Curs. V. Garban

00000011

23/02/2022

Curs 2

Sisteme Algebrice Liniare de m ecuații cu n necunoscute

Cazul 1: $m=n$

Forma generală a sistemului:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad Ax = B$$

Metoda lui Gauss pentru transformarea sistemului dat într-un alt sistem cu aceeași soluții, extrem de simplu, în forma diagonală:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 - \dots = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 - \dots = \beta_2 \\ \ddots \\ - \dots \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \qquad x_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_{11}},\ x_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_{22}},\ \dots,\ x_n = \frac{\beta}{\alpha_{nn}}$$

$(\alpha_{ii})_{i=\overline{1,n}}$ PIVOȚI care sunt toți nenuli $\iff$ dacă sistemul este compatibil și unic determinat {soluție unică}

Metoda lui Gauss

Regulile de calcul și etapele algoritmului sunt:

1. Se scrie matricea extinsă a sistemului $\bar{A} = A|B$
   1.1 Metoda se poate aplica și la cazuri generale $m \neq n$ și are la teorema de compatibilitate al lui Kronicker-Capelli
2. Se alege pivotul inițial care trebuie să fie nenul
3. Linia 1 se înmulțește cu elementul $(-a_{i1})$
4. Linia i se înmulțește cu elementul $(a_{11} \neq 0)$
5. Linia i/a_{11} se adună cu Linia $1/(-a_{i1})$

Elementul a_{i1} se va înlocui cu 0 {Pentru orice linie $i=\overline{2,m}$}

6. Elementul a_{ij} se va înlocui cu: $a_{11} \cdot a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$

$\Rightarrow a_{ij}$ se înlocuiește cu diferența dintre produsul de pe diagonala pivotului și produsul de pe cealaltă diagonală.

7. Elementul b_i se va înlocui cu: $a_{11}\cdot b_i - a_{i1}\cdot b_1$

Aceste transformări se efectuează asupra întregii matrice $\bar{A}$:
pentru $i=\overline{2,m}$ și $j=\overline{2,n+1}$

În final, $\bar{A}$ devine:

$$
\begin{array}{c}
 \\ \bar{A} = \\ \\ i \to \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{c|cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\
\hline
0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n} & & b'_2 \\
0 & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn} & & b'_m
\end{array}\right]
$$

Toate operațiile anterioare se repetă identic pentru sub-matricea rămasă din poziția (2,2) până în poziția (m, n+1)

Dacă, când se trece de la o etapă la alta, viitorul PIVOT = 0, se interschimbă linia respectivă cu o altă linie de sub-PIVOT care are elementul nenul. Dacă nu este posibil, putem schimba coloanele {Dar trebuie să remarcăm asta} pentru a identifica, în final, ordinea necunoscutelor.

OBS: Dacă pe parcursul efectuării calculului, pe una sau mai multe linii de sub-pivot se constată existența unui factor comun, liniile respective se pot simplifica cu același factor.