V. Gârban | 00000100
02/03/2022

Curs 3

Spațiu Vectorial

Prin R^n se înțelege mulțimea $\underbrace{R \cdot R \cdot \ldots \cdot R}_{n \text{ ori}}$, produsul cartezian al mulțimii R, cu ea însuși de n ori

Un element $u \in R^n$ este de formă

$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $a_i \in R$, $\forall i = \overline{1,n}$ vector (punct) din R^n
$a_1, \ldots, a_n$ mai pot fi privite ca fiind coordonatele vectorului $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ în raport cu o bază a lui R^n

Pe R^n se definesc 2 operații:

① Operație internă: Adunarea, definită ca fiind SUMA PE COORDONATE sau PE COMPONENTE, astfel $+ : R^n \times R^n \to R^n$ prin:

Dacă $u = (a_1, \ldots, a_n)$ și $v = (b_1, \ldots, b_n)$ atunci $u + v = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$

Proprietăți:
① ASOCIATIVITATE: $(u+v)+w = u+(v+w)$ $\forall u, v, w \in R^n$
② COMUTATIVITATE: $(u+v) = (v+u)$ $\forall u, v \in R^n$
③ ELEMENT NEUTRU: $\exists e = (0, \ldots, 0) \to u + e = e + u = u$
④ OPUSUL: $\exists u' = (-a_1, \ldots, -a_n) \to u + u' = u' + u = 0$

$\Rightarrow (R^n, +) \to$ Grup Abelian

② Operație externă: Asociază, fiecărei perechi (α, u), unde $\alpha \in R, C, Q$ (Corp comutativ) și $u \in R^n$ un alt vector din R^n după regula:

$\alpha \cdot u = \alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \ldots, \alpha \cdot a_n) \in R^n$

α se numește scalar și operația se numește produs scalar sau înmulțirea cu scalar

Proprietăți:
① $\alpha \cdot (u + v) = (\alpha u + \alpha v)$ ~~FAȚĂ DE~~
② $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
③ $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u) = \beta \cdot (\alpha \cdot u)$
④ $1 \cdot u = u$ 1 este element neutru

Aceste 2 legi de compoziție ① ② conferă lui R^n o structură de spațiu vectorial peste corpul comutativ K $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \ldots)$ al scalarilor.

Elementele lui $\mathbb{R}^n$ se numesc VECTORI.

Vectorii: $e_1 = (1, 0, \ldots 0)_n, \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)_n$ din $\mathbb{R}^n$ formează BAZA CANONICĂ A LUI $\mathbb{R}^n$.

Exemple

① $V = \mathcal{M}(m, n, K)$ = mulțimea matricelor $\mathcal{M}$ de tipul (m, n) formate cu elemente din K.

„+" = ADUNAREA MATRICELOR pe $\mathcal{M}(m, n, K)$

„·" = ÎNMULȚIREA CU SCALAR A MATRICELOR

② $V = K_n[x]$ = mulțimea polinoamelor de gradul n în nedeterminata x și cu coeficienții în corpul K.

④ $V = \mathcal{V}$ = mulțimea vectorilor liberi din PLAN sau SPAȚIU, reprezentați prin săgeți.

Dependență și Independență Liniară | Bază și Dimensiune

Def 1 | Vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ din spațiul vectorial V peste corpul comutativ K se numesc liniar independenți dacă îndeplinesc următoarea condiție:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = O_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Expresia $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ se numește combinație liniară a vectorilor $v_1, \ldots, v_n$ din V cu coeficienții $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ din K.

Condiția de liniar independență a vectorilor $v_1, \ldots, v_n$ exprimă faptul că o combinație liniară a celor n vectori nu poate fi nulă decât atunci când toți coeficienții combinației liniare sunt NULI.

Def 2 | Vectorii $v_1, \ldots, v_n \in V$ se numesc liniar dependenți dacă ei nu sunt liniar independenți.

$\Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ NU TOȚI NULI a.î.

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = O_n$$

Exemple ① În spațiul vectorial $V = K^n$; $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$

vectorii $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_n$ $\dots$ $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_n$ sunt liniari independente

o combinație liniară nulă a lor:

$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_n$ este $\Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\alpha_i = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$ Toți coeficienții comb. sunt nuli

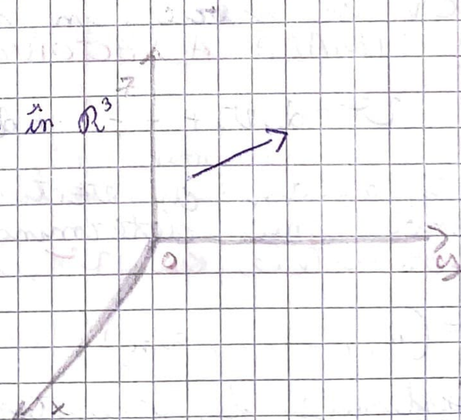
② $E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i \to & \begin{bmatrix} & 0 & & 0 \\ - & - & - & 1 \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ sunt liniare independente

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0_{mn} \Leftrightarrow (\alpha_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = 0_{mn}$$

Sisteme de Generatori

Def 1: O submulțime V' a unui spațiu vectorial V se numește sub-spațiu vectorial al lui V dacă orice combinație liniară formată cu vectori din V' se află tot în V'

$V' = (yOz)$ = Sub-spațiu în $\mathbb{R}^3$



Pentru un sistem de vectori

$\{v_1, \dots, v_n\}$ notăm cu $[v_1, \dots, v_n]$ = mulțimea tuturor comb. liniare ale vectorilor $v_1, \dots, v_n$

Această mulțime constituie evident un sub-spațiu vectorial al lui V și se numește sub-spațiu vectorial generat de vectorii $\{v_1, \dots, v_n\}$. În general, $[v_1, \dots, v_n]$ este inclus în V.

Dacă $[v_1, ..., v_n]$ este identic cu V, vom spune că sistemul de vectori $\{v_1, ..., v_n\}$ se numește sistem de generatori al spațiului V și V se numește spațiu finit generat.

Faptul că $\{v_1, ..., v_n\}$ constituie un sistem de generatori a lui V se exprimă astfel:

Pentru orice vector $v \in V$, există scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, nu toți nuli, a.î.

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v \iff$$ orice vector din V se exprimă ca o combinație liniară, cu coeficienți din K, ai vectorilor $v_1, ..., v_n$

Baze al unui spațiu vectorial

Def: Se numește bază al spațiului vectorial V, un sistem de vectori $v_1, v_2, ..., v_n$ care îndeplinește concomitent 2 condiții:

1. Sunt liniar independenți
2. Constituie un sistem de generatori

Conform acestei definiții rezultă că dacă vectorii $v_1, v_2, ..., v_n$ formează o bază a lui V, atunci orice vector $v \in V$ se scrie, în mod unic, ca o COMBINAȚIE LINIARĂ A VECTORILOR BAZĂ.

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

Coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ ai vectorilor bazei din exprimarea lui v, fiind unic determinați de vectorul v se numesc coordonatele lui v în această bază

$$v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

Exemple: Sistemele de generatori date ca exemplu în $\mathbb{R}^n$ și în $M(m, n, K)$ sunt în același timp și vectori lin. independenți, deci formează sisteme de baze în aceste spații, numite de obicei BAZE CANONICE.

Numărul elementelor unei baze este o ~~carac~~ caracteristică esențială a spațiului vectorial respectiv și se numește DIMENSIUNEA spațiului

Are loc următoarea teoremă {TEOREMA DIMENSIUNII}

- Dacă spațiul vectorial V este finit generat, atunci oricare două baze ale sale are același număr de elemente. Numărul elementelor a unei baze se numește Dimensiunea Spațiului vectorial respectiv.

Aplicații

① Fie vectorii $v_1=(1,0,1)$ - $v_2=(2,1,3)$ - $v_3=(1,1,1)$

a) Arătați că vectorii sunt LI în $\mathbb{R}^3$.
b) Determinați coordonatele vectorului $v=(1,1,0)$ în această bază.

a) Fie o combinație liniară nulă a celor 3 vectori

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = O_3 = (0,0,0)$$

Dacă va rezulta că $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \to LI$

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(2,1,3)+\alpha_3(1,1,1)=(0,0,0)$$

$$(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha_1=\alpha_3\\ \alpha_2=-\alpha_3\\ \alpha_3+\alpha_3-3\alpha_3=0\end{cases} \quad \left.\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\\ \alpha_3=0\end{cases}\right\} LI$$

Sistem omogen de 3 eq. cu 3 nec.

(SE POATE CALCULA ȘI CU GAUSS)

Numărul lor este egal cu dimensiunea spațiului $\to$
$\to$ formează o bază {sunt un sistem de generatori}.

b) Să se exprime $v=(1,1,0)$ în această bază

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&1&1\\1&3&1&0\end{array}\right) \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&-1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&1&1\\0&0&-1&-2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&-2\end{array}\right] \to \begin{array}{l}\alpha_1=1\\ \alpha_2=-1\\ \alpha_3=2\end{array}$$

$$(1,0,1)-(2,1,3)+2(1,1,1)=(1,1,0)=v$$