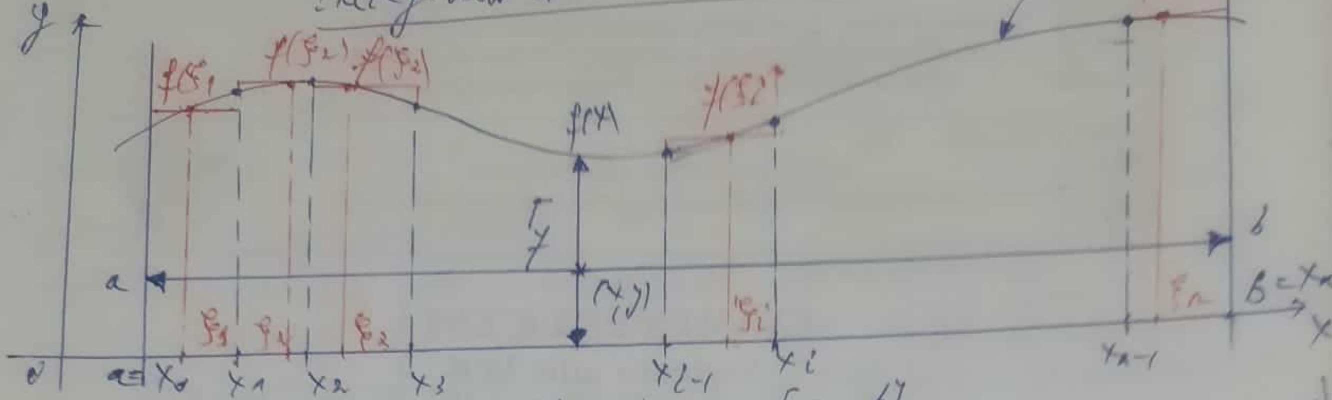
10.12.2021
An 1

Integrabilitate Riemann



Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, continuă pe $[a,b]$.

Fie $\Delta_n: (a=x_0<x_1<x_2<x_3<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_{n-1}<x_n=b)$

$\Delta_n \stackrel{def}{=}$ diviziune a intervalului $[a,b]$.

Prin norma diviziunii Δ_n vom înțelege maximul care reprezintă cea mai mare lungime de interval parțial al diviziunii Δ_n; $\|\Delta_n\| = \max\limits_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|$

Vom considera și un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n ξ (ξ)

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$

Fie $\Gamma_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b;\ 0\le y\le f(x)\}$ = mulțimea punctelor din plan situate între G_f, axa Ox, și dreptele $x=a$ și $x=b$.

Ne propunem să determinăm cu o precizie cât mai mare aria mulțimii plane Γ_f. O aproximare a acesteia este dată de suma:

$$\text{Aria}(\Gamma_f) \simeq (x_1-x_0)\cdot f(\xi_1)+(x_2-x_1)\cdot f(\xi_2)+\dots+(x_i-x_{i-1})\cdot f(\xi_i)+\dots+(x_n-x_{n-1})\cdot f(\xi_n)$$ = suma ariilor dreptunghiurilor cu baza $[x_{i-1},x_i]$ și înălțimea $f(\xi_i)$. Suma din membrul drept se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ_n și sistemului de puncte intermediare $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,

$$\text{Aria}(\Gamma_f) \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) = \sigma_{\Delta_n}(f,\xi_i)$$

Scanned with CamScanner

Definiție. Funcția $f: [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă există un număr real I cu proprietatea că oricare ar fi șirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ale lui $[a,b]$, de natură $\|\Delta_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ și oricare ar fi sistemul de puncte intermediare $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, atunci șirul corespunzător de sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n))$ este convergent și limita sa este numărul real I. Numărul I se numește integrala Riemann a lui f pe $[a,b]$: $I = \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_i^n)$ și se notează astfel: $I = \int_a^b f(x)\cdot dx$

Obs.

1° Orice funcție integrabilă pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $(\exists)\, M > 0$ și $|f(x)| \leq M$, $(\forall)\, x \in [a,b]$

2° Integrala definită a unei funcții f este un număr real (cu semnificația aria de sub G_f pe $[a,b]$) spre deosebire de integrala nedefinită (a dacă (a primitivei) a lui f care este o funcție (o clasă de funcții, care diferă între ele printr-o constantă)

Clase de funcții integrabile Riemann

1° Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ atunci f este integrabilă (R) pe $[a,b]$.

2° Dacă f este monotonă pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.

3° $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă mulțimea punctelor sale de discontinuitate este finită sau cel mult numărabilă. (Criteriul lui Lebesgue)

Teorema Leibniz – Newton

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann și care admite și primitive pe $[a,b]$. Atunci pentru orice primitivă F a lui f are loc relația:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Scanned with CamScanner

Proprietăţi de integrabilitate şi ale integralei

1° Liniaritatea: Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a, b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $h = \alpha \cdot f + \beta g$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

2° Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă (R) pe $[a, b]$ şi $f(x) \geq 0$ pe $[a, b]$, atunci şi $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

3° Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a, b]$ şi $f(x) \geq g(x)$ pe $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$.

4° Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci şi ($\exists$) m, M a.î. $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ şi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$$ (mărginire)

5° Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integr. pe $[a, b]$ şi $c \in (a, b)$ atunci f este integr. pe $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$ (proprietatea de aditivitate faţă de intervalul de integrare)

6° $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ şi $\int_a^b = -\int_b^a$

7° Teorema de medie. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ atunci există cel puţin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încât:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \cdot f(\xi) \Leftrightarrow \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi).$$

8° Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$ (modulul integralei este mai mic decât integrala modulului)

(9) Periodicitatea și integrala.
Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică, de perioadă $T>0$.
Atunci: $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$, $(\forall)\, a\in\mathbb{R}$.

(10) Ereditate. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă pe orice interval $[c,d]\subset[a,b]$. Dacă f este continuă și pozitivă, atunci $\int_c^d f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$.

(11) Teorema de existență a primitivelor unei funcții continue.
Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$. Atunci funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ prin $F(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt$, pt $(\forall)\, x\in[a,b]$, este o primitivă a lui f cu proprietatea că $F(a)=0$.

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

Dacă u și v sunt două funcții derivabile, cu derivatele continue, atunci funcția
$$F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$ este derivabilă pe $[a,b]$
și $F'(x)=f(v(x))\cdot v'(x) - f(u(x))\cdot u'(x)$.

Metode de calcul pentru integrala definită

(1) Formula Leibniz – Newton
Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și admite primitive pe $[a,b]$.
și
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$
Primitiva F se calculează cu metodele prezentate ... anterioare.

Ex. 1° $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{-1}{3}\right| - \ln|-3|\right)$

$= \frac{1}{4}(\ln 1 - \ln 3 - \ln 3) = -\frac{2\ln 3}{4} = -\frac{\ln 3}{2} < 0$

2° $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$

3° $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|\Big|_4^5 = \ln|5+4| - \ln|4+\sqrt{7}| = \ln\frac{9}{4+\sqrt{7}}$

Metoda de integrare prin părți

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile, cu derivatele continue.

Atunci: $\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx$

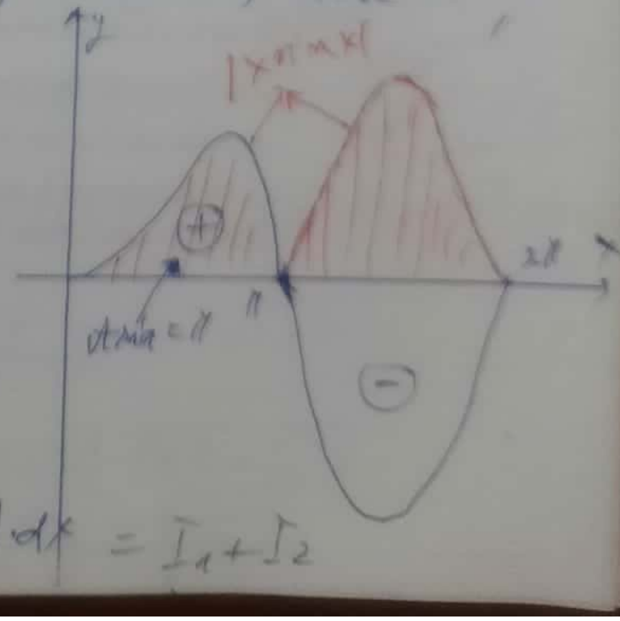
Ex. 1° $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot \sin x\,dx = I$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin x \to g(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x.$

$I = -x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx = -(0-0) + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

2° Să se calculeze aria mulțimii plane cuprinse între graficul funcției $f(x) = x\cdot\sin x$, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=2\pi$.



$\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$

$f(x) = 0 \Rightarrow x\cdot\sin x = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi$

$|f(x)| = \begin{cases} x\cdot\sin x, & x\in[0,\pi] \\ -x\cdot\sin x, & x\in[\pi, 2\pi] \end{cases}$

$\text{Aria } \Gamma_f = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-x\sin x)\,dx = I_1 + I_2$

Scanned with CamScanner

$I_1=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} = -(\pi\cdot(-1)-0)+0=\pi$

$I_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} x\cdot\sin x\,dx = -\left[-x\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} + \sin x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = +(2\pi\cdot 1-\pi\cdot(-1))+0 = 3\pi$

$\Rightarrow I_1+I_2=\pi+3\pi=4\pi$ (u.a)

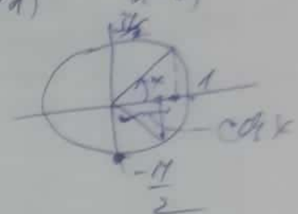
Metoda 1 de schimbare de variabilă

$$\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\cdot dt$$

$u(x)=t \Rightarrow u'(x)\cdot dx = dt$

x	a	b
$t=u(x)$	$u(a)$	$u(b)$

Exemple.



1° $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^4 x\cdot\cos x}_{\geq 0}\,dx$

$u(x)=\sin x = t \Rightarrow u'(x)\cdot dx=\cos x\cdot dx = dt$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$t=\sin x$	-1	1

$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1} t^4\cdot dt = \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} =$

$=\frac{1}{5}(1^5-(-1)^5)=\frac{1}{5}(1+1)=\frac{2}{5}.$

2° $I=\int_0^1 \frac{x+x^3}{x^4+1}\cdot dx = \int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\cdot dx + \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\cdot dx = I_1+I_2$

$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^4+1}\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} =$

$u(x)=x^2=t \Rightarrow u'(x)\cdot dx = 2x\,dx = dt$

x	0	1
$t=x^2$	0	1

$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{8} = I_1}$

$I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}\cdot dx$; $u(x)=x^4+1=t \Rightarrow u'(x)\cdot dx = 4x^3\cdot dx = dt$

x	0	1
$t=x^4+1$	1	2

$I_2=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+1}\cdot dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{dt}{t} =$

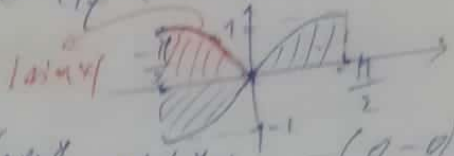
$=\frac{1}{4}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{4}(\ln 2-\ln 1) = \boxed{\frac{1}{4}\cdot\ln 2 = I_2}$

$\Rightarrow I = I_1+I_2 = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$

Scanned with CamScanner

Să reamintim următoarele rezultate:

1° Dacă $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$, integrabilă și impară $\Leftrightarrow f(-a) = -f(a)$ ($\Leftrightarrow G_f$ este simetric față de O), atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

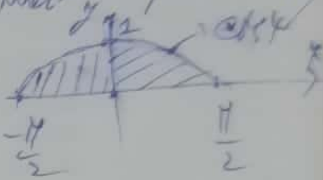


Ex: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot dx = -\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -(0-0) = 0$

Obs. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cdot dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = 2\left(-\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = -2(0-1) = 2$

2° Dacă $f: [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrabilă și pară $\Leftrightarrow$ $f(-a) = f(a)$ ($\Leftrightarrow G_f$ este simetric față de Oy)

atunci $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



Să se calculeze $I = \int_{-\pi}^{\pi} (x^3 + x \cdot \sin^2 x)^5 \cdot dx$

$f(x) = (x^3 + x \cdot \sin^2 x)^5 \to$ funcție impară

$f(-x) = \left((-x)^3 + (-x)\cdot \sin^2(-x)\right)^5 = (-x^3 - x\cdot \sin^2 x)^5 =$

$= (-1)^5 \cdot f(x) = -f(x) \Rightarrow f$ este impară

$\to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$

Metoda a doua de schimbare de variabilă

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot (u^{-1}(t))' \cdot dt$$

$u(x) = t \Rightarrow x = u^{-1}(t) \Rightarrow dx = (u^{-1}(t))' \cdot dt$;

x	a	b
$t = u(x)$	$u(a)$	$u(b)$

f continuă, u bijectivă și derivabilă, la fel și u^{-1}

Idee: Se notează cu $u(x)$ funcția care „deranjează" sub integrală. Se aplică, de regulă, în cazul funcțiilor exponențiale, iraționale, trigonometrice, ...

(1) $I=\int_1^{64}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\cdot dx$; $x=t^6 \Rightarrow dx=6\cdot t^5\cdot dt$
$\sqrt{x}=\sqrt{t^6}=t^3$; $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2$

$\sqrt[6]{x}=t$

x	1	64
t	1	2

$\Rightarrow I=\int_1^2\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\cdot dt=6\int_1^2\frac{t^8}{t^2+1}\cdot dt=6\int_1^2\frac{t^8-1+1}{t^2+1}\cdot dt=$

$=6\cdot\int_1^2\frac{t^8-1}{t^2+1}\cdot dt+6\int_1^2\frac{1}{t^2+1}\,dt=6\int_1^2(t^2-1)(t^4+1)\,dt+6\cdot \operatorname{arctg} t\Big|_1^2$

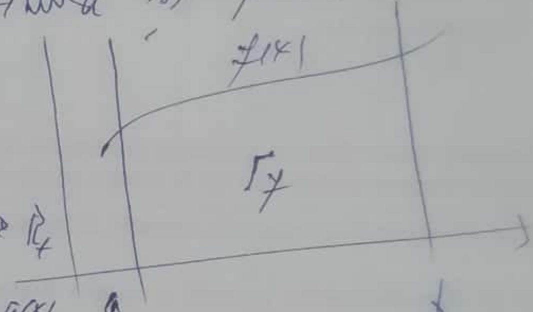
$t^8-1=(t^4-1)(t^4+1)=(t^2+1)(t^2-1)(t^4+1)$

Aplicații ale integralei Riemann

1° Calculul ariilor suprafețelor plane

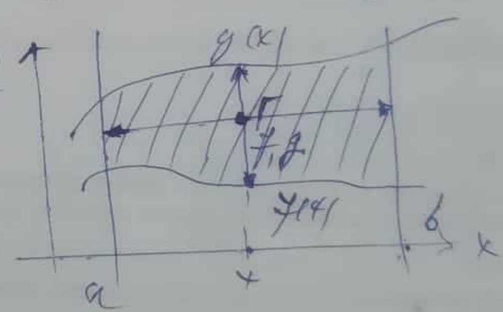
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă și pozitivă

Aria$(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\cdot dx$



2° Aria dintre două grafice; $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ continue a.î. $0\le f(x)\le g(x)$

$\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b;\ f(x)\le y\le g(x)\}$

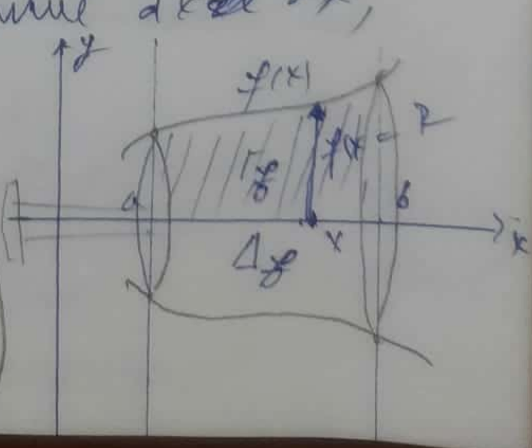


Aria$(\Gamma_{f,g})=\int_a^b(g(x)-f(x))\cdot dx$

3° Volumul corpului de rotație obținut prin rotirea subgraficului Γ_f în jurul axei Ox,

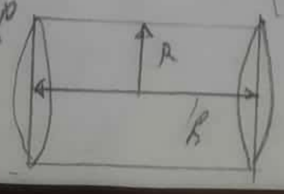
$f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$, f continuă

$Vol(\Delta_f)=\pi\cdot\int_a^b f^2(x)\cdot dx$



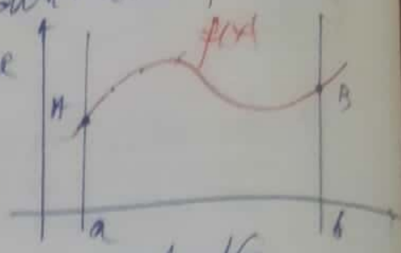
Vol(cil) = aria(bazei) · h

Vol = $\pi R^2\cdot h$



4° Lungimea graficului unei funcții derivabile, cu derivata continuă. ⇒ G_f are lungime finită și este dată de integrala:

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} \cdot dx$$

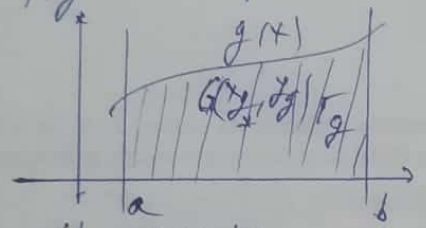


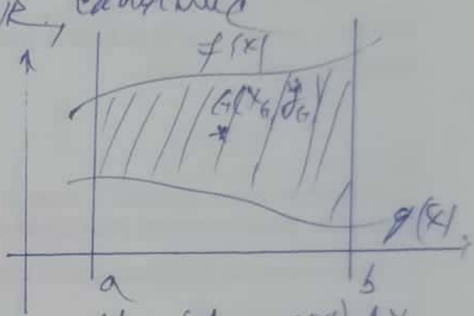
5° Aria laterală a unei suprafețe de rotație obținută rotirea în jurul axei Ox a graficului unei funcții derivabile, cu derivata continuă.

Se demn. că $S(lat) = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+f'^2(x)} \cdot dx$

$S_{lat} = 2\pi R \cdot G$

6° Coordonatele centrului de greutate ale unei umpluturi plane de forma Γ_g sau $\Gamma_{f,g}$; $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue





$$x_G = \frac{\int_a^b x \cdot g(x)\,dx}{Aria(\Gamma_g)}$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b g^2(x) \cdot dx}{Aria(\Gamma_g)}$$

$$x_G = \frac{\int_a^b x(f(x)-g(x))\,dx}{\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))\,dx}{\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx}$$

Aplicații

1° Să se calculeze
- aria discului de rază r
- lungimea cercului de rază r
- aria sferei de rază r
- volumul sferei de rază r
- coordonatele centrului de greutate ale suprafeței omogene a semidiscului de rază r cu centrul în origine, situat în semiplanul superior al axelor de coordonate.

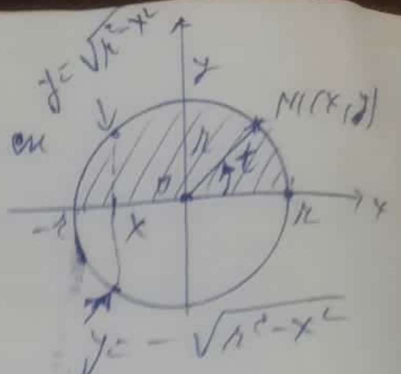
Scanned with CamScanner

(1°) Aria discului de rază r

Ecuația cercului

$d(O, M) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r$

$x^2+y^2=r^2$ → ec. cercului de rază r, cu centrul în origine.



$y^2 = r^2-x^2$; $y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$

$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$; $x \in [-r, r]$

$$A = \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 2\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$x = r\cdot\cos t \Rightarrow dx = -r\cdot\sin t$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$r^2-x^2 = r^2 - r^2\cdot\cos^2 t = r^2(1-\cos^2 t) = r^2\cdot\sin^2 t$

$\cos t = \frac{x}{r}$; $t = \arccos\frac{x}{r}$

x	0	r
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$A = 2\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\cdot\sin t\cdot(-r\cdot\sin t)\,dt = -2r^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 2r^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = 2r^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= r^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt = r^2\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

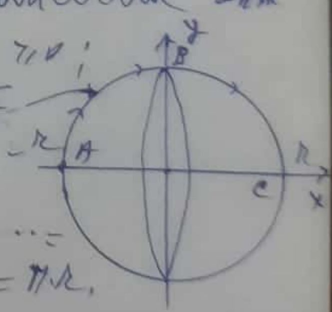
$$= \frac{\pi}{2}\cdot r^2 = \frac{\pi r^2}{2} \rightarrow \boxed{\text{Aria discului} = \pi r^2}$$

(2°) Lungimea cercului de rază r

$(\mathcal{C}): x^2+y^2=r^2$. $y = +\sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r, r]$ → semicercul din semiplanul superior; $y \geq 0$;

$f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$



$$l(\overset{\frown}{ABC}) = \int_{-r}^{r}\sqrt{1+f'^2(x)}\cdot dx = \int_{-r}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\cdot dx = \dots = \pi r.$$

$\Rightarrow l(\mathcal{C}) = 2\pi r.$

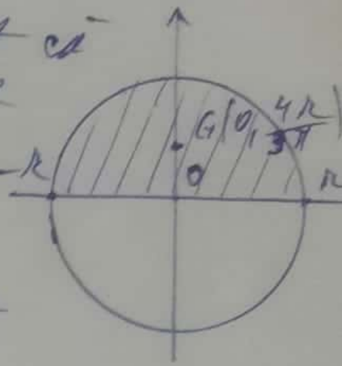
(3°) Aria sferei de rază r. Suprafața sferică se obține prin rotirea, în jurul axei Ox, a semicercului $\overset{\frown}{ABC}$

$$A(S) = 2\pi\cdot\int_{-r}^{r} f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\cdot dx,$$ unde $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, $x\in[-r, r]$

(4°) Volumul sferei de rază r

$$Vol(S) = \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\cdot dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx = \dots$$

5) Coordonatele centrului de greutate ale suprafeței omogene a semidiscului de rază r, situat în semiplanul superior al axelor de coordonate.



Din considerente de simetrie este evident că centrul de greutate al acestui semidisc se află pe axa Oy, deci $x_G = 0$.

Pentru y_G, avem:

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx}{\text{aria semidiscului}}, \quad \text{unde } f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx}{\pi r^2} = \dots = \frac{4r}{3\pi}$$

Finalizare la fel ca exercițiile propuse