Temă 1 (seminar)

① Demonstrați relația (prin inducție matematică)

a) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$

Rezolvare

- folosim propietatea $\boxed{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k}$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + \underline{C_{n-1}^k} = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \underline{C_{n-2}^k} =$$
$$= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \underline{C_{n-3}^k} = \ldots$$
$$= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$$

② Calculați suma:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = S_n$$

Rezolvare:

$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$; $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$

- Rescriem suma folosind formula comb. complementare:

$$S_n = C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \ldots + (n-1)C_n^{n(n-1)} + nC_n^{n-n} =$$
$$= C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + (n-1)C_n^1 + nC_n^0$$

- Adunăm la suma inițială:

$$2S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n + C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \ldots + \frac{(n-1)C_n^1}{2} + nC_n^0$$

$$2S_n = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^n$$

$$2S_n = n \cdot 2^n \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot 2^n}{2} = \underline{n \cdot 2^{n-1}}$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$$

$$2S = nC_n^0 + nC_n^1 + nC_n^2 + \ldots + nC_n^n$$

$$2S = n\underbrace{(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n)}_{n \cdot 2^n}$$

Temă 2 (seminar)

1) Calculați sumele:

a) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1}$

Rezolvare:

- Folosim $\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^n} = \frac{n+1}{k+1} \Rightarrow \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$ și o aplicăm fiecărui termen în parte.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1} C_n^0 &= \frac{1}{n+1} C_{n+1}^1 \\ -\frac{1}{2} C_n^1 &= -\frac{1}{n+1} C_{n+1}^2 \\ \frac{1}{3} C_n^2 &= \frac{1}{n+1} C_{n+1}^3 \end{aligned}\right| (+)$$

- Știm că $C_{n+1}^1 + C_{n+1}^3 = C_{n+1}^0 - C_{n+1}^2 = \dots = 2^n$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n+1}(2^n - 2^n + 1) = \underline{\frac{1}{n+1}}$$

2) Să se determine nr. funcțiilor $f: \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1) = 4$

Rezolvare

- Folosim regula produsului
- Trebuie luată pe rând fiecare valoare din codomeniu

$f(1) = 4 \to f(1)$ poate lua doar o valoare $\to (4)$

$f(2) =$ poate lua toate cele 5 valori $\to (1,2,3,4,5)$, valori independente de valorile pe care le ia $f(1)$.

$f(3) =$ poate lua 5 valori $\to (1,2,3,4,5)$, valori posibile și independente de $f(1)$ și $f(2)$.

$f(4) =$ poate lua 5 valori $\to (1,2,3,4,5)$, valori posibile și independente de $f(1)$, $f(2)$ și $f(3)$

$f(5) =$ poate lua 5 valori $\to (1,2,3,4,5)$, valori independente de $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$

$\Rightarrow$ Produsul este $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ funcții

3) Câte nr. naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

Rezolvare

• Pentru că trebuie să formăm nr. cu cifre distincte (deci contează ordinea) folosim aranjamente.

• Calculăm aranjamente de 5 (mulțimea are 5 elemente), luate câte 3 (nr. au 3 cifre)

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$$

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

• Cu elementele $\{1,3,5,7,9\}$ se pot formula 60 de nr. cu 3 cifre distincte.

4) Utilizând relația $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} P(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, unde

$P(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{(m_1+m_2+\dots+m_n)!}{m_1! m_2! \dots m_n}$, să se calculeze $(a+b+c+d)^3$

Rezolvare

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=m} P(m_1, m_2, \dots, m_n) x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots x_n^{m_n}$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 = \sum_{m_1+m_2+\dots+m_n=3} P(m_1, m_2, m_3, m_4) a^{m_1} \cdot b^{m_2} \cdot c^{m_3} \cdot d^{m_4} =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3a^2d + 3ab^2 + 3ac^2 + 3ad^2 + 3b^2c + 3b^2d + 3d^2c + 3c^2d + 6abc + 6abd + 6acd + 6bcd$$

$$\Rightarrow P(3,0,0,0) = \frac{3!}{3!0!0!0!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$\Rightarrow P(2,1,0,0) = \frac{(2+1)!}{2!1!0!0!} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3}{\cancel{2}} = 3$$

$$\Rightarrow P(1,1,1,0) = \frac{3!}{1} = 6$$