LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CURS 11

ALGORITMI MARKOV

ALGORITMI MARKOV

Fie Λ o mulţime finită, pe care o vom numi ***alfabet.*** Un şir finit de elemente ale lui Λ se va numi ***cuvânt.***

Dacă *A*, *B* sunt două cuvinte:

$$A = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$$

$$B = \beta_1\beta_2\ldots\beta_m$$

atunci vom nota cu AB cuvântul:

$$AB = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$$

Notăm cu $\mathcal{M}$(Λ) mulțime cuvintelor construite cu elemente Λ din la care adăugăm “cuvântul vid” Ø.

ALGORITMI MARKOV

Fie Γ un alfabet astfel încât $\Lambda \subset \Gamma$. Un ***algoritm Markov*** pe Γ este o funcţie $\mathcal{F}$ definită pe o parte **A** a lui $\mathcal{M}(\Lambda)$ cu valori în $\mathcal{M}(\Lambda) \times \{0, 1\}$

$\mathcal{F}$: **A** $\rightarrow \mathcal{M}(\Lambda) \times \{0, 1\}$

ALGORITMI MARKOV

Un algoritm este perfect determinat de un tablou de forma:

$$\begin{array}{lll} A_1 & B_1 & \varepsilon_1 \\ A_2 & B_2 & \varepsilon_2 \\ . & . & . \\ A_n & B_n & \varepsilon_n \end{array}$$

unde $A_i \in \mathcal{M}(\Lambda)$, $Bi \in \mathcal{M}(\Lambda)$ şi $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

ALGORITMI MARKOV

Vom prefera să reprezentăm şirurile $A_i\ B_i\ \varepsilon_i$ prin săgeţi:

$A_i\ B_i\ 0$ prin $A_i \rightarrow B_i$

$A_i\ B_i\ 1$ prin $A_i \rightarrow \bullet B_i$

Convenţie. Vom scrie:

$\rightarrow B_i$ în loc de $\varnothing \rightarrow B_i$

$A_i \rightarrow$ în loc de $A_i \rightarrow \varnothing$

ALGORITMI MARKOV

Un ***pas algoritmic*** cu algoritmul Markov $\mathcal{F}$ este o pereche de cuvinte (A, B) cu următoarele proprietăţi:

(i) Există $i \leq n$ astfel încât $A_i \subset A$.

(ii) $B = \sum(A_{i_1}, A, B_{i_1})$ unde i_1 este primul indice pentru care $A_{i_1} \subset A$.

ALGORITMI MARKOV

Un ***calcul cu algoritmul Markov*** $\mathcal{F}$ este un şir finit de cuvinte:

$(P_0, P_1, \ldots, P_m)$

cu proprietăţile următoare:

a) $P_0 = P$

b) (P_j, P_{j+1}) este un pas algoritmic care nu este final pentru $j = 0, 1, \ldots, m-2$.

c) (P_{m-1}, P_m) este un pas algoritmic final sau $A_i \not\subset P_{m-1}$ pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Vom nota în acest caz $\mathcal{F}(P) = P_m$.

ALGORITMI MARKOV

Exemplul 1: Fie alfabetul:

$$\Lambda = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$
$$\Gamma = \Lambda \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

şi algoritmul Markov dat de:

$$\begin{array}{lll}
\xi_i \xi_j \beta \to \xi_j \beta \xi_i & & (\mathrm{I}) \\
\alpha \xi_i \to \xi_i \beta \xi_i \alpha & & (\mathrm{II}) \\
\beta \to \gamma & & (\mathrm{III}) \\
\gamma \to & & (\mathrm{IV}) \\
\alpha \to \bullet & & (\mathrm{V}) \\
\to \alpha & & (\mathrm{VI})
\end{array}$$

Fie $P \in \mathcal{M}(\Gamma)$ cuvântul următor: $P = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_p}$.

ALGORITMI MARKOV

Solutie:

$$P \xrightarrow{VI} \underline{\alpha\xi_{i_1}}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{II} \xi_{i_1}\beta\xi_{i_1}\underline{\alpha\xi_{i_2}}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{II} \xi_{i_1}\beta\underline{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\beta}\xi_{i_2}\alpha\xi_{i_3}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{I} \xi_{i_1}\beta\xi_{i_2}\beta\xi_{i_1}\xi_{i_2}\underline{\alpha\xi_{i_3}}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{II} \xi_{i_1}\beta\xi_{i_2}\beta\xi_{i_1}\underline{\xi_{i_2}\xi_{i_3}\beta}\xi_{i_3}\alpha\xi_{i_4}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{I} \xi_{i_1}\beta\xi_{i_2}\beta\underline{\xi_{i_1}\xi_{i_3}\beta}\xi_{i_2}\xi_{i_3}\alpha\xi_{i_4}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{I} \xi_{i_1}\beta\xi_{i_2}\beta\xi_{i_3}\beta\xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3}\underline{\alpha\xi_{i_4}}\dots\xi_{i_p}$$

$$\xrightarrow{I,II} \xi_{i_1}\underline{\beta}\xi_{i_2}\beta\xi_{i_3}\beta\dots\xi_{i_p}\beta\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_p}\alpha$$

$$\xrightarrow{III} \xi_{i_1}\gamma\xi_{i_2}\underline{\beta}\xi_{i_3}\beta\dots\xi_{i_p}\beta\xi_{i_1}\dots\xi_{i_p}\alpha$$

$$\xrightarrow{III-p-1\text{ ori}} \xi_{i_1}\underline{\gamma}\xi_{i_2}\gamma\xi_{i_3}\gamma\dots\xi_{i_p}\gamma\xi_{i_1}\dots\xi_{i_p}\alpha$$

$$\xrightarrow{IV} \xi_{i_1}\xi_{i_2}\underline{\gamma}\xi_{i_3}\gamma\dots\xi_{i_p}\gamma\xi_{i_1}\dots\xi_{i_p}\alpha$$

$$\xrightarrow{IV-p-1\text{ ori}} \xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_p}\xi_{i_1}\dots.\xi_{i_p}\underline{\alpha}$$

$$\xrightarrow{V} \xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_p}\xi_{i_1}\dots\xi_{i_p}\bullet$$

ALGORITMI MARKOV

Concluzie: Deducem din calculul de mai sus că:

$\mathcal{F}$(P) = PP, pentru orice P$\in\mathcal{M}(\Lambda)$.

ALGORITMI MARKOV

Exemplul 2: Considerăm algoritmul $\Gamma = \Lambda \cup \{\alpha, \beta\}$ şi fie $\mathcal{F}$ algoritmul Markov dat de următorul tablou de substituţie:

$$\alpha\alpha \to \beta \qquad (\text{ I })$$

$$\alpha\xi_i\xi_j \to \xi_j\alpha\xi_i \qquad (\text{ II })$$

$$\beta\alpha \to \beta \qquad (\text{ III })$$

$$\beta\xi_i \to \xi_i\beta \qquad (\text{ IV })$$

$$\beta \to \bullet \qquad (\text{ V })$$

$$\to \alpha \qquad (\text{ VI })$$

Să se aplice acest algoritm cuvântului $P = \xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_p}$

ALGORITMI MARKOV

$$
\begin{aligned}
\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_p} &\xrightarrow{\;VI\;} \underline{\alpha\xi_{i_1}\xi_{i_2}}\ldots\xi_{i_p} \\
&\xrightarrow{\;II\;} \xi_{i_2}\underline{\alpha\xi_{i_1}\xi_{i_3}}\ldots\xi_{i_p} \\
&\xrightarrow{\;II\;} \xi_{i_2}\xi_{i_3}\underline{\alpha\xi_{i_1}\xi_{i_4}}\ldots\xi_{i_p} \\
&\xrightarrow{\;II-p-3ori\;} \xi_{i_2}\xi_{i_3}\ldots\xi_{i_p}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;VI\;} \alpha\xi_{i_2}\xi_{i_3}\ldots\xi_{i_p}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;II,VI\;} \alpha\xi_{i_p}\alpha\xi_{i_{p-1}}\ldots\xi_{i_2}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;VI\;} \underline{\alpha\alpha}\xi_{i_p}\alpha\xi_{i_{p-1}}\ldots\xi_{i_2}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;I\;} \underline{\beta\xi_{i_p}}\alpha\xi_{i_{p-1}}\ldots\xi_{i_2}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;IV\;} \xi_{i_p}\underline{\beta\alpha}\xi_{i_{p-1}}\ldots\xi_{i_2}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;III\;} \xi_{i_p}\underline{\beta\xi_{i_{p-1}}}\ldots\xi_{i_2}\alpha\xi_{i_1} \\
&\xrightarrow{\;IV,III\;} \xi_{i_p}\xi_{i_{p-1}}\ldots\xi_{i_2}\xi_{i_1}\underline{\beta} \\
&\xrightarrow{\;V\;} \xi_{i_p}\xi_{i_{p-1}}\ldots\xi_{i_2}\xi_{i_1}\bullet
\end{aligned}
$$

ALGORITMI MARKOV

Exercitiul 1: Aplicati algoritmul Markov de la exemplul 1 cuvantului P=MA.

ALGORITMI MARKOV

- **Exercitiul 2:** Aplicati algoritmul Markov de la exemplul 2 cuvantului P=ZOR.