2.2. Ecuații diferențiale liniare de ordin n≥2, cu coeficienți constanți (continuare)

Pentru ecuațiile diferențiale liniare de ordinul n≥2, cu coeficienți constanți:

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = b(x), \qquad (1)$$

soluția generală a ecuației neomogene este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene și soluția generală a ecuației omogene.

Deci după determinarea soluției generale a ecuației diferențiale omogene atașată ecuației neomogene, trebuie determinată o soluție particulară a ecuației neomogene.

În continuare se prezintă două metode pentru determinarea unei astfel de soluții particulare.

i) Metoda variației constantelor.

Conform metodei variației constantelor, se consideră funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, care formează un sistem fundamental de soluții pe $[a, b]$ ale ecuației omogene și soluția generală a ecuației omogene care are forma:

$$\bar{y} = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n.$$

Metoda constă în efectuarea următoarelor etape:

a. Se înlocuiesc constantele sau scalarii reali $C_1, C_2, \ldots, C_n$ din soluția generală a ecuației omogene cu funcțiile derivabile $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ și se pune condiția ca derivatele lor $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ să fie soluțiile sistemului de n ecuații liniare cu n necunoscute și neomogen:

$$\begin{cases} y_1\, C_1'(x) + y_2\, C_2'(x) + \cdots + y_n\, C_n'(x) = 0 \\ y_1'\, C_1'(x) + y_2'\, C_2'(x) + \cdots + y_n'\, C_n'(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n-2)}\, C_1'(x) + y_2^{(n-2)}\, C_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-2)}\, C_n'(x) = 0 \\ y_1^{(n-1)}\, C_1'(x) + y_2^{(n-1)}\, C_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}\, C_n'(x) = b(x) \end{cases}$$

al cărui determinant este $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, care este nenul, deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formează un sistem fundamental de soluții. Rezultă că sistemul are soluție unică;

b. Se scrie soluția generală y a ecuației neomogene sub forma:

$$y(x) = y_1 \cdot \int C_1'(x)dx + y_2 \cdot \int C_2'(x)dx + \cdots + y_n \cdot \int C_n'(x)dx. \qquad (2)$$

Deoarece primitivele integralelor din (2) sunt de forma:

$\int C_1'(x)dx = g_1(x) + k_1$, $\int C_2'(x)dx = g_2(x) + k_2$, ..., $\int C_n'(x)dx = g_n(x) + k_n$,

unde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sunt constante reale arbitrare, soluția generală (2) devine:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i\,(x) \cdot g_i(x), \qquad (3)$$

unde:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot y_i(x) = \bar{y}(x),$$

este soluția generală a ecuației omogene și se poate demonstra că

$$\sum_{i=1}^{n} y_i\,(x) \cdot g_i(x) = y_p(x)$$

este o soluție particulară a ecuației neomogene.

În concluzie, conform metodei variației constantelor soluția generală a ecuației neomogene (1) se mai scrie:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

în concordanță cu Teorema 4 din cursul anterior.

ii) Determinarea unei soluției particulare în funcție de forma lui *b* din ecuația (1).

Sunt posibile următoarele cazuri.

c1) Dacă b este un polinom de gradul $m < n$ și $a_n \neq 0$, atunci y_p este un polinom de grad cel mult m, ai cărui coeficienți se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1);

c2) Dacă b este un polinom de gradul $m < n$ și

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{n-k} = 0, k \in \mathbb{N}, \text{ iar } a_{n-k-1} \neq 0,$$

atunci

$$y_p(x) = x^{k+1} \cdot P_m(x),$$

iar coeficienții polinomului $P_m(x)$ de gradul m se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1);

c3) Dacă

$$b(x) = e^{\propto \cdot x} \cdot P_m(x), m < n,$$

iar α nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = e^{\propto \cdot x} \cdot R_m(x),$$

unde $R_m(x)$ este polinom de gradul m, iar coeficienții lui se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1);

c4) Dacă

$$b(x) = e^{\propto \cdot x} \cdot P_m(x), m < n,$$

iar α este rădăcină a ecuației caracteristice de ordin de multiplicitate $k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$y_p(x) = x^k \cdot e^{\propto \cdot x} \cdot R_m(x),$$

unde $R_m(x)$ este polinom de gradul m, iar coeficienții lui se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1);

c5) Dacă

$$b(x) = P_{m_1}(x) \cdot \cos \alpha x + R_{m_2}(x) \cdot \sin \alpha x,$$

unde $P_{m_1}(x)$ şi $R_{m_2}(x)$ sunt polinoame de gradul *m₁*, respectiv *m₂*, iar $r = i\alpha$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = P_m^0(x) \cdot cos\ \alpha x + R_m^0(x) \cdot sin\ \alpha x,$$

unde $P_m^0(x)$ şi $R_m^0(x)$ sunt polinoame de gradul $m = max\ \{m_1,\ m_2\}$, iar coeficienții lor se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1).

Dacă, în plus, $r = i\ \alpha$ și, respectiv, $\bar{r} = -i\ \alpha$ sunt rădăcini multiple de ordinul k ale ecuației caracteristice , atunci:

$$y_p(x) = x^k\ [\ P_m^0(x) \cdot cos\ \alpha x + R_m^0(x) \cdot sin\ \alpha x].$$

C6) Dacă

$$b(x) = P_{m_1}(x) \cdot e^{\propto x} \cdot \cos \beta x + R_{m_2}(x) \cdot e^{\propto x} \cdot \sin \beta x,$$

unde $P_{m_1}(x)$ şi $R_{m_2}(x)$ sunt polinoame de gradul m_1, respectiv m_2, iar $r = \alpha + i\ \beta$ și $\bar{r} = \alpha -\ i\ \beta$ nu sunt rădăcini ale ecuației caracteristice, atunci:

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\ [\ P_m^0(x) \cdot cos\ \beta x + R_m^0(x) \cdot sin\ \beta x],$$

unde $P_m^0(x)$ şi $R_m^0(x)$ sunt polinoame de gradul $m = max\ \{m_1,\ m_2\}$, iar coeficienții lor se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1).

Dacă, în plus, $r = \alpha + i\ \beta$ și, respectiv, $\bar{r} = \alpha -\ i\ \beta$ sunt rădăcini multiple de ordinul k ale ecuației caracteristice , atunci:

$$y_p(x) = x^k \cdot e^{\alpha x}\ [P_m^0(x) \cdot cos\ \beta x + R_m^0(x) \cdot sin\ \beta x],$$

unde $P_m^0(x)$ şi $R_m^0(x)$ sunt polinoame de gradul $m = max\ \{m_1,\ m_2\}$, iar coeficienții lor se determină din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (1).

Observație.

În ambele situații prezentate la C6) se recomandă inițial schimbarea de funcție:

$$y(x) = z(x) \cdot e^{\alpha x}.$$

Ecuația diferențială omogenă verificată de funcția *z(x)* va fi de tipul de la C5), pentru care calculele de determinare a soluției particulare $z_p(x)$ sunt mai puțin elaborate decât în cazul C6) pentru $y_p(x)$.

Din cele de mai sus, rezultă că **algoritmul pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul *n*≥2, cu coeficienți constanți** (1), cuprinde următorii pași:

Pasul 1. Se identifică *n* și funcția *b*.

Dacă *b* este funcția nulă, adică *b = 0*, atunci ecuația diferențială de ordinul *n*, cu coeficienți constanți este ecuație omogenă.

Dacă b nu este funcția nulă, atunci ecuația diferențială de ordinul n, cu coeficienți constanți este ecuație neomogenă. În acest caz se atașează ecuația omogenă, înlocuind în (1) pe b cu 0.

Pasul 2. Se rezolvă ecuația caracteristică, asociată ecuației omogene:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0,$$

obținută considerând funcția y și cele n derivate ale sale, de forma:

$$y = e^{r \cdot x}, y' = r\, e^{r \cdot x}, y'' = r^2\, e^{r \cdot x}, \ldots, y^{(n)} = r^n\, e^{r \cdot x}, r \in \mathbb{C}.$$

Ecuația caracteristică fiind de gradul n în $\mathbb{C}$, are n rădăcini, care vor genera cele n soluții ale ecuației omogene ce formează un sistem fundamental de soluții.

Pasul 3. Se determină soluția generală a ecuației omogene, ca fiind, combinația liniară a celor n soluții generate de cele n rădăcini ale ecuației caracteristice, conform cursului anterior.

În final, soluția generală a ecuației omogene are forma:

$$\bar{y} = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + \cdots + C_n\, y_n, \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Pasul 4. Dacă b este funcția nulă, adică $b=0$, atunci forma soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul n, cu coeficienți constanți, se obține înlocuind $\bar{y}$ (rezultatul de la pasul 2) în egalitatea $y = \bar{y}$.

Dacă b nu este funcția nulă, atunci forma soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul n, cu coeficienți constanți, este:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este soluția generală de la pasul 2 (a ecuației omogene atașate) și y_p este o soluție particulară a ecuației neomogene, ce urmează a fi determinată.

Pasul 5. Determinarea soluției particulare y_p se face aplicând una dintre cele 2 metode prezentate anterior.

Pasul 6. Prin înlocuirea lui $\bar{y}$ (soluția generală de la pasul 3) și a lui y_p (determinat la pasul 5), în egalitatea:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

se obține forma soluției generale a ecuației diferențiale (1).

Exemplu 1. Să se integreze ecuația:

$$y''' - 2\,y'' - y' + 2\,y = x + 1. \qquad (4)$$

Rezolvare.

Pasul 1. Ecuația din enunț este o ecuație diferențială de ordinul 3, căci apare derivata de ordinul 3 a funcției *y*, liniară cu coeficienți constanți și neomogenă, funcția din dreapta egalului fiind nenulă. În acest caz, se atașează ecuația omogenă, înlocuind în (4) pe b cu 0.

Pasul 2. Considerând funcția *y* și cele 3 derivate ale sale, de forma:

$$y(x)=e^{r\cdot x},\ y'(x) = r\, e^{r\cdot x},\ y''(x) = r^2 e^{r\cdot x}, y'''(x) = r^3 e^{r\cdot x}, r \in \mathbb{C},$$

în ecuația omogenă atașată ecuației (4),

$$y''' - 2\,y'' - y' + 2\,y = 0,$$

se obține ecuația caracteristică:

$$r^3 - 2\,r^2 - r + 2 = 0,$$

care se mai poate scrie:

$$(r^2 - 1)(r - 2) = 0,$$

de unde rezultă rădăcinile distincte: $r_1 = -1$, $r_2 = 1$ şi $r_3 = 2$.

Pasul 3. Folosind rezultatele de la pasul 2 și conform cursului anterior, un sistem fundamental de soluții este:

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = e^x, y_3(x) = e^{2x}.$$

Se determină soluția generală a ecuației omogene, ca fiind, combinația liniară a celor 3 soluții și trei constante reale:

$$\bar{y} = k_1\, e^{-x} + k_2\, e^x + k_3\, e^2.$$

Pasul 4. Deoarece $b(x) = x + 1$ (b nu este funcția nulă), atunci soluția generală este de forma:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este soluția generală obținută la pasul 3 și y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma termenului din dreapta egalului.

Pasul 5. Urmează să se determine o soluție particulară y_p a ecuației neomogene (4). Deoarece, în acest caz, $b(x) = x + 1$ este un polinom de gradul întâi, atunci și y_p este un polinom de gradul întâi (conform metodei ii) de mai sus), având forma:

$$y_p(x) = a\,x + b, a \neq 0,$$

cei doi coeficienți determinându-se din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (4).

Cum $y_p'(x) = a,\ y_p''(x) = y_p'''(x) = 0$, după înlocuirea în ecuația neomogenă rezultă:

$$-a + 2\,a\,x + 2\,b = x + 1.$$

Se va obține sistemul:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - a = 1 \end{cases},$$

cu soluția $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{3}{4}$. Rezultă că soluția particulară a ecuației neomogene este:

$$y_p = \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4}.$$

Pasul 6. Prin înlocuirea lui $\bar{y}$ (soluția generală de la pasul 3) și a lui y_p (determinat la pasul 5), în egalitatea:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

se obține forma soluției generale a ecuației diferențiale (4).

Prin urmare, soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = k_1\,e^{-x} + k_2\,e^{x} + k_3\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4},\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplu 2. Să se integreze ecuația:

$$y''' - y'' + y' - y = 5\cos 2\,x. \qquad (5)$$

Rezolvare.

Pasul 1. Ecuația din enunț este o ecuație diferențială de ordinul 3, căci apare derivata de ordinul 3 a funcției y, liniară cu coeficienți constanți și neomogenă, funcția din dreapta egalului fiind nenulă. În acest caz, se atașează ecuația omogenă, înlocuind în (5) pe b cu 0.

Pasul 2. Considerând funcția *y* și cele 3 derivate ale sale, de forma:

$$y(x)=e^{r\cdot x},\ y'(x) = re^{r\cdot x},\ y''(x) = r^2e^{r\cdot x}, y'''(x) = r^3e^{r\cdot x}, r \in \mathbb{C},$$

în ecuația omogenă atașată ecuației (5),

$$y''' - y'' + y' - y = 0,$$

se obține ecuația caracteristică:

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0,$$

care se mai poate scrie:

$$(r^2 + 1)(r - 1) = 0,$$

de unde rezultă rădăcinile distincte: $r_1 = i, r_2 = -i$ și $r_3 = 1$.

Pasul 3. Deoarece rădăcinile r_1 şi r_2 sunt complexe şi conjugate, contribuţia lor la soluția generală a ecuaţiei omogene constă într-o combinaţie liniară a două soluții cu coeficienți constanți, care se determină astfel:

$$z_1 = e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ şi } z_2 = e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

de unde se obțin soluțiile reale:

$$y_1 = \frac{z_1+z_2}{2} = \cos x \text{ şi } y_2 = \frac{z_1-z_2}{2i} = \sin x.$$

Deci contribuția rădăcinilor r_1 şi r_2 la soluţia generală a ecuaţiei omogene este:

$$k_1 \cos x + k_2 \sin x.$$

Pe de altă parte, contribuția rădăcini r_3 este de forma:

$$k_3\, e^x.$$

Atunci soluția generală a ecuației omogene este:

$$\bar{y} = k_1 \cos x + k_2 \sin x + k_3\, e^x,$$

unde constantele sunt reale.

Pasul 4. Deoarece , $b(x) = 5\, cos\, 2x$ (b nu este funcția nulă), atunci soluția generală este de forma:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este soluția generală obținută la pasul 3 și y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma termenului din dreapta egalului.

Pasul 5. Urmează să se determine o soluție particulară y_p a ecuației neomogene (5). Deoarece, în acest caz, $b(x) = 5\, cos\, 2x$, atunci soluția particulară y_p are forma asemănătoare cu $b(x)$ (conform metodei ii) de mai sus):

$$y_p(x) = a \cdot cos\, 2x + b \cdot sin\, 2x,$$

coeficienții determinându-se din condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă.

Atunci, cum

$$y_p'(x) = -2a\, sin\, 2x + 2b\, cos\, 2x,\;\; y_p''(x) = -4a\, cos\, 2x - 4b\, sin\, 2x,$$

$$y_p'''(x) = 8a\, sin\, 2x - 8b\, cos\, 2x$$

după înlocuire în ecuația neomogenă se obține:

$$(6a + 3b)\, sin\, 2x + (3a - 6b)\, cos\, 2x = 5\, cos\, 2x.$$

După identificare se obține sistemul:

$$\begin{cases} 6a + 3b = 0 \\ 3a - 6b = 5 \end{cases},$$

a cărei soluție este:

$$a = \frac{1}{3} \text{ și } b = -\frac{2}{3}.$$

Deci soluția particulară a ecuației neomogene este:

$$y_p = \frac{1}{3} \cos 2x - \frac{2}{3} \sin 2x.$$

Pasul 6. Prin înlocuirea lui $\bar{y}$ (soluția generală de la pasul 3) și a lui y_p (determinat la pasul 5), în egalitatea:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

se obține forma soluției generale a ecuației diferențiale (5).

Prin urmare, soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = k_1 \cos x + k_2 \sin x + k_3 e^x + \frac{1}{3} \cos 2x - \frac{2}{3} \sin 2x, k_1, k_2, k_3 \epsilon \mathbb{R}.$$

Exemplu. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}. \qquad (6)$$

Rezolvare.

Pasul 1. Ecuația din enunț este o ecuație diferențială de ordinul 2, căci apare derivata de ordinul 2 a funcției *y*, liniară cu coeficienți constanți și neomogenă, funcția din dreapta egalului fiind nenulă. În acest caz, se atașează ecuația omogenă, înlocuind în (6) pe *b* cu 0.

Pasul 2. Considerând funcția *y* și cele 2 derivate ale sale, de forma:

$$y(x) = e^{r \cdot x}, y'(x) = re^{r \cdot x}, y''(x) = r^2 e^{r \cdot x}, r \in \mathbb{C},$$

în ecuația omogenă atașată ecuației (6),

$$y'' + y = 0,$$

se obține ecuația caracteristică:

$$r^2 + 1 = 0,$$

care are rădăcinile distincte: $r_1 = i, r_2 = -i$.

Pasul 3. Deoarece rădăcinile r_1 şi r_2 sunt complexe şi conjugate, contribuţia lor la soluţia generală a ecuaţiei omogene constă într-o combinaţie liniară a două soluții cu doi coeficienți constanți, care se determină astfel:

$$z_1 = e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ şi } z_2 = e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

de unde se obțin soluțiile reale:

$$y_1 = \frac{z_1+z_2}{2} = \cos x \text{ și } y_2 = \frac{z_1-z_2}{2i} = \sin x.$$

Se determină soluția generală a ecuației omogene, ca fiind, combinația liniară a celor două soluții și două constante reale:

$$\bar{y} = k_1 \cos x + k_2 \sin x.$$

Pasul 4. Deoarece , $b(x) = \frac{1}{sin\, x}$ (b nu este funcția nulă), soluția generală este de forma:

$$y = \bar{y} + y_p,$$

unde $\bar{y}$ este soluția generală obținută la pasul 3 și y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma termenului din dreapta egalului.

Pasul 5. Urmează să se determine o soluție particulară y_p a ecuației neomogene (6) folosind metoda variației constantelor i). Conform metodei, aplicate în acest caz, soluția generală a ecuației neomogene este de forma:

$$y(x) = y_1 \cdot \int k_1'(x)dx + y_2 \cdot \int k_2'(x)dx,$$

unde $k_1'(x)$ şi $k_2'(x)$ sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} y_1\, k_1'(x) + y_2\, k_2'(x) = 0 \\ y_1'\, k_1'(x) + y_2'\, k_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases},$$

în care $y_1' = -\sin x$ şi $y_2' = \cos x$, de unde prin înlocuire în sistem:

$$\begin{cases} \cos x \cdot k_1'(x) + \sin x \cdot k_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cdot k_1'(x) + \cos x \cdot k_2'(x) = \frac{1}{\sin x} \end{cases}.$$

După ce se aduce la același numitor a doua ecuație, se amplifică prima ecuație a sistemului cu $\cos x \neq 0$ și din rezultat se scade a doua ecuație se obține:

$$k_1'(x) = -1 \text{ și } k_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

de unde rezultă:

$$\int k_1'(x)dx = -\int dx = -x + C_1 \text{ și } \int k_2'(x)dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C_2.$$

Pasul 6. Rezultatele se înlocuiesc în soluția generală a ecuației neomogene de la pasul 5, obținându-se:

$$y(x) = y_1 \cdot \int k_1'(x)dx + y_2 \cdot \int k_2'(x)dx =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \cdot \ln|\sin x|,$$

din care se deduce soluția particulară a ecuației neomogene:

$$y_p(x) = \sin x \cdot \ln|\sin x| - x \cos x.$$

Temă. Să se integreze următoarele ecuații:

1. $y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^x;$
2. $y'' - y = x\, e^x + x + x^3\, e^{-x};$
3. $y^{(4)} + 2\, y'' + y = sin\, x;$
4. $y^{(3)} - 3\, y' - 2\, y = 10\,(\,sin\, x + x\, cos\, x) - 8\, x^3.$