 06.01.2022

An 1

Aplicații la rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare și omogene cu coeficienți constanți

(1) Să se determine soluția generală a sistemului:

$$(1^\circ)\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = y + z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

; y, z = funcțiile necunoscute; x = variabila independentă

Se caută soluții de forma: $Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}$; $Y = \begin{pmatrix} A_1 \cdot e^{\lambda x} \\ A_2 \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix}$

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} A_1\lambda \cdot e^{\lambda x} \\ A_2\lambda \cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix}; \quad \frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot \lambda \\ A_2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1\lambda \\ A_2\lambda \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x} \Big| : e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_1\lambda \\ A_2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_1\lambda = A_1 + 4A_2 \\ A_2\lambda = A_1 + A_2 \end{cases} \iff$$

$$(2^\circ)\begin{cases} A_1(1-\lambda) + 4A_2 = 0 \\ A_1 + (1-\lambda) \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$ sistem algebric omogen, de 2 ec. cu 2 nec.

Sistemul admite întotdeauna soluția banală: $A_1 = A_2 = 0$ căreia îi corespunde soluția nulă a sist. de ec. dif. Vom căuta soluții nenule pt sistem: sistemul algebric, omogen (2°) admite soluții nenule $\iff \det(S) = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \iff$ polinomul caracteristic al matricei $A = 0$.

$\Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$; $(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$;

$(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = 3} =$

= valorile proprii ale matricei coeficienților sistemului.

- pentru fiecare valoare proprie se determină vectorul propriu corespunzator:

a) $\lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases} 2A_1+4A_2=0 \\ A_1+2A_2=0 \end{cases}$ $/:2 \Rightarrow A_1+2A_2=0.$ $A_1=-2A_2$

$$Y_1=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}=\begin{pmatrix} -2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}=\begin{pmatrix} -2 \\ +1 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}\cdot A_2$$

b) $\lambda=3: \Rightarrow \begin{cases} -2A_1+4A_2=0 \\ A_1-2A_2=0 \end{cases}$ $/:-2 \Rightarrow A_1-2A_2=0.$ $\boxed{A_1=2A_2}$

$$Y_2=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cdot e^{3x}=\begin{pmatrix} 2A_2 \\ A_2 \end{pmatrix}\cdot e^{3x}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot A_2\cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow Y_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{-x}=\begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix};\ Y_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{3x}=\begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Sol. gen. a sistemului va fi:

$$Y=\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2e^{-x} & 2e^{3x} \\ e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-2e^{-x}\cdot C_1+2\cdot e^{3x}\cdot C_2 \\ z=C_1e^{-x}+C_2e^{3x} \end{cases}$$

Obs. 1) Putem considera că și $-y$, $-z$ sunt soluții ale aceluiași sistem.

$$\begin{cases} -y'=-y-4z \\ -z'=-y-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'=y+4z \\ z'=y+z \end{cases} = \text{sistemul inițial.}$$

2) Se poate demonstra că A_1 și A_2 (coordonatele vectorilor proprii pt fiecare valoare proprie) sunt proporționale cu complementii algebrici ai elementelor din prima linie ale matricei $A-\lambda I_2$ (în cazul general, ale matricei $A-\lambda I_n$).

$$A-\lambda I_2=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix};\ \Gamma_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(1-\lambda)=1-\lambda$$
$$\Gamma_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1=-1$$

	$F_{11}(\lambda)$ compl. alg. al lui $a_{11}-\lambda$	$F_{12}(\lambda)$ compl. alg. al lui a_{12}
	$1-\lambda$	-1
$\lambda_1=-1$	$A_1=2$	$A_2=-1$
$\lambda_2=3$	$A_1=-2$	$A_2=-1$

$\lambda_1=-1 \Rightarrow V_1=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=3 \Rightarrow V_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$$Y_1=(V_1)\cdot e^{-x}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{-x}\ ;\ Y_2=V_2\cdot e^{3x}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=(Y_1, Y_2)\cdot\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=C_1\cdot Y_1+C_2\cdot Y_2=C_1\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{-x}+C_2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{3x}$$

$$Y=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2C_1e^{-x}-2C_2e^{3x}\\-C_1e^{-x}-C_2e^{3x}\end{pmatrix}$$

Exemplul 2 Să se determine soluția generală a sistemului liniar, omogen, 3 ec. cu 3 nec. și coeficienți constanți:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-8y+4z\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=-x+5y-2z\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}=-3x+14y-6z\end{cases}\ ;\ \begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}\\[2mm]\dfrac{dz}{dt}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}3&-8&4\\-1&5&-2\\-3&14&-6\end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

x, y, z = funcțiile necunoscute; t = variabila ind.

– Se caută soluții de forma: $Y=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda t}$

$$(A-\lambda I_3)\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&-8&4\\-1&5-\lambda&-2\\-3&14&-6-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Acest sistem omogen admite și soluții nenule $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_3)=0$

$\Leftrightarrow \varphi(\lambda)=0$ = polinomul caracteristic al matricei A ⇒

$\Rightarrow \lambda$ = valorile proprii ale matricei A.

Se obține $\det(A-\lambda I_3) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \to \begin{cases} \lambda_1=-1 \\ \lambda_2=1 \\ \lambda_3=2 \end{cases}$

Coordonatele vectorului propriu corespunzători fiecărei valori proprii sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie ale matricei $A-\lambda I_3$

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -8 & 4 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ -3 & 14 & -6-\lambda \end{pmatrix} \qquad \frac{A_1}{\Gamma_{11}(\lambda)} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}(\lambda)} = \frac{A_3}{\Gamma_{13}(\lambda)}$$

$$\Gamma_{11}(\lambda) = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 14 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+6)+28 = \lambda^2+\lambda-2$$

$$\Gamma_{12}(\lambda) = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (6+\lambda-6)(-1) = -\lambda$$

$$\Gamma_{13}(\lambda) = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ -3 & 14 \end{vmatrix} = -14+15-3\lambda = 1-3\lambda$$

valori proprii	$\Gamma_{11}(\lambda)$ complem. alg. al lui $(3-\lambda)$	$\Gamma_{12}(\lambda)$ complem. alg. al lui (-8)	$\Gamma_{13}(\lambda)$ complem. alg. al lui (4)	
	$\lambda^2+\lambda-2$	$-\lambda$	$1-3\lambda$	
$\lambda_1=-1$	-2	1	4	$\leftarrow V_1$
$\lambda_2=1$	0	-1	-2	$\leftarrow V_2$
$\lambda_3=2$	4	-2	-5	$\leftarrow V_3$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_1 = V_1\cdot e^{-t} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot e^{-t} = \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ e^{-t} \\ 4\cdot e^{-t} \end{pmatrix}\cdot C_1$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_2 = V_2\cdot e^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot e^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}\cdot C_2$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_3 = V_3\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ -5e^{2t} \end{pmatrix}\cdot C_3$$

Matricea fundamentală de soluții:

$$W(t) = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

Soluția generală a sistemului:

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = W(t)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1, & Y_2, & Y_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3$$

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 e^{-t} & & +4c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{-t} & -c_2 e^{t} & -2c_3 e^{2t} \\ 4c_1 e^{-t} & -2c_2 e^{t} & -5c_3 e^{3t} \end{pmatrix}$$

Metoda eliminării pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare, cu coeficienți constanți, omogene

Prin această metodă sistemul inițial, format din n ecuații cu n funcții necunoscute se transformă într-o singură ecuație, de ordinul n, cu coeficienți constanți, verificată de una din necunoscutele sistemului. Pornind de la soluția acestei ecuații se determină și celelalte necunoscute ale sistemului = componente ale soluției generale.

Exemple

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z \end{cases}$; y, z = funcțiile necunoscute; x = variabila independentă.

a sistemului:

- derivăm ecuația (1)

$y'' = 2y' + z'$.

- din ecuația a doua: $z' = y + 2z$ și înlocuim în relația anterioară:

$y'' = 2y' + y + 2z$.

- Tot din prima ecuație (forma inițială)

$\Rightarrow z = y' - 2y$. $\Rightarrow y'' = 2y' + y + 2\underbrace{(y' - 2y)}_{z}$

$y'' = 2y' + y + 2y' - 4y \Rightarrow y'' = 4y' - 3y \Leftrightarrow$

$y'' - 4y' + 3y = 0$ = ecuația dif. liniară de ord. 2, cu coef. constanți, omogenă.

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = r \cdot e^{rx}$; $y'' = r^2 \cdot e^{rx}$

$e^{rx}(r^2 - 4r + 3) = 0 \; / : e^{rx} (\neq 0) \Rightarrow r^2 - 4r + 3 = 0$ = ecuația caracteristică asociată ec. omogene

$\Delta = 16 - 12 = 4$; $r_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 3 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} r_1 = 1 \Rightarrow y_1 = e^x \\ r_2 = 3 \Rightarrow y_2 = e^{3x} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Din prima ecuație a sistemului $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} z = y' - 2y \\ y = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{3x} \end{array}\right\} \Rightarrow z = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} - 2C_1 e^x - 2C_2 e^{3x} \Rightarrow$

$\boxed{z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x}}$

Soluția generală:

$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} \end{cases}$

Exercițiu: Să se rezolve același sistem prin metoda valorilor și vectorilor proprii.

(2°) Să se determine soluția problemei Cauchy pentru sistemul (1°), care verifică următoarele condiții inițiale:

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$

(a) Se determină soluția generală a sistemului nr. (1): $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} \\ z = -C_1 e^x + C_2 e^{3x} \end{cases}$

b) Se impun condițiile inițiale date:

$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ z(0) = -C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$

$(+) \quad 2C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 1}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = e^x \\ z = -e^x \end{cases}}$ soluția problemei Cauchy.

Soluția problemei Cauchy cu cond. inițiale:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ z(0) = -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

$(+): 2C_2 = 1 \rightarrow \boxed{C_2 = +\frac{1}{2}}$

$C_1 = 1 - C_2;\ \boxed{C_1 = \frac{1}{2}}$

$$\rightarrow \begin{cases} y(x) = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{3x} \\ z(x) = -\frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{3x} \end{cases}$$

Exemplul 2. - prin metoda eliminării.

$$\begin{cases} y' = -3y - z \\ z' = y - z \end{cases}$$

- derivăm prima ecuație $\Rightarrow y'' = -3y' - z'$; dar $z' = y - z$ $\Big\} \Rightarrow$

$y'' + 3y' = -y + z$; $y'' + 3y' + y = z$; dar $z = -3y - y'$ $\Big\} \Rightarrow y'' + 3y' + y = -3y - y'$

$$\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$$

$y = e^{rx}$; $y' = r e^{rx}$; $y'' = r^2 e^{rx}$ $\Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$

$\Rightarrow e^{rx}(r^2 + 4r + 4) = 0 \ /: e^{rx} (\neq 0)$

$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = r_2 = -2}$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-2x} \\ y_2 = x \cdot e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}}$$

Din prima ecuație $\Rightarrow z = -y' - 3y$

$\Rightarrow z = -\left(-2C_1 e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-2x} - 2C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}\right) - 3C_1 e^{-2x} - 3C_2 x e^{-2x}$

$z = e^{-2x}(2C_1 - C_2 - 3C_1) + x e^{-2x}(2C_2 + 3C_2)$

$$\boxed{z = -(C_1 + C_2) e^{-2x} + 5C_2 x \cdot e^{-2x}}$$

Exemplul 3. Să se rezolve sistemul:

y, z = funcțiile necunoscute

x = variabila independentă!

$$\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

metoda reducerii la o singură ecuație:

derivăm prima ecuație $\Rightarrow y'' = 2y' - z'$ $\Big\} \Rightarrow$

din a doua ecuație $\Rightarrow z' = y + 2z$

$\Rightarrow y'' - 2y' = -y - 2z$; $y'' - 2y' + y = -2z$

Din ec. 1° $\Rightarrow$ $\boxed{z = 2y - y'}$ $\Rightarrow$

$y'' - 2y' + y = -2(2y - y')$; $y'' - 2y' + y = -4y + 2y'$

$\Rightarrow y'' - 4y' + 5y = 0$ → ec. omogenă, de ord 2, cu coef. ct.

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = r e^{rx}$; $y'' = r^2 e^{rx}$

$e^{rx}(r^2 - 4r + 5) = 0 \;/ : e^{rx} \Rightarrow r^2 - 4r + 5 = 0$ = ec. caracteristică. $\Delta = 16 - 20 = -4$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \left\langle \begin{matrix} r_1 = 2+i \\ r_2 = 2-i \end{matrix} \right.$$

$\Rightarrow$ rădăcini complexe conjugate simple.

$$\left.\begin{matrix} r_1 = 2+i \Rightarrow y_1 = e^{2x} \cdot \cos x \\ r_2 = 2-i \Rightarrow y_2 = e^{2x} \cdot \sin x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{2x} \cdot \cos x + C_2 e^{2x} \cdot \sin x}$$

Din prima ecuație: $z = 2y - y'$

$z = 2C_1 e^{2x} \cdot \cos x + 2C_2 e^{2x} \cdot \sin x - (2C_1 e^{2x} \cdot \cos x - C_1 e^{2x} \cdot \sin x$
$+ 2C_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + C_2 e^{2x} \cdot \cos x) =$
$= e^{2x} \cdot \cos x (\cancel{2C_1} - \cancel{2C_1} - C_2) + e^{2x} \cdot \sin x (\cancel{2C_2} + C_1 - \cancel{2C_2})$

$\Rightarrow \boxed{z = -C_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + C_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin x}$

<u>Cazul valorilor proprii multiple</u> (Metoda 1)

Fie sist. omogen, de n ecuații cu n necunoscute

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y \quad ; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} ; \; A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \cdot e^{rx} \Rightarrow (A - r I_n) \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fie r_k = o valoare proprie a lui A

$\Rightarrow (A_1, A_2, \dots, A_n)$ = coord. vectorului propriu corespunzător lui r_k. Acestea sunt proporționale cu complemenții algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $(A - r I_n)$.

$$\frac{A_1}{\Gamma_{11}(\lambda)} = \frac{A_2}{\Gamma_{12}(\lambda)} = \cdots = \frac{A_n}{\Gamma_{1n}(\lambda)}$$

Dacă $\lambda = \lambda_0$ este multiplă de ordinul m, se poate demonstra că soluțiile din sistemul fundamental ale sistemului de mai sus se pot alege astfel:

$\lambda = \lambda_0$ de ord. m :
$$Y_{01} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda x} \\ \Gamma_{12}(\lambda)\cdot e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \Gamma_{1n}(\lambda)\cdot e^{\lambda x} \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_0} ; \quad Y_{02} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\Gamma_{12}(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\Gamma_{1n}(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\right) \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_0} \cdots$$

$$\cdots Y_{0m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}}\left(\Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\right) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}}\left(\Gamma_{1n}(\lambda)\cdot e^{\lambda x}\right) \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_0}.$$

Exemplu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = -y + 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ – funcțiile necunoscute

$t \in \mathbb{R}$ → variabila independ.

Se caută soluții de forma: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}$

$(U - \lambda I_3)\cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\varphi_U(\lambda) = \det(U - \lambda I_3)$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Sist. admite sol nenule $\Leftrightarrow \det(U - \lambda I_3) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$.

Complementii algebrici ai elementelor din prima linie a matricei $A - \lambda I_3$

$$\Gamma_{11}(\lambda) = [(1-\lambda)(2-\lambda) - 1] = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\Gamma_{12}(\lambda) = (-1)[2-\lambda] = \lambda - 2 \;;\; \Gamma_{13}(\lambda) = (-1)\cdot[-1] = -1$$

Pt $\lambda = 2 \Rightarrow A = \Gamma_{11}(2) = -1$; $B = \Gamma_{12}(2) = 0$; $C = \Gamma_{13}(\lambda) = -1$

$$\Rightarrow Y_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

Pt $\lambda_2 = 1$: $A = \Gamma_{11}(1) = -1$; $B = \Gamma_{12}(1) = -1$; $C = \Gamma_{13}(1) = -1$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{t}$$

$$Y_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\Gamma_{11}(\lambda)\cdot e^{\lambda t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\Gamma_{12}(\lambda)\cdot e^{\lambda t}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\Gamma_{13}(\lambda)\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[(\lambda^2-3\lambda+1)\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[(\lambda-2)\cdot e^{\lambda t}\right] \\ \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[(-1)\cdot e^{\lambda t}\right] \end{pmatrix} =$$

$$= \left.\begin{pmatrix} (2\lambda-3)\cdot e^{\lambda t} + (\lambda^2-3\lambda+1)\cdot t\cdot e^{\lambda t} \\ 1\cdot e^{\lambda t} + (\lambda-2)\cdot t\cdot e^{\lambda t} \\ -t\cdot e^{\lambda t} \end{pmatrix}\right|_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} -e^t - te^t \\ e^t - te^t \\ -te^t \end{pmatrix} = Y_3(1)$$

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^t & e^t(-t-1) \\ 0 & -e^t & e^t(1-t) \\ -e^{2t} & -e^t & -te^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

<u>Exemplu</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases} \qquad \det(A - \lambda I_3) = (2-\lambda)^3 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, răd. triplă.