05.10.2022

Primitive. Metode de calcul a primitivelor.

Definiție. Fie $f: I \to \mathbb{R}$, I = interval o funcție reală de variabilă reală. Spunem că funcția f admite primitive pe intervalul I dacă există o funcție $F: I \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1° F este derivabilă pe I;

2° $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$

Notație $F(x) = \int f(x)\cdot dx \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall\, x \in I$

Prin notația $\int f(x)\cdot dx$ vom înțelege mulțimea tuturor primitivelor funcției f

$$\int f(x)\cdot dx = \{F: I \to \mathbb{R} \mid F = \text{primitivă a lui } f\}.$$

Oricare două primitive ale lui f diferă între ele printr-o constantă. Într-adevăr, dacă F este o primitivă a lui f pe I, atunci $(\forall)\, C$ = o constantă, avem că $(F(x)+C)' = F'(x) + (C)' = F'(x)$, $\forall\, x \in I$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,\ \forall\, C \in \mathbb{R};\ F'(x) = f(x)$$

Mai reținem că oricare două primitive ale funcției f diferă între ele printr-o constantă.

De repetat tabloul derivatelor funcțiilor elementare și ale funcțiilor compuse (din clasa a-XI-a)

$$\begin{tikzcd} x \in I \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f \circ u"'] & J \ni u(x) \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \ni f(u(x)) \end{tikzcd}$$

$f \circ u : I \to \mathbb{R}$.

Dacă $u: I \to J$ este derivabilă pe I și $f: J \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe J, atunci funcția $f \circ u: I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I și are loc relația: $(f(u(x)))' = f'(u(x))\cdot u'(x)$, $\forall\, x \in I$

Tabloul primitivelor funcțiilor elementare

1° Funcția constantă
$f(x) = a, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \int a \cdot dx = a \cdot x + C$

2° Funcția putere
$f(x) = x^a, a \neq -1 \Rightarrow F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

3° $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0 \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

4° $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ (funcția exponențială)
$F(x) = \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5° $f(x) = \frac{1}{x \pm a}, a \neq 0 \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x \pm a} \cdot dx =$
$= \ln|x \pm a| + C$

6° $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$

$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{x^2-a^2}$

$\Rightarrow A(x+a) + B(x-a) = 1 \quad \forall x \neq \pm a.$
$x(A+B) + a(A-B) = 1 \quad \forall x \neq \pm a$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ a(A-B)=1 \end{cases} \Rightarrow B = -A \Rightarrow a(A+A) = 1;\ 2a \cdot A = 1$
$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2a}} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2a}}$

$\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}\right) + \left(-\frac{1}{2a}\right) \cdot \frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] =$

$\frac{1}{2a}\left(\frac{x+a-x+a}{x^2-a^2}\right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$

$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-a^2} \cdot dx =$

$$\int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\cdot dx = \frac{1}{2a}\cdot\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int\frac{1}{x-a}\,dx - \int\frac{1}{x+a}\,dx\right] = \frac{1}{2a}\cdot\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int\frac{1}{x^2-a^2}\cdot dx = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}$$

Obs. (1°) În rezolvarea prezentată la punctul (6) am folosit următorul rezultat (teorema):

Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$, I interval, sunt două funcții care admit primitive pe I și $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci:

(1°) funcția $f+g$ admite primitive pe I și

$\int (f(x)+g(x))\cdot dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \Leftrightarrow$ „primitiva sumei" = „suma primitivelor"

(2°) $\int \alpha\cdot f(x)\,dx = \alpha\cdot\int f(x)\,dx \Leftrightarrow$ o constantă „iese" de sub integrală.

Aceste proprietăți rezultă din proprietățile derivatei:

$$(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$$

$$(\alpha\cdot F(x))' = \alpha\cdot F'(x)$$

Obs. (2°) Descompunerea în fracții simple a fracției compuse $\frac{1}{x^2-a^2}$, se poate face mai simplu astfel:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{x^2-a^2} \Rightarrow$$

$A(x+a)+B(x-a) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

at $x=a \Rightarrow A\cdot 2a + 0 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a}$

at $x=-a \Rightarrow 0 + B\cdot(-2a) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2a}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right].$$

7°

$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$.

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\cdot dx = ?$

7.1°: $a=1$; $\int \frac{1}{x^2+1}\cdot dx \Rightarrow F(x) = \operatorname{arctg} x + C$

7.2°: $a \neq 1$; $\int \frac{1}{x^2+a^2}\cdot dx = \underbrace{\frac{1}{a}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a}}_{F(x)} + C$

$(F(x)+C)' = \left(\frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{a}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' + 0 =$

$= \frac{1}{a}\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{a}\cdot(x')}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} = \frac{1}{x^2+a^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\cdot dx = \frac{1}{a}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C}$$

8°

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \arcsin x + C$

9°

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$. ; $a\neq 0$. $a>0$.

dem: $F(x) = \arcsin\frac{x}{a} + C \Rightarrow \left(\arcsin\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$\Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C}$$

(10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $a\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$

verificăm că $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \; ; \; (\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C\right)' = \left(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)' + (C)' =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1+\frac{(x^2+a^2)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C}$$

(11) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a\neq 0$; $x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\cdot dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

Exercițiu pe cazurile $x\in(-\infty,-a)$ și $x\in(a,+\infty)$

(12) $f(x)=\sin x \Rightarrow F(x)=\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$f(x)=\sin(\alpha x) \Rightarrow F(x)=\int \sin(\alpha x)\cdot dx = \frac{-\cos \alpha x}{\alpha}+C$

$$\left(\frac{-\cos(\alpha x)}{\alpha}\right)' = \frac{-1}{\alpha}\cdot(\cos(\alpha x))' = -\frac{1}{\alpha}\cdot(-\sin\alpha x)\cdot\alpha = \sin\alpha x$$

(13) $f(x)=\cos x \Rightarrow F(x)=\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

$f(x)=\cos(\alpha x) \Rightarrow F(x)=\int \cos\alpha x\cdot dx = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}+C$

14° $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$; $F(x)=\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot dx = tg\,x + C$

15 $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$; $F(x)=\int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot dx = -ctg\,x + C$

16° $f(x)=ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}$

$$\int ctg\,x\cdot dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\cdot dx=\ln|\sin x|+C$$

$$(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

17 $f(x)=tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-(\cos x)'}{\cos x}$

$$\int tg\,x\cdot dx=-\ln|\cos x|+C$$

18° $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

$$\int e^x\cdot dx=e^x+C$$

$$\int e^{\alpha x}\cdot dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}+C$$

Problema existenței primitivelor

Are loc următoarea teoremă!

Orice funcție continuă $f: I\to\mathbb{R}$, I = interval, admite primitive pe I.

Concluzie: pentru a arăta că o funcție admite primitive pe un interval, este suficient să arătăm că este continuă pe acel interval!

Tipuri de aplicatii

(1) Se dă funcția f și se cere primitiva a sa

(2) Să se determine unul sau mai mulți parametri a.î. o funcție să admită primitive pe un interval.

Ex. Fie $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{15x\cdot\sqrt{x+1}}{2}$.

Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$ a.î. funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{x+1}$ să fie o primitivă a lui f pe $(-1,+\infty)$

Rez

F - produs de funcții derivabile, deci este și ea derivabilă pe $(-1,+\infty)$. F este primitiva lui f pe $(-1,+\infty)$ dacă $F'(x)=f(x)$ pe $(-1,+\infty)$

$F'(x)=(2ax+b)\cdot\sqrt{x+1}+(ax^2+bx+c)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{15x\sqrt{x+1}}{2}=f$

$2(2ax+b)\cdot(x+1)+ax^2+bx+c=15x(x+1) \iff$

$4ax^2+4ax+2bx+2b+ax^2+bx+c-15x^2-15x=0,\ \forall x>-1$

$(5a-15)\cdot x^2+(4a+3b-15)\cdot x+2b+c=0,\ \forall x>-1 \iff$

$\begin{cases}5a-15=0\\4a+3b-15=0\\2b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=3\\b=1\\c=-2\end{cases}$ = valorile căutate pt care funcția F este o primitivă a lui f pe $(-1,+\infty)$

Temă

(1) Ex 11/pag 45, Manual M. Ganga - poză

(2) Ex 25/pag 47, — " ——— - poză

(3) Ex rezolvate, 1÷15, pag 50÷52, M. Ganga, poze

(4) Ex propuse, 1÷36, pag 52+53, M. Ganga, poze!