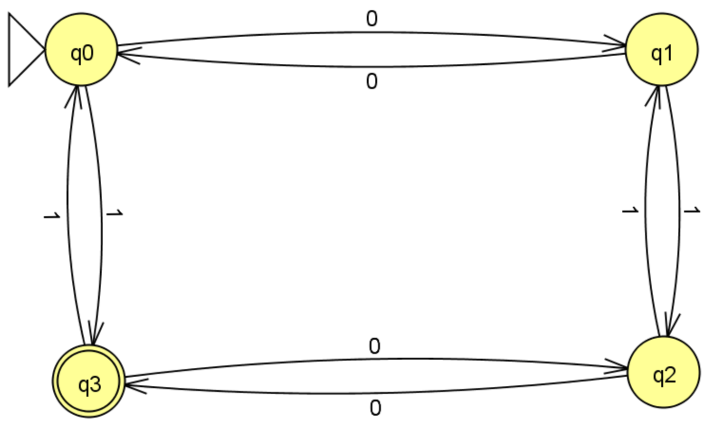
Automate finite (exerciții)

Exemplul 1. Graful finit orientat de mai jos este reprezentarea grafică a automatul finit determinist $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{F})$ care acceptă toate șirurile binare care conțin un număr par de *0* și un număr impar de *1*, având $\boldsymbol{Q} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, unde:

- q_0 este starea în care şirul binar conţine un număr par de zero şi un număr par de *1*;
- q_1 este starea în care şirul binar conţine un număr impar de zero şi un număr par de *1*;
- q_2 este starea în care şirul binar conţine un număr impar de zero şi un număr impar de *1*;
- q_3 este starea în care şirul binar conţine un număr par de zero şi un număr impar de *1*;



I. Să se verifice următoarele afirmații: w_1 = 1001010 ∈ $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$ și w_2 = 1011001, w_3 = 01010101, w_4 = 10101010 ∉ $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$.

II. Să se demonstreze că $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$ este mulțimea șirurilor binare cu un număr par de *0* și un număr impar de *1*.

Rezolvare.

I. Explicația, pentru care există exact 4 stări, rezultă din faptul că la trecerea dintr-o stare în alta automatul poate accepta ori simbolul *0* ori simbolul *1*, astfel că, șirul binar inițial ori pierde un *0,* ori pierde un *1*. Adică, automatul din starea q_0, în care şirul are un număr par de *0* şi un număr par de *1*, ajunge ori în starea q_1, şirul iniţial pierzând un *0* şi rămânând cu acelaşi număr par de *1*, ori în starea q_3, şirul iniţial pierzând un *1* şi rămânând cu acelaşi număr de *0*. Ca urmare, din stările q_1 şi q_3 automatul ajunge obligatoriu în starea q_2.

Cum q_3 este starea finală, trebuie ca din starea q_2 automatul să ajungă în starea q_3, iar din starea q_1 să ajungă în starea q_3 prin intermediul stării q_2. Deasemeni, indiferent de starea în care se află automatul trebuie să accepte simbolurile *0* şi *1*, lucrul care explică legăturile duble dintre oricare două noduri ale reprezentării grafice.

Mai întâi, se definește forma analitică a automatului *A*, astfel:

- **Σ** = $\{0,1\}$;
- ***Q*** = $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$;
- ***F*** = $\{q_3\}$;
- funcția de tranziție **δ** este definită în următorul tabel:

	δ	***0***	***1***
→	$\boldsymbol{q_0}$	q_1	q_3
	$\boldsymbol{q_1}$	q_0	q_2
	$\boldsymbol{q_2}$	q_3	q_1
	$\boldsymbol{q_3}$	q_2	q_0

I. Folosind relația (**) din cursul 3, se poate scrie:

$$\boldsymbol{\delta}(q_0,\mathbf{1}001010) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_0,1),001010) = \boldsymbol{\delta}(q_3,\mathbf{0}01010) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_3,0),01010) =$$
$$= \boldsymbol{\delta}(q_2,\mathbf{0}1010) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_2,0),1010) = \boldsymbol{\delta}(q_3,\mathbf{1}010) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_3,1),010) =$$
$$= \boldsymbol{\delta}(q_0,\mathbf{0}10) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_0,0),10) = \boldsymbol{\delta}(q_1,\mathbf{1}0) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_1,1),0) = \boldsymbol{\delta}(q_2,0) = q_3 \in \boldsymbol{F}.$$

Deci cuvântul w_1 este acceptat de automatul ***A***.

Pentru cuvântul w_2 se poate scrie:

$$\boldsymbol{\delta}(q_0,\mathbf{1}011001) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_0,1),011001) = \boldsymbol{\delta}(q_3,\mathbf{0}11001) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_3,0),11001) =$$
$$\boldsymbol{\delta}(q_2,\mathbf{1}1001) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_2,1),1001) = \boldsymbol{\delta}(q_1,\mathbf{1}001) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_1,1),001) = \boldsymbol{\delta}(q_2,\mathbf{0}01) =$$
$$= \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_2,0),01) = \boldsymbol{\delta}(q_3,\mathbf{0}1) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_3,0),1) = \boldsymbol{\delta}(q_2,\mathbf{0}1) = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}(q_2,0),1) =$$
$$= \boldsymbol{\delta}(q_3,1) = q_0 \notin \boldsymbol{F}.$$

Deci cuvântul w_2 nu este acceptat de automatul ***A***.

La fel se verifică și celelalte afirmații.

II. Arătăm prin inducție după *n* = |*w*| că din q_0 se poate ajunge în q_0, q_1, q_2, q_3 numai prin:

Stare	**Nr. de *0***	**Nr. de *1***
$\boldsymbol{q_0}$	par	par
$\boldsymbol{q_1}$	impar	par
$\boldsymbol{q_2}$	impar	impar
$\boldsymbol{q_3}$	par	impar

Pentru *n* = 1 și *n* = 2: evident.

Prin inducție, trecem de la *n* la *n+1*.

Considerăm o stare oarecare și analizăm pe rând stările anterioare.

În starea q_0 putem ajunge:

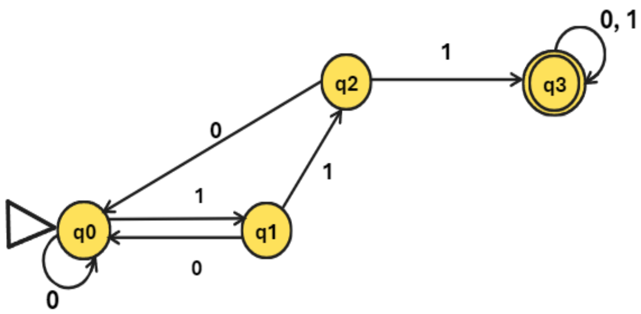
- din q_1 dacă w se termină cu *0;* atunci ajungem la (par, par);
- sau din q_3 dacă w se termină cu *1*; atunci ajungem la (par, par).

Exercițiul 1. Să se determine automatele finite nedeterministe ale căror limbaje acceptate sunt:

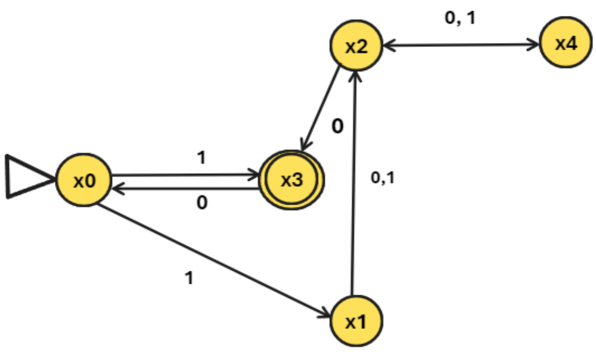
$$\boldsymbol{L_1} = \{a^n b a^m \mid n \geq 1, m \geq 2\} \text{ și } \boldsymbol{L_2} = \{w \in T^* \mid a^2 b \ subcuvânt\ al\ lui\ w\}, \text{ iar}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{a, b\}.$$

Exercițiul 2. Să se determine limbajul acceptat de automatul finit :



Exercițiul 3. Să se elimine stările nefolositoare din automatul finit:



și să se determine limbajul acceptat de acest automat.

Exercițiul 4. Să se determine gramatica regulată $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$ echivalentă cu automatul finit determinist $\boldsymbol{A_D}$, care are următoarea funcție de tranziție:

	δ_D	**0**	**1**
$\rightarrow$	q_0	q_2	q_0
	q_1	q_3	q_2
	q_2	q_1	q_3
*	q_3	q_2	q_0

Lect. univ. dr. TATIANA-CORINA DOSESCU
Facultatea de Informatică
Universitatea Titu Maiorescu