LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 6

TABLOURI SEMANTICE

- **Gentzen** (logician german, 1909-1945) a fost primul care a demonstrat în 1943 că toate tautologiile sunt produse prin aplicarea anumitor reguli, ceea ce revine la a spune că pentru orice tautologie ϕ există o anumită tautologie ce conduce la ϕ.
- Teoria demonstrării a fost utilizată în 1955 de **Beth** şi **Hintikka** pentru a crea un algoritm de determinare a caracterului tautologic al unei propoziţii.

TABLOURI SEMANTICE

Fie σ o propoziţie.

- fσ reprezintă aserţiunea "σ este *falsă*", iar
- *a*σ reprezintă aserţiunea "σ este *adevărată*".
- fσ şi *a*σ se numesc *formule cu semn*.

TABLOURI SEMANTICE

- Tablourile sematice atomice ale propoziţiilor σ, σ_1, σ_2 sunt cele prezentate în tabelul următor:

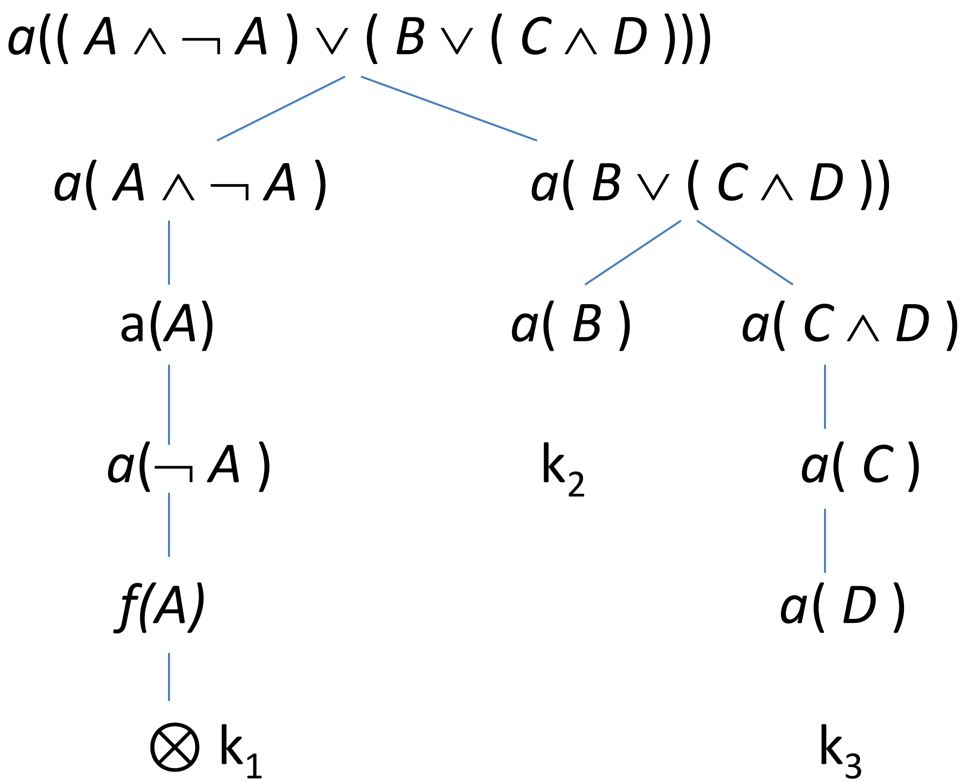
<table>
<tr>
<td>$a(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$
|
$a\sigma_1$
|
$a\sigma_2$</td>
<td>$a(\sigma_1 \vee \sigma_2)$
/ \
$a\sigma_1$ $a\sigma_2$</td>
<td>$a(\neg\sigma)$
|
$f(\sigma)$</td>
<td>$a(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$
/ \
$f\sigma_1$ $a\sigma_2$</td>
<td>$a(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$
/ \
$a\sigma_1$ $f\sigma_1$
| |
$a\sigma_2$ $f\sigma_2$</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$
/ \
$f\sigma_1$ $f\sigma_2$</td>
<td>$f(\sigma_1 \vee \sigma_2)$
|
$f\sigma_1$
|
$f\sigma_2$</td>
<td>$f(\neg\sigma)$
|
$a(\sigma)$</td>
<td>$f(\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)$
|
$a\sigma_1$
|
$f\sigma_2$</td>
<td>$f(\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2)$
/ \
$a\sigma_1$ $f\sigma_1$
| |
$f\sigma_2$ $a\sigma_2$</td>
</tr>
</table>

TABLOURI SEMANTICE

- **Exemplul 1:**

Fie K: $((A \wedge \neg A) \vee (B \vee (C \wedge D)))$ propoziţie.

Tabloul semantic cu originea aK este:



TABLOURI SEMANTICE

<u>Definiţii:</u>

- ***Nodurile*** unui tablou semantic sunt toate formulele cu semn care apar în tablou.
- Un nod al unui tablou semantic se numeşte ***folosit*** dacă apare ca origine a unui tablou semantic atomic; în caz contrar, nodul se numeşte ***nefolosit.***
- O ramură a unui tablou semantic se numeşte ***contradictorie*** dacă pentru o anumită propoziţie σ, *a*σ şi *f* σ sunt noduri ale ramurii respective.
- Un tablou semantic se numeşte ***complet*** dacă nici *una* din ramurile necontradictorii din tablou nu are noduri nefolosite; în caz contrar se numeşte tablou ***incomplet.***
- Un tablou semantic este ***contradictoriu*** dacă toate ramurile sale sunt contradictorii.

TABLOURI SEMANTICE

Construcţia inductivă a tablourilor semantice:

Vom construi un tablou semantic pentru o propoziţie *K* după cum urmează:

Vom începe cu formula cu semn *aK* (sau ƒ*K*) ca origine a tabloului şi continuăm inductiv .

Pasul n: Avem un tablou semantic atomic T_n.

Pasul n+1: *Tabloul* semantic atomic T_n va fi extins la tabloul T_{n+1} prin utilizarea anumitor noduri ale T_n care nu vor mai fi utilizate în continuare. Dintre nodurile neutilizate ale lui T_n aflate cel mai aproape de origine, selectăm pe cel mai din stânga. Fie *X* acest nod.

Extindem acum fiecare ramură necontradictorie ce trece prin *X* prin concatenarea unui tablou atomic semantic T_{n+1} (în practică nu se va mai scrie nodul *X* din nou deoarece el este deja un nod al ramurii necontradictorii).

Construcţia se termină atunci când fiecare ramură necontradictorie nu mai are noduri nefolosite.

TABLOURI SEMANTICE

- **<u>Exerciţiu(Legea lui Peirce):</u>** Construiţi tablourile semantice ale adevarului şi falsităţii pentru pentru propoziţia $((A \to B) \to A) \to A$ *şi* folosindu-vă de acestea stabiliţi validitatea propoziţiei.

TABLOURI SEMANTICE

- *Dacă un tablou semantic complet cu originea fK este contradictoriu, acesta înseamnă că am încercat toate modurile posibile în care propoziţia K poate deveni falsă şi am eşuat; în consecinţă, K este o tautologie.*

TABLOURI SEMANTICE

- *O* ***demonstraţie Beth*** a unei propoziţii K este un tablou semantic contradictoriu complet cu originea fK.
- Un tablou semantic contradictoriu complet cu originea aK se numeşte *o* ***respingere Beth*** a lui K.
- Se spune că propoziţia K este ***demonstrabilă Beth*** dacă K admite o demonstraţie Beth.
- K se numeşte ***respinsă Beth*** dacă există o respingere Beth pentru K.
- Faptul că propoziţia K este demonstrabilă Beth se notează cu $\vdash_B K$.

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

- **Axiomele.** Privim ca axiomă oricare din propoziţiile de forma următoare:

1) $\varphi \to (\tau \to \varphi)$
2) $(\varphi \to (\tau \to \sigma)) \to ((\varphi \to \tau) \to (\varphi \to \sigma))$
3) $(\neg\varphi \to \neg\tau) \to (\tau \to \varphi)$

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

- **Regula *Modus Ponens*:**

Regula *Modus Ponens*, spune că propoziţia τ poate fi derivată din propoziţiile φ şi $\varphi \rightarrow \tau$. Regula *Modus Ponens* (*mode* conform lui Diogenes Laertius) se notează cu:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \\ \varphi \rightarrow \tau\end{array}}{\tau} \qquad (1)$$

sau chiar cu :

$$\varphi, \varphi \rightarrow \tau \vdash \tau \qquad (2)$$

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

<u>Exemplul 2:</u> Să se demonstreze că $\vdash A \to A$.

<u>Demostratie:</u>

$$\vdash A \to ((B \to A) \to A) \qquad (1)$$

pe baza primei axiome.

Pe baza celei de-a doua axiome avem:

$$\vdash A \to ((B \to A) \to A) \to [((A \to (B \to A)) \to (A \to A)] \quad (2)$$

Din (1), (2) şi *Modus Ponens* rezultă:

$$\vdash (A \to (B \to A)) \to (A \to A) \qquad (3)$$

Dar $\vdash A \to (B \to A)$, conform primei axiome şi, cu regula *Modus Ponens*, (3) conduce la $\vdash A \to A$.

Astfel, propoziţia $A \to A$ este derivată în sistemul axiomatic descris.

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

***<u>Substituţia echivalenţelor</u>*:**

Dacă o propoziţie $\sigma \leftrightarrow \sigma_1$ *este derivată în* **LP** *şi este o subformulă a propoziţiei* φ*, atunci propoziţia* $\varphi \leftrightarrow \varphi_1$ *poate fi de asemenea derivată în* **LP***, unde* φ_1 este *propoziţia obtinută din* φ *prin înlocuirea a zero, una sau mai multe apariţii ale propoziţiei* σ *cu echivalentul ei* σ_1*.*

Formal:

$$\vdash \sigma \leftrightarrow \sigma_1 \qquad \Rightarrow \qquad \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi_1$$

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

Fie S o mulţime de propoziţii.

(1) O **demonstraţie din *S*** este o secvenţă finită de propoziţii $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ astfel încât pentru fiecare $1 \leq i \leq n$:

- (i) σ_i aparţine lui S, sau
- (ii) σ_i este o axiomă, sau
- (iii) σ_i urmează din σ_j, σ_k, $1 \leq j,k \leq i$, prin aplicarea regulii *Modus Ponens*.

(2) O propoziţe σ este ***S*-demonstrabilă** dintr-o mulţime de propoziţii S dacă există o demonstraţie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ din S astfel încât σ_n coincide cu σ. Formal se scrie $S \vdash \sigma$.

(3) Propoziţia σ este **demonstrabilă** dacă $\vdash \sigma$, adică dacă σ este derivată în sistemul axiomatic prin utilizarea regulii *Modus Ponens*.

Evident, conceptul de propoziţie S-demonstrabilă coincide cu conceptul de propoziţie demonstrabilă pentru $S = \phi$.

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

Exemplul 3: Vom prezenta demonstraţia formulei $\neg B \rightarrow (C \rightarrow A)$ din $S = \{A\}$:

(1) A — A din S

(2) $A \rightarrow (C \rightarrow A)$ — axioma 1

(3) $(C \rightarrow A)$ — *Modus Ponens* din (1) şi (2)

(4) $(C \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow (C \rightarrow A))$ — axioma 1

(5) $\neg B \rightarrow (C \rightarrow A)$ *Modus Ponens* din (3) şi (4)

DEMONSTRAŢII AXIOMATICE

- **Teorema –(***Teorema deducţiei)*:

  Fie *S* o mulţime de propoziţii şi fie *K, L* două propoziţii **LP**. Atunci:

$$S \cup \{K\} \vdash L \quad \Leftrightarrow \quad S \vdash K \to L$$

MULŢUMESC!

SEMINAR 6

Ex1: Să se construiască tablourile semantice ale adevărului și ale falsității pentru următoarele propoziții:

a) $[[(\neg A \wedge B) \rightarrow C] \vee D]$

b) $A \wedge B \rightarrow C$

c) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$

SEMINAR 6

Ex2: Folosind metoda tablourilor semantice, demonstrați că următoarele propoziții sunt tautologii:

a) $(A \wedge \neg A) \rightarrow A$

b) b) $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow \neg B)$

c) $A \rightarrow \neg\neg A$

d) $[(A \wedge B) \rightarrow C] \leftrightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow C)]$

e) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \leftrightarrow (A \wedge B)$

f) $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

g) $((B \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow A)) \rightarrow ((B \vee C) \rightarrow A)$

h) $((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

i) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow A))$

SEMINAR 6

Ex3: Demonstrați că următorele propoziții sunt contradicții:

a) $A \wedge \neg A$

b) $(\neg A \vee (B \wedge \neg B)) \leftrightarrow A$

c) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (A \wedge \neg C)$

d) $\neg(A \wedge B) \wedge (A \rightarrow B) \wedge A$

SEMINAR 6

Ex4: Aflați valorizările de adevăr care falsifică propozițiile următoare:

a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B)$

b) $(A \vee \neg B) \leftrightarrow (A \wedge B)$

SEMINAR 6

Ex5: Demonstrați $\{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D\} \vdash C \vee D$ (folosind tablouri semantice).

SEMINAR 6

Ex6: Să presupunem că următoarele propoziţii sunt adevărate.

- *George o iubeşte pe Maria sau George o iubeşte pe Ecaterina*.
- *Dacă George o iubeşte pe Maria atunci el o iubeşte pe Ecaterina*.

Pe cine iubeşte George de fapt?