Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

Trunchi comun

+

curriculum diferențiat

EDITURA CARMINIS
PITEȘTI

„Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 4446 din 19.06.2006 în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Naţional pentru Evaluarea şi Difuzarea Manualelor şi este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educaţiei şi Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006“

ISBN 978-973-123-417-5

Referenţi: **Prof. Univ. Dr. Stere Ianuş**, Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică
Prof. Gr. I Georgică Marineci, Colegiul Naţional „I. C. Brătianu“, Piteşti

Redactor: **Carmen Joldescu**
Tehnoredactori: **Alina Pieptea, Minodora Suditu**
Corectură: **Marius Burtea, Georgeta Burtea**
Tehnoredactare computerizată: **Editura CARMINIS**

PREFAȚĂ

Manualul se adresează elevilor clasei a XI-a de la următoarele filiere:

– filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică (trunchi comun şi curriculum diferențiat) – 4 ore/săptămână;

– filiera vocațională, profil militar MApN, specializarea matematică-informatică (curriculum diferențiat) – 4 ore/săptămână.

Acesta este conceput pe baza noului curriculum elaborat pentru clasa a XI-a, orientat pe formarea de competențe, valori şi aptitudini dobândite de elevi în actul învățării, elemente care vor da acestora posibilitatea să perceapă mai uşor diversele dimensiuni ale realității cotidiene şi să aplice metodele matematice în cele mai diverse domenii.

Manualul este alcătuit din două părți distincte, conform programei şcolare.

Partea întâi, *Elemente de calcul matriceal şi sisteme de ecuații liniare*, cuprinde capitolele *Permutări, Matrice, Determinanți* şi *Sisteme de ecuații liniare*. Partea a doua, intitulată *Elemente de analiză matematică*, continuă pe un plan superior studiul funcțiilor reale de variabilă reală, pornind de la proprietățile generale studiate şi adăugând noi elemente specifice. Acest studiu se realizează în capitolele *Limite de funcții*, *Continuitate, Derivabilitate* şi *Reprezentarea grafică a funcțiilor*.

Partea teoretică a manualului este redată într-o manieră directă, definind noile noțiuni şi apoi prezentând aplicațiile care le impun, sau se porneşte de la unele situații-problemă care motivează introducerea şi aprofundarea diferitelor noțiuni. Lectura grafică este deseori folosită pentru intuirea sau ilustrarea proprietăților unor funcții particulare sau clase de funcții ce urmează a fi studiate. Demonstrațiile teoremelor sunt realizate într-o manieră cât mai accesibilă elevului. Pentru unele teoreme mai complexe nu s-au dat demonstrațiile, dar s-a indicat prin simbolul [.] bibliografia adecvată pentru studiul individual.

Partea aplicativă a manualului este constituită din:

- exerciții şi probleme rezolvate (se explică şi se exemplifică modul de aplicare a noilor noțiuni, se dau sugestii de rezolvare prin diferite metode şi procedee);
- teste de evaluare plasate după grupuri de teme sau la sfârşit de capitol;
- seturi de exerciții şi probleme propuse.

Exercițiile şi problemele propuse sunt structurate în trei categorii:

a) Exerciții şi probleme pentru exersarea noțiunilor de bază dintr-o unitate didactică, notate cu litera E.

b) Exerciții şi probleme pentru aprofundarea cunoştințelor acumulate, notate cu litera A. Parcurgerea lor creează posibilitatea aplicării noțiunilor învățate în contexte variate, determină realizarea de conexiuni intra şi extradisciplinare.

c) Exerciții şi probleme de dezvoltare, notate cu litera D, pentru inițierea unui studiu mai lărgit (investigare) al unor teme, având nivel ridicat de dificultate.

Acestea vizează aspecte mai profunde ale unor noțiuni şi pot fi folosite pentru pregătirea olimpiadelor, pentru inițierea unui studiu mai lărgit al unor teme matematice, pentru referate pe baza unei bibliografii adecvate.

Ca modalități complementare de evaluare se mai întâlnesc:

- „Teme“, care solicită demonstrarea unor rezultate folosind metodele întâlnite în lecție, sau sunt aplicații directe ale unor modele de rezolvare şi care pot fi parcurse în clasă, individual sau pe grupe de elevi;
- „Temele de proiect“, care au scopul de a stimula pe elevi în studiul matematicii, în dezvoltarea creativității şi capacității de investigare, deschizând trasee individuale sau colective de studiu şi învățare;
- „Teste de evaluare finală“, conținând seturi de probleme care urmăresc verificarea cunoştințelor acumulate de-a lungul anului şcolar.

De asemenea, secvențele „Teme“ care apar în cadrul problemelor rezolvate şi „Teme de proiect“ au şi scopul de a da elevilor posibilitatea să comunice în realizarea sarcinilor didactice primite.

Manualul se încheie cu *Răspunsuri şi indicații de rezolvare* pentru un număr semnificativ de probleme propuse.

Autorii

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

CAPITOLUL I. PERMUTĂRI

1 NOȚIUNEA DE PERMUTARE

În clasa a X-a s-a definit noțiunea de mulțime finită ordonată şi s-a determinat numărul de funcții bijective $f: A \to B$, unde A şi B sunt mulțimi finite.

Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$.

> **❒ NE REAMINTIM!**
> *Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ şi $f: \{1, 2, \dots, n\} \to A$ funcție bijectivă.*
> *• Perechea (A, f) se numeşte mulțime finită ordonată.*
> *Fie A şi B mulțimi având cardinalul $|A| = n, |B| = m$.*
> *• Numărul funcțiilor bijective de la A la B este: $\begin{cases} 0, & n \neq m \\ n!, & n = m \end{cases}$.*

❖ **DEFINIȚIE**

• Se numeşte **permutare** a mulțimii A, oricare mulțime ordonată formată cu elementele acesteia.

O permutare a mulțimii A se poate scrie sub forma $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\right)$, unde $i_1, i_2, ..., i_n \in \{1, 2, ..., n\}$.

Se observă că această permutare este descrisă de funcția bijectivă $f: A \to B$, $f(a_k) = a_{i_k}, k \in \{1, 2, ..., n\}$, descriere care poate fi reprezentată şi sub forma următorului tablou:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_k} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Pe linia întâi a tabloului sunt scrise elementele mulțimii A, iar pe linia a doua sunt scrise valorile funcției f, valori care sunt elementele lui A scrise în ordinea dată de funcția bijectivă f.

De asemenea, funcției f i se poate asocia funcția bijectivă:

$\sigma: \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, $\sigma(k) = i_k$, funcție care poate fi reprezentată sub forma: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

În acest mod, permutarea $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\right)$ a mulțimii A este bine descrisă de funcția bijectivă σ.

De aceea studiul permutărilor mulțimii finite A cu cardinalul $|A| = n$ se poate face studiind permutările mulțimii $\{1, 2, ..., n\}$, adică a funcțiilor bijective $\sigma: \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

❖ **DEFINIŢIE**

- Se numeşte **permutare de gradul n** a mulţimii $A=\{1, 2, ..., n\}$ orice funcţie bijectivă $\sigma : A \to A$.

Mulţimea permutărilor de gradul n se notează S_n, iar elementele ei se vor nota de regulă cu literele greceşti $\sigma, \delta, \theta, \alpha, \beta$ ..., eventual însoţite de indici.

Se obişnuieşte ca o permutare σ de gradul n să se reprezinte astfel:

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(k) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Cardinalul mulţimii S_n este: $|S_n| = n!$.

☞ ***Exemple***

a) Pentru $n=1,\ A=\{1\}$ şi $S_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Pentru $n=2,\ A=\{1, 2\}$ şi $S_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Pentru $n=3,\ A=\{1, 2, 3\}$ şi $S_3=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\right.$

$\left.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

PERMUTĂRI DE GRADUL n PARTICULARE

a) Permutarea $e \in S_n,\ e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & k & ... & n \end{pmatrix}$ se numeşte **permutarea identică** de gradul n.

b) Permutarea $\delta_{ij} \in S_n$, de forma:

$$\delta_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & k & ... & j-1 & j & j+1 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & i-1 & j & i+1 & ... & k & ... & j-1 & i & j+1 & ... & n \end{pmatrix},$$ care

schimbă doar elementele i şi j între ele, celelalte rămânând neschimbate, se numeşte **transpoziţie**.

Transpoziţia δ_{ij} poate fi descrisă prin următoarea lege de corespondenţă:

$$\delta_{ij}(k)=\begin{cases} i, & k=j \\ j, & k=i \\ k, & k\neq i,\ k\neq j \end{cases}.$$

☞ ***Exemplu***

Pentru $n = 3$ există transpozițiile:

$$\delta_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \delta_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \delta_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\delta_{12} = \delta_{21},\ \delta_{13} = \delta_{31},\ \delta_{23} = \delta_{32}$.

❷ OPERAȚII CU PERMUTĂRI. PROPRIETĂȚI

2.1. COMPUNEREA PERMUTĂRILOR DE GRADUL n

Fie $\sigma, \delta \in S_n$. Deoarece aceste permutări au același domeniu și același codomeniu, are sens operația de compunere a acestora, obținându-se funcțiile $\sigma \circ \delta$ și $\delta \circ \sigma$ pe mulțimea $A = \{1, 2, ..., n\}$ cu valori în mulțimea A.

Permutările σ și δ fiind funcții bijective, se obține că funcțiile $\sigma \circ \delta,\ \delta \circ \sigma$ sunt funcții bijective, deci permutări de gradul n.

Așadar, **compunerea permutărilor** $\sigma, \delta \in S_n$ sau **produsul permutărilor** $\sigma, \delta \in S_n$ este permutarea $\sigma \circ \delta : A \to A,\ (\sigma \circ \delta)(k) = \sigma(\delta(k)),\ \forall\ k \in A.$

Compunerea de permutări $\sigma \circ \delta$ se notează mai simplu $\sigma\delta$.

Operația care asociază oricăror două permutări $\sigma, \delta \in S_n$ permutarea $\sigma\delta \in S_n$ se numește **operația de compunere (înmulțire)** a permutărilor de gradul n.

Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix},\ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \delta(1) & \delta(2) & ... & \delta(n) \end{pmatrix}$, atunci produsul $\sigma\delta$ se scrise sub forma $\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(\delta(1)) & \sigma(\delta(2)) & ... & \sigma(\delta(n)) \end{pmatrix}$.

☞ ***Exemplu***

Fie $\sigma, \delta \in S_3,\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Să calculăm $\sigma\delta$ și $\delta\sigma$.

Avem:

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(\delta(1)) & \sigma(\delta(2)) & \sigma(\delta(3)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◢ **Temă**

Efectuați:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\delta\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\delta(\sigma(1))&\delta(\sigma(2))&\delta(\sigma(3))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\\delta(3)&\delta(1)&\delta(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\delta\neq\delta\sigma$.

2.2. PROPRIETĂȚI ALE COMPUNERII PERMUTĂRILOR DE GRADUL n

▣ **P1. Proprietatea de asociativitate**

Compunerea permutărilor de gradul n este operație asociativă:
$\forall\ \sigma, \alpha, \beta\in S_n \Rightarrow (\sigma\alpha)\beta=\sigma(\alpha\beta)$.

Această proprietate rezultă din faptul că operația de compunere a funcțiilor este asociativă.

▣ **P2. Proprietatea elementului neutru**

Permutarea identică de gradul n, $e\in S_n$, este **element neutru** pentru operația de compunere a permutărilor de gradul n:
$\forall\ \sigma\in S_n$, au loc egalitățile $\sigma e=e\sigma=\sigma$.

▣ **P3.** Orice permutare de gradul n are **inversă**.

$\forall\ \sigma\in S_n$, $\exists\ \sigma^{-1}\in S_n$ astfel încât $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$.

Permutarea σ^{-1} se numeşte **inversa permutării** σ.

Pentru determinarea inversei permutării

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\dots&k&\dots&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&\dots&\sigma(k)&\dots&\sigma(n)\end{pmatrix}$ se au în vedere corespondențele

$k\xrightarrow{\sigma}\sigma(k)$ şi $\sigma(k)\xrightarrow{\sigma^{-1}}k$. Aşadar, $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma(1)&\sigma(2)&\dots&\sigma(k)&\dots&\sigma(n)\\1&2&\dots&k&\dots&n\end{pmatrix}$,

după care se ordonează prima linie.

☞ ***Exemplu***

Fie permutarea de gradul 5, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&3&2\end{pmatrix}$.

Inversa permutării σ este permutarea $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}4&5&1&3&2\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$, care după ordonarea liniei întâi devine: $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}$. Se verifică uşor că $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$.

▣ **P4.** Compunerea permutărilor de gradul n nu este operație comutativă.
Aşadar, $\exists\ \sigma, \delta\in S_n$ astfel încât $\sigma\delta\neq\delta\sigma$.

☞ ***Exemplu***

$$\sigma\delta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}.$$

$$\delta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\sigma\delta \neq \delta\sigma$.

2.3. PUTEREA UNEI PERMUTĂRI DE GRADUL n

Fie $\sigma \in S_n$. Notăm $\sigma^0 = e$, $\sigma^1 = \sigma$, $\sigma^2 = \sigma\sigma$.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte $\sigma^n = \sigma^{n-1} \cdot \sigma$.

▣ **PROPOZIȚIE**

Fie $\sigma \in S_n$. Au loc relațiile:

a) $\sigma^m \sigma^n = \sigma^{m+n}$, $\forall$ m, n $\in \mathbb{N}$;

b) $\left(\sigma^m\right)^n = \sigma^{mn}$, $\forall$ m, n $\in \mathbb{N}$.

Demonstrația se face folosind asociativitatea operației de compunere (temă).

Problemă rezolvată

☒ Fie $\sigma \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze σ^2, σ^3, σ^4, σ^{103}.

<u>*Soluție*</u>

Avem: $\sigma^2 = \sigma \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^3 = \sigma^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma^4 = \sigma^3\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

$$\sigma^{103} = \sigma^{4\cdot 25+3} = \sigma^{4\cdot 25}\sigma^3 = \left(\sigma^4\right)^{25}\sigma^3 = e\sigma^3 = \sigma^3.$$

◢ **Temă**

Calculați:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{91}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{45}$.

2.4. PROPRIETĂȚI ALE TRANSPOZIȚIILOR

P1. Fie $\delta_{ij} \in S_n$ o transpoziție. Au loc relațiile:

a) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; **b)** $\delta_{ij}^2 = e$; **c)** $\delta_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$.

Demonstraţie

a) Se foloseşte definiţia transpoziţiei.

b) $(\delta_{ij}\circ\delta_{ji})(i)=\delta_{ij}(j)=i;\ (\delta_{ij}\circ\delta_{ij})(j)=\delta_{ij}(i)=j.$

Pentru $k\neq i,\ k\neq j$ avem $(\delta_{ij}\circ\delta_{ij})(k)=\delta_{ij}(\delta_{ij}(k))=\delta_{ij}(k)=k.$

Aşadar $\delta_{ij}^2=e.$

c) În egalitatea $\delta_{ij}\circ\delta_{ij}=e,$ compunând cu δ_{ij}^{-1} se obţine $\delta_{ij}=\delta_{ij}^{-1}.$ ■

▣ CONSECINŢĂ

Numărul tuturor transpoziţiilor de gradul n este $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}.$

Demonstraţie

Într-adevăr, din proprietatea a) rezultă că numărul tuturor transpoziţiilor de grad n este egal cu numărul submulţimilor $\{i,\ j\}$ ale mulţimii $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, număr egal cu C_n^2. ■

❒ NE REAMINTIM!

- $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$;
- $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$;
- $C_n^k=\dfrac{A_n^k}{P_k}$.

P2. Orice permutare de gradul n se scrie ca produs de transpoziţii. Această scriere nu este unică.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se scrie ca produs de transpoziţii permutarea de gradul 4: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}.$

Soluţie

Se observă că $\sigma(1)=3$, adică $\sigma(1)\neq 1$. Pentru a schimba 3 cu 1 se consideră transpoziţia δ_{13} şi se face compunerea:

$\delta_{13}\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\sigma_1.$ Deoarece $\sigma_1(2)=4,$ adică $\sigma_1(2)\neq 2$ pentru a schimba 4 cu 2 se alege transpoziţia δ_{42} şi se efectuează compunerea: $\delta_{42}\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}=\delta_{43}.$

Aşadar, $\delta_{43}=\delta_{42}\sigma_1=\delta_{42}\delta_{13}\sigma.$ Compunând la stânga cu $\delta_{42}^{-1}=\delta_{42}$ şi apoi cu $\delta_{13}^{-1}=\delta_{13}$ se obţine $\sigma=\delta_{13}\delta_{42}\delta_{43}.$

O altă descompunere se obţine considerând transpoziţia δ_{14} şi efectuând $\sigma\delta_{14}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}=\theta_1.$ Apoi se consideră transpoziţia δ_{23} şi se efectuează $\theta_1\delta_{23}=\delta_{43}$. Aşadar $\delta_{43}=\theta_1\delta_{23}=\sigma\delta_{14}\delta_{23}$. Compunând la dreapta cu $\delta_{23}^{-1}=\delta_{23}$ şi apoi cu $\delta_{14}^{-1}=\delta_{14}$ se obține $\sigma=\delta_{43}\delta_{23}\delta_{14}$.

❸ INVERSIUNILE UNEI PERMUTĂRI SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Fie $\sigma\in S_n$ şi $i, j\in\{1, 2, ..., n\}$, $i<j$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Perechea (i, j) se numeşte **inversiune** a permutării σ dacă $\sigma(i)>\sigma(j)$. Numărul inversiunilor permutării σ se notează $m(\sigma)$.

☞ ***Exemplu***

Fie $\sigma\in S_5$, $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Inversiunile acestei permutări sunt perechile $(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$. Aşadar $m(\sigma)=7$.

➲ **OBSERVAȚII**

1. Permutarea identică e are $m(e)=0$.

2. Permutarea $\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n\\ n & n-1 & n-2 & ... & 2 & 1\end{pmatrix}$ are $m(\pi)=1+2+...+(n-1)=$ $=\dfrac{n(n-1)}{2}=C_n^2$.

3. În general are loc relația $0\le m(\sigma)\le C_n^2$, $\forall\ \sigma\in S_n$.

❖ **DEFINIȚII**

• Se numeşte **semnul (signatura)** permutării σ, numărul $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$.
• Permutarea σ se numeşte **permutare pară** dacă $\varepsilon(\sigma)=1$.
• Permutarea σ se numeşte **permutare impară** dacă $\varepsilon(\sigma)=-1$.

▣ PROPOZIȚIA 1

Orice transpoziție este permutare impară.

Demonstrație

Fie transpoziția $\delta_{ij}\in S_n$. Pentru $i<k<j$, inversiunile acestei transpoziții sunt toate perechile (i, k) şi (k, j) la care se adaugă perechea (i, j).

Avem $m(\delta_{ij}) = 2(j-i-1)+1 = 2(j-i)-1$. Aşadar, $\varepsilon(\delta_{ij}) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$ şi, ca urmare, δ_{ij} este permutare impară. ■

▣ PROPOZIȚIA 2

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\delta \in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod\limits_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$. (1)

<u>*Demonstrație*</u>

Produsul din relația (1) are C_n^2 factori. Dacă $\sigma(j) = k$ şi $\sigma(i) = l$, atunci $k \ne l$ (σ este funcție bijectivă). Pentru $k > l$, factorul $\sigma(j)-\sigma(i) = k-l$ se simplifică cu factorul $(k-l)$ de la numitor, obținându-se 1.

Pentru $k < l$, prin simplificare, se obține –1, iar perechea (i, j) este inversiune.

După toate simplificările se obține $\prod\limits_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^{m(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$. ■

☞ ***<u>Exemplu</u>***

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Avem $\prod\limits_{1\le i<j\le 3} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{1-3}{2-1}\cdot\frac{2-3}{3-1}\cdot\frac{2-1}{3-2} = (-1)(-1) = (-1)^2 = (-1)^{m(\sigma)} = 1$.

Aşadar σ este permutare pară.

Signatura compunerii a două permutări se poate calcula folosind următorul rezultat.

▣ PROPOZIȚIA 3

Dacă $\sigma, \delta \in S_n$ atunci $\varepsilon(\sigma\delta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\delta)$.

<u>*Demonstrație*</u>

Folosind Propoziția 2 avem:

$$\varepsilon(\sigma\delta) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\delta(j))-\sigma(\delta(i))}{j-i} = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\delta(j))-\sigma(\delta(i))}{\delta(j)-\delta(i)}\cdot \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\delta(j)-\delta(i)}{j-i} =$$

$= \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\delta)$, ceea ce justifică enunțul. ■

◢ **Temă**

1. Fie $\sigma, \delta \in S_n$. Să se demonstreze că:

a) $\sigma\delta$ este permutare pară $\Leftrightarrow$ σ şi δ au acelaşi semn;

b) $\sigma\delta$ este permutare impară $\Leftrightarrow$ σ şi δ au semne diferite.

2. Să se stabilească semnul permutărilor σ şi σ^{-1}.

▣ PROPOZIȚIA 4

Fie A_n mulțimea tuturor permutărilor pare de gradul n. Atunci cardinalul acestei mulțimi este $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Demonstrație

Notăm $I_n = S_n \setminus A_n$. Definim funcția $f : A_n \to I_n$, $f(\sigma) = \sigma \cdot \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este o transpoziție fixată. Demonstrăm că f este bijectivă. Fie $\alpha,\ \beta \in S_n$ şi $f(\alpha) = f(\beta)$. Rezultă succesiv $\alpha\delta_{ij} = \beta\delta_{ij} \Rightarrow (\alpha\delta_{ij})\delta_{ij}^{-1} = (\beta\delta_{ij})\delta_{ij}^{-1} \Rightarrow \alpha = \beta$, adică f este injectivă.

Fie $\theta \in I_n$, $\varepsilon(\theta) = -1$. Avem $\theta \cdot \delta_{ij} \in A_n$, deoarece $\varepsilon(\theta\delta_{ij}) = \varepsilon(\theta)\varepsilon(\delta_{ij}) = (-1)(-1)$ şi $f(\theta\delta_{ij}) = \theta\delta_{ij}\delta_{ij} = \theta$. Rezultă că funcția f este surjectivă. În concluzie, f este bijectivă şi $|A_n| = |I_n|$. Deoarece $S_n = A_n \cup I_n$ şi $A_n \cap I_n = \varnothing$, rezultă egalitatea $|A_n| = |I_n| = \frac{n!}{2}$. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se determine:

a) numărul permutărilor pare din mulțimea S_8;

b) cardinalul mulțimii S_n, dacă $|A_n| = 15(n-2)!$.

Soluție

a) Avem egalitatea $|A_8| = \frac{|S_8|}{2} = \frac{8!}{2} = 20160.$

b) Avem relația $\frac{n!}{2} = 15(n-2)!$, care este echivalentă cu $\frac{n(n-1)}{2} = 15.$ Se obține $n = 6$. Rezultă că mulțimea S_6 are $6! = 720$ elemente.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Fie A o mulțime nevidă cu n elemente. Să se determine gradul permutărilor ei ştiind că S_n are:**

a) 24 de elemente;
b) 720 de elemente;
c) 5040 de elemente.

E2. **Să se calculeze $\sigma\pi$, $\pi\sigma$, σ^2, π^2, $(\sigma\pi)^3$, în cazurile:**

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

E3. Fie $\sigma, \delta \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $\sigma\delta = \delta\sigma$ şi $(\sigma\delta)^2 = \delta^2\sigma^2$.

b) Să se determine $\sigma^{-1}, \delta^{-1}, (\sigma\delta)^{-1}, \sigma^{-1}\delta^{-1}$.

E4. Fie permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se rezolve ecuațiile $x\alpha = \beta$ şi $\beta y = \alpha^3$.

E5. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^k = e$, în cazurile:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze σ^{100}, σ^{203}, σ^{2007} în fiecare caz.

E6. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine mulțimea $M = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, ..., \sigma^n, ...\}$.

E7. Să se scrie transpozițiile de gradul 4, respectiv 5.

E8. Să se determine numărul inversiunilor şi signatura permutărilor:
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,
$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,
$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

APROFUNDARE

A1. Fie permutările: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,
$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\sigma\theta\varepsilon, \sigma^{-1}\theta^{-1}\varepsilon^{-1}$, $(\varepsilon\theta\sigma)^{-1}$.

b) Să se calculeze $\sigma^{2007}, \theta^{2005}, \varepsilon^{2010}$.

c) Să se rezolve ecuațiile $\sigma x = \theta$, $\sigma y\varepsilon = \theta$, $z\sigma^{2005} = \theta^{2000}\varepsilon^{2006}$.

A2. Fie $\alpha, \beta \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numărul de inversiuni şi signatura acestor permutări.

b) Să se rezolve ecuațiile $\alpha^{11}x = \beta^{110}$, $\alpha^{301}x\beta^{1027} = (\alpha\beta)^{-2005}$, $\alpha x = x\alpha$, $\alpha x = x\beta$.

A3. Fie $\sigma \in S_n$. Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$.

A4. Fie $\sigma \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Să se determine σ^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

A5. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că S_n are 45 de transpoziții.

A6. Fie A_n mulțimea permutărilor pare ale unei mulțimi cu n elemente. Să se determine n, ştiind că A_n are cardinalul:

a) $\dfrac{(n+4)!}{6!}$; b) $\dfrac{(n+3)!}{28 \cdot 4!}$.

A7. Fie $\sigma, \varepsilon \in S_8$,
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & i & 2 & 1 & j \end{pmatrix}$,

$\varepsilon=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & k & 5 & p & 3 & 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$.

Să se determine permutările astfel încât σ să fie impară, iar ε să fie pară.

A8. **Fie $\sigma, \alpha \in S_n$, $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ şi $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(n) & \sigma(n-1) & \dots & \sigma(1)\end{pmatrix}$.**

Ştiind că $m(\sigma)=k$, să se calculeze $m(\alpha)$.

A9. **Se consideră permutările:**

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n\\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1\end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n\\ 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n\end{pmatrix}.$$

a) Să se determine $m(\alpha)+m(\beta)$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care α este permutare pară, respectiv β este permutare impară.

A10. **Să se scrie ca produs de transpoziţii permutările:**

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

A11. **Să se determine permutările $\sigma, \delta \in S_n$, în cazurile:**

a) $\dfrac{\sigma(1)}{1}=\dfrac{\sigma(2)}{2}=\dots=\dfrac{\sigma(n)}{n}$;

b) $\dfrac{\delta(1)}{n}=\dfrac{\delta(2)}{n-1}=\dots=\dfrac{\delta(n)}{1}$.

A12. **Fie $\alpha, \beta \in S_n$. Să se arate că:**

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha(1)}{\beta(1)}=\frac{\alpha(2)}{\beta(2)}=\dots=\frac{\alpha(n)}{\beta(n)}.$$

A13. **Să se rezolve ecuaţiile:**

a) $x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

b) $x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

c) $x^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

A14. **Fie numărul 5213. Făcând toate permutările cifrelor acestui număr şi ordonând crescător numerele obţinute, să se precizeze ce loc ocupă în şir numerele:**
a) 2135; b) 3521; c) 5213.

A15. **Se consideră numărul natural $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}=25143$.**
Să se calculeze suma

$$s=\sum_{\sigma\in S_5}\overline{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)}a_{\sigma(5)}}.$$

DEZVOLTARE

D1. **Să se determine toate permutările $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$ astfel încât numerele $1+\sigma(1), 2+\sigma(2), \dots, n+\sigma(n)$ să formeze:**
a) o progresie aritmetică;
b) o progresie geometrică.

D2. **Se dau numerele strict pozitive $a_1<a_2<\dots<a_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma:**

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ **este maximă (minimă);**

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i a_{\sigma(i)}$ **este maximă (minimă).**

D3. **Fie $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$ cu proprietatea că $\forall\ \sigma, \theta \in H \Rightarrow \sigma\theta \in H$. Să se arate că:**
a) permutarea identică $e \in H$;
b) dacă $\sigma \in H \Rightarrow \sigma^{-1} \in H$.

D4. Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$. Dacă $\sigma\alpha = \alpha\sigma$, $\forall\, \alpha \in S_n$, atunci $\sigma = e$.

D5. Să se studieze surjectivitatea funcției $f : S_4 \to S_4,\ f(\alpha) = \alpha^4$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $\sigma\theta,\ \theta\sigma,\ \sigma^{-1},\ \theta^{-1}$.

b) Verificați dacă are loc egalitatea $(\sigma\theta)^{-1} = \theta^{-1}\sigma^{-1}$.

❍ 2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $\sigma^{-1},\ \delta^{-1},\ \sigma^{2005},\ \delta^{2006}$.

b) Să se rezolve ecuațiile $\sigma x = \delta$, $\delta x \sigma^{2005} = \delta^{2006}$.

❍ 3. Să se determine semnul permutării $\sigma \in S_7$, dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Testul 2

❍ 1. Fie $\sigma, \pi \in S_4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice dacă $\sigma^4 = e$ şi $\pi^3 = e$.

b) Să se rezolve ecuațiile $\sigma^{258}x = \pi^{301}$, $y\sigma^{145} = \pi^{98}$.

❍ 2. Să se rezolve în S_3 sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x = y \\ x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot y \end{cases}.$$

❍ 3. Fie $\sigma \in S_8$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $m(\sigma)$ şi $\varepsilon(\sigma)$.

b) Câte soluții are ecuația $x^2 = \sigma$?

❍ 4. Să se scrie ca produs de transpoziții permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

CAPITOLUL II. MATRICE

1 TABEL MATRICEAL. MATRICE MULȚIMI DE MATRICE

Să considerăm următorul enunț din domeniul economiei.

„Un depozit de materiale se aprovizionează eşalonat pe o perioadă de 4 luni cu un anumit produs după următorul plan:

– în prima lună se aprovizionează cu 100 de bucăți, la prețul unitar de 3 000 unități monetare (u.m.);

– în a doua lună se aprovizionează cu 120 de bucăți la prețul unitar de 3 500 u.m.;

– în luna a treia primeşte cu 10 bucăți mai puțin decât în luna precedentă, cu prețul pe unitate de produs de 3 200 u.m., iar în luna a patra comandă o cantitate dublă față de prima lună plătind 3 200 u.m. pe unitatea de produs.“

Pentru ținerea unei evidențe cât mai clare, aceste date pot fi ordonate şi clasate în diverse moduri, astfel încât obținerea unor informații legate de acest proces de aprovizionare să se realizeze cât mai eficient.

Astfel, datele de mai sus pot fi grupate într-un tabel de forma:

Luna	1	2	3	4
Cantitate	100	120	110	200
Preț unitar	3 000	3 500	3 200	3 200

Într-un mod mai simplificat, aceste date pot fi reorganizate într-un tabel de forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3\,000 & 3\,500 & 3\,200 & 3\,200 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 100 & 120 & 110 & 200 \\ 3\,000 & 3\,500 & 3\,200 & 3\,200 \end{pmatrix}.$$

Un astfel de tabel se numeşte **tabel matriceal**.

Primul tabel matriceal este format din 3 linii şi 4 coloane (este de tipul 3×4), iar al doilea tabel matriceal este format din 2 linii şi 4 coloane (este de tipul 2×4).

Dacă se ia în considerare numai linia care conține cantitățile achiziționate lunar, se obține un tabel de forma $(100 \quad 120 \quad 110 \quad 200)$ numit **tabel matriceal linie**.

Dacă se consideră numai datele care caracterizează fenomenul în luna a treia se obține un tabel de forma $\begin{pmatrix} 3 \\ 110 \\ 3\ 200 \end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix} 110 \\ 3\ 200 \end{pmatrix}$, numit **tabel matriceal coloană**.

Aşadar, prin organizarea unor date legate de un fenomen în asemenea tabele matriceale, se stabileşte de fapt o corespondență între poziția ocupată de un număr din tabel şi valoarea acestuia.

Poziția numărului din tabelul matriceal este uşor de identificat printr-o pereche ordonată de numere naturale (i, j) care arată că numărul se află pe linia i şi pe coloana j a tabelului.

Generalizarea unei astfel de corespondențe, făcându-se abstracție de natura materială a datelor folosite, conduce la introducerea unei noi noțiuni matematice.

❖ **DEFINIȚIE**

- Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathbb{N}_m = \{1, 2, ..., m\}$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$ şi $\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe.

  Se numeşte **matrice de tipul (m, n)** cu elemente numere complexe, o funcție $A: \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{C}$, $A(i, j) = a_{ij}$, $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_n$.

Valorile $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ale funcției A se numesc **elementele matricei A**.

Matricea A se poate reprezenta sub forma unui tablou dreptunghiular cu m linii şi n coloane, astfel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Datorită acestei reprezentări, în loc de matrice de tipul (m, n) se poate spune **matrice cu m linii şi n coloane**.

Elementul a_{ij}, $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_n$ se află la intersecția liniei i (primul indice) cu coloana j (al doilea indice).

Prescurtat, matricea A se notează $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ sau $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere complexe, se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. În mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ se disting câteva submulțimi importante:

• $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})=$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere reale;

• $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})=$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere raționale;

• $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})=$ mulțimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente numere întregi.

Între aceste mulțimi de matrice există relațiile:

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$

CAZURI PARTICULARE DE MATRICE:

Fie matricea $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

1. Dacă $n=1$, matricea A este de tipul $(m, 1)$ şi se numeşte **matrice coloană**: $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

2. Dacă $m=1$, matricea A este de tipul $(1, n)$ şi se numeşte **matrice linie**: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

3. Dacă $m=n$, se obține o matrice de tipul (n, n) şi se numeşte **matrice pătratică de ordinul n**.

Aceasta are reprezentarea următoare:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ se numeşte **diagonala principală a matricei A**, iar sistemul ordonat de elemente $(a_{1n}, a_{2\ n-1}, ..., a_{n1})$ se numeşte **diagonala secundară a matricei A**.

Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A se numeşte **urma matricei A** şi se notează $\mathbf{Tr(A)}$.

Mulțimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente numere complexe se notează $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{C})$.

4. Matricea de tipul (m, n) cu toate elementele egale cu zero se numeşte **matricea nulă** şi se notează $O_{m,\,n}$.

EGALITATEA MATRICELOR

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$.

❖ **DEFINIȚIE**

- Matricele A şi B se numesc **matrice egale**, dacă $a_{ij}=b_{ij}$ pentru fiecare $i\in\{1, 2, ..., m\}$, $j\in\{1, 2, ..., n\}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se determine a, b, x, y, m $\in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea de matrice $A=B$, pentru: $A=\begin{pmatrix} a^2+5i & 2b+1 \\ 2^x+3^y & 2^x+2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1+mi & 7 \\ 31 & 6 \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

Din egalitatea $a_{11}=b_{11}$ rezultă $a^2+5i=1+mi$. Aplicând egalitatea a două numere complexe se obține $a^2=1$ şi $m=5$, deci $a\in\{-1, 1\}$, $m=5$.

Din egalitatea $a_{12}=b_{12}$ rezultă $2b+1=7$ şi $b=3$. Egalitățile $a_{21}=b_{21}$ şi $a_{22}=b_{22}$ conduc la relațiile $2^x+3^y=31$ şi $2^x+2=6$. Se obține $x=2$ şi $y=3$.

➲ **OBSERVAȚII**

1. Folosind proprietățile relației de egalitate pe mulțimea $\mathbb{C}$, relația de egalitate pe mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are următoarele proprietăți:

- $A=A$, $\forall\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **(proprietatea de reflexivitate)**;
- dacă $A=B$, atunci $B=A$, $\forall\ A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **(proprietatea de simetrie)**;
- dacă $A=B$ şi $B=C$, atunci $A=C$, $\forall\ A, B, C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **(proprietatea de tranzitivitate)**.

2. Dacă matricele A, B nu sunt egale, se scrie $A\neq B$.

2 OPERAȚII CU MATRICE

2.1. ADUNAREA MATRICELOR

Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$.

❖ **DEFINIȚII**

- Se numeşte **suma matricelor A şi B**, matricea $C=(c_{ij})_{m\times n}$ ale cărei elemente sunt date de egalitățile:
  $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, oricare ar fi $i\in\{1, 2, ..., m\}$ şi $j\in\{1, 2, ..., n\}$.
  Suma matricelor A şi B se notează $A+B$.

- Operaţia prin care oricăror două matrice din mulţimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază suma lor se numeşte **adunarea matricelor**.

☞ ***Exemple***

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} -1 & 2+i \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & -3-2i \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, atunci $A+B = \begin{pmatrix} 3 & -1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ -\sqrt{2} & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, atunci:

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

PROPRIETĂŢI ALE ADUNĂRII MATRICELOR

P1. Adunarea matricelor este comutativă:
$\mathbf{A+B=B+A,\ \forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})}$.

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, atunci $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ şi $B+A = (b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}$.

Deoarece adunarea numerelor complexe este operaţie comutativă, rezultă că $a_{ij}+b_{ij} = b_{ij}+a_{ij},\ \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $j \in \{1, 2, ... n\}$.

Aşadar, $A+B=B+A$.

P2. Adunarea matricelor este asociativă:
$\mathbf{(A+B)+C = A+(B+C),\ \forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})}$.

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$, $C = (c_{ij})_{m\times n}$, folosind asociativitatea operaţiei de adunare a numerelor complexe se obţine succesiv:

$$(A+B)+C = (a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} + (c_{ij})_{m\times n} = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{m\times n} =$$
$$= (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{m\times n} = A+(B+C).$$

P3. Matricea nulă $\mathbf{O_{m,n}}$ este element neutru pentru adunarea matricelor: $\mathbf{A+O_{m,n} = O_{m,n}+A = A,\ \forall\ A = (a_{ij})_{m\times n}}$.

Într-adevăr, $A+O_{m,n} = (a_{ij}+0)_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} = A = (0+a_{ij})_{m\times n} = O_{m,n}+A$.

P4. Pentru orice matrice $\mathbf{A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})}$ există matricea $\mathbf{A' = -A = (-a_{ij})_{m\times n}}$, astfel încât $\mathbf{A+A' = A'+A = O_{m,n}}$.

Matricea $(-A)$ se numeşte **opusa matricei A**.

Exemplu

Dacă $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3i\\ 2 & \sqrt{5} & 0\end{pmatrix}$, atunci opusa ei este $-A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3i\\ -2 & -\sqrt{5} & 0\end{pmatrix}$.

OBSERVAŢII

- Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci suma $A+(-B)$ se notează $A-B$ şi se numeşte **diferenţa matricelor A şi B**.
- Operaţia prin care oricăror două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază diferenţa lor se numeşte **scăderea matricelor**.

Exemplu

Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, atunci $A-B=\begin{pmatrix}1-(-3) & 1-(-4)\\ -1-3 & 2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -4 & 4\end{pmatrix}$.

2.2. ÎNMULŢIREA MATRICELOR CU SCALARI

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$ şi $k \in \mathbb{C}$.

DEFINIŢII

- Se numeşte **produsul dintre scalarul k şi matricea A**, matricea $B=(b_{ij})_{m\times n}$ ale cărei elemente sunt date de egalităţile $b_{ij}=ka_{ij}$, $\forall\, i\in\{1, 2, ..., m\}$, $j\in\{1, 2, ..., n\}$.
  Produsul dintre matricea A şi scalarul k se notează kA.
- Operaţia prin care fiecărei perechi $(k, A)\in \mathbb{C}\times\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea kA se numeşte **operaţia de înmulţire a matricelor cu scalari**.

Exemplu

Fie $k=i$ şi $A=\begin{pmatrix}-1 & -i & 2i\\ 1-2i & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$. Atunci $iA=\begin{pmatrix}-i & 1 & -2\\ 2+i & 0 & i\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

REŢINEM!

• Pentru a înmulţi o matrice cu un scalar, se înmulţeşte fiecare element al matricei cu acel scalar.

PROPRIETĂŢI ALE ÎNMULŢIRII MATRICELOR CU SCALARI

Ţinând seama de proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire a numerelor complexe, se verifică următoarele proprietăţi ale înmulţirii matricelor cu scalari:

P1. $1\cdot A=A,\ \forall\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P2. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) A, \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P3. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A, \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{C},\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P5. $\alpha \cdot A = O_{m,n} \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $A = O_{m,n}$.

2.3. ÎNMULȚIREA MATRICELOR

Fie matricea $A = (a_{ij})_{m\times n}$ şi matricea $B = (b_{ij})_{n\times p}$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Se numeşte **produsul matricelor A, B** (în această ordine), matricea $C = (c_{ij})_{m\times p}$ ale cărei elemente sunt date de egalitățile:

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Produsul matricelor A şi B se notează $A \cdot B$ sau AB.

Operația prin care fiecărei perechi de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ se numeşte **înmulțirea matricelor**.

➲ **OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI**

1. Elementul c_{ik} al matricei produs AB se obține ca sumă a produselor dintre elementele liniei „i" a matricei A cu elementele corespunzătoare din coloana „k" a matricei B.

Această corespondență este indicată de diagrama următoare:

$$\begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \ldots & \boxed{a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ldots & \boxed{b_{1k}} & \ldots \\ \ldots & \boxed{b_{2k}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \boxed{b_{nk}} & \ldots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Regula de înmulțire a două matrice se denumeşte pe scurt **regula de înmulțire a liniilor cu coloanele** sau **regula linie-coloană**.

2. • Produsul AB are sens dacă numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B.

• Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$.

3. • Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, atunci au sens produsele AB şi BA.

• Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci înmulţirea matricelor este peste tot definită (are sens atât AB cât şi BA).

4. În general $AB \neq BA$ (înmulţirea matricelor nu este operaţie comutativă).

☞ ***Exemplu***

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Se observă că numărul de coloane ale matricei A este egal cu numărul de linii ale matricei B. Aşadar, se poate calcula matricea produs $AB = (c_{ij})_{2\times 2}$ cu următoarele elemente:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 = -1$$

$$c_{12} = a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-3) = 4$$

$$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} = 3\cdot 4 + 0\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 = 6$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} = 3\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot(-3) = 9$$

Se obţine matricea $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pentru matricele A, B se poate efectua totodată şi produsul $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, egal cu $BA = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Se observă că $AB \neq BA$, ceea ce justifică faptul că înmulţirea matricelor nu este comutativă.

PROPRIETĂŢI ALE ÎNMULŢIRII MATRICELOR

▣ TEOREMA 1

Înmulţirea matricelor este **asociativă**: dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, atunci are loc egalitatea $\mathbf{(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)}$.

Demonstraţie

Fie $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{n\times p}$ şi $C = (c_{kl})_{p\times q}$.

Notăm $A\cdot B = (d_{ik})_{m\times p}$ şi $(A\cdot B)\cdot C = (e_{il})_{m\times q}$.

Atunci $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ şi $e_{il} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}$. (1)

Să notăm $B \cdot C = (u_{jl})_{n \times q}$ şi $A \cdot (B \cdot C) = (v_{il})_{m \times q}$. Avem $u_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl}$ şi

$$v_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{jl} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}. \ (2)$$

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că $e_{il} = v_{il}$ pentru oricare $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $l \in \{1, 2, ..., q\}$. În concluzie $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ şi teorema este demonstrată. ■

▣ TEOREMA 2

Înmulțirea matricelor este **distributivă** față de adunarea matricelor:

a) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \ \forall \ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$

(distributivitatea la stânga a înmulțirii față de adunare);

b) $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A, \ \forall \ B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$

(distributivitatea la dreapta a înmulțirii față de adunare).

Demonstrație

a) Fie $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ şi $C = (c_{jk})_{n \times p}$.

Notăm $A \cdot (B + C) = (d_{ik})_{m \times p}$, $A \cdot B = (u_{ik})_{m \times p}$ şi $A \cdot C = (v_{ik})_{m \times p}$.

Avem $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} = u_{ik} + v_{ik}$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $k \in \{1, 2, ..., p\}$. Aşadar, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Analog se demonstrează egalitatea b). ■

▣ TEOREMA 3

Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci există o matrice $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât:

$\mathbf{A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \ \forall \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Demonstrație

Considerăm matricea $I_n = (d_{ij})_{n \times n}$, $d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$,

$$\text{deci } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Fie matricea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ şi $A \cdot I_n = (b_{ij})_{n \times n}$.

Atunci $b_{ij} = a_{i1}d_{1j} + a_{i2}d_{2j} + ... + a_{ij}d_{jj} + ... + a_{in}d_{nj} = a_{ij}$, $\forall$ i, j $\in \{1, 2, ..., n\}$. Aşadar $A \cdot I_n = A$.

Analog se arată că $I_n \cdot A = A$ şi teorema este demonstrată. ■

Matricea $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **matrice unitate** sau **matrice identică de ordinul n**.

Astfel, matricea unitate de ordinul 2 este $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, matricea unitate de ordinul 3 este $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 3 arată că matricea unitate I_n este element neutru pentru înmulțirea matricelor pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Legătura dintre înmulțirea matricelor şi înmulțirea cu scalari a matricelor este dată de următoarea egalitate:

$\mathbf{a(AB) = (aA)B = A(aB)}, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $a \in \mathbb{C}$.

2.4. PUTEREA UNEI MATRICE PĂTRATICE

Proprietatea de asociativitate a înmulțirii matricelor pătratice permite definirea puterii cu exponent natural a unei matrice pătratice.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definim $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte puterea n a matricei A prin $A^n = A^{n-1} \cdot A$.

☞ ***Exemplu***

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, atunci:

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$;

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$.

Reguli de calcul

❶ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $k, p \in \mathbb{N}$. Atunci au loc egalitățile:

a) $A^k \cdot A^p = A^{k+p}$; **b)** $(A^k)^p = A^{kp} = (A^p)^k$; **c)** $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Verificarea acestor egalități se face folosind proprietățile de asociativitate a înmulțirii matricelor şi distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Exercițiu rezolvat

⊠ Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^5 şi A^8.

<u>*Soluție*</u>

Din exemplul de mai sus se cunosc matricele A^2, A^3, A^4. Pentru A^5 se poate folosi regula $A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 2 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 11\\ -22 & 1\end{pmatrix}$, iar pentru A^8 se poate folosi regula $A^8 = \left(A^4\right)^2 = \begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 4\\ -8 & -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & -56\\ 112 & 17\end{pmatrix}$.

❷ Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, astfel încât $AB = BA$. Atunci:

a) $A^m \cdot B^p = B^p \cdot A^m$, $\forall\ m, p \in \mathbb{N}^*$;

b) $(A+B)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i A^{p-i} B^i$, $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$.

(Formula binomului lui Newton pentru matrice)

◢ **Temă de proiect**

Verificarea regulilor de calcul 1 şi 2.

Probleme rezolvate

⊠ **1.** Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se verifice egalitatea:

$$A^2 - (a+d)\cdot A + (ad-bc)\cdot I_2 = O_2.$$

(Relația Hamilton-Cayley)

<u>*Soluție*</u>

Avem

$$A^2 = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}.$$

Atunci $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 =$

$$= \begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}(a+d)a & (a+d)b\\ (a+d)c & (a+d)d\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = O_2.$$

William Rowan HAMILTON (1805-1865) matematician, astronom şi mecanician irlandez (englez)

A expus teoria fundamentală a numerelor complexe, a evidențiat principiile de comutativitate, asociativitate, distributivitate. A dezvoltat teoria numerelor hipercomplexe lărgind noțiunea de număr. A elaborat teoria cuaternionilor.

Contribuții importante în optica geometrică punând bazele opticii matematice.

⊠ **2.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

***Metoda I:* Utilizarea inducției matematice**

Calculăm $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Se observă că $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $n = 1$ egalitatea este adevărată. Presupunem că $A^k = \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ k & -(k-1) \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că $A^{k+1} = \begin{pmatrix} k+2 & -(k+1) \\ k+1 & -k \end{pmatrix}$.

Avem $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} k+1 & -k \\ k & -(k-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 & -(k+1) \\ k+1 & -k \end{pmatrix}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Aşadar, $A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

***Metoda a II-a:* Utilizarea formulei binomului lui Newton**

Matricea A se scrie sub forma $A = I_2 + B$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Deoarece $I_2B = BI_2$, atunci $A^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k$. Dar $B^2 = O_2$ şi rezultă că $B^p = O_2$, $\forall\, p \geq 2$.

Aşadar, $A^n = C_n^0 I_2 + C_n^1 B = I_2 + nB = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$.

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> **a)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^n$;
> **b)** $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{100}$.

***Metoda a III-a:* Utilizarea relației Hamilton-Cayley**

Pentru matricea A, relația Hamilton-Cayley se scrie: $A^2 - 2A + I_2 = O_2$.

Rezultă că $A^2 = 2A - I_2$. Avem $A^3 = A^2 \cdot A = 2A^2 - A = 3A - 2I_2$. Analog se obține $A^4 = 4A - 3I_2$. Folosind metoda inducției matematice se demonstrează că $A^n = nA - (n-1)I_2$.

Aşadar $A^n = n \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{pmatrix}$.

☒ **3.** Să se determine $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă $A^2 + A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Soluție*</u>

Din relația dată se obține că $A^3 + A^2 = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $A^3 + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A$, deci $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A$. (1)

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din relația (1) se obține:

$\begin{pmatrix} 2a & 3a+2b \\ 2c & 3c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ şi $c = 0,\ a = d$.

Aşadar, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, iar din egalitatea dată rezultă că:

$\begin{pmatrix} a^2+a & 2ab+b \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cu soluțiile $a = 1,\ b = 1$ şi $a = -2,\ b = -1$. Se obține $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

APLICAŢII ÎN TEORIA GRAFURILOR

Fie $G = (X, \mathcal{U})$ un graf cu n vârfuri, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n \geq 1$ şi $A = (a_{ij})_{n\times n}$ **matricea booleană (de adiacență)** asociată acestuia.

Matricea A indică numărul drumurilor de lungime 1 dintre două vârfuri x_i, x_j. Dacă $a_{ij} = 1$, atunci există un drum de lungime 1 de la x_i la x_j, iar dacă $a_{ij} = 0$, nu există un asemenea drum.

Pentru determinarea numărului drumurilor de lungime 2, 3, ..., n se folosesc puterile $A^2, A^3, ..., A^n$ ale matricei A.

Fie A^k puterea k a matricei A, $A^k = (b_{ij})_{n\times m}$:

- dacă $b_{ij} = 0$, atunci nu există nici un drum de lungime k de la vârful x_i la vârful x_j;
- dacă $b_{ij} \neq 0$, atunci există un drum de lungime k de la x_i la x_j;
- dacă $b_{ij} = p$, atunci există p drumuri de lungime k de la x_i la x_j.

Problemă rezolvată

☒ Fie G un graf sub formă sagitală ca în figura 1. Să se determine drumurile de lungime 2 şi 3 de la vârful 1 la celelalte vârfuri.

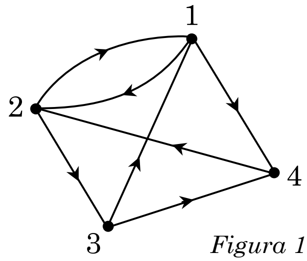


Figura 1

Soluţie

Matricea booleană asociată grafului este $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, iar puterile de ordin 2 şi 3 sunt:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Rezultă că există un singur drum de lungime 2 de la vârful 1 la vârful 2, respectiv la vârful 3 şi nici un drum de lungime 2 de la vârful 1 la vârful 4. Aceste drumuri sunt $d_{1,2}=(1,4,2)$, $d_{1,3}=(1,2,3)$. Citind matricea A^3 se deduce că există un singur drum de lungime 3 de la vârful 1 la vârful 2, respectiv la vârful 3 şi două drumuri de la vârful 1 la vârful 4. Acestea sunt $d_{1,2}=(1,2,1,2)$, $d_{1,3}=(1,4,2,3)$, $d_{1,4}=(1,2,3,4)$, $d'_{1,4}=(1,2,1,4)$.

◢ **Temă**

Să se determine drumurile de lungime 2 şi 3 de la vârfurile 2, 3, 4 la celelalte vârfuri ale grafului din figura 1.

2.5. TRANSPUSA UNEI MATRICE

❖ DEFINIŢII

- Fie matricea $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Se numeşte **transpusa** matricei A, matricea ${}^tA=(b_{kl})_{n\times m}$, unde $b_{kl}=a_{lk}$, pentru oricare $k\in\{1,2,...,n\}$ şi $l\in\{1,2,...,m\}$.
- Operaţia prin care fiecărei matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ i se asociază matricea transpusă ${}^tA\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se numeşte **operaţia de transpunere a matricelor**.

➲ OBSERVAŢII

1. Matricea transpusă ${}^tA$ se obţine din matricea A prin schimbarea liniilor în coloane şi a coloanelor în linii.

2. Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci ${}^tA\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}({}^tA)$, unde $\mathrm{Tr}(A)$ este urma matricei A.

Problemă rezolvată

☒ Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze transpusele matricelor A, B, AB şi BA.

b) Să se calculeze matricele ${}^tA\cdot{}^tB$, ${}^tB\cdot{}^tA$ şi să se compare cu matricele ${}^t(BA)$, respectiv ${}^t(AB)$.

<u>Soluţie</u>

a) ${}^tA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, ${}^tB=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}20 & 10\\ 7 & 4\end{pmatrix}$, ${}^t(AB)=\begin{pmatrix}20 & 7\\ 10 & 4\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 10\\ 4 & 11 & 15\end{pmatrix}$, ${}^t(BA)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 7 & 11\\ 5 & 10 & 15\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{{}^t(AB)={}^tB\,{}^tA}$$

b) ${}^tA\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 7 & 11\\ 5 & 10 & 15\end{pmatrix}={}^t(BA)$.

${}^tB\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 7\\ 10 & 4\end{pmatrix}={}^t(AB)$.

PROPRIETĂŢI ALE OPERAŢIEI DE TRANSPUNERE

Folosind definiţia transpusei unei matrice şi operaţiile cu matrice se verifică următoarele proprietăţi:

▣ **P1.** Pentru oricare matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, ${}^t({}^tA)=A$.

▣ **P2.** Dacă $A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci:

a) ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$;

b) ${}^t(aA)=a\cdot{}^tA,\ a\in\mathbb{C}$.

▣ **P3.** Dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Se dau matricele:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & i^3\\ \sqrt{7} & -8 & 2\\ 0 & -4 & 0{,}2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & -8 & -3\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}14\\ -\sqrt{28}\\ 8\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 6 & -5\end{pmatrix}.$$

a) Să se precizeze tipul matricelor A, B, C, D.

b) Să se scrie elementele a_{23}, a_{31}, b_{22}, b_{13}, c_{21}, c_{31}, d_{11}, d_{14}.

c) Care afirmație este adevărată:

- urma matricei A este $\mathrm{Tr}(A)=-6{,}8$.
- $a_{21}\cdot c_{21}+b_{23}-d_{14}=-12$;
- $a_{23}\cdot b_{21}\cdot b_{13}\cdot c_{31}\cdot d_{12}>-30$;
- $25a_{33}^2+(a_{31}-d_{12})^2-c_{11}=-c_{31}-a_{31}^3$?

E2. Să se determine numerele reale pentru care au loc egalitățile:

a) $\begin{pmatrix}3 & 2+x\\ 3y-5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-5 & 6\\ 7 & b^2-5\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}x+y & 2x-y\\ 4 & 2a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & y+2\\ a+2b & 5\end{pmatrix}$.

E3. Se dau matricele:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ -3 & -2 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -7 & 1\\ 0 & -9 & 3\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Să se determine $A+B$, $A-B$, $-A-B$, $3A$, $5B$, $3A+5B$, $A-\sqrt{2}O_3$.

E4. Să se determine numerele pentru care au loc relațiile:

a) $\begin{pmatrix}3 & x\\ 2x & 3\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}x+1 & 2\\ -1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4+y\\ z+2 & 4+t\end{pmatrix}$;

b) $x\cdot\begin{pmatrix}x-6 & 2\\ -1 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 3y\\ z & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & y^2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}4^x-2 & p!\\ \lg(y-1) & C_z^2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1+3\cdot 2^{x-1} & 60\\ \frac{1}{2} & z-1{,}5\end{pmatrix}=O_2$.

E5. Să se determine matricea A, știind că:

a) $4A+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6\\ -7 & 9\end{pmatrix}$;

b) $2A+\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & -4 & 9\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}4! & C_4^2 & \ln e\\ \lg 1 & A_3^2 & i^{100}\end{pmatrix}$.

E6. Să se determine matricele A și B, dacă:

a) $2A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

$3A-2B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 9 & -1\end{pmatrix}$;

b) $2A+3B=\begin{pmatrix}-8 & -7 & 2\\ -1 & 6 & -5\end{pmatrix}$,

$A-2B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$.

E7. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Să se calculeze AB, BA, ABC, $CAB-C^2$, $(ABC-CAB)^2$.

E8. Matricele A, B verifică egalitățile: $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ și $2A+B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. Să se calculeze $A\cdot B$, $B\cdot A$, $\left({}^tA\right)^2-\left({}^tB\right)^2$.

E9. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $f(X) = X^3 + X^2 - 5X + 2I_2$, $g(X) = X^2 - 3X + I_2$. Să se determine matricele:
$B = 2f(A) - 3g(A)$, $C = f({}^tA) - g({}^tA)$.

E10. Se dau matricele:
$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} y & -3 \\ 5 & 2x \end{pmatrix}$.

a) Aflați $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât:
$AB = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 19 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Aflați $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât:
$(A + xI_2)(B + yI_2) = \begin{pmatrix} -25 & 59 \\ 2x + y^2 & 20 \end{pmatrix}$.

E11. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

a) Să se afle x, y pentru care $A + B = AB + I_2$.

b) Există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $A^2 = B^2$?

c) Să se calculeze A^3, A^4, A^5, A^{100}.

E12. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, în cazurile:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

E13. Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Să se calculeze A^2, A^3, A^6, A^{15}, A^{24}.

E14. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Să se verifice egalitățile:

a) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$;

b) $Tr(aA) = aTr(A)$;

c) $Tr(AB) = Tr(BA)$;

d) $Tr\left[{}^t(AB)\right] = Tr\left({}^tA \cdot {}^tB\right)$.

APROFUNDARE

A1. Se dă matricea $A_k \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$,
$A_k = \begin{pmatrix} k & k^2 & k(1+k) \\ 2k-1 & 0 & 3k-2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

A2. Fie $k \in \mathbb{N}$ şi $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k+1 & k-1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze sumele de matrice:

a) $U_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$;

b) $V_n = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2$.

A3. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ştiind că $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

A4. Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, în fiecare din cazurile:

a) $A^2 = I_2$; b) $A^2 = O_2$;

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A5. Se consideră egalitatea: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Să se arate că dacă numerele reale x, y, z, t sunt în progresie aritmetică, atunci şi numerele $a - b$, $b - c$, $c - d$ sunt în progresie aritmetică. (ASE, Buc., 1993)

A6. Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$, în cazurile:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon^2 & 1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon = -1$.

A7. Să se calculeze:
$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A8. Să se determine matricea A cu toate elementele numere naturale, care verifică egalitatea:
$(1 \quad 2 \quad 4) \cdot A = (3 \quad 1 \quad 2)$.

A9. Să se rezolve ecuația $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A10. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $\{a-d, b-c, c, b\} \subset \mathbb{C}^*$.
Dacă $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, să se arate că:
$\frac{b_n}{b} = \frac{c_n}{c} = \frac{a_n - d_n}{a-d}$. (ASE, Buc., 1996)

A11. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:
a) $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix}$, unde $a_n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;
b) pentru oricare $n, m \in \mathbb{N}^*$ au loc relațiile: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ și $a_{m+n} = a_{m+1} \cdot a_{n+1} + a_m \cdot a_n$. (Univ., Craiova, 1996)

A12. Să se arate că pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ nu există matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB - BA = I_n$.

A13. Fie $D = \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$ și $f : D \to D$, $f((x \quad y)) = (3x + y \quad 4x + 3y)$. Să se arate că:
a) $f(aA) = af(A)$, $\forall\, a \in \mathbb{C}$ și $A \in D$;
b) $f(A+B) = f(A) + f(B)$, $\forall\, A, B \in D$;
c) f este funcție bijectivă.
d) Dacă $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, atunci
$f((x \quad y)) = {}^t\left(A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

A14. Fie $D = \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$, funcțiile $f, g : D \to D$ și matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$.
Dacă:
$f((x \quad y)) = (a_{11}x + a_{12}y \quad a_{21}x + a_{22}y)$,
$g((x \quad y)) = (b_{11}x + b_{12}y \quad b_{21}x + b_{22}y)$,
să se arate că:
$(f \circ g)((x \quad y)) = {}^t\left((A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.
Generalizare.

A15. Să se rezolve ecuațiile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
a) $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;
b) $A^3 + A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A16. Harta unor trasee turistice este redată sub forma unui graf în figura 1.
a) Să se scrie matricea booleană A a grafului dat.
b) Să se calculeze A^2, A^3, A^4.
c) Între ce puncte turistice există cele mai multe trasee de lungime 2? Dar de lungime 3?
d) Găsiți punctele turistice între care există cel puțin 5 trasee turistice de lungime 4.

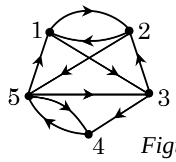


Figura 1

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 8\end{pmatrix}$ şi numerele reale $\alpha=\mathrm{Tr}(A+B)$, $\beta=\mathrm{Tr}(2A-3B)$, $\gamma=$ suma elementelor matricei AB şi $u=\alpha+\beta+\gamma$. Atunci:
a) $u=-7$; b) $u=-28$; c) $u=49$; d) $u=56$.

❍ 2. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}10 & -4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 1 & 7\end{pmatrix}$ şi $\alpha=$ suma elementelor matricei $AB-{}^tA\,{}^tB$. Atunci:
a) $\alpha=-82$; b) $\alpha=47$; c) $\alpha=-38$; d) $\alpha=82$.

❍ 3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Atunci matricea A^3 este egală cu:
a) $2A-3I_3$; b) O_3; c) $4A-6I_3$; d) $13A-17I_3$.

❍ 4. Se consideră egalitatea $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3a-2 & b^2+2b\\ 2^{-x}-9 & y^2+7\\ \sqrt{u^2+16} & \lg v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 9 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ şi $m=a+b+x+y-u^2+v$, unde $b>0$. Atunci $|m|$ este:
a) $9\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{3}$; d) 10.

❍ 5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $f(X)=X^3-5X^2+8I_3$. Atunci $f(A)$ este:
a) I_3; b) ${}^tA$; c) A^2; d) O_3.

Testul 2

❍ 1. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 3^x-1 & 3^x\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2^y+1 & 0\\ 3^y & 3^y+1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2^z & 6^z\\ -6^z & 3^z\end{pmatrix}$. Să se determine x, y, z astfel încât $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot A+B\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=C$.

❍ 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & a \end{pmatrix}$. Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_n - 1 & x_n \end{pmatrix}$ şi să se determine (x_n) şi matricea $B = A \cdot A^2 \cdot \ldots \cdot A^n$.

❍ 3. Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2001} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2001 \\ 0 & 2^{2001} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

❍ 4. Folosind binomul lui Newton pentru matrice să se calculeze A^n, dacă $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. (Bacalaureat, 1996, generalizare)

Testul 3

❍ 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $aA^2 + bA + 2I_3 = O_3$.

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există numerele $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = a_n A + b_n I_3$.

❍ 2. Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

❍ 3. Se consideră mulțimea de matrice $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \middle|\, x \in \mathbb{R}^* \right\}$.

a) Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}$, atunci $A^2 \cdot B^2 \in \mathcal{M}$.

b) Există matrice $A \in \mathcal{M}$ astfel încât $A^{2001} = -I_2$?

❍ 4. Se consideră matricele $A_k = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \\ \varepsilon^{3k} & (1+\varepsilon)^{2k} & (1+\varepsilon)^{3k} \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}$, unde ε este rădăcina cubică a unității. Să se calculeze matricea $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

CAPITOLUL III. DETERMINANŢI

1 DETERMINANTUL DE ORDINUL n. PROPRIETĂȚI

1.1. DETERMINANTUL DE ORDINUL 2

Să considerăm sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ (1) şi matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a coeficienților necunoscutelor x_1, x_2.

Rezolvarea acestui sistem este cunoscută. Aplicând metoda reducerii se obține:

$$\begin{cases} (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} \\ (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})x_2 = b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21} \end{cases}.$$

Dacă numărul $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$, atunci soluția sistemului este:

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}; \quad x_2 = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}. \quad (2)$$

Se observă că numitorul fracțiilor din relația (2) reprezintă diferența dintre produsul elementelor de pe diagonala principală a matricei A şi produsul elementelor de pe diagonala secundară a matricei A.

❖ **DEFINIȚIE**

• Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Numărul $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se numeşte **determinantul de ordinul 2** sau **determinantul** matricei A.

Pentru determinantul de ordinul 2 se foloseşte notația:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \det(A) \text{ sau } |A|.$$

Produsele $a_{11} \cdot a_{22}$ şi $a_{12} \cdot a_{21}$ se numesc **termenii determinantului** de ordinul 2.

☞ ***Exemple***

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) = 8.$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$

Revenim la formulele (2) care dau soluţiile sistemului (1). Se observă că numărătorii fracţiilor reprezintă determinanţii matricelor $A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ şi $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$.

Aceste matrice sunt obţinute din matricea A înlocuind coloana coeficienţilor necunoscutelor x_1, respectiv x_2 cu coloana formată din termenii liberi b_1, b_2 ai ecuaţiilor sistemului (1). Astfel, cu ajutorul determinantului de ordinul 2, formulele (2) se scriu sub forma:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad (3)$$

formule denumite **formulele lui Cramer** pentru sistemul de două ecuaţii liniare cu două necunoscute.

1.2. DETERMINANTUL DE ORDINUL 3

Să considerăm acum sistemul de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \ (4) \text{ şi } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

matricea coeficienţilor necunoscutelor x_1, x_2, x_3.

Pentru rezolvarea sistemului vom folosi metoda reducerii.

Reducem pentru început necunoscuta x_3. Pentru aceasta înmulţim prima ecuaţie cu a_{23}, apoi cu a_{33} şi o adunăm la ecuaţia a doua înmulţită cu $-a_{13}$, respectiv la ecuaţia a treia înmulţită cu $-a_{13}$. Se obţine sistemul de două ecuaţii liniare cu necunoscutele x_1, x_2:

$$\begin{cases} (a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13})x_1 + (a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13})x_2 = b_1 \cdot a_{23} - b_2 \cdot a_{13} \\ (a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13})x_1 + (a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13})x_2 = b_1 \cdot a_{33} - b_3 \cdot a_{13} \end{cases} \quad (5)$$

Reducem necunoscuta x_2 din ecuaţiile (5). Se obţine ecuaţia:

$$\left[(a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13})(a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}) - (a_{11} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{31})(a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13})\right]x_1 =$$
$$= (b_1 \cdot a_{23} - b_2 \cdot a_{13})(a_{11} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}) - (b_1 \cdot a_{33} - b_3 \cdot a_{13})(a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}). \quad (6)$$

Desfiinţând parantezele şi cu notaţiile:

$d_{x_1} = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{12}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}$ şi

$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$, relaţia (6) se aduce la forma $d \cdot x_1 = d_{x_1}$. (7)

❖ DEFINIŢIE

- Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

  Numărul $d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ (8) se numeşte **determinantul de ordinul trei** sau **determinantul** matricei A.

Pentru determinantul de ordinul trei se folosesc notaţiile:

$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\det(A)$ sau $|A|$.

Cei şase termeni din scrierea determinantului de ordinul 3 se numesc **termenii determinantului**.

Se observă că d_{x_1} este valoarea determinantului de ordinul 3:

$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, determinant obţinut din determinantul d înlocuind coloana coeficienţilor necunoscutei x_1 cu coloana formată din termenii liberi b_1, b_2, b_3.

Dacă $d \neq 0$, din relaţia (7) se obţine $x_1 = \frac{d_{x_1}}{d}$.

În mod analog se pot obţine necunoscutele x_2 şi x_3 considerând determinanţii de ordin 3, d_{x_2} şi d_{x_3} obţinuţi din d prin înlocuirea coloanelor a doua şi a treia prin coloana formată cu termenii liberi ai ecuaţiilor sistemului (1).

Aşadar, dacă $d \neq 0$, sistemul (1) are soluţia unică dată de formulele lui Cramer: $x_1 = \frac{d_{x_1}}{d}, x_2 = \frac{d_{x_2}}{d}, x_3 = \frac{d_{x_3}}{d}$. (9)

CALCULUL DETERMINANTULUI DE ORDINUL 3

Relația (8) care dă valoarea determinantului de ordinul 3 este destul de dificil de memorat fără un suport logic. De aceea se vor indica două tehnici practice de obținere a celor şase termeni, tehnici specifice numai determinantului de ordinul 3.

1. Regula lui Sarrus

Calculul determinantului de ordinul 3 prin regula lui Sarrus se face parcurgând următoarele etape:

- se scriu primele două linii sub determinant;
- se adună produsele termenilor situați pe diagonala principală şi pe diagonalele paralele cu aceasta situate sub ea;
- se scad produsele termenilor situați pe diagonala secundară şi pe diagonalele paralele cu aceasta situate sub ea.

Aranjarea calculelor se face astfel:

$$\begin{matrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{matrix}\end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

☞ ***Exemplu***

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4\\ 5 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{matrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4\\ 5 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{matrix} 2 & -1 & 4\\ 5 & 3 & -2\end{matrix}\end{matrix} = 2\cdot3\cdot1+5\cdot1\cdot4+0\cdot(-1)\cdot(-2)-4\cdot3\cdot0-(-2)\cdot1\cdot2-1\cdot(-1)\cdot5=35$$

2. Regula triunghiului

Cele şase produse din formula determinantului de ordinul 3 se pot obține printr-o altă tehnică numită **regula triunghiului**. Această regulă este descrisă mai jos indicând secvențial modul de construire a fiecărui produs:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}}\\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}}\\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$(a_{11}\quad a_{22}\quad a_{33})\qquad (a_{13}\quad a_{21}\quad a_{32})\qquad (a_{12}\quad a_{23}\quad a_{31})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\left(a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31}\right) \quad \left(a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33}\right) \quad \left(a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32}\right)$$

În concluzie, $d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

☞ ***Exemplu***

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 5 + 4\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot 3 - 4\cdot 1\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot(-1) = -15$$

➲ **PRECIZARE**

- Pentru o matrice $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, determinantul său este determinantul de ordinul 1, $d = |a_{11}| = a_{11}$.

☞ ***Exemplu***

Matricea $A = (-5) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ are determinantul $d = |-5| = -5$, iar matricea $B = (2-i) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ are determinantul $d = |2-i| = 2-i$.

1.3. DETERMINANTUL DE ORDINUL n

În continuare se va defini determinantul unei matrice pătratice de ordinul n în aşa fel încât pentru $n = 2$ şi $n = 3$ să se determine determinantul de ordinul 2, respectiv 3. Pentru aceasta vor fi analizate formulele de calcul pentru determinantul de ordinul 2, respectiv 3 şi se va deduce o regulă generală prin care se va defini determinantul de ordinul n.

Să considerăm formulele determinanților de ordinul 2, respectiv 3:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Referitor la aceşti determinanți se observă că:

1. termenii acestor determinanți sunt produse de elemente ce aparțin la linii şi coloane diferite şi totodată orice astfel de produs este termen în formula determinanților;

2. fiecare termen este un produs de forma $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)}$, unde $\sigma \in S_2$ pentru determinantul d_2 şi de forma $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)}$, unde $\sigma \in S_3$ pentru determinantul d_3;

3. termenii cu semnul (+) corespund permutărilor pare, iar termenii cu semnul (–) corespund permutărilor impare.

Cu aceste observații, cei doi determinanți se pot scrie sub forma:

$\Delta_2 = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)}$, $\Delta_3 = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot a_{3\sigma(3)}$.

($\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutărilor σ.)

Această regulă unitară de scriere a determinantului de ordinul 2 şi 3 cu ajutorul permutărilor, permite extinderea noțiunii de determinant pentru o matrice pătratică de ordinul n, $n \geq 4$.

Fie $A = (a_{ij})_{n \times n}$ o matrice pătratică de ordinul n.

❖ DEFINIȚIE

• Numărul $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$, unde S_n este mulțimea permutărilor de gradul n şi $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ, se numeşte determinantul matricei A sau **determinantul de ordinul n**.

Determinantul de ordinul n se notează astfel:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Produsele $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$, unde $\sigma \in S_n$, se numesc **termenii determinantului** de ordin n.

În mod uzual se spune despre elementele, liniile şi coloanele matricei A că sunt elementele, liniile, respectiv coloanele determinantului $\det(A)$. Determinantul matricei $A = (a_{ij})_{n \times n}$ se poate nota şi sub forma $|A|$ sau $|a_{ij}|_n$.

➲ OBSERVAȚII

1. Noțiunea de determinant al unei matrice are sens numai pentru matricele pătratice.

2. Matricea nu trebuie să se confunde cu determinantul său; o matrice este o funcție, iar determinantul matricei este un număr.

3. În formula determinantului unei matrice de ordinul n sunt n! termeni dintre care $\frac{n!}{2}$ au semnul (+) şi $\frac{n!}{2}$ au semnul (–).

4. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci $\det(A) \in K$, unde $K \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.4. DEZVOLTAREA UNUI DETERMINANT DUPĂ O LINIE SAU DUPĂ O COLOANĂ

Calculul unui determinant de ordinul n, $n \geq 4$ pornind de la definiţie este foarte incomod. De exemplu, pentru un determinant de ordinul 4 este necesară determinarea a $4! = 24$ termeni, precum şi paritatea celor 24 de permutări de gradul 4. De aceea se va da un procedeu prin care calculul acestuia se va reduce la calculul unui anumit număr de determinanţi de ordinul n – 1. Astfel, pentru determinaţii de ordin 2, respectiv 3, avem:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11} \cdot |a_{22}| - a_{12} \cdot |a_{21}|. \quad (1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{33}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

sau $$\Delta_3 = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Se observă că Δ_2 se scrie cu ajutorul a doi determinanţi de ordinul 1 iar Δ_3 cu ajutorul a trei determinanţi de ordin 2. Fiecare din determinanţii din scrierea lui Δ_2, respectiv Δ_3 se obţine din Δ_2, respectiv Δ_3 suprimând linia şi coloana elementului scris în faţa lui.

Fie $d = |a_{ij}|_n$ un determinant de ordin n.

❖ DEFINIŢII

- Determinantul de ordinul $(n-1)$ care se obţine suprimând linia i şi coloana j din determinantul d se numeşte **minorul elementului** a_{ij} şi se notează d_{ij}.
- Numărul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$ se numeşte **complementul algebric al elementului** a_{ij}.

Unui determinant de ordinul n i se pot asocia n^2 minori de ordinul $(n-1)$, respectiv n^2 complemenţi algebrici.

Cu aceste noi noţiuni, relaţiile (1) şi (2) devin:

$\Delta_2 = a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{12}$ şi $\Delta_3 = a_{11}\delta_{11} + a_{12}\delta_{12} + a_{13}\delta_{13}$. (3)

Aşadar, determinanţii de ordin 2, respectiv 3 se scriu ca sumă de produse dintre elementele liniei întâi şi complemenţii algebrici ai acestora.

Prin calcul direct sau aranjarea adecvată a formulelor (1) şi (2) se poate arăta că alegând oricare linie (coloană) din determinant au loc relaţiile:

$\Delta_2 = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2}$ şi $\Delta_3 = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + a_{i3}\delta_{i3}$, $i \geq 1$.

Pentru determinantul de ordinul n, $d = |a_{ij}|_n$ au loc relaţiile:

$\mathbf{d = a_{i1}\delta_{i1} + a_{i2}\delta_{i2} + \ldots + a_{in}\delta_{in},\ i = \overline{1, n};}$ **(4)**

(dezvoltarea determinantului după linia i)

$\mathbf{d = a_{1j}\delta_{1j} + a_{2j}\delta_{2j} + \ldots + a_{nj}\delta_{nj},\ j = \overline{1, n}.}$ **(5)**

(dezvoltarea determinantului după coloana j)

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Soluţie

• Exersăm dezvoltarea determinantului după linia a treia:

$\det(A) = 3 \cdot \delta_{31} + 0 \cdot \delta_{32} + (-1)\delta_{33} + 0 \cdot \delta_{34}$.

Avem: $\delta_{31} = (-1)^{3+1} d_{31} = d_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3$

$\delta_{33} = (-1)^{3+3} d_{33} = d_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 12$

Aşadar, $\det(A) = 3 \cdot 3 + 0 + (-1) \cdot 12 + 0 = -3$.

Determinarea complemenţilor algebrici δ_{32} şi δ_{34} nu a fost necesară deoarece în scrierea determinantului, aceştia erau înmulţiţi cu zero.

Exersăm dezvoltarea determinantului după coloana a doua:

$\det(A) = (-1)\delta_{12} + (-1)\delta_{22} + 0 \cdot \delta_{32} + 2 \cdot \delta_{42}$

Avem: $\delta_{12} = (-1)^{1+2} d_{12} = -d_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -2$

$$\delta_{22} = (-1)^{2+2} d_{22} = d_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -21$$

$$\delta_{42} = (-1)^{4+2} d_{42} = d_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Aşadar, $\det(A) = (-1)(-2) + (-1)(-21) + 0 + 2\cdot(-13) = -3.$

☒ **2.** Să se calculeze determinantul $d = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ având toate elementele de deasupra diagonalei principale zero *(determinant triunghiular).*

<u>Soluție</u>

Facem dezvoltarea determinantului după prima linie şi obținem:

$$d = a_{11}\delta_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Continuăm procedeul dezvoltării după prima linie şi după încă un pas se obține $d = a_{11}a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

După n paşi se obține $d = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$.

➲ **OBSERVAȚIE**

- Un determinant triunghiular are valoarea egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

1.5. PROPRIETĂȚI ALE DETERMINANȚILOR

Unele calcule din diferitele tehnici de găsire a valorii determinantului unei matrice pătratice pot fi eliminate dacă se au în vedere anumite proprietăți ale acestora.

▣ **P1.** Determinantul unei matrice A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^{t}A$: $\mathbf{det(A)=det({}^{t}A)}$.

Într-adevăr, dezvoltarea determinantului matricei A după linia i coincide cu dezvoltarea după coloana i a determinantului matricei transpuse.

➲ OBSERVAȚIE

- Din această proprietate se desprinde concluzia că orice proprietate dată pentru linii într-un determinant este adevărată şi pentru coloanele lui.

▣ **P2.** Dacă într-o matrice pătratică se schimbă între ele două linii (sau coloane) se obține o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.

☞ ***Exemplu***

Fie $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ matricea obținută din A schimbând liniile 1 şi 2 între ele.

Se obține $\det(A)=26$ şi $\det(B)=-26=-\det(A)$.

▣ **P3.** Dacă elementele unei linii (sau coloane) a matricei A se înmulțesc cu un număr k, se obține o matrice B al cărei determinant este egal cu $k\cdot\det(A)$.

Într-adevăr, efectuând dezvoltarea determinantului matricei B după elementele liniei (coloanei) multiplicate cu numărul k, toți termenii dezvoltării conțin factorul comun k şi se obține $k\cdot\det(A)$.

☞ ***Exemplu***

Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 0 & -12\end{pmatrix}$ matricea obținută din A înmulțind elementele liniei a treia cu factorul (-3).

Se obține $\det(A)=15$ şi $\det(B)=-45=-3\cdot\det(A)$.

❑ **REȚINEM!**
Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ k\in\mathbb{C}\Rightarrow$
$\Rightarrow det(kA)=k^n\ det(A)$.

▣ **P4.** Dacă elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice pătratică sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

Într-adevăr, dezvoltând determinantul matricei după linia (coloana) care are toate elementele nule se obține valoarea determinantului egală cu zero.

☞ ***Exemplu***

Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \\ -8 & 3 & \sqrt{5} & i^5 \end{pmatrix}$, atunci $\det(A) = 0 \cdot \delta_{21} + 0 \cdot \delta_{22} + 0 \cdot \delta_{23} + 0 \cdot \delta_{24} = 0.$

> ▣ **P5.** Dacă o matrice pătratică are două linii (coloane) identice, atunci determinantul ei este nul.

Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice în care două linii sunt identice. Dacă schimbăm aceste linii între ele se obține o matrice B egală cu A. Aşadar $\det(A) = \det(B)$.

Aplicând proprietatea P_2, rezultă că $\det(A) = -\det(B)$ şi, ca urmare, avem $\det(A) = -\det(A)$, deci $\det(A) = 0$.

☞ ***Exemplu***

Matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 4 & -i & 4 \end{pmatrix}$ are coloanele 1 şi 3 identice.

Rezultă că $\det(A) = 0$. (Verificați prin calcul.)

> ▣ **CONSECINȚĂ**
>
> Fie $d = |a_{ij}|_n$ un determinant de ordinul n. Pentru orice $i \neq j$ au loc egalitățile:
>
> **1.** $a_{i1}\delta_{j1} + a_{i2}\delta_{j2} + \ldots + a_{in}\delta_{jn} = 0;$
>
> **2.** $a_{1j}\delta_{1i} + a_{2j}\delta_{2i} + \ldots + a_{nj}\delta_{ni} = 0.$

Demonstrație

Pentru relația 1 considerăm determinantul d' obținut din d înlocuind linia j cu linia i. Rezultă că $d' = 0$. Dezvoltând determinantul d' după linia j se obține egalitatea 1.

Pentru egalitatea 2 se foloseşte proprietatea P1 şi egalitatea 1. ■

> ▣ **P6.** Dacă elementele a două linii (coloane) ale unei matrice pătratice sunt proporționale, atunci determinantul ei este nul.

Într-adevăr, aplicând proprietatea P_3, se obține că determinantul matricei este produsul dintre factorul de proporționalitate şi determinantul unei matrice cu două linii (coloane) identice. Conform proprietății P_5 acest determinant este nul.

☞ ***Exemplu***

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4 & 0\\ -4 & 5 & 2 & 1\\ 6 & -4 & 8 & 0\\ 4 & -7 & 1 & -1\end{pmatrix}$ al cărei determinant se cere.

Se observă că liniile 1 şi 3 sunt proporționale, factorul de proporționalitate fiind $k=2$. Conform proprietății P6 $\det(A)=0$. Aplicând această proprietate, rezultatul s-a obținut fără calcul.

> ▣ **P7.** Fie $A=(a_{ij})_{n\times n}$ o matrice de ordinul n astfel încât elementele liniei i sunt de forma $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$, $j=\{1,2,\dots,n\}$. Dacă B şi C sunt matricele obținute din A înlocuind elementele liniei i cu elementele b_{ij}, respectiv c_{ij}, atunci $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

Demonstrație

Avem

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+c_{ij})\delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\delta_{ij}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\delta_{ij}=\det(B)+\det(C).\blacksquare$$

☞ ***Exemplu***

Fie $A=\begin{pmatrix}a+b & a_1+b_1\\ c & c_1\end{pmatrix}$. Atunci $B=\begin{pmatrix}a & a_1\\ c & c_1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}b & b_1\\ c & c_1\end{pmatrix}$.

Conform proprietății 7 are loc egalitatea $\det(A)=\det(B)+\det(C)$, adică

$$\begin{vmatrix}a+b & a_1+b_1\\ c & c_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a_1\\ c & c_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & b_1\\ c & c_1\end{vmatrix}.$$

➲ OBSERVAȚIE

- Proprietatea 7 este specifică determinanților:
  $\det(A)=\det(B)+\det(C)$, dar $A\neq B+C$.

> ▣ **P8.** Dacă o linie (o coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii (coloane), atunci determinantul ei este zero.

Într-adevăr, dacă o linie (coloană) a matricei A este o combinație liniară de celelalte linii (coloane), atunci aplicând proprietatea 7, $\det(A)$ se scrie ca o sumă de determinanți care au două linii proporționale, deci sunt nuli.

☞ ***Exemplu***

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 5 & -10\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

Linia a doua este o combinație liniară de celelalte linii:
$a_{2j} = \alpha a_{1j} + \beta a_{3j},\ j \in \{1, 3\}$ şi $\alpha = 2, \beta = -1.$

Se obține că $\det(A) = 0,$ conform proprietății P8. (Verificați prin calcul.)

▣ **P9.** Dacă la elementele unei linii (coloane) a unei matrice pătratice A se adună elementele altei linii (coloane) înmulțite cu acelaşi număr, atunci matricea rezultată are acelaşi determinant ca matricea A.

Pentru justificare se pot folosi proprietățile 7 şi 6.

➲ OBSERVAȚIE

- Proprietatea 9 dă posibilitatea ca prin operații efectuate cu diferite linii sau coloane ale unei matrice sau ale unui determinant de ordin n, să se obțină pe o linie sau coloană $(n-1)$ elemente nule care reduce calculul determinantului dat la unul de ordin inferior.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze: $d = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

Soluție

Aplicând proprietatea P9, adunăm linia a doua înmulțită cu (-3) la prima linie şi se obține:

$$d = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \delta_{11} = -5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 200.$$

☒ **2.** Să se calculeze determinantul, scriind rezultatul sub formă de produs:

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \text{diferite între ele.}$$

Soluție

Pentru calcule mai restrânse vom folosi tehnica creării de zerouri pe o linie sau coloană şi alte proprietăți ale determinanților. Scădem din linia 4 linia 3 înmulțită cu a, apoi din linia a treia pe a doua înmulțită cu a şi din linia a doua scădem linia întâi înmulțită cu a. Se obține succesiv:

$$V_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}.$$

Se dezvoltă determinantul obţinut după prima coloană şi apoi se dau factori comuni pe coloane. Rezultă:

$$V_4=\begin{vmatrix}b-a & c-a & d-a\\ b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad\\ b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}$$

Cu ultimul determinant obţinut, notat V_3 se procedează ca mai sus sau, de exemplu, se poate scădea coloana întâi din celelalte şi se obţine:

$$V_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & c-b & d-b\\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2\end{vmatrix}=(c-b)(d-b)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & 1\\ b^2 & c+b & d+b\end{vmatrix}=$$

$=(c-b)(d-b)(d-c)$. Aşadar, $V_4=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

➲ PRECIZARE

- Determinanţii V_4 şi V_3 se numesc **determinanţi Vandermonde** de ordinul 4, respectiv 3.

> *Theophile VANDERMONDE (1735-1796) matematician şi fizician elveţian*
>
> *În matematică a avut contribuţii în studiul determinanţilor, a funcţiilor simetrice şi a teoriei ecuaţiilor algebrice. În fizică a studiat dilatarea gazelor.*

☒ **3.** Să se calculeze determinantul:

$$d_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Soluţie

Se dezvoltă determinantul după coloana întâi şi se obţine:

$$d_n=1\cdot\delta_{11}+(-1)\delta_{21}=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

Primul determinant este un determinant triunghiular şi are valoarea 2^{n-1}, iar al doilea este de tipul celui inițial dar de ordinul $(n-1)$.

Aşadar, avem relația de recurență $d_n = 2^{n-1} + d_{n-1}$. Dând lui n valori şi însumând relațiile obținute se găseşte $d_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$.

> ▣ **P10.** Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\mathbf{det(AB) = det(A) \cdot det(B)}$.

◢ **Temă de proiect**

Verificarea proprietății P10 pentru cazul $n \in \{2, 3\}$. Generalizare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze determinanții de ordin 2:

a) $\begin{vmatrix} -6 & -10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{32} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{27} \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2+3i & 2-3i \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix}$, $\varepsilon^3 = 1$.

E2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 10$; b) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 \\ 3 & 2^x \end{vmatrix} = 5$;

c) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - x$;

d) $\begin{vmatrix} x^2+2x & x+3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & -1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \lg(x+1) & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \log_2 32$.

E3. Să se calculeze determinanții de ordin 3:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 8 & 1 & 5 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 4 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 \\ C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 \\ C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} A_3^0 & A_3^1 & A_3^2 \\ A_4^1 & A_4^2 & A_4^3 \\ A_5^0 & A_5^1 & A_5^2 \end{vmatrix}$.

E4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

b) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ 2x & 2x-1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

E5. Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Să se calculeze suma $S = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

E6. Cu ce semn apar în determinantul de ordinul 4 termenii: $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$, $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$, $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$?

E7. Cu ce semn apare în determinantul de ordin n produsul elementelor de pe:
a) diagonala principală;
b) diagonala secundară?

E8. Sunt termenii unui determinant produsele: $a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54}$, $a_{13}a_{24}a_{31}a_{43}$, $a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54}$?

E9. Să se calculeze determinanții de ordin 4:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

E10. Să se rezolve ecuația:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

E11. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A) = 2$, $\det(4A) = 128$, să se determine n.

APROFUNDARE

A1. Folosind proprietățile determinanților, să se scrie ca produs:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & a+1 \\ b & b^2+1 & b+1 \\ c & c^2+1 & c+1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

A2. Să se calculeze determinanții trigonometrici:

a) $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 x & \cos^2 x \\ 1 & \sin^2 y & \cos^2 y \\ 1 & \sin^2 z & \cos^2 z \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \cos 2x & \cos x & 1 \\ \cos 2y & \cos y & 1 \\ \cos 2z & \cos z & 1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin^2 x & \sin x \\ \cos 2y & \sin^2 y & \sin y \\ \cos 2z & \sin^2 z & \sin z \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 x & \operatorname{ctg} x \\ 1 & \cos^2 y & \operatorname{ctg} y \\ 1 & \cos^2 z & \operatorname{ctg} z \end{vmatrix}$.

A3. Fie x_1, x_2, x_3 soluțiile ecuației $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Să se calculeze $d = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

A4. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluțiile ecuațiilor $x^4 - 1 = 0$. Să se calculeze:

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & -2x_4 \\ -2x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & -2x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & -2x_3 & x_4 \end{vmatrix}.$$

A5. Există numere $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația:

$$\begin{vmatrix} 2-a & a-x & x-1 \\ 1-x^2 & x^2 & -1 \\ 2-a-2x & x+a & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2$$ să

aibă o rădăcină întreagă?

A6. Se consideră determinantul

$$f(x)=\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix},\ a\in\mathbb{R}.$$

a) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=0$ are soluții strict negative.
b) Pentru ce valori ale lui $a\in\mathbb{R}$, ecuația $f(x)=0$ are soluții reale?
(ASE, Buc., 1993)

A7. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0;$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}=0;$

c) $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}=0.$

A8. Să se verifice egalitățile:

a) $\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-c-a \end{vmatrix}=$
$=(a+b+c-1)^2;$

b) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}=$
$=1+(a_1+a_2+\dots+a_n).$

A9. Fie $a, b, c, n\in\mathbb{Z}$. Să se arate că determinantul $\begin{vmatrix} a^2+n & ab & ac \\ ab & b^2+n & bc \\ ac & bc & c^2+n \end{vmatrix}$ este divizibil cu n^2.

A10. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu toate elementele egale cu 1 sau -1. Să se arate că 4 divide $\det(A)$. Generalizare.

A11. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Să se arate că $\det\left(A-{}^tA\right)=0.$

A12. Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $a_{ij}=a\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{Q}$, $i=\overline{1,3}$ şi produsul elementelor pe orice linie sau coloană să fie 1. Să se arate că $\det(A)>0$.

A13. Fie $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BA$.
a) Să se arate că $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.
b) Rămâne proprietatea a) adevărată dacă $AB\neq BA$?

A14. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că $\det\left(I_n+A+A^2\right)\geq 0.$

A15. Fie $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că are loc egalitatea $A^2-\mathrm{Tr}(A)\cdot A+\det(A)\cdot I_2=O_2$. *(Relația Hamilton-Cayley)*

A16. Să se demonstreze prin inducție după n că:

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$
$$=\prod_{1\leq j<i\leq n}\left(a_i-a_j\right).$$

(Determinantul Vandermonde de ordin n)

A17. Fie $\Delta_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$. Să se arate că $\Delta_{2n}=\left(a^2-b^2\right)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

A18. Fie $d_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Să se arate că:

a) $d_n = 5d_{n-1} - 6d_{n-2}$, $n \geq 3$.

b) $d_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A19. Fie matricea $A = (a_{ij})_{n \times n}$ astfel încât $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i \geq j \\ i + j, \text{ dacă } i < j \end{cases}$. Să se calculeze $\det(A)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ iar $\alpha = \det(A+B) + \det(AB)$.

Atunci:

a) $\alpha = -90$; b) $\alpha = -120$; c) $\alpha > 0$; d) $\alpha = 0$.

❍ 2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 2 = \det(B)$.

Dacă $\alpha = \det(5A)$ şi $\beta = \det(5B)$, atunci:

a) $(\alpha, \beta) = (10, 10)$; b) $(\alpha, \beta) = (50, 150)$; c) $(\alpha, \beta) = (50, 250)$; d) $(\alpha, \beta) = (5, 25)$.

❍ 3. Fie ecuaţia $\begin{vmatrix} x^2 - 1 & 1 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 2 & x \end{vmatrix}$ cu soluţiile x_1, x_2, $x_1 < x_2$.

Dacă $\alpha = 7x_1^2 - 2x_2^2$, atunci:

a) $\alpha = 28$; b) $\alpha = -70$; c) $\alpha = -98$; d) $\alpha = 70$.

❍ 4. Fie ecuaţia $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 + x + 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$.

Atunci modulul diferenţei soluţiilor ei este: a) 2; b) 3; c) 1; d) 4.

Testul 2

❍ 1. Să se calculeze determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2 \\ 1 & b+c & b^2 \\ 1 & c+a & c^2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

❍ 2. Să se rezolve ecuaţiile: a) $\begin{vmatrix} 2^x & 2^{x+1} - 2 \\ 2^x - 1 & 2^x + 8 \end{vmatrix} = 30$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lg x & \lg 2x & 1 \\ \lg^2 x & \lg^2 2x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

❍ **3.** **Să se arate că ecuația** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^3 \\ 1 & x^2 & x^6 \end{vmatrix} = 0$ **are cel puțin o soluție complexă cu partea reală nulă pentru** $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

❍ **4.** **Se consideră funcția** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

a) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

b) Să se discute numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 8m(x^2 - 1)$, $m \in \mathbb{R}$.

❷ APLICAȚII ALE DETERMINANȚILOR ÎN GEOMETRIA PLANĂ

2.1. ECUAȚIA DREPTEI DETERMINATE DE DOUĂ PUNCTE DISTINCTE COLINIARITATEA A TREI PUNCTE

Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ două puncte distincte în planul raportat la reperul cartezian xOy şi $E(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1.$

Se observă că ecuația $E(x, y) = 0$ reprezintă ecuația unei drepte. De asemenea, $E(x_1, y_1) = 0$ şi $E(x_2, y_2) = 0$, deoarece determinanții obținuți au două linii egale.

Rezultă că punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ aparțin dreptei de ecuație $E(x, y) = 0$.

Aşadar, **ecuația dreptei determinate de punctele** $\mathbf{A(x_1, y_1)}$ **şi** $\mathbf{B(x_2, y_2)}$ se scrie sub formă de determinant astfel:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Dacă $M(x, y)$ este un punct oarecare al dreptei AB, atunci relația (1) exprimă şi faptul că punctele $M(x, y)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ sunt puncte coliniare.

În concluzie, **trei puncte** $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ sunt **puncte coliniare** dacă şi numai dacă are loc egalitatea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Problemă rezolvată

☒ Se consideră punctele $A(-2, 3)$, $B(1, -4)$ şi $C(2m-1, 10)$.

a) Să se scrie ecuația dreptei AB.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele A, B, C să fie coliniare.

<u>*Soluție*</u>

a) Aplicând formula (1), ecuația dreptei AB sub formă de determinant este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ care este echivalentă cu ecuația $7x + 3y + 5 = 0$.

> ◢ **Temă**
> **1. Să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC, dacă $A(-1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(4, -4)$.**
> **2. Studiați coliniaritatea punctelor:**
> **a) $A(1, 0)$, $B(-3, 4)$, $C(5, -4)$;**
> **b) $M(2, 1)$, $N(0, m+3)$, $P(-1, 7)$.**

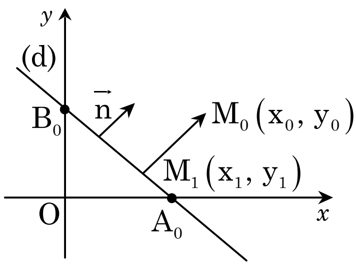
b) Condiția de coliniaritate a punctelor A, B, C conduce la relația:

$$\begin{vmatrix} 2m-1 & 10 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ echivalentă cu $14m + 28 = 0$, care conduce la $m = -2$.

Aşadar, pentru $m = -2$ punctele A, B, C sunt coliniare, iar pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, punctele sunt necoliniare.

2.2. DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

Fie d o dreaptă de ecuație generală $ax + by + c = 0$, cu vectorul normal $\vec{n}(a, b)$, iar $M_0(x_0, y_0)$ un punct din plan. Notăm cu $M_1(x_1, y_1)$ proiecția punctului M_0 pe dreapta d. Rezultă că vectorii $\vec{n}$ şi $\overrightarrow{M_1M_0}$ sunt vectori coliniari şi, ca urmare, are loc egalitatea



$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_0}| \cdot \cos 0^\circ$, din care se obține că:

$$d(M_0, M_1) = |\overrightarrow{M_1M_0}| = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

Din condiția că $M_1(x_1, y_1) \in d$ se obține $ax_1 + by_1 + c = 0$.

Înlocuind în relația (3) se obține:

$d(M_0, M_1) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (4), relație care reprezintă formula **distanței de la punctul $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$ la dreapta de ecuație $\mathbf{ax + by + c = 0}$.**

2.3. ARIA UNEI SUPRAFEȚE TRIUNGHIULARE

Se consideră reperul cartezian xOy şi punctele necoliniare $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

În cele ce urmează se va da o nouă exprimare ariei unei suprafețe triunghiulare folosind determinanți.

Pentru aceasta se porneşte de la formula binecunoscută a ariei: $\mathcal{A}_{[ABC]} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot d(A, BC)$. (5)

Avem că $BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$, iar ecuația dreptei BC este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, echivalentă cu $(y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$.

Conform formulei (4) se obține:

$$d(A, BC) = \frac{|(y_2 - y_3)x_1 - (x_2 - x_3)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} = \frac{|\Delta|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}.$$

Cu aceste explicitări, formula (5) a ariei suprafeței triunghiulare devine:

$$\mathcal{A}_{[ABC]} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \cdot \frac{|\Delta|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|.$$

Aşadar, aria suprafeței triunghiulare [ABC], unde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, este: $\boxed{A_{[ABC]} = \frac{1}{2}.|\Delta|, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6)}$

➲ OBSERVAȚIE

- Condiția de coliniaritate a trei puncte se poate regăsi scriind că aria suprafeței triunghiulare corespunzătoare este zero, deci că $\Delta = 0$.

Problemă rezolvată

☒ Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -1)$. Să se determine:

a) lungimea înălțimii triunghiului duse din A;

b) aria suprafeței triunghiulare $[ABC]$;

c) aria suprafeței patrulatere $[ABDC]$, unde $D(5, 4)$.

Soluție

a) Ecuația dreptei BC este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 11 = 0.$$ Rezultă

că $d(A, BC) = \dfrac{|4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \dfrac{6\sqrt{17}}{17}$.

> ◢ **Temă**
> **Se dau punctele $A(-2, -1)$, $B(3, 4)$, $C(0, -6)$.**
> **a) Calculați lungimile înălțimilor triunghiului ABC.**
> **b) Calculați $\mathcal{A}_{[ABC]}$, $\mathcal{A}_{[OBC]}$.**
> **c) Sunt coliniare punctele A, O, B?**

b) $\mathcal{A}_{[ABC]} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$. Aşadar, $\mathcal{A}_{[ABC]} = \dfrac{1}{2} \cdot |-6| = 3$.

c) Avem: $\mathcal{A}_{[ABDC]} = \mathcal{A}_{[ABC]} + \mathcal{A}_{[BCD]}$. Dar $\mathcal{A}_{[BCD]} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 13$,

deci $\mathcal{A}_{[BCD]} = \dfrac{13}{2}$. Se obține, $\mathcal{A}_{[ABDC]} = 3 + \dfrac{13}{2} = \dfrac{19}{2}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Fie punctele $A(-3, -2)$, $B(5, -1)$, $C(-1, -3)$.

a) Să se scrie ecuațiile dreptelor AB, AC, BC.

b) Ce lungimi au înălțimile triunghiului ABC?

c) Să se calculeze $\mathcal{A}_{[ABC]}$ prin două procedee.

E2. Se dau punctele $A(3, 4)$, $B(3, -2)$, $C(2a+1, 1)$ şi $D(-3, 1)$.

a) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ punctele A, B, C sunt coliniare?

b) Calculați aria suprafeței [ABD].

c) Punctul $M(m^2 - 2, 4m - 1)$, $m \in \mathbb{Z}$, este situat la distanța $\sqrt{5}$ față de dreapta AD. Să se determine coordonatele punctului M şi $\mathcal{A}_{[MAD]}$.

E3. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ dacă punctele A, B, C sunt coliniare:
a) $A(m-1, 3)$, $B(2m, -m)$, $C(2m-3, 1+m)$;
b) $A(m+n, 1+m)$, $B(2m-n, 1)$, $C(m, n+1)$.

E4. Se dau punctele $A(8, 0)$, $B(3, 6)$, $C(0, 3)$ şi $Ox \cap BC = \{D\}$, $AB \cap Oy = \{E\}$.
a) Să se scrie ecuaţiile dreptelor BC şi AB.
b) Să se calculeze aria suprafeţei [ABC].
c) Sunt coliniare mijloacele segmentelor [OB], [AC], [DE]?

E5. Să se determine punctele de pe dreapta $3x+2y-12=0$ situate la distanţa 3 de dreapta $12x-5y+30=0$.

E6. Se consideră dreptele:
$d_1: 2x+y-3=0$ şi $d_2: x-y+5=0$.
Să se determine:
a) $A \in d_2$, astfel încât $d(A, d_1) = 2\sqrt{5}$;
b) $B \in d_1$, astfel încât $d(B, d_2) = 5\sqrt{2}$.

E7. Fie patrulaterul ABCD, $A(1, 2)$, $B(8, 2)$, $C(6, 4)$, $D(3, 4)$.
a) Să se scrie ecuaţiile laturilor şi diagonalelor patrulaterului.
b) Să se calculeze $\mathcal{A}_{[ABCD]}$.
c) Dacă $AD \cap BC = \{E\}$, $BD \cap AC = \{F\}$ iar M, N sunt mijloacele laturilor [AB], [DC], să se arate că punctele E, F, M, N sunt coliniare.

E8. Se dau punctele $A(3, 2)$ şi $B(2, 4)$. Să se determine punctele M de pe dreapta $x-y=3$ pentru care $\mathcal{A}_{[OAM]} = \mathcal{A}_{[OBM]}$.

E9. Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(4, -2)$, $C(4, -1)$, $D(5, 3)$. Să se determine punctele M de pe dreapta de ecuaţie $3y-x-5=0$ pentru care $\mathcal{A}_{[MAB]} = \mathcal{A}_{[MCD]}$.

E10. Se dau punctele $A(3, 2)$, $B(6, 4)$ şi $C(-2, 2)$. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care $\mathcal{A}_{[MAB]} = \mathcal{A}_{[MBC]}$.

E11. Să se scrie ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $A(-2, 0)$ şi formează cu dreptele de ecuaţii $3x-2y-7=0$ şi $2x+3y+4=0$ un triunghi cu aria 13.

E12. Se consideră patrulaterul ABCD de vârfuri $A(6, 4)$, $B(3, 5)$, $C(-2, -3)$, $D(1, -3)$. Să se determine:
a) aria patrulaterului ABCD;
b) aria patrulaterului format de centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA, DAB.

E13. Fie $A(a, b+1)$, $B(a+1, b^2)$, $C(1, 1)$, $a, b \in \mathbb{Z}$ şi
$\mathcal{M} = \{M(a, b) \mid A, B, C \text{ sunt coliniare}\}$.
a) Câte elemente are mulţimea $\mathcal{M}$?
b) Să se determine aria poligonului format de punctele din mulţimea $\mathcal{M}$.
c) Studiaţi natura poligonului format de punctele mulţimii $\mathcal{M}$.

CAPITOLUL IV. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

1 MATRICE INVERSABILE DIN $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Una din proprietățile operației de înmulțire pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a scos în evidență că există o matrice I_n numită **matricea unitate de ordinul n** cu proprietatea că $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A, \ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

În acest context se pune problema dacă matricea I_n se poate scrie ca produsul a două matrice de ordin n.

Răspunsul este dat introducând noțiunea de inversă a unei matrice.

❖ **DEFINIȚII**

- Fie A o matrice de ordinul n.
  Matricea A se numeşte **matrice inversabilă** în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
- Matricea B se numeşte **inversa matricei** A şi se notează $B = A^{-1}$.

Rezultă că $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, relație din care se obține că $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se cerceteze dacă matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sunt inversabile în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluție

- Presupunem că există $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Din aceste egalități de matrice rezultă că $\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$ şi se găseşte $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Aşadar A este inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Presupunem că există matricea $B^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot$ $\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se obţine egalitatea $\begin{pmatrix} x+u & y+v \\ x+u & y+v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ceea ce este imposibil. Aşadar B nu este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

▣ TEOREMA 1
Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.

<u>*Demonstraţie*</u>

Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $B, B'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=BA=I_n$ şi $AB'=B'A=$ $=I_n$. (1)

Folosind proprietatea de asociativitate a înmulţirii matricelor şi relaţia (1), se obţine:

$B=B\cdot I_n=B\cdot(AB')=(BA)\cdot B'=I_n\cdot B'=B'$, deci $B=B'$.

Aşadar, inversa unei matrice, dacă există, este unică. ■

În continuare se pune problema identificării matricelor inversabile şi găsirii unui procedeu de determinare a inversei unei matrice inversabile, altul decât acela pornind de la definiţie.

Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de ordinul n.

❖ DEFINIŢII

- Matricea A se numeşte **matrice singulară** dacă determinantul ei este nul.
- Matricea A se numeşte **matrice nesingulară** dacă determinantul ei este nenul.

Un exemplu uzual de matrice singulară este matricea nulă O_n, iar de matrice nesingulară este matricea unitate I_n.

▣ TEOREMA 2
Matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $\det(A)\neq 0$ (A este matrice nesingulară).

<u>*Demonstraţie*</u>

„$\Rightarrow$“ Să presupunem că matricea A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci există $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$. Trecând la determinanţi în această relaţie şi aplicând proprietatea 10 a determinaţilor se obţine că: $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=\det(I_n)=1$. Rezultă că $\det(A)\neq 0$.

„$\Leftarrow$" Arătăm că dacă A este matrice nesingulară, atunci este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pentru aceasta vom construi efectiv matricea A^{-1}.

Fie $A=(a_{ij})_{n\times n}$.

• **Etapa I.** Se scrie transpusa matricei A, adică:

$$^{t}A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• **Etapa II.** Se formează o matrice A^* numită **matricea reciprocă** (sau **adjunctă**) a matricei A care se obţine din ^{t}A înlocuind fiecare element al acesteia cu complementul algebric corespunzător:

$$A^*=\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

• **Etapa III.** Se formează matricea $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$ şi se arată că este inversa matricei A. Într-adevăr,

$$AA^{-1}=A\cdot\left(\frac{1}{\det(A)}\cdot A^*\right)=\frac{1}{\det(A)}\cdot AA^*=$$

$$=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Efectuând înmulţirile celor două matrice A şi A^* şi folosind dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii (coloane), precum şi faptul că „suma produselor dintre elementele unei linii (coloane) şi complemenţii algebrici ai elementelor corespunzătoare de pe altă linie (coloană) este egală cu zero" (Consecinţa la proprietatea P5. a determinanţilor), se obţine:

$$AA^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix}=I_n.$$

Analog se obține că $A^{-1}A = I_n$.

Aşadar, dacă $\det(A) \neq 0$, atunci matricea A este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi inversa ei verifică egalitatea:

$$\boxed{\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*}}.}$$

➲ OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI

1. Dacă matricea A este nesingulară, atunci A^{-1} este nesingulară.

2. Dacă matricea A este nesingulară, atunci A^{*} este nesingulară.

Într-adevăr, din relația $AA^{*} = d \cdot I_n$, rezultă că $\det(AA^{*}) = d^n$, de unde se obține că $\det(A^{*}) = d^{n-1} \neq 0$.

3. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dacă şi numai dacă $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

4. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci $A \cdot B$ este inversabilă şi $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Soluție

Cercetăm dacă A este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 12 + 1 = 14 \neq 0.$

Rezultă că există A^{-1}.

Determinăm:

$$^{t}A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } A^{*} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Se obține:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{*} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

◢ **Temă**

Calculați A^{-1} dacă:

a) $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 5 \\ -2 & \sqrt{18} \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

☒ **2.** Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} m & 2 & m+2 \\ -1 & m+3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{C}$.

Să se determine $m \in \mathbb{C}$ astfel încât A să fie inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

<u>*Soluţie*</u>

Conform teoremei 2, A este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă $\det(A) \neq 0$. Avem $\det(A) = -2(m+1)^2$.

Aşadar, A este inversabilă dacă şi numai dacă $m + 1 \neq 0$, adică $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

> **◢ Temă**
> **Aflaţi $m \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} m-2 & 0 \\ 3 & m+3 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.**

❷ ECUAŢII MATRICEALE

Se numeşte **ecuaţie matriceală**, o ecuaţie în care necunoscuta este o matrice.

Să considerăm următoarea ecuaţie matriceală:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (1), unde $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este necunoscuta ecuaţiei.

Vom căuta să determinăm matricea X folosind inversa unei matrice pătratice. Notăm $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi ecuaţia matriceală (1) devine **AX = B**, (2). În acest moment de observă că dacă matricea A este inversabilă, înmulţind ecuaţia (2) la stânga cu A^{-1} se obţine $\mathbf{X = A^{-1}B}$ şi problema este clarificată.

Într-adevăr, $\det(A) = -3 \neq 0$. Aşadar există $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^* = -\dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

iar $X = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ca urmare, se poate spune că există anumite tipuri de ecuaţii matriceale care pot fi rezolvate folosind „inversabilitatea matricelor“.

> **▣ TEOREMĂ**
> Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ matrice inversabile.
> Atunci ecuaţiile matriceale:
> $$\left.\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ AX = B, & B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) & (1) \\ \textbf{b)}\ XA = B, & B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) & (2) \\ \textbf{c)}\ AXC = B, & B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) & (3) \end{array}\right\} \text{au soluţii unice.}$$

<u>*Demonstraţie*</u>

a) Se înmulţeşte ecuaţia (1) la stânga cu matricea $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aplicând asociativitatea înmulţirii se obţine succesiv:

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right) \cdot X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \in \mathcal{M}_{n,\,m}(\mathbb{C}).$$

Aşadar, ecuaţia (1) are soluţie unică în $\mathcal{M}_{n,\,m}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X = A^{-1}B}$.

b) Înmulţind ecuaţia (2) la dreapta cu $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi aplicând asociativitatea înmulţirii, se obţine succesiv:

$$(XA) \cdot A^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow X\left(AA^{-1}\right) = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1} \in \mathcal{M}_{m,\,n}(\mathbb{C}),$$

deci ecuaţia (2) are soluţie unică în $M_{m,\,n}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X = BA^{-1}}$.

c) Combinând tehnica de la punctele a) şi b) se obţine:

$$AXC = B \Leftrightarrow A^{-1}(AXC)C^{-1} = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow \left(A^{-1}A\right)X\left(CC^{-1}\right) = A^{-1}BC^{-1} \Leftrightarrow X = = A^{-1}BC^{-1}.$$

Aşadar, ecuaţia (3) are soluţie unică în $\mathcal{M}_{n,\,m}(\mathbb{C})$, $\mathbf{X = A^{-1}BC^{-1}}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se rezolve ecuaţia matriceală $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>*Soluţie*</u>

Se observă că ecuaţia este de forma $A \cdot X \cdot B = C$.

Dacă matricele A şi B sunt inversabile atunci ecuaţia matriceală are soluţia unică $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ (cazul c) din teoremă).

Avem: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -1$, $A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ şi

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(B) = -1$, $B^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluţia ecuaţiei matriceale este:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine care matrice sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

E2. Să se determine inversele matricelor:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

E3. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricele sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} 3 & m \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 9 \\ 1 & m \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

E4. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E5. Să se rezolve ecuațiile matriceale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

APROFUNDARE

A1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & m \\ x & -1 & x \end{pmatrix}$.

Să se determine $m \in \mathbb{R}$, dacă:

a) A este inversabilă, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $A^{-1} = A^*$ și $7x = 3m$.

A2. Fie ecuația $x^2 + (m+5)x + m + 2 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2 și matricea

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -2 \\ -2 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că A este inversabilă pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

A3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $C = ABA^{-1}$.

Să se calculeze C^n, $n \geq 1$.

A4. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât
$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}.$$
Să se arate că A este inversabilă şi să se determine inversa acesteia.

A5. Să se rezolve sistemele matriceale:

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

b) $X + Y \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$
$X \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

A6. Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ inversabilă astfel încât $A + A^{-1} = 2I_p$. Să se determine $A^n + A^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

A7. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^5 = O_n$. Să se arate că matricele $I_n - A$ şi $I_n + A$ sunt inversabile şi să se calculeze inversele acestora. (Univ., Bucureşti, 1990)

A8. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $A^3 = A^2$ şi $A + B = I_n$. Să se arate că matricea $I_n + AB$ este inversabilă.

A9. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $AB = A + B$. Să se arate că matricele $I_n - A$, $I_n - B$ sunt inversabile şi că $AB = BA$.

A10. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că:

a) dacă $I_n + AB$ este inversabilă, atunci $I_n + BA$ este inversabilă;

b) dacă $I_n + (AB)^p$ este inversabilă, atunci $I_n + (BA)^p$ este inversabilă.

A11. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrice inversabilă. Să se afle A^{-1} folosind relația Hamilton-Cayley.

TEST DE EVALUARE

❍ **1.** Să se determine inversele matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

❍ **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x+1 & 3 \\ x+1 & -1 & x+1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

❍ **3.** Se dă ecuația $y^3 - (a-1)y^2 + (2a-5)y - a + 3 = 0$, $a \in \mathbb{C}$ cu soluțiile y_1, y_2, y_3. Să se determine a astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_3 & y_1 \\ y_3 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă.

❍ **4.** Să se rezolve ecuația matriceală: $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ în două moduri.

❸ SISTEME DE ECUAȚII LINIARE CU CEL MULT PATRU NECUNOSCUTE

3.1. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE. NOȚIUNI GENERALE

Să considerăm următoarea problemă-suport:

Într-un bazin apa curge prin trei robinete identice. Dacă primul robinet se deschide timp de 6 ore, al doilea 4 ore şi al treilea 3 ore, în bazin se adună 390 dal de apă. Dacă primul robinet se deschide 5 ore, al doilea 2 ore şi al treilea 3 ore, atunci în bazin vor fi 305 dal de apă. Dacă primul robinet este deschis 3 ore, al doilea 7 ore, iar al treilea 3 ore, atunci în bazin vor fi 405 dal de apă. Câți decalitri de apă curg într-o oră prin fiecare robinet?

Vom organiza datele problemei în următorul tabel de tip matriceal:

Robinetul I (nr. ore)	Robinetul II (nr. ore)	Robinetul III (nr. ore)	Cantitatea de apă (dal)
6	4	3	390
5	2	3	305
3	7	3	405

Pentru a răspunde la întrebarea problemei, vom nota cu x, y, z debitul robinetelor I, II, respectiv III.

Datele referitoare la numărul de ore de funcționare a celor trei robinete le consemnăm într-o matrice de ordinul 3, notată A, cele referitoare la cantitatea totală de apă le consemnăm într-o matrice-coloană B, iar datele care indică necunoscutele problemei le scriem într-o matrice-coloană X. Astfel, se obțin matricele:

$$A=\begin{pmatrix}6&4&3\\5&2&3\\3&7&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}390\\305\\405\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Corelarea celor trei categorii de date consemnate în matricele A, B şi X o vom face exprimând cantitatea totală de apă ca fiind suma cantităților de apă furnizate de fiecare robinet în timpul funcționării.

În felul acesta se obține următorul model matematic al problemei:

$$\begin{cases}6x+4y+3z=390\\5x+2y+3z=305.\\3x+7y+3z=405\end{cases}$$

Acest model este un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute x, z, y, cu exponentul 1, numit **sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute**.

Determinarea valorilor necunoscutelor x, z, y se va face pe baza unor considerente legate de matrice şi de determinanţi.

Forma generală a unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (1)$$

Numerele $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ se numesc **coeficienţii necunoscutelor**, iar $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt **necunoscutele sistemului**. Numerele $b_1, b_2, ..., b_m \in \mathbb{C}$ se numesc **termenii liberi**.

Dacă toţi termenii liberi sunt nuli, atunci sistemul de ecuaţii liniare se numeşte **sistem liniar omogen**.

Sistemul de ecuaţii (1) poate fi scris mai condensat sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ 1 \le i \le m.$$

Sistemului (1) de m ecuaţii liniare cu n necunoscute i se asociază următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

(matricea coeficienţilor sau matricea sistemului) **(matricea necunoscutelor)** **(matricea termenilor liberi)**

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

(matricea extinsă)

Cu ajutorul acestor matrice, sistemul (1) are următoarea scriere matriceală: $\mathbf{A \cdot X = B}$ numită **forma matriceală** a sistemului de ecuaţii liniare.

Un sistem de numere $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ se numeşte **soluţie a sistemului de ecuaţii** (1) dacă înlocuind necunoscutele $x_1, x_2, ..., x_n$, respectiv cu aceste numere, toate ecuaţiile sistemului sunt verificate, ceea ce se scrie sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i,\ 1 \le i \le m.$$

Din punct de vedere al existenţei soluţiei şi al numărului de soluţii, un sistem de ecuaţii liniare poate fi în una din situaţiile:

1. Sistem incompatibil. În această situaţie sistemul nu are nici o soluţie.

☞ ***Exemplu***

Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$.

Dacă ar exista perechea (α_1, α_2) care să verifice cele două ecuaţii, atunci ar trebui ca 5 = 1, ceea ce este fals. Aşadar, sistemul este incompatibil.

2. Sistem compatibil. În această situaţie sistemul are cel puţin o soluţie.

a) Un sistem compatibil cu o singură soluţie se numeşte **sistem compatibil determinat**.

☞ ***Exemplu***

Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ are soluţia unică $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

b) Un sistem compatibil cu mai multe soluţii se numeşte **sistem compatibil nedeterminat**.

☞ ***Exemplu***

Sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$ este sistem compatibil nedeterminat deoarece are o infinitate de soluţii de forma $(\alpha, 3 - 2\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$.

➲ **OBSERVAŢIE**

• Orice sistem liniar omogen este compatibil. Se observă că o soluţie a acestuia este $(0, 0, ..., 0)$ numită **soluţia banală**.

Problema esenţială care se pune în legătură cu un sistem de ecuaţii liniare este dacă acesta este compatibil sau incompatibil, iar în caz de compatibilitate care este numărul soluţiilor şi cum se determină mulţimea acestora.

➲ **PRECIZARE**

• În acest capitol se vor studia sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult 4 necunoscute.

3.2. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE DE TIP CRAMER

Fie (S) un sistem de **n** ecuaţii cu **n** necunoscute, $n \le 4$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad \text{(S)}$$

Făcând notațiile $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, sistemul (S) se scrie sub forma matriceală **AX = B**.

❖ DEFINIȚIE

- Un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute cu proprietatea că matricea sistemului are determinantul nenul se numeşte **sistem de tip Cramer**.

Gabriel CRAMER (1704-1752) matematician şi fizician elvețian

În 1750 a introdus rezolvarea sistemelor liniare cu ajutorul determinanților. Are contribuții în cadrul teoriei curbelor algebrice.

Dacă sistemul (S) este sistem de tip Cramer $\left(d=\det(A)\neq 0\right)$, atunci matricea A a sistemului este matrice inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi matricea X a necunoscutelor este $X=A^{-1}\cdot B$. Pornind de la această exprimare a matricei X a necunoscutelor, vom deduce o regulă de determinare element cu element a soluției $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a sistemului.

▣ TEOREMĂ (Regula lui Cramer)

Un sistem de tip Cramer este compatibil determinat, iar soluția lui este dată de formulele:

$$x_1=\frac{d_1}{d},\ x_2=\frac{d_2}{d},\ \dots,\ x_n=\frac{d_n}{d}, \quad (1)$$

unde $d=\det(A)$ şi d_k este determinantul obținut din determinantul d al matricei A a sistemului înlocuind coloana k (coloana coeficienților necunoscutei x_k) cu coloana formată din termenii liberi, $k\in\{1, 2, \dots, n\}$.

<u>Demonstrație</u>

Fie (S) sistemul de tip Cramer determinat mai sus, cu scrierea matriceală $AX=B$. Deoarece A este matrice inversabilă avem relația $X=A^{-1}B$. Cu notațiile adoptate pentru matricele X, A^{-1} şi B avem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{d}\cdot\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\frac{1}{d}\cdot\begin{pmatrix} b_1\delta_{11}+b_2\delta_{21}+\dots+b_n\delta_{n1} \\ b_1\delta_{12}+b_2\delta_{22}+\dots+b_n\delta_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1\delta_{1n}+b_2\delta_{2n}+\dots+b_n\delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aplicând egalitatea a două matrice se obţin formulele după care se calculează fiecare necunoscută $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$x_1 = \frac{1}{d}\left(b_1\delta_{11} + b_2\delta_{21} + \ldots + b_n\delta_{n1}\right) = \frac{d_1}{d}$$

$$x_2 = \frac{1}{d}\left(b_1\delta_{12} + b_2\delta_{22} + \ldots + b_n\delta_{n2}\right) = \frac{d_2}{d}$$

....

$$x_n = \frac{1}{d}\left(b_1\delta_{1n} + b_2\delta_{2n} + \ldots + b_n\delta_{nn}\right) = \frac{d_n}{d}$$

unde $d = \det(A) \neq 0$ şi d_k este valoarea determinantului obţinut din determinantul d al matricei A înlocuind coloana k prin coloana termenilor liberi. ■

➲ OBSERVAŢIE

- Formulele (1) se numesc **formulele lui Cramer**.

Pentru n = 2 şi n = 3 aceste formule au fost obţinute atunci când s-a definit determinantul de ordin 2, respectiv de ordin 3.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare folosind regula lui Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}.$$

<u>*Soluţie*</u>

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ şi $d = \det(A) = -65 \neq 0.$

Rezultă că sistemul este de tip Cramer şi are soluţie unică dată de formulele Cramer: $x_1 = \frac{d_1}{d}$, $x_2 = \frac{d_2}{d}$, $x_3 = \frac{d_3}{d}$, $x_4 = \frac{d_4}{d}$.

Dar $d_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -65$; $d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 65;\ d_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -65.$$

Aşadar, soluția sistemului de ecuații este sistemul de numere $(1, 0, -1, 1)$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se scrie sub formă matriceală şi să se rezolve sistemele de ecuații folosind inversa unei matrice:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 5(x+y)-2(x-y)=3y+a \\ 3(x+2y)-y+2x=x+b \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ 4x-y+z=4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+2y-z=b \\ x+3y-2z=c \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+iy+z=2+i \\ ix+y+z=2+i \end{cases}$.

E2. Rezolvați prin regula lui Cramer sistemele de ecuații de la E1.

E3. Să se rezolve prin regula lui Cramer sistemele:

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+3z=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=4 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+y+z+t=4 \\ 2x+y+3t=6 \\ x+y+3z=5 \\ x-y+4t=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x+y-2z+4t=4 \\ 2x+3y-z+t=2 \\ x-2(2y-3z+t)=-3 \\ 4(x+2y)-6\left(z+\frac{1}{2}y\right)+t=5 \end{cases}$.

E4. Să se rezolve sistemele de ecuații prin două metode:

a) $\begin{cases} x+y-\dfrac{5x+3y}{7}=\dfrac{9y-11}{14} \\ \dfrac{3x-2y}{2}+2=x-\dfrac{2y+4}{5} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+6y=\dfrac{7}{9}(10x+24z) \\ 9y+20z=6(x-48y) \\ 2(x+y+2z)=128-y \end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. Să se rezolve sistemele de ecuații liniare:

a) $\begin{cases} 2(x+2z)+3(y-4)+t=0 \\ x+3z+2(2t+y-4)=3 \\ 3(x-y+t)+8(y-1)-t+z=5 \\ 2(2x+t)+2z+t+y=14 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (1+i)x-2y+z=-3+i \\ x-(1+i)y+iz=-1 \\ x-(2-i)y+z=-2+2i \end{cases}$;

c) $\begin{cases} C_3^1x-C_3^2y+4C_3^3z-C_3^0t=0 \\ C_4^0x+C_4^1z-C_4^2t=-5 \\ 2C_5^1x-4C_5^0y+C_5^2t=6 \\ A_3^2x-2A_3^1y+A_3^3z=0 \end{cases}$.

A2. Să se rezolve sistemele de ecuații ştiind că numerele a, b, c, d sunt numere reale diferite:

a) $\begin{cases} x+ay+a^2z=-a^3 \\ x+by+b^2z=-b^3 \\ x+cy+c^2z=-c^3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$.

A3. Să se determine valorile parametrilor reali pentru care fiecare sistem este de tip Cramer şi să se rezolve în acest caz:

a) $\begin{cases} 2ax+y+z=0 \\ x+ay-z=-1 \\ x+2ay+z=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (a-2)x-2y+z=1 \\ x+y+z=a-2 \\ (a-1)x-2y+2z=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+(p+1)y+z=p \\ x+py+(p-1)z=2p \\ (p+3)x+(3p+3)y+pz=3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ x+my+2z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 6x+y+z+(m^2-m)t=1 \end{cases}$.

A4. Se consideră sistemul liniar:

$\begin{cases} (1+m)x+y+z=1 \\ x+(1+m)y+z=m \\ x+y+(1+m)z=m^2,\ m\in\mathbb{R} \end{cases}$.

a) Să se scrie matricea A a sistemului şi să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se afle $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Să se rezolve sistemul de ecuații pentru m = 2.

d) Pentru m = 0 să se precizeze dacă sistemul este compatibil.

A5. Se consideră sistemul liniar:

$\begin{cases} (2m-1)x-my+3z=1 \\ (m-2)x+y+(m-2)z=2 \\ 3x+(m-1)y+(2m-1)z=3 \end{cases}$.

a) Să se scrie matricea A a sistemului şi să se rezolve ecuația $\det(A)=0$.

b) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$, sistemul este de tip Cramer?

c) Să se determine soluția (x_m, y_m, z_m) în condiția b).

d) Pentru ce valori ale lui $m\in\mathbb{R}$ are loc relația $x_m+y_m+z_m>3$?

A6. Să se rezolve ecuația matriceală:

$X-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

A7. Se consideră sistemul de ecuații

$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j=6+i,\ i=\overline{1,4}$, unde

$a_{ij}=\begin{cases} i, \text{ dacă } i=j \\ 2, \text{ dacă } i\neq j \end{cases};\ i, j=\overline{1,4}$.

a) Să se calculeze $\det(A)$, unde $A=(a_{ij})_{4\times4}$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuații.

A8. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j=4^{i-1},\ a_{ij}=j^{i-1},\ i, j=\overline{1,4}$.

3.3. RANGUL UNEI MATRICE

Fie $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$ şi r un număr natural, astfel încât $1\le r\le\min(m, n)$.

Alegem din matricea A **r** linii $i_1, i_2, ..., i_r$ şi **r** coloane $j_1, j_2, ..., j_r$.

Determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecţia celor r linii şi r coloane se numeşte **minor de ordinul r** al matricei A.

Numărul minorilor de ordinul r ai matricei A este egal cu $C_m^r \cdot C_n^r$.

Fie $A \neq O_{m,n}$ o matrice cu m linii şi n coloane. Deoarece mulţimea minorilor matricei A este finită, există $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \min(m, n)$, astfel încât matricea A să aibă cel puţin un minor de ordin r nenul, iar toţi minorii de ordin superior lui r, dacă există, să fie nuli.

❖ DEFINIŢIE

- Spunem că **o matrice** nenulă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **are rangul r** şi se scrie $\text{rang}\, A = r$ dacă matricea A are un minor de ordin r nenul şi toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli.

Dacă $A = O_{m,n}$ se convine să se spună că are rangul 0, adică $\text{rang}\,(O_{m,n}) = 0$.

Pentru determinarea rangului unei matrice este util să se folosească următorul rezultat.

▣ TEOREMA 1

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă şi $r \in \mathbb{N}^*$.

Rangul matricei A este r dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A, nenul, iar toţi minorii de ordinul $r+1$ sunt nuli (atunci când există).

Demonstraţie

Dacă $\text{rang}\, A = r$, atunci toţi minorii de rang mai mare decât r sunt nuli, deci şi cei de ordinul $r+1$ sunt nuli.

Pentru afirmaţia reciprocă trebuie observat că dacă toţi minorii de un anumit ordin k sunt nuli, atunci vor fi nuli şi minorii de ordinul $k+1$ ai matricei. Acest lucru se întâmplă deoarece dezvoltând un minor de ordinul $(k+1)$ după elementele unei linii sau coloane se obţine o sumă de produse, în care fiecare factor este un minor de ordinul k al matricei. Minorii de ordinul k fiind nuli, rezultă că suma este nulă, deci minorul de ordinul $k+1$ este nul. ■

➲ OBSERVAŢIE

- Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci:
  $\text{rang}\,(AB) \leq \min(\text{rang}\, A, \text{rang}\, B)$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se calculeze rangul matricelor:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Soluție

a) Se observă că $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ şi ca urmare $\text{rang } A \le 3$.

Calculăm minorii de ordinul 3 ai matricei A în număr de $C_3^3 \cdot C_4^3 = 4$.

Avem: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Rezultă că $\text{rang } A < 3$. Alegem un minor de ordinul 2.

Fie acesta: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ne 0$. Aplicând teorema asupra rangului se obține că $\text{rang } A = 2$.

b) $B \in \mathcal{M}_{5,3}(\mathbb{C})$ şi ca urmare $\text{rang } B \le 3$.

Alegem un prim minor de ordinul 3 şi obținem:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 17 \ne 0$. Aşadar $\text{rang } B = 3$.

☒ **2.** Să se determine, în funcție de parametrul $m \in \mathbb{C}$, rangul matricei $A = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

Soluție

Calculăm determinantul matricei A. Rezultă succesiv:

$$d = \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 (m+1).$$

• Pentru $m \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ avem $d \ne 0$ şi $\text{rang } A = 3$.

• Pentru $m = 1$ se obține $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi rezultă $\operatorname{rang} A = 1$.

• Pentru $m = -1$ se obține $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi deoarece minorul $d_1 =$

$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ rezultă că $\operatorname{rang} A = 2$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se determine rangul matricelor:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

E2. **Să se discute rangul matricelor pentru $m, n \in \mathbb{R}$:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & m \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & m & m+1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & m & m-2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} m & m+1 & n \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$.

E3. **Să se determine valorile parametrilor $m, n \in \mathbb{R}$, dacă perechile de matrice au acelaşi rang:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ m & 8 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & m & n \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & 11 & 2-3m \end{pmatrix}$.

APROFUNDARE

A1. **Să se determine rangul matricelor. Discuție.**

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2\alpha & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 5 \\ 2 & \alpha & -2 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m^2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 & 1 \\ \beta & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & -3 & -2 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

A2. **Se dă matricea**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & b & 1 & 2 \\ a & -1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R}).$$

Să se determine a, b, c astfel încât $\operatorname{rang} A = 2$.

A3. **Fie matricea** $A(x)=\begin{pmatrix}3 & x & -1 & 2\\ 2 & 3 & -4 & 4\\ 4 & 2 & -2x & 1\\ 1 & 4 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $\text{rang } A(x)=3$.

A4. **Se dă matricea**

$$A(x)=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 3\\ -5 & 1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 4 & x+2\\ -13 & 3 & x & -6\end{pmatrix}.$$

Să se determine $x\in\mathbb{R}$ **pentru care** $\text{rang } A(x)$ **este minim.**

A5. **Fie matricea**

$$A=\begin{pmatrix}a-\frac{1}{2} & b & c\\ c & a-\frac{1}{2} & b\\ b & c & a-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se arate că $\text{rang } A=3$.

3.4. STUDIUL COMPATIBILITĂȚII SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE ȘI REZOLVAREA ACESTORA

PROPRIETATEA KRONECKER-CAPELLI. PROPRIETATEA LUI ROUCHÉ

În paragraful (3.1.) s-a stabilit ce este un sistem de ecuații liniare de tip Cramer şi care este metoda de rezolvare a acestuia. În continuare vom considera un sistem oarecare de m ecuații liniare cu n necunoscute, $n\le 4$.

Compatibilitatea unui astfel de sistem este asigurată de următorul rezultat.

▣ **TEOREMA 2 (Proprietatea Kronecker-Capelli** [1]**)**

Un sistem de ecuații liniare este compatibil dacă şi numai dacă $\text{rang } A=\text{rang } \overline{A}$, unde A este matricea sistemului, iar $\overline{A}$ este matricea extinsă.

Considerăm $\text{rang } A=\text{rang } \overline{A}=r$.

Minorul de ordinul r care dă rangul matricei A se numeşte **minor principal** sau **determinant principal** şi se va nota d_p.

Necunoscutele sistemului de ecuații liniare ai căror coeficienți formează minorul principal se numesc **necunoscute principale**, iar celelalte necunoscute se numesc **necunoscute secundare**.

Ecuațiile sistemului care corespund liniilor minorului principal se numesc **ecuații principale**, iar celelalte ecuații se numesc **ecuații secundare**.

Orice minor al matricei $\overline{A}$ care se obține din determinantul principal prin bordarea (comple-

Leopold KRONECKER
(1823-1891)
matematician german
A avut contribuții în teoria numerelor, analiză matematică, algebră (teoria ecuațiilor algebrice, teoria formelor pătratice), algebră liniară.

tarea) cu o linie formată din coeficienţii necunoscutelor principale dintr-o ecuaţie secundară şi cu o coloană formată din termenii liberi ai ecuaţiilor principale şi termenul liber al ecuaţiei secundare alese, se numeşte **minor caracteristic**.

Minorii caracteristici se vor nota $d_{c_1}, d_{c_2}, \dots$.

Numărul acestora este egal cu numărul ecuaţiilor secundare ale sistemului.

➲ OBSERVAŢII

1. $\text{rang } A \le \text{rang } \overline{A}$.

2. Un sistem liniar (S) este compatibil $\Leftrightarrow$ $\text{rang } A = \text{rang } \overline{A} = r$.

Rezultă că toţi minorii de ordinul $r+1$ ai matricei $\overline{A}$ sunt nuli, deci şi toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Astfel, proprietatea Kronecker-Capelli poate fi enunţată sub următoarea formă echivalentă:

▣ TEOREMA 3 (Proprietatea lui Rouché [1])
Un sistem de ecuaţii liniare este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se stabilească compatibilitatea sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y + 5z = 4 \\ 3x - y + 6z = 3 \end{cases}.$$

Soluţie

Matricea sistemului de ecuaţii, respectiv matricea extinsă a acestuia sunt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Eugene ROUCHÉ
(1035-1910)
matematician francez

Are contribuţii importante în algebră, geometrie, geometrie descriptivă şi analiză matematică.

Avem $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ şi minorul $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \ne 0.$

Rezultă că rang $A=2$ şi $d_p=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}$. Ca urmare, matricea $\overline{A}$ are un singur minor caracteristic: $d_{c_1}=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}=0.$

Conform teoremei lui Rouché rezultă că sistemul este compatibil.

ALGORITM DE REZOLVARE A UNUI SISTEM DE m ECUAŢII LINIARE CU n NECUNOSCUTE, $n\le 4$

Pentru rezolvarea unui sistem (S) de m ecuaţii liniare cu n necunoscute, $n\le 4$ se parcurg următoarele etape:

1. Stabilirea compatibilităţii sistemului:

a) Se scrie matricea A a sistemului şi matricea extinsă $\overline{A}$.

b) • Dacă matricea A este pătratică şi $\det(A)\neq 0$, atunci sistemul este de tip Cramer şi se rezolvă prin regula lui Cramer.

• Dacă $\det(A)=0$ sau A nu este pătratică, atunci se determină rang A şi se stabileşte minorul principal d_p.

c) Se calculează minorii caracteristici $d_{c_1}, d_{c_2}, \ldots$ (dacă există) şi se aplică proprietatea de compatibilitate a lui Rouché.

• Dacă un minor caracteristic d_c este nenul, atunci sistemul (S) este incompatibil şi rezolvarea s-a încheiat.

• Dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli atunci sistemul este compatibil (are cel puţin o soluţie).

2. Determinarea mulţimii soluţiilor sistemului

a) Se stabilesc ecuaţiile principale şi ecuaţiile secundare.

b) Se stabilesc necunoscutele principale şi necunoscutele secundare.

• Dacă nu există necunoscute secundare, sistemul este compatibil determinat (rang A = n).

• Dacă există una, două, ... necunoscute secundare sistemul se numeşte **compatibil simplu nedeterminat**, **compatibil dublu nedeterminat** etc.

c) Se formează **sistemul principal** din ecuaţiile principale ale sistemului dat, păstrând în membrul întâi termenii cu necunoscutele principale, iar termenii cu necunoscutele secundare, notate parametric, se trec în membrul al doilea.

d) Se rezolvă sistemul principal prin regula lui Cramer.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2. \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

<u>*Soluție*</u>

Scriem matricele A şi $\overline{A}$ asociate sistemului de ecuații:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \text{ şi } \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R}).$$

Se observă că $\text{rang } A \le 3.$ Se calculează minorii de ordin 3 şi se constată că toți sunt nuli. Deoarece există minori de ordin 2 nenuli, rezultă că $\text{rang } A = 2.$

Alegem minorul principal $d_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \ne 0.$

Există un singur minor caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Conform teoremei lui Rouché sistemul este compatibil.

Ecuațiile principale sunt primele două ecuații ale sistemului, iar ecuația secundară este ecuația a treia.

Necunoscutele principale sunt $x_1, x_2,$ iar necunoscutele secundare sunt $x_3, x_4.$

Din acest motiv sistemul este compatibil dublu nedeterminat.

Notăm parametric necunoscutele secundare $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Se formează sistemul principal:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + 3\alpha + \beta \\ x_1 - x_2 = -2 - 2\alpha + 3\beta \end{cases}$$

care se rezolvă cu regula lui Cramer şi se obține:

$$x_1 = \frac{\alpha + 4\beta - 1}{3};\ x_2 = \frac{7\alpha - 5\beta + 5}{3}.$$

Aşadar, mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații este:

$$S = \left\{ \left(\frac{\alpha + 4\beta - 1}{3}, \frac{7\alpha - 5\beta + 5}{3}, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

☒ **2.** Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} 5x-2y+3z=7 \\ x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \\ 2x-3y+5z=6 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-3y+2z=0 \\ x-y+4z=-6 \\ 5x+2y-z=5 \end{cases}$.

Soluție

a) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$. Rezultă că $\operatorname{rang} A \le 3$.

Se găseşte că $d_p=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-10\neq 0$, deci $\operatorname{rang} A=3$.

Sistemul are un minor caracteristic $d_c=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}=-4\neq 0$.

Aplicând proprietatea lui Rouché se obține că sistemul este incompatibil.

b) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$.

Se găseşte că $\operatorname{rang} A=3$ şi un minor principal este:

$$d_p=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-16.$$

Sistemul are un singur minor caracteristic $d_c=\det\left(\overline{A}\right)=0$.

Aşadar, sistemul este compatibil.

Deoarece numărul de necunoscute este egal cu rang A, rezultă că sistemul este compatibil determinat (nu există necunoscute secundare).

Sistemul principal ataşat sistemului dat este:

$\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-3y+2z=0 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$, care este un sistem de tip Cramer cu soluția: $(1,-1,-2)$.

☒ **3.** Să se rezolve sistemul de ecuații discutând după valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 2x + (m+1)y + (m+1)z = 2 \\ 3x + (m+2)y + (2m+1)z = 3 \end{cases}.$$

<u>*Soluție*</u>

Matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & m+1 \\ 3 & m+2 & 2m+1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ are

$\det(A) = (m-1)^2(m+2).$

Se deosebesc următoarele cazuri:

1. $\det(A) \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

În acest caz sistemul este un sistem de tip Cramer şi soluția este dată de formulele lui Cramer:

$$x = \frac{d_x}{\det(A)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}; \quad y = \frac{d_y}{\det(A)} = \frac{1}{m+2};$$

$$z = \frac{d_z}{\det(A)} = \frac{1}{m+2}.$$

2. $\det(A) = 0$, adică $m \in \{1, -2\}$.

• Pentru $m = -2$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, iar rang $A = 2$.

Un minor principal este $d_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3.$

Sistemul are un singur minor caracteristic $d_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$

Conform proprietății lui Rouché sistemul este incompatibil.

• Pentru $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, iar rang $A = 1$.

Un minor principal este $d_p = |1| = 1.$

Minorii caracteristici sunt: $d_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $d_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Aşadar, sistemul este sistem compatibil.

Prima ecuație a sistemului care corespunde minorului principal este ecuație principală, iar celelalte ecuații sunt secundare. Necunoscuta principală este x iar necunoscutele secundare sunt y şi z pe care le notăm parametric: $y=\alpha,\ z=\beta,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Ecuația principală este $x=1-\alpha-\beta$.

Aşadar, pentru $m=1$ sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu mulțimea soluțiilor $S=\left\{\left(1-\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta\right)\middle|\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}\right\}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze compatibilitatea sistemelor:

a) $\begin{cases}2x+y-z=2\\5x-y+2z=6\end{cases}$;

b) $\begin{cases}2x+y-2z=1\\x+y+z=3\\11x+6y-9z=8\end{cases}$;

c) $\begin{cases}2x+3y+5z+t=-6\\3x+3z-3t=5\\5x+4y+9z-t=0\end{cases}$;

d) $\begin{cases}x+2y-8z=21\\3x+4y+2z=7\\x+y+5z=-7\\2x+y+z=2\end{cases}$.

E2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases}3x+2y-5z=8\\5x-y-z=8\\-2x+3y-4z=0\end{cases}$;

b) $\begin{cases}3x-7y+2z=1\\-x+5y-z=2\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x-y+3z+2t=4\\x+y+z-t=3\\3x-2y+5z+4t=5\end{cases}$;

d) $\begin{cases}2x-y+z+t=3\\x+3y-z+5t=-16\\5x+y+z-7t=-10\end{cases}$;

e) $\begin{cases}3x-2y-z=1\\2x-y+3z=0\\12x-y-11z=1\\2x+y-5z=-1\end{cases}$;

f) $\begin{cases}x+3y-2z-4t=1\\-x-3y+2z+5t=6\\x+3y-2z+7t=-3\end{cases}$;

g) $\begin{cases}2x-y+3z+4t=0\\5x-y+z+t=0\\-x+z+2t=0\\7x-2y+4z+5t=0\end{cases}$;

h) $\begin{cases}3x+4y+2z=0\\4x-2y-z+t=6\\x+y+z+t=4\\7x-5y-3z+t=8\\5x-7y-5z-t=0\end{cases}$;

i) $\begin{cases}4x-3y+2z=4\\3x+4y-z=-2\\6x+5y-3z=5\\-x+y-4z=9\\7x-y+z=6\end{cases}$;

j) $\begin{cases}3x-2y+5z-2t=2\\x+y+4z=5\\x-y+3t=-4\\6x-3y+9z+4t=-1\\2x-5y-3z+t=-12\end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemele să fie compatibile:

a) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y-z=a \\ -3x-\left(a^2+a\right)y+4z=a-1 \\ 2x-y-3z=-3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+ay=1 \\ x+y=b \\ 2x+3y=5 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

A2. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi rangul matricei să fie 2:

a) $\begin{cases} x+ay+a^2z=1 \\ x+3y+2z=1 \\ x+y+z=b \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+az+t=3 \\ 5x-6y+10z+bt=-a \end{cases}$.

A3. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ -x+ay+2z=a+b \\ 3x+by-4z=a \end{cases}$$

să fie sistem simplu nedeterminat şi să se rezolve.

A4. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul:

$$\begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ x+y+az+t=-1 \\ x-y+z+bt=c \end{cases}$$

să fie compatibil dublu nedeterminat.

A5. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul:

$$\begin{cases} x+3y-2z=1 \\ 2x+y-a^2x=0 \\ x-7y+az=b \end{cases}$$

să fie sistem incompatibil. Să se rezolve pentru $a=2$ şi $b=-3$.

A6. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul omogen:

$$\begin{cases} x+(m+5)y-(m+1)z=0 \\ -x+y+3z=0 \\ (1-2m)x+2y+4mz=0 \end{cases}$$

să aibă numai soluția nulă.

A7. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul omogen:

$$\begin{cases} mx+2y+z=0 \\ (m+2)x-2y+3z=0 \\ 5x+2my+(3m+2)z=0 \end{cases}$$

să aibă şi soluții nenule. Să se rezolve sistemul pentru $m=1$.

A8. Să se studieze compatibilitatea sistemelor:

a) $\begin{cases} x-2y-2z=4 \\ 3x+y+mz=4 \\ 3x-y+z=p \end{cases}$, $m, p \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x-y+z=0 \\ x+my+z=0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} x+(m+1)y+z=2+m-m^2 \\ mx+y-z=0 \\ x-2y-mz=3m-m^2-2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \\ 2x+3y=m+4 \\ 7x-my=m^2+2 \end{cases}$.

A9. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 2 & a+1 \end{pmatrix},$$

$a \in \mathbb{R}$.

A10. Să se rezolve şi să se discute în $\mathbb{R}$ sistemele:

a) $\begin{cases} x+my=m \\ mx+y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+z=m \\ mx-y+2z=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ ax + a^2y - z = a^2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - y - az = 1 \\ ax + y + az = 1 - a \\ ax + 3y + 3z = -1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} (m-4)x - 2y + z = 1 \\ x + y + z = m - 4 \\ (m-3)x - 2y + 2z = 1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a^2 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} ax + 2y - z = 1 \\ x + (a-1)y + z = 1 \\ x - y + (a+1)z = 1 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x - y + z + 2t = 1 \\ x - y - 5z - 3t = 1 \\ 2x + 8z + t = 2 \\ (m+2)x + my - 3z + (m+1)t = 2 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} x - 2y + z + t = 0 \\ 3x - y + 7z - 5t = 0 \\ 2x - y + 3z - 3t = 0 \\ 4x + (a+1)y + 2az + (a-3)t = 0 \end{cases}$;

j) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + y - z = a \\ 2x - y - 3z = -3 \\ -3x - (a^2 + a)y + 4z = a - 1 \\ x + 2by - 2z = 2b - 2 \end{cases}$;

k) $\begin{cases} x - y - 2z + 4t = 0 \\ 5x + 3y + 7z - 6t = 0 \\ 8x - 5z + (m+4)t = 1 \\ 4x + 2y + mz + (m-2)t = p \end{cases}$.

A11. **Să se rezolve sistemul:**

$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ (m+2)x - y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 243 \end{cases}$. **(IP, Buc., 1987)**

A12. **Se dă sistemul de ecuații** $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, 3$, **astfel încât** $2b_i = 23i^2 - 95i + 84$ **şi**

$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } i = j \\ 0, \text{ dacă } i > j \\ (-1)^{i+j} C_j^i, \text{ dacă } i < j \end{cases}$, $i, j = \overline{1, 3}$.

a) Să se calculeze rang A, unde $A = (a_{ij})_{3\times 3}$.

b) Să se rezolve sistemul de ecuații.

METODA LUI GAUSS DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE

Să pornim de la următoarea situație-problemă:

„Un depozit de mărfuri livrează până la epuizarea stocului o gamă de 4 produse A, B, C, D după următorul tabel matriceal:

Numărul de produse de tipul				Suma încasată (unități monetare)
A	B	C	D	
10	16	15	18	6 020 u.m.
0	15	30	24	4 860 u.m.
0	0	25	45	3 800 u.m.
0	0	0	125	5 000 u.m.

Care este prețul pe unitatea de produs?“

Să notăm cu x, y, z, t prețul pe unitatea de produs pentru tipul de produs A, B, C, respectiv D.

Modelul matematic al situației date este:

$$\begin{cases} 10x+16y+15z+18t=6\,020 \\ \qquad 15y+30z+24t=4\,860 \\ \qquad\qquad 25z+45t=3\,800 \\ \qquad\qquad\qquad 125t=5\,000 \end{cases}.$$

Se observă că s-a obținut un sistem liniar de 4 ecuații cu 4 necunoscute cu o aşezare „triunghiulară“. Soluția se obține cu uşurință pornind de la ultima ecuație din care se obține $t=40$. Apoi, prin metoda substituției se obțin pe rând $z=80$, $y=100$, $x=250$.

Aşadar, prețul pe unitatea de produs este: 250 u.m., 100 u.m., 80 u.m., respectiv 40 u.m.

Din cele de mai sus se desprinde ideea simplității rezolvării unui sistem de ecuații liniare având o astfel de formă „triunghiulară“ , dar şi întrebarea „cum trebuie procedat ca un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute să fie adus la o formă atât de simplă?“

Răspunsul la această întrebare reprezintă esența a ceea ce urmează.

Fie (S) un sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute, $n \le 4$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+a_{m4}x_4=b_m \end{cases}.$$

❖ DEFINIȚII

- Sistemul (S) este **echivalent** cu un sistem (S_1) şi se scrie $S \sim S_1$, dacă au aceeaşi mulțime de soluții.
- Se numeşte **transformare elementară de tipul 1** a sistemului (S) orice permutare a două ecuații ale sistemului.
- Se numeşte **transformare elementară de tipul 2** a sistemului (S) o operație prin care se adună o ecuație cu o altă ecuație înmulțită eventual cu un număr nenul.

Metoda lui Gauss sau **metoda eliminării succesive** este metoda prin care un sistem (S) este transformat într-un sistem echivalent (S') de formă „triunghiulară“ sau „trapezoidală“ prin transformări elementare de tipul 1 sau 2. Un astfel de sistem are forma:

$$(S)\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4=c_1 \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\alpha_{24}x_4=c_2 \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{33}x_3+\alpha_{34}x_4=c_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \alpha_{44}x_4=c_4. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=c_5 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0=c_m \end{cases}$$

Carl Friedrich GAUSS
(1777-1855)
matematician şi astronom german

Are contribuții importante în toate ramurile matematicii: algebră, teoria numerelor, analiză matematică, geometrie, geometrie analitică.

Sistemul (S') se rezolvă pornind de la ultima ecuație spre prima.

• Dacă în sistemul (S') apar ecuații de forma $0=c_k$, unde $c_k\neq 0$, atunci sistemul (S'), deci şi (S), este incompatibil.

• Dacă în sistemul (S') nu apar ecuații contradictorii sistemul este compatibil.

Eventualele necunoscute secundare, dacă apar, se notează parametric, se trec în membrul al doilea şi se continuă cu rezolvarea sistemului triunghiular format.

Să urmărim aplicarea metodei lui Gauss pe câteva exemple:

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemele de ecuații liniare:

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} 2x-y+z-t=1 \\ 3x-z+t=-3 \\ 2x-y-3t=2 \\ 2x+2y-2z+5t=-6 \end{cases};\quad \textbf{b)}\ \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+5z=8 \\ 2x+5y+6z=10 \end{cases};\quad \textbf{c)}\ \begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-3z=0 \\ x-12y+11z=-1 \\ 4x-15y+9z=0 \end{cases}.$$

<u>Soluție</u>

Vom aplica convenabil transformări de tipul 1 sau 2 astfel încât să se elimine succesiv câte o necunoscută şi sistemul să fie adus la o formă triunghiulară sau trapezoidală.

a) Eliminăm necunoscuta x din ecuațiile a doua, a treia şi a patra.

Pentru aceasta se înmulțeşte prima ecuație cu $-\frac{3}{2}$ şi o adunăm la a doua ecuație, apoi înmulțim prima ecuație cu -1 şi o adunăm pe rând la ecuația a treia şi a patra (transformări de tipul 2).

Se obține sistemul echivalent: $\begin{cases} \boxed{2x - y + z - t = 1} \\ 3y - 5z + 5t = -9 \\ -z - 2t = 1 \\ 3y - 3z + 6t = -7 \end{cases}$.

Facem o transformare de tipul 1, permutând ecuația a treia cu a patra.

Se obține sistemul echivalent: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ \boxed{3y - 5z + 5t = -9} \\ 3y - 3z + 6t = -7 \\ -z - 2t = 1 \end{cases}$.

Eliminăm necunoscuta y din a treia ecuație având ca ecuație de referință ecuația a doua.

Se obține sistemul: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 3y - 5z + 5t = -9 \\ \boxed{-2z - t = -2} \\ -z - 2t = 1 \end{cases}$.

Eliminăm necunoscuta z din ecuația a patra având ca ecuație de referință ecuația a treia.

Rezultă sistemul liniar scris în formă triunghiulară:

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 3y - 5z + 5t = -9 \\ -2z - t = -2 \\ -\dfrac{3}{2}t = 2 \end{cases}.$$

Pornind de la ultima ecuație către prima se obține soluția: $t = -\frac{4}{3}$, $z = \frac{5}{3}$, $y = 2$, $x = 0$. Soluția sistemului inițial este sistemul de numere $\left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, iar sistemul este compatibil determinat.

b) Aplicând succesiv transformări elementare de tipul 1 şi 2 se obțin următoarele sisteme echivalente:

$$\begin{cases} \boxed{x + y + z = 2} & \Big| \cdot(-2), (-1) \\ 2x - y - 2z = -2 \\ x + 4y + 5z = 8 \\ 2x + 5y + 6z = 10 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ \boxed{-3y - 4z = -6} \\ 3y + 4z = 6 \\ 3y + 4z = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -3y - 4z = -6 \\ \boxed{0 \cdot z = 0} \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases} \quad (S')$$

Din compoziția sistemului (S') scris sub formă trapezoidală se observă că z poate lua orice valoare. De aceea z se va lua necunoscută secundară, şi se va nota parametric $z = \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Se deduce apoi $y = \dfrac{6-4\alpha}{3}$ şi $x = \dfrac{\alpha}{3}$.

Mulțimea soluțiilor sistemului dat este $S = \left\{\left(\dfrac{\alpha}{3}, \dfrac{6-4\alpha}{3}, \alpha\right) \middle| \alpha \in \mathbb{C}\right\}$, iar sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

c) Se aplică transformări elementare de tipul 1 sau 2 şi sistemul (S) devine succesiv:

$$S \sim \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x-12y+11z=-1 \\ 4x-15y+9z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -7y+7z=-1 \\ -14y+14z=-1 \\ -23y+21z=0 \end{cases} \sim \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -7y+7z=-1 \\ 0z=1 \\ -2z=\dfrac{23}{7} \end{cases}.$$

Acest ultim sistem conține o ecuație contradictorie $(0=1)$, fapt pentru care acest sistem este incompatibil, deci şi sistemul inițial este incompatibil.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se rezolve sistemele de mai jos prin metoda lui Gauss:**

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+2y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+2z=-1; \\ x-y+2z=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z+3t=7 \\ 2x-5y-4z+t=10 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+z-t=1 \\ 2x+y-2t=1 \\ 3x+4y-z=6 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x+y+z=2 \\ 2x+2y-z=1 \\ x+y+2z=3 \\ 4x+2y-3z=-1 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+y=5 \\ 3x-y=6 \\ 4x+3y=-1 \end{cases}$; h) $\begin{cases} 2x+y-z+3t=0 \\ x-2y+z-4t=0 \\ 3x+y-4z+5t=0 \\ -x+6y+2t=0 \end{cases}$.

E2. **Pentru golirea unui bazin cu apă se utilizează trei robinete. Dacă primul robinet este deschis 2 ore, al doilea 3 ore şi al treilea 6 ore, se evacuează în total 220 hl de apă. Lăsându-se deschise 3 ore, 2 ore, respectiv 6 ore, se evacuează în total 210 hl de apă, iar dacă primul şi al doilea sunt deschise câte 2 ore, iar al treilea 3 ore se evacuează 145 hl de apă. Să se afle debitul fiecărui robinet.**

E3. **Dacă tatăl ar avea cu 7 ani mai mult decât are, atunci vârsta actuală a fiului mai mic ar fi $\frac{1}{6}$ din vârsta tatălui. Peste 15 ani vârsta fiului mai mare va fi $\frac{1}{2}$ din vârsta tatălui. Să se determine vârsta fiecăruia, dacă peste 18 ani cei doi copii vor avea împreună vârsta tatălui.**

E4. Să se rezolve sistemele prin metoda lui Gauss şi să se discute:

a) $\begin{cases} x-3y+6z=4 \\ 3x-y+z=3 \\ -6x+2y+az=b \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+5y+2z=b \\ 2x-3y+az=-1 \end{cases}$.

E5. Să se rezolve sistemele de ecuații prin două metode:

a) $\begin{cases} 2(x+2y)=3z+11 \\ 5x-3y=6-5z-2x \\ 3(x-z)=15-y+5z \\ 6(x-y)+11z=-4-y \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3(x-y)=2(z-2y)+x+1 \\ 2(x-y-1)=3(z-y-1)+x \\ x+y+z-3=0 \\ x+2(y-z)=z+1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x+4z=-2(2+y) \\ 5y+7z=4(x+4) \\ 11z-31y-47z=-68 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-4y+z+(m+1)t=0 \\ x-y-z+t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \\ x+2y+3z-t=0 \end{cases}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Se consideră sistemul de ecuații liniare: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-2y+2z=8 \\ 2x+3y-2z=4 \end{cases}$.

a) Să se determine rangul matricei sistemului.
b) Să se rezolve sistemul de ecuații prin două metode.

❍ 2. Să se rezolve prin metoda lui Gauss sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+y+3z-t=0 \\ 2x+y+z+t=1 \\ x+2y+z+2t=3 \\ x+y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=0 \end{cases}$.

❍ 3. Să se studieze compatibilitatea sistemului de ecuații: $\begin{cases} x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \\ mx+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

❍ 4. Fie sistemul: $\begin{cases} x+y+az+at=b \\ x+ay+az+t=b \\ ax+ay+z+t=b \\ ax+y+z+at=b \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

i) Condiția necesară şi suficientă ca sistemul să fie compatibil este:
a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; b) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; c) $b = 0$; d) $b = 0, a \neq 1$; e) $a \neq -1, b = 0$.

ii) Condiția necesară şi suficientă ca sistemul să fie compatibil simplu nedeterminat este:

a) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; **b)** $a = 1$; **c)** $a \neq 1$; **d)** $a \neq -1$; **e)** $a = -1, b = 0$.

Testul 2

❍ **1. Se dă sistemul de ecuații liniare:**

$$\begin{cases} 2x + my + 4z = 0 \\ (3+m)x + 2y + mz = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}.$$

a) Să se rezolve sistemul pentru $m = 2$.

b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ **pentru care sistemul are şi soluții nenule.**

❍ **2. Fie sistemul de ecuații liniare:**

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + z = -1 \\ x + y + (1-a)z = b \end{cases}.$$

a) Să se rezolve sistemul pentru $a = 1, b = 3$.

b) Să se discute sistemul după parametrii reali a, b.

❍ **3. Se dă sistemul de ecuații liniare:**

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4^a \\ x + y - 2z = m \\ x + 2y - 3z = 2^a \end{cases}.$$

a) Să se arate că sistemul este de tip Cramer.

b) Dacă (x_0, y_0, z_0) **este soluția sistemului, să se determine** $m \in \mathbb{R}$ **pentru care** $z_0 > \frac{2}{3}, \forall a \in \mathbb{R}$.

❍ **4. Se consideră matricele** $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = \frac{1}{3}(A + B), A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, **unde**

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\left(C_i^j, A_i^j\right), \text{ dacă } i > j \\ \max\left(C_j^i, A_j^i\right), \text{ dacă } i \leq j \end{cases}, \quad b_{ij} = \max(i, j),\ i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

a) Să se determine $A \cdot B$.

b) Să se rezolve sistemul $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, **dacă** $X \cdot C = B$.

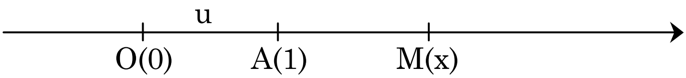
ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

CAPITOLUL I. LIMITE DE FUNCŢII

1 STRUCTURA DE ORDINE A MULȚIMII $\mathbb{R}$

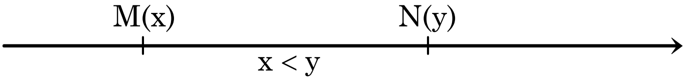
Axa numerelor reale (axa numerică) reprezintă o dreaptă (d) pe care s-a stabilit o origine O, un segment unitate şi un sens de parcurs, numit sensul pozitiv.

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este pusă în corespondență bijectivă cu axa numerică. Fiecărui număr $x \in \mathbb{R}$ i se asociază un unic punct M de pe dreapta (d) pentru care numărul real x reprezintă abscisa acestuia şi se scrie $M(x)$.



În acest mod mulțimea numerelor reale se poate identifica cu axa numerică. Fiecare punct al dreptei este identificat cu numărul real care reprezintă abscisa sa. Astfel, dacă $x \in \mathbb{R}$, se poate spune „punctul x“, înțelegându-se prin aceasta „punctul de pe dreaptă care are abscisa x“.

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ sunt două numere reale, iar $M(x), N(y)$ sunt punctele asociate acestora pe axa numerică vom spune că **x este mai mic decât y** şi se scrie $x < y$, dacă pe axa numerică punctul M este situat în stânga lui N.



După cum este cunoscut, între numerele reale x şi y există doar una din relațiile: $x < y$, $x = y$ sau $y < x$ (proprietatea de trihotomie).

Din proprietatea de trihotomie rezultă că dacă numărul real x nu este mai mare decât numărul real y, atunci x este mai mic sau egal cu y, şi vom scrie $x \le y$.

Aşadar, $x \le y$ dacă şi numai dacă $x < y$ sau $x = y$.

Relația $\le$ se numeşte **relație de ordine** pe $\mathbb{R}$ şi are proprietățile:

▣ **P1. Proprietatea de reflexivitate**
Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $x \le x$.

▣ **P2. Proprietatea de antisimetrie**
Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, $y \le x$, atunci $x = y$.

▣ **P3. Proprietatea de tranzitivitate**
Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, $y \le z$, atunci $x \le z$.

▣ **P4. Proprietatea de ordine totală**

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci fie $x \le y$, fie $y \le x$.

▣ **P5. Proprietatea de compatibilitate cu operațiile de adunare şi înmulțire pe $\mathbb{R}$:**

- Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, atunci $x + a \le y + a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.
- Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \le y$, atunci $ax \le ay$, $\forall\ a \in [0, +\infty)$.

În legătură cu relația de ordine $x \le y$ pe $\mathbb{R}$ menționăm şi următoarele rezultate:

▣ **P6. Axioma lui Arhimede**

Pentru oricare număr $x \in \mathbb{R}$ există un număr întreg unic $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $n \le x < n + 1$.

Numărul $n \in \mathbb{Z}$, cu această proprietate se numeşte **partea întreagă a lui x** şi se notează cu $[x]$.

▣ **P7. Proprietatea de densitate a mulțimii $\mathbb{Q}$**

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunci există $r \in \mathbb{Q}$, astfel încât $x < r < y$.

Proprietatea P7 arată că mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este mulțime densă în $\mathbb{R}$.

❷ INTERVALE DE NUMERE REALE

Noțiunea de interval de numere reale a fost introdusă în clasele anterioare în corelare cu reprezentarea pe axă a numerelor reale. Astfel, s-au definit următoarele tipuri de intervale de numere reale cu ajutorul relațiilor „$\le$“ şi „$<$“.

INTERVALE MĂRGINITE

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \le b$ numere reale şi $A(a)$, $B(b)$ punctele asociate acestora pe axa numerică. Se definesc următoarele mulțimi de numere reale.

1. Intervalul închis cu extremitățile a şi b:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

2. Intervalul deschis cu extremitățile a şi b:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Imaginile geometrice pe axa numerică a intervalelor $[a, b]$, respectiv (a, b) sunt segmentul închis $[AB]$, respectiv segmentul deschis (AB), (figura 1).

Figura 1

3. Intervalele semideschise cu extremitățile a şi b:

$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ (închis la stânga, deschis la dreapta)

$(a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ (deschis la stânga, închis la dreapta)

Imaginile geometrice pe axa numerică a intervalelor $[a,\ b)$, respectiv $(a,\ b]$ sunt mulțimile de puncte $(AB) \cup \{A\}$, respectiv $(AB) \cup \{B\}$, (figura 2).

Figura 2

INTERVALE NEMĂRGINITE

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A(a)$ punctul corespunzător pe axa numerică.

Atunci:

1. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$ se numeşte **interval închis la stânga şi nemărginit la dreapta**.

2. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ se numeşte **interval deschis la stânga şi nemărginit la dreapta**.

Imaginile geometrice ale intervalelor $[a, +\infty)$, respectiv $(a, +\infty)$ sunt reprezentate pe axa reală de semidreapta închisă $[AX$, respectiv semidreapta deschisă $(AX$, cu originea în A şi care conțin punctul X, (figura 3).

Figura 3

3. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$ se numeşte **interval închis la dreapta şi nemărginit la stânga**.

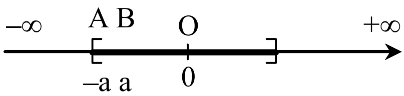
4. $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ se numeşte **interval deschis la dreapta şi nemărginit la stânga**.

Imaginile geometrice ale intervalelor $(-\infty, a]$, respectiv $(-\infty, a)$ sunt reprezentate de semidreapta închisă $[AX$, respectiv semidreapta deschisă $(AX$, cu originea în A şi care conțin punctul X, (figura 4).

Figura 4

INTERVALE SIMETRICE

Fie a un număr real, $a \in (0, +\infty)$. Un interval de forma $[-a, a]$ sau $(-a, a)$ se numeşte **interval simetric**. Imaginea geometrică pe axa numerică a intervalului simetric este un segment cu mijlocul situat în origine, (figura 5).



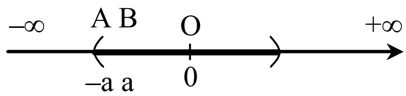


Figura 5

Dacă $x \in [-a, a]$, rezultă că $-a \le x \le a$ şi se obține $|x| \le a$.

Aşadar, $[-a, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le a\}$ şi $(-a, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\}$.

Afirmația $x \notin [-a, a]$ este echivalentă cu $(x < -a \text{ sau } x > a)$ care, cu ajutorul modulului, se scrie $|x| > a$.

Rezultă că $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\}$.

De asemenea $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \ge a\}$.

➲ OBSERVAȚIE

- Pentru $a = +\infty$, intervalul $(-a, a) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ este interval simetric.

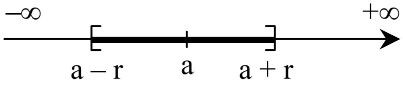
◢ **Temă**

1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Să se arate că I este un interval simetric dacă şi numai dacă $\forall\ x \in I$ rezultă $-x \in I$.

2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu proprietatea că $\forall\ x \in A \Rightarrow -x \in A$. Rezultă că A este interval simetric?

INTERVALE CENTRATE ÎNTR-UN PUNCT

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $r \in (0, +\infty)$. Un interval de forma $[a - r, a + r]$ sau $(a - r, a + r)$ se numeşte **interval centrat în a**.



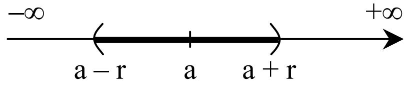


Figura 6

Relația $x \in [a - r, a + r]$ se scrie succesiv $a - r \le x \le a + r$ sau $-r \le x - a \le r$ sau $|x - a| \le r$.

Aşadar, $[a-r, a+r]=\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \le r\}$ şi

$(a-r, a+r)=\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$.

Intersecția şi reuniunea a două intervale centrate în a sunt intervale centrate în a.

☞ ***Exemplu***

Intervalele $(1, 3)$ şi $(0, 4)$ sunt centrate în $a=2$ şi au intersecția $(1, 3)$, iar reuniunea $(0, 4)$, ambele centrate în 2.

◢ **Temă**

1. Fie I_1, I_2 două intervale centrate în $a \in \mathbb{R}$, diferite. Să se arate că $I_1 \cap I_2, I_1 \cup I_2 \in \{I_1, I_2\}$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $I_1, I_2, ..., I_n$ intervale centrate în $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că reuniunea şi intersecția lor sunt intervale centrate în a.

▣ TEOREMA 1

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis care conține pe x_0, atunci există un interval centrat în x_0, inclus în I.

Demonstrație

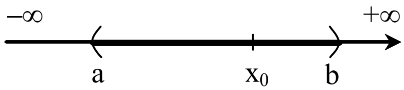


Figura 7

Fie $I=(a, b)$.

Notăm cu $\varepsilon=\min\{b-x_0, x_0-a\}$.

Atunci intervalul $I_\varepsilon=(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a, b)$ şi este centrat în x_0. ■

❸ MULȚIMI MĂRGINITE

3.1. MAJORANȚI, MINORANȚI

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime nevidă de numere reale.

❖ **DEFINIȚII**

- Numărul real m se numeşte **minorant** al mulțimii A, dacă $m \le a, \ \forall\, a \in A$.
- Numărul real M se numeşte **majorant** al mulțimii A, dacă $a \le M, \ \forall\, a \in A$.

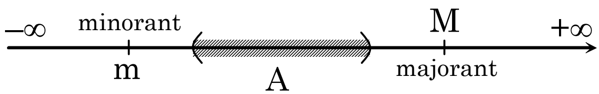


Figura 1

❖ **DEFINIȚII**

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **minorată** sau **mărginită inferior** dacă are cel puțin un minorant.

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește **majorată** sau **mărginită superior** dacă are cel puțin un majorant.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numește **mărginită** dacă este mărginită inferior și mărginită superior.

▣ TEOREMA 2

Mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este mulțime mărginită dacă și numai dacă există $M \in (0, +\infty)$, astfel încât $|x| \le M, \forall\ x \in A.$

<u>*Demonstrație*</u>

Dacă $|x| \le M, \forall\ x \in A,$ atunci $-M \le x \le M, \forall\ x \in A,$ deci $-M$ este minorant pentru A, iar M este majorant pentru A. Așadar, mulțimea A este mulțime mărginită.

Reciproc

Fie $a, b \in \mathbb{R},$ astfel încât $a \le x \le b, \forall\ x \in A.$ Luând $M = \max\{|a|, |b|\}$ se obține că $|x| \le M, \forall\ x \in A.$ ■

Exerciții și probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine mulțimea minoranților și mulțimea majoranților pentru mulțimile:

a) $A = [0, 1]$; **b)** $A = (0, 1)$; **c)** $A = (-1, 2) \cup [3, 5]$.

<u>*Soluție*</u>

a), **b)** Mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, 0]$, iar mulțimea majoranților este $M_2 = [1, +\infty)$, figura 2.

Figura 2

c) Pentru mulțimea A, mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, -1]$, iar mulțimea majoranților este $M_2 = [5, +\infty)$, figura 3.

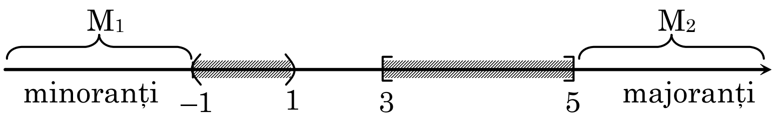


Figura 3

☒ **2.** Să se arate că mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este minorată, dar nu este majorată.

<u>*Soluție*</u>

Un minorant al mulțimii $\mathbb{N}$ este numărul 0, sau oricare număr real negativ.

Să arătăm că nici un număr real nu poate fi majorant pentru mulțimea $\mathbb{N}$. Pentru demonstrație folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $M \in \mathbb{R}_+$ majorant al mulțimii $\mathbb{N}$. Atunci $n \le M, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

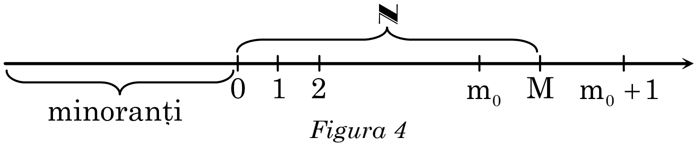


Figura 4

Luând $n_0 = [M]$, se observă că $M < n_0 + 1$ şi cum $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ se obține o contradicție cu faptul că M este majorant (figura 4). Aşadar mulțimea $\mathbb{N}$ este nemajorată.

☒ **3.** Să se determine mulțimea minoranților şi mulțimea majoranților pentru mulțimile:

a) $A = [0, +\infty)$; **b)** $A = \mathbb{Z}$; **c)** $A = \mathbb{Q}$; **d)** $A = \mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Mulțimea minoranților este $M_1 = (-\infty, 0]$. Mulțimea A nu este majorată, deoarece $\mathbb{N} \subset A$, iar $\mathbb{N}$ nu este majorată.

b) Deoarece $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, mulțimea $\mathbb{Z}$ este nemajorată. Dar mulțimea $\mathbb{Z}$ este şi neminorată deoarece, dacă presupunem că există $m \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $m \le x, \forall\ x \in \mathbb{Z}$, ar trebui ca $-x \le -m$, deci mulțimea $A_1 = \{-x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ este majorată. Contradicție.

c), **d)** Avem $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, deci $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ sunt neminorate şi nemajorate.

❖ DEFINIȚII

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **nemărginită inferior** dacă nu are nici un minorant.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **nemărginită superior** dacă nu are nici un majorant.

☞ ***Exemple***

- Mulțimea $\mathbb{N}$ este nemărginită superior.
- Mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sunt nemărginite atât superior, cât şi inferior.

➲ OBSERVAȚII

- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită superior dacă, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $a \in A$, astfel încât $x < a$.
- O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită inferior dacă pentru oricare număr real $x \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $a \in A$, astfel încât $a < x$.

3.2. MARGINILE UNEI MULȚIMI DE NUMERE REALE

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime nevidă.

❖ **DEFINIȚII**

- Numărul real m se numeşte **margine inferioară** a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$, dacă este minorant al mulțimii A şi este cel mai mare minorant al mulțimii A.
- Numărul real M se numeşte **margine superioară** a mulțimii $A \subset \mathbb{R}$ dacă este majorant al mulțimii A şi este cel mai mic majorant al mulțimii A.

Marginea inferioară a mulțimii A se notează $\inf(A)$, iar marginea superioară a mulțimii A se notează $\sup(A)$.

☞ ***Exemplu***

Fie $A = (0, 1)$.

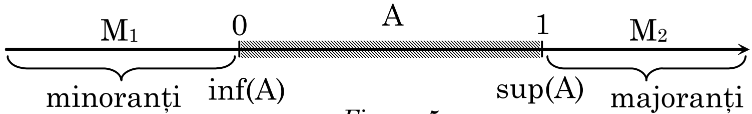


Figura 5

Mulțimea $M_1 = (-\infty, 0]$ este mulțimea minoranților lui A şi $\inf(A) = 0$, iar mulțimea $M_2 = [1, +\infty)$ este mulțimea majoranților şi $\sup(A) = 1$.

Referitor la marginile unei mulțimi vom accepta următoarea axiomă.

▣ **AXIOMA LUI CANTOR**

Orice mulțime de numere reale mărginită inferior admite o margine inferioară.

Georg CANTOR (1845-1918) matematician german

Este creatorul teoriei mulțimilor.

A creat noțiunile de mulțime deschisă, mulțime închisă, punct de acumulare etc.

➲ **OBSERVAȚII**

- Axioma lui Cantor permite să afirmăm că oricare mulțime mărginită are atât margine inferioară, cât şi margine superioară.
- Dacă marginile unei mulțimi există, acestea sunt unice.

Într-adevăr, dacă $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ sunt marginile inferioare ale mulțimii $A \subset \mathbb{R}$, din relațiile $m_1 < m_2$ sau $m_2 < m_1$ s-ar contrazice faptul că m_1 şi m_2 ar fi cei mai mari minoranți ai mulțimii A. Aşadar, dacă există, $\inf(A)$ este unică. Analog se arată faptul că $\sup(A)$ este unică.

3.3. MARGINILE UNEI MULȚIMI NEMĂRGINITE. DREAPTA ÎNCHEIATĂ

Pentru o abordare unitară a rezultatelor de analiză matematică, pe lângă numerele reale se folosesc simbolurile $+\infty$ (plus infinit), respectiv $-\infty$ (minus infinit), numite **numere infinite**.

Mulțimea formată din mulțimea numerelor reale împreună cu numerele infinite $+\infty$ şi $-\infty$, se numeşte **dreapta încheiată** şi se notează $\overline{\mathbb{R}}$. Aşadar $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nemărginită inferior, atunci ea nu are nici un minorant număr real. În acest caz vom considera că $\inf(A) = -\infty$.

Analog, dacă mulțime $A \subset \mathbb{R}$ este nemărginită superior vom considera că $\sup(A) = +\infty$.

➲ OBSERVAȚII

- $\sup(\mathbb{N}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{Z}) = -\infty$, $\sup(\mathbb{Z}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{Q}) = -\infty$, $\sup(\mathbb{Q}) = +\infty$, $\inf(\mathbb{R}) = -\infty$, $\sup(\mathbb{R}) = +\infty$.

  Referitor la simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ se acceptă următoarele reguli de calcul:
  - $a + (+\infty) = +\infty$ şi $(+\infty) + a = +\infty$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;
  - $a + (-\infty) = -\infty$ şi $(-\infty) + a = -\infty$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;
  - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ şi $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
  - $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, \text{ dacă } a > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$; • $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{ dacă } a > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$;
  - $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$; $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
  - $\dfrac{a}{+\infty} = 0$ şi $\dfrac{a}{-\infty} = 0$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$; • $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$; $(+\infty)^{-\infty} = 0$.

  Referitor la relațiile de ordine se acceptă că:
  $-\infty < +\infty$; $a < +\infty$ şi $-\infty < a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

  Nu se atribuie nici un sens expresiilor:
  $(+\infty) - (+\infty)$; $(-\infty) - (-\infty)$; $0 \cdot (\pm\infty)$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $1^{+\infty}$; $1^{-\infty}$ şi $(\pm\infty)^0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se scrie cu ajutorul relației de inegalitate:**
a) $x \in [3, 7]$; **b)** $x \in (-2, 3]$;
c) $x \in (-2, +\infty)$; **d)** $x \in (-\infty, 3]$.

E2. **Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care intervalele date sunt intervale simetrice:**
a) $(-3, x)$; **b)** $(x+1, 5)$; **c)** $(2x-1, 7)$;
d) $(-x^2, 2x-1)$; **e)** $\left(\dfrac{x-3}{x-1}, \dfrac{2x}{x+2}\right)$.

E3. Se consideră intervalul
$$I_n = \left[1+\frac{1}{n}, 5-\frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}^*.$$
Să se determine:
a) $I_3 \cap I_4$ şi $I_3 \setminus I_4$; b) $I_n \cap \mathbb{N}$.

E4. Să se determine în funcție de $x \in \mathbb{R}$, intersecțiile de intervale:
a) $I_1 = (-1, 3)$ şi $I_2 = (x, x+1)$;
b) $I_1 = (-3, x+1)$ şi $I_2 = (x-2, 5)$;
c) $I_1 = \left[\frac{x}{2}, \frac{3x-1}{4}\right]$ şi $I_2 = \left[\frac{x+1}{3}, \frac{x+5}{2}\right]$.

E5. Să se determine mulțimile de minoranți şi de majoranți pentru mulțimile:
a) $(-1, 3]$; b) $A = (-3, +\infty)$;
c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 4\right\}$;
d) $A = \left\{\frac{1}{x} \mid x \in (0, 1)\right\}$;
e) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x^2-4} < 0\right\}$.

E6. Să se arate că următoarele mulțimi sunt mărginite:
a) $A = \left\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
b) $A = \left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
c) $A = \left\{\frac{x+1}{x-3} \mid x \in (-\infty, -1)\right\}$;
d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \le 2\right\}$;
e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| + |x-1| \le 1\right\}$.

E7. Să se arate că următoarele mulțimi sunt nemărginite:
a) $A = \left\{n^2+1 \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
b) $A = \left\{(-1)^n \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$;
c) $A = \left\{\operatorname{tg} x \mid x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$;
d) $A = \left\{\frac{(-1)^n \cdot n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

APROFUNDARE

A1. Pentru care valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ următoarele intervale sunt mulțimi nevide:
a) $I = [-2x+1, 1+3x]$;
b) $I = \left[\frac{x}{x+1}, \frac{1}{x}\right]$; c) $I = \left[\frac{x-1}{x+1}, \frac{2}{x+2}\right]$?

A2. Să se determine intersecția intervalelor:
$$I_1 = \left[\frac{x}{x+1}, \frac{1}{x}\right], I_2 = \left[\frac{x-1}{x+1}, \frac{2}{x+2}\right].$$

A3. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Orice mulțime finită este mărginită.
b) Orice submulțime a unei mulțimi mărginite este mulțime mărginită.
c) Dacă mulțimea $A \subset \mathbb{R}$ este mărginită superior, atunci orice submulțime a sa este mărginită inferior.

A4. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi mărginite. Să se arate că mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sunt mulțimi mărginite.

A5. Fie $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Să se arate că $\inf(A) = 0$ şi $\sup(A) = 1$.

A6. Să se arate că dacă $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\right\}$, atunci $\inf(A) = -1$ şi $\sup(A) = 1$.

A7. Să se determine $\inf(A)$, $\sup(A)$ pentru mulțimile:
a) $A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
b) $A = \left\{x^2+x \mid x \in (-1, 1)\right\}$;
c) $A = \left\{\frac{2x}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$;

d) $A = \left(-\infty, \sqrt{2}\right)$;

e) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \left|x - \sqrt{2}\right| \le \sqrt{3}\right\}$;

f) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2^x + 4^x \le 6\right\}$;

g) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le 3^x + 9^x \le 90\right\}$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă şi $m \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $m = \inf(A)$, dacă:
a) $m \le x,\ \forall\ x \in A$;
b) $\forall\ \varepsilon > 0$, există un element $x \in A$, astfel încât $x \le m + \varepsilon$.

D2. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă şi $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $M = \sup(A)$ dacă:
a) $x \le M,\ \forall\ x \in A$;
b) $\forall\ \varepsilon > 0$, există un element $x \in A$, astfel încât $x \ge M - \varepsilon$.

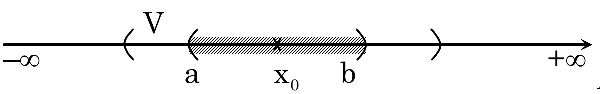
D3. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi nevide şi mărginite. Să se arate că:
a) $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$;
b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

D4. Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $B = \{-x \mid x \in A\}$. Atunci:
a) $\sup(B) = -\inf(A)$;
b) $\inf(B) = -\sup(A)$.

4 VECINĂTĂȚILE UNUI PUNCT PE AXA REALĂ

❖ DEFINIȚII

- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate a punctului $x_0 \in \mathbb{R}$**, dacă există un interval deschis I, astfel încât $x_0 \in I \subset V$.
- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate a lui $+\infty$** dacă există un interval deschis $I = (a, +\infty)$, astfel încât $I \subset V$.
- Mulțimea $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte **vecinătate a lui $-\infty$,** dacă există un interval deschis $I = (-\infty, a)$, astfel încât $I \subset V$.



$x_0 \in (a, b) \subset V$

Figura 1

☞ *Exemple*

- Mulțimile $(-1, 1), [-1, 1], (-1, +\infty), (-\infty, 2)$ sunt vecinătăți pentru $x = 0$.
- Mulțimile $(-2, 3) \cup \{4\}, (-2, 3) \cup (4, 8)$ sunt vecinătăți pentru $x = 1$, dar nu sunt vecinătăți pentru $x = 4$.

➲ OBSERVAȚII

1. Un punct $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ are oricât de multe vecinătăți. Vom nota mulțimea vecinătăților lui x_0 cu $\mathcal{V}(x_0)$.

2. Orice interval deschis (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, este vecinătate pentru oricare $x_0 \in (a, b)$.

3. Intervalele centrate în $x_0 \in \mathbb{R}$ sunt vecinătăți pentru x_0. Ele se numesc **vecinătăți centrate** ale punctului x_0.

4. Fiecărei vecinătăți $V \in \mathscr{V}(x_0)$ îi corespunde o vecinătate centrată în x_0, $V_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ astfel încât $V_\varepsilon \subset V$. De aceea, atunci când se lucrează cu vecinătățile lui x_0 este suficient să se considere numai vecinătăți centrate.

PROPRIETĂŢI ALE VECINĂTĂŢILOR UNUI PUNCT $x_0 \in \mathbb{R}$

P1. $x_0 \in V$, pentru oricare $V \in \mathscr{V}(x_0)$.

P2. Dacă $V_1, V_2 \in \mathscr{V}(x_0)$, atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}(x_0)$.

P3. Dacă $V \in \mathscr{V}(x_0)$ şi $V \subset U$, atunci $U \in \mathscr{V}(x_0)$.

P4. Dacă $V \in \mathscr{V}(x_0)$, atunci există $U \in \mathscr{V}(x_0)$, astfel încât V este vecinătate pentru oricare $y \in U$.

➲ OBSERVAȚIE

- Intersecția unui număr finit de vecinătăți ale lui $x_0 \in \mathbb{R}$ este vecinătate a lui x_0, dar intersecția unui număr infinit de vecinătăți ale lui x_0 poate să nu mai fie vecinătate a lui x_0.

☞ ***Exemple***

1. Fie $V_n = \left[-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right] \in \mathscr{V}(0)$, $n \geq 1$. Avem $\bigcap_{n\geq 1} V_n = [-1, 1]$, care este vecinătate pentru $x = 0$.

2. Fie $V_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathscr{V}(0)$, $n \geq 1$. Rezultă că $\bigcap_{n\geq 1} V_n = \{0\}$, care nu este vecinătate a lui $x = 0$.

> ▣ **TEOREMA 3 (teorema de separare)**
> Fie $x, y \in \mathbb{R}$ puncte diferite de pe dreapta reală. Atunci există vecinătățile $V \in \mathscr{V}(x)$ şi $U \in \mathscr{V}(y)$, astfel încât $V \cap U = \varnothing$.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $x < y$. Intervalul $I = (x, y)$ este mulțime nevidă, deci există cel puțin un punct $c \in (x, y)$. Luând $V \in \mathscr{V}(x)$, $V = (-\infty, c)$ şi $U \in \mathscr{V}(y)$, $U = (c, +\infty)$, vom avea $V \cap U = \varnothing$, (figura 2). ■

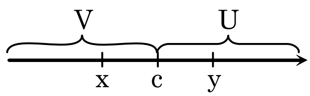


Figura 2

PUNCTE DE ACUMULARE ALE UNEI MULŢIMI

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime nevidă.

❖ DEFINIȚII

- Numărul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare al mulțimii A**, dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, rezultă că $A \cap (V \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$.
- Un punct $x_0 \in A$ se numeşte **punct izolat al mulțimii A** dacă nu este punct de acumulare al mulțimii A.

Mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează A'. O mulțime poate să aibă mai multe puncte de acumulare sau nici unul.

☞ ***Exemple***

1. Fie $A = (0, 1)$. Atunci $A' = [0, 1]$.

2. Dacă $A = \{1\}$, atunci $A' = \varnothing$.

3. Orice mulțime finită nu are puncte de acumulare. Într-adevăr, dacă $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, din proprietatea de separare a lui $\mathbb{R}$, există vecinătăți care separă fiecare element al mulțimii A de celelalte elemente. Intersecția unei asemenea vecinătăți cu mulțimea A este formată doar dintr-un singur element, deci $A \cap (V_i \setminus \{a_i\}) = \varnothing$, unde $V_i \in \mathscr{V}(a_i)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

4. Pentru $A = \mathbb{Q}$ avem $A' = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece în orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, se găsesc o infinitate de numere raționale.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se precizeze care dintre următoarele mulțimi sunt vecinătăți ale lui 0:**
a) $V_1 = (-1, 3)$; **b)** $V_2 = (-1, 0) \cup (0, 1)$;
c) $V_3 = (0, +\infty)$; **d)** $V_4 = (-4, 0)$;
e) $V_5 = \mathbb{Z}$; **f)** $V_6 = \mathbb{Q}$; **g)** $V_7 = \mathbb{R}$;
h) $V_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

E2. **Care dintre următoarele mulțimi sunt vecinătăți pentru $+\infty$:**
a) $V_1 = (-1, +\infty)$, $V_2 = [3, +\infty)$, $V_3 = (1, 3) \cup (10, +\infty)$, $V_4 = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$;
b) $V_5 = \mathbb{N}$, $V_6 = \mathbb{Z}$, $V_7 = \mathbb{Q}$, $V_8 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $V_9 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

E3. **Fie $A = (2, 3)$. Să se arate că mulțimea A este vecinătate pentru fiecare punct al ei.**

E4. **Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:**
a) $A = \{0, 2\}$;
b) $A = [0, 1)$;
c) $A = [-3, 5]$;
d) $A = (-\infty, 1)$;
e) $A = (-1, 3) \cup (4, 5)$;
f) $A = (4, 8) \setminus \{5\}$;
g) $A = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

APROFUNDARE

A1. **Să se demonstreze proprietățile P_2, P_3, P_4 ale vecinătăților.**

A2. **Să se arate că următoarele mulțimi $A \subset \mathbb{R}$ nu sunt vecinătăți pentru oricare punct $x_0 \in A$:**

a) $A = \mathbb{N}$; **b)** $A = \mathbb{Z}$; **c)** $A = \mathbb{Q}$;

d) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

A3. **Să se arate că următoarele mulțimi sunt vecinătăți pentru fiecare punct al lor:**

a) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; **b)** $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

c) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; **d)** $A = \bigcup\limits_{n \geq 1} \left(0, \dfrac{n}{n+1}\right)$;

e) $\bigcap\limits_{n \geq 1} \left(-\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right) \setminus \{0, 1\}$.

A4. **Să se arate că un interval $I \subset \mathbb{R}$ este deschis dacă şi numai dacă este vecinătate pentru oricare punct al său.**

A5. **Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:**

a) $A = \mathbb{N}$; **b)** $A = \mathbb{Z}$; **c)** $A = \mathbb{Q}$;

d) $A = \mathbb{R}$; **e)** $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **f)** $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

A6. **Să se determine punctele de acumulare în $\overline{\mathbb{R}}$ pentru mulțimile:**

a) $A = \left\{\dfrac{1}{2n} + \sin\dfrac{n\pi}{4} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

b) $A = \left\{\dfrac{n}{n+1} + \cos\dfrac{n\pi}{6} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

c) $A = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

DEZVOLTARE

D1. **Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi nevide şi A', B' mulțimile punctelor de acumulare. Să se arate că:**

a) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$;

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

c) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

5 FUNCȚII REALE DE VARIABILĂ REALĂ

Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ două mulțimi de numere reale.

O funcție $f : A \to B$ se numeşte **funcție reală de variabilă reală** sau **funcție numerică**.

În clasele anterioare, au fost studiate diferite funcții numerice sub aspectul proprietăților generale ale monotoniei, paritate-imparitate, periodicitate, mărginire, injectivitate, surjectivitate, convexitate-concavitate şi altele. Astfel, aceste proprietăți au fost verificate în studiul câtorva funcții numerice particulare cum sunt: funcția de gradul I, funcția de gradul II, funcția putere cu exponent natural, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică şi funcțiile trigonometrice.

Analiza matematică va continua studiul funcțiilor numerice sub aspectul noilor proprietăți sau al găsirii de noi metode de verificare a proprietăților generale.

Acest studiu va pune în evidență câteva clase de funcții în care se vor regăsi şi funcțiile particulare studiate. Ele vor servi ca suport pentru lecturarea şi desprinderea unor proprietăți şi vor constitui exemple sau contraexemple pentru ilustrarea anumitor noțiuni.

De aceea, în acest paragraf se va face o actualizare sumară a elementelor esențiale legate de funcțiile numerice particulare cunoscute, precum şi unele completări.

FUNCŢII POLINOMIALE

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, unde a_n, a_{n-1}, ..., a_1, $a_0\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, se numeşte **funcție polinomială de gradul n**.

Cazuri particulare

a) Pentru $n=0$ se obține funcția constantă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0$. Aceasta este funcție monotonă pe $\mathbb{R}$ şi mărginită.

b) Pentru $n=1$ se obține funcția de gradul I, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_1x+a_0$. Funcția de gradul I este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, bijectivă, inversabilă şi nemărginită. Aceste proprietăți se pot desprinde şi din imaginea geometrică a graficului său, reprezentat de o dreaptă.

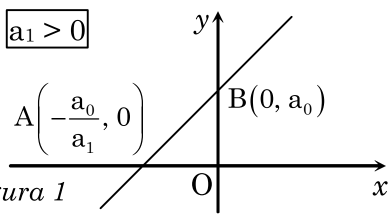


Figura 1

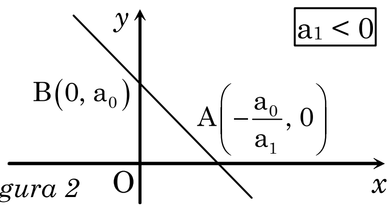


Figura 2

c) Pentru $n=2$ se obține funcția polinomială de gradul II, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. Imaginea geometrică a graficului funcției de gradul II se numeşte **parabolă**.

d) Funcția putere cu exponent natural, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ este un alt caz particular de funcție polinomială de gradul n.

Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ proprietățile funcției polinomiale de gradul n depind de paritatea numărului $n\in\mathbb{N}$ şi se vor întâlni pe parcursul studierii funcțiilor numerice.

FUNCŢII RAŢIONALE

Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții polinomiale de gradul n, respectiv de gradul m şi $D=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}$.

Funcția $h:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se numeşte **funcție rațională**.

Cazuri particulare

• Atunci când funcția polinomială g este constantă, funcția rațională h este funcție polinomială.

Aşadar, funcțiile polinomiale sunt cazuri particulare de funcții raționale.

• Dacă $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=1, g(x)=x^n, n \in \mathbb{N},$ atunci se obține funcția rațională $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, h(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$ (funcția putere cu exponent întreg negativ).

FUNCŢIA PUTERE CU EXPONENT REAL

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ un număr real.

Funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^{\alpha}$ se numeşte **funcția putere cu exponent real**.

Cazuri particulare

• Pentru $\alpha=0$, se obține funcția constantă $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=1$.

• Pentru $\alpha \in \mathbb{N}$, se obține funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=x^n$ care este o restricție la intervalul $(0,+\infty)$ a funcției putere cu exponent natural.

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

• Pentru $\alpha=\frac{1}{2}$ sau $\alpha=\frac{1}{3}$ se obțin funcțiile $f, g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, respectiv $g(x)=\sqrt[3]{x}$, adică funcția radical de ordinul 2, respectiv 3.

Mai general, pentru $\alpha=\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ se obține funcția radical de ordinul n, $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x}$. Funcția radical de ordinul n este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, este concavă şi nemărginită, (figura 3).

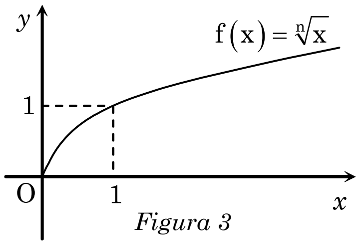


Figura 3

FUNCŢIA RADICAL PENTRU n IMPAR

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, unde $n \in \mathbb{N}$, este număr impar, $n>1$, se numeşte **funcția radical pentru n impar**. Imaginea geometrică a graficului ei este redată în figura 4.

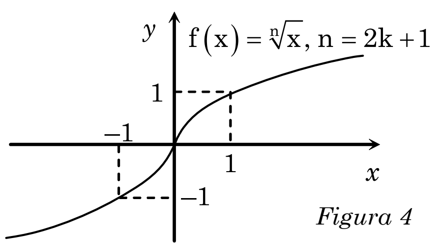


Figura 4

Lectura grafică confirmă următoarele proprietăți:

• este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

• este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi este concavă pe $[0,+\infty)$;

• este bijectivă;

• este impară.

FUNCŢIA EXPONENŢIALĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte **funcție exponențială**.

Imaginea geometrică a graficului ei este redată în figura 5, pentru $a\in(0,1)$, respectiv pentru $a\in(1,+\infty)$.

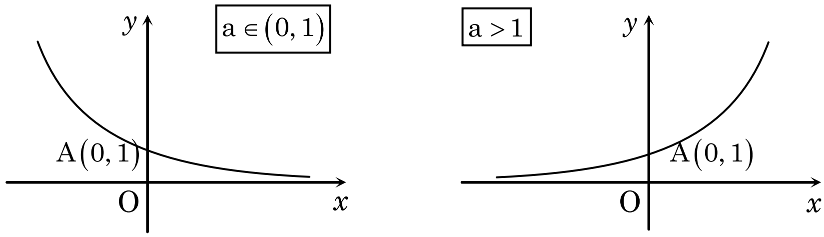


Figura 5

Lecturând graficul funcției exponențiale se confirmă următoarele proprietăți generale:

- funcția este bijectivă;
- funcția este inversabilă;
- funcția este convexă;
- funcția este pozitivă $(a^x>0,\ x\in\mathbb{R})$;
- funcția este nemărginită;
- funcția este strict monotonă pe $\mathbb{R}$ şi anume:
  - dacă $a\in(0,1)$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;
  - dacă $a\in(1,+\infty)$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- axa Ox este asimptotă orizontală a curbei exponențiale.

FUNCŢIA LOGARITMICĂ

Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, se numeşte **funcție logaritmică**.

Curba logaritmică este redată în figura 6 pentru cazurile $a\in(0,1)$ şi $a\in(1,+\infty)$.

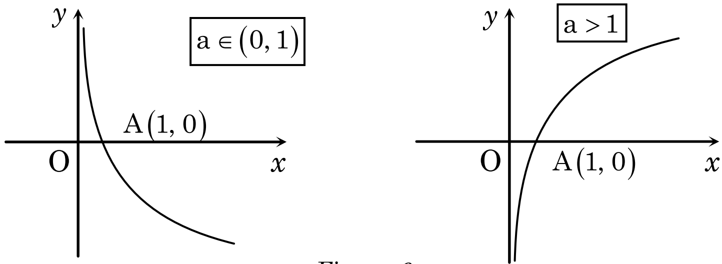


Figura 6

Lecturând graficul funcției logaritmice se confirmă următoarele proprietăți generale:

- este funcție bijectivă;
- este funcție inversabilă;
- nu este funcție mărginită;
- Oy este asimptotă verticală a graficului;
- este funcție monotonă pe $(0, +\infty)$ şi anume:

  – dacă $a \in (0, 1)$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$;

  – dacă $a \in (1, +\infty)$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.

- este funcție convexă pe $(0, +\infty)$ dacă $a \in (0, 1)$ şi este funcție concavă pe $(0, +\infty)$ dacă $a \in (1, +\infty)$.

FUNCŢIILE TRIGONOMETRICE SINUS ŞI COSINUS

Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, reprezintă funcțiile trigonometrice sinus, respectiv cosinus.

Proprietăți ale funcțiilor sinus şi cosinus:

- sunt funcții mărginite: $\sin x \in [-1, 1]$ şi $\cos x \in [-1, 1]$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
- sunt funcții periodice cu perioada principală $T = 2\pi$:

  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
- funcția sinus este funcție impară, iar funcția cosinus este funcție pară:

  $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$;
- sunt funcții surjective şi nu sunt funcții injective;

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor sinus, respectiv cosinus sunt redate pe intervalul $[0, 2\pi]$ în figura 7.

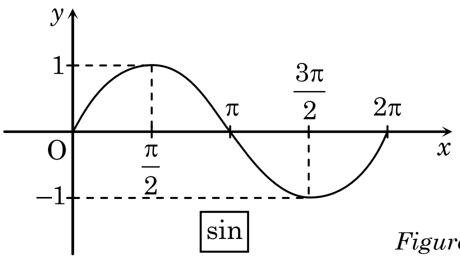
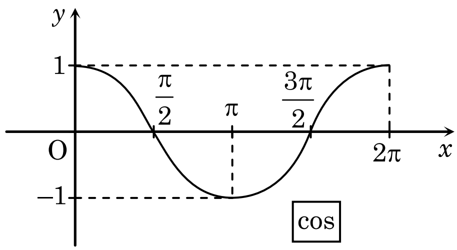


Figura 7



FUNCŢIILE TANGENTĂ ŞI COTANGENTĂ

Se consideră funcțiile:

$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ – funcția tangentă;

$g : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$ – funcția cotangentă.

Proprietăți ale funcțiilor tangentă şi cotangentă:

• sunt funcții periodice cu perioada principală $T = \pi$:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

• sunt funcții impare:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$$

• sunt funcții surjective şi nu sunt funcții injective;

• sunt funcții nemărginite;

• nu sunt funcții strict monotone pe domeniul de existență;

• sunt strict monotone pe orice interval din domeniul de existență;

Curbele reprezentative ale graficelor celor două funcții sunt redate în figura 8 pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, respectiv $(0, \pi)$.

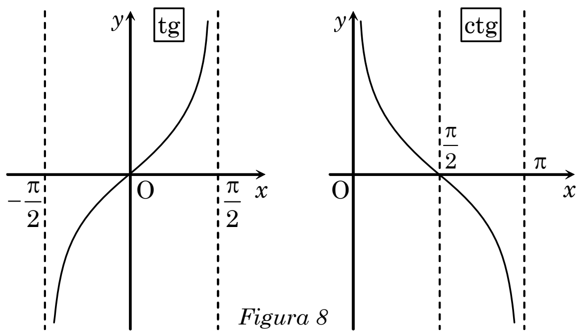


Figura 8

FUNCŢIILE ARCSINUS ŞI ARCCOSINUS

Funcțiile $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$, şi $g : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $g(x) = \arccos x$, reprezintă funcțiile arcsinus şi arccosinus.

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor arcsinus şi arccosinus sunt redate în figura 9.

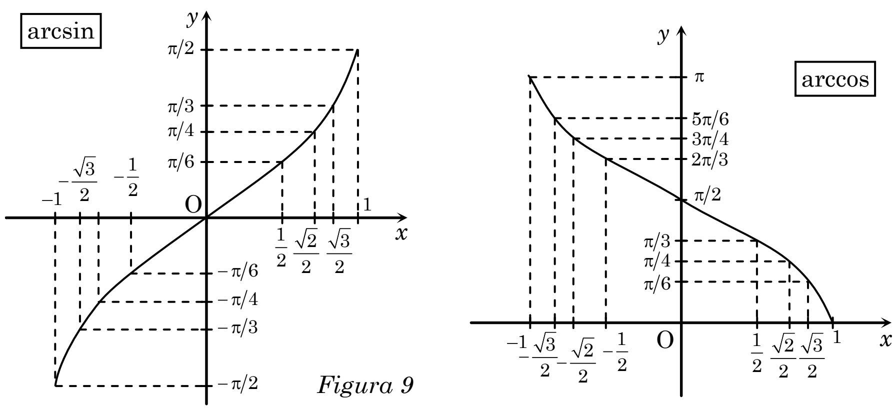


Figura 9

Proprietăți ale funcțiilor arcsin, arccos:

- sunt funcții bijective;
- sunt funcții mărginite:

$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \forall\ x \in [-1, 1]$ şi $\arccos x \in [0, \pi], \forall\ x \in [-1, 1]$;

- sunt funcții strict monotone pe intervalul $[-1, 1]$: funcția arcsinus este funcție strict crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, iar funcția arccosinus este funcție strict descrescătoare pe $[-1, 1]$;
- arcsinus este funcție impară: $\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x \in [-1, 1]$; arccosinus nu este nici funcție pară, nici funcție impară;
- arcsinus este funcție concavă pe $[-1, 0]$ şi convexă pe $[0, 1]$;
- arccosinus este funcție convexă $[-1, 0]$ şi concavă pe $[0, 1]$.

FUNCŢIILE ARCTANGENTĂ ŞI ARCCOTANGENTĂ

Funcția $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ reprezintă funcția arctangentă.

Funcția $g : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arccotg} x$ reprezintă funcția arccotangentă.

Curbele reprezentative ale graficelor funcțiilor arctg şi arcctg sunt redate în figura 10.

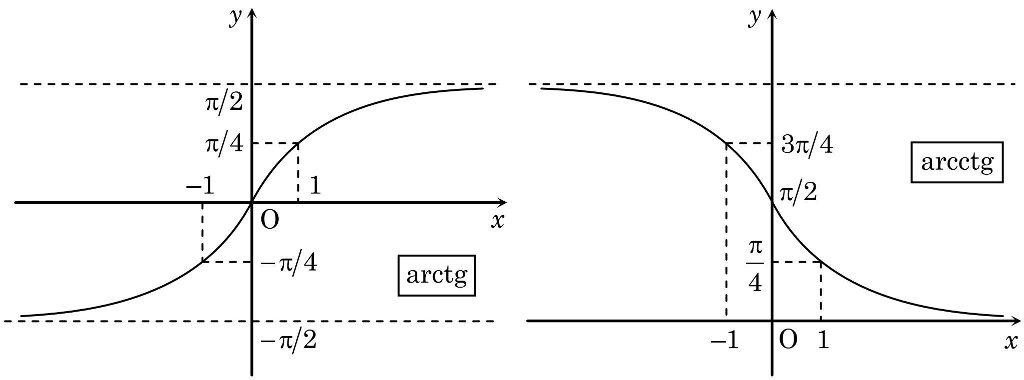


Figura 10

Proprietăți ale funcțiilor arctg şi arcctg:

- sunt funcții bijective;
- sunt funcții mărginite: $\operatorname{arctg}(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arcctg}(\mathbb{R}) = (0, \pi)$;

• sunt funcții strict monotone pe $\mathbb{R}$: funcția arctg este funcție strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar funcția arcctg este funcție strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

• funcția arctg este funcție impară: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, funcția arcctg nu este nici funcție impară, nici funcție pară;

• funcția arctg este convexă pe $(-\infty, 0]$ şi concavă pe $[0, +\infty)$;

• funcția arcctg este concavă pe $(-\infty, 0]$ şi convexă pe $[0, +\infty)$.

❖ **DEFINIȚIE**

• Funcțiile constante, funcțiile polinomiale, funcțiile raționale, funcția putere (cu exponent natural, întreg, rațional sau real), funcția exponențială, funcția logaritmică şi funcțiile trigonometrice sunt numite **funcții elementare**.

❻ LIMITE DE ȘIRURI

6.1. ȘIRURI CARE AU LIMITĂ FINITĂ

NE REAMINTIM!

• *O funcție* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *se numeşte şir de numere reale.*
• *Numărul* $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *se numeşte termenul general al şirului.*

Problemă rezolvată

Fie (a_n) un şir de numere reale cu termenul general $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine câți termeni ai şirului (a_n) sunt în afara vecinătății $V = \left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$ a lui 1.

b) Să se arate că în afara vecinătății $V = \left(\frac{999}{1000}, \frac{1001}{1000}\right)$ a lui 1 se află un număr finit de termeni ai şirului.

c) Fie $\varepsilon > 0$ şi $V = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ o vecinătate a lui 1. Să se arate că în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n).

<u>Soluție</u>

a) Din condiția $\frac{9}{10} < a_n < \frac{11}{10}$ se obține 9 < n. Aşadar $a_n \in V$ pentru $n \geq 10$, iar termenii $a_1, a_2, \ldots, a_9$ sunt în afara vecinătății V.

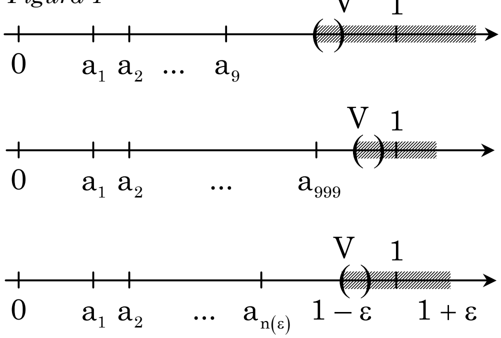
b) Dacă $a_n \in V$, rezultă că $\frac{999}{1000} < a_n$ şi se obține n > 999. Aşadar în afara vecinătății V se află primii 999 de termeni ai şirului (a_n).

c) Să aflăm mai întâi câți termeni aparțin vecinătății $V=(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$. Din condiția $1-\varepsilon<a_n<1+\varepsilon$ se obține $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

• Dacă $\varepsilon \geq 1$, atunci toți termenii şirului (a_n) aparțin vecinătății V.

• Dacă $\varepsilon < 1$, pentru numărul natural $n(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$ nu aparțin lui V, iar dacă $n>n(\varepsilon)$, avem că $a_n \in V$.

Figura 1



În afara vecinătății V se află un număr finit de termeni pentru $\forall\ \varepsilon > 0$.

Din problema rezolvată anterior se observă că în afara oricărei vecinătăți V a lui 1, există un număr finit de termeni ai şirului (a_n).

Aşadar, orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(1)$, conține toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit de termeni ai acestuia.

De asemenea, dacă $\varepsilon>0$, atunci condiția ca $a_n \in V=(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ este echivalentă cu $|a_n-1|<\varepsilon$, sau, altfel spus $d(a_n;\ 1)<\varepsilon$.

Pentru $\varepsilon > 0$ foarte mic avem că distanța $d(a_n;\ 1)$ este suficient de mică, putând să considerăm că de la un anumit rang, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, termenii a_n pot fi aproximați cu 1. Vom spune astfel că şirul (a_n) admite pe 1 ca limită.

❖ DEFINIȚIE

• Un număr $\ell \in \mathbb{R}$ se numeşte **limita şirului (a_n)** dacă în afara oricărei vecinătăți a lui ℓ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Pentru limita şirului (a_n) se foloseşte notația $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pentru şirul (a_n), cu termenul general $a_n=\frac{n}{n+1}$, putem scrie $1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+7}{n+2}$.

<u>*Soluție*</u>

Trebuie să arătăm că în afara oricărei vecinătăți $V \in \mathcal{V}(2)$ există un număr finit de termeni ai şirului. Este suficient să considerăm vecinătăți centrate în 2, $V=(2-\varepsilon,\ 2+\varepsilon)$, cu $\varepsilon>0$.

Din condiția $\frac{2n+7}{n+2} \in V$, se obține: $2-\varepsilon < \frac{2n+7}{n+2} < 2+\varepsilon$, de unde $n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$. (1)

• Pentru $\varepsilon \geq \frac{3}{2}$, relația (1) este adevărată pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, deci în afara vecinătății V nu se află nici un termen al şirului.

• Pentru $\varepsilon < \frac{3}{2}$ şi $n(\varepsilon) = \left[\frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$, avem $n \geq n(\varepsilon)$, deci în afara vecinătății V se află termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n(\varepsilon)}$, în număr finit. Aşadar, $2 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+7}{n+2}$.

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} \neq 2$.

<u>*Soluție*</u>

Trebuie arătat că există cel puțin o vecinătate V a lui 2 în afara căreia se află un număr infinit de termeni.

Fie $V = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Deoarece $\frac{n+2}{n+3} < 1 < \frac{3}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem că $\frac{n+2}{n+3} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci toți termenii şirului sunt în afara vecinătății V. Aşadar, $2 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3}$.

➲ OBSERVAȚII

1. Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ nu este limita şirului (a_n) dacă există cel puțin o vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ în afara căreia se află un număr infinit de termeni ai şirului.

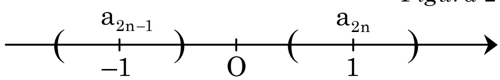
2. Există şiruri de numere reale care nu au limită.

☞ ***<u>Exemplu</u>***

Fie (a_n) şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$. Atunci $a_{2n} = 1$, $a_{2n-1} = -1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă presupunem că $\ell \in \mathbb{R}$ şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci în oricare vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit dintre aceştia. Deosebim situațiile:

- $\ell \in (-\infty, -1]$. Pentru $V = (-\infty, 0)$, $a_{2n} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- $\ell \in (-1, 1)$. Pentru $V = (-1, 1)$, $a_n \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
- $\ell \in [1, +\infty)$. Pentru $V = (0, +\infty)$, $a_{2n-1} \notin V$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Figura 2



În concluzie, nici un număr real ℓ nu poate fi limită a şirului (a_n).

6.2. ȘIRURI CARE AU LIMITĂ INFINITĂ

Fie (a_n) un şir de numere reale.

❖ **DEFINIȚII**

- **Şirul (a_n) are limita** $+\infty$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului.
- **Şirul (a_n) are limita** $-\infty$, dacă în afara oricărei vecinătăți a lui $-\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Fie (a_n) un şir cu termenul general $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$, $n \geq 1$. Să se arate că $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

Soluție

Fie $V = (a, +\infty)$, $a > 0$, o vecinătate a lui $+\infty$. Din condiția $a_n \in V$, rezultă că $\dfrac{n^2}{n+1} > a$, de unde $n - 1 + \dfrac{1}{n+1} > a$. Dacă $m = [a] + 2$, pentru $n \geq m$, rezultă că $a_n > a$, deci în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni: $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$. Rezultă că $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

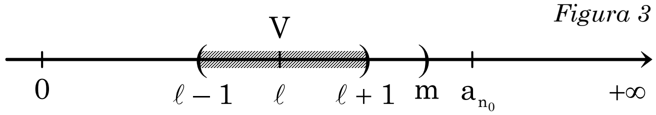
Luând $V = (-\infty, -a)$ vecinătate pentru $-\infty$, în afara lui V se află cel mult primii m – 1 termeni, deci $-\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

☒ **2.** Fie (a_n) un şir nemărginit de numere reale pozitive. Dacă (a_n) are limită, atunci $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluție

Să presupunem că $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\ell \in \mathbb{R}$. Atunci în afara vecinătății $V = (\ell - 1, \ell + 1)$ se află un număr finit de termeni ai şirului.

Figura 3



Fie $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$ aceşti termeni.

Pentru $m = \max\left(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ell + 1\right)$, în vecinătatea $V = (-\infty, m)$ a lui ℓ se află toți termenii şirului (a_n). Dar (a_n) fiind nemărginit superior, există cel puțin un termen a_{n_0}, astfel că $a_{n_0} > m$. Contradicție. Aşadar $\ell \notin \mathbb{R}$. Rezultă astfel că în oricare vecinătate a lui $+\infty$ se află toți termenii şirului (a_n), mai puțin un număr finit de termeni, deci $+\infty = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

◢ Temă

Să se arate că următoarele şiruri au limita infinită:

a) $a_n = 2n + 7$; **b)** $a_n = 3n^2 + 2$; **c)** $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$;

d) $a_n = \dfrac{-n^3}{n+1}$; **e)** $a_n = n - n^2$.

7 PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

7.1. PROPRIETĂȚI GENERALE

▣ TEOREMA 4 (Unicitatea limitei unui şir)

Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie (a_n) un şir de numere reale. Presupunem prin absurd că şirul (a_n) are limitele distincte $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

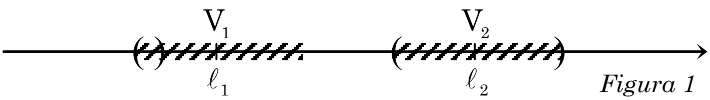


Figura 1

• Dacă $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, din teorema de separare a mulțimii $\mathbb{R}$, rezultă că există vecinătățile $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$ şi $V_2 \in \mathscr{V}(\ell_2)$, astfel încât $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, (figura 1). Deoarece $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, atunci în vecinătatea V_1 se află toți termenii şirului (a_n), mai puțin un număr finit de termeni. Aşadar, în vecinătatea V_2 se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n), iar în afara ei un număr infinit de termeni. Aceasta contrazice faptul că $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Aşadar $\ell_1 = \ell_2$.

• Dacă $\ell_1 \in \mathbb{R}$ şi $\ell_2 = +\infty$, atunci pentru $\varepsilon > 0$ considerăm vecinătățile $V_1 \in \mathscr{V}(\ell_1)$, $V_1 = (\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon)$ şi $V_2 \in \mathscr{V}(+\infty)$, $V_2 = (a, +\infty)$, $a > \ell + \varepsilon$, (figura 2). Ca şi în cazul precedent rezultă că în V_1 se află toți termenii şirului (a_n), cu excepția unui număr finit de termeni, deci ℓ_2 nu poate fi limită a şirului (a_n).

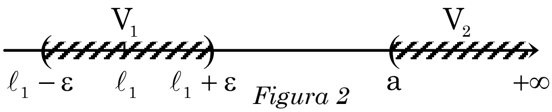


Figura 2

• Celelalte cazuri se tratează analog. ■

❖ DEFINIȚII

- Şirurile de numere reale care au limită finită se numesc **şiruri convergente**.
- Şirurile de numere reale care au limita $+\infty$, $-\infty$ sau nu au limită se numesc **şiruri divergente**.

Se observă uşor că un şir de numere reale care nu este convergent este şir divergent. Aşadar, oricare şir de numere reale este sau şir convergent sau şir divergent.

☞ ***Exemple***

- Şirul (a_n), $a_n = \frac{n}{n+1}$ este şir convergent având limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
- Şirurile cu termenii generali: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{n^2}{n+1}$, $c_n = \frac{-n^2}{n+1}$ sunt şiruri divergente.

❖ DEFINIȚIE

- Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ o funcție strict crescătoare. Şirul $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ se numeşte **subşir** al şirului (a_n).

☞ ***Exemple***

Dacă (a_n) este şirul cu termenul general $a_n = n$, atunci şirurile (a_{2n-1}), (a_{2n}), (a_{3n}), (a_{10n+3}), $n \geq 1$ sunt subşiruri ale şirului (a_n).

▣ TEOREMA 5

Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Atunci orice subşir al şirului (a_n) are limita ℓ.

Demonstrație

Fie $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ un subşir al şirului (a_n). Dacă $V \in \mathcal{V}(\ell)$ este o vecinătate oarecare a lui ℓ, în afara acesteia se află un număr finit de termeni ai şirului, deci şi un număr finit de termeni ai subşirului $\left(a_{\varphi(n)}\right)$.

În mod evident are loc şi o teoremă reciprocă. ■

▣ TEOREMA 6

Fie (a_n) un şir de numere reale. Dacă toate subşirurile şirului (a_n) au aceeaşi limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul (a_n) are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Demonstrație: (Temă)

Problemă rezolvată

☒ Fie (a_n) un şir de numere reale, astfel încât subşirurile (a_{2n}) şi (a_{2n-1}) au aceeaşi limită, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Soluție

Fie $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ un subşir oarecare al şirului (a_n). Atunci $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ poate conține numai termeni ai subşirului (a_{2n}), numai termeni ai subşirului (a_{2n-1}) sau termeni ai ambelor subşiruri. În fiecare caz, conform teoremelor anterioare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = \ell$. Aşadar toate subşirurile şirului (a_n) au aceeaşi limită şi, în consecință, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

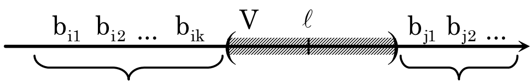
▣ TEOREMA 7

Fie (a_n) un şir de numere reale cu limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci, prin înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni se obține un şir cu aceeaşi limită ℓ.

Demonstrație

Într-adevăr, dacă $V \in \mathcal{V}(\ell)$, atunci înlăturarea sau adăugarea unui număr finit de termeni nu modifică faptul că în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni. ■

Figura 3



În afara lui V, sunt mai puțini termeni sau mai mulți, dar tot în număr finit.

➲ OBSERVAȚIE

- Fie (a_n) un şir de numere reale care are limita $\ell \in \mathbb{R}$. Prin adăugarea unui număr infinit de termeni, şirul obținut are aceeaşi limită ℓ sau nu are limită.

☞ ***Exemple***

- Fie $a_n = \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = (-1)^n \dfrac{2}{n}$, $n \ge 1$. Se observă uşor că $b_{2n} = a_n$ şi $b_{2n-1} = \dfrac{-2}{2n-1}$. În acest caz, prin adăugarea termenilor b_{2n-1}, $n \ge 1$, s-a obținut un şir cu aceeaşi limită: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

- Fie $a_n = 1$ şi $b_n = (-1)^n$, $n \ge 1$. Se observă că $b_{2n} = a_n$ şi $b_{2n-1} = -1$. În acest caz, noul şir (b_n) nu mai are limită, deoarece are două subşiruri cu limite diferite.

7.2. PROPRIETĂȚI ALE ȘIRURILOR CONVERGENTE

După cum se ştie, un şir este convergent dacă acesta are limita finită. Astfel, orice şir convergent are proprietățile întâlnite până acum pentru şirurile care au limită.

Dar există şi proprietăți specifice şirurilor convergente.

▣ TEOREMA 8 (Limita modulului)

Fie (a_n) un şir convergent de numere reale. Atunci şirul $(|a_n|)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$, (limita modulului este egală cu modulul limitei).

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată.

De exemplu, pentru şirul cu termenul general $a_n = (-1)^n$, avem că $|a_n| = \left|(-1)^n\right| = 1$, deci $|a_n|$ este convergent, dar şirul (a_n) nu este convergent.

2. Fie (a_n) un şir convergent şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Afirmațiile următoare sunt echivalente:

a) $\ell = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$.

▣ TEOREMA 9

Orice şir convergent este mărginit.

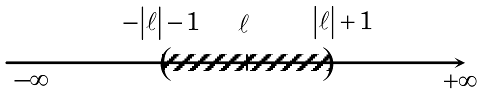


Figura 4

Demonstrație

Fie şirul de numere reale (a_n) şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci, în oricare vecinătate a lui ℓ se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit dintre aceştia.

În particular, în afara vecinătății $V = (-1-|\ell|,\ 1+|\ell|)$ se află un număr finit de termeni: $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}$. Luând $M = \max\left\{|a_{n_1}|, |a_{n_2}|, \ldots, |a_{n_p}|, 1+|\ell|\right\}$, toți termenii şirului sunt în intervalul $(-M, M)$, deci şirul este mărginit. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Reciproca teoremei nu este adevărată.

Într-adevăr, şirul (a_n), $a_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este convergent.

2. Putem formula condiții suplimentare pentru ca un şir mărginit să fie convergent.

☞ ***Exemplu***

Fie (a_n) un şir care are limită. Atunci (a_n) este convergent dacă şi numai dacă este mărginit.

3. Dacă un şir este nemărginit sau are un subşir nemărginit, atunci şirul este divergent. Aşadar, condiția de mărginire este condiție necesară pentru ca un şir să fie convergent.

7.3. TRECEREA LA LIMITĂ ÎN INEGALITĂȚI

> **▣ TEOREMA 10**
> Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive şi $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atunci $a \geq 0$.

<u>*Demonstrație*</u>

Folosim metoda reducerii la absurd.

Presupunem că $a < 0$. Din relația $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, rezultă că orice vecinătate $V \in \mathscr{V}(a)$, conține toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit dintre aceştia.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, considerăm vecinătatea $V = \left(-\infty, \dfrac{a}{2}\right)$, iar pentru $a = -\infty$, considerăm $V = (-\infty, -1)$, figura 5.

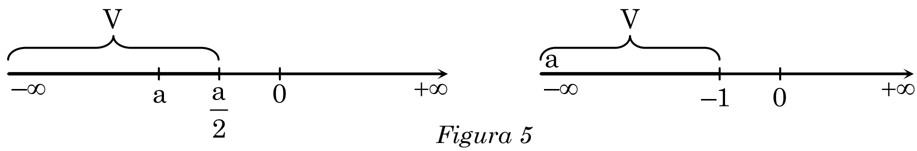


Figura 5

Vecinătatea V conține o infinitate de termeni ai şirului (a_n), de unde rezultă că şirul (a_n) are şi termeni negativi, în contradicție cu ipoteza. Aşadar $a \geq 0$. ■

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

1. Rezultatul este adevărat şi dacă şirul are limită şi conține termeni pozitivi, începând de la un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

2. Dacă şirul (a_n) are limită, conține o infinitate de termeni negativi, dar are un subşir $\left(a_{\varphi(n)}\right)$ cu termeni pozitivi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Dacă şirul (a_n) are limită şi toți termenii săi sunt negativi, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 0$.

> **▣ TEOREMA 11 (de trecere la limită în inegalități)**
> Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri care au limită şi au proprietatea că $a_n \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demonstrație

Fie $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Deosebim cazurile:

• $a = -\infty$. În acest caz vom avea că $a = -\infty \le b$.

• $a = +\infty$. În acest caz şirul (a_n) este nemărginit superior, deci şi (b_n) este nemărginit superior. Cum (b_n) are limită, aceasta nu poate fi decât $+\infty$. Aşadar $a \le b$.

• $a \in \mathbb{R}$. În acest caz (a_n) este convergent, deci este şir mărginit. Rezultă că (b_n) este şi el mărginit inferior, deci nu poate avea limita $-\infty$. Dacă $b = +\infty$, atunci $a \le b$.

• Rămâne de analizat cazul $a, b \in \mathbb{R}$. Presupunem prin absurd că $b < a$. Din teorema de separare a lui $\mathbb{R}$, există vecinătățile $V_1 \in \mathcal{V}(a)$ şi $V_2 = \mathcal{V}(b)$ cu proprietatea că $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, (figura 6).

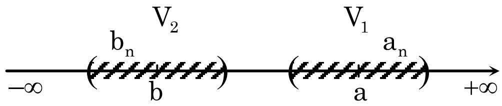


Figura 6

Vecinătatea V_2 conține o infinitate de termeni ai şirului (b_n), în afara ei fiind un număr finit de termeni ai şirului (b_n). Astfel, există termeni $b_n \in V_2$, cu proprietatea $b_n < a_n$, şi se contrazice relația $a_n \le b_n$. În concluzie $a \le b$ şi teorema este complet demonstrată. ■

➲ OBSERVAȚIE

• Dacă pentru şirurile (a_n) şi (b_n) există relația $a_n < b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, nu rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

☞ ***Exemplu***

Fie (a_n) şi (b_n) cu $a_n = -\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. Se observă că $a_n < b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Din teorema de trecerea la limită în inegalități rezultă uşor următoarele consecințe.

▣ CONSECINȚA 1

Fie (a_n) un şir de numere reale convergent şi numerele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a \le a_n \le b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le b$.

Demonstrație

Se consideră şirurile $(x_n), (y_n)$ astfel încât $x_n = a$, $y_n = b$ şi vom avea $x_n \le a_n$ şi $a_n \le y_n$. Conform teoremei 11 se obține rezultatul cerut. ■

▣ CONSECINȚA 2

Fie (a_n) un şir crescător de numere reale şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Atunci $a_n \le \ell,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație

• Dacă $\ell = +\infty$, rezultatul este evident.

• Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, din monotonia şirului (a_n) se obține că $a_n \le a_m$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*,\ n \le m$. Prin trecere la limită după m se obține că:

$$a_n = \lim_{m\to\infty} a_n \le \lim_{m\to\infty} a_m = \ell,\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \blacksquare$$

◢ **Temă**

Enunțați un rezultat analog pentru şirurile descrescătoare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că şirurile (a_n) sunt divergente dacă:

a) $a_n = 1 + (-1)^n$; b) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$;

c) $a_n = \frac{2n^2}{n+3}$.

E2. Fie $a_n = (-1)^{n+1}, n \ge 1$. Se poate obține din (a_n) un şir convergent prin îndepărtarea unui număr finit de termeni? Dar infinit? Care sunt limitele şirurilor obținute?

E3. Se consideră şirul (a_n) cu termenul general $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n > 0,\ \forall\ n \ge n_0$?

E4. Fie (a_n) un şir cu termenul general $a_n = \frac{2n+6}{2n+3}$.

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Să se calculeze limita şirului (b_n) în cazurile $b_n = \frac{4n+6}{4n+3}$, $b_n = \frac{10n+6}{10n+3}$.

E5. Se consideră şirul (a_n), astfel încât $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Rezultă că $\ell = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

APROFUNDARE

A1. Se consideră şirurile (a_n) şi (b_n) care au aceeaşi limită ℓ. Să se arate că şirul (c_n), $c_n = \frac{a_n + b_n}{2} + \frac{(-1)^n}{2}(a_n - b_n)$ are limita ℓ.

A2. Să se arate că şirul (a_n) cu termenul general $a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & n \text{ par} \\ \frac{n+1}{n+2}, & n \text{ impar} \end{cases}$ are limita $\ell = 1$.

A3. Şirul (a_n) are termenii $a_{2n} < 0$ şi $a_{2n-1} > 0$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Poate fi convergent acest şir?
b) Poate avea acest şir limita $+\infty$? Dar $-\infty$?

A4. Se consideră şirul (a_n), astfel încât $a_{2n} = 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = 3$. Este convergent şirul (a_n)?

A5. Fie (a_n) un şir, astfel încât subşirurile $(a_{3n}), (a_{3n-1})$ şi (a_{3n-2}) au aceeaşi limită. Să se arate că şirul (a_n) are limită.

A6. Se consideră şirul (a_n), astfel încât verifică una din condițiile:
a) $(a_n - 1)(a_{n+1} - 1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$;
b) $(a_n - 1)(a_{n+1} - 2) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Rezultă că şirul (a_n) este convergent? (Olimpiadă locală, 1993)

A7. Se consideră şirul (a_n), astfel încât subşirurile $(a_{2n-1}), (a_{2n})$ şi (a_{5n}) au limită. Să se arate că şirul (a_n) are limită.

DEZVOLTARE

D1. Din (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Să se arate că dacă se schimbă ordinea termenilor şirului (a_n), noul şir are aceeaşi limită.

D2. Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
a) Dacă $\ell > 0$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge n_0$.
b) Dacă $\ell < 0$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge n_0$.
c) Dacă $\ell \in \mathbb{R}^*$, să se arate că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge n_0$.

D3. Fie (a_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell, \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ şi $a_n \le \ell, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că termenii şirului se pot rearanja, astfel încât să se obțină un şir crescător.

D4. Şirul (a_n) are limită $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $a_{2n} < 0$ şi $a_n + a_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, să se determine ℓ.

8 CRITERII DE EXISTENȚĂ A LIMITEI UNUI ŞIR

8.1. CRITERIUL DE EXISTENȚĂ CU ε (EXTINDERE)

Fie (a_n) un şir de numere reale. După cum se cunoaşte şirul (a_n) are limită dacă există $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, astfel încât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$ conține toți termenii săi cu excepția unui număr finit de termeni.

Să considerăm $\ell \in \mathbb{R}$, limita şirului (a_n). Dacă $\varepsilon > 0$ şi $V \in \mathcal{V}(\ell)$, $V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ este o vecinătate centrată în ℓ, atunci în afara sa se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n). Aceasta înseamnă că există un rang $n(\varepsilon)$, depinzând de ε, începând de la care toți termenii a_n aparțin vecinătății V.

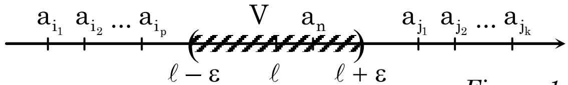


Figura 1

Relația $a_n \in V$ se scrie sub formă echivalentă astfel:

$a_n \in V \Leftrightarrow a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \Leftrightarrow \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon.$

Aşadar, $a_n \in V, \forall\, n \geq n(\varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon).$

Deoarece pentru definirea limitei unui şir este suficient să considerăm numai vecinătăți centrate în ℓ, se poate enunța următoarea teoremă de caracterizare a limitei.

▣ TEOREMA 12 (Criteriul de convergență cu ε)

Fie (a_n) un şir de numere reale. Un număr $\ell \in \mathbb{R}$ este limita şirului (a_n) dacă şi numai dacă pentru $\forall\, \varepsilon > 0$ există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|a_n - \ell| < \varepsilon, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$.

Demonstrație

• Fie $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar. În afara vecinătății $V = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$ a lui ℓ se află un număr finit de termeni ai şirului (a_n): $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_p}$.

Notăm cu $m = \max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$. Atunci, pentru $n \geq m+1$ avem $a_n \in V$, ceea ce s-a arătat că este echivalent cu $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Luând $n(\varepsilon) = m+1$, teorema este demonstrată.

• *Reciproc*

Să presupunem că V este vecinătate a lui ℓ. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subset V$. Conform ipotezei, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$, deci $a_n \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \subset V, \forall\, n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, în afara vecinătății V există un număr finit de termeni ai şirului (a_n) şi deci $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. ■

➲ OBSERVAȚII

- Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ este limită a şirului (a_n), dacă pentru $\varepsilon > 0$, inecuația $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$, cu necunoscuta n, are un număr finit de soluții.
- Numărul $\ell \in \mathbb{R}$ nu este limită a şirului (a_n) dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât inecuația $|a_n - \ell| < \varepsilon$, cu necunoscuta n, are un număr finit de soluții sau, altfel spus, inecuația $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ are o infinitate de soluții.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}=2.$

Soluție

Fie $\varepsilon>0.$ Din relația $\left|a_n-2\right|<\varepsilon,$ rezultă că $\dfrac{3}{n+1}<\varepsilon,$ de unde $n>\dfrac{3}{\varepsilon}-1.$ Dacă $\varepsilon\geq 3$ se poate lua $n(\varepsilon)=1,$ iar pentru $\varepsilon<3,$ se poate lua $n(\varepsilon)=\left[\dfrac{3}{\varepsilon}\right]$ şi se obține $\left|a_n-2\right|<\varepsilon,\ \forall\ n\geq n(\varepsilon),$ deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2.$

> ◢ **Temă**
> **Să se arate că:**
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+5}=2;$
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2};$
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n}{n+1}=-1.$

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{n+1}\neq 4.$

Soluție

$\left|a_n-4\right|=\dfrac{n+4}{n+1}\geq 1,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*.$ Aşadar pentru $\varepsilon=1$ se obține că inecuația $\left|a_n-4\right|\geq 1$ are o infinitate de soluții. Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 4.$

> ◢ **Temă**
> **Arătați că:**
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{2n+1}\neq 1;$
> - $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}\neq\dfrac{1}{3}.$

▣ **TEOREMA 13 (Criteriul cu ε pentru limită infinită)**

Fie (a_n) un şir de numere reale. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty,$ dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0,$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_n>\varepsilon,\ \forall\ n\geq n(\varepsilon).$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty,$ dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0,$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*,$ astfel încât $a_n<-\varepsilon,\ \forall n\geq n(\varepsilon).$

Demonstrație

a) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ şi fie $\varepsilon>0.$ Atunci în vecinătatea $V=(\varepsilon,+\infty)$ se află toți termenii şirului (a_n) cu excepția unui număr finit de termeni: $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_p}.$ Luând $m=\max\{n_1, n_2, ..., n_p\}$ şi $n(\varepsilon)=m+1,$ avem $a_n\in V,\ \forall\ n\geq n(\varepsilon).$ Condiția $a_n\in V$ este echivalentă cu $a_n\in(\varepsilon,+\infty),$ deci $a_n>\varepsilon,$ pentru $n\geq n(\varepsilon).$

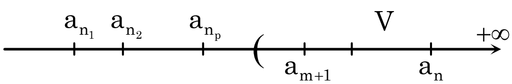


Figura 2

Reciproc

Dacă $V \in \mathscr{V}(+\infty)$, atunci există $V_1 = (\varepsilon, +\infty)$, cu $\varepsilon > 0$, astfel încât $V_1 \subset V$. Conform ipotezei există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Dar această condiție este evident echivalentă cu $a_n \in V_1, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$ şi astfel, în afara vecinătății V_1, deci şi a lui V, se află un număr finit de termeni. În consecință $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

b) Se demonstrează analog punctului a) sau se consideră şirul (b_n), $b_n = -a_n$. ■

Aplicație

☒ Fie (a_n) un şir de numere reale nenule şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

a) Dacă există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n > 0, \forall\ n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

b) Dacă există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < 0, \forall\ n \geq n_0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

<u>*Demonstrație*</u>

a) Se poate considera că $a_n > 0, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deoarece prin îndepărtarea unui număr finit de termeni $a_1, a_2, ..., a_{n_0}$ ai şirului (a_n), limita şirului $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ nu se modifică.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, atunci pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_n < \frac{1}{\varepsilon}, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Se obține $\frac{1}{a_n} > \varepsilon, \forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, folosind criteriul cu ε pentru limite infinite rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

b) Se arată analog punctului a).

Convenții de scriere: $\frac{1}{0_{(+)}} = +\infty$, $\frac{1}{0_{(-)}} = -\infty$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind criteriul cu ε, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+4}=3$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2+4n+1}=2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n+2}=1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$.

E2. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+2}=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n+3}=-\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^2+3n-1}=+\infty$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n+3}=+\infty$.

E3. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+1)=+\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty,\ a>1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0,\ a\in(0,1)$.

DEZVOLTARE

D1. Fie (x_n) un şir de numere reale pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ell$. Folosind criteriul cu ε, să se arate că:

a) dacă $\ell=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=0$;

b) dacă $\ell=+\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=+\infty$;

c) dacă $\ell=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$.

D2. Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulțime nevidă. Să se arate că punctul $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare pentru mulțimea A, dacă şi numai dacă există un şir (x_n), $x_n\in A\setminus\{x_0\}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

D3. Să se determine punctele de acumulare pentru mulțimile:

a) $A=\left\{\frac{1}{n+1}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$; b) $A=\mathbb{Z}$;

c) $A=\mathbb{Q}$.

D4. Fie (a_n) un şir de numere reale. Să se arate că şirul (a_n) este convergent dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon>0$, există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_m-a_n|\le\varepsilon,\ \forall\ m,\ n\ge n(\varepsilon)$. *(Criteriul lui Cauchy).*

D5. Să se studieze convergența şirurilor folosind criteriul lui Cauchy:

a) $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$;

b) $a_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$;

c) $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$;

d) $a_n=\frac{\cos 1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\cos 2}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{\cos n}{n(n+1)(n+2)}$;

e) $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}$;

f) $a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

8.2. OPERAȚII CU ȘIRURI CONVERGENTE

OPERAŢII CU ŞIRURI DE NUMERE REALE

Operațiile cu şiruri de numere reale se definesc având în vedere operațiile cu funcții.

Dacă (a_n) şi (b_n) sunt două şiruri de numere reale, avem:

- $(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)$, (**suma** a două şiruri);
- $(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n)$, (**diferența** a doua şiruri);
- $(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$, (**produsul** a două şiruri);
- $\alpha\cdot(a_n)=(\alpha\cdot a_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, (**înmulțirea** cu un număr real);
- $\frac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, dacă $b_n\neq 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$, (**câtul** a două şiruri).

OPERAŢII CU ŞIRURI CONVERGENTE

▣ TEOREMA 14

Fie (a_n), (b_n) doua şiruri convergente şi $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Atunci:

a) şirul (a_n+b_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;

(**Limita sumei este egală cu suma limitelor**.)

b) şirul $(a_n\cdot b_n)$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)$.

(**Limita produsului este egală cu produsul limitelor**.)

<u>*Demonstrație*</u> **(EXTINDERE)**

a) Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n-a|\le\frac{\varepsilon}{2}$ şi $|b_n-b|\le\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall\ n\ge n(\varepsilon)$.

Atunci: $|a_n+b_n-a-b|=|a_n-a+b_n-b|\le|a_n-a|+|b_n-b|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=$ $=\varepsilon,\ \forall\ n\ge n(\varepsilon)$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

b) Avem:

$$|a_nb_n-ab|=|(a_n-a)b_n+(b_n-b)a|\le|a_n-a|\cdot|b_n|+|b_n-b|\cdot|a|. \qquad (1)$$

Şirurile (a_n) şi (b_n), fiind convergente sunt şi mărginite, deci există $M_1, M_2\in(0,+\infty)$, astfel încât $|a_n|\le M_1$, $|b_n|\le M_2$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Alegem $M=\max\{M_1, M_2\}$ şi rezultă că $|a_n|\le M, |b_n|\le M, \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

Fie $\varepsilon>0$. Deoarece $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ pentru $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M}$ există un rang $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât:

$$|a_n-a|\le\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M} \text{ şi } |b_n-b|\le\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2M},\ \forall\ n\ge n(\varepsilon). \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) se obține:

$|a_n \cdot b_n - ab| \le \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\ \forall\ n \ge n(\varepsilon).$

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = ab.$ ■

➲ OBSERVAȚII

În particular, se obțin următoarele rezultate pentru șirurile convergente:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$; **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n \cdot b_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \cdot \lim\limits_{n\to\infty}|b_n|$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^p) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p,\ p \in \mathbb{N}^*$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \beta\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Problemă rezolvată

☒ Fie (a_n) și (b_n) două șiruri convergente și $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Să se arate că:

a) șirul (c_n), $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \max\{a, b\}$;

b) șirul (c_n), $c_n = \min\{a_n, b_n\}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \min\{a, b\}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se are în vedere că $\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2}$, de unde:

$$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n + |a_n - b_n|}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \left|\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)\right|\right) =$$

$$= \frac{a + b + |a - b|}{2} = \max\{a, b\}.$$

b) Se are în vedere relația: $\min\{a_n, b_n\} = \frac{a_n + b_n - |a_n - b_n|}{2}$.

> **▣ TEOREMA 15**
>
> Fie (a_n), (b_n) șiruri de numere reale convergente și $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Dacă $b_n, b \in \mathbb{R}^*$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este șir convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.
>
> (**Limita câtului este egală cu câtul limitelor**.)

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă (a_n) este un şir de numere reale nenule, convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, atunci pentru oricare $p \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$.

În particular, dacă $p \in \mathbb{N}^*$ şi $a_n = n$ se obține că: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} = = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{+\infty} = 0.$

Mai general, dacă $a \in (0, +\infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-a} = 0.$

❑ REȚINEM!

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a \in (0, +\infty) \\ 0, & a \in (-\infty, 0) \\ 1, & a = 0 \end{cases}$$

2. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, $b_n \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este un şir convergent, atunci nu rezultă că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente.

☞ ***Exemplu***

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-2)^n$. Rezultă că $\frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, dar şirurile (a_n) şi (b_n) nu au limită.

3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este nemărginit.

4. Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente şi au limita 0, atunci despre şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu se poate afirma nimic în privința convergenței.

☞ ***Exemple***

a) Pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ rezultă că $\frac{a_n}{b_n} = n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$

b) Pentru $a_n = \frac{a}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $a \in \mathbb{R}^*$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = a.$

c) Pentru $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$

d) Pentru $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ se obține $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ care nu are limită.

Aşadar, în cazul $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, nu se poate preciza nimic în privința existenței limitei, iar în cazul în care aceasta există nu se poate preciza nimic referitor la valoarea acesteia. Se spune că, în acest caz, (numit cazul $\frac{0}{0}$), există o **nedeterminare**.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+3}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\sqrt{n}}{n^2+5n+1}$.

◢ Temă
Calculați:
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+3n}{2n^2+5n+3}$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+5n^2+1}{5n^3+4n+2}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

b) Procedând analog punctului a), se obține că:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2\sqrt{n}}{n^2+5n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n\sqrt{n}}}{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0}{1+0+0}=3.$$

Modul de determinare a limitelor din problema precedentă poate fi aplicat la calculul limitelor şirurilor (a_n) cu termenul general $a_n=R(n)$, unde $R:\mathbb{R}\setminus D\to\mathbb{R}$, este o funcție rațională, astfel încât $R(n)$ are sens pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

Dacă $R(n)=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_{p-1}n+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_{q-1}n+b_q}=\frac{f(n)}{g(n)}$, $p,q\in\mathbb{N}^*$ scriind

$$f(n)=n^p\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_p}{n^p}\right)=n^p\cdot x_n,\quad g(n)=n^q\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_q}{n^q}\right)=n^q\cdot y_n.$$

se obține: $\lim\limits_{n\to\infty}R(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p\cdot x_n}{n^q\cdot y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a_0}{b_0}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-q}$.

Rezultă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_q}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}\cdot(+\infty), & \text{dacă } p>q\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } p=q\\ 0, & \text{dacă } p<q\end{cases}$$

▣ TEOREMA 16

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri convergente, $a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$.

Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

(**Limita unei puteri se distribuie şi bazei şi exponentului**.)

➲ OBSERVAȚII

- Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ se obține cazul de nedeterminare 0^0.
- Pentru $b_n = \dfrac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.
- Pentru $a_n = a \in (0, +\infty)$ şi $b_n = \dfrac{1}{n}$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = 2^{-n} + n^{-2}$; b) $a_n = n^{-3} + n^{-1}$;

c) $a_n = \dfrac{2n^{-1} + n^{-2}}{3n^{-2} + 2n^{-1}}$;

d) $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{4n^2 + 5n + 3}$;

e) $a_n = \dfrac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{2n^2 + 5}$;

f) $a_n = \dfrac{(n+1)^3 + 2(n-1)^3}{(n+1)^3 + 3(n-1)^2}$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$;

b) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}$;

c) $a_n = 2\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}$; d) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{2 + \sqrt[n]{5}}$;

e) $a_n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)}{1 + 2^n}$; f) $a_n = 2\sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{2}}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+4n}{4n^2+3}\right)^{\frac{n+1}{2n+3}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[n]{3} + 5\sqrt[n]{2} + 2\sqrt[n]{2}}{2\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{6}}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limita şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{1\cdot 3 + 3\cdot 5 + \ldots + (4n^2 - 1)}$;

b) $a_n = \left(\dfrac{n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} + n^{-4} + 1}{n^{-1} + n^{-3} + 2}\right)^{\frac{n^2+1}{n^2+n}}$;

c) $a_n = \left(\dfrac{1 + n + n^2 + \ldots + n^{10}}{2 + n + n^2 + \ldots + n^{10}}\right)^{\sqrt[n]{4}}$.

A2. Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$, ştiind că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{an^3 + bn + 1}{2n^3 + n + 1} = 2 = \lim_{n\to\infty} \frac{bn^2 + a}{3n^2 + b}.$$

A3. Să se calculeze limitele șirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!}$;

b) $a_n = \frac{1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \ldots + n! \cdot n}{-1 + (n+1)!}$.

A4. Să se determine numerele naturale $a, b \in \mathbb{N}^*$, pentru care:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an^2 + n + a}{n^2 + 3} \right)^{\frac{bn+2}{n+3}} = 16.$$

8.3. CRITERIUL MAJORĂRII

▣ TEOREMA 17

Fie (a_n) un șir de numere reale.

a) Dacă există $\ell \in \mathbb{R}$ și (b_n) un șir de numere reale, astfel încât $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ și $|a_n - \ell| \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

b) Dacă există un șir (b_n), astfel încât $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ și $a_n \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Dacă există un șir (b_n), astfel încât $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ și $b_n \le a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Demonstrație **(EXTINDERE)**

a) Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|b_n| < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Așadar pentru oricare $\varepsilon > 0$, există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|a_n - \ell| \le b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. În concluzie, $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$.

b) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, atunci există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Dar din ipoteză rezultă că $a_n \le b_n < \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, și astfel, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

c) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Deoarece $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $b_n > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. Dar din ipoteză rezultă că $a_n \ge b_n > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$, și astfel $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. ■

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că:

a) $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$; **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$;

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$.

◢ Temă

Să se arate că:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos(n+1) = 0$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$;
- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$.

Soluție

a) Deoarece $|\sin x| \le |x|, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $\left|\sin\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\sin\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

Având $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$.

b) Deoarece $1 < 1 + \frac{1}{n} \le 2$ se obține că:

$\left|\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{\ln 2}{n},\ n \ge 1$. Cu criteriul majorării se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$.

c) Avem succesiv $\left|\frac{n^2+1}{2n^2+n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-2}{2\left(2n^2+n\right)}\right| \le \frac{1}{n},\ n \ge 1$ și folosind criteriul majorării se obține limita cerută.

> **▣ TEOREMA 18**
> Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive, crescător şi nemărginit.
> Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

Demonstrație **(EXTINDERE)**

Fie $\varepsilon > 0$. Din nemărginirea şirului (a_n) rezultă că există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$. Din monotonia şirului se obține că $a_n \ge a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$, $\forall\ n \ge n(\varepsilon)$. De aici se obține că $\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon},\ \forall\ n \ge n(\varepsilon)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Condiția de monotonie este necesară. Într-adevăr, luând şirul (a_n), astfel încât $a_{2n} = \frac{1}{n}$ şi $a_{2n-1} = n,\ n \in \mathbb{N}^*$, acesta are termenii pozitivi şi este nemărginit. Şirul $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ are subşirurile $\left(\frac{1}{a_{2n}}\right)$ şi $\left(\frac{1}{a_{2n-1}}\right)$ cu limitele diferite, deci şirul nu are limită.
2. Condiția de monotonie din enunțul teoremei poate fi înlocuită cu condiția ca şirul (a_n) să aibă limită. În acest caz $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$.

> **◢ Temă**
> **Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$, în cazurile:**
> **a)** $a_n = \frac{n^2}{n+1}$;
> **b)** $a_n = \ln(n+1)$;
> **c)** $a_n = 2^n + n$.

3. Orice şir crescător şi nemărginit are limita $+\infty$. Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$, din nemărginirea şirului rezultă că există un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$. Din monotonia şirului rezultă că $a_n \geq a_{n(\varepsilon)} > \varepsilon$, $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$. Aşadar, în orice vecinătate $V = (\varepsilon, +\infty)$ a lui $+\infty$ se află toţi termenii cu excepția unui număr finit dintre aceştia. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

▣ TEOREMA 19

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, iar (b_n) este mărginit. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Demonstrație

Din mărginirea şirului (b_n) există $M > 0$, astfel încât $|b_n| < M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Putem scrie: $|a_n b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |a_n|$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, din criteriul majorării se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. ■

Exerciții rezolvate

⊠ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{3}{n}\right) = 0$.

Soluție

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ şi $\left|\cos\frac{3}{n}\right| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din teorema 19 rezultă că limita şirului dat este 0.

◢ **Temă**

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

c) $a_n = \frac{3}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 k$.

⊠ **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n)$.

Soluție

Fie $a_n = \cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n$. Deoarece $|\cos x| \leq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, rezultă că $|a_n| \leq n$. Se obține că: $\frac{1}{n^2}(\cos 1 + \cos 2 + \ldots + \cos n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n}{n}$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, iar $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq 1$, limita cerută este egală cu 0.

▣ TEOREMA 20

Fie $a \in (-1, +\infty)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 1, & \text{dacă } a = 1 \\ 0, & \text{dacă } a \in (-1, 1) \end{cases}$.

<u>*Demonstrație*</u>

• Fie $a>1$. Atunci şirul (a^n) este crescător şi nemărginit, deci $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$, (teorema 18).

• Fie $a\in(-1, 1)\setminus\{0\}$ şi $b=\frac{1}{a}\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$.

Pentru $b>1$, şirul (b^n) are limita $+\infty$ şi $\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Pentru $b<-1$, considerăm subşirurile (b^{2n}) şi (b^{2n-1}) care au limitele $+\infty$, respectiv $-\infty$. Atunci: $\lim_{n\to\infty} a^{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^n} = 0$, iar $\lim_{n\to\infty} a^{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b^{2n-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0$. Aşadar, dacă $a\in(-1, 1)$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Pentru $a<-1$, şirul (a^n) nu are limită.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Dacă $a=-2$, atunci şirul (a^n) are subşirurile $a^{2n}=2^{2n}$ şi $a^{2n-1}=-2^{2n-1}$ cu limitele $+\infty$, respectiv $-\infty$.

2. Pentru $a<-1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$.

O problemă de electrostatică

Se consideră circuitul din figura 3 format din două condensatoare C_1 şi C_2 având capacitățile a, respectiv b şi o baterie cu tensiunea electromotoare E şi un comutator K. Comutatorul este în poziția 1, iar condensatorul C_2 este descărcat.

a) Să se calculeze tensiunea la bornele condensatorului C_2 după a n-a comutare a comutatorului K între pozițiile 1 şi 2.

b) Care este tensiunea la bornele condensatorului C_2 dacă n tinde la infinit?

<u>*Soluție*</u>

a) În poziția 1, condensatorul C_1 are sarcina $Q=aE$, care prin cuplarea comutatorului pe poziția 2 se va redistribui pe cele două condensatoare în $Q_1=aU_1$ şi $Q_2=bU_2$, deci $aE=(a+b)U_1$.

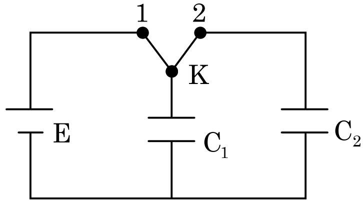


Figura 3

Prin cuplare din nou la poziția 1 şi apoi la 2, condensatorul C_2 va avea tensiunea U_2 dată de relația $aE+bU_1=(a+b)U_2$. Notând $\alpha=\frac{a}{a+b}$, se obține că $U_1=\alpha E$, $U_2=\alpha E+\alpha\beta E$, unde $\beta=\frac{b}{a+b}$. Procedând analog în continuare se obține că: $U_n=\alpha E\left(1+\beta+\beta^2+...+\beta^{n-1}\right)=\alpha E\frac{1-\beta^n}{1-\beta}=E\left(1-\beta^n\right)$.

b) Având în vedere că $\beta<1$ se obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\beta^n=0$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=E$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că următoarele şiruri au limita 0:

a) $a_n=\frac{1}{n}\sin\left(n^2\right)$; b) $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$;

c) $a_n=\frac{n}{n^2+1}$; d) $a_n=\frac{n^3+1}{n^6+n}$.

E2. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+2}=+\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n}{n^2+1}=0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n^3}{1+n}=-\infty$.

E3. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(1^2+2^2+...+n^2\right)}{(1+2+3+...+n)^2}=\frac{4}{3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+2\cdot3+...+n(n+1)}{n[1+3+5+...+(2n-1)]}=\frac{1}{3}$.

E4. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}\right)=0,\ p\geq2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)=0$.

E5. Fie $a_n=\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{\pi}{2n}+...+\sin\frac{\pi}{n^2}\right)$, $n\geq1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2,2}{\sqrt{3}+1}\right)^n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{5\pi}{4}\right)^n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^n$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^n$, $a\geq0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}$, $a\geq0$.

APROFUNDARE

A1. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot...\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+2)}+...+\frac{1}{n(n+n)}\right]=0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^n\right)}{n}=1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+2^n\right)}{n}=\ln2$.

A2. Să se calculeze limita şirului (a_n):

a) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{2^{n+1} + 3}$; b) $a_n = \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{2^{n+1} + 3^n}$;

c) $a_n = \dfrac{2^{2n+1} + 3^n + 1}{3^n + 4^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2^n + a^n}{2^n + 3^n}$, $a > 0$;

e) $a_n = \dfrac{1 + a + a^2 + ... + a^n}{1 + b + b^2 + ... + b^n}$, $a, b \in (0, +\infty)$.

(ASE, Buc., 1997)

A3. Să se arate că:

a) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = +\infty$;

b) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) este descrescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 0$;

c) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) de numere reale strict pozitive este crescător şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = +\infty$;

d) dacă $a > 1$, iar şirul (x_n) este strict descrescător şi are limita 0, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$.

DEZVOLTARE

D1. Un şir (a_n) de numere reale verifică relațiile de recurență: $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$, $n \geq 2$, $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. (*Relație de recurență liniară şi omogenă de ordinul 2*)

Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $r^2 = \alpha r + \beta$, să se arate că există $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, astfel încât $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, în cazul $r_1 \neq r_2$;

b) $a_n = (c_1 n + c_2) r_1^n$, în cazul $r_1 = r_2$.

D2. Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale date de relațiile de recurență: $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n$ şi $b_{n+1} = \gamma a_n + \delta b_n$, $n \geq 1$. Să se arate că şirurile (a_n) şi (b_n) verifică o relație de recurență omogenă de ordinul 2.

D3. Fie (x_n) un şir de numere reale, astfel încât $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \dfrac{a x_n + b}{c x_n + d}$, $n \geq 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că dacă ecuația $r = \dfrac{ar + b}{cr + d}$ are rădăcinile reale distincte r_1, r_2, atunci şirul (y_n), $y_n = \dfrac{x_n - r_1}{x_n - r_2}$, $n \geq 1$, este o progresie geometrică.

b) Să se studieze convergența şirului (x_n) în condițiile cazului a).

D4. Să se studieze convergența şirurilor şi în caz de convergență să se afle limitele acestora:

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 10$, $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $n \geq 2$;

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$, $n \geq 2$;

c) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 5}{a_n - 1}$, $n \geq 1$;

d) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{4}{3 + a_n}$, $n \geq 1$;

e) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{a_n - 1}$, $n \geq 1$;

f) $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, $n \geq 1$;

g) $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $2x_{n+1} = \sqrt{3} x_n + y_n$ şi $2y_{n+1} + x_n = \sqrt{3} y_n$, $n \geq 1$.

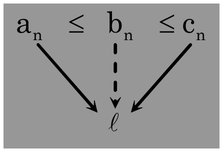
D5. Să se determine numărul pavărilor distincte cu dale 1×2 ale unui dreptunghi cu dimensiunile $2 \times n$.

8.4. CRITERIUL CLEȘTELUI

▣ TEOREMA 21 (Criteriul cleştelui)

Fie (a_n), (b_n), (c_n) şiruri de numere reale, astfel încât $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

<u>*Demonstrație*</u>



• Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, aplicând criteriul majorării, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

• Analog, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

• Putem presupune că $\ell \in \mathbb{R}$. Considerăm şirul $(c_n - a_n)$ care este convergent şi cu termenii pozitivi, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = \ell - \ell = 0$.

De asemenea, $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, relație din care se obține: $0 \le \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \le \lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$ şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Dar, $b_n = b_n - a_n + a_n$, relație din care se obține că şirul (b_n) este convergent şi, mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = \ell$.

Teorema este complet demonstrată. ■

Criteriul cleştelui este util în cazul în care nu putem arăta în mod direct convergența unui şir sau nu ştim să calculăm direct limita acestuia.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:

a) $a_n = \dfrac{\left[n\sqrt{2}\right]}{n^2}$; **b)** $a_n = \dfrac{n + 3\sin n^2}{n^2}$; **c)** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Din proprietatea părții întregi a unui număr real se obține că: $n\sqrt{2} - 1 < \left[n\sqrt{2}\right] \le n\sqrt{2}$ şi

$$\frac{n\sqrt{2}-1}{n^2} < a_n \le \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ sau } \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{1}{n^2} < a_n \le \frac{\sqrt{2}}{n}. \quad (1)$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ şi se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

> **◢ Temă**
> **Calculați:**
> • $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[n\sqrt{3}\right] + \left[n\sqrt{5}\right]}{n^2}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n + \sqrt{n}}{n^2+1}$;
> • $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{3n^2+k}$.

b) Deoarece $-1 \le \sin\left(n^2\right) \le 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ se obține că $\dfrac{n-3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{n+3}{n^2}$, sau $\dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} \le a_n \le \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}$, şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Avem inegalitățile evidente $\begin{cases} \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{n^2+1} \\ \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+2} \le \dfrac{1}{n^2+1} \\ \dots \\ \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1} \end{cases}$.

Prin adunarea acestor relații se obține că:

$\dfrac{n}{n^2+n} \le a_n \le \dfrac{n}{n^2+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Dar cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, aplicând criteriul cleştelui se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n}{n^2+7}$; **b)** $a_n = \dfrac{2n^2+3n+1}{3n^3+2n+1}$;

c) $a_n = \sqrt[n]{1+2^n}$; **d)** $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$;

e) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$; **f)** $a_n = \dfrac{e^n}{n!}$;

g) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; **h)** $a_n = \dfrac{2^n+3^n+5^n}{n!}$;

i) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$; **j)** $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$.

E2. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n^3+1} + \dfrac{n+2}{n^3+2} + \dots + \dfrac{n+n}{n^3+n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$;

c) $a_n = \dfrac{1^2+1}{n^3+1} + \dfrac{2^2+2}{n^3+2} + \dots + \dfrac{n^2+n}{n^3+n}$;

(Olimpiadă județeană, 1975)

d) $a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} + \dfrac{n+2}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \dfrac{n+n}{\sqrt{n^3+n}}$.

APROFUNDARE

A1. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a, b \in (0, +\infty)$;

b) $a_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}$, $a_1, a_2, \dots, a_p > 0$;

c) $a_n = \dfrac{\sin 1}{n^2+1} + \dfrac{\sin 2}{n^2+2} + \dots + \dfrac{\sin n}{n^2+n}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{1+3^n} + \dfrac{1}{2+3^n} + \dots + \dfrac{1}{n+3^n}$;

e) $a_n = \dfrac{1}{2^0+3^n} + \dfrac{1}{2^1+3^n} + \dots + \dfrac{1}{2^n+3^n}$;

f) $a_n = \dfrac{1!+2!+\dots+n!}{n+(2n)!}$.

A2. **Să se determine $a \in (0, +\infty)$, astfel încât şirul (a_n), $a_n = \sqrt{2^n+4^n+a^n}$ să aibă limita:**

a) 5; b) a^2-4a; c) $25a^{-1}$.

A3. **Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{[\sqrt{2}] + [2^2\sqrt{2}] + \dots + [n^2\sqrt{2}]}{n^3+n}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{n} \ln\left(3^{\frac{n}{1}} + 3^{\frac{n}{2}} + \dots + 3^{\frac{n}{n}}\right)$.

(Olimpiadă locală, 1994)

A4. Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive cu proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha<1.$$

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Criteriul raportului)

8.5. CÂTEVA LIMITE REMARCABILE

Folosind criteriul cleştelui vom demonstra câteva rezultate ce conţin şiruri trigonometrice.

▣ TEOREMA 22

Fie (x_n) un şir astfel încât $x_n \in \mathbb{R}^*$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Atunci: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$

<u>*Demonstraţie*</u>

Fie cercul trigonometric $\mathscr{C}(0,1)$ şi unghiul la centru $\widehat{AOM}$ cu măsura în radiani egală cu x, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, (figura 4). Din interpretarea geometrică a funcţiilor trigonometrice sinus şi tangentă avem că: $\sin x = BM < x < AN = \operatorname{tg} x$, (1). Înmulţind relaţia (1) cu $\frac{1}{\sin x}$ se obţine că:

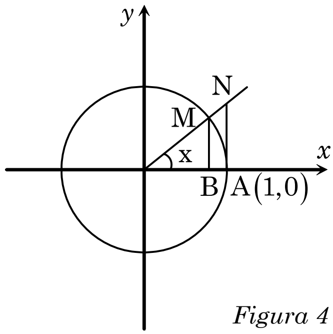


Figura 4

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, adică $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$

Aceste inegalităţi au loc şi pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, deoarece funcţiile $x\to\cos x$, $x\to\frac{\sin x}{x}$ sunt funcţii pare. Pentru un şir (x_n) cu $\lim_{n\to\infty} x_n=0$, începând de la un anumit rang avem că $-\frac{\pi}{2}<x_n<\frac{\pi}{2}$ şi $\cos x_n<\frac{\sin x_n}{x_n}<1.$ (2)

Dar $1\ge\cos x_n=1-2\sin^2\frac{x_n}{2}>1-\frac{x_n^2}{2}.$ (3)

Din relaţiile (2) şi (3) se obţine că: $1-\frac{x_n^2}{2}\le\frac{\sin x_n}{x_n}<1$, şi aplicând criteriul cleştelui rezultă $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$ ■

▣ CONSECINȚĂ

Fie (x_n) un şir de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1$.

◢ **Temă**

Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; **b)** $a_n = n^2\sin\frac{2}{n^2}$; **c)** $a_n = n\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\right)$;

d) $a_n = n^3\sin\frac{1}{n}\sin\frac{2}{n^2}$; **e)** $a_n = \left(n+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{2n}{n^2+1}$; **f)** $a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

APLICAȚII ÎN GEOMETRIE

LUNGIMEA CERCULUI

Fie $\mathscr{C}(O, r)$ un cerc de centru O şi rază r, $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc şi $B_1B_2\ldots B_n$ un poligon regulat cu n laturi circumscris cercului, $n \geq 3$, (figura 5).

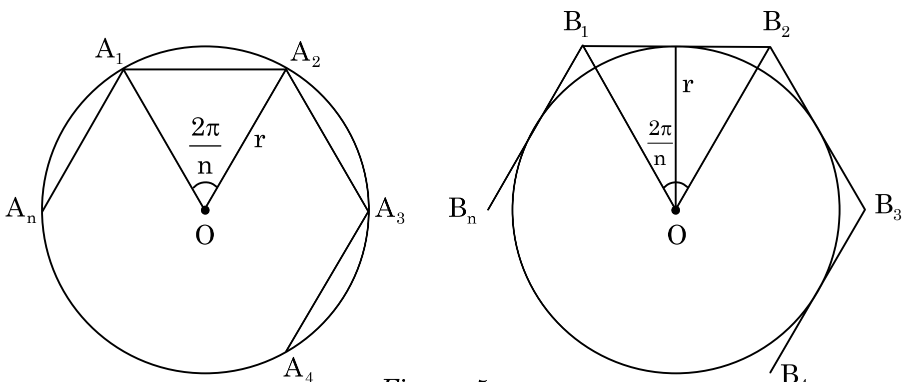


Figura 5

Obținem $A_1A_2 = 2r\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ şi $B_1B_2 = 2r\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $n\geq 3$. Notând cu p_n şi P_n perimetrele celor două poligoane regulate vom obține că $p_n = 2nr\cdot\sin\frac{\pi}{n}$ şi $P_n = 2nr\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, iar dacă **l este lungimea cercului** vom avea că:

$p_n \leq l \leq P_n$, $\forall\, n \geq 3$. (1)

Prin trecere la limită, vom obține că:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi r \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r \text{ şi } \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} 2\pi r \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi r.$$

Folosind criteriul cleştelui, din relația (1) se obține că $l = 2\pi r$.

ARIA CERCULUI

Folosind notațiile anterioare pentru ariile celor două poligoane regulate se obține:

$$s_n = \frac{1}{2} n \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}, \text{ respectiv } S_n = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, n \geq 3 \text{ şi } s_n \leq A_C \leq S_n, n \geq 3 \quad (2),$$

unde $\mathbf{A_C}$ **este aria cercului**.

Dar $\lim_{n\to\infty} s_n = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$ şi $\lim_{n\to\infty} S_n = \pi r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi r^2$. Folosind criteriul cleştelui, din relația (2) se obține că $A_C = \pi r^2$.

9 PROPRIETATEA LUI WEIERSTRASS

Se cunoaşte că orice şir convergent de numere reale este mărginit, dar nu orice şir mărginit este convergent.

Proprietatea de mărginire a unui şir este o condiție necesară pentru convergența şirului, dar nu şi suficientă.

Aşadar, proprietatea de mărginire trebuie completată cu alte proprietăți ale şirului pentru a se asigura convergența acestuia.

Un rezultat important în această privință îl constituie teorema lui Weierstrass.

Karl WEIERSTRASS
(1815-1897)
matematician german

Are contribuții deosebite în analiza matematică – teoria funcțiilor, funcții abeliene, calculul variațiilor etc.

▣ TEOREMA 23 (Proprietatea lui Weierstrass)

Fie (a_n) un şir de numere reale.

a) Dacă (a_n) este un şir monoton crescător şi mărginit superior, atunci (a_n) este şir convergent.

b) Dacă (a_n) este un şir monoton descrescător şi mărginit inferior, atunci (a_n) este şir convergent.

Folosind proprietatea lui Weierstrass rezultă că orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Studiul convergenței unui şir folosind proprietatea lui Weierstrass prezintă avantajul că nu trebuie să cunoaştem limita acestuia, dar are şi dezavantajul că nu dă o metodă de calcul a limitei şirului.

Totuşi, lucrând cu şiruri monotone, se arată că dacă (a_n) este un şir monoton şi $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$, dacă şirul este crescător;
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A$, dacă şirul este descrescător.

Folosind proprietatea lui Weierstrass se arată că are loc şi următorul rezultat în legătură cu şirurile mărginite.

▣ TEOREMA 24 (Lema lui Cesaro)
Orice şir mărginit conține cel puțin un subşir convergent.

➲ OBSERVAȚII

- Dacă (a_n) este un şir nemărginit superior, atunci acesta conține un subşir cu limita $+\infty$.
- Dacă (a_n) este un şir nemărginit inferior, atunci acesta conține un subşir cu limita $-\infty$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze convergența şirurilor (a_n) cu termenul general:

a) $a_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$; **b)** $a_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$.

Soluție

a) Deoarece $a_{n+1}-a_n=\dfrac{2n+3}{n+3}-\dfrac{2n+1}{n+2}=\dfrac{3}{(n+2)(n+3)}\geq 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, rezultă că şirul este monoton crescător. Dar $a_n=2-\dfrac{3}{n+2}<2$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, rezultă astfel că şirul (a_n) este mărginit superior. Folosind proprietatea lui Weierstrass rezultă că (a_n) este convergent.

b) Deoarece $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0, \forall\ n\in\mathbb{N}^*$, se obține că şirul (a_n) este monoton crescător.

◢ Temă
Studiați convergența şirurilor:
- $a_n=\dfrac{3n+1}{n+3}$;
- $a_n=\dfrac{2n}{n^2+1}$;
- $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}$.

Folosind inegalitatea $n^2 > (n-1)(n+1),\ n \ge 2,$ se obține:

$$a_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2 - \frac{1}{n} < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$ deci șirul (a_n) este mărginit superior. Așadar (a_n) este șir convergent.

☒ **2.** Să se studieze convergența șirului cu termenul general $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

<u>*Soluție*</u>

Avem: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{10}{n+1} < 1,\ \forall n \ge 10.$ Așadar, șirul (a_n) este monoton descrescător începând de la termenul de rang 10. Deoarece $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, șirul este mărginit inferior.

Considerând șirul (b_n) cu termenul general $b_n = a_{n+10}$, rezultă că (b_n) este monoton descrescător și mărginit inferior, deci este convergent.

Șirul (a_n) este șir convergent deoarece se obține din șirul (b_n) prin adăugarea unui număr finit de termeni.

> **Temă**
> **Studiați convergența șirurilor:**
> - $a_n = \dfrac{9^n}{(n+1)!}$;
> - $a_n = \dfrac{10^n}{(n+1)!}$.

➲ OBSERVAȚII

- Din problema rezolvată 2, rezultă că dacă un șir (a_n) este mărginit și există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât subșirul $(a_n)_{n \ge n_0}$ este monoton, atunci șirul (a_n) este convergent.
- Dacă un șir (a_n) este mărginit, dar nu este monoton, nu rezultă că șirul este divergent.

☞ <u>***Exemplu***</u>

Șirul (a_n), $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ este mărginit, dar nu este monoton. Totuși, șirul (a_n) este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Așadar, proprietatea de monotonie nu este nici necesară și nici suficientă pentru convergență.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) în cazurile:

a) $a_n = \dfrac{n+4}{2n+1}$; **b)** $a_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{4n^2+1}{n^2+1}$;

d) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3}$.

E2. Să se studieze convergența șirurilor:

a) $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

c) $a_n = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$;

d) $a_n = \frac{(n-3)^2}{n^2+1}$.

E3. Să se arate că următoarele șiruri (a_n) au cel puțin un subșir convergent și să se dea un exemplu de asemenea subșir:

a) $a_n = (-1)^n$; b) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}$;

c) $a_n = \sin\frac{n\pi}{6}$; d) $a_n = \cos\frac{(n+1)\pi}{4}$;

e) $a_n = \operatorname{tg}\frac{(2n+1)\pi}{3}$;

f) $a_n = \sin\frac{n\pi}{4}\cdot\cos\frac{n\pi}{3}$.

APROFUNDARE

A1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$;

b) $a_n = \frac{n^p}{a^n}$, $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$;

c) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

d) $a_n = \left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$;

e) $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\dots\frac{2n-1}{2n}$;

f) $a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}$.

A2. Se consideră șirul cu termenul general:

$a_n = \sum_{k=1}^{n}\log_{\frac{1}{3}}\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}$. Să se arate că șirul (a_n) este convergent.

(Turism, Suceava, 1997)

A3. Să se studieze convergența șirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\dots+\frac{1}{n(n+1)^2}$;

b) $a_n = \frac{1}{1!\cdot 1}+\frac{1}{2!\cdot 2}+\dots+\frac{1}{n!\cdot n}$;

c) $a_n = \frac{1}{2+3}+\frac{1}{2^2+3^2}+\dots+\frac{1}{2^n+3^n}$.

A4. Să se determine mulțimea limitelor subșirurilor următoarelor șiruri:

a) $a_n = 1+(-1)^n$;

b) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

c) $a_n = 2\cdot\sin\frac{n\pi}{3}$;

d) $a_n = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$;

e) $a_n = \sin\frac{n\pi}{3}+\cos\frac{n\pi}{6}$;

f) $a_n = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$;

g) $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^n$.

DEZVOLTARE

D1. Să se arate că:

a) orice șir nemărginit superior are un subșir cu limita $+\infty$;

b) orice șir nemărginit inferior are un subșir cu limita $-\infty$.

D2. Să se determine mulțimea punctelor limită (mulțimea limitelor subșirurilor) pentru șirurile:

a) $a_n = (-1)^n n$;

b) $\mathbf{a_n} = (-1)^n \dfrac{n^2}{n+3}$;

c) $\mathbf{a_n} = n \cdot \sin \dfrac{n\pi}{3}$;

d) $a_n = (-1)^n n \cdot \cos \dfrac{n\pi}{4}$;

e) $\mathbf{a_n} = (1+i)^n + (1-i)^n$;

f) $\mathbf{a_n} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\sqrt{3}\right)^n$.

D3. Fie (a_n) un şir de numere reale. Să se arate că (a_n) are cel puțin un punct limită.

D4. Să se demonstreze teorema lui Weierstrass. ([1])

D5. Să se demonstreze lema lui Cesaro. ([1])

10 APLICAȚII ALE TEOREMEI LUI WEIERSTRASS

10.1. ŞIRUL APROXIMĂRILOR SUCCESIVE ALE UNUI NUMĂR REAL

Fie $x \in \mathbb{R}$ un număr real pozitiv cu scrierea sub formă zecimală $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, unde $a_0 \in \mathbb{N}$ şi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sunt cifre ale sistemului zecimal de numerație.

Să considerăm scrierea în baza 10 a numărului x:

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

$\sqrt{2} \approx 1{,}414213\dots$
$\pi \approx 3{,}14159265\dots$

Asociem acestui număr şirul (x_n) cu termenul general:

$x_n = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dots + \dfrac{a_n}{10^n}$, numit **şirul aproximărilor succesive prin lipsă** cu o eroare mai mică de 10^{-n} ale lui x şi şirul (y_n) cu termenul general $y_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$, numit **şirul aproximărilor succesive prin adaos** cu o eroare mai mică de 10^{-n} ale lui x.

Se observă că $x_n, y_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$ şi $x_n \le x \le y_n$ şi $y_n - x_n = \dfrac{1}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (1)

De asemenea, şirurile (x_n) şi (y_n) sunt monotone şi mărginite, şi rezultă conform proprietății lui Weierstrass că ele sunt convergente. Din relația (1) se obține că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

Analog se procedează şi în cazul $x < 0$.

În concluzie: orice număr real este limita şirurilor aproximărilor lui succesive prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}.

Se obține că orice număr real este limită a unui şir de numere raționale, adică orice număr real este punct de acumulare pentru mulțimea $\mathbb{Q}$.

10.2. PUTERI CU EXPONENT REAL

Fie $a \in \mathbb{R}, a > 0$ şi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ne propunem să definim puterea a^x.

Considerăm şirurile (x_n) şi (y_n) de numere raționale care aproximează prin lipsă, respectiv prin adaos numărul x, $x_n \le x \le y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi şirurile de puteri $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$.

Pentru $a > 1$, şirul $\left(a^{x_n}\right)$ este monoton crescător, iar şirul $\left(a^{y_n}\right)$ este monoton descrescător.

Din relațiile $a^{x_1} < a^{x_n} < a^{y_n} < a^{y_1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirurile sunt mărginite.

Aplicând teorema lui Weierstrass se obține că şirurile $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$ sunt convergente.

Avem: $0 < a^{y_n} - a^{x_n} = a^{x_n}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) < a^{y_1}\left(a^{\frac{1}{10^n}} - 1\right)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{y_n} - a^{x_n}\right) = 0$

şi astfel, şirurile $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$ au aceeaşi limită.

Prin definiție, a^x reprezintă limita comună a şirurilor $\left(a^{x_n}\right)$ şi $\left(a^{y_n}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}$$

Pentru $a \in (0, 1)$, şirul $\left(a^{x_n}\right)$ este descrescător, iar $\left(a^{y_n}\right)$ este crescător, şi rezultatele anterioare se mențin.

Dacă (x_n) este un şir de numere reale convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$ şi $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\ell}$.

Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale convergente cu limite nenule. Dacă şirul $\left(a_n^{\,b_n}\right)$ este definit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{\,b_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

10.3. STUDIUL CONVERGENȚEI ŞIRURILOR DATE PRIN RELAȚII DE RECURENȚĂ

Problemă rezolvată

☒ Să se studieze convergența şirurilor (a_n):

a) $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, n \ge 1$; **b)** $a_1 = 1, a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}, n \ge 1$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se observă că $a_1 = \sqrt{2} < 2,\ a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2+2} = 2.$

Presupunem prin inducție că $a_k < 2$. Atunci $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2+2} = 2.$ Din principiul inducției matematice, rezultă că $a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul este mărginit superior. Avem şi $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul (a_n) este mărginit.

Deoarece $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \dfrac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + a_n} =$ $= \dfrac{(1+a_n)(2-a_n)}{\sqrt{2+a_n} + a_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul (a_n) este crescător. În concluzie, şirul (a_n) este convergent.

> ◢ **Temă**
> **Studiați convergența şirurilor:**
> **a)** $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1,\ n \geq 1;$
> **b)** $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + 1,\ n \geq 1.$

Pentru calculul limitei, fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x \in [0, 2]$. Folosind operațiile cu şiruri convergente, din relația de recurență obținem:

$x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 2)} = \sqrt{x+2}$. Se obține că $x = 2$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

b) Avem: $a_1 = 1,\quad a_2 = \dfrac{1}{2},\quad a_3 = \dfrac{2}{3},\quad a_4 = \dfrac{3}{5},\quad a_5 = \dfrac{5}{8}$, şi se observă că $a_1 > a_3 > a_5$ şi $a_2 < a_4$.

Presupunem prin inducție că $a_{2k-1} > a_{2k+1}$ şi $a_{2k} < a_{2k+2},\ k \geq 1.$

Rezultă că:

$$a_{2k+1} = \frac{1}{1+a_{2k}} > \frac{1}{1+a_{2k+2}} = a_{2k+3} \text{ şi } a_{2k+2} = \frac{1}{1+a_{2k+1}} < \frac{1}{1+a_{2k+3}} = a_{2k+4}.$$

Din principiul inducției se obține că $a_{2n-1} > a_{2n+1}$ şi $a_{2n} < a_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Aşadar subşirul (a_{2n-1}) este monoton descrescător, iar subşirul (a_{2n}) este monoton crescător. Dar $0 < a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi astfel se obține că subşirurile (a_{2n-1}) şi (a_{2n}) sunt convergente. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$ şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$. Din relația de recurență, pentru n par şi apoi pentru n impar rezultă relațiile $x = \dfrac{1}{1+y}$ şi $y = \dfrac{1}{1+x}$, de unde se obține că $x = y$. În concluzie şirul (a_n) este convergent, subşirurile (a_{2n}) şi (a_{2n-1}) având aceeaşi limită $\ell = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) date de relațiile de recurență și să se afle limitele acestora:

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}},\ n \geq 1;$

b) $a_1 \in (1, 2)$ și $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2,\ n \geq 1;$

c) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1,\ n \geq 1;$

d) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2}{1+a_n},\ n \geq 1.$

APROFUNDARE

A1. Să se studieze convergența șirurilor (a_n) date prin relațiile de recurență, iar în caz de convergență să se afle limitele acestora:

a) $a_1 \in (0, 1),\ a_{n+1} = a_n - a_n^3,\ n \geq 1;$

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{1+a_n^2},\ n \geq 1;$

c) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \sqrt{6-a_n},\ n \geq 1;$

d) $a_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+a_n},\ n \geq 1;$

e) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ 13^{a_{n+2}} = 12^{a_{n+1}} + 5^{a_n},$ $n \geq 1;$

f) $x_1 = a,\ x_n \geq \dfrac{1}{4} + x_{n-1}^2,\ n \geq 2.$
(Olimpiadă locală, 1988)

DEZVOLTARE

D1. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcție monoton crescătoare și (x_n) un șir, astfel încât $x_1 \in [a, b]$ și $x_{n+1} = f(x_n),$ $n \geq 1.$

a) Să se arate că (x_n) este monoton crescător dacă $x_1 \leq x_2,$ și monoton descrescător dacă $x_1 \geq x_2.$

b) Să se arate că șirul (x_n) este convergent.

D2. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$ o funcție monoton crescătoare și (x_n) un șir, astfel încât $x_1 \in [a, b]$ și $x_{n+1} = f(x_n),$ $n \geq 1.$

a) Să se arate că subșirurile (x_{2n-1}) și (x_{2n}) sunt monotone.

b) Șirul (x_n) este convergent?

D3. Să se studieze convergența șirurilor:

a) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \ln(1+x_n),\ n \geq 1;$

b) $x_1 = \dfrac{1}{3},\ x_{n+1} = x_n + 2^{x_n},\ n \geq 1;$

c) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n},\ n \geq 1;$

d) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 3^{x_n} - 2^{x_n},\ n \geq 1.$
(Olimpiade locale, 1983)

10.4. NUMĂRUL e. ȘIRURI CU LIMITA NUMĂRUL e

Situație-problemă

O persoană are nevoie pentru o investiție derulată pe o perioadă de timp t, de o sumă S. Această investiție i-ar aduce în final avantajul triplării sumei investite.

Apelând la un creditor pentru suma S, i se impun următoarele condiții:

• *Datoria generată de împrumut trebuie plătită o singură dată la sfârşitul perioadei stabilite.*

• *Dacă perioada de timp i s-ar considera împărțită în n părți egale, suma datorată la sfârşitul fiecărei părți din cele n va fi egală cu suma datorată la sfârşitul părții anterioare majorate cu a n-a parte din aceasta.*

a) Cât ar plăti la final această persoană dacă perioada de timp ar fi considerată împărțită în 1, 2, 3, ... respectiv n părți egale?

b) Cât de mare ar putea fi datoria ce trebuie plătită la final în aceste condiții? Suma S investită ar aduce profit în condițiile acestui împrumut?

Pentru a da răspuns întrebărilor puse să analizăm cazurile particulare:

a) • Pentru $n=1$ avem $S_1 = S + \frac{S}{1} = 2S.$

• Pentru $n=2$ avem, (figura 1):

$S_1 = S + \frac{S}{2} = S\left(1+\frac{1}{2}\right)$ şi

$S_2 = S_1 + \frac{S_1}{2} = S_1\left(1+\frac{1}{2}\right) = S\left(1+\frac{1}{2}\right)^2.$

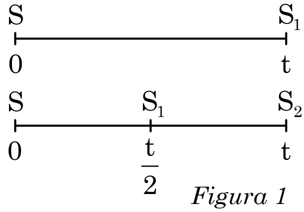


Figura 1

• Pentru $n=3$ avem, (figura 2):

$S_1 = S + \frac{S}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)$, $S_2 = S_1 + \frac{S_1}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$ şi

$S_3 = S_2 + \frac{S_2}{3} = S\left(1+\frac{1}{3}\right)^3.$

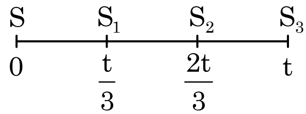


Figura 2

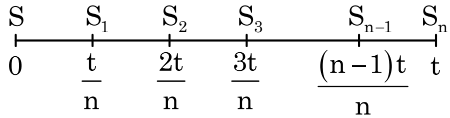


Figura 3

• Pentru cazul general avem, (figura 3):

$S_1 = S + \frac{S}{n} = S\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $S_2 = S_1 + \frac{S_1}{n} = S_1\left(1+\frac{1}{n}\right) = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, şi în final

$$S_n = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

După cum se observă în calculul sumei finale S_n apare şirul (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$

b) S-a obținut că $S_n = S\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \geq 1.$ Deoarece $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25,$ $x_3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}37,\ x_4 = \frac{625}{256} \approx 2{,}44,$ deci $x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$

Investitorul ar putea considera că suma finală plătită ar fi cu atât mai mare cu cât n ar fi mai mare.

Aşadar, suma maximă plătită ar depinde de $\lim_{n\to\infty} x_n$, dacă aceasta există.

Pentru şirul (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, avem următorul rezultat:

▣ TEOREMA 25 (Daniel Bernoulli [2])

Fie (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Atunci:

a) şirul (x_n) este monoton strict crescător;

b) şirul (x_n) este mărginit: $2 \leq x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) şirul (x_n) este convergent.

Limita şirului (x_n), $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu „e“ după numele matematicianului elvețian Leonhard Euler (1707-1783). Numărul e este un număr irațional şi are valoarea aproximativă $e \approx 2,718281$.

Revenind la problema anterioară vom avea că:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = S \cdot e < 3S$, deci împrumutul aduce profit în condițiile specificate.

ALTE ŞIRURI CU LIMITA NUMĂRUL e

Şirul (e_n), $(e_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este şir convergent. Aplicând direct operațiile cu limite de şiruri se obține că $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$, care este o operație căreia nu i se atribuie nici un sens.

În soluționarea cazurilor de nedeterminare 1^∞, şirul $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ are un rol important.

1. Fie (x_n), $x_n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Într-adevăr, (x_n) este un subşir al şirului de numere naturale, iar şirul (a_n), $a_n = \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ este un subşir al şirului (e_n). Rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e_n = e$.

2. Fie (x_n), $x_n > 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

Într-adevăr, fie $y_n = [x_n]$, partea întreagă a numărului x_n.

Deoarece $x_n - 1 < y_n \le x_n$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ şi

$$\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{1+y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{1+y_n}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{y_n}\right).$$

Prin trecere la limită în inegalitățile anterioare rezultă că:

$e \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le e$, şi astfel se obține limita cerută.

Proprietatea (2) este adevărată şi dacă şirul (x_n) are limita $+\infty$, dar nu toți termenii săi sunt pozitivi.

Într-adevăr, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci în afara vecinătății $V = (0, +\infty)$ a lui $+\infty$, există un număr finit de termeni ai şirului (x_n). Cum limita unui şir nu se schimbă prin înlăturarea unui număr finit de termeni, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$.

3. Fie (x_n) un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dacă şirul (y_n), $y_n = (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ este definit, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e$.

Acest rezultat mai general poate fi folosit pentru calculul limitelor de şiruri în cazul de nedeterminare 1^∞.

Astfel:

• Dacă $(x_n), (y_n)$ sunt şiruri de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\right]^{x_n y_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)}$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n+2}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Se scrie $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = e^2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2}{n^2+1}-1\right)^{n+2} \overset{(2)}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{n^2}{n^2+1}-1\right)} = e^0 = 1.$

4. Dacă (x_n) este un şir de numere reale nenule, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1;$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a,\ a\in(0,+\infty)\setminus\{1\};$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^r-1}{x_n}=r,\ r\in\mathbb{R}.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; b) $a_n=\left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{n+1}$;

c) $a_n=\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+2}$;

d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

e) $a_n=\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{n}$;

f) $a_n=\left(1+\frac{n}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

g) $a_n=\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{n}$; h) $a_n=\left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n+1}$;

i) $a_n=\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n-1}\right)^{n^2-1}$;

j) $a_n=\left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^{2+\sqrt{n}}$;

k) $a_n=\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n+2}}\right)^{n}$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n=\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n+1}$;

b) $a_n=\left(\frac{n^4+2n^2+1}{n^4+n^2+3n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$;

c) $a_n=\left(3+\frac{1}{n}\right)^{-3n}\cdot 27^n$;

d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\right)^{n+1}$.

E3. Se consideră şirul (a_n),

$$a_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}.$$

Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\left(a_n-\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

E4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

b) $a_n=\left(n+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)$;

c) $a_n=n^3\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$;

d) $a_n=n^2\cdot\sin\frac{2}{n}\cdot\ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$.

E5. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$;

b) $a_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right),\ a>1$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$; d) $a_n = n\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{4}\right)$;

e) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}}$; f) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n$.

APROFUNDARE

A1. Fie (a_n) şi (b_n) şiruri de numere reale astfel încât:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

$b_n = n$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}$.

A2. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+3}\right)^n = e^2$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+an+6}{n^2+n+1}\right)^n = e^2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+bn+1}{n^2+3n-2}\right)^{n+1} = e$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+2n+a+1}{bn^2+3n+1}\right)^{-n} = e^{2a+b}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+a^2}{n+1}-\dfrac{n^2+b-b^2}{n+2}\right)^n = e^{-\frac{17}{4}-2a}$.

A3. Fie (a_n), $a_n = \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

a) Să se arate că (a_n) este convergent.

b) Să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2.$$

11 OPERAȚII CU ȘIRURI CARE AU LIMITĂ

11.1. SUMA ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

Fie $(a_n), (b_n)$ şiruri de numere reale. Atunci au loc următoarele situații:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$a\in\mathbb{R}$	$b\in\mathbb{R}$	$a+b$	$a+b$
$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$a+\infty=+\infty$
$a\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$	$a-\infty=-\infty$
$+\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty+b=+\infty$
$-\infty$	$b\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty+b=-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Cazuri de nedeterminare. Operațiile $(+\infty)+(-\infty)$ şi $(-\infty)+(+\infty)$ nu au sens	
$-\infty$	$+\infty$		

În cazul limitei sumei există cazul de nedeterminare $\infty-\infty$.

☞ ***Exemple***

a) Fie $a_n = n^2+3n$, $b_n = 3-n$. Rezultă că $a_n+b_n = n^2+2n+3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$.

b) Fie $a_n = n + (-1)^n$ şi $b_n = -n$. Atunci $a_n + b_n = (-1)^n$, care nu are limită.

c) Fie $a_n = n + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, $b_n = -n$. Atunci şirul sumă $a_n + b_n = \alpha$, are limita α.

d) Fie $a_n = n + 3$, $b_n = -2n$. Atunci $a_n + b_n = -n + 3$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

❑ REȚINEM!

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită, iar suma limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

Exerciţiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+1} - n + 1\right)$.

<u>*Soluție*</u>

a) Cazul $\infty - \infty$. Avem succesiv:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

b) Cazul $\infty - \infty$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} - n + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 - n^2 + n - n + 1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

◢ **Temă**

Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n}{n+2} - n\right)$.

11.2. PRODUSUL ȘIRURILOR CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n) un şir de numere reale care are limită şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele rezultate generale:

Produsul cu scalari:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	α	$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n)$	Scrierea simbolică a operației
$\ell \in \mathbb{R}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\ell \cdot \alpha$	$\ell \cdot \alpha$
$+\infty$	$\alpha > 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot (+\infty) = +\infty,\ \alpha > 0$
$+\infty$	$\alpha < 0$	$-\infty$	$\alpha \cdot (+\infty) = -\infty,\ \alpha < 0$
$-\infty$	$\alpha > 0$	$-\infty$	$\alpha \cdot (-\infty) = -\infty,\ \alpha > 0$
$-\infty$	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot (-\infty) = +\infty,\ \alpha < 0$
$+\infty$	$\alpha = 0$	În aceste cazuri, şirul $(\alpha \cdot a_n)$ este şirul nul şi limita sa este 0.	
$-\infty$	$\alpha = 0$		

Produsul a două şiruri cu limita infinită:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

Produsul a două şiruri care au limită, unul dintre acestea fiind convergent:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$	Scrierea simbolică a operației
$a>0$	$+\infty$	$+\infty$	$a\cdot(+\infty)=+\infty,\ a>0$
$a<0$	$+\infty$	$-\infty$	$a\cdot(+\infty)=-\infty\ a<0$
$a>0$	$-\infty$	$-\infty$	$a\cdot(-\infty)=-\infty,\ a>0$
$a<0$	$-\infty$	$+\infty$	$a\cdot(-\infty)=+\infty,\ a<0$
0	$+\infty$	În acest caz se obține o nedeterminare. Operația $0\cdot(\pm\infty)$ nu este definită.	
0	$-\infty$		

În cazul limitei produsului există cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$.

☞ ***Exemple***

a) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $b_n=n$. Şirul $(a_n\cdot b_n)$, $a_n\cdot b_n=(-1)^n$, nu are limită.

b) $a_n=n^2$, $b_n=\dfrac{\alpha}{n^2}$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=\alpha\in\mathbb{R}$.

c) $a_n=n^2$, $b_n=\dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$.

d) $a_n=n^2$, $b_n=-\dfrac{1}{n}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$.

❑ **REȚINEM!**

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limită şi dacă produsul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

11.3. CÂTUL A DOUĂ ŞIRURI CARE AU LIMITĂ

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri care au limită, astfel încât şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ să fie definit.

Cazul în care şirurile sunt convergente s-a tratat la operații cu şiruri convergente.

În cazul în care cel puțin una dintre limitele şirurilor (a_n) şi (b_n) este infinită, avem situațiile:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$	Scrierea simbolică a operației
$a \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0	$\frac{a}{+\infty} = 0,\ \frac{a}{-\infty} = 0$
$+\infty$	$+\infty$	Cazuri de nedeterminare	Operațiile $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ nu sunt definite, fiind considerate operații fără sens
$-\infty$	$-\infty$		
$+\infty$	$-\infty$		
$-\infty$	$+\infty$		

Aşadar, în cazul limitei raportului a două şiruri rezultă cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$.

☞ ***Exemple***

a) $a_n = n\alpha,\ b_n = n.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha.$

b) $a_n = n^2,\ b_n = n.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty.$

c) $a_n = n,\ b_n = n^2.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

d) $a_n = -n^2,\ b_n = n.$ Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$

e) $a_n = 2n + 1 + (-1)^n \cdot n,\ b_n = 2n + 1 - (-1)^n \cdot n.$ Şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ are subşirurile $\frac{a_{2n}}{b_{2n}} = \frac{3n+1}{n+1}$ cu limita 3 şi $\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} = \frac{n+1}{3n+1}$ cu limita $\frac{1}{3}$. În acest caz şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nu are limită.

❑ REȚINEM!

Dacă şirurile (a_n) şi (b_n) au limite, iar şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este definit şi raportul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

11.4. RIDICAREA LA PUTERE

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, astfel încât şirul $\left(a_n^{b_n}\right)$ să fie definit şi $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Pentru şirul putere $\left(a_n^{b_n}\right)$ avem situațiile:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right)$	Scrierea simbolică a operației
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(+\infty)^{+\infty}=+\infty$
$a>1$	$+\infty$	$+\infty$	$a^{+\infty}=+\infty,\ a>1$
$a>1$	$-\infty$	0	$a^{-\infty}=0,\ a>1$
$0<a<1$	$+\infty$	0	$a^{+\infty}=0,\ a\in(0,\,1)$
$0<a<1$	$-\infty$	$+\infty$	$a^{-\infty}=+\infty,\ a\in(0,\,1)$
$+\infty$	$b>0$	$+\infty$	$(+\infty)^{b}=+\infty,\ b>0$
$+\infty$	$b<0$	0	$(+\infty)^{b}=0,\ b<0$
0	$+\infty$	0	$0^{+\infty}=0$
$+\infty$	$-\infty$	0	$(+\infty)^{-\infty}=0$
1	$+\infty$	În aceste cazuri avem o nedeterminare	Operațiile $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$, 0^0 nu sunt definite
1	$-\infty$		
$+\infty$	0		
0	0		

Cazurile $\mathbf{1^{\infty}}$, $\mathbf{\infty^{0}}$, $\mathbf{0^{0}}$ sunt cazuri de nedeterminare.

☞ ***Exemple***

a) $a_n=1+\dfrac{\alpha}{n}$, $b_n=n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n=e^{\alpha}$, $\alpha\neq 0$.

b) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $b_n=n^2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{+\infty}=+\infty$.

c) $a_n=1+\dfrac{1}{n}$, $b_n=2n+1+(-1)^n\cdot n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1+(-1)^n\cdot n}$ nu există, deoarece pentru n par se obține $a_{2n}^{b_{2n}}=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{6n+1}$ cu limita e^3, iar pentru n impar se obține $c_n=\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+2}$ cu limita e.

➲ OBSERVAȚII

- Cazul 1^∞ se soluționează folosind şiruri care au limita numărul e.
- Cazurile ∞^0 şi 0^0 se pot aduce la cazul $0\cdot\infty$.

Dacă avem $c_n = a_n^{b_n}$, atunci putem scrie $c_n = e^{b_n \cdot \ln a_n}$ şi se au în vedere rezultatele:

a) Dacă $x_n \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ln x_n = 0$.

b) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln x_n}{x_n} = 0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = n^2 - n$;

b) $a_n = -n^3 + 2n^2$;

c) $a_n = -4n^3 + 3n - 1$;

d) $a_n = 4n^4 - 5n^6 + 3$.

E2. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$; b) $a_n = \dfrac{2n^2-3n}{4n^2-n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{2n^3+5n-1}{3n^2+n+1}$; d) $a_n = \dfrac{7-2n-n^3}{2n^2+3n+1}$.

E3. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{2n^2+\alpha\cdot n+1}{3n^2+2n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{\alpha\cdot n^2+2n+1}{2n^2+3n-1}$;

c) $a_n = \dfrac{\alpha\cdot n^3+\beta\cdot n^2+n}{2n^2+1}$;

d) $a_n = \dfrac{\alpha\cdot n^3+\beta\cdot n^2+1}{\alpha\cdot n^2+3n+1}$.

E4. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

b) $a_n = \dfrac{n\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)}{\left[1+3+5+...+(2n-1)\right]^2}$;

c) $a_n = \dfrac{1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+n(n+2)}{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)}$;

d) $a_n = \dfrac{(n+1)+(n+2)+...+(n+n)}{1+4+7+...+(3n-2)}$;

e) $a_n = \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{n+1}{2}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$;

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+n}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$;

e) $a_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot n^p$, $p \in \mathbb{N}$;

f) $a_n = \left(\sqrt{n^4+n}-n^2\right)\cdot n^2$;

g) $a_n = n^k\left(\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}} - \sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\right)$, $k \in \mathbb{N}$;

h) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+2}}$.

A2. Să se calculeze limitele șirurilor (a_n):

a) $a_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$;

b) $a_n = \dfrac{2^n+3^n+1}{3^n+n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{3^n+2\cdot 5^n}{7\cdot 3^n+5^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2^n+3\cdot 4^n+7^{n+2}}{3\cdot 2^n+4\cdot 7^n}$;

e) $a_n = \dfrac{a^n+2^n}{3^n+2^n}$, $a>0$;

f) $a_n = \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, $a, b>0$;

g) $a_n = \dfrac{a^{2n}+a^2+8}{a^{2n}+2a^2+4}$, $a>0$.

A3. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{2n+1}-a\cdot n-b\right)=1$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n+a}-n\right)=1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+a\cdot n}{n+2}-\dfrac{b\cdot n^2}{n+1}\right)=3$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}\right)=0$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[a\sqrt{n+2}+\left(a^2+a-3\right)\sqrt{n}\right]=0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(20-a^2\right)n^2+2n+3}}{2n+1}=2$.

A4. Să se determine parametrii reali a și b, astfel încât șirurile (a_n) și (b_n) să fie simultan convergente:

a) $a_n = a\sqrt{n+5}+b\sqrt{9n+5}-\sqrt{4n+3}$,
$b_n = a\sqrt{9n+3}-b\sqrt{25n+30}+\sqrt{64n+15}$;

b) $a_n = \left(a^2+b\right)\sqrt{n+4}-\sqrt{n+9}$,
$b_n = a\sqrt{9n+8}+b^2\sqrt{n+5}-3\sqrt{n+4}$.

A5. Să se calculeze limitele șirurilor (a_n):

a) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n}-n$;

b) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2}+\sqrt[3]{3n-n^2}$;

c) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2+2}\right)$;

d) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^3+3n}+\sqrt[3]{n-3n^3}\right)$.

A6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)^{\frac{n}{n^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\ln^{-2} n}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+3}\right)^{\frac{2}{n}}$.

11.5. LEMA LUI STOLZ-CESARO

▣ TEOREMA 25 (Stolz-Cesaro [2])

Fie (a_n) și (b_n) șiruri de numere reale, astfel încât:

a) șirul (b_n) este strict crescător și nemărginit, cu termenii nenuli;

b) șirul (c_n), $c_n = \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ are limita $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci șirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \frac{\ln n}{n}$; b) $a_n = \frac{\ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n}{n+1}$;

c) $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$;

d) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

e) $a_n = \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4}{n^5}$;

f) $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$;

g) $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1}\right)$.

APROFUNDARE

A1. Fie (a_n) un şir de numere reale şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \ell$.

A2. Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Să se arate că:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n} = \ell$.

A3. Fie (a_n) un şir de numere reale strict pozitive. Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ există, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

A4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$; b) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

c) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n+1}}$;

e) $a_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^n}}$;

f) $a_n = \sqrt[n]{n(n+1)(n+2)...(n+n)}$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $(a_n), (b_n)$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

b) (b_n) este strict descrescător;

c) şirul (c_n), $c_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$.

Atunci şirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ este convergent şi are limita ℓ.

(Lema lui Stolz-Cezaro, cazul $\frac{0}{0}$)

D2. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = n\left(\ln 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - ... - \frac{1}{2n}\right)$;

b) $a_n = n\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} ... - \frac{1}{n!}\right)$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ Să se precizeze valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. În cazul propozițiilor false, să se dea un contraexemplu.

a) Orice şir monoton este mărginit.

b) Orice şir mărginit este monoton.

c) Orice şir convergent este monoton.

d) Orice subşir al unui şir monoton este monoton.

e) Există şiruri monoton crescătoare care au cel puțin un subşir monoton descrescător.

f) Suma a două şiruri monotone este un şir monoton.

g) Diferența a două şiruri monoton crescătoare este un şir monoton crescător.

h) Suma a două şiruri nemărginite este un şir nemărginit.

i) Orice şir divergent este nemărginit.

j) Orice şir nemărginit are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

k) Produsul a două şiruri care nu au limită este un şir care nu are limită.

l) Dacă două şiruri sunt convergente, atunci raportul lor este un şir convergent.

m) Dacă pătratul unui şir (a_n) este şir convergent, atunci şirul (a_n) este şir convergent.

n) Dacă un şir convergent are toți termenii diferiți de zero, atunci limita sa este diferită de zero.

Testul 2

❍ **1. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirurilor (a_n):**

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$; **b)** $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; **c)** $a_n = \dfrac{2n+\alpha}{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3p.)

❍ **2. Se consideră şirul (a_n) astfel încât:** $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^{n+1}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că $a_n = \dfrac{1}{3} \cdot \left[2^n + (-1)^n\right]$, $n \geq 1$.

b) Să se studieze convergența şirului cu termenul general $b_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

(2p.)

❍ **3. Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:**

a) $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$; **b)** $a_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n-1}\right)$. *(2p.)*

❍ **4. Să se calculeze limita şirului (a_n) dacă:** $\left(1+\dfrac{2n}{n^2+1}\right)^n \leq a_n \leq \left(\dfrac{n^2+3n}{n^2+n+1}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$.

(2p.)

Testul 3

❍ **1. Să se studieze convergența şirurilor (a_n) şi în caz de convergență să se calculeze limita acestora:**

a) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+3)}$; **b)** $a_n = \left(\dfrac{2^{\frac{2}{n}} + 3^{\frac{3}{n}}}{2}\right)^n$. *(3p.)*

❍ **2. Să se determine valorile parametrilor reali în cazurile:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+5\cdot a^n}{3^n+10^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\dfrac{b\cdot n+3}{n^2+1}\right)^{n-1}=e^3$. ***(2p.)***

❍ **3. Să se calculeze:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}-3\sqrt{n+2}}$. ***(2p.)***

❍ **4. Să se calculeze:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.

(2p.)

12 LIMITA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi x_0 un punct de acumulare al mulțimii D.

După cum se cunoaşte, pentru orice vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$, există puncte $x\in D\cap\left(V\setminus\{x_0\}\right)$ în care funcția f este definită. Altfel spus, funcția f este definită în puncte „oricât de apropiate“ de punctul x_0.

Se pune, astfel, problema comportării funcției f în vecinătatea (apropierea) punctului x_0. Aceasta înseamnă a studia ce se întâmplă cu valorile funcției f pe vecinătăți oarecare ale punctului x_0 (chiar şi în cazurile în care f nu este definită în x_0).

Să analizăm următorul exemplu:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x$ şi punctul $x_0=1$, punct de acumulare al domeniului de definiție.

Vom studia ce se întâmplă cu valorile funcției f când x se află într-o vecinătate $U\in\mathcal{V}(1)$ „oricât de mică“. Considerăm $U=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, o vecinătate a punctului $x_0=1$, (figura 1).

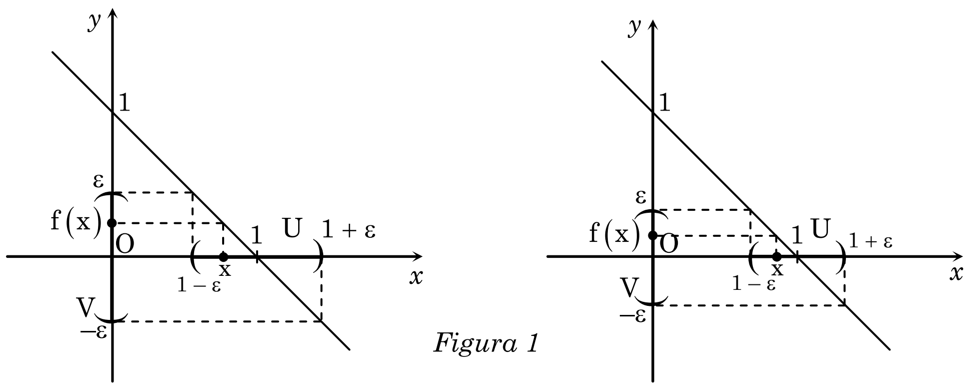


Figura 1

Se observă, lecturând figura 1, că pentru $\varepsilon > 0$, valorile funcției f vor aparține mulțimii $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$ care este o vecinătate a punctului 0.

Aşadar, intuitiv, putem spune că valorile funcției f sunt mereu într-o vecinătate a punctului 0, pentru oricare $\varepsilon > 0$.

Folosind un alt limbaj vom spune că dacă „x tinde la 1“ atunci „$f(x)$ tinde la 0“.

Mai mult, fie V o vecinătate a punctului 0. Atunci există un interval $I = (a, b)$ astfel încât $0 \in I \subset V$, (figura 2).

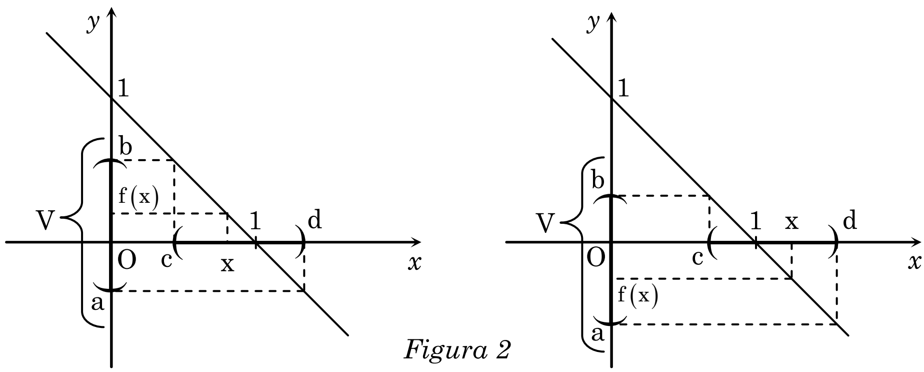


Figura 2

Lecturând figura 2 se observă că există intervalul $U = (c, d)$, vecinătate a punctului $x_0 = 1$, cu proprietatea că pentru oricare $x \in U \cap D$ rezultă că $f(x) \in (a, b)$, deci $f(x) \in V$.

Vom spune că numărul $\ell = 0$ este limita funcției f în punctul $x_0 = 1$ şi vom scrie $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Proprietatea desprinsă în cazul acestei funcții defineşte o nouă noțiune importantă în cadrul analizei matematice.

❖ DEFINIȚIE

- Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea D şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Numărul ℓ se numeşte **limita funcției f în punctul x_0** dacă pentru oricare vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ cu proprietatea că pentru orice $x \in D \cap (U \setminus \{x_0\})$ rezultă că $f(x) \in V$.

  Se foloseşte notația $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

➲ OBSERVAȚII

- Aşa cum s-a specificat, problema existenței limitei unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul de acumulare $x_0 \in D'$ se pune chiar dacă funcția f nu este definită în x_0. În acest caz restricția $x \neq x_0$ din definiție nu mai este necesară.

- Dacă mulțimea D este nemărginită superior sau inferior, atunci x_0 poate fi $+\infty$, respectiv $-\infty$.
- Dacă x_0 nu este punct de acumulare pentru D, atunci nu se pune problema limitei funcției f în x_0.
  Astfel, într-un punct izolat al mulțimii D nu se pune problema limitei.
- Limita funcției în punctul x_0, dacă există, este unică.

Definiția limitei unui şir este conținută în definiția limitei unei funcții într-un punct. Mai mult, folosind limitele de şiruri se poate caracteriza existența limitei unei funcții într-un punct.

▣ TEOREMA 27
(Eduard Heine (1821-1881), [2])
Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$;

2. Pentru oricare şir (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell$.

Eduard HEINE
(1821-1882)
matematician
german

Are contribuții în studiul numerelor iraționale, convergenței şirurilor, funcțiilor continue.

Această teoremă dă posibilitatea folosirii tuturor rezultatelor studiate în legătură cu calculul limitelor de şiruri.

➲ OBSERVAȚII

- Pentru a determina limita funcției $f : D \to \mathbb{R}$ într-un punct de acumulare x_0 al lui D este suficient să cunoaştem limita unui singur şir $(f(x_n))$, unde $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.
- Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ nu are limită în punctul x_0, în una din situațiile:
  a) Există un şir (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu limita x_0, astfel încât şirul $(f(x_n))$ nu are limită.
  b) Există şirurile $(x_n), (y_n)$, $x_n, y_n \in D \setminus \{x_0\}$ cu limita x_0, astfel încât şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ au limite diferite.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze existența limitelor funcțiilor f în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+3x,\ x_0=2;$

b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=0.$

<u>Soluție</u>

a) Punctul $x_0=2$ este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}$. Dacă (x_n) este un şir de numere reale, $x_n\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$, atunci se obține $f(x_n)={x_n}^2+3x_n$. Folosind operațiile cu limite de şiruri obținem: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}^2+3x_n\right)=2^2+3\cdot 2=10$. Aşadar funcția f are limită în punctul $x_0=2$ şi $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=10$.

b) Punctul $x_0=0$ este punct de acumulare pentru mulțimea $(0,+\infty)$.

Fie (x_n) un şir, astfel încât $x_n\in(0,+\infty)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{0_{(+)}}=+\infty$. Aşadar funcția f are limită în $x_0=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

☒ **2.** Să se arate că funcțiile f nu au limită în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x_0=0;$

b) $f:\mathbb{R}\to[-1,1],\ f(x)=\sin x,\ x_0=+\infty.$

<u>Soluție</u>

a) Vom arăta că există două şiruri $(x_n),(y_n)$, cu $x_n, y_n\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ $=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ pentru care şirurile $(f(x_n))$ şi $(f(y_n))$ nu au aceeaşi limită. Considerăm $x_n=-\dfrac{1}{n},\ y_n=\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*$ şi se obține că $f(x_n)=-n,\ f(y_n)=n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty$. În concluzie funcția f nu are limită în $x_0=0$.

b) Considerăm şirurile $(x_n),(y_n)$ cu termenii generali $x_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$, $y_n=-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ şi se obține că $f(x_n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1,\quad f(y_n)=$ $=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. Aşadar f nu are limită la $+\infty$.

☒ **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ nu are limită în nici un punct $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$.

Soluție

Fie $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ şi $(x_n),(y_n)$ două şiruri de numere reale astfel încât $x_n\in\mathbb{Q},\ y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$.

Atunci $f(x_n)=1,\ f(y_n)=0,\ n\in\mathbb{N}^*$ şi rezultă că şirurile $(f(x_n)),\ (f(y_n))$, au limite diferite, deci funcția f nu are limită în punctul x_0.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se calculeze:**

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+3x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3x)$;

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{(x-2)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3}{x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^2$.

E2. **Să se determine constanta reală a pentru care:**

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+a}{1+x}=2$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+3}{2x+3}=3$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2+ax)}{x^2+ax+x}=\dfrac{2}{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{(\sqrt{x-1}+a)(x-2)}=\dfrac{1}{4}$.

APROFUNDARE

A1. **Să se arate că următoarele funcții nu au limite în punctele specificate:**

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x_0=0$;

b) $f:\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2x},\ x_0=1$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ \cos x, & x\ge0\end{cases}$, **în** $x_0=0$ **şi** $x_0=+\infty$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=[x],\ x_0\in\mathbb{Z}$.

A2. **Să se arate că următoarele funcții nu au limită în punctele specificate. Există puncte în care funcțiile au limită?**

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2, & x\in\mathbb{Q}\\ x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $x_0=3$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 2x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, $x_0=1$.

(Olimpiadă, 1993)

13 LIMITE LATERALE

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al mulțimii D.

❖ DEFINIȚII

- Numărul $\ell_s \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **limita la stânga** a funcției f în x_0, dacă pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D \cap (-\infty, x_0)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_s$.
- Numărul $\ell_d \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **limita la dreapta** a funcției f în x_0, dacă pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D \cap (0, +\infty)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell_d$.

Limitele la stânga și la dreapta ale funcției f în punctul $x_0 \in D'$ se numesc **limite laterale** ale funcției f în x_0.

- Pentru limita la stânga se folosesc notațiile $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 - 0)$.
- Pentru limita la dreapta se folosesc notațiile $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ sau $f(x_0 + 0)$.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcția f are în punctul x_0 limite laterale, acestea sunt unice. Acest fapt rezultă din unicitatea limitelor de șiruri.

2. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ punct de acumulare. Funcția f poate să admită limită la stânga în x_0, fără să aibă limită la dreapta în x_0, sau reciproc.

☞ ***Exemplu***

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$. Pentru șirurile cu termenii generali $x_n = \dfrac{-1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ și $y_n = \dfrac{-1}{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$ care au limita 0 și sunt negative se obține: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$, deci funcția f nu are limită la stânga în x_0. Se obține ușor că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$.

3. Există funcții $f: D \to \mathbb{R}$ care nu au limite laterale în $x_0 \in D'$.

☞ ***Exemplu***

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu are limite laterale în $x_0=0$.

4. Fie $f:(a,\ b)\to\mathbb{R}$. Atunci limita la stânga în a şi limita la dreapta în b, nu au sens, deoarece în acest caz $(a,\ b)\cap(-\infty,\ a)=\varnothing$ şi $(a,\ b)\cap(b,\ +\infty)=\varnothing$. Dacă f are limite în a şi b, acestea coincid cu limita la dreapta în a, respectiv cu limita la stânga în b.

După cum s-a observat anterior, o funcție $f:D\to\mathbb{R}$ poate avea limite laterale în $x_0\in D'$ sau este posibil ca acestea să nu existe.

În cazul în care limitele laterale există, ele pot fi egale sau diferite. Dacă limitele laterale există şi sunt egale, atunci funcția are limită în x_0, egală cu valoarea comună a acestora, în caz contrar funcția nu are limită în x_0.

❑ **REȚINEM!**

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Funcția f are limită în punctul $x_0\in D'$ dacă şi numai dacă limitele laterale ale funcției în x_0 există şi sunt egale.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow f(x_0-0)=\ell=f(x_0+0)$$

Problemă rezolvată

☒ Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le 1\\ a^2x, & x>1\end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, pentru care funcția f are limită în $x_0=1$.

Soluție

Calculăm $\ell_s=f(x_0-0)$ şi $\ell_d=f(x_0+0)$. Fie $(x_n),\ x_n<1$, un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2x_n+a)=2+a=\ell_s$.

Dacă $(x_n),\ x_n>1$, este un şir cu $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a^2x_n)=$ $=a^2=\ell_d$.

Din condiția $\ell_s=\ell_d$ se obține ecuația $a^2=a+2$ cu soluțiile $a\in\{-1,\ 2\}$.

Aşadar $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ există dacă şi numai dacă $a\in\{-1,\ 2\}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se verifice dacă următoarele funcții au limită în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x},\ x_0 \in \{0, 1, \infty\}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ 5x, & x>2\end{cases},\ x_0=2$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases},\ x_0=0.$

E2. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au limită în punctele date:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, & x\le 1\\ ax+1, & x>1\end{cases},\ x_0=1;$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, & x\le 1\\ 2+x, & x\in(1, 2)\\ x^2-a, & x\ge 2\end{cases},\ x_0=1$ şi $x_0=2$;

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+a}{x+1}, & x\le 0\\ \frac{2x+1}{x+3}, & x>0\end{cases},\ x_0=0.$

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care există limitele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ x+a, & x\le 0\end{cases}$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\le -1\\ 3x^2+bx, & x\in(-1, 1),\\ x^2+2ax+1, & x\ge 1\end{cases}$

în $x=-1$ şi $x=1$.

A2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se determine punctele în care f are limită dacă:

a) $f(x)=|x|$; b) $f(x)=|x-2|$;

c) $f(x)=[x]$; d) $f(x)=\max\{1;\ x^2\}$;

e) $f(x)=x\cdot \operatorname{sgn}(x)$; f) $f(x)=x+[x]$.

A3. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ nu are limită în $x = 0$.

A4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$

a) Să se arate că dacă $\alpha < 0$, funcția f nu are limită în $x = 0$.
b) Să se arate că dacă $\alpha > 0$, funcția f are limită în $x = 0$.

DEZVOLTARE

D1. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de argument real şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D.
Să se arate că dacă f este monotonă, atunci funcția f are limite laterale în x_0.

D2. Să se arate că următoarele funcții au limită în orice punct x_0 din domeniul de definiție:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x,\ a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$;

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x$, $a\in(0, \infty)\setminus\{1\}$;

c) $f:[0, \infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\in\mathbb{R}^*$.

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

D3. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție reală și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D.
Să se arate că numărul ℓ_s este limita la stânga în x_0 a funcției f dacă și numai dacă pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D$, $x_n < x_0$, monoton crescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, rezultă că:
$\ell_s = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

14 PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CARE AU LIMITĂ

Teorema lui Heine referitoare la caracterizarea limitelor de funcții cu ajutorul limitelor de șiruri permite extinderea unor proprietăți ale limitelor de șiruri la limitele de funcții.

▣ TEOREMA 28 (limita modulului)
Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

Demonstrație

Din condiția $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ rezultă că pentru oricare șir (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Din proprietatea limitei modulului unui șir se obține că:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \left|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right| = |\ell| \text{ și astfel } \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|. \ ■$$

❑ REȚINEM!

$\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$, (limita modulului este egală cu modulul limitei).

▣ TEOREMA 29 (Criteriul majorării, cazul limitelor finite)
Fie $f, g: D \to \mathbb{R}$ două funcții reale și $x_0 \in D'$ un punct de acumulare al lui D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ și există $\ell \in \mathbb{R}$, astfel încât $|f(x) - \ell| \le g(x)$, $\forall x \in D$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Demonstrație

Fie (x_n), $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ un șir oarecare cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$ și $|f(x_n) - \ell| \le g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Din criteriul majorării pentru șiruri rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. Așadar, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. ■

Probleme rezolvate

> ◢ **Temă**
> **Calculați:**
> - $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\frac{1}{x}$;
> - $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{3}{x^2}$;
> - $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}$.

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcțiile:

$$f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \text{ şi } g(x)=|x|.$$

Avem: $\left|f(x)-0\right|=\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

Din criteriul majorării rezultă că $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

☒ **2.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0,\ x_0\in\mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Avem: $\left|\sin x-\sin x_0\right|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=$
$=\left|x-x_0\right|,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

Analog:

$\left|\cos x-\cos x_0\right|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le\left|x-x_0\right|,\ \forall x\in\mathbb{R}$ şi
astfel $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

> ▣ **TEOREMA 30 (Criteriul majorării, cazul limitelor infinite)**
> Fie $f, g: D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $f(x)\le g(x)$, $\forall\ x\in D$.
> **a)** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.
> **b)** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Problemă rezolvată

> ◢ **Temă**
> **Să se calculeze:**
> - $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$;
> - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+\ln\frac{x}{x^2+1}\right)$;
> - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sin^2 x\right)$.

☒ Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=+\infty$ şi
$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sin x)=-\infty$.

<u>*Soluție*</u>

Deoarece $-1\le\sin x\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, avem:
$x-1\le x+\sin x\le x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Dar $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, de unde, cu criteriul majorării, rezultă limitele cerute.

▣ TEOREMA 31 (trecerea la limită în inegalităţi)
Fie $f, g: D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ şi există o vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Demonstraţie

Fie (x_n), $x_n\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Atunci $f(x_n)\le g(x_n)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Din teorema de trecere la limită în inegalităţi pentru şiruri rezultă:

$\ell_1=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\le\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=\ell_2$ şi teorema este demonstrată. ■

▣ TEOREMA 32 (Criteriul cleştelui)
Fie funcţiile $f, g, h: D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $V\in\mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $f(x)\le g(x)\le h(x)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$.

Demonstraţie

Fie (x_n), $x_n\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$, un şir cu limita x_0. Rezultă că $f(x_n)\le g(x_n)\le h(x_n)$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\ell=\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$ şi aplicând criteriul cleştelui pentru şiruri rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=\ell$. Cum şirul (x_n) a fost ales arbitrar rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$. ■

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

Soluţie

Avem inegalităţile $-x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to0} x^2=0=\lim\limits_{x\to0}(-x^2)$.

Cu criteriul cleştelui rezultă că $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

☒ **2.** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0} x\cdot\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

> **Temă**
> **Să se calculeze:**
> - $\lim_{x\to1}(x-1)\cdot\cos\frac{1}{x-1}$;
> - $\lim_{x\to0}x\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{2}{x}\right)$;
> - $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$.

Soluție

Folosind definiția părții întregi se obține:

$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x},\ \forall\ x\in\mathbb{R}^*$. De aici rezultă că: $1-x<x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le1,\ \forall\ x\in(0,+\infty)$ și $1-x>x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge1$, $\forall\ x\in(-\infty,0)$. Prin trecere la limită se obține că $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$ și $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=1$, deci limita cerută este egală cu 1.

☒ **3.** Fie $f, g: D\to\mathbb{R}$ și $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D.

Să se arate că dacă $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, iar funcția g este mărginită, atunci $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=0$.

Soluție

Deoarece funcția g este mărginită rezultă că există $M>0$, astfel încât $|g(x)|<M,\ \forall x\in D$. Atunci:

$-M\le g(x)\le M$ și $-M\cdot|f(x)|\le f(x)\cdot g(x)\le M|f(x)|,\ \forall x\in D$.

Dar $\lim_{x\to x_0}M\cdot|f(x)|=0=\lim_{x\to x_0}(-M\cdot|f(x)|)$ și cu criteriul cleștelui se obține că $\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că:

a) $\lim_{x\to1}\sin\frac{1}{x-1}\cdot\ln x=0$;

b) $\lim_{x\to\pi}\sin x\cdot\cos\frac{1}{x-\pi}=0$;

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}=1$;

d) $\lim_{x\to\infty}\left(x+\arcsin\frac{1}{x}\right)=+\infty$;

e) $\lim_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{x})=+\infty$;

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=+\infty$;

g) $\lim_{x\to+\infty}(2+\cos x)\cdot e^x=+\infty$;

h) $\lim_{x\to+\infty}(3+\sin x)\cdot\ln x=+\infty$;

i) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-\sin x\right)=+\infty$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze:

a) $\lim_{x\to0}x^2\left[\frac{1}{x}\right]$;

b) $\lim_{x\to0}x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]\right)$;

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{x}$.

A2. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $|f(x)-\sin x|\leq$ $\leq |x|$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.**
Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

A3. **Să se determine, dacă există:**
a) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(1+\sin x)$;
b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(a+\sin x)$, $a\in\mathbb{R}$.

A4. **Fie $f:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D'$ un punct de acumulare pentru D şi $\ell=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.**
Să se arate că dacă $\ell>\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V\in$ $\in\mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $f(x)>f(\alpha)$, $\forall x\in V\cap(D\setminus\{x_0\})$.
(Funcția f este mărginită inferior pe mulținea $V\cap D\setminus\{x_0\}$.)

15 LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Folosind operațiile cu şiruri care au limită şi teorema lui Heine se pot găsi cu uşurință limitele funcțiilor elementare în punctele de acumulare ale domeniului de definiție.

Dacă $f:D\to\mathbb{R}$ este o funcție elementară, iar $x_0\in D$, atunci are loc următorul rezultat general:

▣ TEOREMA 33
Fie $f:D\to\mathbb{R}$, o funcție elementară şi $x_0\in D\cap D'$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Această teoremă arată faptul că limita unei funcții elementare într-un punct din domeniul de definiție este chiar valoarea funcției în acest punct. Aşadar, în asemenea cazuri calculul limitei nu comportă nici o dificultate.

Pentru cazul în care $x_0\in D'$ este un punct de acumulare al domeniului de definiție dar nu aparține acestuia, calculul limitei se poate determina fie prin lectura reprezentării geometrice a graficului acesteia, fie prin folosirea operațiilor cu limite de şiruri.

Vom ilustra aceste modalități în cazul principalelor funcții elementare.

• **Funcția polinomială**

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, este funcție polinomială de gradul n, $n\in\mathbb{N}$, atunci avem:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases} a_0\cdot(+\infty), & n\in\mathbb{N}^* \\ a_0, & n=0 \end{cases},$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases} a_0\cdot(-\infty)^n, & n\in\mathbb{N}^* \\ a_0, & n=0 \end{cases}.$$

• Funcția radical de ordin par

Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$. Lecturând graficul funcției se obține că $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty.$

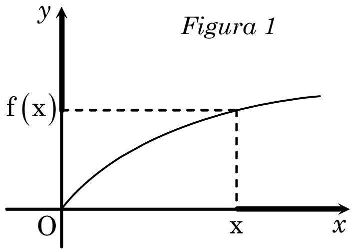


Figura 1

• Funcția radical de ordin impar

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, n impar, avem, prin lecturare grafică: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty.$

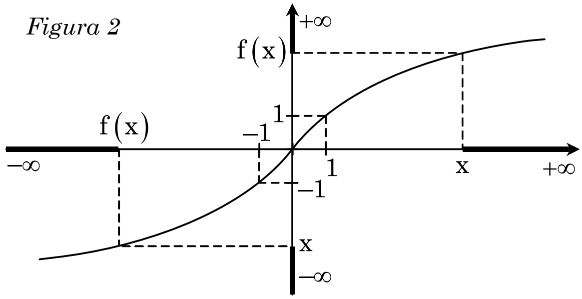


Figura 2

• Funcția exponențială

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty), f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$. În funcție de valorile lui a avem graficele din figura 3.

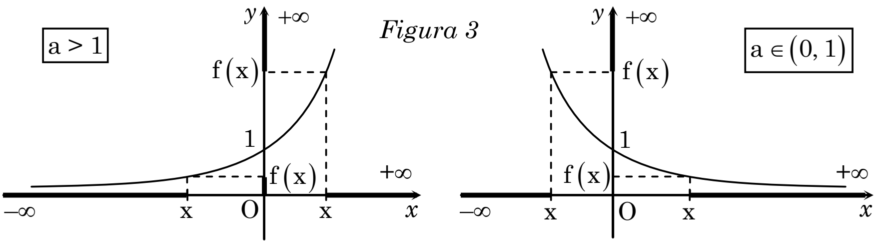


Figura 3

Din lectura grafică se obține:

$\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 0, & a<1\end{cases}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, & a>1\\ +\infty, & a<1\end{cases}.$

• Funcția logaritmică

Fie $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$. Studiind graficele funcției în funcție de valorile lui a se obține:

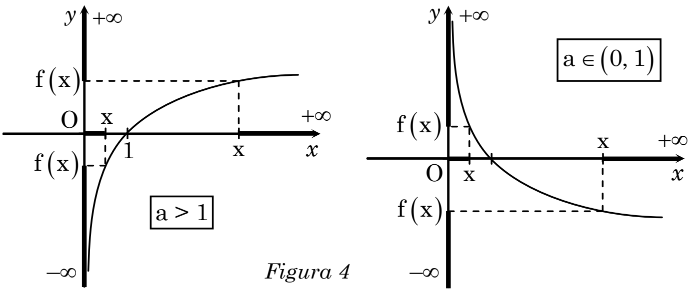


Figura 4

$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ -\infty, & a<1\end{cases}$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\log_a x=\begin{cases}-\infty, & a>1\\ +\infty, & a<1\end{cases}.$

• Funcții raționale

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții polinomiale de gradul p, respectiv q:
$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + ... + a_p$, $g(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + ... + b_q$.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in \mathbb{R}$ sunt soluțiile ecuației $g(x) = 0$, fie $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ şi funcția rațională $h : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Dacă $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, există situațiile:

• $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ şi atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$;

• $x_0 = \pm\infty$. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} \cdot (+\infty), & p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} \cdot (-\infty)^{p-q}, & p > q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & p = q \\ 0, & p < q \end{cases}$;

• $x_0 \in A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ şi A este nevidă. În acest caz sunt posibile situațiile:

a) $f(x_0) \neq 0$, $g(x_0) = 0$. În această situație se calculează limitele laterale ale funcției h în x_0.

☞ ***Exemplu***

• Fie $h : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)^2}$.

Pentru $x_0 = -1$ se obține $h(-1-0) = \dfrac{2}{0_{(-)}} = -\infty$ şi $h(-1+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$, deci h nu are limită în punctul $x_0 = -1$.

Pentru $x_0 = 1$ se obține $h(1-0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$, $h(1+0) = \dfrac{2}{0_{(+)}} = +\infty$ şi astfel $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = +\infty$.

b) $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$. În acest caz se obține o nedeterminare de forma $\dfrac{0}{0}$. Având în vedere descompunerea în factori a funcțiilor polinomiale f şi g, funcția h se poate simplifica cu $x - x_0$, ajungându-se la o altă funcție rațională h_1 şi se reia analiza pentru $h_1(x)$.

☞ ***Exemple***

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{1}{2}.$

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^4}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)^4}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^3}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{0_{(+)}}=+\infty.$

• Funcțiile trigonometrice

• Funcțiile trigonometrice directe sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă nu au limită la $+\infty$ şi $-\infty$, deoarece sunt funcții periodice.

• Funcția tangentă nu are limită în punctele $x_0=(2k-1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Din lectura graficului acesteia se obține: $tg(x_0-0)=+\infty$ şi $tg(x_0+0)=-\infty.$

• Funcția cotangentă nu are limită în punctele $x_0=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Din lectura graficului acesteia se obține: $ctg(x_0-0)=-\infty$ şi $ctg(x_0+0)=+\infty.$

Pentru funcțiile trigonometrice inverse prin lectură grafică se obține: $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}x=\pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg}x=0.$

◢ **Temă**

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to3}(3x^2-9x+7)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3+7x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^5+4x+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x})$; **e)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}$;

g) $\lim\limits_{x\to8}\log_2 x$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_{0,3}x$; **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\sqrt{2}}x$;

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$; **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2}-1)^x$; **l)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$;

m) $\lim\limits_{x\to-1}\arcsin x$; **n)** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arccos x$; **o)** $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}x$;

p) $\lim\limits_{\substack{x\to3\pi\\x>3\pi}}\operatorname{ctg}x$; **q)** $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3\pi}{2}\\x<\frac{3\pi}{2}}}\operatorname{tg}x.$

2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x}{2x+7}$; **b)** $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^3-125}$; **c)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x}{x^3-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+x^2+1}{2x^2+x-1}$, $a\in\mathbb{R}$; **e)** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$; **f)** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+8}{x^2-4x+2}.$

16 OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII

Operațiile cu limite de şiruri dau posibilitatea demonstrării cu uşurință a operațiilor cu limite de funcții.

16.1. ADUNAREA, ÎNMULȚIREA, CÂTUL ȘI RIDICAREA LA PUTERE

▣ TEOREMA 34

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}$ două funcții reale şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D, iar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$.

a) Dacă operația $\ell_1 + \ell_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Limita sumei este egală cu suma limitelor.

b) Dacă operația $\ell_1 \cdot \ell_2$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

Limita produsului este egală cu produsul limitelor.

c) Dacă operația $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, şi $g(x) \neq 0,\ x \in D$, atunci:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Limita raportului este egală cu raportul limitelor.

d) Dacă operația $\ell_1^{\ell_2}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$ şi există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ are sens $\forall\ x \in V \cap \left(D \setminus \{x_0\}\right)$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Limita unei puteri este egală cu puterea limitelor.

Ca şi în cazurile limitelor de şiruri, pentru operațiile cu limite de funcții există cazurile de nedeterminare:

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Aceste cazuri de nedeterminare se rezolvă prin procedee asemănătoare cu cele de la şiruri sau având în vedere anumite limite fundamentale.

Astfel avem:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ \forall r\in\mathbb{R};$ **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;$ **6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0.$

16.2. LIMITE DE FUNCȚII COMPUSE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $u : A \to D$ două funcții reale de variabilă reală, iar $h : A\to\mathbb{R},\ h=f\circ u,$ funcția compusă a acestora.

Dacă $x_0\in A'$ este un punct de acumulare pentru mulțimea A, ne punem problema dacă funcția $h=f\circ u$ are sau nu limită în x_0. Condițiile în care această limită există sunt date de următorul rezultat.

▣ TEOREMA 35
Fie $x_0\in A'$ şi $u(x_0)=u_0\in D'$, puncte de acumulare pentru mulțimile A şi D. Dacă sunt îndeplinite condițiile:
a) $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0$; **b)** $u(x)\neq u_0,\ \forall\ x\in A\setminus\{x_0\}$; **c)** $\lim\limits_{y\to u_0}f(y)=\ell,$
atunci $\lim\limits_{x\to x_0}f(u(x))=\lim\limits_{y\to u_0}f(y).$

<u>*Demonstrație*</u>

Fie şirul $(x_n),\ x_n\in A\setminus\{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. Deoarece $u : A \to D$ rezultă că $u(x_n)\in D$. Din condiția a) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=u_0$, iar din condiția b) rezultă că $u(x_n)\in D\setminus\{u_0\}$. Să notăm $y_n=u(x_n)$. Se obține un şir (y_n) din D, cu $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=u_0$. Aşadar u_0 este punct de acumulare pentru mulțimea D.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\ell$ şi de aici se obține $\lim\limits_{n\to\infty}f(u(x_n))=\ell$.

În concluzie, pentru orice şir (x_n) cu $x_n\in A\setminus\{x_0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}f(u(x_n))=\ell$ şi astfel, $\lim\limits_{x\to x_0}f(u(x))=\lim\limits_{y\to u_0}f(y)$. ■

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

1. Teorema anterioară permite înlocuirea calculului limitei funcției $f\circ u$ în x_0, cu calculul limitei funcției f în u_0.

2. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$ și $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)$.

Se spune că limita funcției comută cu valoarea funcției.

3. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$ și $u(x) \neq 0,\ \forall\ x \in A$, atunci:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln a,\ a \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\ln u(x) = 0$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{4x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x + \sin 2x}{\sin x + 2\sin 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x^2+x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\cos x}-2}{2^{x+1}-2}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = \dfrac{3}{4}$.

b) Avem, folosind operațiile cu limite de funcții, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x + \sin 2x}{\sin x + 2\sin 3x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\dfrac{\sin 6x}{x} + \dfrac{\sin 2x}{x}\right)}{x\left(\dfrac{\sin x}{x} + 2\dfrac{\sin 3x}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot\dfrac{\sin 6x}{6x} + 2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\sin x}{x} + 6\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}} = \frac{6+2}{1+6} = \frac{8}{7}.$$

c) Se obține: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x+x^3)}{x+x^3}\cdot\dfrac{x+x^3}{x^2+x}\right) = 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^3}{x^2+x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{x+1} = 1.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\cos x}-2}{2^{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(2^{\cos x-1}-1\right)}{2\left(2^x-1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{\cos x-1}-1}{\cos x-1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{2^x-1}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x} =$

$$= \ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{-x}{2}\right) = 1\cdot 0 = 0.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze, în cazul în care există, limitele funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = x^3 + 2x - 7$, $x_0 \in \{1, \pm\infty\}$;

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 11$, $x_0 \in \{0, \pm\infty\}$;

c) $f(x) = -2x^5 + 11x^3 + x$, $x_0 \in \{-1, \pm\infty\}$.

E2. Să se studieze existența limitei funcției $f: D \to \mathbb{R}$, în punctul x_0:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $x_0 \in \{2, -1, \pm\infty\}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$, $x_0 \in \{0, 1, \pm\infty\}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$, $x_0 \in \{0, 1, -1, \pm\infty\}$;

d) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4x + 6}{3x^3 + 2x + 5}$, $x_0 \in \{-1, \pm\infty\}$.

E3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 + (x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6 + x + 1}{(1 + x + x^2)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)(3x+1)(5x+1)}{(x+2)^4 - (x+1)^4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^8 - 2^8}{x^6 - 2^6}$.

E4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sqrt[3]{x} + e^x + \sin^2 x\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2}\right)$.

E5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{7x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\sin 5x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^4 + x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sin 4x + \sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - 1}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x \sin\dfrac{1}{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^n x}{\sin(x^n)}$, $n \in \mathbb{N}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$; j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 4x - \cos 6x}$.

E6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^4 + x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2)}{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x^2 + x - 1)}{\ln(x^3 + x - 1)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x + x^2)}{x^2}$.

E7. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x^2 + x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2} - 1}{x^3 + x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2+1} - 2}{3^{x^2+1} - 3}$.

E8. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + 5x^2 + x\right)^{\frac{1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x + x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+5}\right)^{x+1}$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine a, b ∈ ℝ, astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax\right)=b$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}-ax\right)=b$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^2+ax+1}{x+b}-x-1\right)=0$.

A2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^5-5x^4+1}{(x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

A3. Să se determine a, b, c ∈ ℝ, astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^6+bx^5+1}{(x-1)^2}$ să fie finită;

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^4+bx^3+6x+c}{(x-1)^3}$ să fie finită;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=\sqrt{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx-1}{x^2+1}\right)^x=e^{-3}$.

A4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x+2^x-2}{4^x+2^x-2}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+5^x-4^x-3^x}{5^x+4^x-3^x-2^x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2+x-2}\right)^{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+11}{2x^2+3x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$.

A5. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2+x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+1}+2\sqrt{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2-x+9}-\sqrt{x^2+x+7}}$;

e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x}}$.

A6. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin x+\sin x}{\arcsin x+2\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx}{\operatorname{tg}x+2\operatorname{tg}2x+\ldots+n\operatorname{tg}nx}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1-\sin 2x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos 4x}{x^4+x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\sin 2x}-2^{\operatorname{tg}2x}}{2^{\operatorname{tg}x}-2^{\sin x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\ldots+\operatorname{tg}nx\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

A7. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+a^x\right)}{\ln\left(1+b^x\right)},\ a,\ b\in(0,\infty).$$

A8. Fie f : D → ℝ, o funcție periodică neconstantă, astfel încât +∞ este un punct de acumulare pentru D. Să se arate că funcția f nu are limită la +∞.

A9. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to0}x^x$; b) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$;

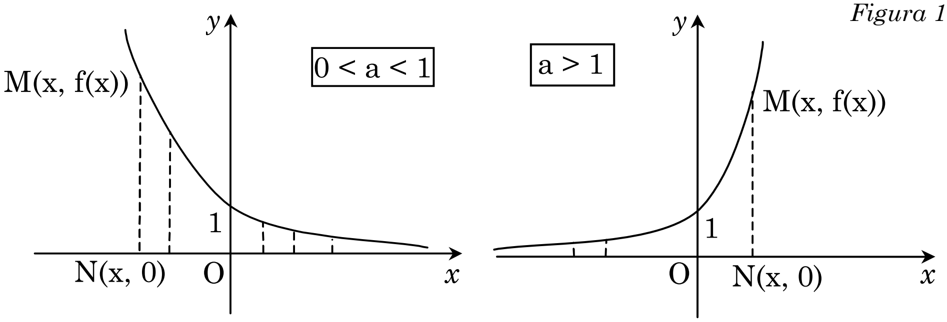
c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x^2}\right)^{x-1}$.

17 ASIMPTOTELE FUNCȚIILOR REALE

17.1. ASIMPTOTE ORIZONTALE

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, funcția exponențială cu baza a. Imaginea geometrică a graficului funcției exponențiale, denumită curbă exponențială, este redată în figura 1.

Figura 1



Fie punctul M(x, f(x)) pe curba exponențială şi N(x, 0) proiecția lui M pe axa Ox.

Lungimea segmentului [MN] este $\ell(x) = |f(x) - 0| = a^x$.

În clasa a X-a s-a pus în evidență proprietatea că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ dacă $0 < a < 1$ şi este asimptotă orizontală spre $-\infty$ dacă $a > 1$.

Această proprietate s-a descris intuitiv observând că lungimea segmentului [MN] tinde să devină oricât de mică atunci când $x \to +\infty$, respectiv $x \to -\infty$.

Faptul că axa Ox este asimptotă orizontală a funcției exponențiale se exprimă cu ajutorul limitelor de funcții astfel:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, pentru $0 < a < 1$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, pentru $a > 1$.

Această observație particulară poate fi extinsă la cazul unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ pentru care $+\infty$, respectiv $-\infty$ sunt puncte de acumulare, iar D conține intervale de forma $(-\infty, \alpha)$ sau $(\alpha, +\infty)$.

❖ DEFINIȚII

- Dreapta y = a este **asimptotă orizontală spre +∞** a funcției f dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$.

• Dreapta y = a este **asimptotă orizontală spre** $-\infty$ a funcției f dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

❑ **REȚINEM!**

Problema asimptotelor orizontale pentru o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ se pune numai la $+\infty$ şi $-\infty$ şi numai dacă $+\infty$ sau $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale mulțimii D.

Problemă rezolvată

☒ Să se determine asimptotele orizontale ale funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+x+1}$; **b)** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x \cdot |x|}{x^2+1}$;

c) $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$; **d)** $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

<u>*Soluție*</u>

a) În acest caz $\pm\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție.

Se obține: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+x+1} = 2$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+x+1} = 2$.

Rezultă că dreapta de ecuație y = 2 este asimptotă orizontală spre $+\infty$ şi spre $-\infty$ a funcției f.

b) $\pm\infty$ sunt puncte de acumulare pentru domeniul de definiție.

Se obține $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2}{x^2+1} = -1$.

Rezultă că dreapta y = 1 este asimptotă orizontală spre $+\infty$, iar dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) În acest caz numai $+\infty$ este punct de acumulare pentru D = (1, $+\infty$).

Se obține $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{1+\ln x} = 1$. Dreapta de ecuație y = 1 este asimptotă orizontală spre $+\infty$ a funcției f.

d) D = (–2, 2) fiind mulțime mărginită, $\pm\infty$ nu sunt puncte de acumulare şi nu se pune problema asimptotelor orizontale pentru funcția f.

17.2. ASIMPTOTE OBLICE

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât $+\infty$ sau $-\infty$ sunt puncte de acumulare pentru D, unde D conține intervale de forma $(-\infty, \alpha)$ sau $(\alpha, +\infty)$, şi dreapta (d): y = mx + n, $m \in \mathbb{R}^*$. O dreaptă paralelă cu axa Oy intersectează imaginea geometrică a graficului funcției f şi dreapta (d) în punctele M(x, f(x)) şi N(x, mx + n).

Lungimea segmentului [MN] este $\ell(x) = |f(x) - mx - n|$.

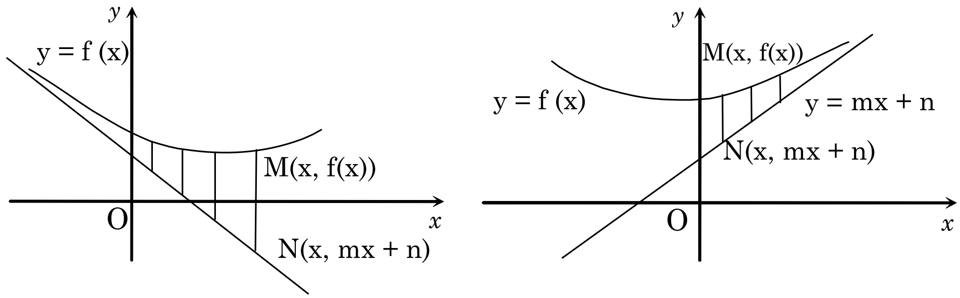


Figura 2

❖ **DEFINIŢIE**

• Dreapta de ecuaţie y = mx + n este **asimptotă oblică** spre $+\infty$, (respectiv $-\infty$) a funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$ dacă distanţa dintre dreaptă şi imaginea geometrică a graficului, măsurată pe verticală, tinde către zero când x tinde către $+\infty$, respectiv $-\infty$.

Cu ajutorul limitelor de funcţii rezultă că:

Dreapta y = mx + n este asimptotă oblică spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$) a funcţiei f dacă $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$, (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - mx - n| = 0$).

Problema existenţei asimptotelor oblice pentru o funcţie $f: D \to \mathbb{R}$ şi modul de determinare a acestora sunt cuprinse în următoarea teoremă.

▣ **TEOREMA 36**

Fie $f: D \to \mathbb{R}$.

a) Dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx)$, $n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta y = mx + n este **asimptotă oblică** a funcţiei f spre $+\infty$ şi reciproc.

b) Dacă există $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $n = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - mx)$, $n \in \mathbb{R}$, atunci dreapta y = mx + n este **asimptotă oblică** a funcţiei spre $-\infty$ şi reciproc.

Demonstraţie

a) Considerăm că există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$, $m \in \mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = n \in \mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx - n) = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) - n = n - n = 0$, deci $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

Reciproc

Presupunem că dreapta y = mx + n este asimptotă oblică spre $+\infty$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx - n) = 0$. Avem: $f(x) - mx = [f(x) - mx - n] + n$, de unde se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx-n\right)+n=0+n=n.$ Din egalitatea $\dfrac{f(x)}{x}-m=\dfrac{f(x)-mx}{x}$ rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-m\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-mx}{x}=\dfrac{n}{\infty}=0,$ deci $m=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}.$

b) Se demonstrează analog ca în cazul a). ■

➲ OBSERVAȚIE

- O funcție nu poate avea simultan asimptotă orizontală și asimptotă oblică spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$. În caz contrar, ar exista constantele $m\in\mathbb{R}^*$, $n, a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(mx+n-a\right)=0$, respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(mx+n-a\right)=0,$ ceea ce nu se poate.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine asimptotele oblice ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}.$

Soluție

a) Avem: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}=1,$ deci m = 1.

Rezultă $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=0=n,$ deci dreapta y = x este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}=-1,$ deci $m=-1.$

Rezultă $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=$

$=0=n,$ deci dreapta $y=-x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$.

☒ **2.** Să se determine constantele $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât dreapta y = 2x – 3 să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2-3}{2x^2+1}.$

<u>*Soluție*</u>

Impunem condițiile $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=-3$.

Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^3+bx^2-3}{2x^3+x}=\dfrac{a}{2}=2,$ de unde se obține a = 4.

De asemenea, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^3+bx^2-3}{2x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx^2-2x-3}{2x^2+1}=$

$=\dfrac{b}{2}=-3$, de unde se obține b = –6.

17.3. ASIMPTOTE VERTICALE

Să considerăm funcția logaritmică $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1.$

Reprezentarea geometrică a graficului funcției f, numită curba logaritmică, este dată în figura 3.

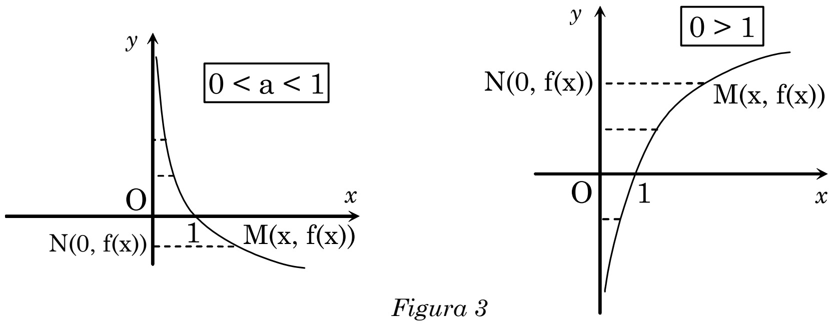


Figura 3

Fie M(x, f(x)) un punct oarecare pe curba logaritmică şi N(0, f(x)) proiecția lui M pe axa Oy. Se observă că pentru x → 0 lungimea segmentului [MN] tinde către zero, iar

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{pentru } a<1\\ -\infty, & \text{pentru } a>1\end{cases}.$$

Aceasta caracterizează faptul cunoscut că axa Oy, dreaptă de ecuație $x=0,$ este asimptotă verticală a funcției logaritmice.

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare finit pentru mulțimea D.

❖ <u>**DEFINIȚII**</u>

- Dreapta x = x_0 este **asimptotă verticală a funcției f** dacă cel puțin una dintre limitele laterale $f(x_0-0)$ sau $f(x_0+0)$ există şi este infinită.
- Dacă $f(x_0-0)$ este +∞ sau –∞, dreapta x = x_0 se numeşte **asimptotă verticală la stânga**.

- Dacă $f(x_0 + 0)$ este $+\infty$ sau $-\infty$, dreapta $x = x_0$ se numeşte **asimptotă verticală la dreapta**.
- Dacă limitele laterale ale funcției f în x_0 sunt infinite, dreapta $x = x_0$ se numeşte **asimptotă verticală bilaterală**.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine asimptotele verticale ale funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; **b)** $f:(0, \infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x^2$.

<u>*Soluție*</u>

a) Domeniul de definiție al funcției este $D=(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, \infty)$. Avem $f(-1-0)=-\infty,\ f(-1+0)=+\infty,\ f(1-0)=-\infty,\ f(1+0)=+\infty$. Rezultă că dreptele x = 1 şi x = –1 sunt asimptote verticale bilaterale.

b) Avem $f(0+0)=+\infty$. Dreapta x = 0 este asimptotă verticală la dreapta.

c) Pentru oricare $x_0\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0^3+x_0^2\in\mathbb{R}$, deci f nu are asimptote verticale. Mai general, **funcția polinomială nu are asimptote verticale**.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se determine asimptotele funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:**

a) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$; **b)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$;

c) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$; **d)** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}$;

e) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-9}$; **f)** $f(x)=\dfrac{x^4-x}{(x-2)(x^2-9)}$.

E2. **Să se determine asimptotele funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:**

a) $f(x)=\dfrac{|x|}{2x+1}$; **b)** $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x-2}$;

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x^2-1|}$; **d)** $f(x)=\dfrac{|x^2-3x|}{x-1}$;

e) $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x-1|}$.

E3. **Să se determine asimptotele funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:**

a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

b) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$;

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+4}}$;

d) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$;

e) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

E4. **Să se determine a, b ∈ $\mathbb{R}$, astfel încât funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$ să admită asimptotele specificate:**

a) $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x+2}$, $y = x + 1$;

b) $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{2x+3}$, $y = 2x - 3$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$;

b) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 - 1)$;

c) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}}$;

d) $f(x) = (x-1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

e) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; f) $f(x) = \frac{1}{\ln|x-1|}$;

g) $f(x) = (x+1)e^{-|x-1|}$;

h) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 27}}$;

i) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}}$.

A2. Să se determine parametrii reali a şi b, astfel încât funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$ să admită asimptotele indicate:

a) $f(x) = \frac{ax^4}{(bx+2)^3}$, $y = x - 3$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{ax^3 - bx^2}$, $y = 2x - \frac{1}{3}$;

c) $f(x) = \frac{(ax+b)e^x}{1+e^x}$, $y = 2x - 1$;

d) $f(x) = \frac{(x+a)(x+a+1)}{x+a+2}$, $y = x - a + 3$.

A3. Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \le -1 \\ \frac{2x}{x+1}, & x > -1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \sin \pi x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = \frac{x + \sin x}{2 + \sin x}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x^2+1}, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{x^3}{x^2+x+1}, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$.

A4. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + a^2x + 2a}$ să aibă o singură asimptotă verticală.

A5. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx - 1}$, $a, b \in (0, +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrii a, b, c astfel încât dreapta $y = 2x + 1$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$, iar $y = -1$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$.
(Electrotehnică, Craiova, 1972)

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ **1.** Să se calculeze limitele şirurilor (a_n):

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right)$; b) $a_n = \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$. *(2p.)*

❍ 2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^7-7(x-1)-1}{(x-1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\cdot e^x\right)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$. *(3p.)*

❍ 3. Fie şirul cu termenul general $a_n=\ln\sqrt{\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}}$.

a) Să se calculeze $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}S_n$. (ASE, Buc., 1996)

(2p.)

❍ 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+ax+3,\ x\in(-\infty,1]\\ \dfrac{3x+b}{x^2+2},\ x\in(1,+\infty)\end{cases}$. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât f să aibă limită în $x=1$ şi să existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. *(2p.)*

Testul 2

❍ 1. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n=\dfrac{4^n+\alpha^n}{5^n+3^n},\ \alpha\in\mathbb{R}$;

b) $a_n=a\cdot\sqrt{9n^2+1}+b\sqrt{4n^2+1}+n$, dacă $3a+2b+1=0$.

(3p.)

❍ 2. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x)}{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}4x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{\sin\pi x}-2^{\operatorname{tg}\pi x}}{x-1}$.

(2p.)

❍ 3. Se consideră şirul (a_n) dat prin relația: $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+2n+2,\ n\ge 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n(n+2)}}{a_{n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$. *(2p.)*

❍ 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât: $f(x)+2f(-x)=\begin{cases}x^2,\ x\le 0\\ 0,\ \ x>0\end{cases}$.

a) Să se studieze dacă f are limită în $x=0$.

b) Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to 1}(x+a)=2$ şi $\lim\limits_{x\to -1}f(x+b)=1$.

Testul 3

❍ 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos x+|x-1|\cdot e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Să se determine mulțimea punctelor $x_0\in\mathbb{R}$, în care funcția f are limită.

❍ 2. Pentru care $a, b\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-ax+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}$? *(2p.)*

❍ 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+a^3, & x\le a \\ x+1, & x>a \end{cases}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția f are limită în orice $x_0\in\mathbb{R}$.

(2p.)

❍ 4. Se consideră şirul (a_n) astfel încât $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$.

a) Să se arate că şirul (a_n) este monoton şi nemărginit superior.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6a_n}{n^3}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$.

(2p.)

Testul 4

❍ 1. Se consideră şirul (a_n), $a_n=\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$, $n\ge 1$.

a) Să se calculeze $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n\ge 1$.

b) Să se studieze convergența şirurilor (a_n) şi (b_n).

❍ 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^{ax}, & x\le 1 \\ 4^{a^2x}, & x>1 \end{cases}$.

a) Pentru care valori $a\in\mathbb{R}$, funcția f are limită în $x_0=1$?

b) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(2x-1)$ are limită în $\forall\ x_0\in\mathbb{R}$.

❍ 3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1!1+2!2+\ldots+n!n}{(2n)!+3}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x+3^x+\ldots+n^x}{n+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

❍ 4. Să se studieze dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea:

$2f(2-x)+3f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$ are limită pentru oricare $x_0\in\mathbb{R}$.

CAPITOLUL II. FUNCŢII CONTINUE

1 FUNCȚII CONTINUE ÎNTR-UN PUNCT

1.1. DEFINIREA CONTINUITĂȚII

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ dacă } x\le 0 \\ x, \text{ dacă } x\in(0,1)\cup(1,\infty) \\ 2, \text{ dacă } x=1 \end{cases}$, al cărei grafic este reprezentat în figura 1.

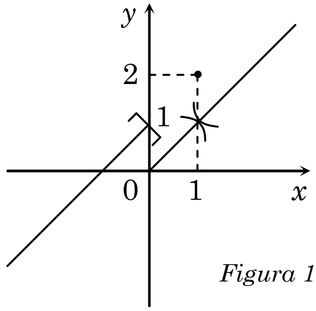


Figura 1

Lecturând graficul funcției f se observă că în punctele x = 0 şi x = 1 acesta prezintă „întreruperi" (discontinuități), iar în toate celelalte puncte $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ graficul fiind reprezentat în mod „continuu". Să studiem ce se întâmplă cu limita funcției şi cu valoarea funcției în aceste puncte.

- Pentru x = 0 avem: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$, $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ şi $f(0)=1$.
- Pentru x = 1 avem: $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$ şi $f(1)=2$.
- Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ avem $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ după cum se observă uşor considerând cazurile $x\in(-\infty,0)$, $x\in(0,1)$ şi $x\in(1,+\infty)$.

Aşadar, în punctele x_0 în care funcția f are graficul fără „întreruperi" vom avea că $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, iar în punctele în care f are graficul „întrerupt" funcția f nu are limită sau dacă are limită, aceasta nu este egală cu valoarea funcției în acest punct.

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0\in D$.

❖ **DEFINIȚII**

- Funcția f se numeşte **funcție continuă** în punctul $x_0\in D$ dacă x_0 este punct izolat al mulțimii D, sau $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ dacă x_0 este punct de acumulare al mulțimii D.
- Un punct $x_0\in D$ în care funcția f este continuă se numeşte **punct de continuitate** al funcției f.

- Mulțimea $\mathscr{C} = \{x_0 \in D \mid f \text{ este continuă în } x_0\}$ se numeşte **domeniul de continuitate** al funcției f.

➲ OBSERVAȚII

- Dacă funcția f nu este continuă în $x_0 \in D$, ea se numeşte **funcție discontinuă** în x_0, iar x_0 **punct de discontinuitate**.
- Problema continuității unei funcții f nu se pune în punctele în care funcția nu este definită şi nici la $+\infty$ şi $-\infty$.
- Condiția $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ presupune existența limitei $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ şi egalitatea ei cu $f(x_0)$.

În concluzie, o funcție este discontinuă într-un punct $x_0 \in D$ dacă nu are limită în x_0 sau dacă are limită în x_0, aceasta nu este egală cu $f(x_0)$.

Revenind la cazul funcției f studiate anterior, vom spune că ea este continuă în oricare $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ şi discontinuă în $x = 0$ şi în $x = 1$.

Legătura dintre limitele de şiruri şi continuitate este dată de următorul rezultat.

> ▣ **TEOREMA 1 (Eduard Heine)**
> Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $x_0 \in D$. Funcția f este continuă în punctul $x_0 \in D$, dacă şi numai dacă pentru oricare şir (x_n), $x_n \in D$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2 + x + 1}$ este continuă în $x_0 = 1$.

Soluție

Folosim teorema 1. Fie (x_n) un şir de numere reale, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Avem $f(x_n) = \dfrac{4 \cdot x_n^2}{2x_n^2 + x_n + 1}$ şi folosind operațiile cu şiruri convergente, se obține $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4 \cdot x_n^2}{2x_n^2 + x_n + 1} = \dfrac{4}{2+1+1} = 1$. Având $f(1) = 4$, rezultă că funcția f este continuă în $x_0 = 1$.

1.2. CONTINUITATEA LATERALĂ

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi punctul $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D.

❖ **DEFINIȚII**

- Funcția f se numeşte **continuă la stânga** în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.
- Funcția f se numeşte **continuă la dreapta** în punctul $x_0 \in D$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

➲ **OBSERVAȚII**

1. O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ poate fi continuă la stânga în $x_0 \in D$ fără a fi continuă la dreapta în x_0, şi reciproc.

☞ ***Exemplu***

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ 2x + 2, & x > 0 \end{cases}$.

Avem: $f(0-0) = \lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 1) = 1,\ f(0+0) = \lim\limits_{x \to 0}(2x + 2) = 2$ şi $f(0) = 1$. Se obține că $f(0-0) = f(0)$, deci f este continuă la stânga în $x_0 = 0$, dar $f(0+0) = 2 \ne f(0)$, deci f nu este continuă la dreapta în $x_0 = 0$.

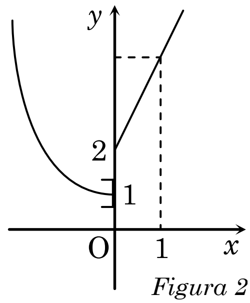


Figura 2

2. Pentru funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuitatea funcției în x = a este echivalentă cu continuitatea la dreapta, iar continuitatea funcției f în b este echivalentă cu continuitatea la stânga.

3. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare pentru D în care f are limite laterale. Funcția f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

❖ **DEFINIȚII**

- O funcție $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte **continuă pe mulțimea $A \subset D$** dacă este continuă în fiecare punct $x_0 \in A$.
- Dacă funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe mulțimea D se spune că ea este **funcție continuă**.

O clasă importantă de funcții continue o constituie clasa funcțiilor elementare deoarece s-a arătat că pentru orice punct x_0 din domeniul de definiție limita în x_0 este chiar valoarea funcției în x_0.

❑ REȚINEM!

Orice funcție elementară este funcție continuă.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$ în punctul $x_0=0$.

Soluție

Punctul $x_0=0$ este punct de acumulare pentru domeniul de definiție al funcției. Se obține: $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$, deoarece funcția cosinus este funcție elementară. Avem și $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, deci $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$. Din egalitatea $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ se obține a = 1. Așadar, funcția f este continuă în $x_0=0$ dacă și numai dacă a = 1.

☒ **2.** Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Soluție

Pentru calculul limitei de șiruri, deosebim situațiile:

- $e^x<1$, de unde $x\in(-\infty,0)$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=0$ și $f(x)=\dfrac{x^2+0}{1+0}=x^2$;
- $e^x=1$, de unde x = 0, iar $f(0)=\dfrac{0+1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$;
- $e^x>1$, de unde $x\in(0,+\infty)$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^x\right)^n=+\infty$ și $f(x)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}\left(x^2e^{-nx}+1\right)}{e^{nx}\left(e^{-nx}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{-nx}+1}{e^{-nx}+1}=1.$$

În concluzie, $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{1}{2}, & \text{dacă } x=0\\ 1, & \text{dacă } x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

Rezultă că $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0,\ f(0+0)=1$ şi $f(0)=\frac{1}{2}$, deci funcția f nu este continuă în x = 0. Deoarece pe intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,+\infty)$ funcția f este funcție polinomială, se obține că mulțimea de continuitate a funcției este $\mathscr{C}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

☒ **3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă în x = 0, astfel încât $f(2x)-f(x)=x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $f(x)=x+a,\ a\in\mathbb{R}$.

Soluție

Fie $x_0\in\mathbb{R}$ un număr real fixat. Din relația dată se obține succesiv:

$$f(2x_0)-f(x_0)=x_0$$

$$f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)=\frac{x_0}{2}$$

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f\left(\frac{x_0}{4}\right)=\frac{x_0}{4}$$

....

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)=\frac{x_0}{2^n}$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)=\frac{x_0}{2^{n+1}},$$

pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

◢ **Temă**
Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:
a) $f(3x)-f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$;
b) $f(3x)-f(2x)=x,\ x\in\mathbb{R}$.

Adunând aceste relații se obține egalitatea:

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)+x_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right),\ \forall\ n\ge 1.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_0}{2^{n+1}}=0$ şi f este continuă în x = 0, din relația anterioară, prin trecere la limită după n, se obține:

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)+x_0\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=f(0)+x_0.$$

Numărul $x_0\in\mathbb{R}$ fiind luat arbitrar rezultă că $f(x)=x+a$, unde $a=f(0)$. Se constată că această funcție verifică relația cerută.

1.3. PRELUNGIREA PRIN CONTINUITATE A UNEI FUNCȚII

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in D'$ un punct de acumulare al mulțimii D.

Dacă funcția f nu este definită în x_0, dar are limita finită în x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, se poate defini funcția $g:D\cup\{x_0\}\to\mathbb{R}$ astfel: $g(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in D\\ \ell,\ x=x_0\end{cases}$.

Funcția g este continuă în x_0 deoarece $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell = g(x_0)$.

Funcția g se numește **prelungirea prin continuitate a funcției f în punctul x_0**.

☞ ***Exemplu***

Fie $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Rezultă că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ este prelungirea prin continuitate a funcției f în x = 0.

1.4. PUNCTE DE DISCONTINUITATE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală și $x_0 \in D$. Deoarece orice funcție este continuă în punctele izolate din domeniul de definiție, rezultă că dacă $x_0 \in D$ este punct de discontinuitate al funcției f, el este punct de acumulare pentru mulțimea D. Acest fapt permite să se cerceteze existența limitelor laterale ale funcției.

❖ **DEFINIȚII**

- Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ este **punct de discontinuitate de prima speță** pentru funcția f, dacă limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 există și sunt finite.
- Un punct de discontinuitate $x_0 \in D$ al funcției f în care cel puțin una din limitele laterale ale funcției f în punctul x_0 nu este finită sau nu există se numește **punct de discontinuitate de speța a doua**.

☞ ***Exemple***

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ 3x-1, & x > 1 \end{cases}$. În punctul $x_0 = 1$ avem: $f(1-0) = 3, f(1+0) = 2$ și $f(1) = 3$, deci $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de prima speță, (figura 3).

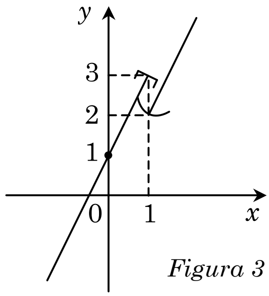


Figura 3

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

În punctul $x_0 = 0$ avem: $f(0-0) = +\infty$, $f(0+0) = +\infty$ și $f(0) = 0$. Dreapta x = 0 este asimptotă verticală

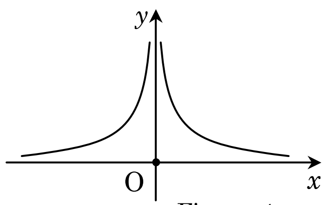


Figura 4

bilaterală, (figura 4). Rezultă că punctul $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ *(funcția lui L. Dirichlet)*. Această funcție are o discontinuitate de speța a doua în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$.

DISCONTINUITĂŢILE FUNCŢIILOR MONOTONE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală monotonă pe D şi $x_0 \in D'$ un punct de acumulare pentru D. Funcția fiind monotonă are limite laterale în punctul $x_0 \in D'$ şi au loc relațiile:

$f(x_0 - 0) \le f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) \ge f(x_0 + 0)$, după cum funcția f este crescătoare sau descrescătoare.

Mai mult, dacă $x_0 \in D$, atunci există inegalitățile: $f(x_0 - 0) \le f(x_0) \le$ $\le f(x_0 + 0)$ sau $f(x_0 - 0) \ge f(x_0) \ge f(x_0 + 0)$. Aceste inegalități conduc la următorul rezultat pentru funcțiile monotone.

▣ **TEOREMA 2**

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă pe D şi $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru funcția f. Atunci x_0 este punct de discontinuitate de prima speță.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ nu este monotonă pe nici un interval care conține originea.

<u>Soluție</u>

1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $0 \in I$. Deoarece $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există, rezultă că $x_0 = 0$ este punct de discontinuitate de a doua speță, deci f nu poate fi monotonă pe I.

2. Putem arăta că f nu este monotonă şi având în vedere că funcția se anulează de mai multe ori pe I.

Astfel, pentru $\sin \frac{1}{x} = 0$ se obține $x = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Luând $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \ge 1$, rezultă că $x_n \to 0$ şi deci în intervalul I există o infinitate de termeni ai şirului mai puțin un număr finit. Aşadar $f(x_n) = 0$, pentru o infinitate de valori ale lui x_n, deci nu poate fi monotonă pe I.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = x^2 + x,\ x_0 = 1;$

b) $f(x) = x + |x|,\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = 2x + \frac{1}{x},\ x_0 = 2;$

d) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 0.$

E2. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, în punctele specificate:

a) $f(x) = \begin{cases} x + x^2, & x \le 0 \\ x + \sin x, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \le 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{2x}, & x < 0 \\ \cos 3x, & x \ge 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}, & x > 1 \\ a, & x = 1 \\ \dfrac{\sin(4x-4)}{8x^2-8}, & x \in (0, 1) \end{cases},\ x_0 = 1;$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x-2}}}, & x \ne 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases},\ x_0 = 2;$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0.$

E3. Să se determine domeniul de continuitate pentru funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$ în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}\sin(x-1)}{3(x^2-1)}, & x > 1 \\ x^2 + 5x - 6, & x \le 1 \end{cases};$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{x + x^2}, & x > 0 \\ a, & x \le 0 \end{cases};$

d) $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1+x^2}{1+x+x^2}\right)^{1/x}, & x < 0 \\ a, & x \ge 0 \end{cases}.$

E4. Să se studieze natura punctelor de discontinuitate pentru funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 0 \\ x^2 - 3, & x > 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x^2 + 2x}, & x > 0 \\ x \ln |x|, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ x_0 = 0;$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x \le 1 \end{cases},\ x_0 = 1.$

APROFUNDARE

A1. Să se determine domeniul de continuitate pentru funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$ în cazurile:

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n} + 1};$

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 + e^{-nx}}{1 + e^{-nx}};$

c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}\sin x + e^{-nx}\cos x}{e^{nx} + e^{-nx}}.$

A2. Să se determine mulțimea punctelor de discontinuitate pentru funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$

b) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2^x+3, & x\in\mathbb{Q}\\ 4^x-9, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$;

(Colegiu, Cluj-Napoca, 1995)

e) $f(x)=x[2x],\ x\in[-1,\ 2]$.

A3. Să se determine constantele reale pentru care funcția $f:D\to\mathbb{R}$, este continuă pe D:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x<0\\ \ln(x+e), & x\geq 0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\\ a, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}e^x+x-a, & x\leq 0\\ \ln(e+a+x), & x>0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{a^2+2ax+6x^2}, & x\leq 1\\ x^2+2a, & x>1\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{a+x^2}{2}, & x\in(-\infty,\ -2)\\ x-b, & x\in[-2,\ 2]\\ \dfrac{x^2+a}{2}, & x\in(2,\ \infty)\end{cases}$.

f) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,\ 1]\\ a, & x=0\end{cases}$;

g) $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arcsin e^{-\frac{1}{x^2}}, & x<0\\ a, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x}}+b-1, & x>0\end{cases}$;

h) $f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\cos(x+a)+1, & x\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 2\cos x+\sin(a+x), & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

A4. Să se determine parametrii reali a, b, $c\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:D\to\mathbb{R}$ este continuă şi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ există:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+b^2, & x>0\\ \sin 2x, & x\leq 0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+\ln(x^2+a^2), & x\leq 0\\ b\sin 2x+2\cos x, & x>0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}ax\cdot e^x, & x\leq 0\\ b(x^2+x-2)+c, & x>0\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\ln^3(x+e), & x\in[-1,\ 0]\\ a(x+e)+b, & x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$.

A5. Să se determine $a,\ b\in\mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$ sunt continue:

a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^2\cdot e^{n^{\ln x}}+8x}{2+x\cdot e^{n^{\ln x}}}$;

b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a|x-1|\cdot e^{nx}+b(x+1)^2e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$.

A6. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{nx}\cdot\ln(x^2+1)+a}{1+e^{nx}}$.

Ştiind că f este continuă, să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

A7. Să se determine constantele reale pentru care funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$ sunt continue, în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+4^{ax}, & x\leq 1\\ 6x^2-ax+a, & x>1\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+3^{bx}, & x\in(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty)\\ 8x-3, & x\in(1,\ 2)\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}2\log_2(x^2+|a|), & x\geq 1\\ 2\log_4(x^2+a^2)^2, & x<1\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}2^{bx}+x, & x\leq 2a-1\\ 6x-3^{bx}, & x\geq a^2\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}3x^2+5x, & x<a-1\\ b, & x\in[a-1,\ a^2].\\ 4x-8, & x>a^2\end{cases}$

A8. **Să se determine funcțiile continue $f: D \to \mathbb{R}$, în cazurile:**

a) $f(2x) = f(3x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $f(3x) - f(2x) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $f(2x+1) - f(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = f(x^2),\ \forall\ x \in D = (0, \infty)$;

e) $f(2^x) = f(3^x),\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ D = [0, \infty)$.

A9. **Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.**

a) Să se arate că dacă f este continuă în $x_0 = 0$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.
b) Să se determine funcțiile continue f care verifică relația dată.

A10. **Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcții continue, astfel încât $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că f = g.**

A11. **Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in \mathbb{Q}$. Să se arate că dacă f este continuă, iar funcția g este monotonă, atunci f = g. (Olimpiadă județeană, 1978)**

A12. **Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2^{ax} \cdot 3^{bx}, & x < 1 \\ 12, & x = 1; \\ 3^{ax-1} \cdot 2^{1+bx}, & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2+3} + x\sqrt{1+b^2}, & x < 1 \\ ax + b\sqrt{2x^2+1}, & x > 1. \\ 4, & x = 1 \end{cases}$

A13. **Să se arate că următoarele funcții nu sunt monotone pe nici un interval $I \subset \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

A14. **Pot fi prelungite prin continuitate funcțiile $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$, $f(x) = x^2 \cdot \left[\frac{1}{x^2}\right]$?**

❷ OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

2.1. SUMA, PRODUSUL, CÂTUL ȘI PUTERI DE FUNCȚII CONTINUE

Operațiile cu limite de funcții permit stabilirea continuității funcțiilor obținute prin operații cu funcții continue.

▣ TEOREMA 3

Dacă funcțiile f, g : $D \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue în punctul $x_0 \in D$, atunci:

a) funcția $h = \alpha f + \beta g$ este continuă în x_0, pentru oricare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) funcția $f \cdot g$ este continuă în x_0;

c) funcția $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0, dacă $g(x_0) \neq 0$;

d) dacă $(f(x))^{g(x)}$ are sens, $\forall\ x \in D$, funcția f^g este continuă în x_0.

<u>*Demonstrație*</u>

a) Dacă x_0 este punct de acumulare pentru D avem, folosind operațiile cu limite de funcții:

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim_{x\to x_0}f(x)+\beta\lim_{x\to x_0}g(x)=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)=h(x_0),$$

deci h este continuă în x_0.

Dacă x_0 este punct izolat pentru D, atunci h este automat funcție continuă.

b), **c)**, **d)** Temă. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcțiile f și g sunt continue pe D, atunci și funcțiile $\alpha f+\beta g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, f^g sunt continue pe mulțimea D, cu condiția ca ele să fie definite pe D.

2. Pentru $\alpha=\beta=1$ se obține că $f+g$ este continuă, iar pentru $\alpha=1$, $\beta=-1$ se obține că $f-g$ este continuă.

3. Proprietățile a), b) se pot extinde ușor pentru n funcții. Dacă funcțiile $f_i:D\to\mathbb{R}$, $i=1, 2, \dots, n$ sunt continue, atunci și funcțiile $\alpha_1f_1+\alpha_2f_2+$ $+\dots+\alpha_nf_n$ și $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ sunt continue.

4. Dacă funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0\in D$, atunci nu se poate afirma nimic referitor la funcțiile $f+g$, fg și $\frac{f}{g}$.

☞ <u>***Exemple***</u>

a) Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-2, & x\le 0\\ 3, & x>0\end{cases}$.

Funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0=0$, iar $(f+g)(x)=\begin{cases}-3, & x\le 0\\ 4, & x>0\end{cases}$,

$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}2, & x\le 0\\ 3, & x>0\end{cases}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\le 0\\ \frac{1}{3}, & x>0\end{cases}$ sunt discontinue în $x_0=0$.

b) Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ -1, & x>0\end{cases}$. În acest caz, funcțiile f și g sunt discontinue în $x_0=0$, iar $(f+g)(x)=0$, $(f\cdot g)(x)=-1$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x\in\mathbb{R}$, deci funcțiile $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ sunt continue în $x_0=0$.

5. Dacă o funcție este continuă, iar cealaltă este discontinuă în $x_0\in D$, atunci funcția $f+g$ este discontinuă în x_0.

2.2. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR COMPUSE

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ şi $u : A \to D$ funcții reale de variabilă reală şi funcția compusă $h : A \to \mathbb{R}$, $h = f \circ u$.

▣ TEOREMA 4

Dacă funcția $u : A \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in A$ şi funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $u(x_0) = u_0$, atunci funcția $h = f \circ u$ este continuă în punctul $x_0 \in A$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \in D \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x_0 \in A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "h = f \circ u"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstrație

Fie (x_n), $x_n \in A$ un şir arbitrar cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Deoarece funcția u este continuă în $x_0 \in A$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) = u(x_0) = u_0 \in D$.

Notăm $u_n = u(x_n)$, $n \geq 1$. Rezultă că $u_n \in D$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u(x_n) =$ $= u(x_0) = u_0$. Din continuitatea funcției f se obține: $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) =$ $= f(u_0) = (f \circ u)(x_0)$.

Aşadar, pentru oricare şir (x_n), $x_n \in A$ convergent la $x_0 \in A$, rezultă egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} f(u(x_n)) = f(u(x_0))$, deci funcția $f \circ u$ este continuă în $x_0 \in A$. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcția f este continuă pe D, iar funcția u este continuă pe A, atunci funcția $f \circ u$ este continuă pe mulțimea A.
2. Dacă funcția f sau u este discontinuă în u_0, sau respectiv în x_0, nu rezultă în mod necesar că funcția compusă $f \circ u$ este discontinuă în x_0.

☞ ***Exemplu***

Fie $f, u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ şi $u(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x-1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Se observă că funcțiile f şi u sunt discontinue în $x_0 = 0$.

Funcția compusă $h = f \circ u$ este $h(x) = x$ şi este continuă în $x_0 = 0$.

3. Dacă funcția u este discontinuă în x_0, iar funcția f este continuă în $u_0 = u(x_0)$, nu se poate preciza nimic referitor la continuitatea funcției compuse $f \circ u$.

☞ ***Exemple***

a) Fie $f, u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şi $u(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x-1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Funcția u este discontinuă în $x_0 = 0$, iar f este continuă în $u_0 = u(0) = 0$. Funcția compusă $h = f \circ u$ este $h(x) = u(x)$ şi este discontinuă în $x_0 = 0$.

b) Fie $f, u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ şi $u(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

În x = 0 funcția u este discontinuă, iar în $u_0 = u(0) = -1$ funcția f este continuă. Pentru funcția compusă $h = f \circ u$ avem $h(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ şi este continuă în $x = 0$.

Aşadar, prin compunerea a două funcții, cel puțin una fiind discontinuă, nu se poate preciza nimic despre continuitatea funcției compuse.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze continuitatea funcțiilor f, g, f + g, f · g şi $\frac{f}{g}$ în cazurile:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 1 \\ 3x-2, & x > 1 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+x, & x \le 1 \\ \sqrt{x+3}, & x > 1 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ 1-\cos x, & x > 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x^2-1, & x > 0 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$.

E2. Să se studieze continuitatea funcțiilor f, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ g$ şi $g \circ f$, în cazurile:

a) $f(x) = 2x-1$, $g(x) = 3x-2$;

b) $f(x) = 2x-1$, $g(x) = \begin{cases} 3x, & x \le 1 \\ 6x-3, & x > 1 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$, $g(x) = |x|$;

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. **Fie f, g : D → $\mathbb{R}$, funcții continue. Să se arate că funcțiile $h_1, h_2 : D \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ sunt continue.**

A2. **Se consideră funcția f : D → $\mathbb{R}$ şi funcțiile $f_+, f_- : D \to \mathbb{R}$, definite astfel: $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ şi $f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$ (*funcțiile parte pozitivă* şi *parte negativă* ale funcției f).**

Să se arate că funcția f este continuă dacă și numai dacă funcțiile f_+ și f_- sunt continue.

A3. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$, astfel încât $g(x_0) \neq 0$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției: Dacă $f + g$, $f \cdot g$ și $\frac{f}{g}$ sunt continue în x_0, atunci funcțiile f și g sunt continue în x_0.

A4. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ g(x), & x \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Să se determine funcția polinomială g pentru care funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

A5. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date de relațiile:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x\sqrt{2}, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$ Să se studieze continuitatea funcțiilor $f, g, f \circ g, g \circ f$.

A6. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ și se definesc funcțiile:

$g(x) = \min\{f(t) \mid t \leq x\}$ și

$h(t) = \min\{f(t) \mid x - 1 \leq t \leq x\}$.

Să se studieze continuitatea funcțiilor g și h.

A7. Să se determine constantele $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f + g$ să fie continuă, dacă:

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leq b \\ x - a, & x > b \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x \leq a \\ x - b, & x > a \end{cases}.$$

A8. Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că are loc relația:

$$2f(x) + 3f(1 - x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

DEZVOLTARE

D1. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție monotonă pe D, astfel încât $\mathrm{Im}(f)$ este interval. Să se arate că f este continuă.

D2. Să se arate că funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă în cazurile:

a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

c) $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in [0, 1] \\ x^2 - 4, & x \in [2, 3] \end{cases}.$$

D3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție injectivă și continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Să se arate că f este strict monotonă pe I.

D4. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue cu proprietatea:

$(f \circ f \circ f)(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

D5. Să se arate că nu există funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă cu proprietatea:

$(f \circ f)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$.

D6. Fie $f : I \to J$, $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Să se arate că dacă f este bijectivă și continuă, atunci funcția f^{-1} este continuă.

❸ PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE PE INTERVALE

Clasa funcțiilor continue are câteva proprietăți remarcabile care își găsesc numeroase aplicații în teoria ecuațiilor.

3.1. EXISTENȚA SOLUȚIILOR UNEI ECUAȚII

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I și $a, b \in I$. Să lecturăm graficul funcției f din figura 1.

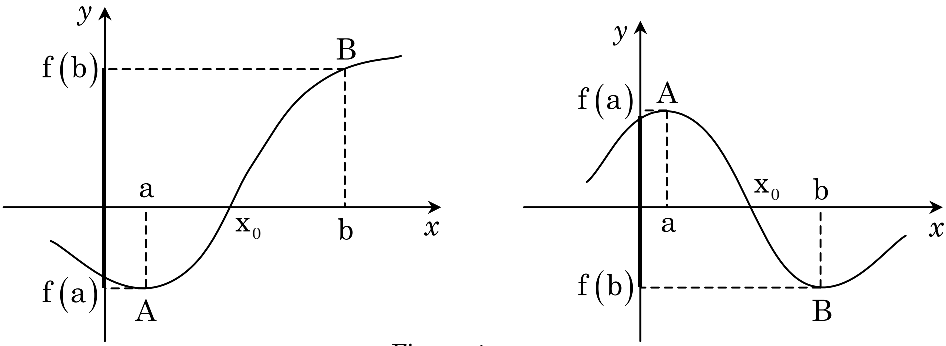


Figura 1

Se observă că valorile funcției în punctele a și b au semne contrare sau altfel exprimat, punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ sunt separate de axa Ox. Intuitiv, din lectura graficului funcției f se desprinde ideea că graficul funcției f intersectează axa Ox în cel puțin un punct x_0. Altfel spus, ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție $x_0 \in (a, b)$. Problema care se pune este dacă această proprietate se menține pentru oricare funcție continuă.

Răspunsul este dat de următorul rezultat:

> ▣ **TEOREMA 5 (Cauchy-Bolzano)**
> Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I și $a, b \in I$, $a < b$. Dacă valorile $f(a)$ și $f(b)$ ale funcției f au semne contrare, $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

Din teorema Cauchy-Bolzano rezultă că dacă o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ are valori de semne contrare în punctele $a, b \in I$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b). Acest rezultat permite să arătăm că anumite ecuații au cel puțin o soluție într-un interval dat.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se arate că ecuația $x^2+2\ln x=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $I=\left[e^{-1},1\right]$.

Soluție

Considerăm funcția $f:I\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2\ln x$, care este continuă pe I.

Avem: $f(1)=1$ și $f\left(e^{-1}\right)=\dfrac{1}{e^2}-2<0$, deci $f(1)\cdot f\left(e^{-1}\right)<0$. Atunci există $c\in I$ astfel încât $f(c)=0$, deci ecuația are cel puțin o soluție în I.

Mai mult, deoarece funcția f est strict monotonă pe I, ca sumă de funcții strict monotone pe I, rezultă că ecuația are soluție unică.

> ◢ **Temă**
> **Să se arate că ecuațiile au soluții în intervalul dat:**
> **a)** $\mathbf{x+\sin x=-1,\ I=\left[-\pi,0\right]}$;
> **b)** $\mathbf{x^2=e^x,\ I=\left[0,1\right]}$.

☒ **2.** Să se arate că ecuația $x^n+nx=1,\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, are o soluție pozitivă x_n. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Soluție

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n+nx-1$ este funcție polinomială, deci este continuă. Pentru $x\ge1$ se obține $f(x)>0$. Rezultă că ecuația $f(x)=0$ poate avea soluții pozitive numai în intervalul $[0,1]$.

Avem: $f(0)=-1$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^n}$. Așadar, există $x_n\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $n\ge2$, cu proprietatea că $f(x_n)=0$. Funcția f fiind strict monotonă pe $(0,1)$, soluția x_n este unică. Din criteriul cleștelui se obține $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

3.2. STABILIREA SEMNULUI UNEI FUNCȚII

Lecturând figura 1 observăm că pe intervalul (a,x_0) funcția f nu se anulează, iar graficul funcției f este situat sub axa Ox, deci f are numai valori negative, respectiv deasupra axei Ox, deci f are numai valori pozitive.

Mai general se obține: dacă funcția $f:I\to\mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I și $f(x)\neq0,\ \forall\ x\in I$, atunci funcția f are același semn pe întreg intervalul I.

▣ TEOREMA 6

Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este continuă pe intervalul I şi $f(x) \neq 0,\ \forall\ x \in I$, atunci f are acelaşi semn pe intervalul I.

Într-adevăr, dacă f nu ar avea semn constant pe I, atunci ar exista $a,\ b \in I$, astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dar în acest caz, din teorema 5 ar exista $c \in (a,\ b)$, astfel încât $f(c) = 0$, în contradicție cu ipoteza. ■

Acest rezultat permite ca pentru o funcție continuă să se poată stabili semnul pe un interval pe care ea nu se anulează, cunoscând doar semnul unei valori a funcției într-un singur punct din interval.

Problemă rezolvată

☒ Să se stabilească semnul următoarelor funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se rezolve inecuațiile $f(x) \leq 0$ în cazurile:

a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$; **b)** $f(x) = (x-2)(x-1+2^x)$.

Soluție

a) Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ sunt $x \in \{-3,\ 3,\ -1,\ 1\}$. Deoarece f este funcție continuă pe $\mathbb{R}$ şi nu se mai anulează pe intervalele $(-\infty, -3), (-3,\ -1), (-1,\ 1), (1,\ 3), (3,\ +\infty)$, ea are semn constant pe fiecare din aceste intervale. Având $f(-4) = f(4) = 105$, $f(0) = 9$, $f(-2) = f(2) = -15$, se poate alcătui tabelul de semn al funcției.

> ◢ **Temă**
> **Rezolvați inecuațiile:**
> **a)** $x^4 - 8x \leq 0$;
> **b)** $(2^x - 1)(3^x - 3) \geq 0$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+ + + + + + + +	0	– – – – –	0	+ + + + +	0	– – – – – –	0	+ + + + +	

Soluția inecuației $f(x) \leq 0$ este $x \in [-3,\ -1] \cup [1,\ 3]$.

b) Din $f(x) = 0$ rezultă x = 2 şi $x + 2^x = 1$ cu soluția unică x = 0. Funcția f fiind continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că ea are semn constant pe intervalele $(-\infty,\ 0), (0,\ 2)$ şi $(2,\ +\infty)$. Deoarece $f(-1) = 4{,}5$, $f(1) = -2$ şi $f(3) = 10$, se obține tabelul de semn:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		+ + + + + + + +	0	– – – – –	0	+ + + + + + + + +	

Soluția inecuației $f(x) \leq 0$ este $x \in [0,\ 2]$.

3.3. PROPRIETATEA LUI DARBOUX

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, iar $a, b \in I$, $a < b$. Să lecturăm graficul acesteia pe intervalul I, (figura 2).

Se observă că dacă alegem un număr $\lambda \in (f(a), f(b))$, atunci se poate găsi o valoare $c(\lambda) \in (a, b)$ cu proprietatea ca $f(c(\lambda)) = \lambda$.

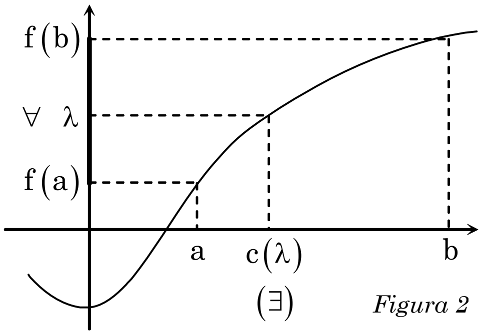


Figura 2

Un asemenea rezultat este specific unei anumite clase de funcții.

❖ DEFINIȚIE

• Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție şi $I \subset D$ un interval. Funcția **f are proprietatea lui Darboux** pe intervalul I dacă oricare ar fi punctele $a, b \in I$, $a < b$ şi oricare ar fi λ cuprins între valorile $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct $c(\lambda) \in (a, b)$ astfel încât $f(c(\lambda)) = \lambda$.

Aşadar, o funcție f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă nu poate trece de la o valoare y_1 la o valoare y_2, fără a lua toate valorile cuprinse între y_1 şi y_2.

Lecturarea graficului funcției continue din figura 2 sugerează faptul că aceasta are proprietatea lui Darboux.

Mai general, avem următorul rezultat:

▣ TEOREMA 7 (Cauchy-Weierstrass-Bolzano)
Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă şi $I \subset D$ un interval. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe intervalul I.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie $a, b \in I$, $a < b$ şi $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$ valorile funcției f în punctele a şi b. Vom presupune $y_1 < y_2$. Pentru $\lambda \in (y_1, y_2)$ considerăm funcția $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda$. Funcția g este continuă şi $g(a) = f(a) - \lambda = y_1 - \lambda > 0$, $g(b) = f(b) - \lambda = y_2 - \lambda < 0$. Din teorema 5 rezultă că există $c \in (a, b)$, astfel încât $g(c) = 0$. Din egalitatea $g(c) = 0$ se obține că $f(c) = \lambda$ şi teorema este demonstrată. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ nu este funcție constantă şi are proprietatea lui Darboux, atunci $\operatorname{Im}(f)$ este o mulțime infinită deoarece odată cu valorile y_1, y_2 conține tot intervalul (y_1, y_2).
   Aşadar, dacă funcția neconstantă $f : I \to \mathbb{R}$ are un număr finit de valori, atunci ea nu are proprietatea lui Darboux pe I.
2. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$, atunci mulțimea $\operatorname{Im}(f)$ este un interval.
3. Dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I, atunci ea nu poate avea decât discontinuități de a doua speță.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, ştiind că:
$f^2(x) = 3 \cdot f(x),\ x \in \mathbb{R}.$

<u>*Soluție*</u>

Din relația dată se obține: $f(x)(f(x)-3) = 0,\ x \in \mathbb{R},$ şi $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 3, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}.$

Deoarece f este funcție continuă, atunci $\operatorname{Im}(f)$ trebuie să fie interval. Dacă $\operatorname{Im}(f) = \{0, 3\}$ rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Rămân doar situațiile: $\operatorname{Im}(f) = \{0\}$ când $A = \mathbb{R}$ şi $\operatorname{Im}(f) = \{3\}$ când $A = \varnothing$. Aşadar, $f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$ sau $f(x) = 3,\ x \in \mathbb{R}$ sunt singurele funcții care verifică condiția cerută.

☒ **2.** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există $c \in [a, b]$, astfel încât $f(c) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

<u>*Soluție*</u>

Dacă $f(a) = f(b)$, avem $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} = f(a)$ şi se poate lua c = a. Să presupunem că $f(a) < f(b)$. Atunci $f(a) < \dfrac{f(a)+f(b)}{2} < f(b)$. Deoarece f este continuă, ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, deci $\lambda = \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ este valoare a funcției f. Aşadar, există $c \in [a, b]$, astfel încât $f(c) = \lambda$.

☒ **3.** Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

<u>*Soluție*</u>

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, n impar, funcție polinomială de gradul n.

Avem: $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a_0\cdot(-\infty)$ şi $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a_0\cdot(+\infty)$.

Se observă că $\alpha\cdot\beta<0$, deci funcția f are valori de semne contrare. Aşadar, există $x_0\in(-\infty,+\infty)$, astfel încât $f(x_0)=0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că următoarele ecuații au cel puțin o soluție în intervalul dat:

a) $x+1+\sin x=0,\ I=\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$;

b) $x^3+5x^2+4x-9=0,\ I=[0,\ 1]$;

c) $(x^2-8)\cdot2^x=1,\ I=[2,\ 3]$;

d) $\operatorname{arctg}x=\ln x,\ I=(0,\ +\infty)$;

e) $x+\ln x=0,\ I=[0,\ 1]$.

E2. Să se stabilească semnul funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=x^3-3x+2$;

b) $f(x)=(x-1)\cdot(2^x-4)$;

c) $f(x)=(x-1)\cdot\ln(x+1)$;

d) $f(x)=(1-\ln x)\cdot(2^x-8)$;

e) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-16x}$;

f) $f(x)=\ln^2x-2\ln x$.

E3. Să se rezolve inecuațiile:

a) $x^3-4x\ge0$; **b)** $(x-1)(\ln x-1)\le0$;

c) $(x^2-1)\cdot(e^x-1)\ge0$; **d)** $\dfrac{2^x-4}{\ln x-1}\le0$;

e) $\dfrac{3^x-9}{2^x-9}\ge1$; **f)** $\dfrac{\ln x-1}{3-\ln x}<1$.

E4. Să se arate că funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu au proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$;

b) $f(x)=\begin{cases}-2, & x\in(-\infty,\ 0]\\ x^2+1, & x\in(0,\ +\infty)\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le1\\ 3x-1, & x>1\end{cases}$;

d) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\ne0\\ 2, & x=0\end{cases}$;

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\ne0\\ a, & x=0\end{cases}$.

APROFUNDARE

A1. Să se stabilească semnul funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=4\sin^2x-1,\ D=[0,\ 2\pi]$;

b) $f(x)=x+\ln(x+1),\ D=[0,\ e-1]$;

c) $f(x)=\sin x-\cos2x,\ D=[-\pi,\ \pi]$;

d) $f(x)=\sin x+\ln(x+1),\ D=\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$;

e) $f(x)=\sin x\cdot(\sin(\ln x)),\ D=[1,\ e^2]$;

f) $f(x)=\sin(\ln x),\ D=(0,\ +\infty)$.

A2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in\mathbb{Q}\\ 2^x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

A3. Să se arate că ecuația $x^3+2x-1=0$ nu are toate soluțiile reale numere întregi.

A4. **Folosind monotonia funcțiilor și proprietatea lui Darboux, să se arate că funcțiile sunt bijective:**

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2^x$;

b) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\log_2 x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x+\sqrt[3]{x}$.

A5. **Fie $f:[a,b]\to[a,b]$ o funcție continuă. Să se arate că există un punct $x_0\in[a,b]$, astfel încât $f(x_0)=x_0$. (x_0 se numește punct fix.)**
(Academia Tehnică Militară, 1991)

A6. **Fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $f(0)=f(2\pi)$. Să se arate că există $x_0\in(0,\pi)$, astfel încât $f(x_0)=f(x_0+\pi)$.**

A7. **Se consideră funcțiile $f,g:[a,b]\to[a,b]$ continue, astfel încât $g(a)=a$, $g(b)=b$. Să se arate că ecuația $f(x)-g(x)=0$ are cel puțin o soluție.**

A8. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și mărginită. Să se arate că ecuația $f(x)=x$ are cel puțin o soluție reală.**

A9. **Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât:**

$$f(x)=f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

(Olimpiadă locală, 1993)

A10. **Se consideră $x_0\in\mathbb{R}$ și șirul (x_n) dat de relația de recurență $x_{n+1}^3=x_n^2+2x_n+12,\ n\geq 1$.**

a) Să se arate că șirul este convergent.

b) Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, astfel încât:

$$f(x)=f\left(\sqrt[3]{x^2+2x+12}\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

(Olimpiadă locală, 1995)

A11. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $\sin f(x)=1,\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f este funcție constantă. (Învățământ tehnic, 1985)**

A12. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât ecuația $f(x)=x+4$ nu are soluții reale. Să se arate că f este nemărginită.**

A13. **Un rezervor este umplut la o sursă cu debit variabil între orele 8 și 12. Același rezervor este golit prin scurgere a doua zi tot între orele 8 și 12. Să se arate că există o oră h în ambele zile la care apa este la același nivel. (Olimpiadă județeană, 1975)**

DEZVOLTARE

D1. **Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $m=\inf f([a,b])$, $M=\sup f([a,b])$. Să se arate că funcția f este mărginită și există $x_0, x_1\in[a,b]$ cu proprietatea că $f(x_0)=m$ și $f(x_1)=M$.**
(Teorema lui Weierstrass)

D2. **Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$. Să se arate că $f(I)$ este interval închis și mărginit.**

D3. **Să se arate că dacă $f:[a,b]\to(a,b)$ este funcție surjectivă, atunci f este funcție discontinuă.**

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ 1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\le 1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$; b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+2^{nx}}{x^2+1+2^{nx}}$. *(3p.)*

❍ 2. Să se stabilească semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(3^x-27\right)\cdot\left(2-\sqrt[3]{x}\right)$. *(3p.)*

❍ 3. Să se prelungească prin continuitate funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x<0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{ax}, & x>0\end{cases}$. *(3p.)*

Testul 2

❍ 1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{x}, & x>0\\ a, & x=0\end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5ax}{9x}, & x\in[-1, 0)\\ b, & x=0\\ \dfrac{\sin(3\arcsin x)}{\sin(9\arcsin x)}, & x\in(0, 1]\end{cases}$. *(3p.)*

❍ 2. Fie $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f\left(x^2\right)-f(x)=x^2-x$, $x\in(0,+\infty)$. Să se determine f. (Olimpiadă locală, 1992) *(3p.)*

❍ 3. Să se stabilească semnul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(3^x-2^x\right)\cdot\left(5^x-4^x-3^x\right)$. *(3p.)*

Testul 3

❍ 1. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x\cdot\left[2^x\right]$, $x\in[1, 3]$;

b) $f(x)=\begin{cases}ax+b, & |x|<1\\ \arcsin\dfrac{1}{x}-\arccos\dfrac{1}{x}, & |x|\ge 1\end{cases}$. *(3p.)*

❍ 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $(f\circ f)(x)=-x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f este discontinuă. *(3p.)*

❍ 3. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $a\le f(a)$ și $f(b)\le b$. Să se arate că f admite cel puțin un punct fix. *(3p.)*

CAPITOLUL III. FUNCŢII DERIVABILE

Noţiunea de derivată a fost introdusă şi folosită în matematică de savantul Isaac Newton (1642-1724) în legătură cu studiul legilor mecanicii şi aproape în acelaşi timp, de savantul Gottfried Leibniz (1646-1716) în legătură cu studiul tangentei la o curbă într-un punct al acesteia.

1 DERIVATA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

1.1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE DERIVATĂ

PROBLEMA TANGENTEI LA O CURBĂ (GOTTFRIED LEIBNIZ)

Să considerăm funcția $f:(a, b) \to \mathbb{R}$, o funcție continuă şi punctul fix $M_0(x_0, f(x_0))$ pe imaginea geometrică $\mathscr{G}_f$ a graficului funcției. Se pune problema determinării tangentei în punctul M_0 la curba $\mathscr{G}_f$, determinare care impune găsirea pantei (coeficientului unghiular) acestei drepte.

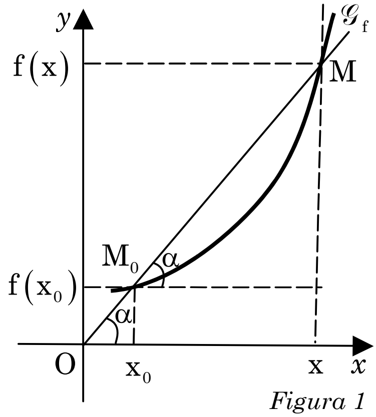


Figura 1

Vom gândi tangenta M_0T ca fiind o „poziție limită" a unei secante M_0M atunci când punctul $M(x, f(x))$ se apropie oricât de mult de punctul M_0, rămânând permanent pe curba $\mathscr{G}_f$. În acest mod, panta secantei M_0M tinde să aproximeze panta tangentei la curbă în punctul M_0, (figura 1).

Se ştie că panta secantei M_0M reprezintă tangenta trigonometrică a unghiului α format de aceasta cu sensul pozitiv al axei Ox. Ca urmare, are loc egalitatea:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Presupunând că există limita $m = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1), aceasta este prin definiție **panta** sau **coeficientul unghiular** al tangentei în punctul

M_0 la curba $\mathcal{G}_f$. Astfel, tangenta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ este bine determinată de ecuația: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$.

Dacă $m = \pm\infty$, atunci tangenta în punctul M_0 este o dreaptă cu aceeaşi direcție cu axa Oy.

Pentru limita (1) se va adopta notația $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ şi se va numi **derivata funcției f în punctul x_0**.

PROBLEMA VITEZEI INSTANTANEE A UNUI MOBIL (ISAAC NEWTON)

Să considerăm un mobil ce se deplasează neuniform pe o traiectorie rectilinie după o lege de mişcare $s = s(t)$, care caracterizează spațiul parcurs de mobil ca funcție de timp. În aceste condiții se pune problema determinării vitezei medii într-un moment fixat t_0.

Pentru aceasta se consideră intervale de timp $[t_0, t]$ din ce în ce mai mici pe care mişcarea mobilului tinde să devină uniformă. În acest fel, viteza medie a mobilului în intervalul de timp $[t_0, t]$ va fi $v_m = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$.

Se obține astfel definiția **vitezei instantanee** a mobilului la momentul t_0 (fixat), $t_0 > 0$ ca fiind limita vitezei medii când $t \to t_0$:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \quad (2).$$

Din punct de vedere matematic, această limită, dacă există, se va numi derivata în punctul t_0 a funcției spațiu „s“, notată $s'(t_0)$.

Viteza instantanee la momentul t_0 va reprezenta derivata „spațiului“ în punctul t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.

În mod asemănător, dacă $v(t)$ este viteza unui mobil la momentul oarecare t, atunci **accelerația** mobilului la momentul t_0 fixat va fi:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}, \quad (3).$$

în ipoteza că această limită există.

1.2. DEFINIȚIA DERIVATEI UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare al mulțimii D.

❖ DEFINIȚII

• Se spune că **funcția f are derivată în punctul $x_0 \in D$** dacă există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ în $\overline{\mathbb{R}}$.

Această limită se numeşte **derivata funcției f în punctul x_0** şi se notează $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

• Se spune că funcția **f este derivabilă în punctul $x_0 \in D$** dacă limita $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există şi este finită.

➲ OBSERVAȚII

1. Derivabilitatea unei funcții este o proprietate locală, deoarece în studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin numai valorile funcției într-o vecinătate a punctului.

2. Funcția f nu este derivabilă în punctul x_0 dacă $f'(x_0)$ nu există sau există şi este infinită.

3. Utilizând schimbarea de variabilă $h = x - x_0$, atunci derivata funcției f în punctul x_0 se determină cu formula: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

❖ DEFINIȚII

• Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $A \subset D$.

Funcția **f este derivabilă pe mulțimea A** dacă este derivabilă în fiecare punct al mulțimii.

• Mulțimea $D_{f'} = \{x \in D \mid \exists\, f'(x) \text{ şi } f'(x) \in \mathbb{R}\}$ se numeşte **domeniul de derivabilitate** al funcției f.

• Funcția $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui $x \in D_{f'}$ numărul real $f'(x)$ se numeşte **funcția derivată** a funcției f sau **derivata funcției f**.

Dacă funcția f este derivabilă pe mulțimea D, folosind observația (3), atunci legea de corespondență a funcției f' se scrie sub forma:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \ \forall\, x \in D. \qquad (1)$$

Operația prin care f' se obține din funcția f se numeşte **operația de derivare a lui f**.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se arate că următoarele funcții au derivată în punctele specificate şi sunt derivabile în aceste puncte:

a) $f(x)=x^2+2,\ x_0=3;$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+4},\ x_0=-2.$

<u>*Soluție*</u>

În fiecare caz se arată că există $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}.$

a) Avem: $f'(3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x^2+2)-11}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6\in\mathbb{R}.$

Funcția f are derivată în $x_0=3,\ f'(3)=6$ şi este derivabilă în $x_0=3.$

b) $f'(-2)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\dfrac{x+1}{x+4}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3}{2(x+4)}=\dfrac{3}{4}\in\mathbb{R}.$

Aşadar, f are derivată finită în $x_0=-2,$ deci este derivabilă în $x_0=-2.$

☒ **2.** Să se studieze dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x+5}$ are derivată în punctul $x_0=-5$ şi să se precizeze dacă este derivabilă în acest punct.

<u>*Soluție*</u>

Calculăm $f'(-5)=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{f(x)-f(-5)}{x+5}=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}}{x+5}=\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}=+\infty.$

În concluzie, $f'(-5)=+\infty$ şi, ca urmare, f are derivată în $x_0=-5,$ dar nu este derivabilă în acest punct.

☒ **3.** Să se determine derivata f' a funcției:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+3.$

<u>*Soluție*</u>

Se va folosi formula $(1):\ f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}.$

Avem succesiv $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-4(x+h)+3-(x^2-4x+3)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h(h+2x-4)}{h}=2x-4.$

Aşadar, $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f'(x)=2x-4.$

1.3. DERIVABILITATE ȘI CONTINUITATE

Proprietățile de derivabilitate şi continuitate ale unei funcții numerice au fost definite ca proprietăți locale. Legătura dintre acestea este dată de următorul rezultat.

> ▣ **TEOREMA 1 (continuitatea funcțiilor derivabile)**
> Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

<u>*Demonstrație*</u>

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ un punct în care f este derivabilă. Pentru a demonstra că f este continuă în punctul x_0 este suficient să arătăm că $\lim\limits_{x \to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0.$ În acest sens avem succesiv:

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)=\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x \to x_0}(x-x_0)=$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Rezultă că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0),$ deci funcția f este continuă în punctul x_0. ■

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

1. Reciproca teoremei 1 este în general o propoziție falsă. Altfel spus, o funcție numerică poate fi continuă într-un punct fără a fi şi derivabilă în acel punct.

☞ <u>***Exemplu***</u>

• Funcția modul $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=|x|$ este continuă în $x_0=0$ deoarece $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\lim\limits_{x \to 0}|x|=0=f(0).$

Pentru derivabilitate să studiem existența şi valoarea limitei raportului $R(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$ în $x_0=0.$

Avem: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} R(x)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}}(-1)=-1,$ iar $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} R(x)=\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1=1.$

Aşadar, nu există $\lim\limits_{x \to 0} R(x)$ şi, ca urmare, funcția modul nu este derivabilă în punctul $x_0=0.$

În concluzie, continuitatea este doar condiție necesară pentru derivabilitate, dar nu şi suficientă.

2. Contrara reciprocei teoremei 1 este propoziție adevărată (principiul contrapoziției: $(p \to q) \equiv (\urcorner q \to \urcorner p)$:

Orice funcție discontinuă într-un punct nu este derivabilă în acest punct.

Atenție!

Există funcții discontinue într-un punct şi care au derivată în acel punct.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ este discontinuă în $x_0=0$.

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\frac{\pi}{2},\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\frac{\pi}{2},\ f(0)=0\right)$, iar $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=+\infty$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine numerele reale a şi b, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+(a-2)x+3-b, & x\leq 0\\ e^{3x}, & x>0\end{cases}$ să fie derivabilă în $x_0=0$.

Soluție

Deoarece proprietatea de continuitate a unei funcții într-un punct este condiție necesară pentru derivabilitatea în acel punct, impunem condiția ca funcția f să fie continuă în $x_0=0$.

Din egalitățile $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ se obține $b=2$.

Din derivabilitatea funcției f în $x_0=0$ rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ există şi este finită.

Se obține că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2+(a-2)x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{3x}-1}{x}$, echivalent cu $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x+a-2)=$ $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3$, care conduce la egalitatea $a-2=3$, de unde $a=5$.

În concluzie, pentru $a=5$ şi $b=2$ funcția f este derivabilă în $x_0=0$.

❷ DERIVATE LATERALE

S-a observat că pentru funcția „modul“ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$ limita raportului $R(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ în punctul $x_0=0$ nu există, în schimb există limitele laterale ale acestui raport în punctul $x_0=0$. Aceste limite laterale vor fi denumite **derivatele laterale** ale funcției f în punctul $x_0=0$.

DERIVATA LA STÂNGA

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, astfel încât $D \cap (-\infty, x_0) \neq \emptyset$.

❖ DEFINIȚII

• Funcția f are **derivată la stânga în punctul x_0** dacă limita

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ există în } \overline{\mathbb{R}}.$$

Această limită se numeşte **derivata la stânga** a funcției f în punctul x_0 şi se notează $f_s'(x_0)$.

• Funcția **f este derivabilă la stânga** în punctul x_0 dacă derivata la stânga în x_0 există şi este finită.

DERIVATA LA DREAPTA

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, astfel încât $D \cap (x_0, +\infty) \neq \emptyset$.

❖ DEFINIȚII

• Funcția f are **derivată la dreapta în punctul x_0** dacă limita

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ există în } \overline{\mathbb{R}}.$$

Această limită se notează $f_d'(x_0)$ şi se numeşte **derivata la dreapta** a funcției f în punctul x_0.

• Funcția **f este derivabilă la dreapta** în x_0 dacă derivata la dreapta în punctul x_0 există şi este finită.

Revenind la funcția modul, putem spune că nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$, este derivabilă la stânga în $x_0 = 0$ cu $f'_s(0) = -1$ şi este derivabilă la dreapta în $x_0 = 0$ cu $f'_d(0) = 1$.

Folosind derivatele laterale într-un punct, se poate da o caracterizare a existenței derivatei unei funcții într-un punct, respectiv a derivabilității acesteia în punctul considerat.

▣ TEOREMA 2

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$.

a) Funcția f are derivată în x_0 dacă şi numai dacă f are derivate laterale în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

b) Funcția f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

➲ OBSERVAȚII ȘI PRECIZĂRI

- Să considerăm funcția $f:[a, b] \to \mathbb{R}$.

a) Dacă f are derivată în $x_0 = a$, atunci aceasta este $f'(a) = f'_d(a)$.

b) Dacă f are derivată în $x_0 = b$, atunci aceasta este $f'(b) = f'_s(b)$.

c) Funcția f este derivabilă în punctul a (respectiv în punctul b) dacă este derivabilă la dreapta în punctul a (respectiv la stânga în punctul b).

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se studieze derivabilitatea funcțiilor în punctele specificate:

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x|x-1|$, $x_0 = 1$;

b) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(4x+2, x-1)$, $x_0 = -1$.

Soluție

a) Funcția f are legea de corespondență: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \le 1 \\ x^2 - x, & x > 1 \end{cases}$.

Calculăm derivatele laterale în punctul $x_0 = 1$. Avem:

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{-x^2 + x}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (-x) = -1;$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x = 1.$$

Deoarece $f'_s(1) \ne f'_d(1)$, rezultă că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

b) Legea de corespondență este: $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le -1 \\ 4x+2, & x > -1 \end{cases}$.

$$f'_s(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \frac{x+1}{x+1} = 1;$$

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{(4x+2)+2}{x+1} = 4.$$

Deoarece $f'_s(-1) \ne f'_d(-1)$, rezultă că f nu este derivabilă în $x_0 = -1$.

☒ **2.** Să se studieze derivabilitatea funcției $f:(-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, în punctele $x_0 = 0$, $x_0 = 2$.

Soluție

• Studiul derivabilității funcției în $x_0 = 0$ revine la studiul derivabilității la stânga punctului $x_0 = 0$.

Avem:

$$f'(0)=f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[-\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[-\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right]=-\infty.$$

Deoarece $f'_s(0)=-\infty$, funcția f nu este derivabilă în $x_0=0$.

• $f'(2)=f'_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=+\infty$. Rezultă că f nu este derivabilă în $x_0=2$.

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A DERIVATELOR LATERALE

Să considerăm funcția $f:(a, b)\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in(a, b)$.

• S-a arătat că dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci imaginea geometrică $\mathscr{G}_f$ a graficului funcției admite tangentă în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ a cărei pantă este $m=f'(x_0)$ (**interpretarea geometrică a derivatei într-un punct**), iar ecuația tangentei în acest punct este: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

• Dacă funcția este derivabilă la stânga (sau la dreapta) în punctul x_0, atunci se foloseşte noțiunea de **semitangentă la stânga** (sau **la dreapta**).

În cele ce urmează vom considera că funcția $f:(a, b)\to\mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0\in(a, b)$.

Pentru derivatele laterale ale funcției f în punctul x_0 pot exista următoarele situații:

1. $\boxed{f'_s(x_0)\text{ există.}}$ În acest caz, $\mathscr{G}_f$ admite semitangentă la stânga în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ şi anume semidreapta $[M_0T$ cu panta $m=f'_s(x_0)$, (figura 1).

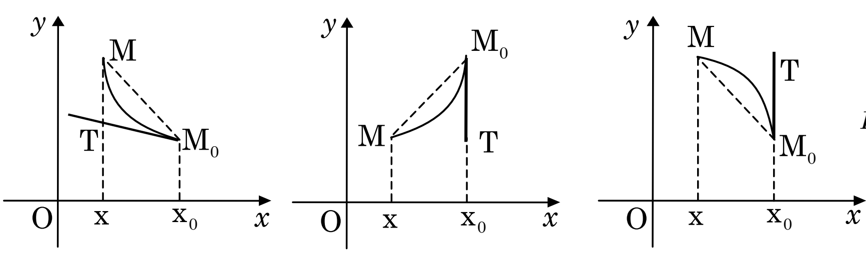


Figura 1

$\mathbf{f'_s(x_0)\in\mathbb{R}}$

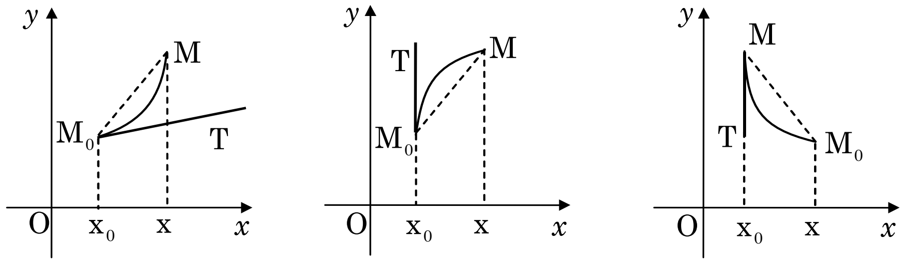
$\mathbf{f'_s(x_0)=+\infty}$

Semitangenta $[M_0T$ este sub punctul M_0, $M_0T \parallel Oy$

$\mathbf{f'_s(x_0)=-\infty}$

Semitangenta $[M_0T$ este deasupra punctului M_0, $M_0T \parallel Oy$

2. $\boxed{f'_d(x_0) \text{ există.}}$ În acest caz, $\mathscr{G}_f$ admite semitangentă la dreapta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$, anume semitangenta $[M_0T$ cu panta $m = f'_d(x_0)$, (figura 2).



$\mathbf{f'_d(x_0) \in \mathbb{R}}$

$\mathbf{f'_d(x_0) = +\infty}$
Semitangenta $[M_0T$ este deasupra punctului M_0, $M_0T \parallel Oy$

$\mathbf{f'_d(x_0) = -\infty}$
Semitangenta $[M_0T$ este sub punctul M_0, $M_0T \parallel Oy$

Figura 2

Folosind interpretarea geometrică a derivatelor laterale se pot pune în evidență câteva puncte remarcabile ale graficului funcției.

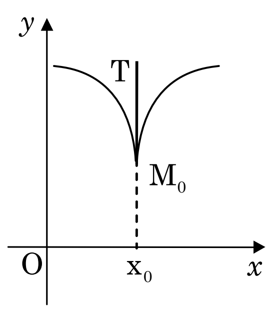
PUNCTE DE ÎNTOARCERE

❖ **DEFINIȚIE**

Fie funcția numerică $f : D \to \mathbb{R}$.

- Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct de întoarcere al funcției f** dacă funcția este continuă în x_0 şi are derivate laterale infinite şi diferite în acest punct.

Punctul $M_0(x_0, f(x_0)) \in \mathscr{G}_f$ se numeşte **punct de întoarcere al graficului** funcției, iar în acest punct semitangentele la curba $\mathscr{G}_f$ coincid, (figura 3).



$\mathbf{f'_s(x_0) = -\infty,\ f'_d(x_0) = +\infty}$
(x_0 = punct de întoarcere)

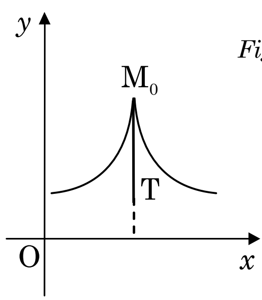


Figura 3

$\mathbf{f'_s(x_0) = +\infty,\ f'_d(x_0) = -\infty}$
(x_0 = punct de întoarcere)

Problemă rezolvată

☒ Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x},\ x<0\\ \sqrt{x},\ x\ge 0\end{cases}$. Să se arate că $x_0=0$ este punct de întoarcere al funcției f.

<u>*Soluție*</u>

Avem că: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt{-x}=0,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ şi $f(0)=0$.

Aşadar, f este continuă în $x_0=0$.

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\sqrt{\frac{-x}{(-x)^2}}=-\infty;$$

$$f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

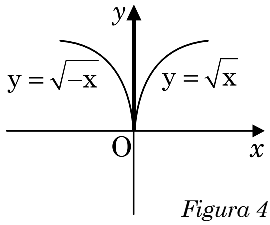


Figura 4

Astfel sunt întrunite toate condițiile pentru ca punctul $x_0=0$ să fie punct de întoarcere al funcției.

În figura 4 se observă că axa Oy este semitangentă verticală a graficului în $O(0,0)$.

PUNCTE UNGHIULARE

❖ **<u>DEFINIȚIE</u>**

Fie funcția numerică $f:D\to\mathbb{R}$.

- Punctul $x_0\in D$ se numeşte **punct unghiular al funcției f** dacă f este continuă în x_0, are derivate laterale diferite în x_0 şi cel puțin o derivată laterală este finită.

Punctul $M_0(x_0, f(x_0))\in\mathcal{G}_f$ se numeşte **punct unghiular al graficului** funcției, iar semitangentele în acest punct la curba $\mathcal{G}_f$ formează un unghi propriu, (figura 5).

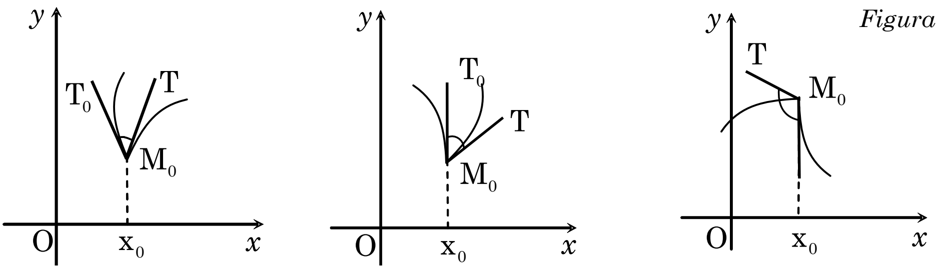


Figura 5

$\mathbf{f'_s(x_0),\ f'_d(x_0)\in\mathbb{R}}$ (punct unghiular)

$\mathbf{f'_s(x_0)=-\infty,\ f'_d(x_0)\in\mathbb{R}}$ (punct unghiular)

$\mathbf{f'_s(x_0)\in\mathbb{R},\ f'_d(x_0)=-\infty}$ (punct unghiular)

◢ **Temă**

Reprezentați şi alte situații în care apar puncte unghiulare.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că punctul $x_0 = 0$ este punct unghiular al funcției:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ \sin x, & x\geq 0 \end{cases}.$$

Soluție

Funcția f este continuă în $x_0 = 0$ deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

$$f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}x=0;$$

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1.$$

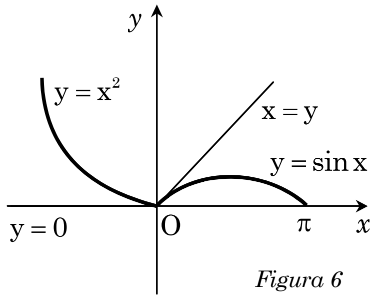


Figura 6

Aşadar, condițiile ca punctul $x_0 = 0$ să fie punct unghiular sunt îndeplinite. Punctul $M_0(0,\ 0)$ este punct unghiular al curbei $\mathscr{G}_f$. Dreptele $y = 0$, $y = x$ sunt semitangente în stânga, respectiv în dreapta, în origine, (figura 6).

PUNCTE DE INFLEXIUNE

❖ DEFINIȚIE

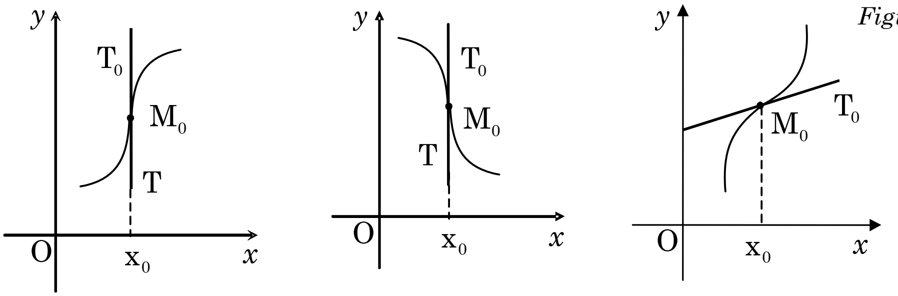
Fie funcția numerică $f: D \to \mathbb{R}$.

- Punctul $x_0 \in D$ este **punct de inflexiune** al funcției f dacă funcția este continuă în x_0, are derivată în punctul x_0 (finită sau infinită) iar funcția este convexă (concavă) de o parte a lui x_0 şi concavă (convexă) de cealaltă parte a punctului x_0.

Punctul $M_0(x_0,\ f(x_0))$ este **punct de inflexiune al curbei $\mathscr{G}_f$,** iar semitangentele la curbă în punctul M_0 sunt semidrepte opuse.

Dreapta suport traversează curba $\mathscr{G}_f$, (figura 7).

Figura 7



$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = +\infty$ (punct de inflexiune)

$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = -\infty$ (punct de inflexiune)

$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$ (punct de inflexiune)

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că punctul $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$; **b)** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^3$.

<u>*Soluție*</u>

a) Pentru funcția f avem: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ şi $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$.

Aşadar, f este continuă în $x_0 = 0$ şi are derivata infinită în acest punct, deci $x_0 = 0$ este punct de inflexiune.

b) Pentru funcția g avem: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ şi $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Corelând cu aspectul curbei $\mathscr{G}_g$ (parabola cubică) din figura 8, rezultă că $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru funcția g.

Punctul $O(0, 0)$ este punct de inflexiune al parabolei cubice şi dreapta $y = 0$ este tangentă la curbă.

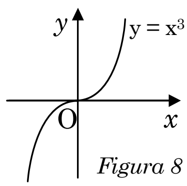


Figura 8

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se arate că funcția $f : D \to \mathbb{R}$ are derivată în punctul specificat, precizând de fiecare dată domeniul maxim de definiție D:**

a) $f(x) = 2x^2 + 1, x_0 = 3$;

b) $f(x) = 4x^3 + 1, x_0 = -1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x+3}, x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sqrt{x+1}, x_0 = 1$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{5x+3}, x_0 = 1$;

f) $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{3}$;

g) $f(x) = 2^x, x_0 = -1$;

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}}, x_0 = 1$.

E2. **Să se studieze derivabilitatea funcției $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul specificat, precizând mulțimea D:**

a) $f(x) = 3x + 4, x_0 = -2$;

b) $f(x) = -x^2 + x, x_0 = 1$;

c) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}, x_0 = \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = \cos x, x_0 = 0$;

e) $f(x) = \ln x, x_0 = 1$;

f) $f(x) = |x+2|, x_0 = -2$.

E3. **Să se determine funcția derivată f' a funcției $f : D \to \mathbb{R}$ precizând domeniile de definiție D şi $D_{f'}$ în cazurile:**

a) $f(x) = 3x + 4$; b) $f(x) = 5x^2 + 1$;

c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; d) $f(x) = \frac{1}{x}$;

e) $f(x) = 2006$; f) $f(x) = \sin x + 2$.

E4. **Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în punctul $x_0 = 0$:**

a) $f(x) = x^2 - x + 4$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \le 0 \\ -x^3 + 3x, & x > 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = x - |x|$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \le 0 \\ 5x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

E5. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă în $x_0 = 0$, dar nu e derivabilă în acest punct.

E6. Să se calculeze derivatele laterale ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul specificat şi să se precizeze dacă f este derivabilă sau nu în acest punct:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 5x, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \le -1 \\ x^3 - 3, & x > -1 \end{cases}$, $x_0 = -1$;

d) $f(x) = |2x - 1| + x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

e) $f(x) = |x + 3| - 2$, $x_0 = -3$.

E7. Să se calculeze panta tangentei la graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în punctele indicate:

a) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 \in \left\{-2, \frac{1}{2}, 3\right\}$;

b) $f(x) = -x^3 + x$, $x_0 \in \{-1, 0, 2\}$;

c) $f(x) = 1 - \sin x$, $x_0 \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

E8. Să se scrie ecuația tangentei la curba $\mathcal{G}_f$ pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctele date:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$;

b) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = -1$;

c) $f(x) = x^3 - 2x$, $x_0 = -3$;

d) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $x_0 = -4$;

f) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $x_0 = 1$.

E9. Să se verifice dacă $x = 0$ este punct unghiular pentru funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ştiind că:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$;

b) $f(x) = \max(x, x^3)$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

E10. Să se verifice dacă pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punctul x_0 este punct de întoarcere, ştiind că:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x}, & x \le 1 \\ \sqrt{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \sqrt{|x - 3|}$, $x_0 = 3$.

E11. Să se arate că punctul x_0 este punct de inflexiune pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = x^3 + 1$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$; $x_0 = -2$.

APROFUNDARE

A1. Folosind definiția derivatei, să se determine derivata f' a funcției $f : D \to \mathbb{R}$, precizând mulțimile D şi $D_{f'}$, dacă:

a) $f(x) = 3^x + x$; b) $f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$;

c) $f(x) = e^{x^2 - 1}$; d) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$;

e) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x}$.

A2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+b$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să fie verificate condițiile:

$f(1)=-1$ şi $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3.$

A3. Să se scrie ecuația tangentei la curba reprezentativă a funcției $f:D\to\mathbb{R}$ în punctul specificat:

a) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+4},\ x_0=2;$

b) $f(x)=x^2+\sin x,\ x_0=0;$

c) $f(x)=x^3+x+e^x,\ x_0=1;$

d) $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+4x), & x\in(0,1]\\ \frac{6}{5}(x-1)+\ln 5, & x\in(1,+\infty)\end{cases},\ x_0=1.$

A4. Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcțiilor f în punctele de legătură, ştiind că:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+6x}, & x\in(0,2)\\ \frac{5}{4}x, & x\in[2,+\infty)\end{cases};$

b) $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2-3x), & x\in(-\infty,-1]\\ \frac{2\ln 16-5(x+1)}{4}, & x\in(-1,+\infty)\end{cases};$

c) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3-2x}, & x\in(-\infty,2]\\ \frac{x+4}{2}, & x\in(2,+\infty)\end{cases};$

d) $f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x\in(0,+\infty)\\ \ln(1-x), & x\in(-\infty,0]\end{cases};$

e) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,1]\\ e^{\frac{-1}{(x-1)^2}}, & x\in(1,+\infty)\end{cases};$

f) $f(x)=|x^2-4|+|x+1|;$

g) $f(x)=\sqrt{|x^2-x|};$ h) $f(x)=\sqrt[3]{|x^3+x|};$

i) $f(x)=\min(x^2-2,\ 4x+10);$

j) $f(x)=[3x+1],\ x_0=\frac{1}{3};$

k) $f(x)=\begin{cases}\cos(x-2), & x\le 2\\ |x-2|+x-1, & x>2\end{cases};$

l) $f(x)=\begin{cases}2^x-4, & x\le 2\\ \sin(x-2), & x>2\end{cases};$

m) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x^2-2x+1}, & x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{2}{\pi}\arcsin 2x, & x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\end{cases};$

n) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3\sin\frac{1}{x-1}, & x\ne 1\\ 0, & x=1\end{cases}.$

A5. Să se determine punctele de derivabilitate pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=\begin{cases}x^4, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2+2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases};$

b) $f(x)=\begin{cases}x^4, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases};$

A6. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ să fie derivabilă în punctul de legătură, dacă:

a) $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x\le 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases};$

b)

$f(x)=\begin{cases}(a+1)e^{x-1}, & x\le 1\\ \sin(x-1)+b\cos(2x-2), & x>1\end{cases};$

c) $f(x)=\begin{cases}(2-a)x^2-b, & x\le 2\\ 2ax^3-x^2+4a, & x>2\end{cases}.$

A7. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}2ax+b, & x\le 0\\ \frac{x-1}{x^2+3}, & x>0\end{cases}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ dacă $f'(0)\in\mathbb{R}$.

A8. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\begin{cases}x^3+(a+1)x+3, & x\le 0\\ 2a+b+\ln(1+x^3), & x>0\end{cases}.$

Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât să existe $f'(0)\in\mathbb{R}$.

A9. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (a+1)x + b, & x \geq 0 \\ \sqrt{1 - 2abx + (cx)^2}, & x < 0 \end{cases}$$
să admită tangentă în $x_0 = 0$ și $2f(-1) = f(2)$.

A10. Se dă funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \ln^2 x^2, & x \in (0, e] \\ \alpha x^2 + \beta x + 4, & x \in (e, +\infty) \end{cases}.$$
Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât f să aibă tangentă în $x_0 = e$ și să se scrie ecuația tangentei.

A11. Să se determine punctele graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ în care tangenta este paralelă cu dreapta $3x - y + 1 = 0$. Să se scrie ecuația tangentei.

A12. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 8x + 1$ admite tangenta de ecuație $y = 24x - 47$. Să se determine coordonatele punctului de tangență.

A13. Tangenta la graficul funcției
$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 1}$$
formează cu axa Ox un unghi cu măsura $\frac{\pi}{4}$. Să se determine coordonatele punctului de tangență și ecuația tangentei în acest punct.

A14. Să se precizeze dacă există puncte pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ în care tangenta are panta egală cu $m = \operatorname{tg} 30° \cdot \sin 60°$.

A15. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ex$. Există puncte ale graficului în care tangenta să formeze cu axa Ox un unghi obtuz? Dar în care să fie paralelă cu axa Ox? Aceeași problemă pentru $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x - 2007$.

A16. Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = x^3 + ax^2 + b,\ g(x) = 3x^2 + cx + 1.$$
Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care curbele reprezentative sunt tangente în punctul cu abscisa $x = 1$, iar tangenta comună este paralelă cu prima bisectoare a axelor de coordonate.

A17. Să se verifice dacă punctele specificate sunt puncte unghiulare:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4|$, $x_0 \in \{0, -2\}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $x_0 \in \{2, 3\}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x + 2|}{|x| + 2}$, $x_0 \in \{-2, 0\}$;

e) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} [x], & x \in [0, 1) \\ x^2 - 1, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, $x_0 = 1$.

A18. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu au puncte unghiulare, în cazurile:

a) $f(x) = x|x - a|$;

b) $g(x) = x|x - a| + |x - b|$.

A19. Să se determine punctele de întoarcere pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 9|}$; b) $f(x) = \sqrt{|3 - x^2|}$.

A20. Să se determine punctele unghiulare ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n-1} - x^2 + 6}{x^2 + 4 + x^{4n}},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

❸ DERIVATELE UNOR FUNCȚII ELEMENTARE

Să considerăm funcția $f : D \to \mathbb{R}$, o funcție derivabilă pe mulțimea D.

Derivata sa este funcția $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, unde $D_{f'}$ este domeniul de derivabilitate al funcției f. Cu ajutorul acestei formule vom determina derivatele câtorva funcții elementare pe domeniul de derivabilitate corespunzător.

1. FUNCȚIA CONSTANTĂ

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi are derivata egală cu funcția nulă: $f'(x) = 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$

Se mai scrie $\boxed{c' = 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.}$

Demonstrație

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0. \ ■$$

Astfel, dacă $f(x) = 4, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$ sau $4' = 0$.

2. FUNCȚIA PUTERE CU EXPONENT NATURAL

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata sa este dată de relația:

$f'(x) = nx^{n-1}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$ Se scrie $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}, \forall\ x \in \mathbb{R}.}$

Demonstrație

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1} h + C_n^2 x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right) = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}. \ ■$$

☞ ***Exemple***

a) Derivata funcției identice $f(x) = x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$ este funcția definită prin $f'(x) = 1, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Scriem $x' = 1$.

b) Dacă $f(x) = x^2, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x) = 2x, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Scriem $(x^2)' = 2x$.

c) Dacă $f(x) = x^7, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, atunci $f'(x) = 7x^6, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Scriem $(x^7)' = 7x^6$.

3. FUNCȚIA PUTERE CU EXPONENT REAL

Funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^r,\ r\in\mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul $(0,+\infty)$ şi $f'(x)=rx^{r-1},\ x\in(0,+\infty)$.

Se scrie: $\boxed{(x^r)'=rx^{r-1},\forall\ x>0.}$

Demonstrație

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^r-x^r}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^r\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^r-1\right]}{h}.$$

Notând $\frac{h}{x}=y$, rezultă $f'(x)=x^r\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+y)^r-1}{xy}=x^{r-1},\ \forall\ x>0.$ ■

☞ ***Exemple***

a) $f(x)=x^{\frac{3}{4}},\ x>0,\ f'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}},\ x>0.$

b) $f(x)=\sqrt{x},\ x>0,\ f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0.$

Să reținem că $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall\ x>0.$

➲ OBSERVAȚIE

• Funcția radical $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$ nu este derivabilă în $x_0=0$ deoarece $f'(0)=+\infty$.

c) $f(x)=\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2},\ \forall\ x\neq 0.$

d) Dacă $r=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, atunci $x^r=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$. Se obține:

$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, pentru $x>0$ dacă n este par, sau $x\in\mathbb{R}^*$ dacă n este impar.

❑ REȚINEM!

$\boxed{(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\ \text{pentru } x>0 \text{ şi n par sau } x\neq 0 \text{ şi n impar.}}$

4. FUNCȚIA LOGARITMICĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$ este derivabilă pe intervalul $(0, +\infty)$ şi $f'(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in(0,+\infty).$

Se scrie: $\boxed{(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x},\ \forall\ x>0.}$

Într-adevăr, pentru oricare $x > 0$ avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\frac{1}{x}.$$

➲ **OBSERVAȚIE**

- Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq1.$ Folosind formula de schimbare a bazei logaritmului, $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$, se obține:

$$(\log_a)'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a},\ \forall\ x>0.$$

5. FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty),\ f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq1,$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=a^x\cdot\ln a,\ x\in\mathbb{R}.$

Se scrie $\boxed{(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\forall\ x\in\mathbb{R}.}$

Într-adevăr, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$ avem:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\cdot\ln a.$$

În particular, $\boxed{(e^x)'=e^x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.}$

6. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE SINUS ŞI COSINUS

Funcțiile f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = sin x, g(x) = cos x sunt derivabile pe $\mathbb{R}$ şi pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem:

a) $\boxed{(\sin)'(x)=\cos x,\ \forall\ x\in\mathbb{R};}$ **b)** $\boxed{(\cos)'(x)=-\sin x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.}$

Demonstrație

a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\lim_{h\to 0}\left(x+\frac{h}{2}\right)\right) = \cos x.$$

b) Temă ■

➲ **OBSERVAȚIE**

- Trebuie făcută distincție clară între numerele $f'(x_0)$ şi $(f(x_0))'$. Astfel, $f'(x_0)$ reprezintă valoarea derivatei f' în punctul x_0 (atunci când există), iar $(f(x_0))'$ reprezintă derivata constantei $f(x_0)$ şi este zero.

☞ ***Exemple***

- $(\ln 2)' = 0$; $(\ln)'(2) = \dfrac{1}{2}$; $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)' = 0$; $(\sin)'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

◢ **Temă**

Aplicând formulele pentru derivatele câtorva funcții elementare, să se calculeze derivatele funcțiilor:

A. 1. $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$; **2.** $f(x) = 2001$, $x \in \mathbb{R}$; **3.** $f(x) = x^{\frac{5}{6}}$, $x > 0$; **4.** $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x > 0$; **5.** $f(x) = \sqrt[9]{x}$, $x \neq 0$; **6.** $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$; **7.** $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$; **8.** $f(x) = \sqrt{2}$, $x \in \mathbb{R}$; **9.** $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$; **10.** $f(x) = \cos\dfrac{5\pi}{8}$, $x \in \mathbb{R}$; **11.** $f(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Calculați şi comparați:

1. $(\sin)'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ **şi** $\left(-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)'$; **2.** $(\cos)'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **şi** $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)'$; **3.** $(\ln e)'$ **şi** $(\ln)'(e)$.

C. 1. Pentru funcția $f(x) = 5^x$, **să se calculeze** $f'(0)$, $(f(0))'$, $f'(-1)$, $f'(\log_5 3)$; $f'(-\log_5(\ln 5))$.

2. Pentru funcția $f(x) = \sqrt[3]{x}$, **să se calculeze** $f'(1)$, $(f(1))'$; $f'(8)$, $(f(8))'$; $f'(-1)$, $(f(-1))'$.

❹ OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE

Tehnica de determinare a derivatei unei funcții pornind de la definiție se dovedeşte a fi destul de anevoioasă pentru funcții obținute pe baza operațiilor cu funcții (adunare, înmulțire, compunere, inversare, ...). De aceea se vor găsi nişte reguli practice care permit determinarea derivatei unei funcții oarecare într-un mod cât mai simplu.

4.1. DERIVATA SUMEI ȘI A PRODUSULUI

▣ TEOREMA 3

Fie funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare al lui D.

Dacă funcțiile f şi g sunt derivabile în punctul $x_0 \in D$, atunci funcțiile $f + g$ şi fg sunt derivabile în punctul x_0, şi au loc următoarele reguli de derivare:

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$; **b)** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.

Demonstrație

a) Pentru $x \neq x_0$ avem $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Prin trecere la limită când $x \to x_0$ în această egalitate şi folosind faptul că f şi g sunt derivabile în x_0 se obține:

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Pentru $x \neq x_0$ se obține: $\dfrac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$

$$= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Trecând la limită când $x \to x_0$ în egalitățile de mai sus şi folosind faptul că f şi g sunt derivabile în x_0 şi că $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, se obține:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcțiile f şi g sunt derivabile pe D, atunci şi funcțiile f + g şi fg sunt derivabile pe D şi au loc următoarele reguli de derivare:

$\boxed{(f+g)' = f' + g'}$ şi $\boxed{(fg)' = f'g + fg'.}$

2. Cele două reguli de derivare pentru sumă şi produs se pot extinde la cazul a n funcții, f_1, f_2, ..., f_n derivabile pe mulțimea D. Avem:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' f_2 f_3 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 f_3 \ldots f_n' = \sum_{k=1}^{n} f_1 f_2 f_3 \ldots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \ldots f_{n-1} \cdot f_n$$

Pentru $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_n = f$ se obține $\boxed{(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'.}$

3. Alegând $g = c$, $c \in \mathbb{R}$, regula de derivare a produsului conduce la formula $(cf)' = c'f + cf' = 0 \cdot f + cf' = cf'$, (**constanta trece în fața derivatei**).
Pentru $g = -1$ se obține $(-f)' = -f'$, iar $(f - g)' = (f + (-g))' = f' - g'$.

❑ **REȚINEM!**

$\boxed{(c \cdot f)' = c \cdot f'}$ și $\boxed{(f - g)' = f' - g'.}$

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se determine derivatele funcțiilor f și valoarea $f'(x_0)$ a derivatei în punctele specificate:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + \cos x$, $x_0 = 0$;

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$;

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + 2^x - \sin\dfrac{\pi}{2}$, $x_0 = 1$.

<u>*Soluție*</u>

a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = (x^3)' + x' + (\cos)'(x) = 3x^2 + 1 - \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 3 \cdot 0 + 1 - \sin 0 = 1$.

b) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ ca sumă de funcții derivabile pe $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + (x^{-2})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2x^{-3},\ \forall x \neq 0;$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

c) Funcția f este derivabilă pe $(0, +\infty)$ fiind exprimată ca sumă de funcții derivabile pe $(0, +\infty)$ și $f'(x) = (\ln)'(x) + (2^x)' - \left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)' = \dfrac{1}{x} + 2^x \ln 2 - 0$, $\forall x > 0$, $f'(1) = 1 + 2\ln 2$.

☒ **2.** Folosind regulile de derivare a sumei și a produsului, să se determine legea de corespondență a funcției f', dacă:

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x + x\sqrt{x}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x - 2 \cos x$.

<u>*Soluție*</u>

a) $f'(x) = (x^2 \ln x)' + (x\sqrt{x})' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln)'(x) + x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})' =$
$= 2x\ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 1 \cdot \sqrt{x} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\ln x + x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, $\forall x > 0$.

b) $f'(x) = (x \sin x)' - (2 \cos x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin)'(x) - 2(\cos)'(x) = \sin x +$
$+ x\cos x + 2\sin x = 3\sin x + x\cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4.2. DERIVATA CÂTULUI

▣ TEOREMA 4

Fie funcțiile f, g : D → $\mathbb{R}$ şi $x_0 \in D$, punct de acumulare al lui D.

Dacă funcțiile f şi g sunt derivabile în x_0 şi $g(x_0) \neq 0$, atunci funcția cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc egalitatea:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrație

Din condiția $g(x_0) \neq 0$ şi g continuă în x_0, rezultă că g este nenulă pe o vecinătate a punctului x_0 şi deci are sens derivabilitatea câtului în x_0. Avem:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{(x - x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{(x - x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{[f(x) - f(x_0)]\cdot g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{(x - x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\cdot f(x_0)\right]\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} =$$

$$= \left[f'(x_0)\cdot g(x_0) - g'(x_0)\cdot f(x_0)\right]\cdot\frac{1}{g^2(x_0)},$$ ceea ce trebuia demonstrat. ■

Demonstrația teoremei arată totodată că dacă funcțiile f şi g sunt derivabile pe mulțimea D şi funcția g nu se anulează pe D, atunci funcția cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă pe D şi are loc regula de derivare a câtului:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.}$$

Aplicații

☒ **1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, f(x) = tg x.

Atunci $(tg)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Într-adevăr, $(\mathrm{tg})'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin)'(x)\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos)'(x)}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\ \forall\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

☒ **2.** Fie funcția $f : \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$.

Atunci $(\mathrm{ctg})'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ \forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Avem $(\mathrm{ctg})'(x) = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos)'(x)\cdot\sin x - \cos x\cdot(\sin)'(x)}{\sin^2 x} =$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x},\ \forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine derivatele funcțiilor f și să se calculeze $f'(x_0)$, unde x_0 este specificat pentru fiecare funcție:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3} + x^2 + x^3 - x^4$, $x_0 = -2$;

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^0} + \ln 5$, $x_0 = -1$;

c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{5}$, $x_0 = 1$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -\sin x + \cos x - \sin\dfrac{\pi}{2} + \cos\pi$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln x + \log_3 x - \lg x$, $x_0 = 2$;

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5^x - e^{-x}$, $x_0 = 0$.

E2. Să se determine derivatele funcțiilor f și $f'(x_0)$ în punctul x_0 specificat:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$, $x_0 = -1$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (2x+3)^2 + 4x^3(x-1)$, $x_0 = 0$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (3\sin x - 1)(2 - 5\cos x)$, $x_0 = \dfrac{2\pi}{3}$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)(4 + x^2 - x)$, $x_0 = -8$;

e) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (3\ln x + x)(4 - x)$, $x_0 = 1$;

f) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x \ln x$, $x_0 = e$;

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x(x^2 + 5x - 1)$, $x_0 = -1$.

E3. Să se calculeze derivatele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, precizând domeniul de definiție și domeniul de derivabilitate:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

e) $f(x) = \dfrac{3x-5}{4x+7}$; f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^3}$; h) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x}{x+5}$;

i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 4x + 2}$; j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

k) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+2}$;

l) $f(x) = \frac{\ln x - x}{\ln x + x}$;

m) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 2}$;

n) $f(x) = \frac{2\sin x - 3\cos x}{3 + \sin x}$;

o) $f(x) = \frac{x\sin x}{1 - \cos x}$;

p) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}x + 1}{\operatorname{tg}x - 1}$;

r) $f(x) = \frac{2}{\sin 2x + 1}$;

s) $f(x) = \frac{x^4}{e^x} + 1$;

t) $f(x) = \log_3 x + \log_x 3$;

u) $f(x) = \left(e^2\right)^x + 5^x$.

APROFUNDARE

A1. Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0$, precizând domeniul maxim de definiție și domeniul de derivabilitate al funcției f:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3$;

b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$;

d) $f(x) = x^3 \cdot e^x$;

e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

f) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$;

g) $f(x) = e^x(x^2 + 6x - 15)$;

h) $f(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1}$;

i) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

j) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 5x + 7}$;

k) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$;

l) $f(x) = \frac{(3x-1)e^x}{4x^2 + 12x + 1}$; m) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg}x}$;

n) $f(x) = \frac{2 + \sin x}{\cos x}$; o) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$.

A2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar g este derivabilă în $x = 1$, $g(1) = 1$ și $g'(1) = 0$. Să se calculeze $f'(1)$.

A3. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât:

$f(x) = 2e^x \cdot g(x) + \frac{x-2}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

g este derivabilă în $x = 0$ și $g(0) = 3$, $g'(0) = -1$. Să se calculeze $f'(0)$.

A4. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f : D \to \mathbb{R}$ în punctul specificat, dacă:

a) $f(x) = x^4$, $x_0 = -1$;

b) $f(x) = x \ln x$, $x_0 = e$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$, $x_0 = -1$;

d) $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \operatorname{tg}x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$;

f) $f(x) = (x+1)e^x$, $x_0 = 0$, $x_0 = 1$.

4.3. DERIVAREA FUNCȚIEI COMPUSE

În paragraful anterior s-a observat că aplicând operațiile algebrice funcțiilor derivabile se obțin tot funcții derivabile. În continuare vom întâlni un alt mod de a genera funcții derivabile. Pentru simplitatea exprimării, funcțiile vor fi considerate ca fiind definite pe intervale de numere reale.

▣ TEOREMA 5

Fie I şi J intervale de numere reale şi funcțiile $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
Dacă u este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, iar f este derivabilă în punctul $u(x_0) = y_0 \in J$, atunci funcția compusă $(f \circ u): I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc relația: $(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$.

Demonstrație

Fie $F: J \to \mathbb{R}$, $F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0 \\ f'(y_0), & y = y_0 \end{cases}$.

Deoarece $\lim\limits_{y \to y_0} F(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = F(y_0)$, funcția F este continuă în y_0.

Din egalitatea $F(u(x)) \cdot \dfrac{u(x) - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(u(x)) - f(y_0)}{x - x_0}$, (1)

prin trecere la limită, se obține:

$$(f \circ u)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{x - x_0} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to x_0} F(u(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= F(u(x_0)) \cdot u'(x_0) = F(y_0) u'(x_0) = f'(y_0) \cdot u'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0). \blacksquare$$

➲ OBSERVAȚII

1. Utilizând această teoremă şi definiția derivatei unei funcții pe o mulțime, se obține următorul rezultat general:

Fie I, J intervale de numere reale şi $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
Dacă funcția u este derivabilă pe intervalul I şi funcția f este derivabilă pe intervalul J, atunci funcția $(f \circ u)$ este derivabilă pe I şi are loc următoarea regulă de derivare:

$\boxed{(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'.}$

2. Teorema se poate extinde la un număr n, $n > 2$ de funcții derivabile care se pot compune. Astfel, dacă f, u, v sunt trei funcții care determină funcția $f \circ u \circ v$ pe un interval I, iar dacă v este derivabilă în punctul $x_0 \in I$, f este derivabilă în punctul $u(v(x_0))$, atunci funcția compusă $f \circ u \circ v$ este derivabilă în punctul x_0 şi are loc egalitatea:

$(f \circ u \circ v)'(x_0) = f'(u(v(x_0))) \cdot u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0)$, sau mai general:

$(f \circ u \circ v)' = (f' \circ u \circ v) \cdot (u' \circ v) \cdot v'.$

3. Teorema de derivare a funcțiilor compuse împreună cu derivatele funcțiilor elementare deduse până acum conduc la următorul tabel de formule:

Funcția elementară	**Derivata**	**Funcția compusă**	**Derivata**
c (constantă)	$0,\ x \in \mathbb{R}$		
x	$1,\ x \in \mathbb{R}$	u	u'
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$nx^{n-1},\ x \in \mathbb{R}$	$u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$nu^{n-1} \cdot u'$
$x^r,\ r \in \mathbb{R}$	$rx^{r-1},\ x \in (0, +\infty)$	$u^r,\ r \in \mathbb{R}$	$ru^{r-1} \cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0, +\infty)$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ \begin{cases} x \in (0,+\infty), & n \text{ par} \\ x \in \mathbb{R}^*, & n \text{ impar} \end{cases}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
ln x	$\frac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$	ln u	$\frac{1}{u} \cdot u'$
$\log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a},\ x \in (0, +\infty)$	$\log_a u$	$\frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
e^x	$e^x,\ x \in \mathbb{R}$	e^u	$e^u \cdot u'$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$a^x \cdot \ln a,\ x \in \mathbb{R}$	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
sin x	$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$	sin u	$\cos u \cdot u'$
cos x	$-\sin x,\ x \in \mathbb{R}$	cos u	$-\sin u \cdot u'$
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x},\ \cos x \neq 0$	tg u	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x},\ \sin x \neq 0$	ctg u	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

4. Dacă $u, v : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile pe I şi $u(x) > 0,\ x \in I$, atunci funcția u^v este derivabilă pe I şi derivata ei este:

$$\boxed{\left(u^v\right)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'}$$

Într-adevăr, avem succesiv:

$$\left(u^v\right)' = \left(e^{v \cdot \ln u}\right)' \overset{(\text{Obs.}3)}{=} e^{v \cdot \ln u} . \left(v \cdot \ln u\right)' = e^{v \cdot \ln u} \cdot \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) =$$

$$= u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

$$\boxed{f^g = e^{g \cdot \ln f}}$$

Exercițiu rezolvat

☒ Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se determine derivatele funcțiilor:

a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (3x^2 - 2x)^5$; **b)** $h : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $h(x) = \ln^2(x^2 + 5)$;

c) $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^x$.

<u>*Soluție*</u>

a) Să considerăm funcțiile u, f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, u(x) = ($3x^2 - 2x$), f(u) = u^5, funcții derivabile pe $\mathbb{R}$, pentru care u'(x) = 6x – 2, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ şi $f'(u) = 5u^4$, $u \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcția $f \circ u$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Observăm că $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = (3x^2 - 2x)^5 = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Aşadar, h este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $h'(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) = 5u^4(x) \cdot u'(x) =$ $= 5(3x^2 - 2x)^4 \cdot (6x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Considerăm funcțiile $\mathbb{R} \xrightarrow{v} (0, +\infty) \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{f} (0, +\infty)$, $v(x) = x^2 + 5$, $u(v) = \ln v$, $f(u) = u^2$ derivabile.

Avem $(f \circ u \circ v)(x) = f(u(v(x))) = \ln^2(x^2 + 5) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că h este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$h'(x) = f'(u(v(x)) \cdot u'(v(x)) \cdot v'(x) = 2u(v(x)) \cdot \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x) = 2\ln(x^2+5) \cdot \frac{1}{x^2+5} \cdot 2x =$$

$$= \frac{4x}{x^2+5} \cdot \ln(x^2+5).$$

c) Aplicăm regula de derivare din Observația 4:

$$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \cdot (x' \ln x + x \cdot \ln' x) = e^{x \ln x} \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^x(\ln x + 1).$$

4.4. DERIVAREA FUNCȚIEI INVERSE

În acest paragraf vom stabili o nouă modalitate de a obține funcții derivabile şi totodată un nou procedeu de determinare a derivatei pentru anumite funcții.

> ▣ **TEOREMA 6**
>
> Fie I şi J intervale oarecare şi $f : I \to J$ o funcție continuă şi bijectivă. Dacă funcția f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția inversă $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi
>
> $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>*Demonstrație*</u>

Bijectivitatea funcției f asigură existența funcției inverse f^{-1}. Vom determina limita raportului $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ când $y \to y_0$, $y \neq y_0$.

Fie $x = f^{-1}(y)$. Deoarece $y \neq y_0$, rezultă că $x \neq x_0$ şi

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}. \quad (1)$$

Funcția f^{-1} este continuă în punctul $y_0 = f(x_0)$.

Rezultă că $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Se deduce astfel că pentru $y \to y_0$, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$, adică $x \to x_0$. Trecând la limită după $y \to y_0$, în relația (1), se obține : $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

În concluzie, funcția f^{-1} este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă în enunț se ia $f'(x_0) = 0$, atunci $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ în cazul în care funcția f este strict crescătoare pe I şi $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = -\infty$ în cazul când funcția f este strict descrescătoare pe I. În concluzie, dacă $f'(x_0) = 0$, atunci funcția f^{-1} nu este derivabilă în punctul y_0, dar are derivată infinită în y_0.
Din punct de vedere geometric, în punctul (y_0, x_0) graficul funcției inverse are tangentă verticală.

2. Folosind derivabilitatea unei funcții pe o mulțime, teorema anterioară se poate extinde astfel:
Fie I şi J intervale oarecare şi $f : I \to J$ o funcție continuă şi bijectivă.
Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I şi $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, atunci $f^{-1}: J \to I$ este funcție derivabilă pe intervalul J şi $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})}$.

Exercițiu rezolvat

☒ Fie funcția $f : \mathbb{R} \to (1, \infty)$, $f(x) = 9^x + 3^x + 1$.
Să se arate că funcția f este inversabilă pe $\mathbb{R}$ şi să se determine $(f^{-1})'(3)$.

Soluție

Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, fiind exprimată ca sumă de funcții strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci este injectivă.

De asemenea, este funcție continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, deci Im f = $(1, +\infty)$, ceea ce înseamnă că f este surjectivă. În concluzie, funcția f este bijectivă, deci inversabilă. Ca urmare există $f^{-1}: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $(1, +\infty)$ şi $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, unde $f(x_0) = 3$ şi $x_0 = 0$. Se obține că $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3\ln 3}$.

DERIVATELE FUNCŢIILOR TRIGONOMETRICE INVERSE

1. Funcția arcsinus

Funcția $f: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ este bijectivă, continuă şi derivabilă şi $f'(x) = \cos x$, $\cos x \neq 0$, $\forall\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Funcția inversă este $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(y) = \arcsin y$ căreia i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse pe intervalul deschis $(-1, 1)$.

Pentru $y \in (-1, 1)$ se obține:

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Aşadar, funcția arcsin este derivabilă pe intervalul deschis $(-1, 1)$ şi

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',\ \forall\ u \in (-1, 1).$$

Pentru $y = -1$, avem $x = -\dfrac{\pi}{2}$, iar $f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Conform observației (1), $(\arcsin)'(-1) = +\infty$ şi $(\arcsin)'(1) = +\infty$.

2. Funcția arccosinus

Raționând în mod similar sau aplicând relația $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\forall\ x \in [-1, 1]$, rezultă că funcția arccos este derivabilă pe intervalul $(-1, 1)$ şi

$$(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u',\ \forall\ u \in (-1, 1).$$

Pentru $x = -1$ sau $x = 1$, $(\arccos)'(\pm 1) = -\infty$.

3. Funcția arctangentă

Funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ satisface condițiile de derivare a funcției inverse pentru $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $J = \mathbb{R}$.

Rezultă că funcția inversă $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ este derivabilă în orice punct $y \in \mathbb{R}$, $y = \operatorname{tg} x$ și $(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$.

Așadar se obține formula $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

4. Funcția arccotangentă

Procedând ca pentru funcția arctg, sau folosind relația $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obținem că funcția arcctg este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și

$$(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u', \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

➲ **OBSERVAȚIE**

• Dacă u este o funcție derivabilă și $u(x) \in (-1, 1)$, atunci:

$$\boxed{(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'} \text{ și } \boxed{(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.}$$

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci:

$$\boxed{(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'} \text{ și } \boxed{(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.}$$

În concluzie, teoremele 3-6 din acest paragraf dau modalități de derivare pentru diferite funcții care sunt rezultat al:

– unor operații algebrice cu funcții derivabile (adunare, produs, cât);
– unei operații de compunere de funcții derivabile;
– unei operații de inversare a unei funcții derivabile.

Reguli de derivare

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$, $c \in \mathbb{R}$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(f \circ u)' = f'(u) \cdot u'$	$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze derivatele funcțiilor indicând domeniul maxim de definiție şi domeniul de derivabilitate:

a) $f(x)=(x^2+x)^4$; b) $f(x)=\sin(4x+2)$;

c) $f(x)=\sin^3 2x$; d) $f(x)=\cos^2 x+\cos 2x$;

e) $f(x)=\operatorname{tg}^2 2x$; f) $f(x)=x\operatorname{ctg} 2x$;

g) $f(x)=\sqrt{4x+1}$; h) $f(x)=\sqrt{9x^2+8x-1}$;

i) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$; j) $f(x)=\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$;

k) $f(x)=\ln(6x^2+x)$; l) $f(x)=\ln\frac{x-2}{x+3}$;

m) $f(x)=\ln(x+\sqrt{9+x^2})$;

n) $f(x)=e^{x^2+2x}+e^{-x}$;

o) $f(x)=2^{2x}+3^{\sqrt{x}}$;

p) $f(x)=\left(\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}\right)^2$;

r) $f(x)=\sin^2(3x^2-4x+1)$;

s) $f(x)=\frac{1}{(x^2+2)^4}$;

t) $f(x)=\arcsin(x^2+x)$;

u) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2+x^2}{4-x^2}$;

v) $f(x)=\arccos(x^2-2x)$;

w) $f(x)=\operatorname{arcctg} e^{-2x}$;

x) $f(x)=x^{x+1}$;

y) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$; z) $f(x)=(\sin x)^x$.

E2. Să se rezolve ecuația $f'(x)=0$ pentru funcția $f: D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f:

a) $f(x)=(2x^2-x^4)^5$;

b) $f(x)=(x-1)^2\cdot(x-2)^3$;

c) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$; d) $f(x)=x\sqrt[3]{x+1}$;

e) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln x$; f) $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$;

g) $f(x)=\cos 2x+x$; h) $f(x)=4ex+e^{-4x}$;

i) $f(x)=\sqrt{\frac{x+4}{2x-6}}$; j) $f(x)=2^{x^3-3x^2}$;

k) $f(x)=\frac{x+1}{e^{3x}}$; l) $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-4x)$;

m) $f(x)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x$;

n) $f(x)=\sin^2 3x$;

o) $f(x)=4\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}$;

p) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $x\in(0,\pi)$.

APROFUNDARE

A1. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze derivata funcției $f: D\to\mathbb{R}$, precizând D şi $D_{f'}$:

I. a) $f(x)=(x^2+1)^3\cdot(x^3-3x+2)^5$;

b) $f(x)=\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

d) $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

e) $f(x)=x(a^2-x)\cdot\sqrt{a^2+x^2}$;

f) $f(x)=\frac{\sqrt{x^3-x}}{x+2}$;

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x-2}$.

II. a) $f(x)=\cos^2(3x+1)\cdot\sin(3x+1)$;

b) $f(x)=\sin^3((x^2+1)^3)$;

c) $f(x)=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$;

d) $f(x)=\operatorname{tg}(\cos(\ln x))$;

e) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

III. a) $f(x)=\ln\frac{4-x^2}{2-x^2}$;

b) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\sin x}}$;

c) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}2x}{1+\operatorname{tg}2x}}$;

d) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{4x^2+3x}{4x^2-3x}}$;

e) $f(x) = \log_{x+2} x$; f) $f(x) = \lg\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

IV. a) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+3}}}$; b) $f(x) = e^x \cdot \sqrt{\dfrac{4x^2+1}{4x^2-1}}$;

c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}(x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} - 2x - 3)$;

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2 \cdot \sin x^2$;

e) $f(x) = e^{\frac{\ln(x^2-1)}{x}}$.

V. a) $f(x) = x^{\cos x}$; b) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$;

c) $f(x) = x^{\ln(x+1)}$; d) $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$; f) $f(x) = x^{\arcsin x}$.

VI. a) $f(x) = \arcsin\sqrt{9-x^2}$;

b) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\mathrm{arctg}x$;

c) $f(x) = \arccos\dfrac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$;

d) $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \mathrm{arctg}\, x$;

e) $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \mathrm{arctg}\, x^2$;

f) $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$;

g) $f(x) = 2\mathrm{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}$;

h) $f(x) = \mathrm{arcctg}\dfrac{4\sin x}{3+5\cos x}$.

A2. Să se calculeze $f'(x_0)$, pentru:

a) $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

c) $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

d) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{2+\mathrm{tg}x}{2-\mathrm{tg}x}} + \arccos(\sin 3x)$,

$x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

$x_0 = 1$;

f) $f(x) = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}} - \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$;

g) $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \mathrm{arctg}x$,

$x_0 = 1$.

A3. Fie funcția $f: \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$, $f(x) = x^2 - x$. Să se arate că f este inversabilă și să se calculeze $(f^{-1})'(2)$ și $(f^{-1})'(20)$.

A4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$. Există $\left(f^{-1}\right)'(6)$? În caz afirmativ să se calculeze.

A5. Fie funcția $f: (0, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = 2^x + x^2 + x$. Să se verifice dacă f este bijectivă și să se calculeze $(f^{-1})'(4)$.

A6. Se consideră funcția $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x-1) + x$.
a) Să se arate că f este inversabilă.
b) Să se calculeze $(f^{-1})'(2)$, $(f^{-1})'(e+2)$.

A7. Fie funcția:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x - x^2, & x \in (-\infty, 0] \\ 3x + x^2, & x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

a) Să se arate că f este inversabilă.
b) Să se arate că $(f^{-1})'(-4) = (f^{-1})'(4)$.

5 DERIVATE DE ORDINUL II

Să considerăm funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2+1.$

Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi derivata ei este funcția $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ $f'(x)=3x^2-4x.$

Ne punem problema dacă noua funcție f' este funcție derivabilă şi în caz afirmativ care este derivata ei?

Răspunsul este următorul:

• funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile, deci are derivată. Derivata funcției f' se numeşte derivata de ordinul II a funcției f şi o vom nota f''.

Astfel avem: $f'':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(f')'(x)=6x-4.$

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ o funcție oarecare, derivabilă pe mulțimea $D\subset\mathbb{R}$.

Derivata funcției f este funcția $f':D_{f'}\to\mathbb{R},\ D_{f'}\subset D$ numită **derivata de ordinul I** sau **derivata întâi** a funcției f.

Derivata de ordinul I se determină folosind regulile de derivare şi derivatele funcțiilor elementare.

În continuare se va pune problema derivabilității funcției f' într-un punct sau pe o mulțime, precum şi problema existenței derivatei acesteia.

❖ DEFINIȚII

• Funcția $f:D\to\mathbb{R}$ este **de două ori derivabilă** în punctul $x_0\in D'\cap D$ dacă există o vecinătate $V\in\mathcal{V}(x_0)$ astfel încât:

a) f este derivabilă în orice punct al vecinătății V;

b) funcția derivată $f':V\to\mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $x_0\in V$.

• Derivata funcției f' în punctul x_0 se numeşte **derivata de ordinul II** (sau **derivata a doua**) a funcției f în punctul x_0 şi se notează $f''(x_0)$.

Aşadar, $$f''(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V\in\mathcal{V}(x_0)}}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Funcția f este de două ori derivabilă pe mulțimea $D_1\subset D$ dacă funcția f este derivabilă de două ori în orice punct al mulțimii D_1.

Funcția $(f')':D_1\to\mathbb{R}$ se numeşte derivata de ordinul II a funcției f (sau derivata a doua) şi se notează f'' sau $f^{(2)}$.

➲ OBSERVAȚIE

• Dacă funcția f este derivabilă numai în punctul x_0 (sau pe o mulțime care nu are pe x_0 punct de acumulare) nu se poate defini derivata a doua în x_0.

Aşadar, orice funcție derivabilă de două ori în punctul x_0 are derivata întâi f' definită pe o întreagă vecinătate a lui x_0.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ x^3-x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ este derivabilă numai în punctul $x_0=0$.

Rezultă că pentru această funcție nu se poate pune problema derivabilității de ordinul II în $x_0=0$.

Problemă rezolvată

☒ Să se arate că funcția f este de două ori derivabilă şi să se determine funcția f'' în cazurile:

a) $f(x)=2x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=\sin x,\ x\in\mathbb{R}$;

c) $f(x)=\ln(x^2+1), x\in\mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

a) Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile şi $f'(x)=(2x^2-x+1)'=4x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcții derivabile şi derivata acesteia care este derivata de ordinul II a funcției f este dată de: $f''(x)=(f')'(x)=(4x-1)'=4,\ x\in\mathbb{R}$.

b) Funcția sinus este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca funcție elementară şi derivata de ordinul I este $f'(x)=\cos x,\ x\in\mathbb{R}$. Funcția f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca funcție elementară şi derivata acesteia care reprezintă derivata de ordinul II a funcției f este $f''(x)=(f')'(x)=-\sin x,\ x\in\mathbb{R}$.

c) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(x^2+1)$ este funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca o compunere de funcții derivabile. Avem:

$$f'(x)=(\ln)'(x^2+1)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Funcția rațională f' este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind un cât de funcții derivabile pe $\mathbb{R}$. Derivata derivatei de ordinul I este derivata de ordinul II a funcției f, anume:

$$f''(x)=(f')'(x)=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

6 APLICAȚII. RĂDĂCINI MULTIPLE ALE ECUAȚIILOR POLINOMIALE

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ o funcție polinomială de gradul n.

❖ DEFINIȚIE

• Se numeşte **ecuație polinomială** de gradul n ecuația $f(x)=0,$ unde f este funcție polinomială de gradul n.

Exemplu de ecuații polinomiale:
1. ecuația polinomială de gradul 1: $ax+b=0,\ a\neq 0;$
2. ecuația polinomială de gradul 2: $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0;$
3. ecuația polinomială de gradul 3: $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ a\neq 0.$

❖ DEFINIȚIE

• Fie f o funcție polinomială de gradul $n,\ n\in\mathbb{N}^*$. Numărul $x_0\in\mathbb{R}$ se numeşte **rădăcină multiplă** de ordinul m, $m\in\{1, 2, ..., n\}$ a ecuației polinomiale $f(x)=0$ dacă există o funcție polinomială g de gradul $n-m$ astfel încât: **a)** $f(x)=(x-x_0)^m\cdot g(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R};$ **b)** $g(x_0)\neq 0.$

Numărul m se numeşte **ordin de multiplicitate** a rădăcinii x_0.

Dacă $m=1, 2, 3, ...,$ numărul x_0 se numeşte **rădăcină simplă, dublă**, **triplă** etc.

▣ TEOREMA 7

Fie f o funcție polinomială de gradul n, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă numărul real x_0 este rădăcină multiplă de ordinul m al ecuației polinomiale $f(x)=0,$ atunci ea este rădăcină multiplă de ordinul $(m-1)$ pentru ecuația polinomială $f'(x)=0.$

Demonstrație

Din definiția rădăcinii multiple de ordinul m rezultă că există funcția polinomială g astfel încât $f(x)=(x-x_0)^m g(x),\ g(x_0)\neq 0.$

Avem $f'(x)=(x-x_0)^{m-1}\left[mg(x)+(x-x_0)g'(x)\right]=(x-x_0)^{m-1}\cdot h(x).$

Deoarece $f'(x_0)=0$ şi $h(x_0)=mg(x_0)\neq 0$ rezultă că x_0 este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pentru ecuația $f'(x)=0$. ■

Această teoremă dă posibilitatea formulării condițiilor în care un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ este rădăcină dublă, triplă sau de un ordin mai mare.

Astfel:

- x_0 este rădăcină simplă dacă $f(x_0)=0$ şi $f'(x_0)\neq 0$;
- x_0 este rădăcină dublă dacă $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$ şi $f''(x_0)\neq 0$;
- x_0 este rădăcină triplă dacă $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$ şi x_0 este rădăcină simplă pentru $f''(x)=0$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x_0=1$ pentru ecuația $x^4-x^3-3x^2+5x-2=0$.

Soluție

Considerăm funcția polinomială $f(x)=x^4-x^3-3x^2+5x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Avem: $f(1)=0,\ f'(x)=4x^3-3x^2-6x+5$ şi $f'(1)=0$.

$f''(x)=12x^2-6x-6$ şi $f''(1)=0$, iar $f''(x)=(x-1)(12x+6)$.

Aşadar, $f(1)=f'(1)=f''(1)=0$ şi $x_0=1$ este rădăcină simplă pentru ecuația $f''(x)=0$.

Rezultă că $x_0=1$ este rădăcină triplă.

☒ **2.** Să se determine numerele $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $2ax^{2007}+bx^{223}+$ $+32=0$ are rădăcina dublă $x_0=1$.

Soluție

Fie funcția polinomială $f(x)=2ax^{2007}+bx^{223}+32,\ x\in\mathbb{R}$.

Din condițiile $f(1)=0$ şi $f'(1)=0$ se obțin relațiile $2a+b+32=0$ şi $4014a+223b=0$.

Se obține $a=2$ şi $b=-36$ şi se arată că pentru aceste valori $f''(1)\neq 0$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se calculeze derivata de ordinul II pentru funcțiile:**

a) $f(x)=x^4-2x^3+5x^2+3x-1,\ x\in\mathbb{R}$;

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2},\ x\neq -2$;

c) $f(x)=x\sqrt{x},\ x\geq 0$;

d) $f(x)=x\cdot e^{x^2+2x},\ x\in\mathbb{R}$;

e) $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg}x,\ x\in\mathbb{R}$;

f) $f(x)=\ln(x^2+1)-\operatorname{arcctg}x,\ x\in\mathbb{R}$.

E2. Să se rezolve ecuația $f''(x)=0$ pentru funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$, precizând mulțimea D, dacă:
a) $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$;
b) $f(x)=x\sqrt{x+3}$;
c) $f(x)=x+2\operatorname{arctg} x$;
d) $f(x)=x+\sin x$;
e) $f(x)=\ln(2+\sin x)$; f) $f(x)=e^{-x^2+x}$;
g) $f(x)=\sqrt{x^2+4}+3\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$;
h) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

E3. Să se arate că funcția f verifică identitatea dată:
a) $f(x)=5x^2+4x-2$, $x^2\cdot f''(x)+f'(x)=2\left[x+f(x)+4\right]$, $x\in\mathbb{R}$;
b) $f(x)=e^{x^2-x}$, $\left(4x^2+1\right)f(x)-2f'(x)-f''(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$;
c) $f(x)=e^{2x}\cos 4x$, $f''(x)-4f'(x)+8f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$;
d) $f(x)=x^2\sqrt{x}-4x$, $x\cdot f'(x)+\sqrt{x}\cdot f''(x)-9x=\dfrac{10f(x)+3x}{4}$, $x>0$;

E4. Să se determine funcția polinomială de gradul 2, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ştiind că: $f''(10)=-6$, $f'(2)=-8$, $f(0)=5$.

E5. Să se determine numerele $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația are rădăcina dublă indicată:
a) $x^3+(a+1)x^2-3x+2b=0$, $x_0=-3$;
b) $4x^4-2ax^3+5x^2-bx+1=0$, $x_0=\dfrac{1}{2}$;
c) $x^4-\left(a^2-a-1\right)x^3+(a-3)x+2b-1=0$, $x_0=1$.

E6. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii date:
a) $x^4-9x^2-4x+12=0$, $x_0=-2$;
b) $5x^4+3x^3-8x^2-5x+1=0$, $x_0=-1$;
c) $3x^4-4x^3+7x^2-5x+1=0$, $x_0=\dfrac{1}{3}$;
d) $2x^4-5x^3+3x^2+x-1=0$, $x_0=1$.

APROFUNDARE

A1. Să se studieze dacă funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt derivabile de ordinul II:
a) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ \operatorname{arctg} x, & x>0\end{cases}$;
b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arcctg} x, & x\le 0\\ x^3-x, & x>0\end{cases}$;
c) $f(x)=|x-3|^3$.

A2. Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}2\sin x+(a-2)\cos x, & x\ge 0\\ bx^2+cx+1, & x<0\end{cases}$$
să fie de două ori derivabilă în punctul $x_0=0$.

A3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}x^3+(m-1)x^2+nx+2p, & x<2\\ \operatorname{arctg}(x-2), & x\ge 2\end{cases}.$$
Ştiind că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ să se determine $m, n, p\in\mathbb{R}$ şi $f''(2)$.

A4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}x^4+(3-a)x^2-4x+b, & x<0\\ -2, & x=0\\ x^3-5x^2+cx+3-d, & x>0\end{cases}.$$
Pentru ce valori ale parametrilor a, b, c, d funcția f este de două ori derivabilă în $x_0=0$?

A5. Să se studieze existența numerelor $f''(0)$ și $g''(3)$ pentru funcțiile date prin: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+1}, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}\ln^2(x-2), & x\ge 3\\ (x-3)^2, & x<3\end{cases}$.

A6. Să se determine funcția polinomială f de gradul 3 dacă: $f(0)=5$, $f'(0)=3$; $f''(0)=-8$ și $f''(2)=4$.

A7. Fie funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln[(x+a)(bx+c)]$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Să se determine $f'(1)$ știind că $f(0)=\ln 2$, $f'(0)=\dfrac{3}{2}$, $f''(0)=-\dfrac{5}{4}$.

A8. Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=9x^4-ax^3+bx^2-cx+d$. Să se determine numărul $f'(-1)$ știind că ecuația polinomială $f(x)=0$ are rădăcinile duble $x_1=1$, $x_2=\dfrac{2}{3}$.

A9. Să se determine coeficienții ecuațiilor polinomiale știind că au pe $x=1$ rădăcină de multiplicitate doi:

a) $ax^{10}+bx^9+2=0$;

b) $(a+1)x^{n+1}-2bx^{n-1}+x^{n-2}+1=0$.

A10. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ știind că ecuațiile polinomiale $2x^4-(3a+2)x^3+9x^2-bx+4=0$ și $x^3-12x+c=0$ au o rădăcină reală dublă comună.

A11. Să se determine funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de grad $n, n\ge 1$ cu proprietatea:

a) $f(x)=f'(x)\cdot f''(x)$, $x\in\mathbb{R}$;

b) $4f(x)\cdot f'(x)=f''\left(x^{n-2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

A12. Se consideră funcția polinomială f de gradul n, $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, $x\in\mathbb{R}$ și funcția g definită prin $g(x)=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+\dots+\dfrac{1}{x-a_n}$, $x\ne a_i$, $i=\overline{1,n}$.

Să se arate că:

a) $g'(x)<0$, $\forall\, x\in D_g$;

b) $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $x\in D_g$;

c) $(f'(x))^2\ge f(x)\cdot f''(x)$, $x\in D_g$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

O1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2+(m-2)x+2-m}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Pentru $m=0$ să se determine $f'(-1)$ și $f''(0)$.

O2. Să se calculeze $f'(x)$ și $f''(x)$ pentru funcțiile $f:D\to\mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\sin x}$; b) $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$; c) $f(x)=\begin{cases}x+\sin x, & x\le 0\\ 2x+\ln(1+x^2), & x>0\end{cases}$.

❍3. Pe graficul funcției $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+2}{x}$ să se determine punctul $A(a, b)$ astfel încât tangenta în A să fie paralelă cu dreapta BC, unde $B(1, 1)$, $C\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

❍4. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x=-2$ pentru ecuația polinomială $3x^4+12x^3+11x^2-4x-4=0$.

Testul 2

❍1. Să se calculeze derivatele de ordin I și II, pentru funcțiile date de:

a) $f(x)=(3x-1)e^{2x+3}$; b) $f(x)=\frac{x\ln(x+1)}{x+1}$; c) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}+x^2, & x\le 0 \\ \sqrt{x^2+1}+x^3, & x>0 \end{cases}$.

❍2. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ are loc egalitatea:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

❍3. Să se arate că nu există nici o funcție polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât: $f(x)=\ln(1+x),\ \forall\ x\in[0, +\infty)$. (Universitate, Buc., 1985)

❍4. Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^5+ax^4-bx^3-cx^2+dx+3$ și $\alpha=3a-b-c+2d$. Dacă ecuația $f(x)=0$ are $x_1=1$ și $x_2=-1$ rădăcini de multiplicitate de ordinul doi, atunci α este egal cu:

a) 9; b) 3; c) –1; d) 0.

Testul 3

❍1. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x(x^2+1)}{4}\cdot\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Să se determine mulțimile D și $D_{f'}$.

b) Să se calculeze $\frac{5f''(-\sqrt{2})}{f'(\sqrt{2})+f'(-\sqrt{7})}$.

❍2. Să se determine punctele unghiulare ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x^2}$.

❍3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \ln(3-x), & x\le 2 \\ ax^2-x(2a-b)+c, & x>2 \end{cases}$.

a) Să se determine $a, b, c\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie de două ori derivabilă în $x=2$.

b) Pentru $a=-\frac{1}{2}$ și $b=c=0$, să se scrie ecuația tangentei la grafic în punctul cu abscisa egală cu $18f''(0)$.

❍4. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$, $g(x)=f(x)+6x^2+11x+7$.

a) Să se arate că f este bijectivă.

b) Să se arate că funcția f^{-1} este derivabilă în $y_0=3$ şi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

c) Ce ordin de multiplicitate are $x=-2$ pentru ecuația polinomială $g(x)=0$?

7 FUNCȚII DERIVABILE PE UN INTERVAL

7.1. PUNCTE DE EXTREM

Noțiunea de **punct de extrem** a fost întâlnită încă din clasa a IX-a (mai mult intuitiv) în legătură cu studiul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. S-a arătat că:

1. Dacă a > 0, atunci $f(x)\geq -\dfrac{\Delta}{4a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, egalitatea realizându-se pentru $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

Valoarea funcției $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{\Delta}{4a}$ reprezintă **minimul funcției** (cea mai mică valoare a funcției), iar punctul $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ reprezintă **punctul de minim** al funcției.

Punctul $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ al parabolei asociate, reprezintă **punctul de minim** al acesteia.

2. Dacă a < 0, atunci $f(x)\leq -\dfrac{\Delta}{4a}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, egalitatea având loc pentru $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. Valoarea funcției $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{\Delta}{4a}$ în acest caz, reprezintă **maximul funcției** (cea mai mare valoare a funcției), iar punctul $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ reprezintă **punctul de maxim** al funcției.

Punctul $V\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ reprezintă **punctul de maxim** al parabolei asociate.

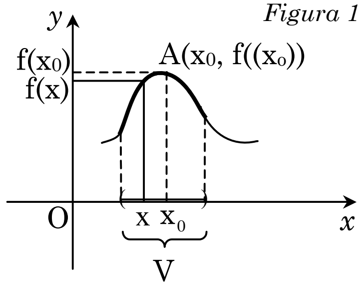
❖ DEFINIȚIE

• Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct de maxim relativ (local) al funcției f** dacă există o vecinătate V a punctului x_0, astfel încât pentru orice $x \in V \cap D$, are loc relația:

$$f(x) \le f(x_0). \qquad (1)$$

Figura 1



x_0 punct de maxim relativ

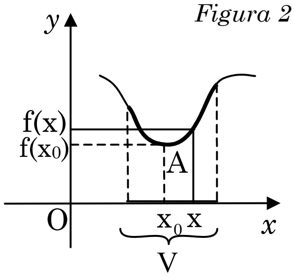
Valoarea $f(x_0)$ a funcției în punctul de maxim relativ se numeşte **maximul relativ** (local) al funcției, iar punctul $A(x_0, f(x_0))$ de pe curba asociată graficului funcției se numeşte **punct de maxim relativ** al acesteia.

❖ DEFINIȚIE

• Un punct $x_0 \in D$ se numeşte **punct de minim relativ (local) al funcției f** dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in V \cap D$, are loc relația:

$$f(x) \ge f(x_0). \qquad (2)$$

Figura 2



x_0 punct de minim relativ

Valoarea $f(x_0)$ a funcției în punctul de minim relativ se numeşte **minimul relativ** (local) al funcției f, iar punctul $A(x_0, f(x_0))$ de pe curba asociată graficului funcției se numeşte **punct de minim relativ** al acesteia.

Punctele x_0 de maxim relativ sau de minim relativ ale unei funcții se numesc **puncte de extrem relativ ale funcției**.

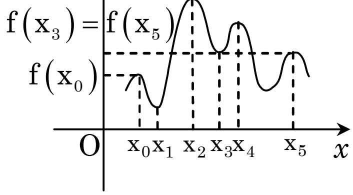
Valorile funcției în punctele de extrem relativ se numesc **extremele relative ale funcției**.

Punctele de maxim relativ şi punctele de minim relativ ale curbei asociate graficului funcției se numesc **puncte de extrem relativ ale graficului**.

➲ OBSERVAȚII

1. O funcție poate avea mai multe puncte de extrem relativ, iar un minim relativ poate fi mai mare sau egal decât un maxim relativ. Acest fapt justifică folosirea cuvântului „relativ“, (figura 3).

Figura 3



2. E posibil ca o funcție să nu aibă puncte de extrem, (figura 4).

☞ ***Exemplu***

- $f:(1, 2)\to\mathbb{R}, f(x)=x$, (figura 4).

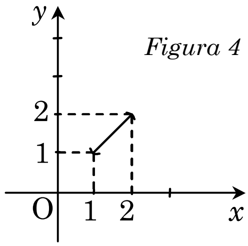


Figura 4

❖ **DEFINIȚII**

- Un punct $x_0\in D$ este **punct de maxim absolut al funcției f** dacă $f(x)\le f(x_0)$, $\forall x\in D$.
- Valoarea $f(x_0)$ reprezintă **maximul absolut al funcției**.

Orice punct de maxim absolut este şi punct de maxim relativ (local), dar reciproca nu este în general adevărată.

O funcție poate avea mai multe puncte de maxim absolut.

☞ ***Exemplu***

- Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

Mulțimea $\{2k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$ reprezintă mulțimea punctelor de maxim absolut, iar $f(2k\pi)=1$, $k\in\mathbb{Z}$ reprezintă maximul absolut al funcției cosinus.

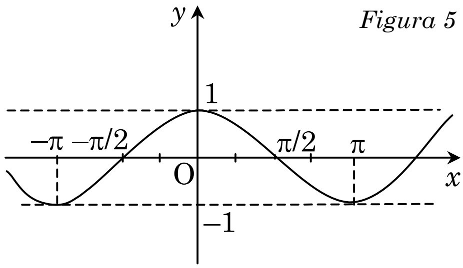


Figura 5

❖ **DEFINIȚII**

- Un punct $x_0\in D$ se numeşte **punct de minim absolut al funcției** $f:D\to\mathbb{R}$, dacă $f(x)\ge f(x_0)$, $\forall x\in D$.
- Valoarea $f(x_0)$ reprezintă **minimul absolut al funcției**.

Orice punct de minim absolut este şi punct de minim relativ, dar reciproc nu este în general adevărat.

O funcție poate avea mai multe puncte de minim absolut. În figura 5 mulțimea punctelor de minim relativ este $\{(2k+1)\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, iar minimul absolut al funcției cosinus este $f(2k+1)=-1$, $x\in\mathbb{Z}$.

Punctele de maxim absolut şi de minim absolut se numesc **puncte de extrem absolut**.

7.2. TEOREMA LUI FERMAT

> ▣ **TEOREMA 8 (Pierre Fermat 1601-1665)**
> Fie funcția $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in(a, b)$ un punct de extrem al funcției.
> Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)=0$.

<u>*Demonstrație*</u>

Să presupunem că punctul x_0 este punct de maxim din interiorul intervalului [a, b]. Atunci există o vecinătate V a punctului x_0, $V\subset[a, b]$, astfel încât $f(x) \le f(x_0)$ sau $f(x) - f(x_0) \le 0$, $\forall x \in V$. Din faptul că f este derivabilă în x_0, rezultă că:

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \text{ şi } f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0.$$

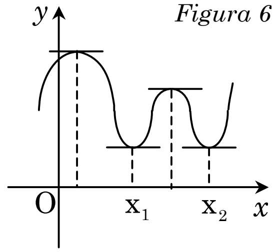
Rezultă că $f'(x_0) = 0$ şi teorema este demonstrată.

În cazul în care x_0 este punct de minim se procedează ca mai înainte, sau se observă că x_0 este punct de maxim pentru funcția g = –f. Conform primei părți a demonstrației avem $g'(x_0) = 0$, adică $f'(x_0) = 0$. ■

• **Interpretare geometrică**

Teorema lui Fermat arată că într-un punct de extrem din interiorul unui interval, tangenta la graficul unei funcții derivabile este paralelă cu axa Ox (panta este zero), (figura 6).

Figura 6



➲ **OBSERVAȚII**

1. Condiția ca punctul de extrem x_0 să fie în interiorul intervalului [a, b] este esențială. Dacă x_0 ar fi una din extremitățile intervalului, este posibil ca funcția f să fie derivabilă în x_0, iar derivata sa să nu se anuleze în acest punct.

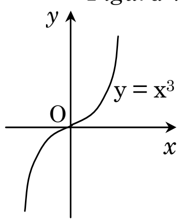
☞ ***Exemplu***

• Funcția f : [1, 2] → ℝ, f(x) = x² are minim în punctul $x_0 = 1$ şi maxim în punctul $x_1 = 2$.

Derivata f '(x) = 2x, $x \in [1, 2]$ nu se anulează în intervalul [1, 2].

2. Reciproca teoremei lui Fermat nu este, în general, adevărată.
Din faptul că funcția f este derivabilă în punctul x_0 şi $f'(x_0) = 0$ nu rezultă întotdeauna că x_0 este punct de extrem.

Figura 7

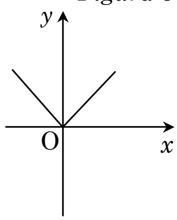


☞ ***Exemplu***

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = x³ este derivabilă în $x_0 = 0$, f '(0) = 0, însă punctul $x_0 = 0$ nu este punct de extrem, (figura 7).

3. Condiția de derivabilitate a funcției în punctul x_0 nu este condiție necesară pentru ca punctul x_0 să fie punct de extrem.

Figura 8



☞ ***Exemplu***

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = |x| are $x_0 = 0$ punct de minim interior domeniului de definiție, fără ca f să fie derivabilă în $x_0 = 0$, (figura 8).

4. Dacă funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă, atunci zerourile derivatei f' din intervalul deschis (a, b) se numesc **puncte critice** ale funcției.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcții derivabile sunt printre punctele critice ale funcției.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 5$. Să se arate că $x = 2$ este punct de maxim al funcției f.

Soluție

$f(x) = -(x^2 - 4x - 5) = -[(x - 2)^2 - 9] = -(x - 2)^2 + 9 \le 9 = f(2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $x_0 = 2$ este punct de maxim al funcției.

☒ **2.** Fie $a > 0$ și $a^x \ge x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $a = e$.

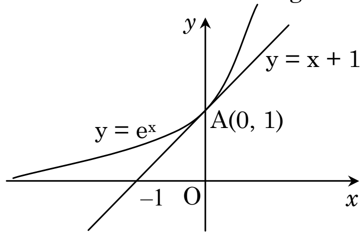
Soluție

Relația din ipoteză este echivalentă cu $a^x - x - 1 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - x - 1$. Din ipoteză avem că $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $f(0) = 0$ și $f(x) \ge 0 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $x_0 = 0$ este punct de minim al lui f. Aplicând teorema lui Fermat se obține că $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a^x \cdot \ln a - 1$ și deci $f'(0) = \ln a - 1$. Rezultă că $a = e$.

Figura 9



Pentru a proba că $e^x \ge x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, considerăm graficul funcției $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, (figura 9).

Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(0, 1)$ este $y - e^0 = g'(0) \cdot (x - 0)$ sau încă $y = x + 1$.

Din lectura grafică se obține că $e^x \ge x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$. Să se arate că $x_0 = 1$ este punct de minim al funcției și să se determine minimul funcției f.**

E2. **Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor date, relativ la domeniile lor de definiție, precizând totodată și extremele funcției:**
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 10x - 1$;
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 2$;
c) $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$;
d) $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$;
e) $f : (-3, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$;
f) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-1}$.

E3. **Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4|$, $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Fermat pe $[-3, 3]$.**

E4. Să se determine punctele critice ale funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = x^3 - 3x$;
b) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$;
c) $f(x) = \ln(x-3) - \ln(x^2-5)$;
d) $f(x) = (x^3 + 3x^2) \cdot e^x$;
e) $f(x) = \cos^6 2x$;
f) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{4x+3}{\sqrt{x^2+1}}$;
g) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|+2}$;
h) $f(x) = \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$;
i) $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \cdot \arcsin\dfrac{x}{a}$.

APROFUNDARE

A1. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - (a+1)x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Să se determine $f'(0) \cdot f(0)$ știind că $x = -1$ este punct de maxim local al funcției și valoarea maximă a funcției este 6.

A2. Să se determine funcția polinomială $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ știind că f are un maxim local egal cu -1 în punctul $x = 1$ și un minim local egal cu -2 în punctul $x = 2$.

A3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = 6^x + a^x - 14^x - 15^x$, $a > 0$.
a) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
b) Să se determine a astfel încât $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

A4. Se consideră funcția $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \left(x - \dfrac{2m}{m^2+1}\right)^4$.
Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să aibă un minim în punctul $x = 1$.

A5. Să se determine $a > 0$, știind că $a^x + 1 \geq 3^x + 4^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A6. Să se determine $a > 0$ dacă $a^x + 2^x \geq 3^x + 4^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

A7. Să se determine $a > 0$ dacă:
$\ln(x-1) \leq a(x-2)$, $\forall\, x \in (1, \infty)$.

A8. Să se arate că dacă $(1+x)^3 \geq 1 + mx$, $\forall\, x > -1$, atunci $m = 3$.

7.3. TEOREMA LUI ROLLE

Teorema lui Fermat dă condiții suficiente pentru ca o funcție să aibă derivata nulă într-un punct, dar nu și condiții necesare. Un alt rezultat care dă numai condiții suficiente pentru ca derivata unei funcții să se anuleze într-un punct îl reprezintă următoarea teoremă:

> ▣ **TEOREMA 9 (Michel Rolle 1652-1719)**
> Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă:
> **a)** funcția f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$;
> **b)** funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b);
> **c)** $f(a) = f(b)$,
> atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație

Deosebim următoarele situații:

a) f este constantă pe $I=[a, b]$. Atunci $f'(x)=0, \forall x \in I$;

b) f nu este constantă pe I.

Deoarece f este continuă pe $I=[a, b]$, ea este mărginită şi îşi atinge marginile pe acest interval. Astfel, există punctele $u, v \in I$ astfel ca $f(u) \le f(v)$, $\forall x \in I$. Deoarece f nu este constantă avem $f(u) < f(v)$.

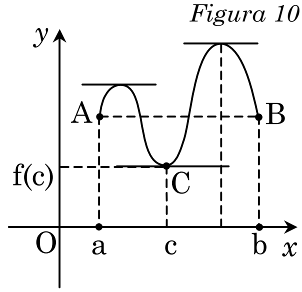
Punctele u şi v sunt puncte de extrem pentru funcția f. Având $f(u) < f(v)$, atunci cel puțin unul dintre punctele u şi v este interior intervalului $[a, b]$.

În caz contrar am avea $f(u)=f(a)=f(b)=f(v)$, ceea ce nu se poate.

Fie $u \in (a, b)$. Atunci, din teorema lui Fermat rezultă că $f'(u)=0$ şi se ia $c=u$. ■

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A TEOREMEI LUI ROLLE

Figura 10



În condițiile cuprinse în teorema lui Rolle, rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul $C(c; f(c))$ este paralelă cu axa Ox, (figura 10) sau este chiar axa Ox.

➲ OBSERVAȚIE

- Fie funcția $f:[-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2, & x \in [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \\ x^3, & x \in [-1, \sqrt{2}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$.

Pe intervalul $[-1, \sqrt{2}]$ nu se verifică nici una din condițiile a), b), c) ale teoremei lui Rolle. Totuşi $f'(0)=0$. Aşadar, ipotezele teoremei lui Rolle sunt numai suficiente pentru anularea derivatei.

CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI ROLLE

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție oarecare, $I \subset \mathbb{R}$ interval de numere reale. Soluțiile reale ale ecuației $f(x)=0$ se numesc zerourile (rădăcinile) funcției f pe intervalul I.

Teorema lui Rolle conduce la câteva referiri privind zerourile unei funcții numerice.

▣ CONSECINȚA 1
Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval I se află cel puțin un zero al derivatei.

Demonstrație

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I şi $a, b \in I, a < b$ zerouri ale funcției, f(a) = f(b) = 0.

Aplicând teorema lui Rolle pe intervalul $[a, b]$, rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$, deci c este zero al derivatei. ■

▣ CONSECINȚA 2
Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval I se află cel mult un zero al funcției.

Demonstrație

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I şi $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ două zerouri consecutive ale derivatei f'. Presupunem prin absurd că în intervalul (x_1, x_2) există a, b astfel încât f(a) = f(b) = 0, $a < b$.

Aplicând teorema lui Rolle funcției f pe intervalul $[a, b]$, rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Rezultă că $x_1 < c < x_2$ în contradicție cu faptul că x_1, x_2 sunt zerouri consecutive ale funcției f'. Aşadar, presupunerea făcută este falsă şi afirmația din consecință este demonstrată. ■

Probleme rezolvate

☒ **1.** Se consideră $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, funcție derivabilă care verifică relația $f(0) = f(1) = 0$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât $f'(c) + f(c) = 0$.

Soluție

Pornim de la ideea că expresia $f'(c) + f(c) = 0$ poate reprezenta valoarea derivatei unei funcții în punctul c.

Astfel, definim funcția $g: [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) \cdot e^x$. Aceasta este derivabilă pe $[0, 1]$ ca produs de funcții derivabile şi $g(0) = g(1) = 0$. Conform teoremei lui Rolle, există $c \in (0, 1)$ astfel încât $g'(c) = 0$, ceea ce este echivalent cu $f'(c) + f(c) = 0$.

☒ **2.** Se dă funcția polinomială de gradul 4, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + ax + b$. Să se arate că ecuația $f(x) = 0$ nu poate avea 4 soluții reale distincte.

Soluție

Presupunem prin absurd că ecuația are soluțiile reale distincte x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încât $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Conform consecinței 1, ecuația $f'(x) = 0$ are trei soluții reale distincte $x_1' \in (x_1, x_2)$, $x_2' \in (x_2, x_3)$, $x_3' \in (x_3, x_4)$. Aplicând această consecință funcției derivate $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}$ rezultă că ecuația $f''(x) = 0$ are două soluții reale distincte, $x_1'' \in (x_1', x_2')$, $x_2'' \in (x_2', x_3')$. Dar $f''(x) = 12(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ şi ecuația $f''(x) = 0$ nu are două soluții reale. Această contradicție arată că ecuația $f(x) = 0$ nu poate avea 4 soluții reale, distincte.

f: $\quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

f': $\quad x_1' \quad x_2' \quad x_3'$

f'': $\quad x_1'' \quad x_2''$

☒ **3.** Să se rezolve ecuația exponențială $3^{x+1} + 2^x = 8^x + 3$.

Soluție

Se observă că $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$ sunt soluții ale ecuației. Să arătăm că ecuația nu mai are şi alte soluții reale.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x+1} + 2^x - 8^x - 3$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ se scrie sub forma $3^{x+1}\ln 3 + 2^x \ln 2 = 8^x \ln 8$ sau $3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \ln 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln 2 = \ln 8.$ (1)

Funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \ln 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln 2$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ şi în acest caz ecuația (1) are cel mult o soluție reală, deci şi ecuația $f'(x) = 0$ are cel mult o soluție reală. Aşadar, ecuația $f(x) = 0$ are cel mult două soluții reale. Rezultă că 0 şi 1 sunt singurele soluții reale ale acestei ecuații.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se verifice dacă se poate aplica teorema lui Rolle funcțiilor:

a) $f: [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 6$;

b) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 15x^2 + 14x$;

c) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |4x^2 - x^4|$;

d) $f: \left[-1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0) \\ 1 - \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases};$$

e) $f: \left[-\frac{\pi}{4}, 1\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \\ -x, & x \in (0, 1] \end{cases};$$

f) $f: \left[-\frac{\pi}{3}, 1\right] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x - 1, & x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right) \\ 1 - x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

E2. Să se determine constantele $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să se poată aplica teorema lui Rolle funcțiilor:

a) $f: [-2, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \in [-2, 0) \\ 2x, & x \in [0, 1] \end{cases};$$

b) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (2a-1)x + b, & x < 0 \\ (c-1)x^2 + 3x - 5, & x \geq 0 \end{cases}$$ şi apoi

să se aplice efectiv teorema.

E3. Fie funcția $f: [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$. Există puncte $c \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției în $C(c, f(c))$ să fie paralelă cu axa Ox?

E4. Să se determine $c \in (-1, 1)$ astfel încât tangenta în punctul cu abscisa c de pe graficul funcției $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ să fie paralelă cu axa Ox.

E5. Să se arate că derivatele de ordinul I ale funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au numai zerouri reale:

a) $f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)$;

b) $f(x) = (x^2-1)(x^2+x-6)$;

c) $f(x) = (4x^2-1)(9-x^2)$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care se poate aplica teorema lui Rolle funcțiilor şi să se aplice aceasta, dacă:

a) $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 7x + b - 3, & x \in [-3, 0) \\ x^2 + (c+1)x + 1, & x \in [0, 3] \end{cases};$$

b) $f: [-1, e-1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \in [-1, 0) \\ \ln(x+1), & x \in [0, e-1] \end{cases}.$$

(ASE, Buc., 1995)

A2. Să se determine punctele în care tangenta la grafic este paralelă cu Ox pentru funcțiile:

a) $f: \left[-2, \frac{5}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{10 + x - 2x^2}$;

b) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 2, & x < 1 \\ x^2 - 5x + 5, & x \geq 1 \end{cases}.$$

A3. Fie funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi $f(0) = 0$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $f'(c) = -\frac{f(c)}{c-1}$.

A4. Fie funcția $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi $f(1) = 2f(2)$. Să se arate că există $c \in (1, 2)$, astfel încât $f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$.

A5. Fie $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R}^*$ derivabile, astfel încât $f(1) \cdot g(0) = f(0) \cdot g(1)$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

A6. Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, există $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x} = \frac{n}{m}$.

A7. Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă şi $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Să se arate că $f(a) \neq f(b)$.

A8. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă care are n zerouri distincte. Să se arate că derivata f' are cel puțin $(n-1)$ zerouri distincte.

A9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție polinomială de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că f are cel mult n zerouri reale.

b) Dacă f are n zerouri reale şi diferite, atunci f' are toate zerourile reale şi distincte.

A10. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție polinomială nenulă. Să se verifice dacă f are toate zerourile reale, atunci şi funcția $f+mf'$ are toate zerourile reale, $m\in\mathbb{R}$.**

A11. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție polinomială, astfel încât curba reprezentativă intersectează prima bisectoare a axelor în trei puncte distincte. Să se arate că $\exists\ c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f''(c)=0$.**

A12. **Să se rezolve ecuațiile exponențiale:**

a) $3^x+2^{2x+1}=6^x+5$;

b) $3^{2x+1}=2^{4x+1}-3\cdot 2^{2x}+7$.

7.4. APLICAȚIE. ȘIRUL LUI ROLLE

> ***NE REAMINTIM!***
> *Criteriul Cauchy-Bolzano*
> *Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I şi $a,b\in I$, $a<b$. Dacă $f(a)\cdot f(b)<0$, atunci ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție $c\in(a,b)$.*

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval de numere reale şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție numerică.

Dacă f este funcție continuă, criteriul Cauchy-Bolzano dă condiții suficiente ca ecuația $f(x)=0$ să aibă soluții reale pe intervalul I.

O altă problemă legată de soluțiile ecuației f(x) = 0 o reprezintă **separarea soluțiilor acesteia**.

Separarea soluțiilor ecuației f(x) = 0 presupune:

a) determinarea numărului de soluții reale ale ecuației;

b) precizarea intervalelor în care sunt situate aceste soluții.

Teorema lui Rolle, consecințele acesteia şi criteriul Cauchy-Bolzano conduc la o metodă de separare a soluțiilor reale ale unor ecuații de forma f(x) = 0, unde f este o funcție derivabilă, metodă numită **şirul lui Rolle**.

Etapele şirului lui Rolle

a) Se fixează intervalul I de studiu al ecuației f(x) = 0 şi se defineşte funcția $f:I\to\mathbb{R}$, derivabilă pe I.

b) Se calculează f' şi se determină soluțiile $x_1, x_2, ..., x_n\in I$ ale ecuației f '(x) = 0 din intervalul I, $x_1<x_2<...<x_n$.

c) Se formează şirul α, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, β, unde α şi β sunt valorile funcției la capetele intervalului I, sau limitele funcției f la capetele intervalului I.

d) Rezultatele anterioare se organizează într-un tabel cu liniile x, f '(x), f(x) şi o linie în care se trec semnele valorilor α, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, β.

Acest şir al semnelor valorilor funcției f se numeşte **şirul lui Rolle**.

Concluzii desprinse din analiza şirului lui Rolle

1°. Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, atunci în intervalul corespunzător nu există nici o soluție reală a ecuației f(x) = 0.

Într-adevăr, să considerăm intervalul $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ pentru care $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$:

• dacă în I_k există două sau mai multe soluții ale ecuației, atunci se contrazice consecința 2 a teoremei lui Rolle;

• dacă în I_k există o singură soluție c a ecuației, cum $f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$, atunci c este punct de extrem al funcției f, deci $f'(c) = 0$, contradicție cu faptul că x_k, x_{k+1} sunt zerouri consecutive ale derivatei.

2°. Dacă în şirul lui Rolle apar două semne consecutive diferite, ecuația $f(x) = 0$ are o singură soluție în intervalul corespunzător I_k.

Într-adevăr, să presupunem că $f(x_k) < 0$, $f(x_{k+1}) > 0$. Conform consecinței 2 a teoremei lui Rolle, ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție în I_k, iar conform criteriului Cauchy-Bolzano rezultă că există cel puțin o soluție a ecuației în I_k. Aşadar, se obține unicitatea soluției pe I_k.

3°. Dacă în şirul lui Rolle apare „zero“, de exemplu $f(x_k) = 0$, atunci se consideră că x_k este rădăcină multiplă a ecuației.

4°. Numărul schimbărilor de semn şi al zerourilor din şirul lui Rolle determină numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 0$.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se separe soluțiile reale ale ecuației $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1 = 0$.

<u>*Soluție*</u>

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - 1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Derivata este funcția $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x - 2)(x^2 - 1)$ şi are soluțiile: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Avem $\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 12$, $f(2) = 7$, $f(-1) = -20$, $\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Alcătuim tabelul:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$+\infty$	-20	12	7	$+\infty$
Şirul lui Rolle	+	–	+	+	+

Se observă că în şirul lui Rolle sunt doar două schimbări de semn.
Ecuația dată are două soluții reale $x_1 \in (-\infty, -1)$ şi $x_2 \in (-1, 1)$.

☒ **2.** Să se discute numărul soluțiilor reale ale ecuației $\ln(x^2 + 1) - \dfrac{x^2}{2} - m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Soluție

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} - m$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Derivata funcției f este $f'(x) = \frac{x(1-x^2)}{x^2+1}$ cu soluțiile $x_1 = -1,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1$.

Avem $\alpha = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = f(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} - m$, $f(0) = -m$, $\beta = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Se observă că valorile funcției calculate în soluțiile derivatei depind de m. Alcătuim tabelul de semn pentru aceste valori:

m	$-\infty$ 0 $\ln 2 - 0{,}5$ $+\infty$
$-m + \ln 2 - \frac{1}{2}$	+ + + + + + + + + + 0 – – – – –
$-m$	+ + + 0 – – – – – – – – – – – –

Tabelul asociat studiului cu ajutorul şirului lui Rolle are structura:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	Separarea soluțiilor
m \ f(x)	$-\infty$	$-m + \ln 2 - 0{,}5$	$-m$	$-m + \ln 2 - 0{,}5$	$-\infty$	
$m \in (-\infty, 0)$	–	+	+	+	–	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (1, \infty)$
$m = 0$	–	+	0	+	–	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 = 0$, dublă $x_3 \in (1, \infty)$
$m \in (0, \ln 2 - 0{,}5)$	–	+	–	+	–	$x_1 \in (-\infty, -1)$; $x_2 \in (-1, 0)$ $x_3 \in (0, 1)$; $x_4 \in (1, \infty)$
$m = \ln 2 - 0{,}5$	–	0	–	0	–	$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, duble
$m \in (\ln 2 - 0{,}5, \infty)$	–	–	–	–	–	$x \in \varnothing$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se separe rădăcinile reale ale ecuațiilor:**

a) $x^3 - 3x - 7 = 0$;

b) $4x^3 - 15x^2 + 12x - 3 = 0$;

c) $x^4 - 4x^3 - 5 = 0$;

d) $2x^3 - 21x^2 + 72x - 65 = 0$;

e) $6x^5 + 15x^4 - 40x^3 - 30x^2 + 90x = -1$;

f) $3x^2 - 7x + 2\ln x + 1 = 0$;

g) $\ln(x^2+2) - \frac{x^2}{3} - 4 = 0$;

h) $x \cdot e^{2x-1,5x^2} + 3 = 0$;

i) $\sin^3 x - 3\sin x - 1 = 0,\ x \in [0, 2\pi]$.

E2. **Să se discute rădăcinile reale ale ecuațiilor:**

a) $x^3 - 3x + m = 0$;

b) $x^3 + 3x^2 = -m$;

c) $\ln(x^2+1) - m = 0$;

d) $x^2 - 2\ln x = m$.

APROFUNDARE

A1. **Să se arate că ecuația:**
$(x+1)(x+2)(x+3)+(x+2)(x+3)(x+4)+(x+1)(x+3)(x+4)+(x+1)(x+2)(x+4)=0$
are toate soluțiile reale.

A2. **Să se discute după valorile parametrului m soluțiile reale ale ecuațiilor:**
a) $x^4-8x^3+22x^2-24x-m+2=0$;
b) $3x^4+20x^3-36x^2+2m=0$;
c) $2x^3-15x^2+36x-6+m=0$;
d) $x^4-8x^3+16x^2-9+m=0$;
e) $x^3+mx^2-x+5=0$.

A3. **Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ soluțiile reale ale ecuațiilor:**
a) $e^x-mx^2=0$; **b)** $e^x-mx=0$;
c) $e^{x^2-3x}+m=0$; **d)** $\sin x+x-m=0$;
e) $\sin x\cdot\cos^3 x=m$; **f)** $\ln x-mx=0$.

A4. **Fie** $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0\end{cases}.$$
Să se arate că f satisface condițiile teoremei lui Rolle și există un șir (c_n) pentru care $f'(c_n)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

7.5. TEOREMA LUI LAGRANGE

În continuare, vom folosi teorema lui Rolle pentru demonstrarea unui rezultat important în analiza matematică, cunoscut sub denumirea de **teorema creșterilor finite** sau **teorema lui Lagrange**.

> ▣ **TEOREMA 10 (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)**
> Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$. Dacă:
> **a)** funcția f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$,
> **b)** funcția f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b),
> atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. (1)

<u>*Demonstrație*</u>

Relația din concluzia teoremei se poate scrie și sub forma:

$f'(c)-k=0$, unde $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Se observă că $f'(x)-k$ se obține prin derivarea funcției $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-kx$.

Funcția g este derivabilă pe (a, b), continuă pe $[a, b]$, iar $g(a)=g(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, deci îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle.

Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$.

Din această relație rezultă $f'(c)=k$ și teorema este demonstrată. ■

Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) matematician și astronom francez
A pus bazele mecanicii analitice și ale calculului variațiilor.

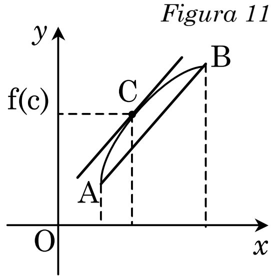
Formula (1) se numeşte **formula lui Lagrange** sau **formula creşterilor finite** sau **formula mediei** pentru funcţii derivabile.

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange

• Dacă graficul funcţiei f admite tangentă în fiecare punct, eventual cu excepţia capetelor intervalului [a, b], atunci există un punct pe grafic în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte extremităţile acestuia, (figura 11).

Într-adevăr, dacă A(a, f(a)), B(b, f(b)) sunt extremităţile graficului, atunci panta segmentului [AB] este $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, iar panta tangentei în punctul C(c, f(c)) este f '(c). Formula lui Lagrange arată tocmai egalitatea celor două pante.

Figura 11



Probleme rezolvate

☒ **1.** Fie $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x+3, & x \in [-1, 1) \\ 2x^2+5, & x \in [1, 3] \end{cases}$.

Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Lagrange şi să se determine un punct în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise –1 şi 3.

Soluţie

Funcţia f este continuă şi derivabilă pe $[-1, 1) \cup (1, 3]$.

Deoarece $f(1-0) = 7 = f(1+0)$ şi $f'_s(1) = 4 = f'_d(1)$ rezultă că f este continuă şi derivabilă în $x = 1$.

Aşadar, se poate aplica teorema lui Lagrange şi există $c \in (-1, 3)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(3)-f(-1)}{3+1} = 6$.

Deoarece $f'(x) = \begin{cases} 4, & x \in [-1, 1) \\ 4x, & x \in [1, 3] \end{cases}$, din egalitatea f '(c) = 6 se obţine c = 1,5.

Folosind interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange, rezultă că tangenta în punctul $C\left(\frac{3}{2}, \frac{19}{2}\right)$ îndeplineşte condiţia cerută.

☒ **2.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţiei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} ax + e^{2x}, & x \in [-1, 0) \\ x^2 + 3 - b, & x \in [0, 1] \end{cases}$ să i se poată aplica teorema lui Lagrange şi apoi să se aplice aceasta.

Soluție

Funcția f este continuă şi derivabilă pe mulțimea [–1, 0) ∪ (0, 1], având în vedere operațiile cu funcții derivabile. Impunem condițiile de continuitate şi derivabilitate în x = 0. Funcția f este continuă în x = 0 dacă şi numai dacă f(0 – 0) = f(0) = f(0 + 0). Rezultă b = 2. Funcția f este derivabilă în x = 0 dacă şi numai dacă $f'_s(0) = f'_d(0) \in \mathbb{R}$.

Dar $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{ax + e^{2x} - 1}{x} = a + \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 = a + 2.$

$f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0$. Din $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, se obține a = –2.

Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că există c ∈ (–1, 1) astfel încât $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2e^2}$.

Deoarece $f'(x) = \begin{cases} -2 + 2e^{2x}, & x \in [-1, 0) \\ 2x, & x \in [0, 1] \end{cases}$, rezultă: $c = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4e^2 - 1}{4e^2} \in (-1, 0)$.

☒ **3.** Fie 0 < a < b şi f : [a, b] → ℝ, f(x) = ln x.

Să se aplice teorema lui Lagrange funcției f şi să se arate că:

$\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$.

Soluție

Funcția f este continuă şi derivabilă pe [a, b]. Aplicând teorema lui Lagrange rezultă că există c ∈ (a, b) astfel încât:

$f'(c) = \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a}$ sau $\dfrac{1}{c} = \dfrac{\ln b - \ln a}{b - a}$, de unde $c = \dfrac{b - a}{\ln b - \ln a}$.

Deoarece a < c < b, se obține $a < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} < b$ şi relația cerută este imediată.

Dacă a = n şi b = n +1, se obține $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, ∀ n ∈ $\mathbb{N}^*$.

☒ **4.** Să se calculeze limita şirului: $a_n = n \cdot \left[\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n}\right]$, n ≥ 1.

Soluție

Considerăm funcția f : [1, ∞) → ℝ, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Se observă că:

$a_n = n[f(n+1) - f(n)]$.

Deoarece f verifică condițiile teoremei lui Lagrange pe I = [n, n+1], rezultă că există c(n) ∈ (n , n +1), astfel încât: f(n +1) – f(n) = f '(c(n)).

Rezultă că $a_n = n \cdot f'(c(n)) = n \cdot \dfrac{1 - \ln c(n)}{(c(n))^2} = \dfrac{n}{c(n)} \cdot \dfrac{1 - \ln c(n)}{c(n)}$.

Din n < c(n) < n +1 rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{c(n)}=1$, şi astfel:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\ln c(n)}{c(n)}=0.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se aplice teorema lui Lagrange funcțiilor:

a) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3+4x+1$;

b) $f:[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

c) $f:[-2, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{9-x^2}$;

d) $f:[1, e]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\ln x$.

E2. Să se studieze dacă se poate aplica teorema lui Lagrange funcțiilor, iar în caz afirmativ să se aplice:

a) $f:[-1, 2]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2+2,\ x\in[-1, 0)\\ x^2-x+2,\ x\in[0, 2]\end{cases};$$

b) $g\ [-2, 0]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}x^2+2x+6,\ x\in[-2, -1]\\ x^3-3x+2,\ x\in(-1, 0]\end{cases};$$

c) $h:[-4, 4]\to\mathbb{R}, h(x)=x\cdot|x|$;

d) $j:[-4, 3]\to\mathbb{R}$,

$$j(x)=\begin{cases}\sqrt{x+5},\ x\in[-4, -1)\\ \dfrac{x+9}{4},\ x\in(-1, 3]\end{cases}.$$

E3. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât să se poată aplica teorema lui Lagrange funcțiilor:

a) $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+5x+2a+1,\ x\in[0, 1)\\ (a+3)x+b+1,\ x\in[1, 3]\end{cases};$$

b) $g:[-2, 0]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}ax+e^{3x+3},\ x\in[-2, -1)\\ x^2+2ax+b,\ x\in[-1, 0]\end{cases}.$$

E4. Fie funcția $f:[-1, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4x^3$. Să se arate că există un punct în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu coarda care uneşte punctele $A(-1, 3)$ şi $B(2, -30)$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine $a, b\in\mathbb{R}$ pentru care se poate aplica teorema lui Lagrange funcțiilor:

a) $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\ln^3(x+1),\ x\in[0, e-1)\\ (a+1)x+b,\ x\in[e-1, 4]\end{cases};$$

b) $g:\left[-1, \dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}ae^{x^2+x},\ x\in[-1, 0)\\ (a^2-2)\sin x+b\cos x,\ x\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\end{cases}.$$

A2. Se poate aplica teorema lui Lagrange funcției $f:[-4, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\max\left(x^2-2x+3,\ 3x-3\right)?$$

Dar funcției $g=f\,/_{[-4, 1]}$?

A3. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1,\ x\le 0\\ \sqrt{2x+1}, x>0\end{cases}$. Să se determine un punct A pe graficul funcției în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte punctele de pe grafic de abscise $x_1=-2$ şi $x_2=4$.

A4. **Aplicând teorema lui Lagrange funcției f(x) = ln x pe intervalul [n , n + 1], să se demonstreze că:**

a) șirul (a_n), $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ este divergent;

b) șirul (b_n), $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \in (0, 1)$.

A5. **Să se demonstreze inegalitățile:**

a) $n \cdot (b - a) \cdot a^{n-1} < b^n - a^n < n \cdot (b - a) \cdot b^{n-1}$, $0 < a < b$;

b) $\frac{a-b}{\cos^2 b} < \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b < \frac{a-b}{\cos^2 a}$, $0<a<b<\frac{\pi}{2}$;

c) $(b-a)\cdot \operatorname{tg} a < \ln\frac{\cos a}{\cos b} < (b-a)\cdot \operatorname{tg} b$, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$;

d) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

e) $e^x \ge x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; f) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18} > 1 + \frac{\pi}{18}$.

A6. **Fie funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \ln(1 + t)$.**

a) Să se aplice teorema lui Lagrange pe intervalul $[0, x]$, $x > 0$.

b) Să se demonstreze că: $x < (x+1)\ln(1+x) < x(x+1)$.

A7. **Fie funcția $f : [3, 6] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^x$, $x \in \mathbb{R}$.**

a) Să se aplice teorema lui Lagrange pe intervalele $[3, 4]$ și $[5, 6]$.

b) Să se rezolve ecuația $3^x + 6^x = 4^x + 5^x$.

A8. **Să se rezolve ecuațiile:**

a) $3^x + 5^x = 2^x + 6^x$;

b) $9^x + 6^x = 14^x + 1$.

A9. **Să se compare numerele:**

a) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{5}$ și $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10}$;

b) $\sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{5}$ și $\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{10}$.

A10. **Să se calculeze limitele de șiruri:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$.

A11. **Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și numerele f(0), $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ în progresie aritmetică. Să se arate că există $c \in (0, 1)$, astfel încât $f''(c) = 0$.**

7.6. CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

Din teorema lui Lagrange se obțin câteva rezultate foarte importante în analiza matematică. Astfel, următorul rezultat permite să decidem dacă o funcție are derivată într-un punct.

> ▣ **CONSECINȚA 1 (derivata unei funcții într-un punct)**
>
> Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $x_0 \in I$.
>
> Dacă: **a)** f este continuă în x_0; **b)** f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$,
>
> **c)** există $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,
>
> atunci funcția f are derivată în x_0 și $f'(x_0) = \ell$.

<u>*Demonstrație*</u>

Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[x, x_0] \subset I$, $x < x_0$.

Rezultă că există $c(x) \in (x, x_0)$ astfel încât: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c(x))$.

De aici rezultă că $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} f'(c(x)) = \ell$, deoarece din $x < c(x) < x_0$ se obține $\lim\limits_{x\to x_0} c(x) = x_0$. În mod analog, $f'_d(x_0)$ există şi este egală cu ℓ.

Aşadar, funcția f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $\ell \in \mathbb{R}$, atunci f este şi derivabilă în x_0.

Problemă rezolvată

☒ Să se studieze derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x + \ln x, & x > 1 \end{cases}$ folosind consecința teoremei lui Lagrange.

<u>*Soluție*</u>

Funcția f este derivabilă pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Deoarece $f(1-0) = 1 = f(1+0)$, funcția f este continuă în 1.

Avem $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ 1+\dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 2$.

Din consecința 1 rezultă că funcția f are derivată în $x = 1$ şi $f'(1) = 2$, deci f este derivabilă şi în $x = 1$.

➲ <u>OBSERVAȚII</u>

1. Aplicarea consecinței 1 fără verificarea tuturor ipotezelor poate duce la concluzii greşite.

☞ <u>***Exemplu***</u>

• Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 1$, iar $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$.

Concluzia că $f'(0) = 1$ este falsă.

În acest caz nu se poate aplica consecința 1 deoarece f nu este continuă în $x = 0$.

Problema derivatei în punctul $x = 0$ se face pornind de la definiție şi se obține:

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x+1-1}{x} = 1;$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+2-1}{x} = \infty.$$

Funcția f nu are derivată în $x = 0$.

2. Consecința 1 a teoremei lui Lagrange dă o condiție suficientă pentru existența derivatei unei funcții într-un punct (f să fie continuă în punct şi să existe limita derivatei în punct). Condiția nu este însă şi necesară.

☞ ***Exemplu***

• Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Funcția f este derivabilă în x = 0,

deoarece: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\dfrac{1}{x} = 0$. Dar $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}\right)$ nu există.

3. Din demonstrația consecinței se obține: dacă f este continuă la stânga în x_0 şi există $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f'(x) = \ell$, atunci există $f'_s(x_0)$ şi $f'_s(x_0) = \ell$. În mod similar se obține $f'_d(x_0)$.

▣ CONSECINȚA 2 (Caracterizarea funcțiilor constante)

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe [a, b]. Atunci f este constantă dacă şi numai dacă f' = 0.

Demonstrație

Dacă f este constantă pe [a, b], atunci se ştie că f' = 0.

Reciproc, fie $f'(x) = 0,\ \forall\ x \in [a, b]$. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul [a, x], $x \in (a, b]$. Rezultă că există $c \in (a, x)$ astfel încât $f(x) - f(a) = (x - a)\cdot f'(c) = 0$, de unde se obține $f(x) = f(a),\ \forall\ x \in [a, b]$.

Aşadar f este constantă pe intervalul [a, b].

▣ CONSECINȚA 3

Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$, funcții derivabile pe intervalul I, astfel încât $f'(x) = g'(x),\ \forall\ x \in I$.

Atunci există $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $f - g = c$. (Funcțiile f şi g diferă printr-o constantă.)

Demonstrație

Fie $h : I \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - g(x)$. Funcția h este derivabilă pe I şi $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,\ \forall\ x \in I$. Din consecința 2 se obține că $h(x) = c,\ \forall\ x \in I$, deci $f(x) - g(x) = c,\ \forall\ x \in I$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în punctele specificate, folosind consecința teoremei lui Lagrange:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 15, & x \le 0 \\ x(x^2-4) + 3(x+5), & x > 0 \end{cases}$

$x_0 = 0$;

b) $f(x) = x \cdot \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, $x_0 = \pm 1$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$, $x_0 \in \{0, 1\}$;

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2}, & x \le 1 \\ -\sqrt{x^2+3x-4}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = |x-1|\ln(x^2-2x+2)$, $x_0 = 1$.

E2. Să se determine parametrii reali, astfel încât funcția f să fie derivabilă:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+(m-1)x+3, & x < 0 \\ e^{x^2}-5x+p, & x \ge 0 \end{cases};$$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b, & x > 0 \\ \sin x + 3\cos x, & x \le 0 \end{cases};$$

c) $f: [1, e^2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1+\ln^2 x, & x \in [1, e) \\ (2a-3)x+b^2, & x \in [e, e^2] \end{cases}.$$

E3. Să se arate că următoarele funcții sunt funcții constante:

a) $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + \arccos x$;

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

E4. Se dau funcțiile $f, g: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \arccos(-x)$. Să se arate că f și g diferă printr-o constantă și să se găsească aceasta.

E5. Se dau funcțiile $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)$. Să se arate că $f - g$ este funcție constantă.

APROFUNDARE

A1. Să se demonstreze că funcția $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ este funcție constantă.

A2. Fie $f, g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x|+1, & x < 0 \\ \ln x + 2, & x > 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} \ln(-x)+2, & x < 0 \\ \ln x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f și g au aceeași derivată, și totuși ele nu diferă printr-o constantă.

A3. Să se demonstreze că au loc egalitățile:

a) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$, $x \in [0, +\infty)$;

b) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi, & x \in [1, \infty) \\ -\pi, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$.

A4. Să se determine intervalele pe care diferența $f - g$ este funcție constantă, dacă:

a) $f, g: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$, $g(x) = 3\arcsin x$;

b) $f, g: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ și $g(x) = 2\arcsin x$.

A5. Să se determine funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, care verifică relațiile:

a) $f'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $g'(x) + 2g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

A6. Fie $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, funcții continue pe $[a, b]$ și derivabile pe (a, b). Să se arate că dacă $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(Teorema lui A. Cauchy)

DEZVOLTARE

D1. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Să se arate că funcția derivată f' a funcției f are proprietatea lui Darboux.**
(Teorema lui Darboux)

D2. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Să se arate că dacă funcția $f' \neq 0$ pe I, atunci f' are semn constant pe I.**

D3. **Fie $f: I \to \mathbb{R}$. Să se arate că dacă f nu are proprietatea lui Darboux, atunci nu există nici o funcție $F: I \to \mathbb{R}$ derivabilă astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.**

D4. **Fie funcția**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, derivata f' este discontinuă şi are proprietatea lui Darboux.

8 REGULILE LUI L'HOSPITAL

François L'HOSPITAL (1661-1704) matematician francez

Contribuții în cadrul analizei matematice în calculul limitelor de funcții.

În operațiile cu limite de funcții s-a observat că deseori se ajunge la nedeterminări de forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

În aceste situații este necesar un studiu direct pentru a stabili dacă limita există sau nu există. Metodele care au fost folosite în astfel de situații nu au avut un caracter unitar, iar de multe ori, găsirea limitelor presupunea o experiență deosebită sau chiar inventivitate în organizarea calculului. În acest paragraf va fi prezentată o metodă mai simplă şi unitară care, cu ajutorul derivatelor, permite rezolvarea cazurilor de nedeterminare $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$ într-un număr destul de mare de situații. Celelalte cazuri de nedeterminare se pot reduce cu uşurință la cele două cazuri menționate anterior.

Metoda poartă numele de **regula lui l'Hospital** după numele matematicianului francez François l'Hospital (1661-1704) care a publicat-o în anul 1696.

▣ **TEOREMA 11 (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$)**

Fie funcțiile $f, g: I \to \mathbb{R}$, I interval şi x_0 un punct de acumulare al acestuia.
Dacă: **a)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$; **b)** f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0$ pentru $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$; **d)** există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\text{tg}x}$.

Soluție

Fie $f(x) = e^{2x}-1$, $g(x) = \text{tg}\, x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $x_0 = 0$.

Avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, deci limita dată este în cazul $\dfrac{0}{0}$.

Funcțiile f şi g sunt derivabile pe intervalul $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi

$g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0$, $\forall\, x \in I$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cdot e^{2x}\cdot\cos^2 x = 2$, aplicând regula lui l'Hospital rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$.

▣ TEOREMA 12 (Regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Fie funcțiile f, g : $I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval şi x_0 un punct de acumulare al acestuia.

Dacă: **a)** $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$;

b) f şi g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$;

c) $g'(x) \neq 0$, pentru $x \in I \setminus \{x_0\}$;

d) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ există în $\overline{\mathbb{R}}$,

atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în x_0 şi $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Soluție

Fie $f(x) = \ln x$, $g(x) = x$, $x \in (0, \infty)$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$. Funcțiile f şi g sunt derivabile pe $(0, \infty)$, iar $g'(x) = 1 \neq 0$, $\forall\, x \in (0, \infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, cu regula l'Hospital se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

➲ OBSERVAȚII

1. Dacă funcțiile f şi g au derivate de ordin superior şi funcțiile derivate ale acestora satisfac condițiile teoremei lui l'Hospital, atunci se poate aplica repetat regula lui l'Hospital pentru $\frac{f'}{g'}, \frac{f''}{g''}$ până la îndepărtarea nedeterminării.

☞ ***Exemplu***

• Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$.

Soluție

Funcțiile $f(x) = e^{2x}$ şi $g(x) = x^2$ sunt derivabile de orice ordin $n \in \mathbb{N}^*$.

Cu regula lui l'Hospital se obține succesiv:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot e^{2x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = +\infty.$$

2. Regula lui l'Hospital poate fi folosită şi pentru calculul unor limite de şiruri.

☞ ***Exemplu***

• Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$.

Soluție

Considerăm funcțiile $f(x) = \ln^2 x$, $g(x) = x$, $x \in (0, \infty)$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Din definiția cu şiruri a limitei unei funcții, pentru $x_n = n$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Alte cazuri de nedeterminare

Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, interval şi x_0 punct de acumulare al acestuia.

Cazurile de nedeterminare $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ pot fi aduse la unul din cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

$\boxed{\textbf{Cazul } 0 \cdot \infty}$

Fie $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Putem scrie $f \cdot g = f : \left(\frac{1}{g}\right)$, dacă $g(x) \neq 0$ sau $f \cdot g = g : \left(\frac{1}{f}\right)$, dacă $f(x) \neq 0$, $x \in I \setminus \{x_0\}$ şi se obține cazul $\frac{0}{0}$ sau cazul $\frac{\infty}{\infty}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x$.

Soluție

Avem succesiv: $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} = 0.$

Cazul $\infty - \infty$

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$ este în cazul $\infty - \infty$, folosind scrierea:

$f(x)-g(x)=\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right):\left(\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}\right)$, se obține cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Soluție

Avem cazul $\infty - \infty$. Acesta se transformă în cazul $\dfrac{0}{0}$ astfel:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

Cazurile 0^0; ∞^0; 1^∞

În aceste cazuri folosim relația $f^g = e^{g\cdot\ln f}$ şi se obține unul dintre cazurile de nedeterminare anterioare.

Problemă rezolvată

☒ Să se calculeze: **a)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Soluție

a) Avem cazul 0^0. Rezultă succesiv: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^{x\cdot\ln x}\right) = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x}$.

Pentru $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ suntem în cazul $0\cdot\infty$.

Se obține: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-x) = 0.$

Aşadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = e^0 = 1.$

b) Avem cazul 1^∞. Rezultă că $(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\frac{\ln(1-x)}{\sin x}}$, iar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{(1-x)\cdot\cos x} = -1$. Aşadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^9-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^4-16}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2+2x+7}{x^4+x^3-2x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$; e) $\lim\limits_{x\to -7}\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-5}{x^2-49}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{5x-7}-2}{\sqrt{x^2-2x-2}-1}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-2}}{x^2-1}$;

h) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x+24}}{\sqrt[4]{x+13}-2}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^3-x^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x\cdot \mathrm{tg}3x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}{\cos 3x-1}$; l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{x}{2}-1}{1-2\cos x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^{x^2-1}-1}{x^2+3x-4}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{\sin x}-e^x}{x^2+x}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

E2. Să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-x+\ln x}{5\ln x+x-4x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4}{e^{x^2+x+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(e^x+x)}{\ln(e^x-x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+1}-\mathrm{tg}\sqrt{x+1}}{\mathrm{tg}(x^2-1)}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 4x)}$.

E3. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x\cdot\ln x)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x-2)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{ctg}\, x$; e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sin x\cdot\ln(\sin x)$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\ln x$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}$;

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\, x$.

E4. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x+1-\ln\left(x^2+1\right)\right]$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{x-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x-x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

E5. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)^{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(3^{x+1}-3)^{\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\, x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\left(1-2\sin x\right)^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{x-2}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln(1+x)\right)^x$.

E6. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+1)^{\frac{1}{2x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+2)^{\frac{x}{2x^2+1}}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{4x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\arccos\frac{1}{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+\sin x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

E7. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{\frac{1}{x-3}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+4}\right)^{2x+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1+\sin 2x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\right]^{x}$.

E8. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, dacă:

a) $a_n=\sqrt[n]{\cos\frac{n\pi}{2n+1}}$;

b) $a_n=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^2\right)^{n^2}$.

APROFUNDARE

A1. Să se calculeze limitele de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2x^2-\cos x}{x^4}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\ldots\cdot\cos^n nx}{x^2}$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

❍ **1.** Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sqrt{|4-x^2|}}{1+x^2}$. Dacă s este suma pătratelor punctelor critice ale funcției f, atunci:

a) $s=0$; b) $s=9$; c) $s=3$; d) $s=4$.

❍ **2.** Se dă funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^3+ax+b, & x\le 2\\ x^2+bx+c, & x>2\end{cases}$ căreia i se poate aplica teorema lui Rolle.

Dacă $\alpha = a + b + c$ şi β este punctul intermediar rezultat din teorema lui Rolle, atunci:

a) $\alpha = +26;\ \beta \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $\alpha = +26;\ \beta = \frac{10}{3}$; c) $\alpha = -26;\ \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; d) $\alpha + \beta = 1$.

○ 3. **Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}$; $g(x) = \operatorname{arctg}(x+1)$ şi $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Atunci:**

a) $h(x) = -\frac{\pi}{4}$; b) $h(x) = 0$; c) $h(x) = \frac{\pi}{4}$; d) h nu e funcție constată.

○ 4. **Ecuația polinomială $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$ are n soluții reale pozitive. Atunci:**

a) $n = 1$; b) $n = 2$; c) $n = 3$; d) $n = 4$.

○ 5. **Fie $l_1 = \lim\limits_{x\to 0}(1 - x + \sin x)^{\frac{1}{x^3}}$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^8 - \sin^8 x}{x^{10}}$. Dacă $L = \ln l_1 + l_2$, atunci:**

a) $L = \sqrt[6]{e} + \frac{1}{6}$; b) $L = 1$; c) $L = \frac{7}{6}$; d) L nu există. (Învățământ tehnic, Buc., 1986)

Testul 2

○ 1. **Fie funcția polinomială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - ax^2 + bx - c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Funcția admite pe $x = 1$ ca punct de maxim, şi pe $x = 2$ ca punct de minim, iar maximul lui f este egal cu 6. Dacă $\alpha = 2a - b - c$, atunci:**

a) $\alpha = 5$; b) $\alpha = 7$; c) $\alpha = 12$; d) $\alpha = 9$.

○ 2. **Valorile lui $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $mx^3 + 12x^2 + 9x - 4 = 0$ are toate soluțiile reale, sunt în intervalul:**

a) $\left(-\infty, \frac{13}{4}\right)$; b) $(-28, 0)$; c) $\left[-28, \frac{13}{4}\right] \setminus \{0\}$; d) $\mathbb{R}$.

○ 3. **Se dă funcția $f, g : \left[-1, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^{x^2+x}, & x \le 0 \\ (a^2 - 2)\sin x + b\cos x, & x > 0 \end{cases}$ şi $a \in (0, +\infty)$, care satisface condițiile teoremei lui Lagrange. Suma absciselor punctelor de pe graficul funcției în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care uneşte extremitățile graficului funcției f este:**

a) $s = \frac{\pi}{4}$; b) $s \in \varnothing$; c) $s = \frac{\pi - 2}{4}$; d) $s = -\frac{1}{2}$.

○ 4. **Fie $f, g : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\arcsin x$, $g(x) = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ şi $h = f - g$. Dacă $h\left(\frac{1}{4}\right) = c$, atunci:**

a) $c = \frac{\pi}{4}$; b) $c = 1$; c) $c = \frac{\pi}{3}$; d) $s = \frac{\pi}{2}$.

❍ **5.** **Fie** $l_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{\sin(\sin x)}$ **şi** $l_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \ln^2(1-x)}{x^3}$. **Dacă** $L = l_1 - l_2$, **atunci:**

a) $L = 1$; **b)** $L = e - 1$; **c)** $L = e$; **d)** $L = e - 2$.

❾ ROLUL DERIVATEI ÎNTÂI ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

9.1. DETERMINAREA INTERVALELOR DE MONOTONIE

O aplicație utilă a derivatei unei funcții o constituie determinarea intervalelor de monotonie pentru o funcție dată.

> ▣ **TEOREMA 13**
> Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Atunci:
> **a)** funcția f este monoton crescătoare pe intervalul I dacă şi numai dacă $f'(x) \geq 0, \forall\, x \in I$;
> **b)** funcția f este monoton descrescătoare pe intervalul I dacă şi numai dacă $f'(x) \leq 0, \forall\, x \in I$.

<u>*Demonstrație*</u>

a) „⇒“ Presupunem că f este monoton crescătoare pe I. Atunci pentru oricare $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, avem $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Rezultă că $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, deci $f'(x_0) \geq 0$, $\forall\, x_0 \in I$.

„⇐“ Să presupunem că $f'(x) \geq 0$, $\forall\, x \in I$ şi fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul închis $[x_1, x_2]$ rezultă că există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$. Deoarece $c \in (x_1, x_2)$, rezultă că $f'(c) \geq 0$ şi cum $x_2 - x_1 > 0$, se obține că $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, ceea ce conduce la faptul că funcția f este monoton crescătoare pe intervalul I.

Cealaltă afirmație a teoremei se demonstrează analog sau se consideră funcția monoton crescătoare $g = -f$. ■

➲ <u>OBSERVAȚII ŞI PRECIZĂRI</u>

1. Dacă funcția f este derivabilă pe intervalul I şi f' este strict pozitivă (respectiv strict negativă) pe I, atunci funcția f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe I.

2. Dacă f este strict crescătoare pe intervalul I, nu rezultă în mod necesar că $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in I$.

☞ ***Exemplu***

• Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, dar $f'(x) = 5x^4$ se anulează în $x = 0$.

3. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ şi funcția f' este pozitivă sau negativă pe $I \setminus \{x_0\}$, se poate întâmpla ca f să nu fie monotonă pe I.

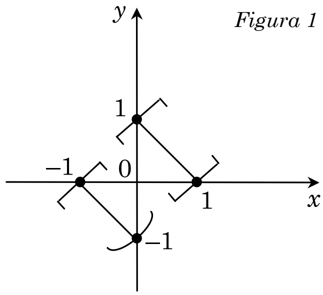


Figura 1

☞ ***Exemplu***

• $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in [-1,\ 0) \\ -x+1, & x \in [0,\ 1] \end{cases}.$

Din lectura grafică, figura 1, concluzia se impune.

Pentru a indica monotonia funcției f pe intervalul I, cu ajutorul semnului derivatei se utilizează un tabel de monotonie de tipul:

x	$\overbrace{\qquad\qquad}^{I}$
$f'(x)$	+ + + + + +
$f(x)$	↗ ↗

(1)

x	$\overbrace{\qquad\qquad}^{I}$
$f'(x)$	– – – – – –
$f(x)$	↘ ↘

(2)

❑ **REȚINEM!**

Pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții $f : D \to \mathbb{R}$ se procedează astfel:

a) Se calculează derivata f' a funcției pe domeniul de derivabilitate $D_{f'} \subset D$.

b) Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0,\ x \in D_{f'}$.

c) Se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care nu se anulează. Pentru aceasta se descompune domeniul de definiție D în intervale disjuncte, astfel încât pe nici unul dintre acestea funcția f' nu se anulează. Punctele care delimitează intervalele sunt punctele critice, punctele în care funcția nu este derivabilă sau extremitățile intervalelor în cazul funcțiilor definite pe reuniuni de intervale.
Pentru determinarea semnului pe un interval se poate folosi proprietatea funcțiilor continue de a păstra semn constant pe intervalul pe care nu se anulează.

d) Se stabilesc intervalele de monotonie în funcție de semnul derivatei.

Exerciții rezolvate

☒ **1.** Să se determine intervalele de monotonie pentru funcțiile:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$;

b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2\ln x$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

Soluție

a) Calculul derivatei: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,\ x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$: $6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $f(-2) = 19$; $f(1) = 8$

Se determină semnul derivatei pe tabelul următor:

x	$-\infty$			-2			1				$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	0	–	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		19	$\searrow$		-8	$\nearrow$			$+\infty$

Aşadar, pe intervalele $(-\infty, -2]$ şi $[1, \infty)$, funcția f este strict crescătoare, iar pe $[-2, 1]$, funcția f este strict descrescătoare.

b) Funcția este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$, $x > 0$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1 = 1 \in (0, +\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $f(1) = 1$.

Tabelul de monotonie a funcției f este:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	– – –		0	+ +	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

În concluzie, funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, 1]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

c) Funcția este periodică, cu perioada principală $T = 2\pi$.

Se recomandă efectuarea studiului doar pe un interval de lungime egală cu perioada principală, apoi rezultatele se extind la tot domeniul de definiție (adăugând multiplu de 2π la capetele intervalelor de monotonie).

Efectuăm studiul pe intervalul $[0, 2\pi]$.

$f'(x) = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$. Soluțiile din $[0, 2\pi]$ sunt $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Tabelul de monotonie:

x	0		$2\pi/3$		$4\pi/3$		2π
$f'(x)$	+ + + + +		0	– – – – – – – – – – –	0	+ + + + + + + +	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	

În concluzie, f este strict crescătoare pe intervalele de forma $[0 + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$ şi $[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ şi strict descrescătoare pe intervalele de forma $[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

☒ **2.** Să se determine parametrul real m, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 3x + m)e^{2x}$ să fie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

<u>*Soluție*</u>

Domeniul de definiție este interval şi funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. Este suficient să punem condiția $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Obținem succesiv: $(2x^2 - 4x + 2m - 3)e^{2x} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2m - 3 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta = 16 - 8(2m - 3) \leq 0$ de unde se obține $m \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

9.2. DETERMINAREA PUNCTELOR DE EXTREM

Până la acest moment, determinarea punctelor de extrem se poate face pentru o clasă destul de restrânsă de funcții numerice.

Folosind semnul derivatei întâi vom putea determina punctele de extrem pentru o clasă extinsă de funcții numerice.

☞ <u>***Exemple***</u>

1. Să considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ x^2e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deoarece $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-2x}{x} = -2$; $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2e^{-x}}{x} = 0$. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ (2x - x^2)e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

Tabelul de monotonie a funcției este:

x	$-\infty$			0			2			$+\infty$
f '(x)	–	–	–	–2 | 0	+	+	0	–	–	–
f(x)	$+\infty$	↘		0	↗		$4e^{-2}$	↘		0

Din tabelul de monotonie a funcției f, cu ajutorul definiției punctului de extrem se observă că:

• punctul x = 0 este punct de minim al funcției. Derivata f' este negativă în stânga punctului x = 0 şi pozitivă în dreapta acestui punct.

• punctul x = 2 este punct de maxim al funcției. Derivata f' este pozitivă în stânga punctului x = 2 şi negativă în dreapta acestuia.

❑ REȚINEM!

Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 punct de continuitate din interiorul lui D şi $f' : D_{f'} \to \mathbb{R}$ derivata funcției.

a) Dacă pe o vecinătate a punctului x_0, în stânga lui x_0 derivata f' este negativă, iar în dreapta lui x_0 derivata f' este pozitivă, punctul x_0 este **punct de minim** al funcției f.

b) Dacă pe o vecinătate a punctului x_0, în stânga lui x_0 derivata f' este pozitivă, iar în dreapta lui x_0 derivata f' este negativă, punctul x_0 este **punct de maxim** al funcției f.

2. Să considerăm funcția $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Avem: $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $\forall\, x \in (-2, 2)$. Tabelul de monotonie este:

x	-2				0				2
$f'(x)$	|	+	+	+	0	–	–	–	|
$f(x)$	0		↗		2		↘		0

Din tabelul de monotonie a funcției f, folosind şi caracterizarea punctelor de extrem ale unei funcții se observă că:

• punctul $x = 0$ este punct de maxim al funcției;

• punctul $x = -2$ este extremitatea stângă a unui interval, nu e extremitatea dreaptă a nici unui interval din domeniul de definiție al funcției f şi este punct de minim al funcției.

În dreapta punctului $x = -2$ derivata f' este pozitivă.

• punctul $x = 2$ este extremitatea dreaptă a unui interval; nu e extremitatea stângă pentru nici un interval din domeniul de definiție al funcției f şi este punct de minim al funcției.

În stânga punctului $x = 2$ derivata f' este negativă.

❑ REȚINEM!

a) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ un punct de continuitate al funcției f, x_0 este extremitatea stângă a unui interval $I \subset D$ pe care f' nu se anulează şi x_0 nu e extremitatea dreaptă a nici unui interval inclus în D.

- Dacă $f' > 0$ pe I, atunci x_0 este punct de minim.
- Dacă $f' < 0$ pe I, atunci x_0 este punct de maxim.

b) Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ punct de continuitate al funcției f, x_0 este extremitatea dreaptă a unui interval $I \subset D$ pe care f' nu se anulează şi x_0 nu e extremitatea stângă a nici unui interval inclus în D.

- Dacă $f' > 0$ pe I, atunci x_0 este punct de maxim.
- Dacă $f' < 0$ pe I, atunci x_0 este punct de minim.

REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE OPTIMIZARE

Numeroase probleme din domeniul științific (matematică, fizică, astronomie...) precum și din activitatea practică (construcții, transporturi, economie...) operează cu mărimi variabile pentru care este util de cunoscut anumite valori de maxim sau de minim (valori optime) în condiții impuse.

Exemplu: maximul sau minimul unei lungimi, unei arii, unui volum, rezultantei unor forțe etc.

În determinarea acestor valori optime se poate folosi derivata întâi a unei funcții numerice asociată fenomenului în cauză.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Dintr-un carton dreptunghiular cu dimensiunile de 77 cm și 32 cm se va confecționa o cutie fără capac. Cât este latura pătratelor decupate de la colțurile cartonului astfel încât să se obțină o cutie cu volum maxim?

Soluție

Fie x lungimea laturii unui pătrat.

Dimensiunile cutiei ce se poate forma sunt: $x,\ 77-2x,\ 32-2x,$ (figura 1).

Funcția care modelează volumul cutiei este: $V:(0,16)\to\mathbb{R},\ V(x)=x(77-2x)(32-2x).$

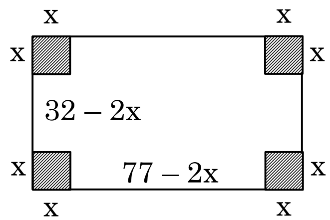


Figura 1

Avem $V'(x)=4(3x^2-109x+616)$ și se obține următorul tabel de variație al funcției V:

x	0			7			16
V'(x)	+	+	+	0 –	–	–	
V(x)	|	↗		7938 max	↘		|

În concluzie, cutia va avea volum maxim pentru $x=7$.

☒ **2.** O ambarcațiune cu lungimea de 56 m navighează pe o rețea rectangulară de canale cu lățimea constantă de 20 m.

a) Poate această ambarcațiune să intre pe un canal lateral perpendicular pe direcția lui de mers?

b) Care este lungimea maximă a unei ambarcațiuni pentru a putea face această manevră?

(Se neglijează lățimea ambarcațiunii)

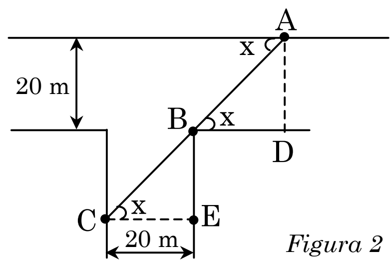


Figura 2

Soluție

a) Considerând poziția vasului pe segmentul [AC] în figura 2 unde $x=45°$, se obține $AC=2AB=2\cdot 20\sqrt{2}$ m, $AC>56$ m. Așadar, ambarcațiunea poate efectua manevra.

b) Fie l lungimea ambarcațiunii. Vom exprima l în funcție de măsura x a unghiului făcut de ambarcațiune când se sprijină pe malurile celor două canale ca în figura 2.

Din triunghiurile dreptunghice ABD şi BCE se obține:

$$AB = \frac{20}{\sin x},\ BC = \frac{20}{\cos x},\ l(x) = \frac{20}{\sin x} + \frac{20}{\cos x},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Maximul lungimii ambarcațiunii este dat de maximul funcției l. Se obține $l_{max} = 40\sqrt{2}$ m.

◢ **Temă de proiect**

Aplicații ale derivatelor în problemele practice de maxim şi minim.

9.3. DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI

Rezultatele teoretice asupra monotoniei şi punctelor de extrem ale unei funcții permit obținerea unor inegalități care, cu ajutorul metodelor elementare ar fi greu de demonstrat.

Să considerăm funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale.

• Dacă m este minimul global al funcției pe intervalul I şi $m \geq 0$, atunci $f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in I$.

• Dacă M este maximul global al funcției f pe intervalul I şi $M \leq 0$, atunci $f(x) \leq 0,\ \forall\, x \in I$.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se demonstreze inegalitățile:

a) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \leq 0,\ \forall\, x \in [-1, 3]$; **b)** $\ln\frac{x+1}{x} > \frac{2}{2x+1},\ \forall\, x > 0$.

<u>*Soluție*</u>

a) Definim funcția $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$, derivabilă cu derivata $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3),\ \forall\, x \in [-1, 3]$.

Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Tabelul de monotonie a funcției este:

x	-1		3
$f'(x)$	0	$- - - - - - -$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	-32

Se observă că funcția are maximul global $M = f(-1) = 0$, ceea ce impune inegalitatea $f(x) \leq 0,\ \forall\, x \in [-1, 3]$ şi astfel: $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 \leq 0,\ \forall\, x \in [-1, 3]$.

b) Considerăm funcția $f : (0, +\infty)$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x} - \frac{2}{2x+1}$ a cărei derivată este $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)(2x+1)^2},\ \forall\, x > 0$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty;\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Tabelul de monotonie a funcției este:

x	0		+∞
f '(x)	| − − − − −	− − − − − −	−
f(x)	+∞	↘	0

Din tabelul de monotonie se obține că marginea inferioară a mulțimii valorilor funcției f este m = 0, ceea ce implică: $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ şi astfel $\ln\frac{x+1}{x} - \frac{2}{2x+1} > 0, \forall x > 0.$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției f pe domeniul maxim de definiție:**

a) $f(x) = x^3 - 6x$; **b)** $f(x) = -x^4 + 8x^2$;

c) $f(x) = \frac{x^2+4x-1}{x-1}$;

d) $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$;

e) $f(x) = 2x^3e^{-x}$;

f) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$;

g) $f(x) = \sin x + \cos x$;

h) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)$;

i) $f(x) = \ln x - 2\operatorname{arctg} x$;

j) $f(x) = x + \cos 2x$.

E2. **Să se determine punctele de extrem ale funcției f pe domeniul maxim de definiție:**

a) $f(x) = x^2(2 + 2x - x^2)$;

b) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 1$;

c) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

e) $f(x) = x(\ln x - 1)$;

f) $f(x) = 2x + \operatorname{ctg} x$;

g) $f(x) = x^2 e^{-2x+1}$;

h) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

E3. **Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + 3x^2 + (a - 2)x + 1$, să aibă puncte de extrem.**

E4. **Să se demonstreze inegalitățile:**

a) $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$;

b) $x^2 - 2\ln x \geq 1, x > 0$;

c) $\operatorname{arctg}x \leq x, x \geq 0$.

APROFUNDARE

A1. **Să se studieze monotonia funcției $f : D \to \mathbb{R}$ definite prin:**

a) $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$;

b) $f(x) = x\sqrt{\frac{2-x}{x}}$; **c)** $f(x) = x^3 \ln x$;

d) $f(x) = \cos x - \cos^3 x$;

e) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x$;

f) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+3}}$;

g) $f(x) = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;

i) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

A2. **Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$ definite prin:**

a) $f(x) = \sqrt{2x(4-x)}$; **b)** $f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right|$;

c) $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$;

d) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

e) $f(x) = \ln(x + 1) + \operatorname{arctg} x$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^4}$;

g) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + x\cos x$;

h) $f(x) = \frac{\ln x + x}{\ln x - x}$; i) $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$;

j) $f(x) = x^x$; k) $f(x) = |3x + 2|e^x$.

A3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 5mx^2 + 6x + 5$ să fie monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

A4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - m)e^{2x}$ să fie monotonă pe $\mathbb{R}$.

A5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + ax + a)e^{ax}$. Există valori ale parametrului întreg a pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$?

A6. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (m - 1) \cdot \operatorname{arctg} 2x - 3x$.
Să se determine valorile lui m pentru care f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$.

A7. Câte puncte de extrem are funcția:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\frac{|x|}{x^2+1}}$?

A8. Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + ax^2 - \ln(1 + x)$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care f are două puncte de extrem.

A9. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : D \to \mathbb{R}$ are puncte de extrem:
a) $f(x) = [x^2 - (m - 1)x + 3m - 2]e^{-x}$;
b) $f(x) = [x^3 - (2 + m)x^2]\, e^{\frac{2}{x}}$.

A10. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \frac{x^2 - 3ax + 4}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = 1$ să fie punct de extrem al funcției.

A11. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax(x - b)(x - c)$.
Să se determine constantele a, b, c, astfel încât $x = -1$ este un punct de minim, $x = 1$ este un punct de maxim, iar maximul funcției este 4.

A12. Să se demonstreze inegalitățile:
a) $(x + 1)\ln(x + 1) \ge \operatorname{arctg} x$, $x \in [0, \infty)$;
b) $\sin x \le x$, $\forall\, x \ge 0$;
c) $\ln(x + 1) \le x$, $\forall\, x \in (-1, \infty)$;
d) $\arcsin x \ge x$, $\forall\, x \in [0, 1]$;
e) $e^x \ge x^e$, $\forall\, x \in [0, \infty)$;
f) $e^x \ge 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $\forall\, x \ge 0$.

A13. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.
Să se arate că f nu este monotonă pe nici o vecinătate a originii.

A14. Dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru să se determine cel cu arie maximă.

A15. Dintre toate dreptunghiurile care au aceeași arie să se determine cel de perimetru minim.

A16. Două forțe $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$ au mărimile variabile cu suma de 20N, iar suporturile lor determină un unghi cu măsura de 60°.
Să se determine mărimile celor două forțe pentru care rezultanta este minimă.

A17. Să se determine cilindrul care are volumul maxim înscris într-un con dat.

A18. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază R.

A19. Să se determine dreptunghiul de perimetru maxim înscris într-un cerc de rază R.

A20. **Un triunghi dreptunghic are suma catetelor egală cu a şi se roteşte în jurul unei catete.**
Să se determine valoarea maximă a volumului corpului generat prin rotirea triunghiului.

A21. **Un triunghi isoscel cu perimetrul constant P se roteşte în jurul bazei.** **Să se determine triunghiul care generează un corp de volum maxim.**

A22. **Să se determine paralelipipedul dreptunghic de volum maxim cu baza un pătrat, înscris într-o semisferă de rază r.**

10 ROLUL DERIVATEI A DOUA ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

10.1. DETERMINAREA INTERVALELOR DE CONVEXITATE ȘI CONCAVITATE

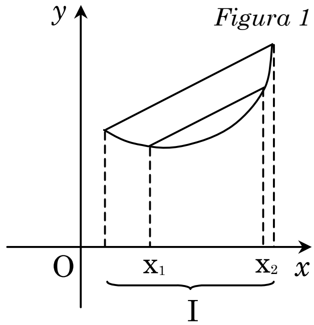


Figura 1

La clasa a X-a au fost introduse noțiunile de funcție convexă şi funcție concavă pe un interval. Reamintim aceste noțiuni.

a) Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale, se numeşte **funcție convexă** pe intervalul I dacă pentru oricare $x_1, x_2 \in I$ şi oricare $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea:

$$f[(1-t)x_1 + t x_2] \le (1-t) f(x_1) + t f(x_2).$$

Semnificația geometrică a funcției convexe pe intervalul I este aceea că pe orice interval $[x_1, x_2] \subset I$ imaginea geometrică a graficului funcției se află sub coarda care uneşte punctele cu abscisele x_1, x_2, (figura 1).

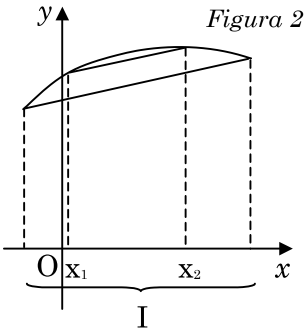


Figura 2

b) Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale, se numeşte **funcție concavă** pe intervalul I dacă pentru oricare $x_1, x_2 \in I$ şi oricare $t \in [0, 1]$ are loc inegalitatea:

$$f[(1-t)x_1 + t x_2] \ge (1-t) f(x_1) + t f(x_2).$$

Din punct de vedere geometric, funcția f este concavă pe intervalul I dacă pe orice interval $[x_1, x_2] \subset I$ imaginea geometrică a graficului funcției se află deasupra coardei care uneşte punctele cu abscisele x_1, x_2, (figura 2).

În continuare vom da un criteriu practic de a stabili dacă o funcție (de două ori derivabilă) este convexă sau concavă pe un interval folosind semnul derivatei a doua a funcției.

▣ TEOREMA 14

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}, a < b$, o funcție care verifică condițiile:

a) f este continuă pe intervalul închis [a, b];

b) f este derivabilă de două ori pe intervalul deschis (a, b).

Atunci:

1) dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, rezultă că funcția f este convexă pe intervalul închis [a, b];

2) dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, rezultă că funcția f este concavă pe intervalul închis [a, b].

Demonstrație

1) Fie $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Pentru fiecare punct $x \in (x_1, x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[x_1, x]$, $[x, x_2]$. Prin urmare există $c_1 \in (x_1, x)$, $c_2 \in (x, x_2)$, astfel încât $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$,

$\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$.

Deoarece $c_1 < c_2$ şi f' este o funcție crescătoare pe intervalul (a, b) (aici intervine ipoteza $f''(x) \geq 0$ pe (a, b)) rezultă că $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, adică:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \qquad (1)$$

Din faptul că $x \in (x_1, x_2)$, rezultă că pentru orice $t \in (0, 1)$ avem $x = (1 - t)x_1 + t x_2$.

Înlocuind pe x în relația (1) se obține $f(x) \leq (1 - t) f(x_1) + t f(x_2)$ ceea ce înseamnă că f este funcție convexă pe intervalul [a, b].

Pentru demonstrarea punctului 2) se procedează analog sau se înlocuieşte f cu –f. ■

➲ OBSERVAȚII

1. În condițiile teoremei:
- dacă f este convexă pe I $\Rightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in I$;
- dacă f este concavă pe I $\Rightarrow f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

2. Semnul derivatei a doua a funcției permite determinarea intervalelor pe care funcția este convexă sau este concavă.

Modul practic de determinare a intervalelor de convexitate şi de concavitate ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$ este următorul:

a) Se calculează derivata a doua f'' pe mulțimea de existență $D_{f''} \subset D$.

b) Se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$ pe mulțimea $D_{f''}$.

c) Se descompune domeniul de definiție al funcției în intervale disjuncte pe care f" nu se anulează (prin intermediul zerourilor derivatei a doua şi eventual al punctelor în care funcția f nu este de două ori derivabilă).

d) Se determină semnul derivatei a doua pe fiecare interval obținut la c).

e) • Dacă f" > 0 pe un interval ⇒ f este convexă pe acel interval.

• Dacă f" < 0 pe un interval ⇒ f este concavă pe acel interval.

Exercițiu rezolvat

☒ Să se determine intervalele de convexitate/concavitate pentru:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2$; **b)** $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$.

<u>Soluție</u>

a) Avem: $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = 12x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = \dfrac{1}{2}$. Tabelul pentru studiul convexității sau concavității funcției este următorul:

x	$-\infty$				1/2			$+\infty$
f"(x)	–	–	–	–	0 +	+	+	+
f(x)	$-\infty$	⌒			–1/2	◡		$+\infty$
		(concavă)				(convexă)		

În concluzie, funcția f este concavă pe intervalul $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ şi este convexă pe intervalul $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

b) Avem: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$ şi $f''(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Tabelul pentru studiul convexității/concavității funcției f este următorul:

x	$-\infty$					2					$+\infty$
f"(x)	–	–	–	–	–	|	+	+	+	+	+
f(x)	$-\infty$		⌒			$-\infty$ | $+\infty$		◡			$+\infty$

Concluzie: f este concavă pe $(-\infty, 2)$ şi este convexă pe $(2, +\infty)$.

10.2. DETERMINAREA PUNCTELOR DE INFLEXIUNE

În paragraful 2, capitolul III s-a stabilit că pentru o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, punctul x_0 interior intervalului I este punct de inflexiune dacă:

– f este continuă în punctul x_0;

– f are derivată în punctul x_0 (finită sau infinită);

– imaginea geometrică a graficului funcției este convexă (concavă) de o parte a lui x_0 şi concavă (convexă) de cealaltă parte a lui x_0.

În continuare vom da un criteriu suficient pentru ca un punct x_0 să fie punct de inflexiune al unei funcții folosind semnul derivatei a doua.

▣ TEOREMA 15

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi x_0 un punct din interiorul intervalului I, astfel încât:

a) f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0;

b) există punctele a, b $\in$ V, astfel încât $x_0 \in (a, b)$;

c) $f''(x_0) = 0$;

d) $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (a, x_0)$ şi $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in (x_0, b)$

sau invers $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in (a, x_0)$ şi $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in (x_0, b)$.

Atunci x_0 este punct de inflexiune al funcției f.

Demonstrația rezultă din definiția punctului de inflexiune şi din teorema de caracterizare a funcțiilor convexe, respectiv concave folosind semnul derivatei a doua (teorema 14).

➲ OBSERVAȚII

1. Condiția $f''(x_0) = 0$ nu implică totdeauna că x_0 este punct de inflexiune.

☞ ***Exemplu***

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ are derivata a doua $f''(x) = 12x^2$, $x \in \mathbb{R}$ care se anulează în $x_0 = 0$.

Se observă că $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rezultă că $x_0 = 0$ nu este punct de inflexiune pentru funcția f.

2. Condiția ca f să fie continuă în x_0 este necesară.

☞ ***Exemplu***

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$. Funcția f nu e continuă în $x_0 = 0$, deci nu e derivabilă în $x_0 = 0$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -\dfrac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases},\ f''(x) > 0,\ \forall\, x < 0 \text{ şi } f''(x) < 0,\ \forall\, x > 0.$$

Cu toate acestea punctul $x_0 = 0$ nu se consideră punct de inflexiune.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 7x + 2$;
b) $f(x) = -2x^4+3x^3 + 21x^2 - 1$;
c) $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 18x^2 +x - 1$;
d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$; e) $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x+1}$;
f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$; g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$;
h) $f(x) = x \ln (x + 3)$;
i) $f(x) = (x^2 - 3x + 2) e^x$;
j) $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + 1$;
k) $f(x) = \sin x - \frac{1}{4} \sin 2x$;
l) $f(x) = \sqrt[3]{|x^2-1|}$.

E2. Să se determine punctele de inflexiune ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x - 4$;
b) $f(x) = -x^4 + 5x^3 - 7x^2 - x$;
c) $f(x) = \frac{x}{9-x^2}$; d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x(x+2)}$;
e) $f(x) = \sqrt{x^2-x}$; f) $f(x) = x^3 \ln x$;
g) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$;
h) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$ i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}$;
j) $f(x) = e^x\left(x^2-3x-2\right)$.

APROFUNDARE

A1. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate precum şi punctele de inflexiune ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = x\left|\frac{2x}{x+2}\right|$;
b) $f(x) = (x^2-5x+6)e^{|x|}$;
c) $f(x) = \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|$; d) $f(x) = e^x - e^{4x}$;
e) $f(x) = |x| \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$;
f) $f(x) = \arcsin \frac{x-2}{x+2}$.

A2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ x + \frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

a) Este funcția f convexă pe $\mathbb{R}$?
b) Are puncte de inflexiune?

A3. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a-x^3}}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât f să admită $x = -1$ punct de inflexiune.

A4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^n x$, $n \geq 3$.

Să se arate că f admite un singur punct de inflexiune $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

A5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 90x^2 + ax + b$.

Dacă x_1, x_2, x_3 sunt puncte de inflexiune ale funcției f, atunci punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $C(x_3, f(x_3))$ sunt coliniare.

A6. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, o funcție convexă.

Să se arate că pentru orice $x, y, z \in I$, are loc inegalitatea:

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}.$$

Generalizare.

A7. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

CAPITOLUL IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

1 ETAPELE REPREZENTĂRII GRAFICE A FUNCȚIILOR

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție reală de variabilă reală şi $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ graficul funcției f.

O serie de proprietăți locale şi globale ale funcției f pot fi evidențiate şi valorificate mai uşor prin realizarea reprezentării geometrice a mulțimii G_f în planul raportat la un sistem ortogonal de axe de coordonate xOy.

Reprezentarea geometrică a mulțimii G_f se numeşte **curba reprezentativă** a funcției şi se notează $\mathscr{G}_f$.

Pentru reprezentarea grafică a funcțiilor elementare s-a folosit, în general, metoda coordonatelor şi unele proprietăți ale acestor funcții.

În cazul funcțiilor compuse se impune un studiu mai profund în vederea reprezentării grafice a acestora.

Pentru aceasta sunt necesare câteva etape:

1. Domeniul de definiție al funcției şi domeniul de studiu

Domeniul de definiție este dat în mod explicit în enunț sau dacă nu este specificat trebuie determinat ca fiind mulțimea de puncte pentru care au sens toate operațiile cu funcții ce apar în descrierea funcției date. Această mulțime reprezintă domeniul maxim de definiție.

• Dacă funcția este periodică, atunci este suficient ca funcția să fie studiată pe un interval de lungime egală cu perioada principală (dacă aceasta există).

• Dacă funcția este funcție pară sau funcție impară $\left(f(-x) = f(x)\right.$, respectiv $\left.f(-x) = -f(x), \forall\ x \in D\right)$, atunci este suficient studiul funcției pe $D \cap (0, +\infty)$. Axa Oy este axă de simetrie pentru graficul funcțiilor pare, iar $O(0, 0)$ este centru de simetrie pentru graficul funcțiilor impare.

2. Intersecțiile graficului cu axele de coordonate

a) Intersecția cu axa Ox, $(G_f \cap Ox)$. Punctele de intersecție cu axa Ox sunt punctele de coordonate $(a, 0)$, unde $a \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației $f(x) = 0$.

b) Intersecția cu axa Oy, $(G_f \cap Oy)$. Dacă $0 \in D$, punctul de intersecție cu axa Oy are coordonatele $(0, f(0))$.

3. Asimptotele funcției

• Dacă domeniul de definiție al funcției f are $+\infty$ sau $-\infty$ puncte de acumulare, se determină $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, dreptele y = a, respectiv y = b sunt asimptote orizontale spre $+\infty$, respectiv spre $-\infty$.

• Asimptotele oblice sunt dreptele y = mx + n, unde $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ şi $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$ dacă $m \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{R}$.

• Asimptotele verticale sunt dreptele de ecuații x = a, $a \in \mathbb{R}$, unde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, sau cel puțin o limită laterală $f(a-0)$, $f(a+0)$ este infinită.

4. Studiul funcției folosind prima derivată

În această etapă se determină:

a) domeniul de continuitate al funcției;

b) domeniul de derivabilitate al funcției. Se pun în evidență punctele în care funcția nu este derivabilă şi tipul acestor puncte: puncte unghiulare, de întoarcere, de inflexiune.

c) Se stabileşte semnul funcției derivate f'. Pentru aceasta se determină soluțiile ecuației $f'(x) = 0$, intervalele pe care f' are semn constant şi semnul pe fiecare din aceste intervale. Se stabilesc intervalele de monotonie şi punctele de extrem local ale funcției.

5. Studiul funcției folosind a doua derivată

Se calculează f'' şi se determină domeniul de existență al acesteia. Se determină soluțiile ecuației $f''(x) = 0$ şi se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi punctele de inflexiune.

6. Tabelul de variație al funcției

Rezultatele obținute în etapele anterioare sunt sistematizate într-un tabel (tablou) numit **tabelul de variație** al funcției cu aspectul de mai jos.

Pe prima linie se trece domeniul de definiție sau de studiu şi valorile remarcabile ale lui x: zerourile derivatei întâi şi a doua, zerourile funcției etc.

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	
$f''(x)$	

Pe a doua linie se stabileşte semnul primei derivate, iar pe a patra linie semnul derivatei a doua.

Pe linia a treia se trec: limitele funcției la capetele domeniului de definiție (de studiu), monotonia funcției, valorile funcției în punctele remarcabile etc.

7. Interpretarea tabelului de variație şi trasarea graficului funcției

În sistemul ortogonal de coordonate xOy se reprezintă asimptotele funcției, punctele de intersecție ale graficului cu axele, punctele de extrem şi punctele de inflexiune. Având în vedere monotonia şi forma graficului (concavă sau convexă) se unesc punctele remarcabile ale graficului printr-o curbă corespunzătoare.

Problemă rezolvată

☒ Să se traseze graficul funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$; **d)** $f(x) = \sin x + \cos x - 1$.

<u>Soluție</u>

a) Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R}$.

Intersecția cu axele de coordonate. Ecuația $2x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ are soluția reală $x_1 = -1$. Intersecția cu axa Ox este punctul $A(-1, 0)$, iar cu axa Oy este punctul $B(0, 5)$.

Funcția nu are asimptote fiind funcție polinomială.

Studiul cu prima derivată. Funcția este continuă şi derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = 6x^2 - 6x$. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.

Tabelul de semn pentru prima derivată este:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + +$	0	$- -$	0	$+ + + + +$	

Funcția este crescătoare pe intervalele $(-\infty, 0]$ şi $[1, +\infty)$ şi descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$. Punctul x = 0 este punct de maxim, iar x = 1 este punct de minim.

Studiul folosind derivata a doua

Funcția este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f''(x) = 12x - 6$. Tabelul de semn al derivatei a doua este redat alături:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$- - - - - -$	0	$+ + + + + +$	

Funcția este concavă pe intervalul $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ şi convexă pe $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, iar $x = \dfrac{1}{2}$ este punct de inflexiune.

Tabelul de variație a funcției

Rezultatele obținute anterior sunt cuprinse în tabelul:

x	$-\infty$		-1		0		$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +		+ + + + + + +	0	− − − − − −		− − − − − −	0	+ + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M (5)	$\searrow$	$9/2$	$\searrow$	(3) m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		− − − − − −	−	− − − − − −	−	− − − − − −	0	+ + + + + +	+	+ + + + + +	
			$\frown$				i		$\smile$		

Interpretând rezultatele din tabelul de variație obținem graficul din figura 1.

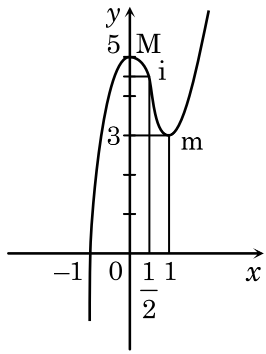


Figura 1

b) Domeniul de definiție este $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ care se scrie $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Graficul intersectează axele de coordonate numai în punctul $O(0, 0)$.

Asimptotele funcției

Avem: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, deci f nu are asimptote orizontale.

Pentru asimptotele oblice se calculează:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = -1 \text{ și } n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) + x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{1 - x^2}\right) = 0.$$

Așadar, dreapta $y = -x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$.

Calculăm $f(-1-0) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^3}{1 - x^2} = \frac{-1}{0_-} = +\infty$ și $f(-1+0) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{x^3}{1 - x^2} = \frac{-1}{0_+} = -\infty.$

Rezultă că dreapta $x = -1$ este asimptotă verticală bilaterală.

Avem și $f(1-0) = +\infty$, $f(1+0) = -\infty$, deci dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală bilaterală.

Studiul folosind derivata întâi și a doua

Funcția este derivabilă pe D și avem: $f'(x) = \dfrac{x^2\left(3 - x^2\right)}{\left(1 - x^2\right)^2}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x \in \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, iar $f(0) = 0$, $f\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$.

Funcția este de două ori derivabilă pe D şi $f''(x)=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$. Ecuația $f''(x)=0$ are soluția x = 0.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		− − − − −	0	+ + + + +	|	+ + + + +	0	+ + + + +	|	+ + + + +	0	− − − − −	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ m	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	M $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$
$f''(x)$		+ + + + + +	+	+ + + + + +	|	− − − −	0 i	+ + + +	|	− − − − − −	−	− − − − − −	

Graficul este redat în figura 2.

➲ **OBSERVAȚIE**

Se observă că $f(-x)=-f(x)$, $\forall\ x\in D$, deci funcția f este impară. Graficul admite punctul $O(0,0)$ centru de simetrie, deci studiul se putea face numai pe mulțimea $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

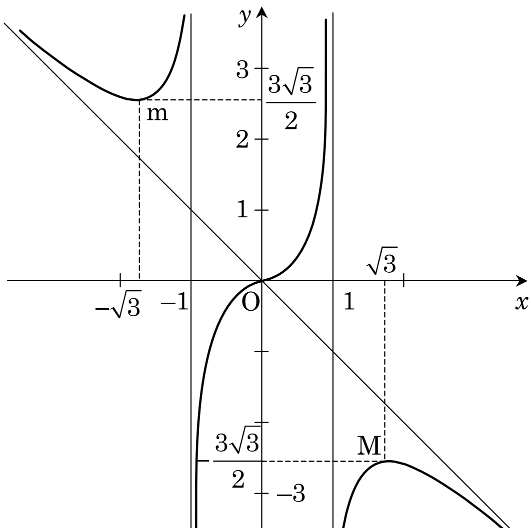


Figura 2

c) Domeniul de definiție este D = ℝ. Limitele la capetele domeniului sunt: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, deci funcția nu are asimptote orizontale. Intersecțiile cu axele de coordonate sunt punctele $O(0,0)$ şi $A(-1,0)$. Funcția nu are asimptote verticale.

Avem: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^3+x^2}{x^3}}=1$ şi

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Rezultă că dreapta $y=x+\dfrac{1}{3}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

Studiul folosind prima derivată

Avem: $f'(x)=\dfrac{3x^2+2x}{3x\cdot\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 0\}$.

Studiul derivabilității în x = 0 şi x = 1 conduce la: $f'_s(0)=\dfrac{2}{0_{(-)}}=-\infty$, $f'_d(0)=\dfrac{2}{0_{(+)}}=+\infty$, $f'_s(-1)=\dfrac{1}{0_{(+)}}=+\infty$, $f'_d(-1)=+\infty$, deci f nu este derivabilă în x = 0 şi x = –1. Punctul x = 0 este punct de întoarcere, iar punctul x = –1 este punct de inflexiune.

Tabelul de variație (fără derivata a doua):

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	$+\infty$ | $+\infty$	+ + + + + +	0	− − − − − −	$-\infty$ | $+\infty$	+ + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	M $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↘	0 m	↗	$+\infty$

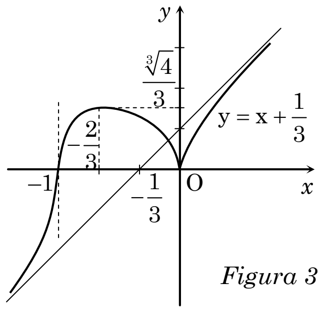


Figura 3

Graficul este redat în figura 3.

d) Funcția f este periodică de perioadă principală T = 2π. Domeniul de studiu este $D=[0,\ 2\pi]$.

Intersecția cu axele de coordonate

Soluțiile ecuației $f(x)=0$ sunt $x\in\left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi\right\}$.

Funcția este de două ori derivabilă pe D şi se obține: $f'(x)=\cos x-\sin x$, $f''(x)=-\sin x-\cos x$. Ecuațiile $f'(x)=0$ şi $f''(x)=0$ au soluțiile $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right\}$, respectiv $x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right\}$.

Tabelul de variație pe $D=[0,\ 2\pi]$ este următorul:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		+ + + + +	0	− − − − −		− − − − −		− − − − −	0	+ + + + +		+ + + + +	
$f(x)$	0	↗	M $(\sqrt{2}-1)$	↘	0	↘	−1	↘	$(-\sqrt{2}-1)$ m	↗	−1	↗	0
$f''(x)$		− − − − −		− − − − −		− − − − −	0 i	+ + + + +		+ + + + +	0 i	− − − − −	

Graficul pe $D=[0, 2\pi]$ este în figura 4.

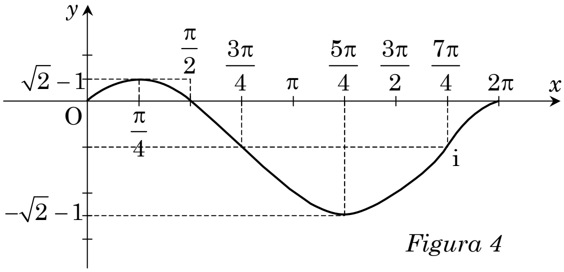


Figura 4

❷ REPREZENTAREA GRAFICĂ A CONICELOR

Conicele reprezintă secțiunile obținute prin intersecția unei suprafețe conice cu un plan.

În funcție de poziția planului, secțiunea obținută poate fi cerc, elipsă, hiperbolă sau parabolă.

În geometria plană conicele pot fi definite ca locuri geometrice.

CERCUL

Fie xOy un reper cartezian în plan, $A(a, b)$ un punct fix şi $r \in (0, +\infty)$ un număr real.

Cercul de centru $A(a, b)$ şi rază r este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța r față de punctul A: $\mathscr{C}(A, r)=\{M(x, y) \in \mathscr{P} \mid AM=r\}$.

Cu ajutorul coordonatelor, relația AM = r se scrie sub forma $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ sau $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, (1).

Relația (1) se numeşte **ecuația cercului sub formă de pătrate**.

Din relația (1) se obține $y=b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$, $x \in [a-r, a+r]$.

Pentru reprezentarea grafică a cercului este suficient să realizăm graficul funcției $f:[a-r, a+r] \to \mathbb{R}$, $f(x)=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, care reprezintă semicercul superior al cercului. Imaginea geometrică a cercului se va completa apoi având în vedere simetria cercului în raport cu dreapta y = b.

Funcția f este continuă pe $D=[a-r, a+r]$, iar $f'(x)=\dfrac{a-x}{\sqrt{r^2-(a-x)^2}}$,

$$f''(x)=\frac{-r^2}{\left(\sqrt{r^2-(a-x)^2}\right)^3}, \quad x \in (a-r, a+r).$$

Tabelul de variație este:

x	$a-r$		a		$a+r$
$f'(x)$	$+\infty$	$+\ +\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -\ -$	$-\infty$
$f(x)$	b	$\nearrow$	$r+b$ $M(a,\ b+r)$	$\searrow$	b
$f''(x)$	$\vert$	$-\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -$	$\vert$

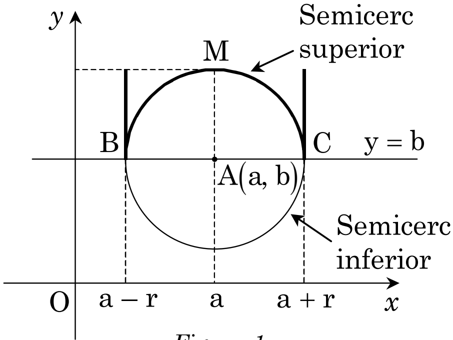


Figura 1

Graficul funcției f și, prin simetrie, al întregului cerc este dat în figura 1.

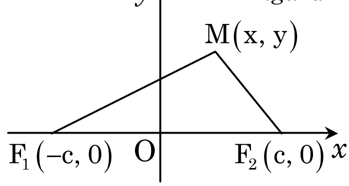
Punctul $M(a,\ b+r)$ este punct de maxim. În punctele $B(a-r,\ b)$ și $C(a+r,\ b)$ graficul admite semitangente verticale.

ELIPSA

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor la două puncte fixe constantă. Punctele fixe se numesc **focarele elipsei**.

Pentru obținerea ecuației elipsei, fie punctele fixe $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$ și $a \in (0,\ +\infty)$ astfel încât $MF_1 + MF_2 = 2a$ (1), unde $M(x,\ y)$ este un punct din plan situat pe elipsă (figura 2).

Figura 2



Deoarece $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, condiția geometrică (1) se scrie sub forma $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$, (2).

Pentru raționalizarea relației (2) se separă un radical și se ridică la pătrat relația obținută. În final se obține că $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} - 1 = 0$. Cu notația $b^2 = a^2 - c^2$ rezultă ecuația elipsei $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,}$ (3).

Se observă ușor că dacă $M(x,\ y)$ aparține elipsei, deci verifică ecuația (3), atunci și punctele $M_1(-x,\ y)$, $M_2(-x,\ -y)$ și $M_3(x,\ -y)$ verifică această ecuație. Rezultă că elipsa are ca axe de simetrie axele de coordonate, iar punctul $O(0,\ 0)$ este centru de simetrie.

Din ecuația (3) se obține $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Așadar, funcția $f : [-a,\ a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, definește partea din elipsă situată deasupra axei Ox. Punctele $A(a,\ 0)$, $A'(-a,\ 0)$ reprezintă intersecțiile elipsei cu axa Ox, iar punctele $B(b, 0)$, $B'(-b, 0)$ intersecțiile cu axa Oy. Punctele A, A', B, B' se numesc **vârfurile elipsei**, iar segmentele $[AA'], [BB']$ se numesc **axa mare**, respectiv, **axa mică** a elipsei.

Funcția f este continuă pe $[-a, a]$, iar $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $f''(x) = $
$= \frac{-ab}{\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (a^2 - x^2)}$, $x \in (-a, a)$.

Tabelul de variație este:

x	$-a$		0		a
$f'(x)$	$+\infty$	+ + + + + +	0	− − − − − −	$-\infty$
$f(x)$	0	↗	b	↘	0
$f''(x)$	|	− − − − − − − − − − − − − − − −			|

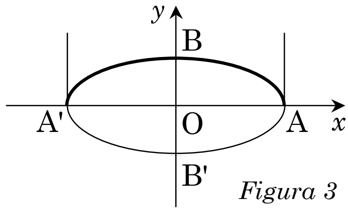


Figura 3

Graficul funcției f este redat în figura 3, iar prin simetrie se obține graficul elipsei.

În punctele $A(a, 0)$ şi $A'(-a, 0)$ graficul funcției f admite semitangente verticale.

HIPERBOLA

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan cu proprietatea că diferența distanțelor la două puncte fixe numite focare este constantă.

Pentru obținerea ecuației hiperbolei notăm $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ focarele hiperbolei şi fie $M(x, y)$ un punct curent al acesteia.

Condiția geometrică prin care se defineşte hiperbola se scrie $|MF_1 - MF_2| = 2a,\ a \in (0, +\infty),\ (1).$

Exprimând analitic relația (1) se obține egalitatea $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} -$
$-\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$, care după raționalizare se aduce la forma:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 - a^2(c^2 - a^2) = 0,\ (2).$$

Deoarece $|MF_1 - MF_2| < F_1F_2$ se obține a < c. Cu notația $b^2 = c^2 - a^2$ ecuația (2) se scrie: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,}$ (3). Această ecuație este ecuația carteziană a hiperbolei. Intersecția hiperbolei cu axa Ox este reprezentată de punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, numite vârfurile hiperbolei. Pentru a = b hiperbola se numeşte **hiperbolă echilaterală**.

Se observă că axele de coordonate Ox şi Oy sunt axe de simetrie ale hiperbolei, iar $O(0, 0)$ este centru de simetrie pentru hiperbolă.

Din relația (3) se obține $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$. Funcția $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, va da graficul hiperbolei în cadranul I, iar prin simetrie în raport cu axele Ox şi Oy se obține întreg graficul hiperbolei.

Avem: $f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $f''(x) = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$, $x \in (a, +\infty)$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, funcția nu are asimptote orizontale. Pentru determinarea asimptotelor oblice obținem: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = $ $= \frac{b}{a}$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{b}{a}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{a} \cdot \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$

Aşadar, dreapta $y = \frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

Tabelul de variație este:

x	a		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	+ + + + + + + + + +	
$f(x)$	0	↗ ↗	$+\infty$
$f''(x)$	− − − − − − − − − − − − −		

Graficul funcției f este redat în figura 4, iar graficul hiperbolei este redat în figura 5.

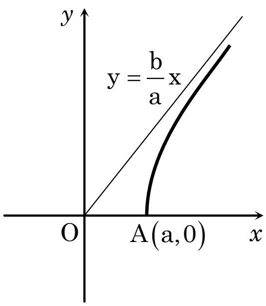


Figura 4

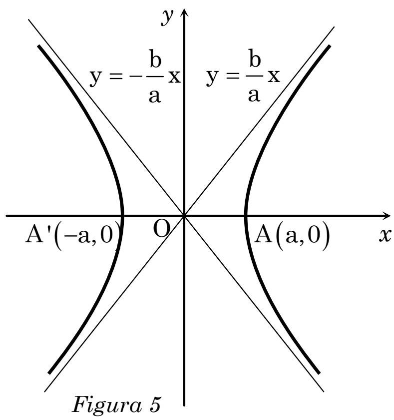


Figura 5

În punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ graficul admite tangentă verticală.

PARABOLA

Parabola este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit **focar** şi de o dreaptă fixă numită **directoare**.

Pentru a stabili ecuația parabolei considerăm $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, focarul parabolei, $x=-\frac{p}{2}$ ecuația directoarei şi $M(x, y)$ un punct curent pe parabolă (figura 6).

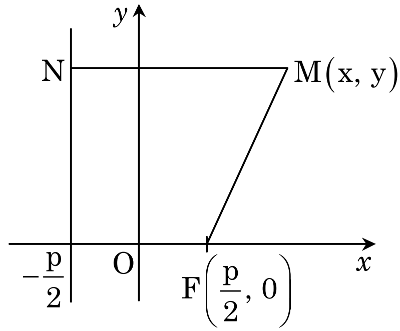


Figura 6

Condiția geometrică MF = MN conduce la egalitatea $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$, care raționalizată se scrie sub forma $y^2=2px$, (1).

Relația (1) se numeşte **ecuația carteziană a parabolei**.

Se observă că dacă $M(x, y)$ se află pe parabolă, atunci şi punctul $M_1(x, -y)$ se află pe parabolă, deci axa Ox este axă de simetrie a parabolei.

Funcția $f:[0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2px}$ va da graficul parabolei situat în cadranul I, iar prin simetrie față de Ox se obține întregul grafic al parabolei.

Avem:

$f'(x)=\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\frac{\sqrt{2p}}{4x\sqrt{x}}$, $x\in(0, +\infty)$.

Tabelul de variație:

x	0 +∞
$f'(x)$	+∞ + + + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ +∞
$f''(x)$	− − − − − − − − − − − − − − − − − − − −

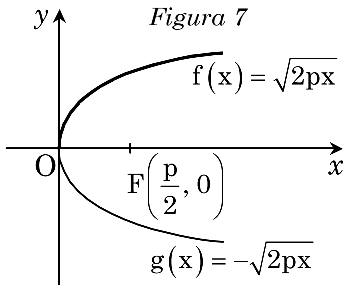


Figura 7

Graficul funcției f şi graficul complet al parabolei este redat în figura 7. În punctul $O(0, 0)$ parabola admite axa Ox ca tangentă verticală.

❸ REZOLVAREA GRAFICĂ A ECUAȚIILOR

Fie f, g : D → $\mathbb{R}$ funcții numerice şi $\mathcal{G}_f$ şi $\mathcal{G}_g$ reprezentările geometrice ale acestora în acelaşi sistem de coordonate xOy, (figura 1).

Din lectura grafică se observă că cele două curbe se intersectează în punctele A, B, iar abscisele lor x_1, respectiv x_2 verifică relațiile:

$f(x_1)=g(x_1)$ şi $f(x_2)=g(x_2)$, (1).

Egalitățile (1) arată că numerele reale x_1, x_2 sunt soluții ale ecuației $f(x)=g(x)$, (2).

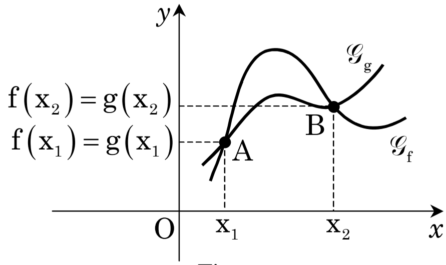


Figura 1

Reciproc, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației $f(x)=g(x)$, adică $f(x_0)=$ $=g(x_0)$ rezultă că x_0 este abscisa unui punct comun al curbelor $\mathscr{G}_f$ şi $\mathscr{G}_g$.

Aşadar, soluțiile unei ecuații de forma $f(x)=g(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}$ sunt date de abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f şi g.

Metoda de determinare a soluțiilor unei ecuații de forma (2) folosind graficele funcțiilor asociate se numeşte **metoda grafică**.

Probleme rezolvate

☒ **1.** Să se rezolve ecuația $\ln(x+1)=x$, (1).

<u>*Soluție*</u>

Vom determina numărul de soluții reale ale ecuației (1) folosind metoda grafică.

Varianta 1

Notăm $f, g:(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)$, $g(x)=x$. Curbele $\mathscr{G}_f, \mathscr{G}_g$ asociate sunt redate în figura 2.

Din lectura grafică se pot extrage următoarele concluzii:

- ecuația are o singură soluție reală $x=0$;
- $\ln(1+x)\le x$, $\forall\ x\in(-1, +\infty)$.

Varianta 2

Notăm: $f, g:(-1, +\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln(x+1)-x,\ g(x)=0.$$

Să reprezentăm grafic funcția f.

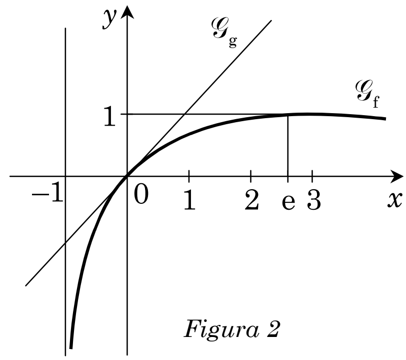


Figura 2

Funcția f este continuă şi de două ori derivabilă pe $(-1, +\infty)$. Avem: $f'(x)=\dfrac{-x}{1+x}$, $f''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $x\in(-1, +\infty)$.

Asimptotele funcției f

Avem: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$, deci dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală.

Tabelul de variație al funcției f este:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + + +		0	− − − − − − − − − −	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 M	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$	− −				

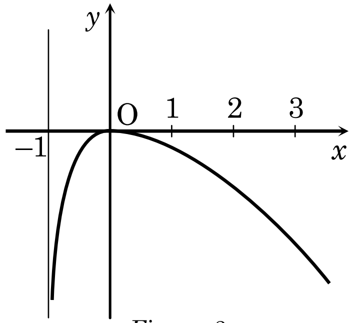


Figura 3

Curbele $\mathscr{G}_f$ şi $\mathscr{G}_g$ sunt redate în figura 3. Curba $\mathscr{G}_g$ este tangentă în x = 0 curbei $\mathscr{G}_f$.

Din lectura grafică se obține că ecuația $f(x) = g(x)$ are o singură soluție reală x = 0 şi că $f(x) \le g(x)$, deci $\ln(x+1) - x \le 0,\ \forall\ x \in (-1, +\infty)$.

➲ OBSERVAȚIE

- A doua variantă de rezolvare grafică a ecuației (1) pune mai sigur în evidență că x = 0 este singura soluție, deoarece punctul x = 0 fiind punct de maxim pentru f, axa Ox este tangentă graficului funcției f.
  În prima variantă de rezolvare grafică nu există siguranța că dreapta y = x este tangentă fără unele calcule suplimentare. Într-adevăr, ecuația tangentei în x = 0 la $\mathscr{G}_f$ este: $y - \ln 1 = f'(0)\cdot(x-0)$ sau y = x. Aşadar, cele două curbe sunt tangente în x = 0 şi concluzia găsită în varianta 1 este corectă.

☒ **2.** Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației polinomiale: $x^4 + 2x^2 - 12x + 4 = 0.$

<u>*Soluție*</u>

Varianta 1. Încercăm aplicarea şirului lui Rolle.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = x^4 + 2x^2 - 12x + 4.$ Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi rezultă că $f'(x) = 4x^3 + 4x - 12 = 4(x^3 + x - 3).$ Pentru formarea şirului lui Rolle trebuie rezolvată ecuația $x^3 + x - 3 = 0,$ care ridică greutăți deosebite. Aşadar aplicarea şirului lui Rolle nu este convenabilă în acest caz.

Varianta 2. Folosim rezolvarea grafică. Vom scrie ecuația dată sub forma $\dfrac{x^4 + 2x^2}{4} = 3x - 1$ şi notăm $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2}{4},\ g(x) = 3x - 1.$

Graficul funcției g este o dreaptă. Reprezentăm grafic funcția f.

Funcția f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi avem $f'(x) = x^3 + x,$ $f''(x) = 3x^2 + 1.$ Graficul intersectează axa Ox doar în punctul $O(0, 0).$

Tabelul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$			

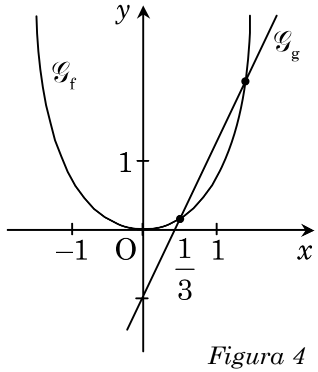


Figura 4

Curbele $\mathscr{G}_f$ şi $\mathscr{G}_g$ sunt reprezentate în figura 4.

Din lectura graficului se obține că există doar două puncte de intersecție. Ecuația dată are două soluții reale $x_1 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $x_2 \in (1, 2)$.

☒ **3.** Să se determine în funcție de parametrul real m numărul de soluții reale ale ecuației $e^x = mx$.

<u>*Soluție*</u>

Se observă că x = 0 nu este soluție a ecuației, deci ea este echivalentă cu ecuația $\frac{e^x}{x} = m$. Folosim metoda grafică alegând $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = m$.

Să reprezentăm grafic funcția f.

• Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, deci y = 0 este asimptotă orizontală la $-\infty$.

• Pentru asimptotele verticale se obține: $f(0-0) = -\infty$, $f(0+0) = +\infty$, deci x = 0 este asimptotă verticală bilaterală.

• Studiul cu ajutorul derivatelor

Funcția f este de două ori derivabilă şi avem: $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x$,

$$f''(x) = \frac{x\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^4}e^x,\ x \in \mathbb{R}^*.$$

Tabelul de variație pentru funcția f este:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	|	$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{m}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	|	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$			

Curbele reprezentative ale celor două funcții sunt redate în figura 5.

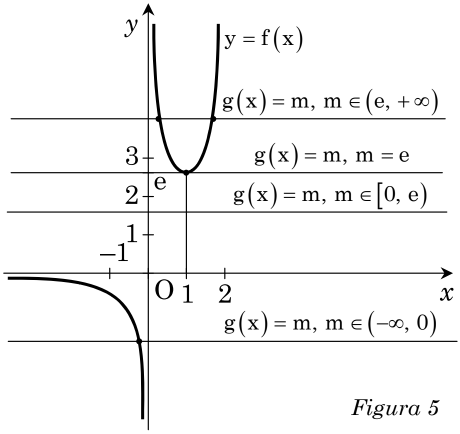


Figura 5

Lecturând graficele din figura 5 se obțin concluziile:

• pentru $m \in (-\infty, 0)$, există un punct de intersecție, deci ecuația are o singură soluție reală $x \in (-\infty, 0)$;

• pentru $m \in [0, e)$ nu există puncte de intersecție şi ecuația nu are soluții reale;

• pentru m = e, punctul de intersecție este $A(1, e)$, iar soluția ecuației este $x = 1$;

• pentru $m \in (e, +\infty)$, există două puncte de intersecție, iar ecuația are două soluții reale $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (1, +\infty)$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = x^3 - x^2$;

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^3$;

d) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$;

e) $f(x) = x^5 - 5x$;

f) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

E2. **Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$; f) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$;

i) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x}$;

j) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$.

E3. **Să se reprezinte curbele de ecuații:**

a) $x^2 - y^2 = 1$; b) $x^2 - 4y^2 = 4$;

c) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$;

d) $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$;

e) $y^2 = 16x$; f) $y^2 = 2x$.

E4. **Să se determine numărul soluțiilor reale pentru ecuațiile:**

a) $\ln(x+1) = x - 1$; b) $\sin x = x$;

c) $x^5 = 5x + 1$; d) $x + e^x = 1$;

e) $\operatorname{tg} x = x$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$;

f) $xe^x = x^2 + 1$; g) $x^3 - 3x + m = 0$.

APROFUNDARE

A1. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{1-x}$; b) $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$;

c) $f(x)=x\sqrt{1-x}$; d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$;

e) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; f) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $f(x)=x\cdot\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; h) $g(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$;

i) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$; j) $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}$.

A2. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{|1-x^2|}{x}$;

c) $f(x)=x\cdot\sqrt{|x|}$; d) $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$;

e) $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}$; f) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

A3. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=x+\ln(x+1)$;

b) $f(x)=x\cdot\ln x$; c) $f(x)=x\cdot e^{-x}$;

d) $f(x)=x^2\cdot\ln x$; e) $f(x)=e^{-x^2}$;

f) $f(x)=x\cdot\ln|x|$; g) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

h) $f(x)=\ln(x^2-1)$; i) $f(x)=|x|\cdot e^{-|x-1|}$;

j) $f(x)=|x-1|\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

A4. Să se reprezinte grafic funcțiile $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sin x-\cos x$;

b) $f(x)=x+\operatorname{arctg} x$;

c) $f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$;

d) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

e) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$; f) $f(x)=\ln(\sin x)$;

g) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$;

h) $f(x)=x+\sin x$.

A5. Să se reprezinte în plan mulțimea punctelor $M(x, y)$, dacă:

a) $\sqrt{1-y^2}=x$; b) $|x|+|y|=1$;

c) $(x^2-4y^2)\cdot(|x-y|-1)=0$.

A6. Să se discute ecuațiile:

a) $|1-x^2|=m(1+x^2)$;

b) $2\ln x-mx^2+2=0$;

c) $e^x=mx^2$; d) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}=\dfrac{m}{x}$.

A7. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x^3}{3x^2-4}.$$

a) Să se reprezinte graficul funcției.
b) Graficul funcției f are centru de simetrie?
c) Să se determine punctele de pe graficul funcției f în care tangenta la curbă este paralelă cu dreapta $9x + y = 0$ şi să se arate că acestea sunt vârfurile unui paralelogram.
d) Să se separe soluțiile ecuației $f(x)=m$, $m\in\mathbb{R}$.

A8. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{mx^2+2}{x-1},\ m\in\mathbb{R}.$$

a) Să se determine m, astfel încât graficul funcției f să fie tangent dreptei de ecuație $y = -2x + 10$.
b) Să se reprezinte grafic funcția pentru $m = 1$.

A9. Se consideră funcția $f: D \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{m(x+1)^3}{x^2-mx+1},\ m\in\mathbb{R}.$$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, pentru care f are două asimptote paralele cu axa Oy.
b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, pentru care f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.
c) Să se reprezinte grafic f pentru $m = 1$.

A10. Se consideră funcția $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}.$$

a) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția să admită ca puncte de extrem $x = -1$ și $x = 3$, iar dreapta $y = x + 3$ să fie asimptotă a funcției.

b) Să se reprezinte graficul funcției pentru valorile găsite la punctul a) și să se arate că graficul funcției f admite un centru de simetrie.

A11. Fie funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{9x^2}{x^2 - x + 1}$.

a) Să se arate că funcția f are trei puncte de inflexiune și să se separe acestea.

b) Dacă α, β, γ sunt valorile funcției în punctele de inflexiune, să se arate că: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$.

c) Să se reprezinte grafic funcția f.
(Politehnică, Buc., 1972)

TESTE DE EVALUARE RECAPITULATIVE

Testul 1

❍ 1. Să se studieze convergența șirului (a_n), cu termenul general $a_n = \frac{\alpha \cdot n^2 + n + 1}{2n + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *(2p.)*

❍ 2. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + ax + 1, & x \le 1 \\ x^2 + ax + b, & x > 1 \end{cases}.$$ *(3p.)*

❍ 3. Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5x^2 + 9}{x^2 + 3x + 3}$. *(2p.)*

❍ 4. Să se determine asimptotele funcției $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 2|x|}$. *(2p.)*

Testul 2

❍ 1. Să se studieze convergența și să se calculeze limita șirului (a_n), dat de relația de recurență: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{a_n}$, $n \ge 1$. *(2p.)*

❍ 2. Să se determine parametrii reali pentru care funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & x \in [-1, 0) \\ ax^2 + bx + c, & x \in [0, 1] \end{cases}$$ satisface ipotezele teoremei lui Rolle. *(3p.)*

❍ 3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(2 - \cos x)}{x \cdot \sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(a + x) \cdot \sin(a - x) - \sin^2 a}{x^2}$. *(3p.)*

❍ 4. Să se arate că: $e^x - 1 \ge \ln(x + 1)$, $\forall\, x \in (-1, +\infty)$. *(1p.)*

Testul 3

○ 1. Dacă $\ell = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n^2}}$, atunci:

a) $\ell = 0$; b) $\ell = 1$; c) $\ell = 2$; d) $\ell = e$; e) $\ell = +\infty$.

○ 2. Fie a, b ∈ ℝ, b ≥ 0. Şirul (x_n), $x_n = \dfrac{2n^a + n^2 - 1}{bn^3 + 2n^2 + 1}$ este convergent pentru:

a) $b = 0,\ a > 2$; b) $b > 0,\ a = \pi$; c) $b \geq 0,\ a \leq 2 + \operatorname{sgn}(b)$; d) $a = b^2 + 3$;

e) $a = \sqrt{5} + \operatorname{sgn}(b)$.

○ 3. Dacă $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin(nx)}{x}$, atunci:

a) $L = n(n+1)$; b) $L = n^2$; c) $L = \dfrac{n(n+1)}{2}$; d) $L = (n+1)(n+2)$; e) $L = n(n+3)$.

○ 4. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{7x+4}}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ este egală cu: a) 1; b) –1; c) 2; d) –2; e) 0.

○ 5. Mulțimea punctelor de continuitate a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 2x+1, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$

este: a) ℝ; b) ℚ; c) ℝ \ ℚ; d) $\{0, \pm\sqrt{2}\}$; e) ∅.

○ 6. Funcția $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$:

a) este definită numai pe $(-\infty, 0]$;
b) este definită şi continuă pe ℝ;
c) este definită şi derivabilă pe ℝ;
d) este definită pe ℝ, dar nu este continuă pe ℝ;
e) este definită numai pentru $x\in(3, +\infty)$.

○ 7. Funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}$, admite asimptota oblică de ecuație:

a) y + x + 1 = 0; b) 2y + 2x = 1; c) y = 1 – x; d) y = –x; e) y = x.

○ 8. Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2-2x+1$, $g(x) = x^4-2x^3+2x^2-1$.
Graficele funcțiilor f şi g sunt tangente în punctul:
a) $A(1, 0)$; b) $A(2, 0)$; c) $A(-1, 4)$; d) $A(1, -1)$; e) nu sunt tangente.

○ 9. Domeniul de derivabilitate a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$ este:

a) ℝ; b) $[-1, 1]$; c) $(0, +\infty)$; d) $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$; e) ∅.

○ 10. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-m)\cdot|x-3|$ este de două ori derivabilă pe ℝ pentru: a) m = 0; b) m = 3; c) m = 1; d) m = –1; e) m ∈ ∅.

Testul 4

❍ 1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x > 0 \\ \sin x, & x \leq 0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Pentru valorile lui a și b găsite să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 \cdot \dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}\right)^n$. *(2p.)*

❍ 2. Să se determine constantele reale $a \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b, & x \in [0, 1] \\ \ln(x^2 - 3x + 3), & x \in (1, 2] \end{cases}$, îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle și să se aplice această teoremă funcției găsite. *(2p.)*

❍ 3. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \\ \pi, & x = 0 \\ 2x + \pi, & x < 0 \end{cases}$ care afirmație este adevărată:

a) funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$;
b) funcția f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$;
c) funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$;
d) funcția f este convexă pe $(-\infty, 0)$;
e) punctul $x = 0$ este punct de inflexiune pentru f? *(2p.)*

❍ 4. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$. *(3p.)*

Testul 5

❍ 1. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{ax^2 - x^3}$, știind că graficul funcției f admite o asimptotă care trece prin punctul $A(1, 1)$. *(3p.)*

❍ 2. Să se separe soluțiile reale ale ecuației $x^5 - 2x^3 + mx^2 - 3x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

❍ 3. Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(\sin x) - \sin(\mathrm{tg}\, x)}{x^3}$. *(2p.)*

❍ 4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Dacă α, β, γ sunt soluțiile ecuației $f(x) = 0$ și aceste soluții sunt distincte, să se arate că:

$\dfrac{\alpha^2}{f'(\alpha)} + \dfrac{\beta^2}{f'(\beta)} + \dfrac{\gamma^2}{f'(\gamma)} = 1$. (ASE, București) *(1p.)*

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI PROBLEME DE ECUAȚII LINIARE
CAPITOLUL I. PERMUTĂRI (pag. 13)

• **E1.** $\text{Card}(S_n) = n!$; **a)** $n=4$; **b)** $n=6$; **c)** $n=7$. • **E4.** $x=\beta\alpha^{-1}$; $y=\beta^{-1}\alpha^3=\beta^{-1}\alpha$. • **E5. a)** $k=3$; **b)** $k=4$; **c)** $k=5$. • **E6.** Avem $\sigma^4=e$ şi se obține $M=\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$. • **E8.** $m(\sigma)=2$; $m(\alpha)=4$; $m(\beta)=8$; $m(\theta)=17$. • **A1. b)** $\sigma^{2007}=\sigma^{5\cdot 401+2}=\sigma^2$; $\theta^{2005}=\theta$; $\varepsilon^{2010}=e$; **c)** $x=\sigma^{-1}\cdot\theta$; $y=\sigma^{-1}\cdot\theta\cdot\varepsilon^{-1}$; $z=\theta^2\cdot\varepsilon$. • **A2. b)** Pentru ecuația $\alpha\cdot x=x\cdot\alpha$ şi $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&e\end{pmatrix}$ se obține: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\e&b&a&c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&e\end{pmatrix}$. Se analizează pe rând cazurile $a=1, a=2, ..., a=5$ şi se obține $x\in\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$. • A**3.** Mulțimea $\{e, \sigma, \sigma^2, ...\}\subset S_n$, deci este finită. Rezultă că $\exists\, q, p\in\mathbb{N}$, $p>q$ astfel ca $\sigma^p=\sigma^q$ şi se obține $\sigma^{p-q}=e$. Se ia $k=p-q\in\mathbb{N}^*$. • **A5.** $C_n^{\,2}=45\Rightarrow$ $\Rightarrow n=10$. • **A6. a)** 2; **b)** 5. • A**7.** $(i, j)=(8, 7)$; $(k, p)=(6, 8)$. • **A8.** $C_n^{\,2}-k$. • **A9. a)** $\frac{n(n+1)}{2}+$ $+\frac{n(n-1)}{2}$. • **A11.** Se foloseşte proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale şi se obține: **a)** $\sigma(k)=k$; **b)** $\tau(k)=n-k+1$, $k=\overline{1, n}$. • **A13. a)** Se caută soluții de forma $\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{pmatrix}$. Se analizează cazurile $a=1, a=2, a=3$. Se obține soluția $x=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$; **c)** Avem $\varepsilon(x^2)=\varepsilon(\sigma)\Leftrightarrow(\varepsilon(x))^2=-1\Leftrightarrow 1=-1$, fals $\Rightarrow x\in\varnothing$. • **A15.** Se foloseşte scrierea în baza 10 şi se obține: $4!(1+2+3+4+5)(10^4+10^3+10^2+10+1)$.

CAPITOLUL II. MATRICE (pag. 32)

• **E2. a)** $a=x=y=4$; $b=\pm 3$; **b)** $x=a=2$; $y=b=1$. • **E4. a)** $x=y=2, z=0, t=3$ sau $x=-3$, $y=-13, z=-5, t=8$; **b)** $x\in\{2, 4\}$; **c)** $x=2, p=5, y=11, z\in\{2, 3\}$. • **E10. a)** $x=y=2$; **b)** $x=-5$, $y=0$. • **E11. a)** $x=0, y=1$; **c)** $A^n=\begin{pmatrix}1&5^n-1\\0&5^n\end{pmatrix}$. • **E12. a)** $\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&1&0\\2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix}1&0&2n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. • **E13.** $A^3=-I_3$, $A^6=I_3$, etc.

• **A3.** $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. • **A6. b)** $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & n\ln a \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (a+b)^n+(a-b)^n & (a+b)^n-(a-b)^n \\ (a+b)^n-(a-b)^n & (a+b)^n+(a-b)^n \end{pmatrix}$. • **A7.** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$. • **A9.** Din egalitatea $A^n \cdot A = A \cdot A^n$ rezultă $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se obține $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Se calculează A^n şi se identifică cu matricea dată. • **A10.** Se scrie $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A^n$. Se obțin relațiile $a_{n+1} = a \cdot a_n + c \cdot b_n$ şi analoagele, de unde rezultă relațiile cerute. • **A12.** $Tr(AB - BA) = 0$ şi $Tr(I_n) = n$. • **A15. c)** $(2, 3), (3, 5), (5, 2)$ respectiv $(2, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 5)$.

TESTE DE EVALUARE (pag. 35)

TESTUL 1

1. c); **2. a)**; **3. d)**; **4. b)**; **5. d)**.

TESTUL 2

1. $x = y = z = 1$; **2.** Se foloseşte că $A(a) \cdot A(b) = A(ab)$; **3.** Se foloseşte că $X^{2001} \cdot X = X \cdot X^{2001}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **4.** Avem $A = a \cdot I_3 + B$ şi $B^3 = 0_3$.

CAPITOLUL III. DETERMINANȚI (pag. 37)

1. Determinantul de ordinul n. Proprietăți (pag. 51)

• **E2. a)** $x \in \{-4, 4\}$; **b)** $x = \frac{3}{2}$; **c)** $x = 1$; **d)** $x \in \{-4, 2\}$; **e)** $x = 9$. • **E4. a)** $x \in \{-2, 1\}$; **b)** $x = 0$; **c)** $x = 1$. • **E6.** +, –, –. • **E10.** $x = 1$.

• **A1. a)** $(b-a)(c-a)(c-b)$; **b)** 0; **c)** $(a-b)(b-c)(c-a)$; **d)** $(a-1)(b-1)(a-b)(-1-a-b)$; **e)** $(x-y)(z-x)(y-z)(xy+yz+zx)$; **f)** Se scrie determinantul ca sumă de determinanți. • **A2. a)** 0; **b)** $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ şi se adună coloana 3 la coloana 1. Rezultă un determinant Vandermonde; **c)** $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Se înmulțeşte coloana 2 cu 2 şi se adună la prima coloană. Se obține un determinant Vandermonde. • **A3.** Ecuația se scrie $x^3 + (x+1)^3 = 0$, etc. • **A5.** Se obține ecuația: $(x-1)^3 + a = 0$. • **A6.** Se obține $f(x) = e^{2(x^2+x+a)} + 2e^{-(x^2+x+a)} - 3$. Rezultă $e^{x^2+x+a} = 1$ şi $x^2 + x + a = 0$. Se pun condițiile $\Delta \geq 0, S < 0, P > 0$. • **A7. a)** $\Delta = (x+3)(x-1)^3$; **b)** $\Delta = (x-1)^4 - 1$; **c)** $x \in \{a+b+c, b-a-c, c-a-b, a-b-c\}$. • **A10.** Prin adunarea unei linii la celelalte linii se obțin pe aceste linii numai numere pare. Se dă apoi factor comun 2 pe fiecare linie cu elementele pare. • **A11.** Dacă $M = A - {}^tA$, atunci ${}^tM = -M$ şi se are în vedere că $\det {}^tM = \det(M)$. • **A13.** Fie $M = A + i \cdot B$ şi $N = A - i \cdot B$. Atunci $\det(M \cdot N) = \det\left(A^2 + B^2\right)$. Dar $\det(M) = \overline{\det(N)}$ şi astfel $\det(M \cdot N) = \left(\det(M)\right)^2 \geq 0$; **b)** Nu.

• **A14.** Avem: $I_n + A + A^2 = \left(A + \frac{1}{2} I_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_2\right)^2$ şi se aplică A13. • **A19.** $D = (-2)^{n-1} \cdot (n-1)!$.

2. Aplicații ale determinanților în geometria plană (pag. 58)

• **E2.** $m \in \{0, 8\}$. • **E10.** Dreptele $8x - 11y - 4 = 0$ şi $4x - 5y - 4 = 0$. • **E11.** Se scrie $y = m(x + 2)$. Se obțin vârfurile triunghiului prin intersecția dreptelor.

CAPITOLUL IV. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

1. Matrice inversabile. 2. Ecuații matriceale (pag. 66)

• **E3. a)** $m \neq 6$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; **c)** $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$; **d)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

• **E4. a)** $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$. • **E5. b)** $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• **A1. a)** $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$; **b)** $\det A = 1$ şi $m = \frac{7x}{3}$. Se obține ecuația $7x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(7x^2 + 4x + 12\right) = 0$ cu soluția reală $x = 1$, iar $m = \frac{7}{3}$. • A**2.** $\det(A) \neq 0$, $\forall\, m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 + 6m + 11 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$. • **A4.** Dacă $A^2 - A = B$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se obține $AB = BA$ şi $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$. Rezultă $a = 3; c = 2$ sau $a = -2; c = -2$. • **A5. b)** $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• **A6.** $2 \cdot I_p$. • **A7.** $I_n = I_n \pm A^5 = (I_n \pm A) \cdot M$, etc. • **A8.** Se arată că $(A \cdot B)^2 = 0_n$. Rezultă $I_n = I_n - (A \cdot B)^2 = (I_n - A \cdot B)(I_n + A \cdot B)$. • **A9.** Relația dată se scrie $(I_n - A) \cdot (I_n - B) = I_n$, deci $I_n - A$, $I_n - B$ sunt inversabile şi rezultă că $(I_n - B) \cdot (I_n - A) = I_n$ şi $AB = BA$.

• **A10. a)** Dacă $(I_n + A \cdot B) \cdot C = I_n$ se arată că $(I_n + B \cdot A)^{-1} = I_n - BCA$; **b)** $I_n + (A \cdot B)^p = I_n + A \cdot M$, unde $M = (B \cdot A)^{p-1} \cdot B$. Atunci din a) şi matricea $I_n + M \cdot A = I_n + (B \cdot A)^{p-1} \cdot B \cdot A = I_n + (B \cdot A)^p$ este inversabilă.

3.2. Sisteme de ecuații liniare de tip Cramer (pag. 73)

• **E3. a)** $(1, 1, 0)$; **b)** $(2, 0, 0)$; **c)** $(1, 1, 1, 1)$; **d)** $(-1, 1, 1, 2)$.

• **A1. a)** $(2, 1, 1, 1)$; **b)** $(i, 1, 0)$; **c)** $(-1, 1, 2, 2)$. • **A2. a)** $(-abc, ab+bc+ca, -a-b-c)$.

• **A3. a)** $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$; **b)** $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; **c)** $p \in \mathbb{R} \setminus \{3, \pm\sqrt{2}\}$; **d)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. • **A5. a)** $\det(A) = = 6m(m-2)$; **b)** $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; **d)** $m \in (0, 2)$.

3.3. Rangul unei matrice (pag. 77)

• **E2. a)** $r = 2$ pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$, $r = 1$ dacă $m = 9$; **b)** $r = 2$; **c)** $r = 2$ pentru $m = \frac{11}{5}$, $r = 3$ în rest; **d)** $r = 1$ dacă $m = 1$, $n = 3$ şi $r = 2$ în rest.

• **A1. c)** $\det(A) = \alpha + \beta - 3$. Pentru $\alpha + \beta \neq 3$, $r = 4$ şi $r = 3$ în rest; **d)** Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că $r \geq 2$. Dacă $\alpha \in \{-3, -2\}$, $\beta \in \{-3, -2\}$, $r = 2$, iar în rest $r = 3$. • **A2.** $a = 4$, $b = -1$, $c = -2$. • **A3.** Condiția $\det(A) = 0$. • **A4.** $x \in \{1, 7\}$. • **A5.** Dacă $x = a - \frac{1}{2}$ se obține că $\det(A) = (x + b + c) \cdot (x^2 + b^2 + c^2 - xc - xb - bc)$. Se arată că parantezele nu sunt numere întregi, deci nu pot fi egale cu 0.

3.4. Studiul compatibilității sistemelor de ecuații liniare şi rezolvarea acestora (pag. 84)

• **E1.** a) $x = \alpha$, $y = 10 - 9\alpha$, $z = 8 - 7\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; **c)** incompatibil; **d)** $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$. • **E2. a)** Compatibil simplu nedeterminat. $x = \frac{7\alpha + 24}{13}$, $y = \frac{22\alpha + 16}{13}$, $z = \alpha$; **b)** Compatibil simplu nedeterminat. $x = \frac{-3\alpha + 19}{8}$, $y = \frac{\alpha + 7}{8}$, $z = \alpha$; **c)** Compatibil simplu nedeterminat; **d)** Compatibil simplu nedeterminat; **e)** incompatibil; **f)** incompatibil; **g), h)** Compatibil simplu nedeterminat; **i)** $(1, -2, -3)$.

• **A1. a)** $a = 1$; **b)** Din $\text{rang}A = \text{rang}\overline{A} = 2$ se obține relația $2ab - 5a - 3b + 6 = 0$ sau $(2a - 3)(2b - 5) = 3$. Rezultă $(a; b) \in \{(3; 3), (2; 4), (0; 2), (1; 1)\}$. • **A2. a)** $a = 1, b = 1$ sau $a = -0{,}5, b = 1$; **b)** $a = 1, b = -12$. • **A3.** $\text{rang}A = \text{rang}\overline{A} = 2$ şi $a = -8, b = 2$. • **A4.** Condiția $\text{rang}A = \text{rang}\overline{A} = 2$. Se obține $a = -1, b = -1, c = 1$. • **A5.** Condiția $\det(A) = 0$, $a \in \{-4, 3\}$. Apoi se găseşte $b \neq -3$. • **A6.** Condiția $\det(A) \neq 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$. • **A7.** Condiția $\det(A) = 0$ implică $m \in \{-2, 1\}$. • **A11.** Se formează cu primele 3 ecuații un sistem omogen care trebuie să admită soluții nebanale. Rezultă $m = 1$, şi soluția $x = \alpha, y = -\alpha, z = \alpha$. Înlocuită în a patra ecuație se obține $\alpha \in \{-9, 9\}$.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ
CAPITOLUL I. LIMITE DE FUNCȚII

13. Limite laterale (pag. 172)

• **E2. a)** $a \in \mathbb{R}$; **b)** $a = 0, b = 2$; **c)** $a = \frac{1}{3}$.

• **A1. a)** e; **b)** $a = 2, b = 3$.

14. Proprietăți ale funcțiilor care au limită (pag. 176)

• **A1. a)** 1; **b)** 3; **c)** $\frac{n(n+1)}{2}$. • **A2.** $l = 0$. • **A3. a)** 0; **b)** Pentru $a \in (1, +\infty)$, $l = +\infty$; pentru $a \in (-\infty, 1)$, $l = -\infty$; iar pentru $a \in [-1, 1]$, limita nu există.

16.2. Limite de funcții compuse (pag. 184)

• **E4. a)** 1; **b)** 1; **c)** $\frac{1}{3}$; **d)** $-\frac{1}{3}$, **e)** $\frac{\pi}{2}$. • **E5. a)** $\frac{6}{7}$; **b)** $\frac{6}{5}$; **c)** 1; **d)** $\frac{4}{5}$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** 1; **g)** $\frac{1}{3}$; **h)** 1, pentru $n \geq 1$ şi $\frac{1}{\sin 1}$ pentru $n = 0$; **i)** 2; **j)** $\frac{4}{5}$.

• **A1. a)** $a = 1, b = -1$; **b)** $a = 1, b = 0$; **c)** $a = 1, b = 0$. • **A2. a)** 10; **b)** $\frac{n(n+1)}{2}$. • **A3. a)** $a + b + 1 = 0$ şi $6a + 5b = 0$; **b)** $a + b + c + 6 = 0$, $4a + 3b + 6 = 0$, $2a + b = 0$. • **A4. a)** $\frac{\ln 6}{3\ln 2}$. • **A6. a)** 1; **b)** 1; **c)** 1; **d)** -1; **e)** 9; **f)** -8. • **A8.** Fie $T > 0$ perioadă a funcției. Deoarece f este neconstantă există $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) \neq f(x_1)$. Atunci $f(x_0) = f(x_0 + nT)$ şi $f(x_1) = f(x_1 + nT)$. Luând $x_n = x_0 + nT$, $y_n = x_1 + nT$, cu limita $+\infty$ se obține că $f(x_n) \to f(x_0)$ şi $f(y_n) \to f(x_1)$.

17. Asimptotele funcțiilor reale (pag. 191)

• **E1. a)** $y = 0, x = 0, x = 1$; **b)** $y = 0, x = 2, x = -2$; **c)** $y = 1, x = 2, x = -2$; **d)** $y = 1, x = 1, x = 2$; **e)** $y = x, x = 3, x = -3$; **f)** $y = x + 2, x = 2, x = 3, x = -3$. • **E2. a)** Asimptote orizontale: $y = \frac{1}{2}$ spre $+\infty$, $y = -\frac{1}{2}$ spre $-\infty$. Asimptotă verticală $x = -\frac{1}{2}$; **b)** $x = 2$, asimptotă verticală şi $y = x + 2$ asimptotă oblică; **c)** Asimptote verticale $x = 1, x = -1$, asimptotă oblică $y = x$.
• **E3. a)** Asimptote orizontale: $y = x$ la $+\infty$ şi $y = -x$ la $-\infty$; **b)** $y = x$ la $+\infty$, $y = -x$ la $-\infty$; **c)** $y = 0$; **d)** $x = 3, x = -3$ şi $y = x$ la $+\infty$, $y = -x$ la $-\infty$. • **E4. a)** $a = 3$; **b)** $a = 4, b = 0$.
• **A1. a)** $x = 0, y = x + 1$; **b)** $x = 1, x = -1$.

CAPITOLUL II. FUNCȚII CONTINUE

1. Funcții continue într-un punct (pag. 202)

• **A1. a)** $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x & , x \in (-1, 1] \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 0 \\ 0{,}5 & , x = 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases}$; **c)** $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x > 0 \\ 0{,}5 & , x = 0 \\ \cos x & , x < 0 \end{cases}$.

• **A3. a)** $a=1$; **b)** $a=0$; **c)** $1=a+\ln a$ cu soluția unică $a=1$. **d)** $a=1$; **e)** $a=b=0$; **f)** $a=0$; **g)** $a=0,\ b=1$; **h)** Se obține $\sin a=\frac{1}{2}$, etc. • **A4. a)** $b=0,\ a=1$; **b)** $a=\pm e,\ b=0$; **c)** $a=b$, $c=2b$; **d)** $a=3,\ b=1-3e$. • **A7. a)** $2^a+4^a=6$ şi $a=1$; **b)** $2^a+3^b=5$ şi $2^{2a}+3^{2b}=13$. Se obține $a=b=1$ şi $a=\log_2 3,\ b=\log_3 2$; **c)** $a^2=|a|$ şi $a\in\{0,1,-1\}$. Convine doar $a\in\{-1,1\}$; **d)** Dacă $2a-1<a^2$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, atunci f este continuă pe $D=(-\infty,2a-1]\cup[a^2,+\infty)$. Dacă $a=1$ atunci $2^b+1=6-3^b$ şi $b=1$. **e)** $a=2,\ b=8$ şi $a=-3,\ b=28$. • **A8. a)** $f=a$; **b)** $f(x)=x+a$; **c)** $f=a$; **d)** $f=a$; **e)** $f=a$. • **A9.** Avem: $f(x)=f(x-x_0)+f(x_0)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(0)+f(x_0)=f(x_0)$, deoarece $f(0)=0$; **b)** $f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$. • **A10.** Dacă $x_0\in\mathbb{R}$, fie (x_n), $x_n\in\mathbb{Q}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Din continuitatea funcțiilor f şi g se obține $f(x_0)=g(x_0),\ \forall x_0\in\mathbb{R}$, deci $f=g$. • **A11.** Fie $x_0\in\mathbb{R}$. Considerăm $(x_n),(y_n)$ şiruri cu proprietatea că $x_n,y_n\in\mathbb{Q}$, $x_n<x_0<y_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Dacă g este monotonă, atunci avem: $g(x_n)\le g(x_0)\le g(y_n)$ sau $g(x_n)\ge g(x_0)\ge g(y_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Dar $f(x_n)=g(x_n)$ şi $f(y_n)=g(y_n)$ şi astfel se obține că: $f(x_n)\le g(x_0)\le f(y_n)$ sau $f(x_n)\ge g(x_0)\ge f(y_n),\ n\in\mathbb{N}$. Prin trecere la limită avem: $f(x_0)=g(x_0)$ deci $f=g$.

2. Operații cu funcții continue (pag. 207)

• **A1.** Se folosesc egalitățile: $\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ şi $\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}$. • **A2.** Se foloseşte faptul că $f_+(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ şi $f_-(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$. • **A4.** Din continuitate se obține că $g(n)=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$, şi apoi că $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. • **A6.** Trasăm graficul funcției $f(x)=x^2-1$. Rezultă studiind figurile 1 şi 2 că $g(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ x\le 0\\ -1 & ,\ x>0\end{cases}$. Analog se va obține că $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\le 0\\ -1, & x\in(0,1)\\ f(x-1), & x\ge 1\end{cases}$ •

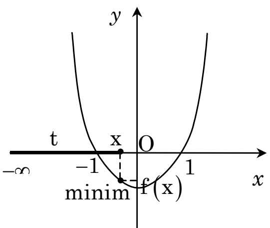


Figura 1

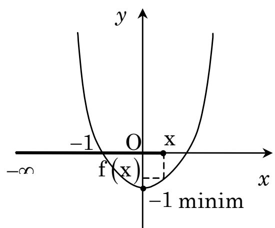


Figura 2

A7. Avem: $f(b-0)=a+b$ şi $f(b+0)=b-a$. Din egalitatea $f(b-0)=f(b+0)$ se obține că $a=0$. Analog, $g(a-0)=a+b$ şi $g(a+0)=a-b$ şi se obține $a+b=a-b$, deci $b=0$. • **A8.** Se ia $x\to 1-x$ şi se obține $2f(1-x)+3f(x)=\begin{cases}1-x, & 1-x\le 1\\ 1-2x, & 1-x>1\end{cases}$. Se formează un sistem cu necunoscutele $a=f(x)$ şi $b=f(1-x)$.

• **D2. a)** $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ şi f este funcție monotonă. Se aplică apoi D1. • **D4.** Din relația $f\circ(f\circ f)=1_{\mathbb{R}}$ rezultă că f este surjectivă iar din relația $(f\circ f)\circ f=1_{\mathbb{R}}$ se obține că f este injectivă. Aşadar, f este bijectivă. Funcția f fiind continuă şi injectivă, ea este strict monotonă pe $\mathbb{R}$, din D3. Considerăm f crescătoare pe $\mathbb{R}$. Dacă ar exista $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) < x_0$, atunci din strict monotonia lui f se obține succesiv: $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$, şi $x_0 = f(f(f(x_0))) < f(x_0)$. Contradicție. Aşadar, $f(x_0) \geq x_0$. Dacă $f(x_0) > x_0$, în mod analog se obține că $f(x_0) < x_0$. Aşadar $f(x_0) = x_0$ şi $f = 1_{\mathbb{R}}$.

3. Proprietatea lui Darboux (pag. 214)

• **E4.** Funcțiile au discontinuități de prima speță.
• **A1. b)** f este strict crescătoare, iar $f(0) = 0$, deci $f(x) \geq 0, \forall x \in D$; **f)** $f(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = e^{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.
Avem tabelul de semn:

x	$-\infty$ ...	$e^{-2\pi}$	$e^{-\pi}$	1	e^{π}	$e^{2\pi}$ ...	$+\infty$
$f(x)$		0 + + + +	0 − − − −	0 + + + +	0 − − − −	0 +	

• **A2. a)** $f([-1, 0])$ nu este interval; **b)** $f([1, 2])$ nu este interval. • **A3.** Dacă $f(x) = x^3 + 2x - 1$, atunci $f(0) = -1$ şi $f(1) = 2$, deci ecuația are o soluție $x \in (0, 1)$. • **A4.** Funcțiile date sunt strict crescătoare deci sunt injective. Fiind continue se arată că $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$. Avem **a)** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, deci $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, deci $\operatorname{Im} f(\mathbb{R})$.
• **A5.** Fie $g(x) = f(x) - x$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funcția g este continuă şi $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$, deci există $x_0 \in [a, b]$ cu $g(x_0) = 0$ şi astfel $f(x_0) = x_0$. • **A8.** Notăm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$. Din mărginirea funcției f avem că $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in \mathbb{R}$, şi se obține că $g(x) \geq -x + a$, şi $g(x) \leq -x + b$. Din continuitatea lui g rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) \leq$ $\leq \lim\limits_{x\to\infty}(-x + b) = -\infty$, şi $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \geq \lim\limits_{x\to-\infty}(-x + a) = +\infty$. Aşadar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ deci $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. Se obține că $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ cu $g(x_0) = 0$ şi $f(x_0) = x_0$. • **A9.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci $f(x_0) = f\left(\dfrac{2x_0}{1 + x_0^2}\right) = f(x_1)$, unde $x_1 = \dfrac{2x_0}{1 + x_0^2}$. Apoi $f(x_1) = f\left(\dfrac{2x_1}{1 + x_1^2}\right) = f(x_2)$, unde $x_2 = \dfrac{2x_1}{1 + x_1^2}$.
În acest mod se obține că pentru şirul (x_n), $x_{n+1} = \dfrac{2x_n}{1 + x_n^2}$ avem că $f(x_n) = f(x_{n+1})$ sau $f(x_n) = f(x_0), \forall n \in \mathbb{N}$. Se arată apoi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1 & , x_0 > 0 \\ 0 & , x_0 = 0 \\ -1 & , x_0 < 0 \end{cases}$. Aşadar $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) =$ $= \begin{cases} f(1) & , x_0 > 0 \\ f(0) & , x_0 = 0 \\ f(-1) & , x_0 < 0 \end{cases}$. Din continuitatea funcției f se obține că $f(1) = f(0) = f(-1)$, deci $f(x_0) =$ constantă $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. • **A12.** Fie $g(x) = f(x) - x - 4, x \in \mathbb{R}$. Cum g este continuă şi $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, sau $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dar din $g(x) > 0$ se obține că $f(x) > x + 4$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, iar dacă $g(x) < 0$ rezultă că $f(x) < x + 4$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Aşadar f este nemărginită.

CAPITOLUL III. FUNCȚII DERIVABILE

2. Derivate laterale (pag. 229)

• **E5.** Avem $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$, dar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nu există. • **E6. a)** $f_s'(1)=3$, $f_d'(1)=3$, $f'(1)=3$; **b)** $f_s'(1)=2=f_d'(1)$; **c)** $f_s'(-1)=3$, $f_d'(-1)=3$; **d)** $f_d'\left(\frac{1}{2}\right)=3$, $f_s'\left(\frac{1}{2}\right)=-1$, nederivabilă; **e)** $f_s'(-3)=-1$, $f_d'(-3)=1$, nederivabilă. • **E7. a)** $m=f'(x_0)$. Deoarece $f'(x)=2x$, vom obține $m_1=f'(-2)=-4$, $m_2=f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $m_3=f'(3)=6$. • **E8.** Ecuația este $y-f(x_0)=$ $=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Se obține: **a)** $y=6x-9$; **b)** $y=-x-1$; **c)** $y=25x+104$; **d)** $y=-1$. • **E9. a), b), c)** da; **d)** nu, deoarece $f'(0)=+\infty$. Punct de inflexiune. • **E10. a)** da; **b)** da. • **E11. a)** Graficul este în figura 1. Ecuația tangentei în $x=0$ este $y=0$. Punctul $x=0$ este de punct de inflexiune; **b), c)** Se arată că $f'(0)=+\infty$; **d)** $f'(-2)=+\infty$.

• **A2.** $a=3$, $b=-4$. • **A5. a)** Punctele de continuitate sunt date de soluțiile ecuației $x^4=x^2+2$. Se obține $x\in\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, puncte în care f nu este derivabilă; **b)** $x=0$. • **A6. a)** Din continuitate se obține $a+b=2$, iar $f_s'(1)=a$, $f_d'(1)=2$. Rezultă $a=2$, $b=0$; **b)** $a=0$, $b=1$; **c)** $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{12}{7}$. • **A7.** $b=-\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{6}$. • **A8.** $a=-1$, $b=5$. • **A9.** $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$, $c=\pm 3$. • **A11.** Panta tangentei este $m=3=f'(x_0)$. Se obține $x_0\in\left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$. • **A12.** Condiția $f'(x_0)=24$. Se obține $x_0=2$. • **A13.** Panta $m=\operatorname{tg}45^\circ=1$. Condiția $f'(x_0)=1$. Rezultă $x_0\in\{1,-3\}$. • **A16.** Curbele $y=f(x)$, $y=g(x)$ sunt tangente în $A(x_0, y_0)$ dacă $f(x_0)=g(x_0)$ şi $f'(x_0)=g'(x_0)$. Rezultă $a=-1$, $b=-1$, $c=-5$.

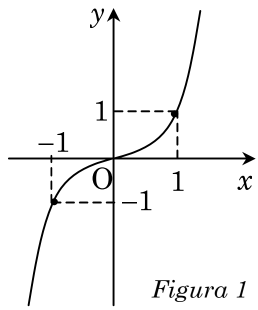


Figura 1

• **A18. a)** Avem: $f(x)=\begin{cases} x_2-ax, & x\ge a\\ -x^2+ax, & x<a\end{cases}$. Funcția f este continuă şi $x_0=a$. Studiem derivabilitatea în $x_0=a$. Avem: $f_d'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{x^2-ax-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}x=a$ şi $f_s'(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{-x^2+ax-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(-x)=-a$. Din egalitatea $f_s'(a)=f_d'(a)$ se obține $a=0$. **b)** Se analizează cazurile $a<b$, $a=b$, $a>b$.

Cazul 1. $a<b$. Rezultă că $f(x)=\begin{cases} x(-x+a)-(x-b), & x\le a\\ x(x-a)-(x-b), & x\in(a,b)\\ x(x-a)+(x-b), & x\ge b\end{cases}$. Avem: $f_s'(a)=-a-1$ şi $f_d'(a)=a-1$. Din egalitatea $f_s'(a)=f_d'(a)$ se obține $a=0$. Se studiază apoi derivabilitatea în $x=b$. Se ajunge la o contradicție.

Cazul $a>b$. Se ajunge la o contradicție când se află derivatele în a şi b.

Cazul $a=b$. Se obține $f(x)=(x+1)(x-a)=\begin{cases}(x+1)(x-a), & x\geq a\\ (x+1)(a-x), & x<a\end{cases}$. Din studiul derivabilității în $x_0=a$ se obține $a=-1$. Aşadar $a=b=-1$. • **A19.** a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-9}, & x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)\\ \sqrt{9-x^2}, & x\in(-3,3)\end{cases}$.

Se obține: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}, & x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}, & x\in(-3,3)\end{cases}$ şi $f_s'(-3)=-\infty$, $f_d'(-3)=+\infty$, $f_s'(3)=-\infty$, $f_d'(3)=+\infty$.

Aşadar punctele $x_0=-3$ şi $x_0=3$ sunt puncte de întoarcere. • **A20.** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}\left(x^2\right)^n-x^2+6}{x^2+4+\left(x^4\right)^n}$.

Se deosebesc situațiile: **a)** $x^2<1$, când $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^2\right)^n=0$ şi rezultă că $f(x)=\dfrac{6-x^2}{x^2+4}$; **b)** $x^2=1$, deci $x\in\{-1,1\}$. Se obține $f(1)=\dfrac{6}{6}=1$ şi $f(-1)=\dfrac{-1-1+6}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$. **c)** $x^2>1$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=+\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x^{4n}=+\infty$. Avem: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{-1}-\dfrac{x^2-6}{x^{2n}}}{\dfrac{x^2+4}{x^{2n}}+x^{2n}}=\dfrac{x^{-1}}{\infty}=0$. Aşadar

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6-x^2}{x^2+4}, & x\in(-1,1)\\ 1, & x=1\\ \dfrac{2}{3}, & x=-1\\ 0, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}.$$

4.4. Derivarea funcției inverse (pag. 248)

• **A3.** Funcția este strict crescătoare şi $\operatorname{Im}(f)=\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right]$. Avem $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$ şi $\left(f^{-1}\right)'(20)=\dfrac{1}{f'(5)}=\dfrac{1}{9}$. • **A4.** $f(x)=(x+1)^3+x-3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Din proprietatea lui Darboux rezultă că $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}$. Avem $\left(f^{-1}\right)'(6)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{13}$. • **A5.** Funcția f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ ca sumă de funcții strict crescătoare $\left(g(x)=2^x,\ h(x)=x^2+x\right)$. Cum $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ rezultă $\operatorname{Im}(f)=(1,+\infty)$. Aşadar f este inversabilă. Avem: $\left(f^{-1}\right)'(4)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3+\ln4}$.

6. Rădăcini multiple ale ecuațiilor polinomiale (pag. 253)

• **E4.** $f(x)=-3x^2+4x+5$. • **E5. a)** $a=3,\ b=-9$; **b)** $a=2;\ b=4$; **c)** $a=2,\ b=1$ sau $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{17}{9}$. • **E6. a)** 2; **b)** 2; **c)** 1; **d)** 3.

• **A2.** $a=3,\ c=2,\ b=-\frac{1}{2}$. • **A3.** $m=-5,\ n=13,\ -5$. • **A4.** $a=8,\ b=-2,\ c=-4,\ d=5$.

• **A6.** $f(x)=x^3-4x^2+3x+5$. • **A7.** $f(x)=\ln(x+1)(x+2)$. • **A8.** $f(x)=9x^4-30x^3+37x^2-20x+4$.

• **A9. a)** $a=18,\ b=-20$; **b)** $a=\frac{n-2}{2},\ b=\frac{n+4}{4}$. • **A10.** Dacă x_0 este rădăcină dublă comună se pune condiția $f(x_0)=0=g(x_0)$, $f'(x_0)=0=g'(x_0)$. Se obține $x_0=2,\ a=2,\ b=4$ şi $x_0=-2,\ a=-\frac{10}{3},\ b=-4$. • **A11. a)** Din egalitatea gradelor se obține $n=3$, apoi $f(x)=\frac{(x-a)^3}{18}$, $a\in\mathbb{R}$; **b)** Se obține $2n-1=(n-2)^2$ şi $n\in\{1,\ 5\}$. Convine $n=5$. Se obține $f(x)=x^5$.

7.2. Teorema lui Fermat (pag. 261)

• **A1.** $f(x)=x^3-3x+4$. • **A2.** $f(x)=2x^3-9x^2+12x-6$. • **A3. b)** Deoarece $f(0)=0$ şi $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că $x=0$ este punct de minim pentru f. Atunci $f'(0)=0$ şi se obține $a=35$. • **A4.** $m=1$. • **A5.** Fie $f(x)=a^x+1-3^x-4^x,\ x\in\mathbb{R}$. Funcția f este derivabilă, $f(0)=0$ şi $f(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci $x=0$ este punct de minim pentru f. Rezultă $f'(0)=0$ şi $a=12$. • **A6.** $a=6$.

7.3. Teorema lui Rolle (pag. 265)

• **E2. a)** $a=1{,}5,\ b=2,\ c=0$; **b)** $a=2,\ b=-5,\ c=-4$. • **E3.** $f'(x)=0$ implică $x\in\{-2,\ 0\}$. Convine $x=0$. • **E4.** $x=0$. • **E5. b)** Funcția f are zerourile $x\in\{\pm 1,\ -3,\ 2\}$. Se aplică teorema lui Rolle pe intervalele $(-3,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ 2)$.

• **A1. a)** $a=-\frac{11}{3},\ b=4,\ c=-8$; **b)** $a=2,\ b=1,\ c=0$. • **A3.** Se consideră $g(x)=(1-x)\cdot f(x)$.

• **A4.** $g(x)=x\cdot f(x)$. • **A5.** Se aplică teorema lui Rolle funcției $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ x\in[0,\ 1]$.

• **A6.** $g(x)=\sin^m x\cdot\cos^n x,\ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. • **A8.** Se aplică teorema lui Rolle funcției f pe intervalele $[x_1,\ x_2],[x_2,\ x_3],\ldots,[x_{n-1},\ x_n]$ unde $x_1<x_2<\ldots<x_n$ sunt zerourile funcției f. • **A10.** Cazul $m=0$ este imediat. Pentru $m\neq 0$ se aplică teorema lui Rolle funcției $g(x)=e^{\frac{x}{m}}\cdot f(x),\ x\in\mathbb{R}$ pe intervalele de forma $[x_{i-1},\ x_i]$ cu x_i soluții ale ecuației $f(x)=0$. • **A11.** Considerăm funcția $g(x)=f(x)-x$, care are trei soluții $x_1<x_2<x_3$. Se aplică Rolle şi rezultă că $\exists\ c_1,\ c_2\in\mathbb{R}$, $c_1\in(x_1,\ x_2),\ c_2\in(x_2,\ x_3)$ cu $g'(c_1)=0,\ g'(c_2)=0$. Se aplică apoi teorema lui Rolle funcției g' pe $[c_1,\ c_2]$.

7.4. Şirul lui Rolle (pag. 269)

• **A1.** Se aplică teorema lui Rolle funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ pe $[-4,-3],\ [-3,-2],\ [-2,-1]$. • **A2. e)** Cum $x=0$ nu este soluție, ecuația este echivalentă cu ecuația $x+m-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}=0$. Se consideră $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+m$. Avem $f'(x)=$ $=\frac{x^3+x-10}{x^3}$, cu zeroul $x=2$. Şirul lui Rolle este:

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$m+\frac{9}{4}$	$+\infty$	Separarea soluțiilor
$m<\frac{9}{4}$	$-$	$+$		$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty,0),\ x_2\in(0,2),\ x_3\in(2,+\infty)$
$m=\frac{9}{4}$	$-$	$+$		$+$	0	$+$	$x_1\in(-\infty,0),\ x_2=x_3=2$
$m>\frac{9}{4}$	$-$	$+$		$+$	$+$	$+$	$x_1\in(-\infty,0)$

• **A4.** $f'(x)=\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x},\ x\in(0,1)$. Din $f'(c_n)=0$ se obține că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{c_n}=\frac{\pi}{c_n}$. Se aplică teorema lui Rolle funcției $g:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{tg}x-x$ pe $I_k=\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)$.

7.5. Teorema lui Lagrange (pag. 273)

• **E2. a)** Nu; **b)** Nu; **c)** Da, $c\in\{2,-2\}$; **d)** Da, $c=-\frac{31}{16}$. • **E3. a)** $a=4,\ b=7$; **b)** $a=b=5$.

• **E4.** Panta coardei este $m=-11$. Din $f'(c)=-11$ se obține $c\in\{-1,1\}$.

• **A1. a)** $a=\frac{3-e}{e},\ b=\frac{3-2e}{e}$; **b)** $a=b\in\{-1,2\}$. • **A3.** $A\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$. • **A4.** Se obține că $f'(c)=\ln(n+1)-\ln(n),\ c\in(n,n+1)$ sau $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ (1); **a)** Prin adunarea relațiilor (1) rezultă că $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ +\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=a_n$ (2), deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$; **b)** Din (2) se obține că $b_n-1+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln(n)<b_n$, deci $\ln(n+1)-\ln(n)<b_n<\ln(n+1)-\ln(n)-\frac{1}{n+1}+1$. Se obține că $0<b_n<1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul (b_n) este mărginit. Avem: $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)<0,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci (b_n) este monoton descrescător.

• **A5.** Se aplică teorema lui Lagrange funcțiilor: **a)** $f(x)=x^n, x\in[a,b]$; **b)** $f(x)=\operatorname{tg}x, x\in[a,b]$; **c)** $f(x)=\ln(\cos x),\ x\in[a,b]$; **d)** $f(t)=\sin t,\ t\in[x,y]$; **e)** $f(t)=e^t,\ t\in[0,x],\ t\in[x,0]$.

• **A7. b)** Ecuaţia se scrie sub forma $\frac{6^x-5^x}{6-5}=\frac{4^x-3^x}{4-3}$. Cu teorema lui Lagrange aplicată funcţiei $f(t)=t^x$, pe $[3,4]$ şi $[5,6]$ se obține că $\exists\ c_1\in(3,4),\ c_2\in(5,6)$ cu $f'(c_1)=f'(c_2)$ sau

$x\cdot c_1^{\,x-1}=x\cdot c_2^{\,x-1}$ cu soluțiile $x\in\{0,1\}$. • **A8. a)** Se scrie: $\frac{3^x-2^x}{3-2}=\frac{6^x-5^x}{6-5}$ etc. **b)** Se scrie $\frac{6^x-1}{6-1}=\frac{14^x-9^x}{14-9}$. • **A9. a)** Fie $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in\mathbb{R}$. Aplicând teorema lui Lagrange funcției f pe $[9,10]$ și $[4,5]$ se obține că există $c_1\in[4,5],\ c_2\in[9,10]$ astfel încât $f'(c_2)=\frac{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{9}}{10-9}$ și $f'(c_1)=\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}{5-4}$. Rezultă că $\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{9}=\frac{1}{3\sqrt[3]{c_2^{\,2}}}<\frac{1}{3\sqrt[3]{c_1^{\,2}}}=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}$, deci $\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}<\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{9}$.

• **A10. a)** Aplicăm teorema lui Lagrange funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$ pe $I_n=\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$. Se obține că există $c_n\in I_n$, cu $f'(c_n)=\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ (1). Din relația (1) se obține că $n\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)=$ $=\frac{e^{c_n}}{n+1}$ și limita cerută este $l=0$; **b)** Analog punctului a) obținem $n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)=\frac{n}{n+1}\cdot e^{c_n}$ și $l=1$. • **A11.** Avem că $\alpha=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\beta$. Din teorema lui Lagrange există $c_1\in(0,2),\ c_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ cu $f'(c_1)=\alpha=\beta=f'(c_2)$. Se aplică apoi teorema lui Rolle funcției f' pe $[c_1,c_2]$.

7.6. Consecințe ale teoremei lui Lagrange (pag. 276)

• **E2. a)** $p=2,\ m=-4$; **b)** $a=1,\ b=3$; **c)** $a=\frac{1}{e}+\frac{3}{2},\ b=0$.

• **A4. a)** $f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\ \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$, $g'(x)=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$. • **A5. a)** Avem $\left(e^{-x}f(x)\right)'=$ $=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Deci $e^{-x}f(x)=c$, și $f(x)=ce^x,\ x\in\mathbb{R}$; **b)** Avem: $\left(e^{2x}g(x)\right)'=$ $=e^{2x}g'(x)+2e^{2x}g(x)=e^{2x}\left(g'(x)+2g(x)\right)=e^{2x}=\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'$. Se obține că $e^{2x}g(x)=\frac{e^{2x}}{2}+c$, sau $g(x)=\frac{1}{2}+c\cdot e^{-2x},\ x\in\mathbb{R}$.

8. Regulile lui L'Hospital (pag. 282)

• **A1. a)** Avem succesiv $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n-\sin^n x}{x^{n+2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}n\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{2x\cdot x^2}=$ $=\frac{n}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{n}{6}$;

c) Se scrie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cos nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots(k\sin kx)\ldots\cos nx\right]}{2x}=$

$=\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$

9. Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor (pag. 292)

• **E4. a)** Fie $f(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}.$ Alcătuim tabelul de variație pentru f:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - - - - -$ 0 $+ + + + + + + + + + + + + +$
$f(x)$	↘ ↘ 0 (m) ↗ ↗

Se observă că $f(x)>f(0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$ **b)** Fie $f(x)=x^2-2\ln x-1,\ x\in(0,+\infty).$ Avem $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x}.$ Alcătuim tabelul de variație pentru f.

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	$- - - - - - - - - - - - - -$ 0 $+ + + + + + + + + + + + + +$
$f(x)$	↘ ↘ 0 (m) ↗ ↗

Aşadar $f(x)\ge f(1)=0,\ \forall x\in(0,+\infty).$ • **A3.** Avem: $f'(x)=6x^2-10mx+6.$ Condiția $f'(x)\ge 0,$ $\forall x\in\mathbb{R}$ conduce la $\Delta=4(25m^2-36)\le 0,$ deci $m\in\left[-\dfrac{6}{5},\dfrac{6}{5}\right].$ • **A4.** Condiția $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ implică $x^2+x-m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R},$ deci $\Delta=1+4m\le 0.$ • **A5.** Da. Exemplu $a=2.$ • **A6.** $m<2{,}5.$ • **A7.** Ecuația $f'(x)=0$ conduce la $2ax^2+2ax-1=0,\ x\in(-1,+\infty).$ Se pun condițiile: $\Delta>0,$ $x_1>-1,\ x_2>-1.$ Se obține $\Delta>0,\ S>-2$ şi $P+S+1>0.$ Se obține $a\in(-\infty,-2).$ • **A12. f)** Fie $f(x)=e^x-1-\dfrac{x}{1}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6},\ x\ge 0.$ Avem $f'(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2},$ $f''(x)=e^x-1-x\ge 0,$ $\forall x\in[0,+\infty].$ Alcătuim tabelul:

x	0 $+\infty$
$f''(x)$	$+ +$
$f'(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗
$f'(x)$	$+ +$
$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗

Lecturând tabelul se obține că $f(x)\ge 0,\ \forall x\ge 0.$

• **A14.** Fie $p=2a.$ Atunci, dacă $AD=x$ (figura 1) obținem $CD=a-x.$ Aria dreptunghiului este $S(x)=x(a-x),\ x\in(0,a).$ Din $S'(x)=0$ se obține $x=\dfrac{a}{2}$ deci $y=\dfrac{a}{2}$ şi ABCD este pătrat.

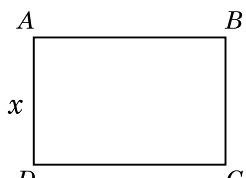


Figura 1

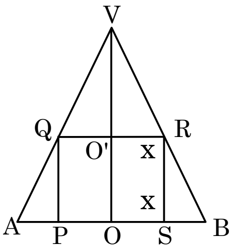


Figura 2

• **A17.** Fie $x \in (O, R)$ raza cilindrului (figura 2). Din asemănare se obține $\frac{O'R}{OB} = \frac{VO'}{VO}$ sau $\frac{x}{R} = \frac{h - RS}{h}$. Se obține că înălțimea cilindrului este $RS = h - \frac{hx}{R} = \frac{h(R-x)}{R}$. Volumul cilindrului este $\mathscr{V}(x) = \frac{\pi x^2 (R-x) h}{R}$. Din ecuația $\mathscr{V}'(x) = 0$ se obține $x = \frac{2R}{3}$.

10. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor (pag. 298)

• **A3.** $a = \frac{1}{8}$. • **A4.** $x_n = \arcsin\sqrt{\frac{n-1}{n}}, l_1 = \frac{\pi}{2}, l_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$. • **A5.** Avem: $f''(x) = 60(x^3 + 3x^2 - x - 3) = 60(x+3)(x^2-1)$. Soluțiile $x \in \{-1, 1, -3\}$. Se obține $A(-1, b-a-68)$, $B(1, b+a-82)$, $C(-3, b-3a-54)$. Se arată că $D = \begin{vmatrix} -1 & b-a-68 & 1 \\ 1 & b+a-82 & 1 \\ -3 & b-3a-54 & 1 \end{vmatrix} = 0$, prin scăderea primei linii din celelalte două linii. • **A7.** Funcția sinus este funcție concavă pe $[0, \pi]$. Se aplică problema A6 pentru $x = A, y = B, z = C$ și $f(x) = -\sin x$.

CAPITOLUL IV. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

3. Rezolvarea grafică a ecuațiilor (pag. 313)

• **E1. a)** Funcția este continuă și de două ori derivabilă fiind funcție polinomială de gradul 3. Rezultă $f'(x) = 3x^2 - 2x$, $f''(x) = 6x - 2$. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$, iar dacă $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Graficul intersectează axa Ox în $x = 0$ și $x = 1$. Tabelul de variație și graficul sunt redate în figura 1.

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + + +$	0	$- - - - - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + +$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	M (0)	$\searrow$	$\searrow$ $-\frac{4}{27}$ m	$\nearrow +\infty$
$f''(x)$	$- - - - - - - - - - - - -$		0 i	$+ + + + + + + + + + + + +$	

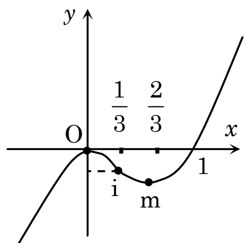


Figura 1

e) Funcția este de două ori derivabilă. Se obține $f'(x) = 5(x^4 - 1)$, cu zerourile $x \in \{-1, 1\}$ și $f''(x) = 20x^3$, cu zeroul $x = 0$. Graficul intersectează axa Ox în punctele $x = 0, x = \pm\sqrt[4]{5}$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + + +$	0	$- - - - - -$		$- - - - - -$	0	$+ + + + + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4 M	$\searrow$		$\searrow$	-4 m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$- - - - - -$		$- - - - - -$	0 i	$+ + + + + + +$		$+ + + + + + +$	

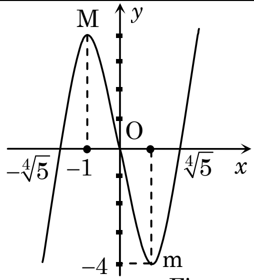


Figura 2

Graficul este redat în figura 2.

• **E2. d)** Funcția este funcție impară, deci domeniul de studiu poate fi $[0, +\infty]$. Avem:

$f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ cu zeroul $x=0$, $f''(x)=\dfrac{-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^3}$ cu zerourile $x\in\{0, \sqrt{3}\}$ pe $[0, +\infty]$.

Graficul admite asimptotă oblică spre $+\infty$, $y=x$.

Tabelul de variație:

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+ + + + + + + + + + +$		$+ + + + + + + + + + +$	
$f(x)$	0	$\nearrow \nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow \nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	0 i	$+ + + + + + +$	0 i	$- - - - - - - - - -$	

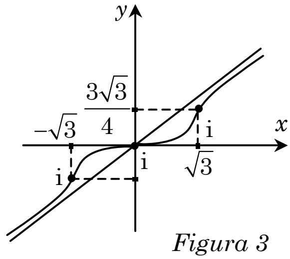


Figura 3

Graficul pe $D=\mathbb{R}$ este în figura 3. Axa Ox este tangentă graficului în $x=0$.

f) $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Funcția este de două ori derivabilă pe D şi $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, cu zerourile $x\in\{0, 3\}$, $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$, cu zeroul $x=0$. Graficul admite asimptota verticală $x=1$ şi asimptota oblică spre $\pm\infty$, $y=x+2$.

Tabelul de variație:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + +$	0	$+ + +$		$- - - -$	0	$+ + + + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$		$+\infty$ $\searrow$	$6{,}25$ m	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$- - - - -$	0	$+ + +$		$+ + + + + + +$		$+ + + + + + +$	

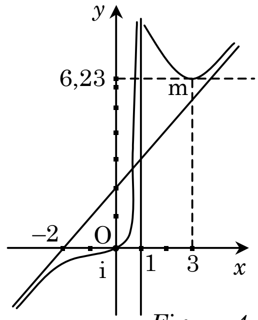


Figura 4

Graficul este redat în figura 4. Axa Ox este tangenta graficului în $x=0$.

h) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$. Dreapta $y=1$ este asimptotă la $\pm\infty$, iar $x=2$, $x=-2$ sunt asimptote verticale. Se obține: $f'(x)=\dfrac{-6x}{\left(x^2-4\right)^2}$, cu zeroul $x=0$. Intersecția cu Ox în $x=\pm1$.

Tabelul de variație fără a doua derivată:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ -2	-2 $\quad$ 0 $\quad$ 2	2 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+ + + + + +$	$+ + + + + \ 0 - - - -$	$- - - - - -$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \underset{\frac{1}{4}}{M} \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$

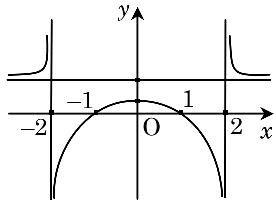


Figura 5

Graficul este redat în figura 5.

• **A1. d)** $D = \mathbb{R}$, funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. Funcția are un punct de inflexiune $x = 0$, deoarece $f''(x) = \dfrac{-3x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3}$; **h)** $D = \mathbb{R}$, domeniul de derivabilitate $D' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. $f'(x) = \dfrac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}, x \in D'$. Punctul $x = 0$ este punct de întoarcere deoarece $f'_s(0) = +\infty$, $f'_d(0) = -\infty$. Deoarece $f'(1) = +\infty$, punctul $x = 1$ este punct de inflexiune. Graficul admite asimptota oblică $y = x - \dfrac{1}{3}$. • **A8. a)** $m = 1$.

• **A9. a)** Se pune condiția ca ecuația $x^2 - mx + 1 = 0$ să admită două soluții reale $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rezultă $m^2 - 4 > 0$; **b)** $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2\left(x^2 - 2(m+1)x + m + 3\right)}{(x^2 - mx + 1)^2}$. Se pune condiția ca $x^2 - 2mx + m + 3$ să păstreze suma constantă pe $\mathbb{R}$ deci $\Delta = 4(m^2 + m - 2) < 0$.

• **A10. a)** Dreapta $y = x + 3$ este asimptotă oblică dacă $a = 1$ şi $b - d = 3$. Din condiția $f'(-1) = 0 = f'(3)$ se obține că $a - 2ad + bd - c = 0$ şi $9a + 6ad + bd - c = 0$. Se obține $a = 1, b = 2, c = 1, d = -1$; **b)** Centrul de simetrie $C(\alpha, \beta)$ verifică condiția $f(\alpha) + f(2\alpha - x) = 2\beta, \forall x \in D$. Se găseşte $C(1, 4)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Ion D., Ion; Radu, Nicolae, *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.

2. Nicolescu, Miron; Dinculeanu, Nicolae; Marcus, Solomon – *Analiză matematică*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

3. Andrei, Gheorghe; Caragea, Constantin ş.a., *Algebră pentru admitere şi olimpiade şcolare, clasa a XI-a*, Editura Topaz, Constanța, 1993.

4. Bătinețu M., Dumitru, *Probleme de matematică pentru treapta a doua de liceu. Şiruri*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.

5. Brânzei, Dan ş.a., *Şiruri recurente în liceu*, Editura Gill, Zalău, 1995.

6. Burtea, Georgeta; Burtea, Marius, *Matematică clasa a XI-a, Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică. Exerciții şi probleme*, Editura Carminis, Piteşti, 2001.

7. Burtea, Georgeta; Burtea, Marius, *Matematică clasa a XI-a, Elemente de analiză matematică. Exerciții şi probleme*, Editura Carminis, Piteşti, 2001.

8. Sirețchi, Gheorghe, *Calcul diferențial şi integral*, Vol. I, II, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

CUPRINS