29.10.2021

Serii cu termeni oarecare

O serie de nr reale se num. serie cu termeni oarecare dacă are o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi.

* Pt studiul convergenței lor avem la dispoziție criteriul general al lui Cauchy, care este valabil pt orice caz și care ne dă o condiție necesară și suficientă de convergență.

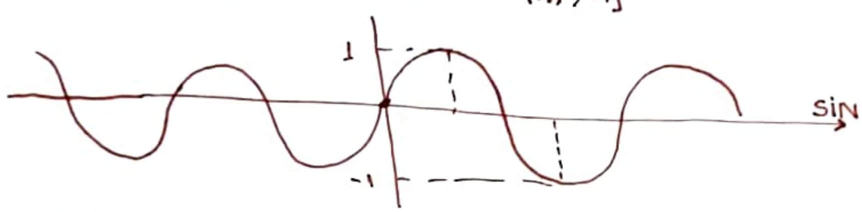
* Criteriul fiind foarte general este greu de aplicat în aplicații practice. De aceea se utilizează criterii care dau condiții suficiente de convergență.

Condiția necesară de convergență conform căreia termenul general al seriei are limita 0 rămâne în continuare valabil.

Criteriul lui Abel pt serii cu termeni oarecare

Fie seria $\sum_1^{\infty} a_n$ care se scrie sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot v_n$ $(a_n = u_n \cdot v_n)$ unde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ termen general al șirului nr. pozitive descrescător și convergent la zero. $(u_n \searrow 0)$ iar $\sum_1^{\infty} v_n$ este o serie cu termeni oarecare $(+,-)$ care are șirul nr parțiale mărginit $\Rightarrow$ atunci $\sum_1^{\infty} u_n \cdot v_n$ este convergentă

Exemplu: fie $\sum_1^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\cdot \sin\left(\frac{nx}{\cancel{n}}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]$; unde $x \neq 2K\pi$ $K\in\mathbb{Z}$



$u_n = \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ $\quad u_n > 0 \;\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{C-S}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\beta_{n+1}-\beta_n}$$

α_n - numărător

β_n - numitor

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}-\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2}}-\dots-\cancel{\frac{1}{n}}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow u_n$ descrescător

fie $\sum_1^{\infty} \sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots$

termen general al șirului nr parțiale este $x_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$

! trebuie să arătăm că S_n = mărginit $\Rightarrow \exists\, M>0$ aî $|S_n(x)| \leq M \;\forall n\in\mathbb{N}$ și $x \neq 2K\pi$.

considerăm și suma $T_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

calculăm suma: $T_n + i\cdot S_n$ unde i = nr imaginar, $i^2=-1$

$T_n + i\cdot S_n = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\cdot\sin 2x) + \dots + (\cos nx + i\cdot\sin nx)$

$(\cos x + i\sin x)^m = \cos mx + i\sin mx$

$\Rightarrow T_n + i\cdot S_n = (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^2 + (\cos x + i\sin x)^3 + \dots$
$+ (\cos x + i\sin x)^n =$

notam $\cos x + i\sin x = z \Rightarrow z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$ (p.g cu ratia z)

$$\Rightarrow z\cdot\frac{1-z^n}{1-z} = (\cos x + i\sin x)\frac{1-(\cos x + i\sin x)^n}{1-(\cos x + i\sin x)}$$

$$= (\cos x + i\sin x)\cdot\frac{1-\cos nx - i\sin(nx)}{1-\cos x - i\cdot\sin x}$$

$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=(\cos x + i\sin x)\cdot\frac{2\cdot\sin^2\frac{nx}{2} - 2i\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2} - 2i\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$$

$$= (\cos x + i\sin x)\cdot\frac{\cancel{2}\sin\frac{nx}{2}\left(\sin\frac{nx}{2} - i\cos\frac{nx}{2}\right)}{\cancel{2}\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}\right)} \quad i/$$

$\boxed{i^2 = -1;\ -i^2 = 1}$

$$= (\cos x + i\cdot\sin x)\cdot\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{i\cdot\sin\frac{nx}{2} + \cos\frac{nx}{2}}{i\cdot\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}$$

$$= (\cos x + i\sin x)\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)\cdot\frac{\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2} + i\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

$(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\beta+\alpha) + i\sin(\alpha+\beta)$

$\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha-\beta) + i\cdot\sin(\alpha-\beta)$

$$\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\left[\cos\left(x+\frac{nx}{2}-\frac{x}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{nx}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{(n+1)\cdot x}{2}\right) + i\sin\frac{(n+1)x}{2}\right] = T_n + i\cdot S_n$$

$$T_n = \frac{\left(\sin\frac{nx}{2}\right)\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$S_n = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2}$$ (parte imaginara)

$T_n = \cos x + \dots + \cos nx$

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$|S_n| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \quad \text{unde } x \neq 2k\pi$$

$$M = \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \Rightarrow S_n \text{ este mărginit}$$

conform Criteriul lui Abel $\Rightarrow$ seria cu termeni oarecare

$$\sum_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin(nx) \text{ este convergentă}$$

analog și seria $\sum_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos(nx)$ este tot convergentă

Serii alternate

forma generală $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$ unde $a_n > 0 \ \forall n$

$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$

Criteriul lui Leibniz

Seria alternata $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ unde $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ este convergentă dacă șirul a_n cu $n \in \mathbb{N}$ este ~~converg~~ descrescător, de numere pozitive și convergent la zero.

Fie $v_n = (-1)^{n-1}$ și seria $\sum_1^{\infty} v_n$. Șirul sumelor parțiale al acestei serii are termenul general $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1 + (-1)^{n-1}$

$\rightarrow$ termenii săi sunt $S_1 = 1$ $\quad S_2 = 1 - 1 = 0$ $\quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$ $\quad S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$S_{2k-1} = 1$ $\quad S_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow |S_n|$ este mărginit $\rightarrow |S_n| \le 1$.

$\longrightarrow$ șirul nr parțiale al seriei $\sum_1^{\infty} (v_n)$ este $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}$ este mărginit.

Prin ipoteză șirul $a_n > 0$ este descrescător și convergent la zero. Conform criteriului lui Abel $\Rightarrow$ seria $\sum_1^{\infty} v_n \cdot u_n = \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ este convergentă

Exemplu: Seria armonică alternată

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots$$

$a_n = \frac{1}{n} > 0$, a_n descresc. și $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1}$ are șirul sumelor parțiale mărginit. Vom vedea că $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ este $\log_e 2 = \ln 2$

Serii absolut convergente și serii semiconvergente

$\mapsto AC$

O serie cu termeni oarecare se numește absolut convergentă dacă seria modulelor sale este convergentă. $\sum_1^\infty u_n$, cu termeni oarecare și $\sum_1^\infty |u_n|$ = convergentă $\Rightarrow$ $\sum_1^\infty u_n$ se numește serie absolut convergentă.

* Seria modulelor, suma $\sum_1^\infty |u_n|$ e o serie cu termeni pozitivi pt care avem o mulțime de criterii de convergență.

O serie cu termeni oarecare absolut convergentă este convergentă.

• Demonstrație: fie seria absolut convergentă $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$

Conform definiției seriei AC $\Rightarrow$ seria modulelor sale este convergentă: $|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots$ este convergentă $\Rightarrow$ Conform criteriului general de convergență a lui Cauchy aplicat seriei modulelor avem: pt $\forall\, \varepsilon>0\ \exists$ un $n_0 \in \mathbb{N}$ $n_0(\varepsilon)$ cu proprietatea că $\forall\, n>n_0(\varepsilon)$ și $\forall\, p\in\mathbb{N}$ $p\geq 1$ avem că $||u_{n+p}|+|u_{n+p-1}|+\dots+|u_{n+1}|| < \varepsilon$

$\sigma_n = |u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|$ $\to$ șir sume parțiale al seriei modulelor

$$\Rightarrow |\sigma_{n+p}-\sigma_n| = |\underbrace{|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+|u_{n+1}|+\dots+|u_{n+p}|}_{|\sigma_{n+p}|} \underbrace{-|u_1|-\dots-|u_n|}_{|\sigma_n|}|$$

$$|\sigma_{n+p}-\sigma_n| = |u_{n+1}|+\dots+|u_{n+p}| < \varepsilon$$

Seria inițială $\sum_1^\infty u_n = u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ are șirul sumelor parțiale

$S_n = u_1+u_2+\dots+u_n$;

$\hookrightarrow |S_{n+p}-S_n| = |\cancel{u_1}+\cancel{u_2}+\dots+\cancel{u_n}+\dots+u_{n+p}-\cancel{u_1}-\cancel{u_2}-\dots-\cancel{u_n}|$

$\hookrightarrow |S_{n+p}-S_n| = |u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}| \leq |u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\dots+|u_{n+p}|$

$\hookrightarrow |S_{n+p}-S_n| < \varepsilon$ deoarece seria modulelor e convergentă

Am arătat că $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ aî $\forall\, n>n_0$ și $p\geq 1$ avem $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon \Leftrightarrow$ seria suma $\sum_1^\infty u_n$ este convergentă

Serii semiconvergente

O serie convergentă cu termeni oarecare dar care nu este absolut convergentă (seria modulelor e divergentă) se numește serie semiconvergentă

Exemplu seria armonică alternată

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots = \ln 2$$

care e convergentă conform criteriului lui Leibniz pt serii alternate

seria modulelor pt seria armonică este $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

↳ seria armonică generală e divergentă

Exemplul 2: seria $\sum_{2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\ln n}$

seria modulelor este $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$

$\alpha_n = \frac{1}{\ln n}$ (termen general)

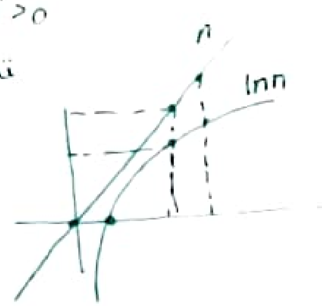
$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ (cond. necesara dar nu suficienta)

ex $\alpha = \frac{1}{n}$ $\lim \alpha_n = 0$ dar seria e divergentă

seria modulelor $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ $\to$ are termenii > 0

vom utiliza criteriul comparatiei pt termenii

Stim că $n > \ln n$ $\forall n \geq 2$



$\Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$

$\Rightarrow$ cum $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n}$ = divergentă

$\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ = divergentă

$\Rightarrow \sum_{2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\ln n}$ = semiconvergentă deoarece, conform criteriului lui Leibniz seria e convergentă $\to (\alpha_n = \frac{1}{\ln n} \searrow 0)$ dar seria modulelor $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ este divergentă (criteriul comparatiei)

Exemplul 3:

fie seria $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$

conform criteriului lui Leibniz seria este convergentă (ca serie alternată)

$\alpha_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ $(\alpha_n \searrow 0)$

Seria modulelor este $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ (convergentă)

seria armonică generalizată $\boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1 \text{ convergenta}}$ sau seria lui Rimman $\boxed{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$ este absolut convergentă.

Proprietăți ale seriilor AC și SC

Fie $\sum_{1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni oarecare ; $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ = sir sumelor partiale

$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$ = sirul sumelor partiale pt seria modulelor

CAZ1 presupunem că seria $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este AC $\Rightarrow$ seria modulelor e convergenta si de asemenea si seria initiala e convergentă $\to \lim_{n\to\infty} (S_n) = S$ si $\lim_{n\to\infty} (\sigma_n) = \sigma$. Fie a_n = suma termenilor strict pozitivi din S_n si b_n = suma termenilor negativi din S_n, luati cu semn schimbat

$\Rightarrow S_n = a_n - b_n$ și $T_n = a_n + b_n$ $a_n > 0$ și $b_n > 0 \Rightarrow a_n = \frac{S_n + T_n}{2}$, $b_n = \frac{T_n - S_n}{2}$

$\begin{cases} a_n - b_n = S_n \\ a_n + b_n = T_n \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{S_n + T_n}{2} \\ b_n = \frac{-S_n + T_n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{S_n + T_n}{2} = \frac{S + T}{2}$

$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{T_n - S_n}{2} = \frac{T - S}{2}$

→ într-o serie absolut convergentă seriile formate numai cu termenii săi strict pozitivi ($\sum a_n$) și numai cu termenii săi strict negativi dar cu semn schimbat ($\sum b_n$) sunt ambele convergente și între sumele lor $\exists$ relațiile de mai sus.

* În cazul seriilor semi convergente

$\sum_{1}^{\infty} U_n$ este semiconvergentă $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \neq \pm\infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$\sum_{1}^{\infty} |U_n| =$ divergentă $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$

seria modulelor e divergentă cu toți termenii pozitivi.

$a_n = \frac{1}{2}(T_n + S_n)$; $b_n = \frac{1}{2}(T_n - S_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$; $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$

Deci într-o serie semiconvergentă seriile formate cu termenii săi strict pozitivi și cu termenii săi strict negativi (dar cu semn schimbat) sunt ambele divergente

Proprietatea / Proprietățile de mai sus deosebesc în mod clar seriile absolut convergente de seriile s.c. (semi convergente)

• Teorema DIRICHLET: într-o serie absolut convergentă putem schimba ordinea termenilor într-un mod arbitrar, obținând tot o serie absolut convergentă cu aceeași sumă cu cea a seriei inițiale.

↳ o serie absolut convergentă are prop. de asociativitate / comutativitate a termenilor comportându-se în calcule ca sumele cu nr finit de termeni

Teorema lui Riemann

Într-o serie SC se poate schimba ordinea termenilor a.î. seria obținută să fie tot convergentă și să aibă suma un număr dat sau să fie divergentă.

Deci, o serie SC, nu admite proprietatea de comutativitate a termenilor.

Consecință: O serie cu termeni oarecare convergentă a cărui suma este independentă de ordinea termenilor, este AC.

Operații cu serii convergente

Fie seriile: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. atunci Definim serule

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + v_n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot u_n \text{ sau } v_n \; , \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n - v_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((u_1 v_n) + (u_2 v_{n-1}) + \dots + (u_n v_1) \right)$$

Se pot formula și demonstra teoremele:

Teorema 1 | Dacă seriile $\sum u_n$ și $\sum v_n$ sunt convergente și au sumele S și T, atunci seria $\sum (\alpha u_n) + (\beta v_n)$, $\alpha, \beta \in N$ este convergentă și are suma $\alpha S + \beta T$

Teorema lui Mertens | Produsul la două serii convergente de sume S și T, dintre care cel puțin una este AC este o serie convergentă și are suma $\sigma = S \cdot T$

OBS | Condiția ca cel puțin una din serii să fie AC este necesară pentru a asigura convergența seriei produse.

Herlitz

Teorema lui Cauchy | Produsul a două serii, ambele AC de sume S și T este o serie tot AC și are suma $\sigma = S \cdot T$.

Aplicații:

Stabiliți dacă seriile următoare sunt AC sau SC.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[p]{n}}$; $(p \geq 2) \in \mathbb{N}$

Seria este alternată: $\frac{1}{\sqrt[p]{1}} - \frac{1}{\sqrt[p]{2}} + \frac{1}{\sqrt[p]{3}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[p]{n}} + \dots$

Seria modulelor: $\frac{1}{\sqrt[p]{1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n}} + \dots$

$|u_n| = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$; $p \geq 2$ $\quad 0 < \frac{1}{p} < 1$

$\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ = Seria armonică generalizată cu $0 < \alpha < 1$

$\Rightarrow$ Seria modulelor este divergentă $\forall p \geq 2$

$\Rightarrow$ Seria inițială nu este AC ci SC

$p \geq 2$ și $0 < \frac{1}{p} < 1$ $\quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt[p]{n}}$ $\rightarrow$ Serie alternată

$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \searrow 0 \Rightarrow$ Seria este conv.

$\Rightarrow$ Seria dată este convergentă dar nu este AC

$\Rightarrow$ Semi Convergentă

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$; $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad$ Discuție după valorile lui α.

- Seria este alternată

Conform criteriul lui Leibniz, deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ pentru $\forall \alpha \in [0,1]$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$

$\Rightarrow$ Seria este convergentă (ca serie alternată), dar nu este AC (seria armonică generalizată $\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă $\alpha > 1$)

Pentru $\alpha > 1$: $\sum_1^\infty |u_n| = \sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Care este convergentă fiind seria armonică generalizată cu $\alpha \geq 1 \Rightarrow$ rezultă că seria inițială este AC. $\Rightarrow$ Seria inițială este și convergentă.

3) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$

$\Rightarrow$ Seria geometrică de rație $z = -\frac{1}{2} \in (-1,1)$

$$\sum_{n=0}^\infty z^n = \frac{1}{1-z} \text{ dacă } z \in (-1,1)$$

$\sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \to$ Seria inițială este conv.

Seria modulelor: $\sum_{n=0}^\infty \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \frac{1}{2^n}$ Seria geometrică rație $z = \frac{1}{2} \in$ (...

$\Rightarrow$ este convergentă $\sigma = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Seria este AC

4) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n} \to$ serie alternată

Seria modulelor: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\cdot 3^n} \to$ Serie cu termeni pozitivi

Criteriul Raportului: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{(n+1)}}}{\frac{1}{n\cdot 3^n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1)\, 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$ Rezultă că seria modulelor este convergentă $\to$ Seria inițială este AC

$\Rightarrow$ Seria inițială este și convergentă

(c) Berlitz)

OBS: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}$; $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n} \searrow 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$; $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+1)\cdot 3} < 1$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \searrow$

$\Rightarrow$ Seria dată este convergentă conform criteriul lui Leibnitz.

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \dots, \frac{(-1)^n}{\ln n} + \dots$

Leibniz: $a_n = \frac{1}{\ln n} \searrow 0 \Rightarrow$ Seria este convergentă

Pentru a vedea dacă este AC sau SC vom studia seria modulelor:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$. Am arătat cu criteriul comparației pt. termeni că este divergentă

seria inițială $\to$ convergentă {Leibniz}
seria modulelor $\to$ divergentă {crit. comparației} $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Rezultă că seria dată nu este AC

$n > \ln n \Rightarrow \left. \begin{cases} \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} & \forall n \geq 2 \\ \sum \frac{1}{n} \text{ div.} \end{cases} \right\} \frac{1}{\ln n}$ div.

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \to$ serie alternată

Leibniz: $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \to \searrow 0$?

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}(2n+1)}{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}}{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}} =$

$= \frac{(2n+1)}{(2n+2)} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \ \forall n \to a_n \searrow$

Pentru convergența la zero:

$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow 0 < \underset{\overset{\|}{0}}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Leftrightarrow$

$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Din criteriul clestelui $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow$ Seria $\sum_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n$ este convergentă

Pentru a vedea dacă este AC trebuie să analizăm seria modulelor.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$; $a_n > 0$; Serie cu termeni pozitivi

- Criteriul raportului ; $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ $\begin{matrix} <1 & \text{este conv.} \\ >1 & \text{este div.} \\ =1 & \text{încert} \end{matrix}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{n(2+1/n)}{n(2+2/n)} = 1$ încert

- Criteriul lui R-D

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell \to \begin{cases} \ell < 1 & \text{div.} \\ \ell > 1 & \text{conv} \\ \ell = 1 & \text{încert.} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2-2n-1}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$ Divergentă $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIV.

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}$ este convergentă cu criteriul lui Leibniz pentru serii alternate

Seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)}$ este divergentă conform criteriul lui R-D.

$\Rightarrow$ Seria inițială este SC.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}$ $a, b > 0$

$a, b > 0 \Rightarrow u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)} > 0$

- Criteriul d'Alembert (raportului)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)(b+n)} \cdot \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a+n}{b+n} \overset{\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n(a/n+1)}{n(b/n+1)} = 1 \text{ incert}$$

- Criteriul R-D

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n}{a+n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b+n-a-n}{a+n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(b-a)}{a+n} = b-a$$

Dacă $b-a<1 \iff 0<b<a+1 \Rightarrow$ CONV

Dacă $b-a>1 \iff 0<b>a+1 \Rightarrow$ DIV

Dacă $b-a=1 \iff b=a+1$; $\ell=1$ INCERT

Înlocuim $b=a+1$ în u_n:

$$u_n \overset{b=a+1}{=} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n)}$$

$$= \frac{a}{a+n} \; ; \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a+n} \; ; \text{ Serie comparabilă cu}$$

$\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ {criteriul la limită $\underset{\text{comp.}}{}$}

Dacă $\lim \frac{u_n}{v_n} = \ell \in (0,+\infty) = \sum u_n$ și $\sum v_n$ aceeași natură

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{a+n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{n}{a+n} = a \cdot \lim \frac{n}{n(1+\frac{a}{n})} =$$

$= a \in (0,+\infty) \Rightarrow \sum \frac{a}{a+n}$ și $\sum \frac{1}{n}$ au aceeași natură

Dar $\frac{1}{n}$ este DIV $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{a+n}$ DIV

Deci: $a<b<a+1$ CONV
$b>a+1>1$ DIV
$b=a+1$ DIV

8) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n \qquad a>0$

- Criteriul Radacinii: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \begin{cases} l\in(0,1) & \text{CONV} \\ l>1 & \text{DIV} \\ l=1 & \text{INCERT} \end{cases}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \cdot \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n} = a \cdot \left(\frac{n^2+n+1}{n}\right) =$$

$$= a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(1+1/n+1/n^2)}{\cancel{n^2}} = 1$$

Dacă $a\in(0,1)$ CONV

Dacă $a>1$ DIV

Dacă $a=1$ INCERT

$a=1 \Rightarrow u_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ Calculăm $\lim_{n\to\infty} u_n$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n \overset{1^\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim \frac{n+1}{n}} = e^1 = e \neq 0$$

Conform criteriul necesar de convergență ($u_n \to 0$)

$\Rightarrow$ Seria este Divergentă ($u_n \to e \neq 0$)

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Def. O serie de numere reale este convergentă $\Leftrightarrow$ Șirul numerelor parțiale este convergent $\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$0 < 1-\frac{1}{n^2} < 1 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < \ln 1$

$u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) < 0 \quad \forall n \geq 2$

Asociez seria $\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$; $v_n = -\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) > 0$

- Criteriul Comparației. Fie seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to$ conv.

$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = -\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \stackrel{\infty\cdot 0}{=}$

$= -\lim_{n\to\infty} n^2 \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln \lim_{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} =$

$= -\ln \lim_{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{-n^2}{n^2}} = -\ln e^{-1} = \ln e = 1 \in (0,+\infty)$ Seriile au aceeași natură

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} -\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ este CONV

Calculez limita lui S_n; $\lim_{\infty} S_n = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$S_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \dots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$

$= \ln\frac{2^2-1}{2^2} + \ln\frac{3^2-1}{3^2} + \dots + \ln\frac{n^2-1}{n^2} =$

$= \ln \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-2)^2-1}{(n-2)^2} \cdot \frac{(n-1)^2-1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2-1}{n^2} =$

$= \ln \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$= \ln \frac{1\cdot \cancel{3}}{\cancel{2^2}} \cdot \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{3^2}} \cdot \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{\cancel{4^2}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n-3)(n-1)}}{\cancel{(n-2)^2}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n-1)}(n+1)}{\cancel{n^2}} =$

$= \ln \frac{n+1}{2\cdot n} = \ln \frac{n+1}{2n} = S_n$

$S = \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln \lim_{\infty} \frac{n+1}{2n} =$

$= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 < 0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

© Herlitz