Equaţii omogene (continuare)

Exemple. Se se determine soluţiile generale şi constantele particulare (y_1, y_2) ale ec. dif.

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Problema. Dacă dintr-o ecuaţie omogenă convoluţia $f(x,y)$ $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ se poate scrie ca funcţie de câtul $\frac{y}{x}$ $\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ $\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right)$ ec. dif. omogenă se poate scrie ca ec. dif. cu variabile separabile.

Ce schimbare de funcţie se face în ecuaţia ec. dif. omogenă cu variabile separabile?

fct $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t' \cdot x + t$, unde $t = t(x)$

$x' \cdot x + t = \frac{x+tx}{x-tx} = \frac{1+t}{1-t} \Leftrightarrow t' \cdot x + t = \frac{t+1}{1-t}$

$\Rightarrow x' = \frac{t+1}{(1-t)x} - t = \frac{t+1-t+t^2}{(1-t)x} \Leftrightarrow t' \cdot x = \frac{t^2+1}{1-t}$

$\Rightarrow t' \cdot x = \frac{t^2+1}{1-t} \Rightarrow t' = \frac{t^2+1}{(1-t)x} \Rightarrow$

$\Rightarrow t' \cdot x = \frac{t^2+1}{1-t} \Leftrightarrow t' \cdot \frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{(1-t)x}$, cum ver o ec. dif. de ordinul întâi cu variabile separabile şi o dată tot şi-o se obţine soluţia

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{dx}{(1-t)x} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln|x| + \ln|1-t| + \ln|C|$$

$\Rightarrow \int \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dt}{1-t} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln|x| - \ln|1-t| + \ln|C|$

$\Rightarrow \ln\sqrt{t^2+1} = \ln\frac{|Cx|}{|1-t|} \Rightarrow \sqrt{t^2+1} = \frac{|Cx|}{|1-t|}$ $\Rightarrow$ Se ridicăm la pătrat şi se obţine

$\Rightarrow t^2+1 = \frac{C^2x^2}{(1-t)^2} \Rightarrow (t^2+1)(1-t)^2 = C^2x^2 \Rightarrow$ Se înlocuieşte $t = \frac{y}{x}$ şi se obţine

$\Rightarrow \left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\left(1-\frac{y}{x}\right)^2 = C^2x^2 \Rightarrow \frac{y^2+x^2}{x^2} \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2} = C^2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+y^2)(x-y)^2 = C^2x^4$, cum este sol. generală a ec. dif. de mai sus, şi particulare

$(x^2+y^2)(x-y)^2 = C^2x^4$

$-(x^2+2xy+y^2)(x-y)^2 = C^2x^4$

$-(x^2-2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2) = C^2x^4$

$-(x^4-2x^3y+x^2y^2+2x^3y-4x^2y^2+2xy^3+x^2y^2-2xy^3+y^4) = C^2x^4$

$-x^4+2x^3y-2x^2y^2+2xy^3-x^2y^2+4x^2y^2-2xy^3-y^4 = C^2x^4$

$-x^4+2x^3y-x^2y^2-y^4 = C^2x^4$

$-x^4+2x^3y-x^2y^2-y^4-C^2x^4 = 0$

$\begin{cases} A+B+C=-1 \\ A+B+C=-1 \\ B=-2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A+C=-1 \\ A+C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A+C=-1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A+C=-1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A+C=-1 \\ B=-2 \end{cases}$ (un sistemă)

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A+C=-1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ A+B=-1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ A+B=-1 \\ B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0 \\ A+B=-1 \\ B=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dt}{1-t} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(t^2+1) = \ln|x| - \ln|1-t| + \ln|C|$ (se integrează) $\Rightarrow$ fct. cu $\ln$ $\Rightarrow$ derivăm

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \ln\left|\frac{Cx}{1-\frac{y}{x}}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) = \ln\left|\frac{Cx}{\frac{x-y}{x}}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) = \ln\left|\frac{Cx^2}{x-y}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) = \ln\left|\frac{Cx^2}{x-y}\right| \Rightarrow$ Se aplică ln

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) = \ln\left|\frac{Cx^2}{x-y}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) = \ln\left|\frac{Cx^2}{x-y}\right| \Rightarrow$ Se aplică exp

$\Rightarrow \sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = \left|\frac{Cx^2}{x-y}\right| \Rightarrow \sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = \left|\frac{Cx^2}{x-y}\right| \Rightarrow$ Se ridică la pătrat

$\Rightarrow \frac{y^2+x^2}{x^2} = \frac{C^2x^4}{(x-y)^2} \Rightarrow \frac{y^2+x^2}{x^2} = \frac{C^2x^4}{(x-y)^2} \Rightarrow$ Se aplică proporţia

$\Rightarrow (y^2+x^2)(x-y)^2 = C^2x^4 \Rightarrow (y^2+x^2)(x-y)^2 = C^2x^4 \Rightarrow$ Se dezvoltă

$\Rightarrow (y^2+x^2)(x^2-2xy+y^2) = C^2x^4 \Rightarrow (y^2+x^2)(x^2-2xy+y^2) = C^2x^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2y^2-2xy^3+y^4+x^4-2x^3y+x^2y^2 = C^2x^4 \Rightarrow x^2y^2-2xy^3+y^4+x^4-2x^3y+x^2y^2-C^2x^4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4-C^2x^4 = 0 \Rightarrow x^4-2x^3y+2x^2y^2-2xy^3+y^4