Temă de control pentru U.I. nr. 1

1. Ecuații diferențiale cu variabile separate

1. $\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=0$;
2. $\frac{dx}{1-x}=\frac{ydy}{1-y^2}$, $x_0=-1$, $y_0=3$.

2. Ecuații diferențiale cu variabile separabile

1. $y'=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2+2}-\frac{1}{x\left(y^2+2\right)}$;
2. $\frac{dy}{1-y}=dx-\frac{dx}{1+x}$.

3. Ecuații diferențiale omogene

1. $(x+y)dy+(y-x)dx=0$;
2. $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$;
3. $\left(3x^2-y^2\right)dy=2xydx$, $x_0=0$, $y_0=1$.

4. Ecuații diferențiale reductibile la ecuații omogene

1. $(4x-5y+11)dx+(-3x+4y-7)dy=0$;
2. $(3x+3y-1)dx+(x+y+1)dy=0$.

5. Ecuații diferențiale de ordinul I liniare şi omogene

1. $y'=(2y+1)\frac{\cos x}{\sin x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$, $y_0=\frac{1}{2}$;
2. $y'-\frac{y}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}=0$.

6. Ecuații diferențiale de ordinul I liniare şi neomogene

1. $y' + 2xy = x^3,\ x_0 = 0,\ y_0 = \dfrac{e-1}{2}$;

2. $y' + \dfrac{2y}{x^2 - 1} = 2x + 2,\ x_0 = 0,\ y_0 = -3$;

3. $\left(2x - x^2\right)y' + (x-1)y = 2x - 1,\ x_0 = \dfrac{1}{2},\ y_0 = 0$;

4. $y' - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)y + \left(x + \dfrac{1}{x}\right)e^x = 0$;

5. $y' + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)}$.

7. Ecuații diferențiale de ordinul I neliniare, reductibile la ecuații liniare

7.1 Ecuații Bernoulli

1. $xy' + y = -x^2y^2,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$;
2. $2x^2y' - 4xy = y^2,\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$.

7.2 Ecuații Riccati

1. $x(2x-1)y' + y^2 - (4x+1)y + 4x = 0,\ y_1(x) = 1,\ y_2(x) = 2x$;
2. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0,\ y_1(x) = \dfrac{1}{x},\ y_2(x) = \dfrac{4}{x}$;
3. $\begin{array}{l} \left(x^2+1\right)y' - 4xy^2 - 2x\left(4x^2+3\right)y - 4x^3\left(x^2+1\right) = 0, \\ y_1(x) = -1 - x^2,\ y_2(x) = -\dfrac{1}{2} - x^2 \end{array}$.

7.3 Ecuații Lagrange

1. $y = xy'^2 + y'^2$;
2. $y = x(1+y') - y'^2$.

7.4 Ecuații Clairaut

1. $y = xy' - a\left(1 + y'^2\right)$;
2. $xy'^2 - yy' + a = 0$.

8. Să se integreze următoarele ecuaţii cu diferenţiale totale:

1. $x\left(y^2+1\right)dx + \left(x^2y + \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)dy = 0$;;

2. $\left(x^2y^3 + y\right)dx + \left(x^3y^2 - x\right)dy = 0$ şi $\left(y + x^3y^2\right)dx + \left(x + x^2y^3\right)dy = 0$,

ştiind că admit un factor integrant de forma $\lambda = \lambda(xy)$;

3. $(x-2y)dx + ydy = 0$, căutând un factor integrant de forma $\lambda = \lambda(y-x)$;

4. $z\left(\dfrac{1}{x^2y} - \dfrac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \dfrac{z}{xy^2}dy + \left(\dfrac{x}{x^2+z^2} - \dfrac{1}{xy}\right)dz = 0$;

5. $\dfrac{a}{z}dx - \dfrac{b}{z}dy + \dfrac{by-ax}{z^2}dz = 0$;

Temă de control pentru U. I. nr. 2

1. Să se construiască ecuațiile diferențiale liniare şi omogene care au soluțiile particulare indicate:

1. $y_1 = e^{-x};\ y_2 = xe^{-x};\ y_3 = \sin x;\ y_4 = \cos x$;
2. $y_1 = \ln x;\ y_2 = x \ln x$.

2. Să se determine un sistem fundamental de soluții pentru ecuațiile diferențiale liniare şi omogene următoare şi să se scrie soluția generală a fiecăreia:

1. $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$, ştiind că admite o soluție de forma $y_1 = e^{rx}, r \in \mathbb{R}$;
2. $x(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0$, ştiind că admite soluția $y_1 = \dfrac{(x-1)^2}{x}$.

3. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare şi omogene, cu coeficienți constanți:

1. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;
2. $y'' + y' + y = 0$;
3. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$;
4. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$;
5. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$;

4. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare şi neomogene, cu coeficienți constanți:

1. $y'' - 4y' + 4y = \sin x \cos 2x$;
2. $y'' + y = \cos x - \cos 3x$;
3. $y'' + y' - 2y = \left(-3x^2 - 23x + 12\right)\cos 3x + \left(11x^2 - 5x - 5\right)\sin 3x$;
4. $y'' + 4y = x \sin 2x$;
5. $y'' - 4y = e^{2x}\left(\cos x - \sin x\right)$;
6. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + e^{-x}\cos x$;
7. $y'' - y = e^{x} x \sin x$;

8. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 4xe^x \sin x$;

Pentru exemplele următoare să se determine o soluție particulară a ecuației neomogene prin metoda lui Lagrange:

9. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$;

10. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}$.

5. Să se determine soluția generală şi soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili, reductibile la ecuații cu coeficienți constanți:

1. $x^2 y'' - xy' + y = x$;
2. $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x; y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 1$;
3. $(3x + 2)^2 y'' + 7(3x + 2) y' = -63x + 18$.

Temă de control pentru U.I. nr. 3

1. Să se construiască sistemele de ecuații diferențiale liniare și omogene care admit următoarele sisteme fundamentale de soluții:

1. $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix};$

2. $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}; Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$

2. Să se determine soluția generală și soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene, cu coeficienți constanți:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2 \end{cases};$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + z \end{cases}; x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1;$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y - z; \\ \dfrac{dz}{dt} = x + z \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'' - 4y + z' = 0 \\ z'' - 10z' - z = 0 \end{cases}.$

3. Să se determine soluția generală și soluția problemei Cauchy (când se precizează) a următoarelor sisteme de ecuații diferențiale liniare și neomogene, cu coeficienți constanți:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + z + \cos t \\ \dfrac{dz}{dt} = -x \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z + \cos x + \sin x + e^{-x} \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z + \sin x - \cos x \end{cases}$; $y(0) = 1; z(0) = 0$.

4. Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili, reductibil la un sistem de ecuații cu coeficienți constanți:

1. $\begin{cases} x^2 y'' + xz' + y + z = x + 1 \\ x^2 z'' + xy' - y - z = -x - 1 \end{cases}$.