = 12$$

$$P(3,1) = \begin{cases}1\,1\,1\,0\\1\,1\,0\,1\\1\,0\,1\,1\\0\,1\,1\,1\end{cases} = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$$

$$\sum = P(3,0,0,0)\cdot x^3 y^0 z^0 t^0 + P(0,3,0,0)\cdot x^0 y^3 z^0 t^0 + P(0,0,3,0)\cdot x^0 y^0 z^3 t^0 + P(0,0,0,3)\cdot x^0 y^0 z^0 t^3 +$$
$$+ P(2,1,0,0)\cdot x^2 y^1 z^0 t^0 + P(2,0,1,0)\cdot x^2 y^0 z^1 t^0 + P(2,0,0,1)\cdot x^2 y^0 z^0 t^1 + P(1,2,0,0)\cdot x^1 y^2 z^0 t^0 +$$
$$+ P(1,0,2,0)\cdot x^1 y^0 z^2 t + P(1,0,0,2)\cdot x^1 y^0 z^0 t^2 + P(0,1,2,0)\cdot x^0 y^1 z^2 t^0 + P(0,1,0,2)\cdot x^0 y^1 z^0 t^2 +$$
$$+ P(0,2,1,0)\cdot x^0 y^2 z^1 t^0 + P(0,2,0,1)\cdot x^0 y^2 z^0 t^1 + P(0,0,2,1)\cdot x^0 y^0 z^2 t^1 + P(0,0,1,2)\cdot x^0 y^0 z^1 t^2 +$$
$$+ P(1,1,1,0)\cdot x^1 y^1 z^1 t^0 + P(1,1,0,1)\cdot x^1 y^1 z^0 t^1 + P(1,0,1,1)\cdot x^1 y^0 z^1 t^1 + P(0,1,1,1)\cdot x^0 y^1 z^1 t^1$$

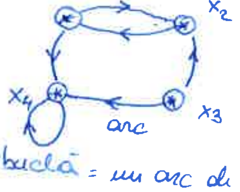
$$\left.\begin{aligned} P(3,0,0,0) &= \frac{3!}{3!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!} = \frac{3!}{3!} = 1\\ P(2,1,0,0) &= \frac{(2+1)!}{2!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{2} = 3\\ P(1,1,1,0) &= \frac{(1+1+1)!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 0!} = \frac{3!}{1} = 6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum = x^3+y^3+z^3+t^3+3x^2y+3x^2z+3x^2t+3xy^2+3xz^2+3xt^2+3y^2z+$$
$$+3y^2t+3z^2t+3zt^2+6xyz+6xyt+6xzt+6yzt$$

ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR

X = mulțimea vârfurilor

$\Gamma : X \longrightarrow P(X)$

$G = (X, \Gamma)$ graf $<$ orientat / neorientat



$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

buclă = un arc de la vf. la el însuși

Drum este o succesiune de arce cu condiția ca extremitatea finală a arcului U_i să coincidă cu extremitatea inițială a arcului U_{i+1}.

Notăm cu U mulțimea arcelor. $U = \{(x_1,x_2), (x_2,x_1), (x_1,x_4), (x_3,x_2), (x_3,x_4), (x_4,x_4)\}$

$x \longrightarrow y$ x = extremitatea inițială y = extremitatea finală (sau vf. de arc)

Un arc este de exemplu (x_3, x_2, x_1, x_4).

Drumurile care trec o singură dată printr-un vârf al său se numesc drumuri simple.

Drum compus $\{x_3, x_2, x_1, x_2, x_1\}$. Drum elementar - drumul care trece o singură dată printr-un vârf al său (primul exemplu)

Drum neelementar $\{x_3, x_4, x_4\}$.

Un drum Hamiltonian este un drum elementar care parcurge o singură dată toate vârfurile grafului. (primul exemplu).

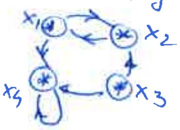
Un circuit este un drum care pornește dintr-un vârf, parcurge alte vârfuri și se întoarce în vârful inițial. (ex. (x_1, x_2, x_1) = circuit)

Matricea booleană asociată unui graf

Este o matrice care conține numai elementele 0 și 1.

$A = (a_{ij})_{i,j}$ $\qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (x_i, x_j) \in U \\ 0, & \text{dacă } (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$

Matricea booleană asociată grafului



$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matricea drumurilor (conexă terminală)

$T = (t_{ij})_{i,j}$ $\qquad t_{ij} = \begin{cases} 1, & \exists \text{ drum de la } x_i \text{ la } x_j \\ 0, & \nexists \text{ drum de la } x_i \text{ la } x_j \end{cases}$ $\qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algoritmul lui Chen pentru determinarea matricii T, folosește matricea booleană

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se urmează pași

PAS 1 Fie $a_{1i_1}, a_{1i_2}, a_{1i_3} \ldots a_{1i_k}$, elementele nenule de pe prima linie a matricii A. Adunăm boolean, liniile $i_1, i_2, i_3 \ldots i_k$ la prima linie a lui A.

PAS 2 Dacă în urma efectuării operațiilor au apărut alte elemente nenule pe prima linie a lui A, fie acestea $a_{1j_1}, a_{1j_2} \ldots a_{1j_e}$, adunăm boolean liniile $j_1, j_2 \ldots j_e$ la prima linie a lui A.

PAS 3 Se repetă PAS 2 până când obținem una din situațiile:

a) toate elementele primei linii sunt egale cu 1

b) nu se mai pot genera alte elemente egale cu 1 pe prima linie

PAS 4 Se continuă pașii 1, 2, 3 pentru toate celelalte linii ale lui A.

În final se obține matricea T.

$i=1$

0 1 0 1 $\oplus$ L_2, L_4
1 0 0 0
0 0 0 1

1 1 0 1 $\oplus$ L_1
0 1 0 1

$L_1T = \boxed{1\ 1\ 0\ 1}$ prima linie a lui T

$i=2$

1 0 0 0 $\oplus$ L_1 din T
1 1 0 1

1 1 0 1 + L_2, L_4
1 0 0 0
0 0 0 1

$\boxed{1\ 1\ 0\ 1} = L_2T$

$i=3$

0 1 0 1 + L_2, L_4
1 1 0 1
0 0 0 1

1 1 0 1 $\oplus$
1 1 0 1

$\boxed{1\ 1\ 0\ 1} = L_3T$

$i=4$

0 0 0 1 $\oplus$ L_4
0 0 0 1

L_4T $\boxed{0\ 0\ 0\ 1}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OBSERVAȚII

1. Dacă $T_{ii} = 0$, pt. $(\forall) i$ => nu există circuite în graf.
2. Dacă $(\exists) T_{ii} = 1$ și $T_{jj} = 1$ => există cel puțin un circuit care conține vârfurile x_i și x_j.
3. Dacă $(\exists)$ un unic $T_{ii} = 1$ atunci avem o buclă în vârful x_i

DEFINIȚIE Se numește grad de emisie al unui vârf x numărul de arce care au ca extremitate inițială vârful x. $(g^+(x))$

Se numește grad de recepție al unui vârf x numărul de arce care au ca extremitate finală vârful x. $(g^-(x))$

$g^+(x_1) = 2$ $\quad g^-(x_1) = 1$

$g^+(x_2) = 1$ $\quad g^-(x_2) = 2$

$g^+(x_3) = 2$ $\quad g^-(x_3) = 0$

$g^+(x_4) = 1$ $\quad g^-(x_4) = 3$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} g^+(x_i) \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \; g^-(x_i) & \end{array}$$

DEFINIȚIE Se numește putere de atingere a unui vârf x_i $(P(x_i))$, numărul maxim de vârfuri care pot fi atinse de la x_i

$P(x_1) = 3$

$P(x_2) = 3$

$P(x_3) = 3$

$P(x_4) = 1$

Dacă avem T se poate obține puterea de atingere

$$T = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P(x_i) \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

TEOREMĂ Fie G, un graf orientat și fără circuite, iar T matricea drumurilor sale. Matricea T' obținută din T, prin ordonarea liniilor, astfel încât puterea de atingere a vârfurilor sale să fie în ordine descrescătoare, și apoi prin aranjarea coloanelor în aceeași ordine este o matrice superior triangulară.

TEOREMA LUI CHEN Fie G, un graf orientat, fără circuite, cu n vârfuri. G conține un drum Hamiltonian dacă numărul elementelor nenule din matricea T este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_{ij} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\sum_{i}^{n} x_i = \frac{n(n-1)}{2}$ puterea de atingere este suma elementelor de pe fiecare linie T

ALGORITMUL LUI CHEN pentru determinarea drumului Hamiltonian

1. Se construiește matricea A și matricea T. Dacă numărul elementelor nenule din T este egal cu $\frac{n(n-1)}{2}$, atunci, există și este unic, un drum Hamiltonian în G.
2. Se calculează puterile de atingere ale fiecărui vârf din T, completându-se într-o coloană suplimentară
3. Se construiește matricea T', conform teoremei.
4. Drumul Hamiltonian se citește în ordinea descrescătoare a puterii de atingere.

Ex: Se dă graful $G = (X, A)$

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} g^+(x_i) \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \end{array}$$

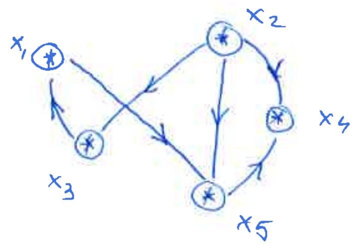
$g^-(x_i)$: 1 0 1 2 1

a) Să se construiască reprezentarea sagitală a grafului G și să se calculeze gradul de emisie și de recepție al fiecărui vârf.

b) Să se utilizeze algoritmul lui Chen pentru determinarea matricii T a drumurilor. Precizați cu ajutorul matricii T dacă graful G are circuite.

c) Să se calculeze puterea de atingere al fiecărui vârf al lui G. Să se stabilească dacă în G există un drum Hamiltonian, și în caz afirmativ, să se deducă succesiunea vârfurilor sale.

a)



b) $i=1$

0 0 0 0 1 ⊕ L_5
0 0 0 1 0
0 0 0 1 1 ⊕ L_4
0 0 0 0 0
$\boxed{0\ 0\ 0\ 1\ 1}$ L_1T

$i=2$

0 0 1 1 1 ⊕ L_3, L_4, L_5
1 0 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 1 0
1 0 1 1 1 ⊕ L_1
0 0 0 0 1
$\boxed{1\ 0\ 1\ 1\ 1}$ L_2T

$i=3$

1 0 0 0 0 ⊕ L_1
0 0 0 0 1
1 0 0 0 1 ⊕ L_5
0 0 0 1 0
1 0 0 1 1 ⊕ L_4
0 0 0 0 0
$\boxed{1\ 0\ 0\ 1\ 1}$ L_3T

$i=4$. $\boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 0}$ L_4T

$i=5$

0 0 0 1 0 ⊕ L_4
0 0 0 0 0
$\boxed{0\ 0\ 0\ 1\ 0}$ L_5T

$$T = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} P(x_i) \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Se observă că $t_{ii} = 0$ pt. $(\forall)\ i = \overline{1,5} \Rightarrow$ G nu are circuite

c) Puterea de atingere pentru $(\forall)$ vârf

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 2+4+3+0+1 = 10$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 5 \cdot 2 = 10$$

$\}\ (\exists)!$ și este unic un drum Hamiltonian

$$T' = \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} x_2 & x_3 & x_1 & x_5 & x_4 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$d_H = (x_2, x_3, x_1, x_5, x_4)$

GRAFURI ARCE VALORIZATE

$\ell(x_i, x_j)$ = valoare arc (x_i, x_j)

ALGORITMUL LUI FORD pentru determinarea drumului de valoare minimă între două vârfuri ale unui graf.

TEOREMA! Condiția necesară și suficientă pentru ca d_i să reprezinte minimul valorilor drumurilor de la x_0 la x_i, pt. $(\forall)\ \overline{1,n}$, este ca $d_j - d_i \le \ell_{x_i x_j}, (\forall)(x_i, x_j) \in U$.

ALGORITMUL lui FORD

FAZA I

ETAPA 0 Fiecărui vârf x_i i se atașează o valoare d_i care reprezintă valoarea unui drum de la x_0 la x_i

$$d_i^{(0)}, (\forall)\ i = \overline{1,n}, \quad \text{unde } d_0^{(0)} = 0$$

ETAPA K+1 Pentru orice arc (x_i, x_j) se calculează diferența d_j din etapa anterioară cu d_i din etapa anterioară și se compară cu $\ell(x_i, x_j)$.

Poate apărea una din situațiile:

a) Există un arc sau mai multe (x_i, x_j) pentru care $d_j^k - d_i^k > \ell(x_i, x_j)$

În acest caz se calculează: $d_j^{(k+1)} = d_i^{(k)} + \ell(x_i, x_j)$

Dacă există mai multe indici i care verifică relația 1, îl luăm $d_j^{(k+1)}$ ca fiind egală cu cea mai mică valoare din cele obținute, iar ceilalți $d_i^{(k+1)}$ sunt egali cu $d_i^{(k)}$.

b) Pentru oricare arc (x_i, x_j) avem $d_j^{(k)} - d_i^{(k)} \le \ell(x_i, x_j)$

În acest caz valorile $d_i^{(k)}$ sunt valorile optime și trecem la faza 2, adică determinarea drumului optim.

FAZA II Determinarea drumului optim (de la coadă la cap)

Presupunem că drumul optim are forma:

$$\mu = (x_0, \ldots\ldots x_j, x_i, x_n)$$

Indicele i se găsește conform printre relațiile $d_n^{(k)} - d_i^{(k)} \le \ell(x_i, x_n)$, acel indice care satisface semnul =

Indicele j se găsește conform printre relațiile $d_i - d_j \le \ell(x_j, x_i)$, acel indice care satisface semnul =

Se continuă acest procedeu până când ajung la x_0.

Se găsește astfel drumul Hamiltonian.

(*) Există și un algoritm Ford pentru drumul maxim, exact la fel ca cel de minim, numai că la valoare maximă d_i trebuie să le mărim, deci ceea ce e mai mic trebuie optimizat.