25 · 11 · 2021

Aplicații la ecuațiile diferențiale liniare, de ordinul n, cu coeficienți constanți și variabili, omogene și neomogene.

Forma generală a ecuației:

(1°) $a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f(x)$

$a_0, a_1, \dots a_n, f : I \to \mathbb{R}$, continue pe I.

Dacă $a_i(x) = a_i$, $i = \overline{0,n}$ sunt constante, atunci avem ecuațiile cu coeficienți constanți.

(1°) $A_n(y) = f(x) \to$ ecuația neomogenă

(2°) $A_n(y) = 0 \to$ ecuația omogenă asociată.

Soluția generală a ecuației neomogene este suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și o soluție particulară a ec. neomogene.

Mulțimea soluțiilor ecuației omogene are o structură de spațiu vectorial de dimensiune n (= ordinul ecuației) peste corpul $\mathbb{R}$ al nr. r. O bază a spațiului soluțiilor este formată din n soluții ale ec. omogene, liniar independente.

$\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$; $A_n(y_i) = 0$, $(\forall) i = \overline{1,n}$,

$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ pe I.

$\Rightarrow$ Sol. gen. a ec. omogene este o combinație liniară, cu coeficienți constanți arbitrari a elementelor bazei:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

O soluție particulară a ecuației neomogene se poate obține prin metoda variației constantelor sau prin metoda coeficienților nedeterminați.

Pt ecuațiile cu coeficienți constanți se poate determina întotdeauna un sistem fundamental de soluții pt ecuația omogenă, căutând soluții de forma $y = e^{r\cdot x}$; $r \in \mathbb{R}$

Se atașează ecuația caracteristică asociată ec. omogene, cu coeficienți constanți:

$$a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n = 0$$

; $r_1, r_2, \dots r_n \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$

$(\forall)\ r_i,\ i=\overline{1,n} \longrightarrow y_i = e^{r_i x}$

Altă problemă: determinarea ecuației diferențiale de sistem fundamental dat.

(14) Să se determine ecuația diferențială omogenă care admite ca bază a spațiului soluțiilor $B = \{\ln x,\ x \cdot \ln x\}$. ; $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

a) Se verifică independența soluțiilor date:

$W(y_1, y_2) \neq 0$;

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln x & x \cdot \ln x \\ \frac{1}{x} & \ln x + 1 \end{vmatrix} =$$

$\ln^2 x + \ln x - \ln x = \ln^2 x \neq 0$ se condiția

Ecuația căutată este dată de condiția cu 3 soluții distincte ale ecuației omogene să fie liniar dependente!

$W(y, y_1, y_2) = 0.\ (\forall)\ x \neq 1.$

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \ln x & x \ln x \\ y' & \frac{1}{x} & 1 + \ln x \\ y'' & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{1+3} \cdot y'' \cdot \begin{vmatrix} \ln x & x \ln x \\ \frac{1}{x} & 1 + \ln x \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot y' \cdot \begin{vmatrix} \ln x & x \ln x \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+1} \cdot y \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 1 + \ln x \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots$$

Pentru ecuațiile omogene cu coeficienți variabili nu există o metodă generală de determinare a bazei spațiului soluțiilor (cu excepția ecuațiilor de tip Euler și Cauchy). Totuși, în anumite condiții verificate de coeficienții ecuației dif., se pot afla unele componente din sistemul fundamental de soluții.

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației omogene:

$x \cdot y''' - y'' - x y' + y = 0$ → ec. cu coeficienți variabili

dacă suma coef. ecuației este $= 0$, $\Rightarrow y = e^x$ este soluție:

$y' = y'' = e^x \Rightarrow e^x(x - 1 - x + 1) = 0 \quad (\forall)\, x \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{y_1 = e^x}$

dacă suma coef. cu semne alternate este nulă $\Rightarrow y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x};\ y'' = e^{-x};\ y''' = -e^{-x}$

$-e^{-x} \cdot x - e^{-x} - x \cdot (-e^{-x}) + e^{-x} = e^{-x}(-x - 1 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{y_2 = e^{-x}}$

dacă $a_{n-1}(x) + x \cdot a_n(x) = 0 \rightarrow y = x$ este soluție.

$\Rightarrow y' = 1;\ y'' = y''' = 0 \Rightarrow y = x$ este soluție.

$\Rightarrow -x + x = 0$

$\Rightarrow B = \{x, e^x, e^{-x}\}$

- se calculează $W(x, e^x, e^{-x}) \neq 0$

$\Rightarrow y_0 = c_1 \cdot x + c_2 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-x}$

Exercițiu Să se determine soluția generală a ecuației omogene de ordinul 2:

$(x - 1) \cdot y'' - x y' + y = 0$

Obs Dacă pt o ecuație cu coef. variabili se cunoaște o soluție, $y_1(x)$, atunci prin schimbarea de funcție $y = z \cdot y_1(x)$ se reduce ordinul ec. cu o unitate

Ecuații cu coeficienți variabili de tip Euler sau Cauchy – Aplicații.

(I) Euler: $x \neq 0$.

$$a_0 x^n \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \cdot x \cdot y' + a_n \cdot y = 0.$$

metoda 1. Se face schimbarea de variabilă independentă $x = e^t \iff t = \ln x$.
Derivatele lui y din ecuație (în raport cu x) se vor exprima cu ajutorul derivatelor lui y, dar în raport cu noua variabilă, t.

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$y = y(x) = y(e^t) \qquad ; \; t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \dot{y}$$

$$y''_{(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \dot{y}\right) \cdot e^{-t}$$

$$= e^{-t}\left(-e^{-t} \dot{y} + e^{-t} \ddot{y}\right) = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$y'''_{(x)} = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})\right] \cdot e^{-t} = e^{-t}\left[-2e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^{-2t}(\dddot{y} - \ddot{y})\right]$$

$$= e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$$

metoda 2. Se caută soluții de forma $y = x^r$

$$x = e^t \; ; \; y = e^{rt} = (e^t)^r = x^r$$

$$y' = (x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$

$$y'' = (x^r)'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$$

$$y''' = (x^r)''' = r(r-1)(r-2) \cdot x^{r-3}$$

– – –

Exerciții (1°) $x^3 \cdot y''' + 2x^2 y'' - x y' + y = 0$; $x \neq 0$

Căutăm soluții de forma $y = x^r$

$y' = r \cdot x^{r-1}$; $y'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$; $y''' = r(r-1)(r-2) \cdot x^{r-3}$

$x^3 \cdot x^{r-3} \cdot r(r-1)(r-2) + 2 \cdot x^2 \cdot x^{r-2} \cdot r(r-1) - x \cdot r \cdot x^{r-1} + x^r = 0$

$x^r [r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - r + 1] = 0$ $/ : x^r \neq 0$

$(r-1)[r^2 - 2r + 2r - 1] = 0$; $(r-1)(r^2-1) = 0$

$(r-1)^2 (r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$; $r_3 = -1$.

$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$ Această ecuație caracteristică este asociată ecuației diferențiale în funcția necunoscută $y(t)$;

$\dddot{y} - \ddot{y} - \dot{y} + y = 0 \rightarrow y = e^{rt}$

$r_1 = r_2 = 1 \longrightarrow y_1 = e^t$; $y_2 = t \cdot e^t$

$r_3 = -1 \Rightarrow y_3 = e^{-t}$

$\Rightarrow y_1(x) = x$; $y_2(x) = x \cdot \ln x$; $y_3(x) = \frac{1}{x}$

$$\boxed{y_g = C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot \ln x + C_3 \cdot \frac{1}{x}}$$

Ecuații de tip Cauchy

$a_0 (ax+b)^n \cdot y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = f(x)$

$x^k \longrightarrow (ax+b)^k$, $k = 1, 2, \dots, n$ variabila independentă

Se face schimbarea de variabilă

$ax + b = e^t \Leftrightarrow ax = e^t - b$; $x = \frac{1}{a}(e^t - b)$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$; $t = \ln(ax+b)$; $\frac{dt}{dx} = \frac{a}{ax+b}$

$\frac{dt}{dx} = a \cdot e^{-t}$

$\rightarrow y' = a\dot{y} \cdot e^{-t}$

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(a\dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot a \cdot e^{-t} =$

$a^2 \cdot e^{-t}(\ddot{y} \cdot e^{-t} - \dot{y} \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = a^2 \cdot e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$

Exemplu $(x+1)^2\cdot y''+3(x+1)\cdot y'+y=0.$

$x+1=e^t$ $(a=1)$; $y=(x+1)^r$ (metoda 2)

$y'=r(x+1)^{r-1}$; $y''=r(r-1)\cdot(x+1)^{r-2}$

$\cdot\ (x+1)^2\cdot r(r-1)(x+1)^{r-2}+3(x+1)\cdot r\cdot(x+1)^{r-1}+(x+1)^r=0$

$(x+1)^r[r(r-1)+3r+1]=0$ $\quad /:(x+1)^r\neq 0$

$r^2-r+3r+1=0$; $r^2+2r+1=0$

$(r+1)^2=0$; $\underline{r_1=r_2=-1}.$

$r^2+2r+1=0 \longleftrightarrow \ddot{y}+2\dot{y}+y=0$; $y=y(t)$

$\to y_1=e^{-t}$; $y_2=t\cdot e^{-t}$

$e^t=x+1 \Rightarrow t=\ln(x+1)$; $e^{-t}=\frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow y_1(x)=\frac{1}{x+1}$; $y_2(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$$\Rightarrow \boxed{y_0=C_1\cdot\frac{1}{x+1}+C_2\cdot\frac{\ln(x+1)}{x+1}}$$

Ecuatie cu coeficienti constanti

$y'''-3y'-2y=0$ $\quad$ Ec. dif. de ord 3, cu coeficienti constanti.

Cautam solutii de forma $y=e^{rx}$

$y'=r\cdot e^{rx}$; $y''=r^2\cdot e^{rx}$; $y'''=r^3\cdot e^{rx}$

$e^{rx}(r^3-3r-2)=0$; $r^3-3r-2=0.$

$r^3-r-2r-2=0$; $r\underbrace{(r^2-1)}_{(r-1)(r+1)}-2(r+1)=0$

$(r+1)[r(r-1)-2]=0$; $(r+1)(r^2-r-2)=0.$ $\Delta=1+8=9$

$r_1=-1$; $r_{2,3}=\frac{1\pm 3}{2}=\left\langle\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$

$r_1=r_2=-1$; $r_3=2$

$y_1=e^{-x}$; $y_2=x\cdot e^{-x}$; $y_3=e^{2x}$ $\to$ $\boxed{y_0=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{2x}}$