 01.04.2022

Aplicații la valori și vectori proprii ai unei aplicații liniare (Anul 1 zi)

Problema 1 Fie operatorul $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin:
$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1+3x_2-x_3,\ -3x_1+5x_2+x_3,\ -3x_1+3x_2+x_3)$$
unde $(x_1, x_2, x_3) \in V = \mathbb{R}^3$.

a) Să se determine matricea A, asociată operatorului f în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

b) Să se determine polinomul caracteristic al matricei A; $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

c) Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai operatorului f.

d) Să se arate că matricea A a operatorului f este diagonalizabilă și să se determine baza diagonalizatoare și forma diagonală.

e) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1+3x_2-x_3,\ -3x_1+5x_2+x_3,\ -3x_1+3x_2+x_3)$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad f(v) = A \cdot v.$$

b) Polinomul caracteristic al matricei A:
$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & 1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1 = C_1 + C_2}}$$
$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 2-\lambda & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{L_2 = L_2 - L_1}}$$
$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 6\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$$

c) $\varphi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$; $\Delta = 9 + 16 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm 5}{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = 4$

valorile proprii sunt reale şi distincte, deci vectorii proprii sunt liniar independenţi.

C.2 – vectorii proprii Fie $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ = vectorul propriu corespunzător lui $\lambda_1 = 2$

coord. sale sunt soluţiile sistemului omogen: $(A - \lambda_1 \cdot I_3)\cdot V_1 = O_3$; $\lambda_1 = 2$

Aplicăm metoda Gauss:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ |:-6 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \end{array}$$

$\text{rang}(A - 2 I_3) = 2$

Nec. pr: x_1, x_3

Nec sec: $x_2 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -3x_1 - x_3 = -3\alpha \\ x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 = -3\alpha \ |:-3 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \alpha \qquad \boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Fie $\lambda_2 = -1 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; ~~det~~ $(A - \lambda_2 \cdot I_3)\cdot V_2 = O_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 5+1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1+1 & 0 \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & +3 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ |:-3 \\ |:3 \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} |:-9 \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$ rang A = rang $\bar{A} = 2$

Nec pr: x_1, x_2 ; Nec sec: $x_3 = \alpha$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = +\frac{1}{3}\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\alpha}{3} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{\alpha}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \text{ pt } \lambda = -1$$

$\lambda = 4$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1-4 & 3 & -1 \\ -3 & 5-4 & 1 \\ -3 & 3 & 1-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Big| :(-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:4 \\ |:2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Big| :-5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

rang A = rg $\bar{A} = 2$

N. pr: x_1, x_2

N sec: $x_3 = \alpha$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ; \boxed{V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

d) Val. proprii ale matricei A sunt reale și distincte ⇒ vectorii proprii sunt liniar indep. ⇒ ei formează o bază în $\mathbb{R}^3$. În această bază matricea asociată aplicației liniare f are forma diagonală. Matricea de trecere de la baza canonică la baza formată din vectorii proprii are pe coloanele sale cei trei vectori proprii: $T = (V_1, V_2, V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. În această bază, $B' = \{V_1, V_2, V_3\}$, matricea asociată aplicației liniare f are forma diagonală:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculăm T^{-1} cu algoritmul lui Gauss.

$$(T \mid I_3) \sim \dots \sim (I_3, T^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} /:10 \\ /:10 \\ /:-5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) = (I_3 \mid T^{-1})$$

$$\Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$A^n = T \cdot B^n \cdot T^{-1} =$ Exercițiu

Temă Ex: 4.2.2, pag 72 ; 4.2.4, pag 76 → valori proprii simple.

Ex: 4.2.5., pag 77 ; 4.2.6, pag 79 → valoare proprie dublă.