1.9. Ecuații Clairaut

O ecuație diferențială de ordinul întâi este de tip **Clairaut** dacă se poate aduce la forma:

$$\psi(y') + x \cdot y' - y = 0 \qquad (3)$$

unde ψ este funcție derivabilă pe (a, b).

Pentru rezolvare derivăm ecuația, folosind formula de derivare a unei funcții compuse și facem substituția $y' = p$:

$\psi'(y') \cdot y'' + y' + x \cdot y'' - y' = 0$, adică $\psi'(y') \cdot y'' + x \cdot y'' = 0$, deci $y'' = p'$ și

$$p' \cdot (\psi'(p) + x) = 0. \qquad (***)$$

Observând anularea produsului din (***) avem două cazuri:

a. Dacă $p' = 0$, rezultă $p = c$, și din ecuația (3) obținem soluția generală

$$y = xc + \psi(c), c\epsilon(a, b) \subset \mathbb{R}.$$

b. Dacă $\psi'(p) + x = 0 \Rightarrow x = -\psi'(p)$ și folosind ecuația inițială obținem soluția singulară sub formă parametrică a ecuației Clairaut

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p), p\epsilon(a, b) \subset \mathbb{R} \end{cases}.$$

Din cele de mai sus rezultă că algoritmul pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul întâi de tip Clairaut (3), cuprinde următorii pași:

Pasul 1. Se derivează ecuația;

Pasul 2. Se notează $y' = p \Rightarrow y'' = p'$, apoi se identifică funcția ψ și se calculează derivata ei ψ';

Pasul 3. Rezultatele obținute la pasul 2 le completăm în ecuația (***);

Pasul 4. Dacă $p' = 0$, rezultă $p = c$ și din ecuația (3) obținem soluția generală:

$$y = xc + \psi(c), c\epsilon(a, b) \subset \mathbb{R}.$$

Dacă $\psi'(p) + x = 0 \Rightarrow x = -\psi'(p)$ și folosind ecuația inițială obținem soluția singulară sub formă parametrică a ecuației Clairaut:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p), p\epsilon(a, b) \subset \mathbb{R} \end{cases}.$$

Exemplu. Să se integreze ecuația diferenţială:

$$y - xy' - (y')^2 = 0, \qquad (4)$$

Rezolvare. Se aplică algoritmul de mai sus.

Pasul 1. Se aduce la forma $(y')^2 + xy' - y = 0$ care este o ecuație diferențială de ordinul întâi de tip Clairaut (3) și se derivează: $2 \cdot y' \cdot y'' + y' + x \cdot y'' - y' = 0$.

Pasul 2. Se notează $y' = p \Rightarrow y'' = p'$ și apoi se identifică funcția $\psi(p) = p^2 \Rightarrow \psi'(p) = 2p$

Pasul 3. Cu rezultatele obținute la pasul 2 ecuația diferențială (***) în acest caz este:

$$p' \cdot (2 \cdot p + x) = 0.$$

Pasul 4. Dacă $p' = 0$, rezultă $p = y' = c$ și din ecuația (4) obținem soluția generală

$$y = xc + \psi(c), c\epsilon\mathbb{R} \Rightarrow y = xc + c^2, c\epsilon\mathbb{R}.$$

Dacă $2 \cdot p + x = 0 \Rightarrow x = -2 \cdot p$ și folosind ecuația inițială obținem soluția singulară sub formă parametrică a ecuației Clairaut:

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = -p \cdot \psi'(p) + \psi(p), p\epsilon\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2p \\ y = -p \cdot 2p + p^2, p\epsilon\mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2, p\epsilon\mathbb{R} \end{cases}.$$

Temă. Să se integreze următoarele ecuații:

1. $y = xy' + \frac{1}{(y')^2}$;
2. $y = xy' + (y')^3$.

2. Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

2.1. Introducere

Ecuațiile diferențiale liniare de ordinul *n*≥2, sunt ecuații diferențiale în care intervine și derivata de ordinul *n* a funcției necunoscută, având următoarea formă:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = b(x) \qquad (1)$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, b și y sunt funcții definite și continue pe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, iar funcția necunoscută y este derivabilă de n ori pe $[a, b]$ și $y = y(x) \in C^n[a, b]$, unde $C^n[a, b]$ este spaţiul vectorial al funcţiilor reale continue şi derivabile de *n* ori cu derivate continue pe $[a, b]$. De reţinut că, elementul neutru al spaţiul vectorial faţă de operaţia de adunare a funcţiilor este funcţia nulă, notată prin 0, ca şi numărul zero, pentru evitarea confuziei trebuie deosebită funcţia nulă de numărul zero, în funcţie de context.

Dacă b este funcția nulă pe $[a, b]$, adică $b=0$, atunci ecuația (1) se numește și **omogenă**, iar în cazul în care b nu este funcția nulă pe $[a, b]$ ecuația (1) se numește și **neomogenă**. Se observă că oricărei ecuații neomogene i se poate atașa ecuația omogenă.

Prin definiție, funcția $y = y(x) \in C^n[a, b]$ este **soluție** a ecuației (1) dacă verifică ecuația împreună cu derivatele sale până la ordinul n. La fel ca la ecuațiile diferențiale de ordinul întâi există soluții particulare și soluție generală ale ecuației (1).

Se consideră operatorul liniar (aditiv și omogen) notat prin L_n, care foloseşte notaţia $\frac{d^k *}{dx^k}$ (unde * indică poziția funcției argument), utilizată pentru a se indica derivata de ordinul k a funcției argument, având următoarea formă:

$$L_n(*) = \frac{d^n *}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} *}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{d *}{dx} + a_n(x) \cdot *.$$

De exemplu,

$$L_n(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + a_n(x) \cdot y.$$

Se constată că:

$$L_n(*): C^n[a, b] \to C^0[a, b],$$

iar liniaritatea operatorului L_n este dată de relaţia:

$$L_n(\alpha y + \beta z) = \alpha L_n(y) + \beta L_n(z), \forall \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}, y = y(x), z = z(x) \in C^n[a, b]$$

care rezultă din proprietatea de liniaritate a funcţiei derivată de orice ordin.

Cu ajutorul acestui operator ecuația liniară omogenă atașată ecuației (1) se scrie:

$$L_n(y) = 0 \qquad (2)$$

iar ecuația liniară neomogenă (1) se scrie:

$$L_n(y) = b(x). \qquad (3)$$

Soluțiile ecuației omogene au o proprietate utilă dată de următoarea teoremă.

Teorema 1. Dacă y_1 și y_2 sunt soluții ale ecuației omogene (2), atunci şi combinaţia liniară a lor de forma $c_1 y_1 + c_2 y_2$, unde c_1 şi c_2 sunt constante reale și nenule, este soluție a ecuației omogene (2).

Demonstrație. Din ipoteza că y_1 și y_2 sunt soluţii ale ecuaţiei omogene (2) rezultă:

$$L_n(y_1) = 0 \text{ şi } L_n(y_2) = 0.$$

Deoarece L_n este operator liniar, se poate scrie:

$$L_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) = L_n(c_1 y_1) + L_n(c_2 y_2) = c_1 L_n(y_1) + c_2 L_n(y_2) = 0,$$

adică funcția $c_1 y_1 + c_2 y_2$ este soluție a ecuației particulare omogene (2) atașată ecuației (1).

Pentru a prezenta teoria rezolvării unei ecuații diferențiale liniare de ordinul $n \geq 2$ sunt necesare următoarele definiții și teoreme.

Definiție. Funcțiile reale $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, $m \in \mathbb{N}^*$, definite pe $[a,b]$ sunt **liniar dependente** pe $[a,b]$, dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, din $\mathbb{R}$, nu toți nuli, astfel încât:

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_m y_m(x) = 0, \forall x \in [a,b].$$

O caracterizare completă a dependenței a *m* funcții este prezentată în următoarea teoremă.

Teorema 2. Funcțiile $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, $m \in \mathbb{N}^*$, derivabile până la ordinul *m-1* inclusiv pe $[a,b]$ sunt liniar dependente pe $[a,b]$, dacă şi numai dacă determinantul funcțional (funcție de $x \in [a,b]$), numit **wronskian** (de la matematicianul Wronski), este nul pe $[a,b]$, adică:

$$W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1{}'(x) & y_2{}'(x) & \cdots & y_m{}'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = 0, \forall x \in [a,b].$$

Cu ajutorul noțiunii de liniar dependență se poate acum introduce noțiunea de liniar independență, după cum urmează.

Definiție. Funcțiile reale $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, $m \in \mathbb{N}^*$, definite pe $[a,b]$ sunt **liniar independente** pe $[a,b]$, dacă oricare ar fi scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, din $\mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_m y_m(x) = 0, \forall x \in [a,b],$$

implică $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Se observă că funcțiile $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$, $m \in \mathbb{N}^*$, derivabile până la ordinul *m-1* inclusiv pe $[a,b]$ sunt liniar independente pe $[a,b]$, dacă

$$W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) \neq 0, \forall x \in [a,b].$$

Următorul rezultat se referă construirea soluției generale a ecuației omogene cu ajutorul a *n* soluții liniar independente.

Teorema 3. Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *n* soluții liniar independente ale ecuației diferențiale liniare de ordinul *n*, omogene. Atunci soluția generală a ecuației omogene este o combinație liniară cu coeficienți reali de forma:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

Ca urmare, se poate prezenta procedura de calcul a soluției generale a ecuației neomogene, utilizând soluția generală a ecuației omogene.

Teorema 4. Soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul *n*, neomogene este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene și soluția generală a ecuației omogene.

Demonstrație. Fie y_p o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, adică:

$$L_n(y_p) = b(x).$$

Fie $\bar{y}$ soluția generală a ecuației omogene, adică $L_n(\bar{y}) = 0$. Se poate stabili că funcția

$$y = y_p + \bar{y}$$

este soluția generală a ecuației neomogene.

Într-adevăr,

$$L_n(y) = L_n(y_p + \bar{y}) = L_n(y_p) + L_n(\bar{y}) = b(x) + 0 = b(x).$$

Cum $\bar{y}$ conține n constante și y va conține acele constante, adică y este soluția generală a ecuației (1).

2.2. Ecuații diferențiale liniare de ordin n≥2, cu coeficienți constanți

Ecuațiile diferențiale liniare de ordinul *n*≥2, cu coeficienți constanți sunt un caz particular de ecuații diferențiale liniare de ordinul n≥2, în care coeficienții sunt funcții constante pe $[a, b]$. În consecinţă, toate noţiunile şi rezultatele din paragraful precedent rămân valabile și în cazul ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul n≥2, cu coeficienți constanți.

Forma generală a unei **ecuații diferențiale liniare de ordinul *n*≥2, cu coeficienți constanți** este:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x) \qquad (4)$$

unde coeficienții $a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, $b(x)$ este o funcție continuă pe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, iar funcția necunoscută $y = y(x)$ este derivabilă de n ori pe $[a, b]$.

Dacă b este funcția nulă pe $[a, b]$ se obține **ecuația omogenă** atașată ecuației (4) de forma:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0, \qquad (5)$$

iar dacă funcția b este diferită de funcția nulă ecuația (4) este **neomogenă.** Se observă că oricărei ecuații neomogene i se poate atașa ecuația omogenă.

Rezolvarea ecuației (4), conform teoremei 4, presupune, mai întâi determinarea soluției generale a ecuației omogene (5).

Conform metodei se caută n soluții particulare ale ecuației omogene de forma:

$$y = e^{r \cdot x}, r \in \mathbb{C},$$

soluții care să fie liniar independente pe $[a, b]$ și care în acest caz vor forma un **sistem fundamental de soluții.**

Se observă că funcția y, fiind o funcție exponențială cu baza e (constanta lui Euler), are derivate de orice ordin și au sens primele n derivate ale sale:

$$y' = re^{rx}, y'' = r^2e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^ne^{rx}.$$

Înlocuind în ecuația omogenă funcția y și cele n derivate ale sale, iar apoi simplificând cu factorul nenul $e^{r\cdot x}$ se obţine următoarea ecuaţie de gradul n cu n rădăcini, numită **ecuația caracteristică** a ecuației omogene (5) sau a ecuației neomogene (4):

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \qquad (6)$$

Forma soluției generale a ecuației omogene depinde de natura rădăcinilor ecuației caracteristice, fiind posibile următoarele situații.

Cazul I. Rădăcinile $r_1, r_2, \dots, r_n$ ale ecuației caracteristice (6) sunt reale și distincte.

În acest caz, funcțiile corespunzătoare celor n rădăcini sunt:

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}.$$

Dacă aceste n funcții, care sunt soluții ale ecuației omogene (5), formează un sistem fundamental de soluții (sunt liniar independente), atunci soluția generală a ecuației omogene este chiar combinația liniară a celor n soluții.

Deci trebuie verificat dacă wronskianul celor n soluții este nenul pe $[a, b]$. Într-adevăr, (folosind determinantul Vandermonde) se obține:

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \cdots & r_n e^{r_n x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \cdot \prod_{i<j} (r_j - r_i) \neq 0, \forall x \in [a, b].$$

Deci cele n soluții formează un sistem fundamental de soluții și soluția generală a ecuației omogene (5) este:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

De remarcat că în cazul rădăcinilor distincte ale ecuației caracteristice (6), fiecare rădăcină contribuie cu o singură soluție la determinarea soluției generale a ecuației omogene.

Cazul II. Ecuația caracteristică (6) admite și rădăcini multiple.

În acest caz, contribuția unei rădăcini multiple de ordinul $p \in \mathbb{N}^*, p > 1$, contribuie cu p soluții la determinarea soluției generale a ecuației omogene.

Într-adevăr, fie $r = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ o rădăcină a ecuației caracteristice, multiplă de ordinul p,

$p \in \mathbb{N}^*, p > 1$ și fie funcțiile $y_1 = e^{\propto x}, y_2 = x e^{\propto x}, y_3 = x^2 e^{\propto x}, \dots, y_p = x^{p-1} e^{\propto x}$.

Se poate demonstra că aceste funcții sunt soluții particulare ale ecuației omogene. Atunci contribuția rădăcinii $r = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluția generală a ecuației omogene, pe lângă contribuția celorlalte rădăcini ale ecuației caracteristice, este o combinație liniară de forma:

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_py_p, \quad C_1, C_2, \dots, C_p \in \mathbb{R}\,.$$

Cazul III. Ecuația caracteristică (6) admite și rădăcini complexe distincte.

În acest caz, dacă ecuația caracteristică admite o rădăcină complexă $r = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, atunci ecuația caracteristică admite ca rădăcină și conjugata lui r, de forma $\bar{r} = \alpha - i\beta$. Se observă că soluțiile ecuației omogene (5) corespunzătoare lui r și $\bar{r}$ au forma:

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ respectiv } z_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}\,,$$

care sunt funcții complexe. Pentru a evita calculul cu soluții complexe se apelează la **formula lui Euler**:

$$e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x\,,$$

cu ajutorul căreia cele două funcții complexe capătă forma:

$$z_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \text{ și } z_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

ce conduce la două soluții ale ecuației omogene de forma:

$$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\propto x}\cos\beta x \text{ și } y_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{\propto x}\sin\beta x,$$

care au avantajul că sunt funcții reale, mai simplu de utilizat.

Prin urmare, o rădăcină complexă de ordinul 1 a ecuației caracteristice contribuie la soluția generală a ecuației omogene cu o combinație liniare de două soluții reale, notate mai sus prin y_1 și y_2.

Cazul IV. Ecuația caracteristică (6) admite și rădăcini complexe multiple. În acest caz, contribuția unei rădăcini complexe multiplă de ordinul $p \in \mathbb{N}^*, 1 < p \leq \frac{n}{2}$, contribuie cu $2p$ soluții la determinarea soluției generale a ecuației omogene.

Într-adevăr, dacă $r = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ este o rădăcină a ecuației caracteristice, multiplă de ordinul p, $p \in \mathbb{N}^*, 1 < p \leq \frac{n}{2}$, atunci ecuația caracteristică admite ca rădăcină și conjugata lui r, de forma $\bar{r} = \alpha - i\beta$ cu același ordin de multiplicitate p. Se vor obține funcțiile:

$$y_1 = e^{\propto x}cos\beta x, y_2 = xe^{\propto x}cos\beta x,\ y_3 = x^2e^{\propto x}cos\beta x, \dots, y_p = x^{p-1}e^{\propto x}\cos\beta x,$$

$$\overline{y_1} = e^{\propto x}sin\beta x, \overline{y_2} = xe^{\propto x}sin\beta x, \overline{y_3} = x^2e^{\propto x}sin\beta x, \dots, \overline{y_p} = x^{p-1}e^{\propto x}\sin\beta x.$$

Se poate demonstra că aceste funcții sunt soluții particulare ale ecuației omogene. Atunci contribuția rădăcinii complexe $r = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, multiplă de ordinul p, $p \in \mathbb{N}^*, 1 < p \leq \frac{n}{2}$, la soluția generală a ecuației omogene, pe lângă contribuția celorlalte rădăcini ale ecuației caracteristice, este o combinație liniară de forma:

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_py_p + C_{p+1}\overline{y_1} + C_{p+2}\overline{y_2} + \cdots + C_{2p}\overline{y_{2p}},$$

$$C_1, C_2, \dots, C_p, C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_{2p} \in \mathbb{R}.$$

Exemplu. Integrați ecuația:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Rezolvare. Se determină soluția generală.

Căutând soluții de forma $y = e^{r \cdot x}$, $r \in \mathbb{C}$, se obține ecuația caracteristică:

$$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0,$$

care are rădăcinile: $r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = 2.$

Deci un sistem fundamental de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^{x}, y_3(x) = e^{2x},$$

iar soluția generală este:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Temă. Să se integreze următoarele ecuații:

1. $3y'' - 2y' - 8y = 0,$ *soluția generală și soluția problemei Cauchy* $y(0) = 0,$ $y'(0) = 1;$
2. $y^{(7)} + 3y^{(6)} + 3y^{(5)} + y^{(4)} = 0;$
3. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0;$
4. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$