08.10.2020

Ecuații diferențiale de ordinul I, rezolvate în raport cu y', integrabile prin metode elementare.

① $P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$

$$\left(\sin y - \frac{2y}{x^3}\right)\cdot dx + \left(x\cos y + \frac{1}{x^2}\right)\cdot dy = 0$$

$$P(x,y) = \sin y - \frac{2y}{x^3}\ ;\quad Q(x,y) = x\cdot\cos y + \frac{1}{x^2}$$

$$F(x,y) = C \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ P(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\ ;\quad Q(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x} \qquad \text{(Schwarz)}$$

Condiția necesară și suficientă ca să existe o funcție $F(x,y)$, diferențiabilă, astfel încât $dF(x,y) = P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$, P, Q - continue în $D \subset \mathbb{R}^2$ este ca $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\Rightarrow$ Ec se scrie: $dF(x,y) = 0 \iff \boxed{F(x,y) = C}$

Aceasta este soluția generală a ecuației date. Funcția F este dată de relația:

$$F(x,y) - F(x_0,y_0) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\cdot dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\cdot dt$$

Algoritm de rezolvare pt ecuația:

$P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy = 0$

① Verificăm dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Dacă nu, spunem că problema sub forma dată nu are soluție

Dacă da, soluția generală a ecuației este dată de relația $F(x,y)=C$, unde funcția F se calculează din relația:

(2°) $F(x,y)-F(x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\cdot dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t)\cdot dt$

Rezolvarea exemplului: $;y'=-$

$\left(\sin y-\frac{2y}{x^3}\right)\cdot dx+\left(x\cos y+\frac{1}{x^2}\right)\cdot dy=0$

$P(x,y)=\sin y-\frac{2y}{x^3}$; $Q(x,y)=x\cos y+\frac{1}{x^2}$

(1°) $\frac{\partial P}{\partial y}=\cos y-\frac{2}{x^3}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y-2\cdot\frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

$F(x,y)-F(x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x}\left(\sin y_0-\frac{2y_0}{t^3}\right)dt+\int_{y_0}^{y}\left(x\cos t+\frac{1}{x^2}\right)\cdot dt$

$=(\sin y_0)\cdot t\Big|_{x_0}^{x}-2y_0\cdot\int_{x_0}^{x} t^{-3}dt+x\cdot\sin t\Big|_{y_0}^{y}+\frac{1}{x^2}\cdot t\Big|_{y_0}^{y}=$

$=(\sin y_0)\cdot(x-x_0)-2y_0\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_{x_0}^{x}+x(\sin y-\sin y_0)+\frac{1}{x^2}(y-y_0)$

$=\cancel{x\cdot\sin y_0}-x_0\cdot\sin y_0+\cancel{\frac{y_0}{x^2}}-\frac{y_0}{x_0^2}+x\sin y-\cancel{x\cdot\sin y_0}+\frac{y}{x^2}-\cancel{\frac{y_0}{x^2}}=$

$x\sin y+\frac{y}{x^2}-x_0\sin y_0-\frac{y_0}{x_0^2}=\underbrace{\left(x\sin y+\frac{y}{x^2}\right)}_{F(x,y)}-\underbrace{\left(x_0\sin y_0+\frac{y_0}{x_0^2}\right)}_{F(x_0,y_0)}$

Soluția generală a ecuației, scrisă sub formă implicită, este: $F(x,y)=C \Leftrightarrow$

$x\cdot\sin y+\frac{y}{x^2}=C \Longleftrightarrow y=\varphi(x,C)$

$\begin{cases} y'=-\dfrac{\sin y-\frac{2y}{x^3}}{x\cos y+\frac{1}{x^2}} ; \quad y'=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \\ y'=f(x,y) \end{cases}$

Ecuații cu variabile separate

Ex. 1 : $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$; $P(x)\cdot dx + Q(y)\cdot dy = 0$

$P(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $Q(y) = \frac{1}{1+y^2}$ $\Rightarrow$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{1+y^2} = C \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C$

$\operatorname{arctg} y = C - \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow y = tg(C - \operatorname{arctg} x)$

$y = \frac{tgC - tg(\operatorname{arctg} x)}{1 + tgC \cdot tg(\operatorname{arctg} x)}$; $\Rightarrow y = \frac{K - x}{1 + K\cdot x}$

$\Big(y' = \frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$; $y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$

Ex 2 $2y\cdot y' = \frac{e^x}{e^x+1}$; $A(x_0=1, y_0=1) \Leftrightarrow y(1) = 1$ (Cauchy)

$y' = \frac{dy}{dx}$; $2y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow 2y\cdot dy = \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx$

$\Rightarrow \int 2y\cdot dy = \int \frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx + C \Leftrightarrow y^2 = \ln(e^x+1) + C$

Ecuații cu variabile separabile.

Ex 1. $x\cdot dy - y\cdot dx = \sqrt{1+x^2}\cdot dy + \sqrt{1+y^2}\cdot dx$

$(dy)(x - \sqrt{1+x^2}) = (y + \sqrt{1+y^2})\, dx$ $\quad /:(x-\sqrt{1+x^2})\cdot(y+\sqrt{1+y^2})$

$\frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}}$

a) $\int \frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{(y-\sqrt{1+y^2})\, dy}{(y+\sqrt{1+y^2})(y-\sqrt{1+y^2})} = \int \frac{y-\sqrt{1+y^2}}{y^2-1-y^2}\cdot dy$

$= \int (\sqrt{1+y^2} - y)\cdot dy$

b) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(x-\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}\cdot dx = \int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(-1)}\cdot dx$

$= -\int (x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx$

$$I = \int \sqrt{1+x^2}\cdot dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx + \underbrace{\int x\cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx}$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \int x\cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx$$

$$I_1 = \int x\cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow g(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad \left((\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\right)$$

$$\Rightarrow I_1 = \int x\cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = x\cdot\sqrt{1+x^2} - \underbrace{\int \sqrt{1+x^2}\, dx}_{I}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1+x^2}\cdot dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx$$

$$2\int \sqrt{1+x^2}\cdot dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}$$

$$\boxed{\int \sqrt{1+x^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right)}$$ (1°)

$$\int(\sqrt{1+y^2} - y)\cdot dy = -\int(x+\sqrt{1+x^2})\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(\ln(y+\sqrt{1+y^2}) + y\sqrt{1+y^2}\right) - \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$