Tipuri de ec. diferențiale de ordinul 1 integrabile prin metode elementare

1) Ecuații care provin din anularea unei dif. totale

Fie $F: E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y)$. Diferențiala unei astfel de funcții este o expresie de forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = dF(x,y)$$

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ = derivata parțială de ordinul 1 ale funcției F.

O ecuație de genul anunțată este de forma $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) dy = 0$

Dacă putem determina funcția $F(x,y)$ al cărui dif. este expresia dată, atunci putem scrie că $dF(x,y) = 0$. Soluția acestei ecuații se exprimă prin relația

$$F(x,y) = C \quad \{\text{Forma implicită a soluției}\}$$

Dacă relația se poate rezolva în raport cu y, se poate obține forma explicită a soluției

$$y = \varphi(x,c) \quad \{\text{Forma explicită a soluției}\}$$

$$P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Leftrightarrow y = \varphi(x,c)$$

$$y': \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \overset{not}{=} \frac{df}{dx}$$

Se cunoaște următorul rezultat:

Condiția necesară și suficientă ca o expresie de forma $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy$ să fie diferențiala totală exactă a unei funcții 2 variabile, $F(x,y)$, este ca $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Leftrightarrow dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot dy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = Q(x,y)$$

Condiția $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

[Dacă funcția F are derivate parțiale mixte de ordin 2 continue, acestea sunt egale!]

↳ Criteriul lui SCHWARZ

Această condiție $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ este echivalentă și cu următorul rezultat:

↳ Integrala de tipul 2, curbilinie, din expresia $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy$ pe orice curbă inclusă din domeniul D este nulă. $\Leftrightarrow \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nu depinde de curba de integrare, ci de extremitățile sale.

$\Rightarrow F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol. ec. este: $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y)\,dy = 0$, este $F(x,y) = C \Leftrightarrow$
$y = \varphi(x,c)$

Algoritm de rezolvare pentru ecuația $P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy = 0$

1) Se verifică dacă are loc condiția de completă integrabilitate

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

2) Dacă da: $\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt = F(x,y) - F(x_0,y_0)$

2.1) Soluția este: $F(x,y) = C$

3) Dacă nu, se poate căuta un factor integrant pt ec. dată.

Aceasta conduce la rezolvarea unei ecuații cu derivate parțiale de ordin 1.

Ex.

$$\left(\sin y - \frac{2y}{x^3}\right)dx + \left(x\cos y + \frac{1}{x^2}\right)dy = 0$$

$$P(x,y) = \sin y - \frac{2y}{x^3}$$

$$Q(x,y) = x\cos y + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y - \frac{2}{x^3} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y - \frac{2}{x^3}$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sin y_0 - \frac{2y_0}{t^3}\right)dt + \int_{y_0}^{y}\left(x\cos t + \frac{1}{x^2}\right)dt =$$

$$\int t^{-3} = \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{1}{2t^2}$$

$$= (\sin y_0)\cdot t\Big|_{x_0}^{x} - 2y_0\cdot\left(-\frac{1}{2t^2}\right)\Big|_{t=x_0}^{x} + x\cdot\sin t\Big|_{y_0}^{y} + \frac{1}{x^2}\cdot t\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= (x-x_0)\cdot\sin y_0 + y_0\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x_0^2}\right) + x\left(\sin y - \sin y_0\right) + \frac{1}{x^2}(y-y_0) =$$

$$= \cancel{x\sin y_0} - x_0\sin y_0 + \cancel{\frac{y_0}{x^2}} + x\sin y - \cancel{x\sin y_0} + \frac{x}{y^2} - \cancel{\frac{y_0}{x^2}} =$$

$$= x\sin y + \frac{y}{x^2} - \left(x_0\sin y_0 + \frac{y_0}{x_0^2}\right) = F(x,y) - F(x_0,y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\sin y + \frac{y}{x^2} = C$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin y - \frac{2y}{x^3}$; $\frac{\partial F}{\partial y} = x\cos y + \frac{1}{x^2}$; $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy = 0$

---

2) Ecuații cu variabile separate

$P(x) \cdot dx + Q(y)dy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P(x)\right) = 0$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(y)\right) = 0$

$$F(x,y) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(t)\,dt$$

$\frac{dy}{1+y^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$; $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{1+t^2} = F(x,y) - F(x_0,y_0); \quad \operatorname{arctg} t\Big|_{x_0}^{x} + \operatorname{arctg} t\Big|_{y_0}^{y} =$$

$= \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} y_0 =$

$= \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y - (\operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg} y_0) =$

$= \boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = c} \Rightarrow \operatorname{arctg} y = -\operatorname{arctg} x + c =$

$= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(c - \operatorname{arctg} x) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{\operatorname{tg} c - x}{1 + x \cdot \operatorname{tg} c}} \Rightarrow y = f(x,c)$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

(*) $P(x)dx + Q(y)dy = 0 \Leftrightarrow \int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$

Soluția ecuației (*) se obține aplicând direct integrala nedefinită pe expresii.

---

3) Ecuații cu variabile separabile

$P(x) \cdot Q_1(y)\,dx + Q(y) \cdot P_1(x)\,dy = 0$

Presupunem că $Q_1(y) \neq 0$ și $P_1(x) \neq 0$ $\Big\} \;/ : Q_1(y) P_1(x)$

$$\frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \frac{Q(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{P_1(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{Q_1(y)}dy = C \iff F(x,y)=c}$$ Implicită

$$\Downarrow$$

$$y = \varphi(x,c)$$ Explicită

- - - - - - - - -

$$dx - \frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{1-y}$$

$$\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{dy}{1-y}$$

$$\frac{x}{1+x}dx = \frac{dy}{1-y}$$

$$\to \int \frac{x}{1+x}dx = \int \frac{dy}{1-y}$$

$$\int \frac{x+1-1}{1+x}dx = -\ln(1-y)$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = -\ln(1-y)+c$$

$$x - \ln(1+x) = -\ln(1-y)+c$$

$$\ln(1-y) = -x + \ln(1+x) + c$$

$$1-y = e^{-x+\ln(1+x)+c}$$

$$1-y = e^{-x} \cdot e^{+\ln(1+x)} \cdot \underbrace{e^{c}}_{k}$$

$$y = 1 - e^{-x} \cdot (1+x) \cdot k \to y = 1 - \frac{(1+x)\cdot k}{e^x}$$

$k=0 \to y=1$ Soluție particulară

$x=-1$ Soluție singulară

Dacă ecuația $Q_1(y)=0$ are o soluție de formă

$y = y_1$ $\Rightarrow$ $Q_1(y_1)=0$

$\Rightarrow dy = 0$

Dacă ecuația $P_1(x)=0$ are soluția $x = x_1 \Rightarrow dx = 0$

$\Rightarrow x = x_1$ este soluția ec. dif.

Trebuie verificat dacă aceste soluții sunt singulare sau particulare

Temă: 1) $\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

2) $\left(-\frac{1}{x} + y + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{y} + x - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$

3) $x(y^2+1)\,dx + \left(x^2y + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy = 0$

4) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot dx + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\cdot dy = 0$

5) $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right)\cdot y\,dy = 0$