Ecuatii diferentiale de ordinul 1 liniare, omogene si neomogene

Forma generala $y' + P(x)y + Q(x) = 0$, $P, Q : I \Rightarrow \mathbb{R}$, continue pe

Dacă $Q(x) = 0$ ecuația rămâne $y' + P(x)y = 0 \Rightarrow$ ecuația omogenă asociată ecuatiei (1)

① $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ ecuatie neomogenă

② $y' + P(x)y = 0$

Teoremă: Solutia generală a ecuatiei ① (liniară si neomogenă) este suma dintre solutia generală a ecuatiei omogene ② și o soluție particulară a ecuatiei ①

- Fie ecuatia ① $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ și ecuatia omogenă asociată ② $y' + P(x)y = 0$

↳ Fie y_p este o soluție particulară a ecuatiei neomogene ① și y esta solutia ecuatiei ② (omogene)

↳ Fie $z = y + y_p$

↳ înlocuim z in ecuatia ① $\Rightarrow (y + y_p)' + (y + y_p)P(x) + Q(x) = 0$

$$\underbrace{(y' + P(x)\cdot y)}_{=0} + \underbrace{(Q(x) + y_p' + P(x)\, y_p)}_{=0} = 0$$

Algoritmul general de integrare a ecuatiei ①

1) determinăm solutia generala a ecuatiei omogene asociate $\boxed{y' + P(x)y = 0} \Rightarrow y' = -P(x)y \Rightarrow \boxed{\frac{y'}{y} = -P(x)}$

$$\Rightarrow \int \frac{y'}{y}\,dx = -\int P(x)\,dx + K$$

$$e^{\ln y} = y$$

$$\hookrightarrow \boxed{\ln y = -\int P(x)\,dx + K}$$

$$\longrightarrow y = e^{-\int P(x)\,dx + K}$$

$$y = e^{-\int P(x)\,dx} \cdot \underbrace{e^{K}}_{\text{constanta } C}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{-\int P(x)\,dx}}$$

Solutie generala a ecuatiei omogene asociată ②

2) determinarea unei soluții particulare pentru ecuația neomogenă (1) $y'+P(x)y+Q(x)=0$

prin metoda lui Lagrange → numită metoda constantelor „variabile" sau metoda „variației constantelor"

↳ se presupune că în soluția generală a ecuației omogene asociate C nu este constantă ci este funcție de variabila problemei (ex $f(x)$) → $C=C(x)$ ⇒ $\boxed{y_{(x)} = C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}}$

↳ se impune condiția ca noua funcție să verifice ecuația inițială (neomogena 1)

$$\Rightarrow y(x) = C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

calculăm $y' = C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x)\cdot\left(e^{-\int P(x)dx}\right)'$

$$\boxed{y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x))\right)}$$

ecuația neomogenă → $C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} - \cancel{C(x)\cdot P(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} + P(x)y} + Q(x)$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} + Q(x) = 0$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = -Q(x)$$

$$C'(x) = \frac{-Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}$$

$$C'(x) = -Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$\boxed{C(x) = -\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} + K}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(x) = \left(K - \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}}_{\text{SOLUȚIE A ECUAȚIEI 1}}$$

$$y(x) = \underbrace{K\cdot e^{-\int P(x)dx}}_{\substack{\text{soluția generală}\\ \text{a ecuației omogene}\\ y'+P(x)\cdot y=0}} - \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx}_{\substack{\text{soluție particulară a}\\ \text{ecuației neomogene}\\ y'+P(x)\cdot y+Q(x)=0}}$$

Exemple

Obs:
Pt determinarea soluției generale a ecuației liniare și neomogene de ordin 1 sunt necesare două operații de calcul al primitivelor

$\rightarrow \int P(x)\,dx = y_0 = e^{-\int P(x)dx}$

$\rightarrow \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)}dx = y_p$

$y_p = -e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} dx$

Obs $\Rightarrow$ se mai poate cere determinarea unei soluții de tip CAUCHY

↳ Det. ecuației inițiale care pentru un $x = 0$ să ia valoarea $y = y_0$

↳ se pune condiția $x = x_0 \Rightarrow y_0 = K \ldots$

$y_0 = K \cdot e^{-\int P(x)dx} - e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$

$\underbrace{K \cdot e^{-\int P(x)dx}}_{x = x_0}$

$\underbrace{e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)}}_{x = x_0}$

Sa se determine soluția generala a ecuației

$y' + y = 2\cdot e^x$ (neomogenă și liniară)

↳ pt că în ecuație intervin y' și y

$\xrightarrow{1}$ ecuația omogenă asociata $\rightarrow y' + y = 0$

$y' = -y$ sau $\frac{y'}{y} = -1$

$\Rightarrow \int \frac{y'}{y}dx = -\int dx + \ln C$

$e^{\ln x} = x$

$\ln(y) = -x + \ln C$

$\Rightarrow y = e^{-x+\ln C} = e^{-x}\cdot e^{\ln C} = C\cdot e^{-x}$

$\underline{y_0} = C\cdot e^{-x}$

y omogen

$\xrightarrow{2}$ soluție pt ecuația neomogenă (am considerat C în funcție de x)

$y = C(x)\cdot e^{-(x)}$

$y' = C'(x)\cdot e^{-x} - C(x)\cdot e^{-x}$

$C'(x)e^{-x} - \cancel{C(x)\cdot e^{-x}} + \cancel{C(x)\cdot e^{-x}} = 2\cdot e^{x}$ (am înlocuit ecuația dată)

$c'(x)e^{-x} = 2\cdot e^{x} \quad / \cdot e^{x}$

$C'(x) = 2\cdot e^{2x} \Rightarrow C(x) = \int 2e^{2x}dx + K \Rightarrow C(x) = e^{2x} + K$

$\hookrightarrow y = (e^{2x} + K)\cdot e^{-x}$

↳ înlocuit în $y = C(x)\cdot e^{-x}$

$$y = \underbrace{K\cdot e^{-x}}_{y_0} + \underbrace{e^{x}}_{y_p}$$

y_0 ↳ omogen

y_p ↳ particular

$y(0) = 1 \Rightarrow K + 1 = 1 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow y = e^{x}$ este soluție a prob. CAUCHY.

CURS 03 — 20. OCT. 2022

Temă

a) $3y'(x^2-1) - 2xy = 0$

b) $y' + 2xy - x^3 = 0$ (liniara si neomogenă)

— Teoremă integrare prin parti

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

* $\int x^2\cdot e^{x}\,dx = e^{x}(x^2 - 2x + 2) + C$

daca $J = \int P_n(x)e^{x}dx = Q_n(x)\cdot e^{x} + C$

$P_n(x)$ si $Q_n(x)$ polinoame de același grad

$\int x^2 e^{x}dx = (ax^2 + bx + c)e^{x} + C$

$x^2\cdot e^{x} = (2ax + b)\cdot e^{x} + (ax^2 + bx + c)e^{x}$

$x^2 e^{x} = e^{x}(2ax + b + ax^2 + bx + c) \Big/ \cdot \frac{1}{e^{x}}$

$x^2 = ax^2 + 2ax + bx + b + c$

$x^2 = ax^2 + x(2a + b) + b + c$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ b + c = 0 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

Ecuatii diferentiale de ordinul 1 neliniare dar reductibile la ecuatii liniare

→ Ecuatii de tip Bernoulli
→ Ecuatii de tip Riccati

Ecuatii de tip Bernouli

→ forma generala $\boxed{y' + P(x)\cdot y + Q(x)\cdot y^{\alpha} = 0}$, P, Q continue pe I, $\alpha \notin [0,1]$

↳ dacă $y \neq 0$ → forma generala $\cdot \frac{1}{y^{\alpha}}$

↳ $\frac{y'}{y^{\alpha}} + P(x)\cdot\frac{1}{y^{\alpha-1}} + Q(x) = 0$; notam $z = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha}$

calcul: $z' = \frac{1}{\alpha}\cdot y^{-\alpha}\cdot y' = \frac{y'}{y^{\alpha}}\cdot(1-\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}$$

α = constantă

↳ $\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)\cdot z + Q(x) = 0$

↳ am obtinut ec. liniară de ordinul 1 neomogenă

↳ contine z si z'

vom obtine $z = C\cdot f(x) + g(x)$ ⇒ $\boxed{y = (C\cdot f(x) + g(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

Ecuatia de tip Riccati

→ forma generala $\boxed{y' + P(x) + Q(x)y + R(x)\cdot y^2 = 0}$

↳ S-a demonstrat că nu se poate obtine o sol generală a acestei ecuatii prin integrări de functii elementare ($\simeq 1840$, Liouville)

↳ S-a dem că solutia se poate obtine în urm. situatii

1) dacă se cunoaste o sol particulară a sa
2) dacă se cunosc doua sol particulare ale sale
3) dacă se cunosc 3 sol part. ale sale

1) fie y_1 = sol particulară

↳ $y_1' + P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2 = 0$

atunci se face schimbarea de functie $y = y_1 \pm \frac{1}{z}$

z = o noua functie necunoscută

(se recomanda $y = y_1 - \frac{1}{z}$)

$$\underline{y_1'} + \frac{z'}{z^2} + \underline{P(x)} + \underline{Q(x)\cdot y_1} - Q(x)\cdot\frac{1}{z} + \underline{R(x)y_1^2} - 2\frac{y_1}{z}\cdot R(x) + \frac{1}{z^2}\cdot R(x) = $$

$z' - Q(x) \cdot z - 2y_1 R(x) \cdot z + R(x) = 0$

$\hookrightarrow z' - (Q(x) - 2y_1 R(x)) z + R(x) = 0$

$\hookrightarrow$ ecuatie liniară, neomogenă de ordinul 1

se det sol. generala

$$\boxed{z = C \cdot f(x) + g(x)}$$

$$\boxed{\hookrightarrow y = y_1 - \frac{1}{Cf(x) + g(x)}}$$