Curs 5 - 03/11/2022

Ecuații liniare, de ordenul n → (1°)

$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\cdot y' + a_n(x)y = f(x)$; $a_i, f: I \to \mathbb{R}$, continue, $i=\overline{0,n}$

Dacă $f(x)=0$ → Ecuație omogenă
Dacă $f(x)\neq 0$ → Ecuație ne-omogenă

Dacă $a_i(x)$ sunt coeficienți constanți → Ecuație cu coeficienți constanți
Dacă $a_i(x)$ sunt coeficienți variabili → Ecuație cu coeficienți variabili

(LI) LINIAR INDEPENDENT: $W(y_1, \dots, y_n)\neq 0$
(LD) LINIAR DEPENDENT: $W(y_1, y_2, \dots, y_n, y)=0$
SISTEM FUNDAMENTAL DE SOLUȚII: SFS

DEF: Se numește operator diferențial liniar de ordenul n, expresia:

$$a_0(x)\cdot \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x) \overset{not}{=} A_n$$

(1°): $A_n(y)=f(x)$
(2°): $A_n(y)=0$ Ecuație omogenă asociată

Proprietățile operatorului:
$A_n(y_1+y_2)=A_n(y_1)+A_n(y_2)$
$A_n(\alpha y)=\alpha A_n(y)$

Consecințe! Dacă y_1 și y_2 sunt soluții ale ecuații omogene:
⇒ $C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2$, de asemenea, sunt ecuații omogene
C_1, C_2 = constante arbitrare

$A_n(y_1)=0$ $A_n(y_2)=0$
$\Rightarrow A_n=(C_1y_1+C_2y_2) \Rightarrow C_1\cdot A_n(y_1)+C_2\cdot A_n(y_2)=0$

Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt soluții ale ecuații omogenee (2°) ⇒ $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ | soluție a ecuații omogenee

Dependență și independență liniară a soluțiilor

DEF: Fie $y_1, y_2, \dots, y_n: \dot{I}\to\mathbb{R}$, continute pe
Aceste n funcții sunt LI pe intervalul I dacă din relația:
$C_1y_1(x)+\dots+C_ny_n(x)=0$ $(\forall)x\in\dot{I}$,
rezultă că $C_1=C_2=\dots=C_n=0$
Def (1)

DEF: Fie funcțiile $y_1, \dots, y_n: I\to\mathbb{R}$, o clasă $C^{n-1}(\dot{I})$ — n-1 derivabile
Atunci, determinantul:

$$W(y_1,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x)\\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x)\end{vmatrix}$$

Determinantul WRONSKY ← matematician polonez
(sau WRONSKYANUL celor n funcții)
Def (2)

Dacă relația: $C_1y_1(x)+\dots+C_ny_n(x)=0$ $\forall x\in\dot{I}$ are loc, fară ca toate constantele să fie nule, atunci funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n$ sunt liniar dependente {LD}

TEOREMĂ! Condiția necesară și suficientă ca n funcții $y_1,\dots,y_n\in C^{n-1}(\dot{I})$ să fie liniar dependente pe $\dot{I}$ este ca $W(y_1,\dots,y_n)\equiv 0$ pe $\dot{I}$ {Identic Nul}

Dem: $\begin{cases} C_1y_1+\dots+C_ny_n=0\\ C_1y_1'+\dots+C_ny_n'=0\\ \vdots\\ C_1y_1^{(n-1)}+\dots+C_ny_n^{(n-1)}=0\end{cases}$ Sistem omogen de n ecuații cu n necunoscute ⇒ $W(y_1,\dots,y_n)=0$

Ex. $y_1=x^2+1$; $y_2=x$; $y_3=(x+1)^2$ sunt LI?

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} x^2+1 & x & (x+1)^2\\ 2x & 1 & 2x+2\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix} \underset{C_3=C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} x^2+1 & x & 2x\\ 2x & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} x & 2x\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$ LI: Da ✓

Def: Un sistem de n soluții ale ecuației omogene (2) cu proprietatea că $W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ pe $\dot{I}$ se numește SISTEM FUNDAMENTAL DE SOLUȚII lui (2°) $\{A_n(y)=0\}$

Rezultatul fundamental pe care se bazează algoritmul de determinare a soluției generale a ecuației omogene este:

TEOREMA 2: Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$ n funcții de clasă $C^n(I)$ și $y: I\to\mathbb{R}$ o altă funcție de $C^n(I)$
Dacă $W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ pe $\dot{I}$ și $(y_1,\dots,y_n,y)=0$ pe $\dot{I}$ → y este o combinație liniară cu coeficienți constante arbitrare acelor n funcții ⇔ ∃ $c_1, c_2, \dots, c_n$, constante arbitrare, aî (NU TOATE NULE!)
$y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$

Structura generala a soluției ecuației de ordinul n liniară și omogenă rezultă:

TEOREMA 3: Fie $A_n(y)=0$; Dacă $W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ pe $\dot{I}$ {echivalent $y_1,\dots,y_n$ sunt LI pe $\dot{I}$} $A_n(y_i)=0, \forall i$ → Soluția generală a ecuațiilor omogene $A_n(y)=0$ este dată de relația $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$
Mulțimea soluțiilor ecuației omogene are o structură de spațiu vect. de dim n peste corpul $\mathbb{R}$ are ordin n. O bază a acestui spațiu este formată din soluțiile
↳ $\mathcal{B}=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ | $W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ pe $\dot{I}$ → $y_\emptyset=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$

CONSECINȚE:
1) n soluții y_1, y_2, y_n ale ecuației omogenee $A_n(y)=0$ formează un SFS pentru ecuația omogenă ⇒ sunt LI pe $\dot{I}$ ⇔ $W(y_1,\dots,y_n)\neq 0$ pe $\dot{I}$; Mulțimea soluțiilor ecuațiilor omogene are o structura de spațiu vectorial de dimensiune n peste corpul R sau C. → $y_\emptyset$ C_i = constante arbitrare
2) n+1 soluții ale ecuației omogenee $A_n(y)=0$ sunt LD pe $\dot{I}$ → $W(y,y_1,\dots,y_n)=0$ pe $\dot{I}$
↳ coeficienții ecuației sunt funcții continue.

Construcția ecuației diferențiale de ordinul n de SFS

Fie $y_1, y_2, \dots, y_n: \dot{I}\to\mathbb{R}$ (n funcții de clasă $C^n(\dot{I})$) și LI pe $\dot{I}$
Acel sistem de n funcții determină o unică ecuație diferențială liniară și omogenă de ordin n care le admite ca SFS
Ecuația căutată va fi dată de condiția ca n+1 funcții să fie LI pe I astfel vom ea uga incă una de clasa C^n (y) și vom pune condiția că n+1 funcții să fie LD pe $\dot{I}$ → $W(y,y_1,\dots,y_n)=0$ pe $\dot{I}$

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \dots & y_n\\ y' & y_1' & \dots & y_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ y^{n-1} & y_1^{n-1} & & y_n^{n-1}\\ y^n & y_1^n & \dots & y_n^n\end{vmatrix}=0$$

Dezvoltăm acest determinant după 1^a coloană
coef lui $y^{(n)}$
$(-1)^{1+n}\cdot y^{(n)}\cdot \underbrace{W(y_1,\dots,y_n)}_{\neq 0}+\dots$

Ecuația este verificată de $\forall y_i$, $i=\overline{1,n}$

Ex

(1°) Fie $\mathcal{B}=\{\ln x; x\ln x\}$ $n=2$, $x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$

a) $\mathcal{B}$ = bază a spațiului soluțiilor? $W(y_1,y_2)\neq 0$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\ln x & x\ln x\\ \frac{1}{x} & \ln x+1\end{vmatrix}=\ln^2x+\ln x-\ln x=\ln^2x\neq 0$$ Funcțiile sunt LI pe mulțimea $(0,\infty)\setminus\{1\}$

b) Ecuația diferențiala care admite drept SFS.
$W(y,y_1,y_2)$ $\forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$

$$\begin{vmatrix} y & \ln x & x\ln x\\ y' & \frac{1}{x} & \ln x+1\\ y'' & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}\equiv 0$$

$y=C_1y_1+C_2y_2$ → $\boxed{y''\cdot\ln^2x-2y'\cdot\frac{\ln x}{x}+y\cdot\frac{\ln x+2}{x^2}}$

$y''\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}\ln x & x\ln x\\ \frac{1}{x} & \ln x+1\end{vmatrix}+y'\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}\ln x & x\ln x\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}+y\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{x} & \ln x+1\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=0$

$y''\cdot(\ln^2x+\cancel{\ln x}-\cancel{\ln x})+y'\cdot-\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)+y\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$ → $\boxed{y''\cdot\ln^2x-2y'\cdot\frac{\ln x}{x}+y\cdot\frac{2+\ln x}{x^2}=0}$

2) $\mathcal{B}=\{e^x; e^{-x}; e^{2x}\}$ $y_1=e^x$ $y_2=e^{-x}$ $y_3=e^{2x}$

3) $\mathcal{B}=\{\sin x; \cos x\}$

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-1\neq 0 \qquad w(y,y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x\\ y' & \cos x & -\sin x\\ y'' & -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}=0$$

→ $y''\cdot(-1)^4\cdot(-1)+y'\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}+y\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}=0$
⇒ $-y''-y\cdot(-1)$ ⇒ $-y''+y=0$ ⟹ $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

Temă: (2)

PAS 1

row+ column

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x}\\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x}\\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x}\end{vmatrix}=e^x\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-e^{-x} & 2e^{2x}\\ e^{-x} & 4e^{2x}\end{vmatrix}+e^x\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}e^{-x} & e^{2x}\\ e^{-x} & 4e^{2x}\end{vmatrix}+e^x(-1)^4\begin{vmatrix}e^{-x} & e^{2x}\\ -e^{-x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}=e^x\cdot(-6e^x)+\cancel{e^x\cdot-(3e^x)}+\cancel{e^x\cdot(3e^x)}\to -6e^{2x}\neq 0$$ LI.

ad - cb

PAS 2 SFS.

$$W(y,y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y & e^x & e^{-x} & e^{2x}\\ y' & e^x & -e^{-x} & 2e^{2x}\\ y'' & e^x & e^{-x} & 4e^{2x}\\ y''' & e^x & -e^{-x} & 8e^{2x}\end{vmatrix}=y'''\cdot(-1)^5\cdot(-6e^{2x})+y''\cdot(-1)^4\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}e^x & e^{-x} & e^{2x}\\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x}\\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x}\end{vmatrix}}^{-12e^{2x}}+y'\cdot(-1)^3\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}e^x & e^{-x} & e^{2x}\\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x}\\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x}\end{vmatrix}}^{6e^{2x}}+y\cdot(-1)^2\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}e^x & -e^{-x} & 2e^{2x}\\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x}\\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x}\end{vmatrix}}^{12e^{2x}}=$$

$y'''\cdot 6e^{2x}-y''\cdot 12e^{2x}-y'\cdot 6e^{2x}+y12e^{2x}$ $|:6e^{2x}$

$$y'''-2y''-y'+2y$$