CURSUL 1 - 06. OCT. 2022

Ecuatii diferențiale

- Fie F o functie de $n+2$ variabile de argumente:
  - → $x \in [a,b]$
  - → $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie de n ori derivabilă pe $[a,b]$

și ai $y', y'' \dots y^{(n)}$ sunt toate continue pe $[a,b]$

→ $F = F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)'})$

→ Ecuația $\underbrace{F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)'})}_{1} = 0$ se num. ec. diferențială de ordinul n.

x = variabilă independentă

y = functia necunoscută

→ Se num. solutie a ecuatiei (1) o functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de n ori deriv. (de clasă $C^n([a,b])$) și cu derivata a-n-a continuă, care verifică ecuatia (1) in orice punct $x \in [a,b]$

$$F(x, f(x), f'(x) \dots f^{(n)'}(x)) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

→ dacă $n = 1 \Rightarrow F(x, y, y' \dots y^{(n)'}) \Rightarrow$ se num. ec. dif de ord 1

↳ forma implicită

↳ dacă poate fi rezolvată în raport cu y'

$\Rightarrow y' = f(x,y)$ (se num forma explicită)

- Exemple
  - $y' = y + x$ (ordinul 1) → sub forma explicită
    $n = 1$

    o solutie a sa e dată de relatia $y = C \cdot e^x - x - 1$

    C = constantă

    $y' = C \cdot e^x - 1$

    $\underbrace{Ce^x - x - 1}_{y} = \underbrace{Ce^x \cancel{- x} - 1}_{y'} + \underbrace{\cancel{x}}_{x} \Rightarrow y' = Ce^x - 1$

  - $y'' - y = x \qquad n = 2 \Rightarrow$ ordinul 2

    o solutie este $y = e^x + e^{-x} - x$

    $y' = e^x - e^{-x} - 1$

    $y'' = e^x + e^{-x}$

    $y'' - y = \cancel{e^x} + \cancel{e^{-x}} - \cancel{e^x} - \cancel{e^{-x}} + x = x$

    $y'' - y = x$

Arătați că funcția $f(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + x$ este soluție a ecuației (doi) $\forall$ C_1 și C_2

$$f(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} - x$$
$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 1$$

$y = f(x)$ - soluție

$$y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + x$$
$$y'' = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$
$$y'' - y = \cancel{C_1 e^x} + \cancel{C_2 \cdot e^{-x}} - \cancel{C_1 e^x} - \cancel{C_2 \cdot e^{-x}} + x$$

$\longrightarrow$ soluția $y = C_1 e^x + C_2 \cdot e^{-x} - x$ unde C_1, C_2 = constante

reprezintă o dublă familie de soluții

↳ dublă infinitate de ecuații

! Soluția unei ecuații generale depinde de constante. Nr. acelor constante este egal cu ordinul ecuației.

pt ecuația (1) $F(x, y, y'' \dots y^n) = 0$ sol generală este

$y = f(x, C_1, C_2 \dots C_n)$; particularizând

constantele $C_1 \dots C_n$ din sol. generală se obțin sol. particulare

! O soluție $y = \varphi(x)$ a ecuației (1) care nu se poate obține din sol. generală pt nici o particularizare posibilă a constantelor $C_1, C_2, \dots C_n$ se num SOLUȚIE SINGULARĂ

- Exemplu:

$y = xy' + y'^2$ $n = 1 \Rightarrow$ ordinul 1

↳ are ca sol. generală funcția

$y = Cx + C^2$ unde C = constantă

$y' = C$

$y = x \cdot C + C^2 \Rightarrow$ soluția generală e dată de familia de drepte $(y = mx + n)$ (ecuația dr.); și funcția $y = -\frac{1}{4}x^2$ cu $x \in \mathbb{R}$ este soluție

$$y' = -\frac{1}{2}x$$
$$y = xy' + y'^2 = x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2$$
$$= \frac{-2x^2 + x^2}{4} = \frac{-x^2}{4} = y$$

deoarece nu se poate lua din $y = Cx + C^2 \Rightarrow$ este soluție singulară

↳ este înfășurătoarea soluțiilor

PROBLEMA LUI CAUCHY

→ Fie ecuatia dif. de ordinul n $F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$, y i ⊂ ℝ→ℝ

→ admitem că F (functie) verifică ipotezele teoremei de existență și unicitate a sol. problemei cauchy.

→ Se num. soluție a problemei Cauchy pt ecuatia (1) problema determinării soluției particulare a ecuatiei 1 care verifică urm. condiții inițiale numite COND. LUI CAUCHY

COND. LUI CAUCHY (2)

$$\begin{cases} f(x_0, C_1, C_2 \dots C_n) = y_0 \\ f'(x_0, C_1 \dots C_n) = y_1 \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x_0, C_1 \dots C_n) = y_{n-1} \end{cases}$$

unde $y_0, y_1 \dots y_{n-1}$ = sunt n numere date

→ în ipoteza ∃ și unicității sol se rezolvă sistemul (2) obținând constantele $C_1, C_2 \dots C_n$ (depind de x_0 y_{n-1}) cu ele (valorile lor) mergem în sol. generala și obținem expresiile lor (soluția prob Cauchy cu cond existentiate (2))