Ecuații diferențiale liniare de ordin $n \geq 2$ cu coeficienți constanți — continuare —

Pentru ec. dif. liniare cu coef. constanți:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \qquad (1)$$

soluția generală a ecuației omogene este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene și soluția generală a ec. omogene.

Deci două determinări sol. generale a ec. dif. omogene atașată ec. neomogene, reușită determinarea o sol. particulară a ecuației neomogene.

În continuare se prezintă două metode pentru determinarea unei soluții de soluții particulare:

1) Metoda variației constantelor (M.V.C.)

Fie $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ care formează un sist. fundamental de soluții pe $[a,b]$ care ec. omogenă și soluția generală a ec. omogenă se va scrie:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

Metoda constă în efectuarea următoarelor etape:

a) Se înlocuiesc constantele din relația sol. gen. a ec. omogene cu funcțiile diferențiabile $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ și se face condiția ca funcțiile $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ să fie soluții sistemului de n ecuații liniare în n necunoscute și neomogen:

$$\begin{cases} y_1 C_1'(x) + y_2 C_2'(x) + \dots + y_n \cdot C_n'(x) = 0 \\ y_1' C_1(x) + y_2' C_2'(x) + \dots + y_n' \cdot C_n'(x) = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-2)} C_1'(x) + y_2^{(n-2)} C_2'(x) + \dots + y_n^{(n-2)} C_n'(x) = 0 \\ y_1^{(n-1)} C_1'(x) + y_2^{(n-1)} C_2'(x) + \dots + y_n^{(n-1)} C_n'(x) = b(x) \end{cases}$$

al cărui determinant este $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ care este nenul, deoarece $y_1, \dots, y_n$ formează sist. fond. de soluții. Rezultă că sistemul are sol. unică.

b) Se scrie sol. generală y a ecuației neomogene sub forma:

$$y(x) = y_1 \int C_1'(x)dx + y_2 \int C_2'(x)dx + \dots + y_n \int C_n'(x)dx \qquad (2)$$

Deoarece primitivele integralelor din (2) sunt de forma:

$$\int C_1'(x)dx = g_1(x) + k_1, \int C_2'(x)dx = g_2(x) + k_2, \dots, \int C_n'(x)dx = g_n(x) + k_n$$

unde $k_1, k_2, \dots, k_n$ sunt constante reale arbitrare, rel. gen. (2) devine:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\, g_i(x) \qquad (3)$$

unde:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot y_i(x) = \bar{y}(x)$$

este sol. gen. a ec. omogene și se poate dem. că

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x) \cdot g_i(x) = y_p(x)$$

este o soluție particulară a ec. neomogene.

În concluzie, conform M.V.C. sol. generală a ec. neomogene (1) se va scrie:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

în concordanță cu teorema 4 din EDDD 3.12.2023.

2) Determinarea unei soluții particulare în funcție de forma lui b din ec. (1)

Sunt posibile următoarele cazuri:

c1) Dacă b este un polinom de grad m, $m \leq n$, și $a_n \neq 0$, atunci y este un polinom de grad cel mult m, care coeficienții se determină din condiția ca y_p să verifice ec. neomogenă (1).

c2) Dacă b este un polinom de grad m, $m \leq n$ și $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$, iar $a_{n-k-1} \neq 0$ atunci:

$$y_p(x) = x^k \cdot P_m(x),$$

iar coeficienții polinomului $P_m(x)$ de grad m se determină din condiția ca y_p să verifice ec. neomog. (1).

c3) Dacă

$$b(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x), \quad m \leq n,$$

iar α nu este rădăcină a ec. caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \cdot R_m(x),$$

unde $R_m(x)$ este un polinom de grad m, iar coef. lui se det. din cond. ca y_p să verific ec. neomog. (1).

c4) Dacă

$$b(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x), \quad m \leq n,$$

iar α este rădăcină a ec. caracteristice de ordin de multiplicitate $k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$y_p(x) = x^k \cdot e^{\alpha x} R_m(x),$$

unde $R_m(x)$ este un polinom de grad m, iar coef. lui se det. din cond. ca y_p să verific ec. neomog. (1).

c5) Dacă

$$b(x) = P_{m_1}(x) \cos \alpha x + R_{m_2}(x) \sin \alpha x,$$

unde $P_{m_1}(x), R_{m_2}(x)$ sunt polinoame de grad m_1 respectiv m_2, iar $\pm i\alpha$ nu este rădăcină a ec. caract. atunci:

$$y_p(x) = P_m^0(x) \cos \alpha x + R_m^0(x) \sin \alpha x,$$

unde $P_m^0(x), R_m^0(x)$ sunt polinoame de grad m, unde $m = \max\{m_1, m_2\}$, iar coef. lor se determ. din condiția ca y_p să verifice ec. neomogenă (1). Dacă în plus, $\pm i\alpha$ sunt rădăcini multiple de ordinul k ale ec. caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = x^k \left[P_m^0(x) \cos \alpha x + R_m^0(x) \sin \alpha x \right].$$

c6) Dacă

$$b(x) = P_{m_1}(x) e^{-\alpha x} \cos \beta x + R_{m_2}(x) e^{-\alpha x} \sin \beta x,$$

unde $P_{m_1}(x)$ și $R_{m_2}(x)$ sunt polinoame de grad m_1, resp. m_2, iar $k = \alpha + i\beta$ și $\bar{k} = \alpha - i\beta$ nu sunt rădăcini ale ecuației caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = e^{-\alpha x} \left[P_m^0(x) \cos \beta x + R_m^0(x) \sin \beta x \right]$$

unde $P_m^0(x), R_m^0(x)$ sunt polinoame de grad $m = \max\{m_1, m_2\}$, iar coef. lor se determină din condiția ca y_p să verifice ec. neomogenă (1).

Dacă în plus, $k = \alpha + i\beta$ și $\bar{k} = \alpha - i\beta$ sunt rădăcini multiple de ordinul $k \in \mathbb{N}^*$ ale ec. caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = x^k e^{-\alpha x} \left[P_m^0(x) \cos \beta x + R_m^0(x) \sin \beta x \right],$$

unde $P_m^0(x), R_m^0(x)$ sunt polinoame de grad $m = \max\{m_1, m_2\}$, iar coef. lor se determină din cond. ca y_p să verifice ec. neomogenă (1).

Obs. În ambele situații prezentate la c6) se recomandă inițial scrierea funcției:

$$y(x) = z(x) e^{-\alpha x}.$$

Ec. dif. omogenă rezultată de funcția $z(x)$ va fi de tipul de la c5), pentru care calculele de determinare a soluției particulare $z_p(x)$ sunt mai puțin elaborate. Apoi în cazul c6) $y_p(x)$ va fi de la c5) și $y_p(x)$ se va scrie sol. generală y a ec. liniare de ordinul $n \geq 2$ cu coef. constanți (1), în funcție de sist. fond.

Pasul 1 Se identifică n și funcția b.

Dacă b este funcție multă, adică $b(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$ atunci ec. dif. de ord. n, cu coef. constanți este ec. omogenă.

Dacă b nu este funcție multă, atunci ec. dif. de ordinul n, cu coef. constanți este ec. neomogenă. În acest caz se determină ec. omogenă asociată în (1) pe $D(x)$ cu $\bar{y}$.

Pasul 2 Se rezolvă ec. caracteristică, asociată ec. omogene:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0,$$

și folosind considerând funcția y și cele n derivate ale sale de forma:

$$y = e^{rx}, \ y' = r e^{rx}, \ y'' = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n e^{rx}.$$

Ec. caracteristică fiind de grad $n \geq 1$, va avea n rădăcini care vor genera cele n soluții ale ec. omogene ce formează un sistem fundamental de soluții.

Pasul 3 Se determină sol. generală a ec. omogene și fiind combinația liniară a celor n soluții generale de tipul n rădăcini ale ec. caracteristice, în funcție de rădăcinile prezentate anterior.

În final, sol. generală a ec. omogene are forma:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \ C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$

Pasul 4 Dacă b este funcție multă, adică $b(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$ atunci forma sol. generale a ec. dif. de ordinul n cu coef. constanți se obține înlocuind în rezultatul de la pasul 3) în egalitatea $y = \bar{y}$.

Dacă b nu este funcție multă, atunci forma sol. generale a ec. dif. de ordinul n cu coef. constanți este:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este sol. generală de la pasul 3 (a ec. omog. atașată) și y_p este o soluție particulară a ec. neomogene, ce urmează a fi determinată.

Pasul 5 Determinarea sol. particulare y_p se face folosind una dintre cele două metode prezentate anterior.

Pasul 6

Prin înlocuirea lui $\bar{y}$ (sol. generală de la pasul 3) și a lui y_p (determinat la pasul 5), în egalitatea:

$$y = \bar{y} + y_p$$

se obține forma sol. generale a ec. dif. (1).

Exemplu 1. Să se integreze ecuația:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = x + 1 \qquad (4)$$

R: Pasul 1. Ec. din enunț este o ec. dif. de ordinul 3, liniară cu coeficienți constanți și neomogenă. În acest caz, se folosește ec. omogenă, înlocuind în (4) pe $b(x) = 0$.

Pasul 2 Considerând funcția y și cele 3 derivate ale sale de forma:

$$y(x) = e^{kx}, \ y'(x) = k e^{kx}, \ y''(x) = k^2 e^{kx}, \ y'''(x) = k^3 e^{kx}, \ k \in \mathbb{C}$$

în ec. omogenă atașată ec. (4),

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0,$$

se obține ec. caracteristică:

$$\left.\begin{array}{l} k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \\ k^2(k-2) - (k-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (k^2-1)(k-2) = 0$$

de unde rezultă rădăcinile distincte: $k_1 = -1$, $k_2 = 1$ și $k_3 = 2$.

Pasul 3. Fol. rezultatele de pe pasul 2 și conform noțiunilor prezentate anterior, în final, de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, \ y_2(x) = e^{x}, \ y_3(x) = e^{2x}.$$

Se determină soluția generală a ecuației omogene ca fiind combinația liniară a celor 3 soluții și 3 constante reale:

$$\bar{y} = k_1 e^{-x} + k_2 e^{x} + k_3 e^{2x}.$$

Pasul 4 Deoarece $b(x) = x + 1$ (b nu este funcție multă), atunci sol generală este de forma:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este sol. generală obținută la pasul 3 și y_p este o soluție particulară a ec. neomogene, de forma termenilor din dreapta egalității (1) ($b(x) = x + 1$).

Pasul 5. Urmează se determine o sol particulară y_p a ec. neomogene (4) pe care o folosim în acest caz, soluția generală a ec. neomogene este de forma:

$$y(x) = y_1 \int k_1'(x)dx + y_2 \int k_2'(x)dx,$$

unde $k_1'(x)$ și $k_2'(x)$ sunt sol. sist.:

$$\begin{cases} y_1 \cdot k_1'(x) + y_2 \cdot k_2'(x) = 0 \\ y_1' \cdot k_1'(x) + y_2' \cdot k_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

în care $y_1'(x) = -\sin x$ și $y_2'(x) = \cos x$

de unde prin înlocuire în sistem:

$$\begin{cases} \cos x \cdot k_1'(x) + \sin x \cdot k_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cdot k_1'(x) + \cos x \cdot k_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Înmulțim ce se duce la aceeași numitor a doua ecuație, se simplifică primele ec. a sist. cu cos și din rezultat se scade a 2-a ec.:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 x \cdot k_1'(x) + \sin x \cos x \cdot k_2'(x) = 0 \\ -\sin^2 x \cdot k_1'(x) + \sin x \cos x \cdot k_2'(x) = 1 \end{array}\right| (-)$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot k_1'(x) = -1$$

$$\Rightarrow k_1'(x) = -1 \text{ și } k_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\int k_1'(x)\,dx = -\int dx = -x + C_1$$

$$\int k_2'(x)\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C_2$$

Pasul 6 Rezultatele se înlocuiesc în sol. gen. a ec. neomogene de la pasul 5 și se obține:

$$y(x) = y_1 \int k_1'(x)dx + y_2 \int k_2'(x)dx =$$

$$= C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \sin x \cdot \ln|\sin x| - x\cos x$$

soluția particulară a ec. neomogene.

Exemplu 2. Se va integra ecuația:

$$y''' - y'' + y' - y = 5\cos 2x \qquad (5)$$

Rezolvare

Pasul 1 Ec. dif. este de ordinul 3, liniară cu coef. constanți și neomogenă. În acest caz, se folosește ec. omogenă, înlocuind în (5) pe $b(x) = 0$, cu $b(x) = 5\cos 2x$ în zero.

Pasul 2 Considerând funcția y și cele 3 derivate ale sale:

$$y(x) = e^{kx}, \ y'(x) = k e^{kx}, \ y''(x) = k^2 e^{kx}, \ y'''(x) = k^3 e^{kx}, \ k \in \mathbb{C}$$

în ec. omogenă atașată ec. (5),

$$y''' - y'' + y' - y = 0 \Rightarrow k^3 - k^2 + k - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2(k-1) + k - 1 = 0 \Rightarrow (k-1)(k^2+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = 1, \ k_2 = -i \text{ și } k_3 = i$$

Pasul 3 Deoarece $k_2, k_3 \in \mathbb{C}$ complex și conjugate, contribuția lor la sol. generală a ec. omogene este o combinație liniară a două soluții cu coef. constanți, care se determină astfel:

$$z_1 = e^{-ix} = \cos x - i \sin x \text{ și } z_2 = e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

de unde se obțin sol. reale:

$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \cos x \text{ și } y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i} = \sin x.$$

Deci contribuția rădăcinilor k_2, k_3 la sol. gen. a ec. omogene este:

$$k_2 \cos x + k_3 \sin x$$

Pe de altă parte, contribuția rădăcinii $k_1 = 1$ este de forma:

$$k_1 e^{x}.$$

Atunci sol. generală a ec. omogene este:

$$\bar{y} = k_1 e^{x} + k_2 \cos x + k_3 \sin x,$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

Pasul 4 Deoarece $b(x) = 5\cos 2x$ (b nu este funcție multă) atunci sol. generală este de forma:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este sol. gen. de la pasul 3 și y_p este o sol. particulară a ec. neomogene de forma termenilor din dreapta egalității ($b(x) = 5\cos 2x$).

Pasul 5 Urmează se determine o sol. particulară y_p a ec. neomogene de forma termenilor din dreapta egalității ($b(x) = 5\cos 2x$).

$$y_p(x) = a \cdot \cos 2x + b \sin 2x,$$

coeficienți $a, b \in \mathbb{R}$ determinați reușite din cond. ca y_p să verifice ec. neomogenă (5).

Atunci, cum

$$y_p'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x,$$

$$y_p''(x) = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x$$

$$y_p'''(x) = 8a \sin 2x - 8b \cos 2x,$$

după înlocuire în ec. neomogenă se obține:

$$(6a + 3b) \sin 2x + (3a - 6b) \cos 2x = 5\cos 2x$$

și din identificare se obține sistemul:

$$\begin{cases} 6a + 3b = 0 \ | \cdot 2 \\ 3a - 6b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a + 6b = 0 \\ 3a - 6b = 5 \end{cases} (+)$$

$$15a = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} + 3b = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{9}$$

Deci soluția particulară a ec. neomogene este:

$$y_p = \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{9}\sin 2x.$$

Pasul 6 Prin înlocuirea lui $\bar{y}$ (sol. gen. de la pasul 3) și a lui y_p (obținut la pasul 5), în egalitatea:

$$y = \bar{y} + y_p$$

se obține forma sol. generale a ec. dif. (5).

Prin urmare, soluția generală a ec. dif. (5) este:

$$y = k_1 e^{x} + k_2 \cdot \cos x + k_3 \sin x + \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{9}\sin 2x$$

Formula lui Moivre $\quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

$$e^{ipx} = \cos(-px) + \sin(-px)$$

$$= \cos px - \sin px$$

Exemplu 3 Se va integra ecuația:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \qquad (6)$$

Rezolvare:

Pasul 1. Ec. dif. de ordinul 2, liniară cu coef. constanți și neomogenă. În acest caz, se folosește ec. omogenă, înlocuind în (6) pe $b(x) = \frac{1}{\sin x}$, cu zero.

Pasul 2 Considerând funcția y și cele 2 derivate ale sale de forma:

$$y(x) = e^{kx}, \ y'(x) = k e^{kx}, \ y''(x) = k^2 e^{kx}, \ k \in \mathbb{C}$$

în ec. omogenă atașată ec. (6)

$$y'' + y = 0 \Rightarrow k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = i \text{ și } k_2 = -i.$$

Pasul 3 Deoarece rădăcinile k_1 și k_2 sunt complexe și conjugate, contribuția lor la sol. gen. a ec. omogene este o combinație liniară a 2 soluții cu 2 constante care se determină astfel:

$$z_1 = e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ și } z_2 = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

de unde se obțin sol. reale:

$$y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \cos x \text{ și } y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i} = \sin x \quad \left(\begin{array}{l} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{array} \right)$$

Se determină sol. generală a ec. omogene ca fiind combinația liniară a celor 2 sol. și 2 constante:

$$\bar{y} = k_1 \cdot \cos x + k_2 \cdot \sin x.$$

Pasul 4 Deoarece $b(x) = \frac{1}{\sin x}$ (b nu este funcție multă), sol. generală este de forma:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este sol. gen. obținută la pasul 3 și y_p este o soluție particulară a ec. neomogene de forma termenilor din dreapta egalității ($b(x)$).

Pasul 5 Urmează se determine o sol particulară y_p a ec. neomogene (6) folosind M.V.C. (vezi 1)).

Conform metodei aplicate în acest caz, soluția generală a ec. neomogene este de forma:

$$y(x) = y_1 \int k_1'(x)dx + y_2 \int k_2'(x)dx,$$

unde $k_1'(x)$ și $k_2'(x)$ sunt sol. sist.:

$$\begin{cases} y_1 \cdot k_1'(x) + y_2 \cdot k_2'(x) = 0 \\ y_1' \cdot k_1'(x) + y_2' \cdot k_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

în care $y_1'(x) = -\sin x$ și $y_2'(x) = \cos x$

de unde prin înlocuire în sistem:

$$\begin{cases} \cos x \cdot k_1'(x) + \sin x \cdot k_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cdot k_1'(x) + \cos x \cdot k_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Înmulțim ce se duce la aceeași numitor a doua ecuație, se simplifică primele ec. a sist. cu cos și din rezultat se scade a 2-a ec.:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 x \cdot k_1'(x) + \sin x \cos x \cdot k_2'(x) = 0 \\ -\sin^2 x \cdot k_1'(x) + \sin x \cos x \cdot k_2'(x) = 1 \end{array}\right| (-)$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x) \cdot k_1'(x) = -1$$

$$\Rightarrow k_1'(x) = -1 \text{ și } k_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\int k_1'(x)\,dx = -\int dx = -x + C_1$$

$$\int k_2'(x)\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C_2$$

Pasul 6 Rezultatele se înlocuiesc în sol. gen. a ec. neomogene de la pasul 5 și se obține:

$$y(x) = y_1 \int k_1'(x)dx + y_2 \int k_2'(x)dx =$$

$$= C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \sin x \cdot \ln|\sin x| - x\cos x$$

soluția particulară a ec. neomogene.

Teme Să se integreze următoarele ecuații:

1. $y^{(6)} - y^{(5)} - y + y = x^2$,
2. $y^{(4)} + y = x e^x + x + x^2 e^{-x}$,
3. $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$,
4. $y^{(5)} - 3y' - 2y = 10(\sin x + x\cos x) - 8x^2$.