FUNDAMENTELE ALGEBRICE ALE INFORMATICII

Sisteme algebrice liniare de m ecuații cu n necunoscute.

(I) $n = m$.

Forma generală a sistemului:

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Forma matriceală a sistemului:

$$(2^\circ)\quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B.} \iff A \cdot X = B$$

Forma vectorială a sistemului:

(3°) $x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_n \cdot P_n = P_0$; $P_1, P_2, \dots P_n$ sunt coloanele matricii coeficienților; P_0 = coloana termenilor liberi.

Teorema de compatibilitate = Teorema lui Cramer.

Sistemul (1°), de n ecuații cu n necunoscute este compatibil (are soluție unică) dacă și numai dacă determinantul matricii A, a coeficienților sistemului este diferit de zero ($\iff$ matricea coeficienților este inversabilă $\iff$ este nesingulară). Algoritmul de rezolvare presupune calculul a $n+1$ determinanți de ordinul n și apoi a n operații de împărțire:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$, ... $x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$, unde $\Delta = \det(A)$

iar Δx_i, $i = \overline{1,n}$ este determinantul matricei care se obține din A, prin înlocuirea coloanei necunoscutor x_i cu calcularea termenilor liberi!

Metoda lui Gauss

Se transformă sistemul ① într-unul sistem extrem de simplu (forma diagonală) printr-un șir de operații simple care presupun calcule numai de înmulțire și adunare.

$$④ \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 \ldots\ldots = \beta_1 \\ \ldots \alpha_{22} x_2 \ldots = \beta_2 \\ \ldots \ldots \alpha_{33} x_3 \ldots = \beta_3 \\ \ldots\ldots\ldots \alpha_{nn} x_n = \beta_n \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_{11}}, \quad x_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_{22}}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$$

Numerele α_{ii}, $i = \overline{1,n}$ se numesc pivoți și în ipoteza $\det A \neq 0$, $\alpha_{ii} \neq 0$, $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$.

Sisteme omogene de n ecuații, cu n necunoscute.

Un astfel de sistem se caracterizează prin faptul că toți termenii liberi din membrul drept sunt nuli: $A \cdot X = O_n$; În ipoteza că A este inversabilă ($\Leftrightarrow \det A \neq 0$), se calculează A^{-1} și se înmulțește sistemul la stânga cu A^{-1}

$A^{-1} \cdot / A \cdot X = O_n \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot O_n \Leftrightarrow I_n \cdot X = O_n$

$\Leftrightarrow X = O_n \Rightarrow$ sistemul are sol. unică: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, numită soluția banală.

Dacă sist. admite numai soluția banală, atunci el se numește sistem compatibil unic determinat. Un sistem omogen poate avea, de asemenea, lângă soluția banală, și soluții nenule, caz în care se numește compatibil nedeterminat.

Un sistem omogen admite și soluții nebanale $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \text{rang } A < n$

Diferența $n - \text{rang } A$ este egală numărul necunoscutelor secundare iar $r = \text{rang}$

reprezintă numărul necunoscutelor principale.

(III) cazul sistemelor de m ecuații cu n necunoscute

$$\text{(1)} \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff A \cdot X = B \quad \text{(2)}$$

$$\text{(3)} \quad x_1 \cdot P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n \cdot P_n = P_0$$

Teorema de compatibilitate a lui Kronecker-Capelli

Sistemul (1°) este compatibil $\iff$ rangul matricei coeficienților este egal cu rangul matricei extinse a sistemului $\iff$ $rang(A) = rang(\bar{A})$; $\bar{A} = (A, B)$

Presupunem ca $r < m < n$

Precizări suplimentare.

Definiția 1 Se numește minor de ordinul r al matricei pătratice A, determinantul unei matrice pătratice obținute prin intersecția a r linii și r coloane din matricea A. $\Rightarrow r \le \min(m, n)$

Numărul minorilor de ordinul r din matricea $A(m, n)$ este egal cu $C_m^r \cdot C_n^r$

Definiția 2 Se numește rangul matricei A și se notează $rang(A)$ numărul natural r care îndeplinește următ. condiții:

(1°) $0 \le r \le \min(m, n)$

(2°) ($\exists$) în A un minor de ordinul r nenul

(3°) Orice minor de ordinul $r+1$ este nul.

Prin convenție matricea nulă are rangul zero.

Pentru calculul rangului nu este recomandată metoda minorilor, numărul acestora fiind foarte mare.

În locul s-a inventat metoda bordării care reduce substanțial nr. de calcule metoda cea mai rapidă, simplă și eficientă este metoda lui Gauss. Aceasta permite transformarea succesivă a matricei A, într-o altă matrice care același rang cu cel al lui A, de forma:

$$A_{m,n} \sim E_{m,n,r} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \text{linia } r \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rang} A = r$$

col r

Matricea A se transformă, succesiv până se ajunge la $E_{m,n,r}$ prin operații care nu modifică valoarea rangului:

- schimbarea ordinii liniilor sau coloanelor
- Înmulțirea unei linii sau coloane cu un factor nenul
- Înmulțirea unei linii sau coloane cu un factor nenul, apoi a o aduna la altă linie (coloană).

Aceste transformări nu schimbă valoarea rangului, aceasta rezultând din definiția rangului și proprietățile determinanților.

Descrierea operațiilor

Fie $A_{m,n}$ o matrice nenulă, cu $a_{11} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, se poate interschimba linia (coloana) 1 cu altă linie (coloană) care aduce pe poziția (1,1) un element nenul

— se efectuează operațiile care permit obținerea, pe prima coloană, sub pivot a tuturor elementelor egale cu zero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-a_{i1}) \\ \\ \cdot a_{11} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

→ linia 1 se înmulțește cu $(-a_{i1})$

→ linia i se înmulțește cu a_{11}, $i = 2, 3, \ldots m$

În urma acestor operații, prin adunarea la linia i a liniei 1 înmulțită cu $(-a_{i1})$ se obține, în locul lui a_{i1}, elem. următor:

$$a_{i1} \to a_{11} \cdot (-a_{i1}) + a_{i1} \cdot a_{11} = 0$$

- elem. a_{ij} se va înlocui cu: $a_{11} a_{ij} - a_{i1} a_{1j}$, $(\forall)\ i = \overline{2,m}$ și $(\forall)\ j = \overline{2,n}$, adică după regula dreptunghiului: $a_{11} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j} \Leftrightarrow$ diferența dintre produsul elem. de pe diagonala pivotului și prod. elem. de pe cealaltă diagonală.

În final se obține matricea echiv.:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{m,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

→ linia 1 a rămas neschimbată

→ pe col. 1 toate elem. de sub pivot sunt nule

→ toate celelalte elemente care nu se află nici pe linia și nici pe col. pivotului se calc. cu regula dreptunghiului. În continuare se va

Regula de calcul a dreptunghiului:

$$a_{ij} \longrightarrow a_{ij}^{(1)} = a_{11} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}, \quad i = \overline{2,m};\ j = \overline{2,n}.$$

$\Leftrightarrow$ Produsul elementelor de pe diagonala pivotului minus produsul elementelor de pe cealaltă diagonală.

În cazul calculului numai al rangului se pot face și transformări asupra coloanelor.

Astfel, prima coloană se poate înmulți cu $\frac{1}{a_{11}^{(1)}}$ operație în care pivotul devine egal cu 1, iar toate elementele din $A^{(1)}$ rămân neschimbate.

Mai departe; prima coloană se înmulțește, pe rând cu:
$$\begin{cases} -a_{12}^{(1)}, \text{ apoi se adună la coloana } 2 \\ -a_{13}^{(1)}, \quad - \text{"} - \quad 3 \\ - - - - - - - - - - - \\ -a_{1n}^{(1)}, \quad - \text{"} - \quad n \end{cases}$$

În urma efectuării tuturor acestor calcule, toate elementele de pe linia și coloana pivotului devin egale cu zero, pivotul este egal cu 1, iar toate celelalte elem. din $A^{(1)}$ rămân neschimbate.

În aplicații se scrie direct matricea transformată astfel:

$$A^{(1)'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

În etapa următoare se va opera numai pe submatricea rămasă după eliminarea liniei și coloanei 1. În concluzie putem formula următoarele reguli de calcul necesare la determinarea rangului:

- Pivotul se înlocuiește cu 1
- Elem. de pe linia și coloana pivotului se înlocuiesc cu 0.
- Toate celelalte elemente se transformă cu regula dreptunghiului.

În final se obține forma $E_{m,n,k}$ a matricei inițiale, de unde rezultă rang $A = k$ = numărul pivoților egali cu 1.

Să se calculeze rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,6}(\mathbb{R})$$

$\underline{a_{11} = 2 \neq 0}$;

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & 1 & -11 & -10 & -10 \\ 0 & 14 & -2 & 14 & 12 & 12 \\ 0 & -8 & -2 & -8 & -10 & -10 \end{pmatrix} \simeq$$

toate elem. de pe linia și coloana pivotului, cu excepția pivotului, s-au înlocuit cu 0, pivotul cu 1 și toate elem. din submatricea $(2,2) \to (5,6)$ s-au calculat cu regula dreptunghiului pe matricea A

$a_{22}^{(1)} = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$$A^{(2)} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix} \simeq$$

- toate elem. de pe linia și col. pivotului se înlocuiește cu 0, iar pivotul cu 1.
- toate celel. elem. se calc. cu regula dreptunghiului.

$$A^{(3)} \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}\, A = 3$$

În problemele prin care se cere rezolvarea sistemelor de m ecuații cu n necunoscute se recomandă să se efectueze doar transformări asupra liniilor, iar pivotul să rămână nemodificat.

<u>Rezolvarea sistemelor de m ec. cu n nec. prin metoda lui Gauss</u>