Regula unificatoare în acest caz se poate formula astfel:

Limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei, adică:
$$\lim_n \log_a x_n = \log_a \lim_n x_n.$$

Exemple. 1) $x_n = \ln \frac{3n^2+n+1}{2n+3}$; $\lim_n x_n = \ln \lim_n \frac{3n^2+n+1}{2n+3} = \ln \infty = \infty.\square$

2) $x_n = \log_{\frac{1}{10}} \frac{n}{n^2+1}$; $\lim_n x_n = \log_{\frac{1}{10}} \lim_n \frac{n}{n^2+1} = \log_{\frac{1}{10}} 0 = \infty.\square$

3) $x_n = \lg \frac{n}{n^3+n+1}$; $\lim_n x_n = \lg \lim_n \frac{n}{n^3+n+1} = \lg 0 = -\infty.\square$

4) $x_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{n^2}{n+1}$; $\lim_n x_n = \log_{\frac{1}{3}} \lim_n \frac{n^2}{n+1} = \log_{\frac{1}{3}} \infty = -\infty.\square$

Exerciţii propuse

1) $\lim_n \ln \frac{n}{n^2+1}$; 2) $\lim_n \log_2 \frac{n^2}{n+1}$; 3) $\lim_n \log_3 \frac{3n^2+n}{n^2+1}$;
4) $\lim_n \log_{\frac{1}{3}} \frac{2n+1}{n^2+n}$; 5) $\lim_n \log_{\frac{1}{10}} \frac{n+3}{10n+5}$.

1.8.13. Şiruri tip. Şiruri remarcabile

1. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_n = a^n$, unde $a \in \mathbb{R}$, fixat.

Se analizează cazurile:

1.1.) $a = 1$, când $x_n = 1$, $\forall n$. Deci $x_n \to 1$.

1.2.) $a > 1$ şi deci $a = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ când $x_n = (1+\varepsilon)^n = 1+C_n^1\varepsilon++C_n^2\varepsilon^2+\ldots >$ $> 1+n\varepsilon \to \infty$ şi deci $x_n \to \infty$ (şirul (x_n) este divergent – cu limita egală cu $+\infty$).

1.3.) $a \in (-1,1)$. Se consideră $y_n = |x_n| = |a|^n$ când $\frac{y_{n+1}}{y_n} = |a|$ sau $y_{n+1} = |a|y_n$, $(*)$. De aici $y_{n+1} < y_n$, $\forall n$ ceea ce arată că şirul (y_n) este **descrescător** şi cum $y_n > 0$ (deci (y_n) este **minorat**) se deduce că (y_n) este un şir convergent. Fie $l = \lim_n y_n$. Trecând în $(*)$ la limită rezultă $l = |a|l$, adică $l = 0$. Deci $|x_n| \to 0$. Se ştie (vezi şiruri convergente la zero) că atunci şi $x_n \to 0$.

1.4.) $a \leq -1$. Şirul este divergent (nu are limită – se obţin două subşiruri $x_{2n} \to \infty$ şi $x_{2n+1} \to -\infty$).

În final avem:
$$\boxed{a^n \to \begin{cases} 1, & a=1 \\ \infty, & a>1 \\ 0, & a\in(-1,1) \\ \nexists, & a\leq -1 \end{cases}}\ .\square$$

Exemple. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \to 0$; 3) $3^n \to \infty$;

Deci limita unui şir definit printr-o funcţie polinomială este limita **termenului de grad maxim** $(a_0 n^k)$ egală cu : $+\infty$ dacă $a_0 > 0$ sau $(-\infty)$ dacă $a_0 < 0$.

Exemple. 1) $x_n = 3n^5 - 1000n^4 + 3$; $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n 3n^5 = 3 \cdot \infty = \infty$.□
2) $x_n = -n^{10} + 99999n^9 + 1$; $\lim\limits_n x_n = \lim\limits_n(-n^{10}) = -\infty$.□

Exerciţii propuse

1) $\lim\limits_n(-2n^2 + 3n + 4)$; 2) $\lim\limits_n(6n^5 - 3n^4 + 5n + 6)$;
3) $\lim\limits_n(3n^6 + 4n^3 - 1000)$; 4) $\lim\limits_n(-0,01n^3)$; 5) $\lim\limits_n(0,00001n^5)$.

3. Şirul (x_n) cu $x_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, unde P şi Q sunt funcţii polinomiale reale. Fie $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, două funcţii polinomiale reale
$P(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $a_0 \neq 0$, $k \geq 1$,
$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$, $b_0 \neq 0$, $m \geq 1$.
Să considerăm un număr natural N mai mare decât orice rădăcină reală a lui Q. Pentru $n > N$, x_n se poate scrie sub forma:

$$x_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}\right)} = \mathrm{N}^{k-m}\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}} = n^{k-m} \cdot y_n.$$

Cum $y_n \to \dfrac{a_0}{b_0}$, avem că $\lim\limits_n x_n$ se discută după valorile k şi m ale exponenţilor funcţiilor P şi respectiv Q şi anume:

a) pentru $k > m$ (adică, **gradul numărătorului strict mai mare decât gradul numitorului**) $\lim\limits_n n^{k-m} = \infty$ şi prin urmare

$$\lim_n x_n = \infty\left(\frac{a_0}{b_0}\right) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } \dfrac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } \dfrac{a_0}{b_0} < 0. \end{cases}$$

b) pentru $k = m$ (**gradul numărătorului egal cu gradul numitorului**) $\lim\limits_n n^{k-m} = \lim\limits_n 1 = 1$ şi deci $\lim\limits_n x_n = \dfrac{a_0}{b_0}$ (adică limita este egală cu câtul **coeficienţilor** termenilor de grad maxim de la numărător şi numitor).

c) pentru $k < m$ (**gradul numărătorului este strict mai mic decât gradul numitorului**), avem $\lim\limits_n n^{k-m} = \lim\limits_n \dfrac{1}{n^{m-k}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ şi deci $\lim\limits_n x_n = 0$.
Deci limita şirului (x_n) este egală cu zero dacă gradul numărătorului este strict mai mic decât gradul numitorului.

Recapitulând avem:

$$\boxed{\lim_n x_n = \begin{cases} \infty\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right), & k > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k = m \\ 0, & k < m \end{cases}}$$

Exemple. 1) $\lim\limits_{n}\dfrac{n^3+5n-2}{-4n^2+n+1}=\lim\limits_{n}\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^2\left(-4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{n} n\cdot\dfrac{1+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}{-4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\infty\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\infty.\square$

2) $\lim\limits_{n}\dfrac{3n^4+2n^2-3n}{6n^4+5n^3-4n^2+1}=\lim\limits_{n}\dfrac{n^4\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^4\left(6+\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}\right)}=$

$=\lim\limits_{n}\dfrac{3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}{6+\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}.\square$

3) $\lim\limits_{n}\dfrac{-5n^2+6n-3}{10n^3-3n+5}=\lim\limits_{n}\dfrac{n^2\left(-5+\dfrac{6}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(10-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n}\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{-5+\dfrac{6}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{10-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}=$

$=0\cdot\left(\dfrac{-5}{10}\right)=0.\square$

Exerciţii propuse

Calculaţi $\lim\limits_{n} x_n$, unde x_n este egal cu:

1) $\dfrac{(n^2+3n+4)^3-(n^2+3n-4)^3}{(n^2+5n+6)^3-(n^2+5n-6)^3}$ 2) $\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}$; 3) $n-\dfrac{3}{\dfrac{3}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}$;

4) (y_n), $y_n=\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}$, cu $x_n\to\infty$.

Se arată că:

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\mathrm{e},\ \text{dacă}\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\pm\infty\ \text{sau}\\ \text{altfel scris:}\quad \lim\limits_{x_n\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\mathrm{e}.\end{array}}$$

Exemple. 1) $\lim\limits_{n}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim\limits_{n}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n+3}{n+1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n}\frac{2n+3}{n+1}}=\mathrm{e}^2.\square$

2) $\lim\limits_{n}\left(1+\dfrac{1}{-n^2+1}\right)^{n^2-3n}=\lim\limits_{n}\left[\left(1+\dfrac{1}{-n^2+1}\right)^{-n^2+1}\right]^{\frac{n^2-3n}{-n^2+1}}=$

$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n}\frac{n^2-3n}{-n^2+1}}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}.\square$

3) $\lim_n \left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n}+1} = \lim_n \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n+1}}\right]^{\frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}} =$

$= e^{\lim_n \frac{\sqrt{n}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}} = e^2.\square$

5. (y_n), $y_n = (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$, $x_n > 0$, $x_n \to 0$ sau $x_n < 0$, $x_n \to 0$.

Se arată că:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ dacă } \lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ x_n > 0 \quad \text{sau altfel scris} \quad \lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n>0}}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.}$$

sau:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ dacă } \lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ x_n < 0 \quad \text{sau altfel scris:} \quad \lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n<0}}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.}$$

Exemple. 1) $\lim_n \left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{n+5} = \lim_n \left[\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right]^{\frac{(n+5)n}{n^2+1}} =$
$e^{\lim_n \frac{(n+5)n}{n^2+1}} = e^1 = e.\square$

2) $\lim_n \left(1+\frac{-n+1}{n^2+n}\right)^{3n+6} = \lim_n \left[\left(1+\frac{-n+1}{n^2+n}\right)^{\frac{n^2+n}{-n+1}}\right]^{\frac{(3n+6)(-n+1)}{n^2+n}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.\square$

3) $\lim_n \left(1+\frac{2^n}{3^n+4^n}\right)^{-2^n}$; Cum $x_n = \frac{2^n}{3^n+4^n} = \frac{2^n}{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]} =$

$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} \to \to 0\cdot 1 = 0$ avem: $\lim_n \left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{-x_n\cdot 2^n} =$

$= e^{\lim_n \frac{2^n}{3^n+4^n}(-2^n)} = e^{\lim_n \frac{-4^n}{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.\square$

Exerciţii propuse

1) $\lim_n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n+1}$; 2) $\lim_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+1}$; 3) $\lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{2n+1}$;

4) $\lim_n \left(\frac{5n+1}{5n}\right)^{6n-4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n+3}$; 5) $\lim_n \left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n+1}}$;

6) $\lim_n \left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n+1}}\right)^{n}$; 7) $\lim_n \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)^{n^2+1}$; 8) $\lim_n \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right]^{n}$.

6. (y_n), $y_n = \frac{\sin x_n}{x_n}$, $x_n \to 0$; $z_n = \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}$, $x_n \to 0$. (facultativ)

Se arată că

$$\boxed{\lim_n \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \text{ dacă } x_n \to 0 \text{ sau altfel scris } \lim_{x_n \to 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_n \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1, \text{ dacă } x_n \to 0 \text{ sau altfel scris } \lim_{x_n \to 0} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1}$$

Exemple.

1) $\lim_n \frac{2n^2+3}{3n+1} \sin \frac{n}{n^2+1} = \lim_n \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{2n^2+3}{3n+1} =$

$= \lim_n \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{2n^3+3n}{3n^3+n^2+3n+1} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\square$

2) $\lim_n n \operatorname{tg} \frac{1}{n} = \lim_n \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.\square$

3) $\lim_n (3n^3+n-1) \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2} = \lim_n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{3n^3+n-1}{n^3} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3.\square$

4) $\lim_n x_n$, unde $x_n = \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin^2 \frac{\pi}{2n}$.
Din $n \sin^2 \frac{\pi}{2n} < x_n < n \sin^2 \frac{\pi}{n}$ rezultă $\lim_n x_n = 0$. $\square$

5) $\lim_n \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{n}} = \lim_n \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{n}}{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}{\left(\frac{\beta}{n}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\beta}{n}\right)^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{n}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2};$

Exerciţii propuse

1) $\lim_n \frac{n^2+1}{2n} \sin \frac{2n}{n^2+1}$; 2) $\lim_n (n^2+3) \sin \frac{1}{n(n+1)}$; 3) $\lim_n 4^n \sin \left(\frac{1}{3}\right)^n$;
4) $\lim_n n \operatorname{tg} \frac{n+1}{3n^2+1}$; 5) $\lim_n (-3n+1) \operatorname{tg} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$;
6)* $\lim_n \frac{2^n}{x_n}$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2+1}$, $n \geq 1$;
7)* $\lim 4^n (a_n - 2)$, $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$;
8)* $\lim_n 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$, n radicali.
9. (y_n), $y_n = \frac{a^{x_n}-1}{x_n}$, $a > 0$, $x_n \to 0$. (facultativ)

Se arată că:

$$\boxed{\lim_n \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a, \text{ dacă } x_n \to 0 \text{ sau altfel scris } \lim_{x_n \to 0} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a}$$

Exemple. 1) $\lim_n n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_n \dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.\square$

2) $\lim_n n^2(3^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n+1}}) = \lim_n n^2 \cdot 3^{\frac{1}{n+1}}(3^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1) = \lim_n n^2 \cdot 3^{\frac{1}{n+1}}(3^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1) =$

$= \lim_n 3^{\frac{1}{n+1}} \dfrac{3^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \dfrac{n^2}{n(n+1)} = 3^0 \cdot (\ln 3) \cdot 1 = \ln 3.\ \square$

Exerciţii propuse

1) $\lim_n n\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)$; 2) $\lim_n n^2\left(3^{\frac{1}{n}} - 1\right)$; 3) $\lim_n n^2\left(5^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$;

4) $\lim_n \sqrt{n+1}\left(5^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$; 5) $\lim_n n\left(2^{\frac{2n}{n^2+3n}} - 1\right)$; 6) $\lim_n \dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$;

7) $\lim_n n\left(5^{\frac{1}{n}} - 3^{\frac{1}{n}}\right)$; 8) $\lim_n \dfrac{\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n]{8}-\sqrt[n]{6}}$; 9) $\lim_n n\,(\sqrt[n]{3} - \sqrt[2n+1]{3})$.

1.8.14. Cazuri exceptate la limite de şiruri. Calculul limitelor de şiruri în cazurile de nedeterminare

1) Cazul $\boxed{\infty - \infty}$

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze limitele şirurilor:
1) $\sqrt{n^5+1} - \sqrt[3]{n}$; 2) $\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+1}$; 3) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$;
4) $\{\sqrt{n^2+n}\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real a, $\{a\} = a - [a]$; 5) $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}$; 6) $\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}$;
7) $n(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt{n^2+1})$; 8) $\sqrt[3]{n^3+3n^2-n+1} - an$, $a \in \mathbb{R}$; 9) $2^n - 3^n$;
10) $\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3}$; 11) $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}$; 12) $3^n - n^5$.

R. 1) Trecând la limită rezultă nedeterminarea $(\infty - \infty)$. Se aduce şirul la forma: $x_n = \sqrt{n^5\left(1+\frac{1}{n^5}\right)} - \sqrt[3]{n} = n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}} - n^{\frac{1}{3}} =$

$$= n^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^5}} - n^{\frac{-13}{6}}\right) = n^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^5}} - \frac{1}{\sqrt[6]{n^{13}}}\right) \to \infty(1-0) = \infty.\square$$

2) Din nou suntem în cazul $(\infty - \infty)$. Se forţează factor comun n la puterea cea mai mare, anume n^2, sub radicali şi rezultă

$$x_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) \to \infty(1-0) = \infty.\square$$

3) Ca mai sus suntem în cazul de nedeterminare $(\infty - \infty)$ şi forţăm factor comun n^2 sub radicali, când rezultă

$x_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) \to \infty(1-1) = \infty \cdot 0$, care este altă nedeterminare. În acest caz se prelucrează altfel termenul x_n al şirului şi anume **se amplifică x_n cu expresia conjugată**, obţinând:

$$x_n = \frac{(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)} \to$$

$$\to \frac{2}{2} = 1.\square$$

4) Cum $n < \sqrt{n^2+n} < n+1$ rezultă $[\sqrt{n^2+n}] = n$ şi deci $\{\sqrt{n^2+n}\} = \sqrt{n^2+n} - n$. Prin urmare $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$. Luând limita termen cu termen rezultă $(\infty - \infty)$. Se amplifică cu expresia conjugată când x_n devine:

$$x_n = \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \to \frac{1}{2}.\square$$

5) $(\infty - \infty)$. Se scrie şirul sub forma (amplificare cu conjugata)

$$x_n = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}+1\right)} \to \frac{1}{2}.\square$$

6) $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})$. Fiecare paranteză dă nedeterminarea $(\infty - \infty)$. Se amplifică cu expresia conjugată în fiecare paranteză şi rezultă:

$$x_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}} \to 0+0 = 0.\square$$

7) În paranteză avem nedeterminarea $(\infty - \infty)$. Observăm că radicalii au ordine diferite. Se pot aduce la acelaşi ordin şi apoi se trece la amplificarea cu expresia conjugată. Este puţin mai dificil. Se preferă scrierea şirului sub forma: $x_n = n[(\sqrt[3]{n^3+n} - n) + (n - \sqrt{n^2+1})] =$

$$= n\left[\frac{n}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+n}+n^2}+\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}\right]=$$

$$=\frac{n^2}{n^2\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+1\right]}-\frac{n}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}\to$$

$$\to\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.\square$$

8) Se aduce şirul la forma: $x_n=n\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}-a\right)\to\infty(1-a)$.
Dacă $a<1$, atunci $\lim\limits_n x_n=\infty$; dacă $a=1$, atunci în forma iniţială a lui x_n suntem în cazul $(\infty-\infty)$ şi se amplifică fracţia (de numitor 1) cu conjugata. Se obţine $\lim\limits_n x_n=1$. Dacă $a>1$, atunci $\lim\limits_n x_n=-\infty.\square$

9) $(\infty-\infty)$. Se forţează factor comun exponenţiala cu baza cea mai mare (3^n) şi avem: $x_n=3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right]\to\infty(0-1)=-\infty.\square$

10) Se prelucrează x_n sub forma: $x_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{n}{3}$ şi ne situăm în cazul de nedeterminare $(\infty-\infty)$. După unele calcule x_n devine: $x_n=\frac{3n+1}{6n}\to$
$\to\frac{1}{2}.\square$

11) Luând limita numărătorului şi numitorului rezultă nedeterminarea $(\infty-\infty)$. În acest caz se face amplificarea fracţiei atât cu conjugata numărătorului cât şi a numitorului şi se obţine

$$x_n=\frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\to\frac{1+1}{1+1}=1.\square$$

12) $x_n=3^n\left[1-n^5\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\to\infty(1-0)=\infty.\ \square$

Exerciţii propuse

Să se calculeze limitele şirurilor:
1) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; 2) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$; 3) $\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$;
? 4) $\{\sqrt{n^2+2n}\}$; 5) $\{\sqrt{n^2+3n}\}$; 6) $n(\sqrt{n^2+1}-n)$; 7) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;
8) $n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$; 9) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$;
10) $\sqrt{n}(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}})$; 11) $\sqrt[3]{n^3+n^2}-n$;
12) $\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt{n^2+3n}$; 13) $\sqrt[3]{n^3+2n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-3}$;

14) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$; 15) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}$; 16) $\sqrt{n}-2^n$;

17) $\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 18) $\ln(n^2+3n)-\ln(3n^2+2n)$;

19)* $\sqrt[3]{n+1}\cos\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n}\cos\sqrt{n}$; 20)* $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{4n^2+n+1})$.

2) **Cazul** $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze limitele şirurilor:

1) $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+3n+1}$; 2) $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}{3n(n+1)(n+2)}$; 3) $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n+2}-\dfrac{n}{2}$;

4) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{n^3+n}}{\sqrt[5]{n^2+1}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+2n}$;

7) $\dfrac{2^n+3^n}{3\cdot 2^n+5\cdot 3^n}$; 8) $\dfrac{\ln(1+e^n)}{n}$; 9) $\dfrac{\ln(1+e^{3n})}{\ln(1+e^n)}$; 10) $\dfrac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^8-n+3)}$;

11) $\dfrac{\ln(n^2+e^n)}{\ln(n^4+e^{2n})}$; 12) $\dfrac{1+\ln 2n}{1+\ln 3n}$.

R. 1) Se restrânge suma $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ şi deci $\lim\limits_{n}x_n=\dfrac{1}{2}$.□

2) Suma de la numărător se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Cu acestea $\lim\limits_{n}x_n=\dfrac{1}{9}$.□

3) $x_n=\dfrac{n(n+1)}{2(n+2)}-\dfrac{n}{2}=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n+1}{n+2}-1\right)=-\dfrac{n}{2(n+2)}\to-\dfrac{1}{2}$.□

4) $x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\sqrt{\dfrac{1}{n^3}}}}}\to 1$.□ **5)** $x_n=\dfrac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{n^{\frac{2}{5}}\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{n^2}}}\to\infty$.□

6) $x_n=\dfrac{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+2\right)}\to\dfrac{2}{3}$.□ **7)** $x_n=\dfrac{3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^n\left[3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+5\right]}\to\dfrac{1}{5}$.□

8) $x_n=\dfrac{\ln\left[e^n\left(1+\dfrac{1}{e^n}\right)\right]}{n}=\dfrac{\ln e^n+\ln\left(1+\dfrac{1}{e^n}\right)}{n}=\dfrac{n+\ln\left(1+\dfrac{1}{e^n}\right)}{n}=$

$$= \frac{n\left[1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]}{n} \to 1. \square$$

9) $$x_n = \frac{\ln e^{3n}\left(1+\frac{1}{e^{3n}}\right)}{\ln e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)} = \frac{\ln e^{3n}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{3n}}\right)}{\ln e^n+\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)} =$$

$$= \frac{3n+\ln\left(1+\frac{1}{e^{3n}}\right)}{n+\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)} = \frac{n\left[3+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{e^{3n}}\right)\right]}{n\left[1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]} \to 3. \square$$

10) $$x_n = \frac{\ln n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^8\left(1-\frac{1}{n^7}+\frac{3}{n^8}\right)} = \frac{\ln n^2+\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^8+\ln\left(1-\frac{1}{n^7}+\frac{3}{n^8}\right)} =$$

$$= \frac{(\ln n)\left[2+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right]}{(\ln n)\left[8+\frac{1}{\ln n}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n^7}+\frac{3}{n^8}\right)\right]} \to \frac{2}{8} = \frac{1}{4}. \square$$

11) $$x_n = \frac{\ln\left[e^n\left(\frac{n^2}{e^n}+1\right)\right]}{\ln\left[e^{2n}\left(\frac{n^4}{e^{2n}}+1\right)\right]} = \frac{n+\ln\left[n^2\left(\frac{1}{e}\right)^n+1\right]}{2n+\ln\left[n^4\left(\frac{1}{e}\right)^{2n}+1\right]} =$$

$$= \frac{n\left\{1+\frac{1}{n}\ln\left[n^2\left(\frac{1}{e}\right)^n+1\right]\right\}}{n\left\{2+\frac{1}{n}\ln\left[n^4\left(\frac{1}{e}\right)^{2n}+1\right]\right\}} \to \frac{1}{2}. \square$$

12) $$x_n = \frac{1+\ln 2+\ln n}{1+\ln 3+\ln n} = \frac{(\ln n)\left[\frac{1}{\ln n}+\frac{\ln 2}{\ln n}+1\right]}{(\ln n)\left[\frac{1}{\ln n}+\frac{\ln 3}{\ln n}+1\right]} \to \frac{1}{1} = 1. \square$$

Exerciţii propuse

Să se calculeze limitele şirurilor:

1) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^2(n^2+1)}$; 2) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k(k+2)}{\sum_{k=1}^{n} k(k+3)}$; 3) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k(k+3)}{C_{n+3}^3}$; 4) $\dfrac{n\sum_{k=1}^{n} k^3}{(n+2)^5}$;

5) $\dfrac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$; 6) $\dfrac{\ln(1+e^{2n})}{n}$; 7) $\dfrac{\ln(1+e^{5n})}{\ln(1+e^{2n})}$; 8) $\dfrac{\ln(n^3+n-1)}{\ln(n^6+2n^3+n)}$;

4) $(-3)^{2n} \to \infty$; 5) $\dfrac{3^n + 5^n}{4^n + 7^n} = \dfrac{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1\right]}{7^n\left[\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1\right]} = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n \dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{7}\right)^n + 1} \to$

$\to 0 \cdot \dfrac{1}{1} = 0.$

Problemă rezolvată. Să se arate că: $\lim\limits_n na^n = 0$, $\lim\limits_n n^2a^n = 0$, $\lim\limits_n n^3a^n = 0$, dacă $|a| < 1$.

R. Vom arăta că $n|a|^n \to 0$ şi atunci este clar că şi $na^n \to 0$, dacă $|a| < 1$. Punând $b = |a| \in [0,1)$ avem o scriere de forma $b = \dfrac{1}{1+\varepsilon}$, cu $\varepsilon > 0$. Deci:

$$0 \le nb^n = n\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} = \frac{n}{1 + C_n^1\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2 + \ldots} < \frac{n}{1 + n\varepsilon + \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2}.$$

Cum se va vedea mai jos limita şirului din dreapta este 0. Cum şirul nb^n este minorat de zero se deduce (criteriul „cleştelui“) $\lim\limits_n nb^n = 0$.

Prin urmare $\lim\limits_n na^n = 0.\square$

Analog se arată că $\lim\limits_n n^ka^n = 0$, unde $k \in \mathbb{N}$, fixat.

Exerciţii propuse

1) $\lim\limits_n \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; 2) $\lim\limits_n \left[n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$; 3) $\lim\limits_n \left[n\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 2^n\right]$;

4) $\lim\limits_n \dfrac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n}$; 5) $\lim\limits_n \dfrac{n\cdot 2^n + 3\cdot 5^n}{n^2\cdot 3^n + 6\cdot 5^n}$;

6) $\lim\limits_n \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \dfrac{1}{2^{2^n}}\right)$;

7) $\lim\limits_n \dfrac{a_n}{b_n}$, unde $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, $n \ge 1$. 8) $\lim\limits_n \left(\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{3^k}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{2^k}\right)$.

2. Şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ cu termenul general $x_n = P(n)$, unde P este o funcţie reală polinomială.

Fie $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia polinomială de grad $k \ge 1$, cu coeficienţi reali,
$P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $a_0 \ne 0$.
Se consideră şirul $x_n = P(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k$.
Pentru a calcula limita şirului se prelucrează termenul general astfel:
$x_n = n^k\left(a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + \ldots + \dfrac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \dfrac{a_k}{n^k}\right)$

Cum $\dfrac{a_i}{n^i} \to 0$, $i = \overline{1,k}$, avem:

$$\lim_n x_n = \lim_n n^k \cdot a_0 = \infty \cdot a_0 = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0 \end{cases}$$

4) Cazurile $\boxed{1^\infty}$, ∞^0, 0^0

În acest caz de nedeterminare se recomandă utilizarea limitei
$$\lim_{y_n \to 0}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e.$$

Pentru cazurile 0^0, ∞^0 se utilizează scrierea $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$.

Să se calculeze limitele şirurilor:

~~1)~~ $\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$, $a,b>0$; ~~2)~~ $(2-e^{\frac{1}{n}})^n$; 3) $\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$;

~~4)~~ $\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^n$; ~~5)~~ $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n+1}}$;

6)* x_n este rădăcină a ecuaţiei $2^{-x}=nx$, $n\geq 1$. Arătaţi că: a) şirul (x_n) este bine definit; b) (x_n) este convergent şi calculaţi $\lim x_n$, $\lim nx_n$, $\lim\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^n$, $\lim n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$.

R. 1) Pentru a pune în evidenţă în bază şirul $y_n \to 0$, se adună şi se scade 1 în bază. Avem: $x_n = \left(1+\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right)^n$ cu $y_n = \frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}$.

Deci $x_n = \left[(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{\frac{1}{2}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1+b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} \to e^{\frac{1}{2}\lim_n\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right]} = e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)} =$
$= e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.\square$

2) Aici $y_n = 1-e^{\frac{1}{n}} \to 0$ şi deci
$$x_n = \left[(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{\frac{1-e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}} \to e^{-\lim_n\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = e^{-\ln e} = e^{-1} = \frac{1}{e}.\square$$

3) Se pune $y_n = \sin\frac{1}{n} \to 0$ şi avem:
$$x_n = \left[(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{n\sin\frac{1}{n}} \to e^{\lim_n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = e^1 = e.\square$$

4) Avem $\lim_n x_n = \lim_n \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2+2}\right)^n = \ln\lim_n\left(1+\frac{n^2+1}{n^2+2}-1\right)^n =$
$$= \ln\lim_n\left(1+\underbrace{\frac{-1}{n^2+2}}_{y_n}\right)^n = \ln\lim_n\left[(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{-\frac{n}{n^2+2}} = \ln e^0 = \ln 1 = 0.\square$$

5) Avem $x_n = \left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n+1}}$, unde se pune $y_n = \frac{n}{n^2+1} \to 0$ şi deci: $x_n = \left[(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right]^{\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n+1}} \to e^1 = e.\square$

6) a) $f(x)=g(x)$, $f(x)=2^{-x}$, $g(x)=nx$ are o unică soluţie pentru că f este

descrescătoare, g este crescătoare, $h(0) > 0$. $h\left(\frac{1}{n}\right) < 0$ deci $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$;

b) $\lim x_n = 0$; $\lim nx_n = \lim 2^{-x_n} = 1$;
$\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{2^{-nx_n}}{2^{-nx_{n+1}}} \to e$; 1. □

Probleme propuse

Să se calculeze limitele şirurilor:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$, $a, b, c > 0$; 2) $\left(\frac{2n^2-3}{2n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}$;
3) $\left(1 + \ln\frac{n}{n+1}\right)^n$; 4) $\left(1 + \sin\frac{k}{n}\right)^n$; 5) $\left(\cos\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$;
6) $\left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2+1}\right)^{n-\sqrt{n}}$; 7) $\left(\frac{a_n}{2}\right)^{4^n}$, unde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \geq 1$, arătând că $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$; 8) $\left(\frac{\sum_{k=1}^{m} \sqrt[n]{k}}{m}\right)^n$, $m \in \mathbb{N}^*$;
9) $(5^n+1)^{\frac{1}{n}}$; 10) $\left(\frac{1}{e^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$; 11) $(3^n+5^n)^{\frac{1}{n}}$; 12) $\left(\frac{1}{5^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$;
13) $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$; 14) $(n^2+n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$; 15) $\left(\frac{2^n+1}{3^n+2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

1.8.15. Alte probleme cu limite de şiruri

1. Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât

1) $\lim\limits_n \frac{\sqrt{(1-a^2)^2n^2+2n}}{n} = 3$; 2) $\lim\limits_n \frac{\sqrt{(1-a)^2n^4+n^2+1}}{an^2} = 2$;
3) $\lim\limits_n \frac{\sqrt{(1-a)^2n^2+1}}{5an+(\frac{1}{2})^n} > 3$; 4) $\lim\limits_n(\sqrt[3]{n^3+3n^2-n+1} - an) = 1$;
5) $\lim\limits_n(\sqrt{2n^2+4n+1} - an - b) = 2\sqrt{2}$; 6) $\lim\limits_n(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b) = 0$;
7) $\lim\limits_n[\sqrt{9n^4-24n^3+6n^2+5} - (an^2+bn+c)] = -\frac{17}{3}$;
8) $\lim\limits_n n(an - \sqrt{-2+bn+cn^2}) = 1$; 9) $\lim\limits_n(\sqrt{n^2+an+b} + cn) = 3$;
10) $\lim\limits_n(\sqrt{n^4+2n^3} - an^2 - bn - c) = 0$;
11) $\lim\limits_n(\sqrt[3]{an^3+3n^2+1} - \sqrt{bn^2+1}) = 1$, $a, b > 0$.

2. Să se determine funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$, precizând domeniile lor de definiţie:
1) $f(x) = \lim\limits_n \frac{x^2+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$; 2) $f(x) = \lim\limits_n \frac{x^{2n}-x^2-8x-16}{x^{2n}+x+4}$;

9) $\dfrac{\ln(n^3+e^{2n})}{\ln(n^6+e^{3n})}$; 10) $\dfrac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$.

11) $a_n=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$; $\dfrac{r_n}{q_n}, \dfrac{s_n}{q_n}, \dfrac{t_n}{q_n}$.

3) $\boxed{\text{Cazul } 0\cdot\infty}$

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze limitele şirurilor:

1) $\dfrac{n^2}{n+1}\sin\dfrac{1}{n}$; 2) $n\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}-1\right)$; 3) $n(2^{\frac{1}{n+1}}-1)$;

4) $n\sqrt{n}(3^{-\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}}-1)$; 5) $(2^n+3^n)\dfrac{1}{e^n+1}$; 6) $n\ln\left(\dfrac{2n}{2n+3}\right)$.

R. 1) $x_n=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1\cdot 1=1.\square$

2) $x_n=\dfrac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+2}}=\dfrac{-n}{\sqrt{n+2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}\to-\dfrac{1}{2}.\square$

3) $x_n=\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\to 1\cdot\ln 2=\ln 2.\square$

4) $x_n=\dfrac{n\sqrt{n}}{-\sqrt{n}(n+1)}\cdot\dfrac{3^{-\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}}-1}{-\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}}\to(-1)\cdot\ln 3=-\ln 3.\square$

5) $x_n=\dfrac{3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]}{e^n\left[1+\left(\frac{1}{e}\right)^n\right]}=\left(\dfrac{3}{e}\right)^n\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^n}\to\infty\cdot 1=\infty.\square$

6) $x_n=\ln\left(\dfrac{2n}{2n+3}\right)^n=\ln\left[\left(1+\dfrac{-3}{2n+3}\right)^{\frac{2n+3}{-3}}\right]^{\frac{-3n}{2n+3}}\to\ln e^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{3}{2}.\square$

Exerciţii propuse

Să se calculeze limitele şirurilor:

1) $\sqrt[3]{n}\,\mathrm{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $n\left(\sqrt{\dfrac{n^2+2n}{n^2+n}}-1\right)$; 3) $n\sqrt{n}(e^{\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)}}-1)$;

4) $n^2[\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)]$; 5) $n^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$;

6) $4^n(x_n-2)$, unde $x_0\in[-2,2]$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, $n\geq 0$;

7) $\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3})$; 8) $\ln(3^n+1)\cdot\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$.

-2