Curs. V. Gârlan | 00000110
16/03/2022

Curs 5

Sub-spații vectoriale - Operații cu sub-spații vectoriale

- Sub-spații vectoriale
- Dimensiunea sub-spațiului generat de un sistem de vectori
- Operații cu sub-spații vectoriale: SUME | INTERSECȚII

Fie V un spațiu vectorial finit generat și $\mathcal{B}$ o bază a sa $\mathcal{B}=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Fie, de asemenea, un sistem oarecare de vectori $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ despre care nu știm dacă sunt, sau nu, LI și nici dacă ~~...~~ reprezintă un sistem de generatori pentru spațiul V.

Evident, fiecare dintre acești vectori, se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor bazei

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{21} \cdot u_2 + \dots + \alpha_{n1} \cdot u_n \\ \vdots \\ v_m = \alpha_{1m} u_1 + \alpha_{2m} u_2 + \dots + \alpha_{nm} \cdot u_n \end{cases}$$

Fie matricea A care are pe coloanele sale coordonatele acestor vectori în raport cu baza $\mathcal{B}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & \; v_2 & \quad & \; v_m \end{matrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

Mulțimea tuturor combinațiilor liniare generate de acești vectori formează un sub-spațiu vectorial în V care se numește sub-spațiul vectorial generat de acești m vectori. Se notează

$$S = S_p[v_1, v_2, \dots, v_m]$$

Între acest sub-spațiu și matricea A există următoarea legătură:

TEOREMĂ: $\dim S_p[v_1, \dots, v_m] = \text{rang}(A)$

Criteriu: Dacă rangul matricei coeficienților unui sistem de vectori este egal cu numărul vectorilor, atunci vectorii sunt LI.

Probleme Specifice:

① Determinarea dimensiunii subspațiului generat de un sistem de vectori

② Determinarea relației de dependență dintre un sistem de vectori LD.

Operații cu S.S. vectoriale

① Suma Sub-spațiilor

Fie V_1 și V_2 două sub-spații ale spațiului vectorial V peste un corp comutativ K.

Se numește suma acelor 2 sub-spații sub-mulțimea

$$V_1 + V_2 = \{u \in V \mid u = u_1 + u_2,\ u_1 \in V_1;\ u_2 \in V_2\}$$

Această submulțime $V_1 + V_2 \subset V$ și are proprietățile:

a) Este sub-spațiu al lui V

b) Este cel mai mic sub-spațiu care conține și pe V_1 și pe V_2, în sensul că orice sub-spațiu care conține pe V_1 și V_2, conține și pe $V_1 + V_2$

② Intersecția sub-spațiilor

Prin definiție, $V_1 \cap V_2 = \{x \in V \mid x \in V_1 \wedge x \in V_2\}$

$V_1 \cap V_2$ are proprietățile:

a) Este sub-spațiu al lui V

b) Este cel mai mare sub-spațiu conținut atât în V_1 cât și în V_2 $\Leftrightarrow$ orice sub-spațiu conținut și în V_1 și V_2 este conținut în $V_1 \cap V_2$.

TEOREMA DIMENSIUNII: Pentru orice pereche de sub-spații V_1 și V_2 ale spațiului vectorial V, finit generat, are loc relația:

$$\boxed{\text{Dim}(V_1+V_2) = \text{Dim}(V_1) + \text{Dim}(V_2) - \text{Dim}(V_1\cap V_2)}$$

Probleme:

① Fie vectorii următorii, din $\mathbb{R}^3$:

$u_1=(2,1,0)$ $u_2=(1,2,3)$ $u_3=(-5,-2,1)$ și

$v_1=(1,1,2)$ $v_2=(-1,3,0)$ $v_3=(2,0,3)$

Fie $L_1 = Sp[u_1,u_2,u_3]$ și $L_2 = Sp[v_1,v_2,v_3]$.

Se cere:

a) Dimensiunea L_1, Dimensiunea L_2, și câte o bază fiecare

b) În caz că vectorii $(u_i)_{i=\overline{1,3}}$ și $(v_i)_{i=\overline{1,3}}$ nu sunt LI, să se determine relația de dependență dintre ei

c) Utilizând teorema dimensiunii {Teorema lui Grassmann} să se determine: - $\dim(L_1+L_2)$ - $\dim(L_1\cap L_2)$ și câte o bază pentru fiecare

---

1.a) Dimensiunea L_1 = rang(u_1,u_2,u_3) = rang $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2$

Dimensiunea L_2 = rang(v_1,v_2,v_3) = rang $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 2$

$B(L_1)=\{u_1,u_2\}$ $B(L_2)=\{v_1,v_2\}$

1.b) Din calculul anterior rezultă că $\{u_1,u_2,u_3\}$ sunt LD

Pentru a determina relația de dependență dintre ei, vom considera o combinație liniară nulă a lor

1 - $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = (0,0,0)$ sistem omogen, ADMITE SOLUȚII NE BANALE

$\hookrightarrow$ $\alpha_1 = \frac{8}{3}\alpha_3$ $\alpha_2 = -\frac{\alpha_3}{3}$ $\rightarrow$ $8u_1 - u_2 + 3u_3 = (0,0,0)$

2 - $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0,0,0)$

$\hookrightarrow$ $\alpha_1 = \frac{3}{2}\alpha_3$ $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_3$ $\rightarrow$ $3v_1 - v_2 - 2v_3 = (0,0,0)$

1.c) ~~Baze~~: Fie acum sub-spațiul L_1+L_2, conform definiției sumei a 2 sub-spații, rezultă că L_1+L_2 este generat de toți vectorii care se obțin prin reunirea vectorilor din cele 2 baze L_1, L_2

Fie $B = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ $u_i, v_i \in \mathbb{R}^3$ $i=\overline{1,2}$

Rezultă că, în primul rând, că NU SUNT LI
{nr. vectorilor > dim spațiului $\mathbb{R}^3$}

Dimensiunea sub-spațiului L_1+L_2 este egală cu rangul matricei $A = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -42 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{rang} = 3$$

Teorema Grassmann $\quad B(L_1+L_2) = \{u_1, u_2, v_1\}$

$$\text{Dim}(L_1+L_2) = \text{Dim}(L_1) + \text{Dim}(L_2) - \text{Dim}(L_1 \cap L_2)$$

$$3 \qquad 2 \qquad 2 \qquad 1$$

O bază pentru L_1 și L_2 va fi formată dintr-un singur vector, și anume v_2

1 Temă: Fie familiile de vectori din $\mathbb{R}^4$:

$B_1 = \{w_1, w_2, w_3\}$ $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$

$B_1 \{ w_1 = (2, 1, 0, 1)$ $w_2 = (-2, -1, -1, -1)$ $w_3 = (3, 0, 2, 3)$

$B_2 \{ u_1 = (1, 1, 2, -1)$ $u_2 = (0, -1, -1, 2)$ $u_3 = (-1, 2, 1, -5)$

Fie $W = Sp[w_1, w_2, w_3]$; $U = Sp[u_1, u_2, u_3]$

a) Dim W, DIM U și câte o bază fiecare

b) Dacă vectorii din B_1 și B_2 sunt LD, să se determine relația de dependență dintre ei

c) Să se calculeze dimensiunea lui $(W+U)$ și o bază pentru $(W+U)$

d) Dim $(W \cap U)$ și o bază pentru $(W \cap U)$

2 Temă: Enunț similar pentru $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ unde:

$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (2,3,11,5)$ $u_2 = (1,1,5,2)$ $u_3 = (0,1,1,1)$

$\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (2,1,3,2)$ $v_2 = (1,1,3,4)$ $v_3 = (5,2,6,2)$

a - b - c - d Temă 1.

Tema 1.

1.a) Dim W = rang (W)

$$W = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 0 & -14 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{rang} = 3 \to \text{Dim } W = 3$$

$\mathcal{B}(W) = \{w_1, w_2, w_3\}$ LI

Dim U = rang (U)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $= 2 \to$ Dim $U = 2$ $\mathcal{B}(U) = \{u_1, u_2\}$ LD

1.b) Din 1.a rezultă că: $\{u_1, u_2, u_3\}$ sunt LD

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = 3\alpha_3 \end{array}$$

$u_1 + 3u_2 + u_3 = (0, 0, 0, 0)$

1.c) Fie $B = \{w_1, w_2, w_3, u_1, u_2\}$ $u_i, w_j \in \mathbb{R}^4$, $i = \overline{1,2}$ $j = \overline{1,3}$

Dim $W+U$ = rang $(w_1, w_2, w_3, u_1, u_2)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 10 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & -8 & 10 \\ 0 & -3 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{1} & 0 \end{array}\right) \to \text{Dim}(W+U) = 4$$

rang $= 4$ $B(W+U) = \{w_1, w_2, w_3, u_1\}$

1.d) Teorema Grassmann

$$\underset{4}{\text{DIM}(W+U)} = \underset{3}{\text{DIM}(W)} + \underset{2}{\text{DIM}(U)} - \underset{1}{\text{DIM}(W \cap U)}$$

$B(W \cap U) = \{u_2\}$

Tema 2

2.a) $\text{Dim}(W) = \text{rang}(W) \rightarrow \text{Dim}(W) = 2$

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(W) = 2$$

$\mathcal{B}(W) = \{w_1, w_2\}$ LD

$\text{Dim}(U) = \text{rang}(U) \rightarrow \text{Dim}(U) = 2$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(U) = 2$$

$\mathcal{B}(U) = \{u_1, u_2\}$ LD

2.b) Din 2.a rezultă că $\{w_1, w_2, w_3\}$ și $\{u_1, u_2, u_3\}$ LD

1 - $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = 2\alpha_3 \\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

~~↳ $w_1 + 2w_2 + w_3 = (0,0,0)$~~

~~2 - $\alpha_1 = -\frac{5}{2}\alpha_3$, $\alpha_2 = \alpha_3$~~

~~↳ $-\frac{5}{2} u_1 + 2u_2 + u_3 = (0,0,0)$~~

↳ $-w_1 + 2w_2 + w_3 = (0,0,0,0)$

2 - $\alpha_1 = -3\alpha_3 \quad \alpha_2 = \alpha_3 \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}$

↳ $-3u_1 + u_2 + u_3 = (0,0,0,0)$

2.c) Fie $\mathcal{B} = \{\overbrace{w_1, w_2, u_1, u_2}^{W+U}\}$

$\mathrm{Dim}(W+U) = \mathrm{rang}(W+U)$

$$W+U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -16 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(W+U) = 4 \to \mathrm{Dim}(W+U) = 4$

$\mathcal{B}(W+U) = 4$

2.d) Teorema Grassmann

$$\underset{4}{\mathrm{Dim}(W+U)} = \underset{2}{\mathrm{Dim}(W)} + \underset{2}{\mathrm{Dim}(U)} - \underset{0}{\mathrm{Dim}(W \cap U)}$$

$\mathcal{B}(W \cap U) = \{\emptyset\}$