# Șiruri de numere reale
# - sinteză-

Lect. univ. dr.**Anca GRAD**

octombrie 2019

# Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

**Definiție:** Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) :\overset{not.}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, ..., x_n, ...).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu $(x_n)$.
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real $x_n$ s.n. **termenul de rang $n$** sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

# Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

**Definiție:** Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) \overset{not.}{:=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_n, \ldots).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu $(x_n)$.
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real $x_n$ s.n. **termenul de rang $n$** sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

# Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) :\overset{not.}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, ..., x_n, ...).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu $(x_n)$.
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real $x_n$ s.n. **termenul de rang** $n$ sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

# Terminologie

Fie $m \in \mathbb{N}$ fixat. Considerăm mulțimea $N_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$.

Definiție: Se numește **șir de numere reale** orice funție

$$f : N_m \to \mathbb{R}.$$

Șirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ atașează fiecărui nr. natural $n \geq m$, nr. real

$$f(n) :\stackrel{not.}{=} x_n.$$

Notațiile uzuale folosite pentru un șir sunt

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \text{ sau } (x_n)_{n \geq m} \text{ sau } (x_n, x_{n+1}, ..., x_n, ...).$$

Când nu există pericol de confuzie notăm simplu $(x_n)$.
Pentru $n \in \mathbb{N}_m$ arbitrar, nr. real $x_n$ s.n. **termenul de rang $n$** sau **termenul general** al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

# Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți $V$ a lui $x$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

# Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți $V$ a lui $x$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

# Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți $V$ a lui $x$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

# Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți $V$ a lui $x$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

# Limita unui șir de numere reale. Unicitatea limitei.

**Definiție:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un șir de numere reale. Spunem că șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ **are limită** (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă

$$\exists x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{a.î.} \quad \forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

**Teorema 1:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Șirul $(x_n)_{n\in N_m}$ are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î. în afara oricărei vecinătăți $V$ a lui $x$ se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(x_n)_{n\in N_m}$.

Dacă limita unui șir există, ea este unică.

**Teorema 2 (de unicitate a limitei):** Dacă $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ a.î.

$$\forall V \in \vartheta(x), \quad \exists n_V \geq m \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

## Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

**Definiție** $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)$ este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita $\infty$ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

## Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

**Definiție** $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)$ este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita $\infty$ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

## Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

**Definiție** $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)$ este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita $\infty$ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

## Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

**Definiție** $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)$ este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita $\infty$ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

## Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

**Definiție** $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)$ este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita $\infty$ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

## Notație

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ și se numește } \textbf{limita șirului } (x_n).$$

**Definiție** $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Spunem că șirul $(x_n)$ este **convergent** dacă

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Pentru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$ există una din posibilitățile:

- are o limită unică $x \in \mathbb{R}$,(s.n. **șir convergent**);
- are limita $\infty$ sau $-\infty$ (s.n. **șir cu limita infinită**);
- nu admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

Orice șir care nu admite limită finită s.n. șir **divergent**.

Studiul unui șir comportă două probleme:

-
-

# Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

**Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către $x$, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

**Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

# Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

**Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către $x$, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către 0.

**Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

# Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

**Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către $x$, $\Longleftrightarrow$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

**Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0(\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m(\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

# Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

**Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in \mathbb{N}_m}$ converge către $x$, $\iff$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

**Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

# Caracterizări ale limitei unui șir de numere reale

**Teorema 3 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitei finite):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } |x_n - x| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Consecința:** Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către $x$, $\Longleftrightarrow$ șirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către 0.

**Teorema 4 (de caracterizare cu $\varepsilon$ a limitelor $\infty$ și $-\infty$):**
Fie $(x_n)_{n\in N_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n > \varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (\in \mathbb{R}), \exists n_\varepsilon \geq m (\in \mathbb{N}) \text{ a.î. } x_n < -\varepsilon,\ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

# Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

## Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

## Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0

$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$

$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

## Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

## Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$
- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

## Exemple:

- șirul cu termenul general $x_n = 0, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n}, (n \in \mathbb{N})$ are limita 0
$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $+\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = -n, (n \in \mathbb{N})$ are limita $-\infty$
$$n_\varepsilon = [\varepsilon] + 1;$$

- șirul cu termenul general $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.

# Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație**: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

# Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație**: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

# Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație**: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

# Convergență, monotonie și mărginire

**Teorema 5** Orice șir convergent este mărginit.

**Teorema 6** Orice șir nemărginit este divergent.

**Observație**: Nu orice șir mărginit este convergent. De exemplu, șirul cu termenul general

$$x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}.$$

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul $(x_n)$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{crescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit superior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
2. Sirul $(x_n)$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{descrescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit inferior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
3. Sirul $(x_n)$ $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul $(x_n)$
$$\begin{cases} \text{crescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit superior} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{cases}.$$
2. Sirul $(x_n)$
$$\begin{cases} \text{descrescător} \\ \text{și} \\ \text{mărginit inferior} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x_n) \text{ este convergent} \\ \text{și} \\ \lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\} \end{cases}.$$
3. Sirul $(x_n)$ $\begin{cases} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{cases} \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul $(x_n)$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{crescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit superior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
2. Sirul $(x_n)$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{descrescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit inferior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n)\text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n\in\mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
3. Sirul $(x_n)$ $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

## Teorema 7 [ a lui Weirstrass] (de convergență a șirurilor monotone și mărginite)

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \subseteq \mathbb{R}$. Atunci u.a.s. adevărate:

1. Șirul $(x_n)$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{crescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit superior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n) \text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
2. Sirul $(x_n)$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{descrescător}\\ \text{și}\\ \text{mărginit inferior}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(x_n) \text{ este convergent}\\ \text{și}\\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_m\}\end{array}\right. .$$
3. Sirul $(x_n)$ $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \Longleftrightarrow \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\begin{cases} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{cases} \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longleftarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \Longleftrightarrow \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longleftarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \Longleftrightarrow \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left\{\begin{array}{c}\text{monoton}\\ \text{și}\\ \text{mărginit}\end{array}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longleftarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \Longleftrightarrow \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Observație:** Referitor la șiruri monotone și/sau mărginite întâlnim ipostazele:

- $\left.\begin{cases} \text{monoton} \\ \text{și} \\ \text{mărginit} \end{cases}\right. \Longrightarrow (x_n)$ este convergent;
- convergent $\Longrightarrow$ mărginit;
- convergent $\not\Longrightarrow$ monoton. Exemplu: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$;
- monoton $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = n, n \in \mathbb{N}$;
- mărginit $\not\Longrightarrow$ convergent. Exemplu: $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

**Consecința:** Fie $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton. Atunci

$$(x_n) \text{ convergent } \iff \text{ mărginit.}$$

**Teorema 8:** U.a.s. adevărate:

1. Orice șir crescător și nemărginit are limita $+\infty$.
2. Orice șir descrescător și nemărgnit are limita $-\infty$.

**Teorema 9 [ a lui Cantor]:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri $\subseteq \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

i) $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile $(x_n)$ și $(y_n)$ sunt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Observație** Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei $e$, prin particularizarea

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ și } y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**Teorema 9 [ a lui Cantor]:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri $\subseteq \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

i) $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile $(x_n)$ și $(y_n)$ sunt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Observație** Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei $e$, prin particularizarea

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ și } y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

**Teorema 9 [ a lui Cantor]:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri $\subseteq \mathbb{R}$ care satisfac proprietățile:

i) $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p;$$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Atunci șirurile $(x_n)$ și $(y_n)$ sunt convergente și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Observație** Teorema de mai sus folosită pentru delimitarea constantei $e$, prin particularizarea

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ și } y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

# Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 10:** Fie $(x_n)$ și $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, două șiruri care au limită. Daca $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Teorema 11 [a cleștelui]:** Fie $(x_n)$, $(y_n)$ și $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$, trei șiruri și fie $p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

atunci șirul $(y_n)$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

# Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 10:** Fie $(x_n)$ și $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, două șiruri care au limită. Daca $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Teorema 11 [a cleștelui]:** Fie $(x_n)$, $(y_n)$ și $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$, trei șiruri și fie $p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

atunci șirul $(y_n)$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

# Trecerea la limită în inegalități

**Teorema 10:** Fie $(x_n)$ și $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, două șiruri care au limită. Daca $\exists p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

**Teorema 11 [a cleștelui]:** Fie $(x_n)$, $(y_n)$ și $(z_n) \subseteq \mathbb{R}$, trei șiruri și fie $p \in \mathbb{N}$ a.î.

$$x_n \leq y_n \leq z_n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p$$

Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

atunci șirul $(y_n)$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

# Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(cx_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

# Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(cx_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

# Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(cx_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$

3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

# Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(cx_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

# Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(cx_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

# Operații cu șiruri convergente

**Teorema 12** Fie $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$ două șiruri convergente. U.a.s.a:

1. șirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$
2. dacă $c \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(cx_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right);$$
3. șirul produs $(x_n y_n)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$
4. dacă $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$ și $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este convergent și
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$