18.05.2022

Anul 1 zi

Pregatire examen

Fie operatorul $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin:

$f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 - 3x_2 + 2x_3, 6x_1 - 4x_2 + 4x_3, 4x_1 - 4x_2 + 5x_3)$

a) Să se determine matricea asociată operatorului f în baza canonică — A.

b) Să se determine polinomul caracteristic al matricii A

c) Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai operatorului f

d) Arătați că matricea A a operatorului f este diagonalizabilă și să se determine forma sa diagonală

e) Să se calculeze A^n.

Def S.n. vector propriu al operatorului liniar f un vector $v \in V$ care îndeplinește două condiții: $\begin{cases} ① \; v \neq 0_V \\ ② \; f(v) = \lambda \cdot v \end{cases}$ λ s.n. valoarea proprie asociată vectorului v.

$f: V \to V$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $f(v) = \lambda v$; $v = (x_1, x_2, x_3)$

$$f(v) = f(x_1, x_2, x_3) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{C_1 = C_1 + C_2}}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 2-\lambda & -4-\lambda & 4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4-\lambda & 4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{L_2 = L_2 - L_1}}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} \textcircled{1} & \cancel{-3} & \cancel{2} \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(\lambda+1)(\lambda-5) + 8\right] = (2-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Valorile proprii = rădăcinile polinomului caracteristic
$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$. → reale și distincte.

Fiecărei valori proprii îi corespunde un vector propriu. La valori proprii distincte corespund vectori proprii liniar independenți.

Vectorii proprii sunt soluțiile sistemului:

$$(A-\lambda I_3)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$, pt fiecare valoare proprie:

① Pentru $\lambda_1 = 1$ ⇒

$$\begin{pmatrix}4&-3&2\\6&-5&4\\4&-4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ → sistem omogen din 3 ec. cu 3 necunoscute

rang A = 2 = rang $\bar{A}$ → sist. compatibil nedeterminat

Pt rezolvare se preferă metoda Gauss.

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-3&2&0\\6&-5&4&0\\4&-4&4&0\end{array}\right)_{:4}\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}\textcircled{4}&-3&2&0\\6&-5&4&0\\1&-1&1&0\end{array}\right)\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}4&-3&2&0\\0&-2&4&0\\0&-1&2&0\end{array}\right):$$

$$\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}4&-3&2&0\\0&\textcircled{1}&-2&0\\0&-1&2&0\end{array}\right)\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}4&0&-4&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

rang A = rang $\bar{A}$ = 2 ; Nec. pr : x_1 și x_2 ; Nec. sec: $x_3=\beta$

$$\begin{cases}x_1 \quad -x_3=0\\ \quad x_2 -2x_3=0\\ \quad\quad x_3=\beta\in\mathbb{R}\end{cases}\rightarrow\left|\begin{array}{l}x_1=\beta\\x_2=2\beta;\ \beta\in\mathbb{R};\\x_3=\beta\end{array}\right.\quad\boxed{v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}};\quad V_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\beta.$$

② Pentru $\lambda = 2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&-2&0\\6&-6&4&0\\4&-4&3&0\end{array}\right)/:2\simeq\begin{pmatrix}\textcircled{3}&-3&-2&0\\3&-3&2&0\\4&-4&3&0\end{pmatrix}\simeq\left(\begin{array}{cccc}3&-3&-2&0\\0&0&12&0\,|:12\\0&0&17&0\,|:17\\x_1&x_2&x_3&\end{array}\right)$$

rg A = rg $\bar{A}$ = 2

$$\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&-3&0\\0&\textcircled{1}&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\simeq\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&-3&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$

N. pr: x_1, x_3

N. sec: $x_2=\alpha$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \mid :3 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \cancel{V}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

③ Pentru $\lambda = 3$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)}_{(A-3I_3)} \mid :2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & -3 & 2 & 0 \\ 6 & -7 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid :4 \\ \mid :2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\right)$$

$\Rightarrow rg A = rg \bar{A} = 2$; $Np: x_1, x_2$; $N.S. = x_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = \gamma; \; \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = \gamma \\ x_2 = \gamma; \\ x_3 = \gamma \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{\gamma}{2} \\ x_2 = \gamma \\ x_3 = \gamma \end{cases} \gamma \in \mathbb{R}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{\gamma}{2}; \quad \boxed{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Cei trei vectori proprii sunt liniar independenți (corespund la valori proprii diferite), deci formează o bază în $\mathbb{R}^3$. În raport cu această bază matricea operatorului f are forma diagonală; matricea diagonalizatoare este

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ \uparrow & \uparrow & \nwarrow \\ \lambda_1 = 1 & \lambda_2 = 2 & \lambda_3 = 3. \end{pmatrix} = \text{matricea diagonalizatoare}$$

Relația dintre matricea A și matricea diagonală, B este: $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Pt calculul inversei matricei T aplicăm tot metoda lui Gauss:

$$(T, I_3) \simeq (I_3, T^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \simeq$$

$$\simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) / \cdot (-1) \simeq$$

$$\simeq \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}}_{T^{-1}} \right)$$

$$T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} I_3$$

calculăm

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ⓔ Să se calculeze A^n

$B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ înmulțim la stânga cu T și la dreapta cu T^{-1}

$$T \cdot B \cdot T^{-1} = T \cdot (T^{-1} A T) \cdot T^{-1} = (T \cdot T^{-1}) \cdot (A \cdot T \cdot T^{-1}) = I_3 \cdot A \cdot I_3 = A$$

$$A = T \cdot B \cdot T^{-1} \Rightarrow A^2 = (T \cdot B \cdot T^{-1})(T \cdot B \cdot T^{-1}) = T \cdot B (T^{-1} T) \cdot B \cdot T$$

$$\Rightarrow A^2 = T \cdot B^2 \cdot T^{-1}$$

Analog, prin inducție $\Rightarrow A^n = T \cdot B^n \cdot T^{-1}$, $(\forall n \in$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$T \cdot B^n \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs Dacă matricea A are o valoare proprie dublă, λ, atunci n=2 este ordinul de multiplicitate algebrică a valorii proprii λ. Se numește ordinul de multiplicitate geometrică a valorii proprii λ, dimensiunea subspațiului propriu corespunzător valorii proprii λ.

Matricea A, într-o astfel de situație este diagonalizabilă dacă ordinul de multiplicitate algebrică este egal cu ordinul de multiplicitate geometrică.

λ → valoare proprie dublă.

Dacă lui λ îi vor corespunde doi vectori proprii liniar independenți => A este diagonalizabilă.