grupul grafurilor.

MODUL 1

TESTE DE AUTOEVALUARE

Testul nr 1.

1) Să se demonstreze relațiile:

a) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots\ldots + C_{k-1}^{k-1}$;

b) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots\ldots\ldots + C_n^k C_m^0$;

c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$;

$\boxed{a)}$ $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \ldots\ldots + C_{k-1}^{k-1}$

Folosind egalitatea de la formula de recurență scriem șirul următor de egalități:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{k+1}^k = C_k^{k+1} + C_k^k$$

$$C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1.$$

Dacă adunăm membru cu membru aceste egalități, avem:

$$C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_k^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + C_k^{k-1} + C_k^k + C_{k-1}^{k-1}$$

c) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

Rădăcinile de ordinul n ale unității sunt soluțiile ecuației:

$z^n = 1 \Leftrightarrow z^n = \cos 0 + i\sin 0$

Aceste soluții sunt: $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, unde $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ și verifică relațiile:

$\varepsilon_k^n = 1$

$1 + \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 + \ldots + \varepsilon_k^{n-1} = 0$

Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

o rădăcină cubică complexă a unității.

Avem deci $\varepsilon^3 = 1$ și $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$

$\cancel{\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}}$

Punând în formula binomului lui Newton:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + \ldots + C_n^n b^n$

$a = 1$, $b = 1$ obținem: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \ldots$

Înlocuind în formula binomului lui Newton de mai sus:

$a = 1$

$b = \varepsilon$

$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + \varepsilon^3 C_n^3 + \varepsilon^4 C_n^4 + \ldots =$

$= \underline{C_n^0 + 3C_n^1} + \underline{\varepsilon^2 C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^4} + \ldots$

Înlocuind în formula binomului lui Newton de mai sus:

$a = 1$

$b = \varepsilon^2$

Reducem termenii asemenea și obținem:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$$

b) $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$

Să considerăm egalitatea:

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

Se aplică formula binomului lui Newton

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots$$
$$+ \ldots + C_n^n b^n,$$ se obține:

$$(1+x)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} x + \ldots + C_n^k 1^{n-k} \cdot x^k + \ldots$$

$$(1+x)^m = C_m^0 1^m + C_m^1 1^{m-1} \cdot x + \ldots + C_m^k 1^{m-k} \cdot x^k + \ldots$$

$$(1+x)^{n+m} = C_{n+m}^0 1^{n+m} + C_{n+m}^1 1^{n+m-1} \cdot x + \ldots + C_{n+m}^k \ldots$$
$$+ \ldots + C_{n+m}^{n+m} \cdot x^{n+m}$$

Coeficientul lui x^k din membrul drept al acestei egalități este C_{n+m}^k.

Coeficientul lui x^k din membrul stâng al egalității

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$$

Egalând coeficienții obținem:

$$C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0.$$

$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon^4 C_n^2 + \varepsilon^6 C_n^3 + \varepsilon^8 C_n^4 + \dots =$

$= C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2 C_n^4 + \dots$

Adunăm termen cu termen aceste 3 egalități

$\left[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n\right] = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \dots$

$\dots + C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^4 + \dots + C_n^0 +$

$+ \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2 C_n^4 + \dots$

$\left[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n\right] = 3C_n^0 + C_n^1(1+\varepsilon+\varepsilon^2) +$

$+ C_n^2(1+\varepsilon+\varepsilon^2) + 3C_n^3 + C_n^4(1+\varepsilon+\varepsilon^2) +$

$+ C_n^5(1+\varepsilon+\varepsilon^2) + 3C_n^6 + \dots$

Dar $(1+\varepsilon+\varepsilon^2) = 0$ + împărțim egalitatea la 3 $\Rightarrow$

$\frac{1}{3}\left[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n\right] = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$

Ținând seama de faptul că:

$1+\varepsilon = 1 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

și

$\varepsilon^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} =$

$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Deci

$1+\varepsilon^2 = 1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Înlocuim în relația de mai sus și obținem:

$$\frac{1}{3}\left[2^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n\right]=\frac{1}{3}\left[2^n+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\right.$$

$$\left.+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n\right]=\frac{1}{3}\left[2^n+\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}+\right.$$

$$\left.+\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{3}\left[2^n+2\cos\frac{4\pi}{3}\right]$$

2) Să se calculeze sumele:

a) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$;

b) $\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}$;

c) $C_n^0-C_n^1+C_n^2+\ldots+(-1)^nC_n^n$.

$\boxed{a)}$ $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$

Notăm cu S_n suma $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$.

și

$S_n=nC_n^n+(n-1)C_n^{n-1}+\ldots+2C_n^2+C_n^1$

(scriind termenii în ordine inversă).

Folosind formula combinărilor complementare $C_n^k=C_n^{n-k}$, prin adunarea celor 2 sume obținem:

$$2S_n=nC_n^n+[1+(n-1)]C_n^1+[2+(n-2)]C_n^2+\ldots+$$

$$\ldots+[(n-1)+1]C_n^{n-1}+nC_n^n$$

$$2S_n=n+n(C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n)$$

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n \Rightarrow$$

$$C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n-C_n^0=2^n-1$$

Înlocuind obținem:

$$2S_n = n + n(2^n - 1) = n + n \cdot 2^n - n = n \cdot 2^n$$

$$S_n = \frac{n \cdot 2^n}{2} = n \cdot 2^{n-1}$$

$\boxed{b)}$ $$\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = S_n$$

Folosim identitatea:

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \Rightarrow C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k$$

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \frac{C_n^k}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$$

Suma se transformă în $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}$

Dar $\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}$

Știm însă că

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1} - C_{n+1}^0 = 2^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

Testul nr 2

1) Să se demonstreze relațiile:

1) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right]$;

2) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

3) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots + \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$.

1.

3) Considerăm un număr complex $z = a+bi$ scris sub această formă algebrică. El poate fi scris și sub formă trigonometrică astfel:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ unde $r = \sqrt{a^2+b^2}$ este modulul numărului complex z, iar $\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ este argumentul numărului complex z.

În cazul nostru pentru $a=b=1 \Rightarrow$ nr. complex

$z = 1+i$

Conform binomului lui Newton obținem următoarea dezvoltare a acestui număr complex:

$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} (i)^k \cdot C_n^k = C_n^0 + iC_n^1 + i^2C_n^2 + \ldots +$

$\ldots + i^nC_n^n = C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_3^3 + C_n^4 + \ldots +$

$\ldots + i^nC_n^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 -$

$- C_n^7 + \ldots)$ (1)

Puterile lui i sunt următoarele:

$i^{4k+1} = i$ $\qquad i^{4k+3} = -i$

$i^{4k+2} = -1$ $\qquad i^{4k} = 1$

Notăm cu S următorul nr: $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$

$T = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$

Scriem acum numărul complex $z = 1+i$ în următoarea formă trigonometrică:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varphi - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Ridicăm acest nr. la puterea n și folosind relația

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \Rightarrow$$

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \quad (2)$$

Egalând părțile reale și imaginare din relațiile (1) și (2) avem:

$$S = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{4} = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$$

$$T = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4} = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

(2) $C_n^0+C_n^4+C_n^8+\dots+\dots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$

Din exercițiul 1. punctul 3 știm că:

$$C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\dots=2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4} \quad (1)$$

De asemenea știm că suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang par este egală cu suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar, adică:

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+C_n^6+\dots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+C_n^7+\dots=2^{n-1} \quad (2$$

Dacă adunăm relațiile (1) cu (2), după reducerea termenilor obținem:

$$2\cdot\left(C_n^0+C_n^4+C_n^8+\dots\right)=2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}, \text{ adică}$$

$$\boxed{C_n^0+C_n^4+C_n^8+\dots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}\right)}$$

De asemenea, tot de la demonstrația anterioară știm

$$C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\dots=2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5-C_n^7+\dots=2^{n-1}$$

Adunăm relațiile:

$$C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\dots+C_n^1+C_n^3+C_n^5+C_n^7\dots=$$
$$=2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}$$

$$2\cdot\left(C_n^1+C_n^5+C_n^9+\dots\right)=2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4} \implies$$

$$C_n^1+C_n^5+C_n^9+\dots=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}+2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

② Să se calculeze sumele

② $3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)C_n^n$

Notăm cu $S_n = 3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-1)C_n^n$

$S_n = 3C_n^1 + 7C_n^2 + 11C_n^3 + \ldots + (4n-9)C_n^{n-2} + (4n-5)C_n^{n-1} +$
$+ (4n-1)C_n^n$ și totodată

$S_n = (4n-1)C_n^n + (4n-5)C_n^{n-1} + (4n-9)C_n^{n-2} + \ldots +$
$+ 11C_n^3 + 7C_n^2 + 3C_n^1$ (scriind termenii în ordine inversă)

Folosim formula combinărilor complementare

$C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_n^0 = C_n^n$
$C_n^1 = C_n^{n-1}$
$C_n^2 = C_n^{n-2}$
$\ldots$

Adunăm cele 2 sume $\Rightarrow$

$2S_n = (4n-1)C_n^n + (4n-5+3)C_n^1 + (4n-9+7)C_n^2 +$
$+ (4n-13+11)C_n^3 + \ldots + (4n-9+7)C_n^{n-2} +$
$+ (4n-5+3)C_n^{n-1} + (4n-1)C_n^n \Leftrightarrow$

$2S_n = 2(4n-1) + (4n-2)(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n)$

Dar: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n - 1$

$\Downarrow$

$2S_n = 2(4n-1) + (4n-2)(2^n - 1) \Leftrightarrow S_n = (4n-1) + (2n-1) \cdot (2^n - 1)$

$S_n = 4n - 1 + 2n \cdot 2^n - 2n - 2^n + 1 = 2n + 2^n(2n-1)$

Tema de control nr. 1.

(1) Să se demonstreze relațiile:

$\boxed{1)}$ $C_{2n}^{n} = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$

Se consideră egalitatea:

$(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$

Folosim formula binomului lui Newton:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots +$
$+ C_n^n b^n \Rightarrow$

$(1+x)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} \cdot x + \ldots + C_n^k 1^{n-k} x^k + \ldots$
$\ldots + C_n^n x^n$

$(1+x)^m = C_m^0 1^m + C_m^1 1^{m-1} \cdot x + \ldots + C_m^k 1^{m-k} x^k + \ldots$
$+ \ldots C_m^m x^m$

$(1+x)^{n+m} = C_{n+m}^0 1^{n+m} + C_{n+m}^1 \cdot 1^{n+m-1} \cdot x + \ldots +$

$+ C_{n+m}^k 1^{n+m-k} x^k + \ldots + C_{n+m}^{n+m} x^{n+m}$

Coeficientul lui x^k din membrul drept al acestei egalități este C_{n+m}^k.

Coeficientul lui x^k din membrul stâng al egalității este:

$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0$

-3

4 $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$

Considerăm un număr complex $z = a+bi$ scris sub formă algebrică. El poate fi scris și sub formă trigonometrică astfel:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ unde $r = \sqrt{a^2+b^2}$ este modulul numărului complex z, iar $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ este argumentul numărului complex z.

În cazul asta pentru $a = b = 1$ rezultă numărul complex $z = 1+i$

Conform binomului lui Newton obținem următoarea dezvoltare a acestui număr complex:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} (i)^k \cdot C_n^k = C_n^0 + iC_n^1 + i^2C_n^2 + \ldots + i^nC_n^n =$$

$$= C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + \ldots + i^nC_n^n = \qquad (1)$$

$$= (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots)$$

Puterile lui i sunt următoarele:

$i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$; $i^{4k} = 1$.

Notăm cu S următorul șir: $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$

și cu T șirul $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

Scriem numărul complex $z = 1+i$ în următoarea formă trigonometrică:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Ridicăm acest număr la puterea n și folosind relația $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \Rightarrow$

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (\sqrt{2})^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad (2)$$

Egalând părțile reale și imaginare din relațiile (1) și (2) ⇒

$$S = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\frac{n\pi}{4} = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$$

$$T = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\frac{n\pi}{4} = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$$

② Să se calculeze sumele:

① $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \dots + (n+1)C_n^n$

Notăm cu S_n suma $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \dots + (n+1)C_n^n$

Avem:

$S_n = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + \dots + (n+1)C_n^n$ și totodată:

$S_n = (n+1)C_n^n + nC_n^{n-1} + \dots + 4C_n^3 + 3C_n^2 + 2C_n^1 + C_n^0$

(scriind termenii în ordine inversă).

Folosim formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^0 = C_n^n$

$C_n^1 = C_n^{n-1}$

$C_n^2 = C_n^{n-2}$

Adunăm cele 2 sume și obținem:

$2S_n = (n+2) \cdot 2^n$

$S_n = (n+2) \cdot 2^{n-1}$

2) Să se calculeze sumele:

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$

Notăm cu S_n suma $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$

Avem:

$S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$ și totodată

$S_n = nC_n^n + (n-1)C_n^{n-1} + \ldots + 2C_n^2 + C_n^1$ (scriind termenii în ordine inversă).

Folosind formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$, prin adunarea celor două sume obținem:

$2S_n = nC_n^n + [1+(n-1)]C_n^1 + [2+(n-2)]C_n^2 \ldots + [(n-1)+1]C_n^{n-1} + nC_n^n$

$2S_n = n + n(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n)$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \Rightarrow$

$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n - C_n^0 = 2^n - 1$

Înlocuind termenii obținem:

$2S_n = n + n(2^n - 1) = n + n\cdot 2^n - n = n\cdot 2^n$

$S_n = \frac{n\cdot 2^n}{2} = n\cdot 2^{n-1}$

b) $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2$

Notăm cu S_n suma $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2$.

Avem:

$S_n = (C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \ldots + (n-2)(C_n^{n-2})^2 +$
$+ (n-1)(C_n^{n-1})^2 + n(C_n^n)^2$ și totodată:

$S_n = n(C_n^n)^2 + (n-1)(C_n^{n-1})^2 + (n-2)(C_n^{n-2})^2 + \ldots +$
$+ 3(C_n^3)^2 + 2(C_n^2)^2 + (C_n^1)^2$ (scriind termenii în ordine inversă)

Folosim formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$

$C_n^0 = C_n^n$

$C_n^1 = C_n^{n-1}$

$C_n^2 = C_n^{n-2}$

— — — ———————

Adunăm cele 2 sume de mai sus și obținem

$$2S_n = n(C_n^0)^2 + (n-1+1)(C_n^1)^2 + (n-2+2)(C_n^2)^2 + \dots +$$
$$+ (n-2+2)(C_n^{n-2})^2 + (n-1+1)(C_n^{n-1})^2 + n(C_n^n)^2$$

$$2S_n = n(C_n^0)^2 + n\cdot\left[(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 + (C_n^n)^2\right]$$

Dar știind că:

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 \iff$$
$$(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = (C_{2n}^n) - 1 \Rightarrow$$

$$2S_n = n(C_n^0)^2 + n\left[(C_{2n}^n) - 1\right] \iff$$

$$2S_n = n + n\cdot(C_{2n}^n - 1) = n\,C_{2n}^n$$

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} \Rightarrow$$

$$2S_n = nC_{2n}^n$$

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot C_{2n}^n = \frac{n}{2}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!}$$

c) $$\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1} = S_n$$

Pt a calcula această sumă folosim identitatea:

$$C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} \Rightarrow C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1}C_n^k$$

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \frac{C_n^k}{k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}$$

Dar $$\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1} = C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1}$$

Știm însă că:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \Rightarrow C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots +$$
$$+ C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$$

$$C_{n+1}^{1}+C_{n+1}^{2}+\dots+C_{n+1}^{n}+C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1}-C_{n+1}^{0}=2^{n+1}-1$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

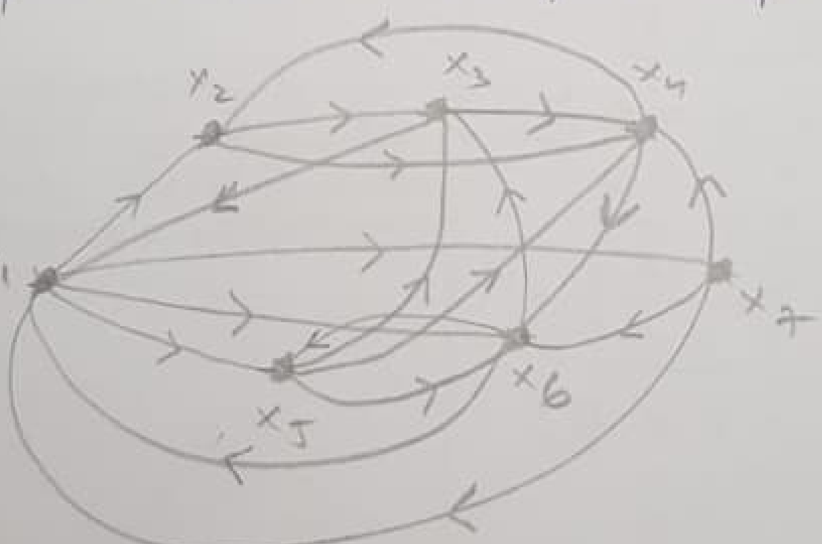
TEMA DE CONTROL

Problema nr.1

O companie de transport mărfuri trebuie să efectueze transportul unor produse între șapte puncte economice notate cu $x_1, x_2 \dots x_7$, acestea fiind întreprinderi, depozite, magazine de desfacere, etc. Rețeaua de transport este un graf cu 7 vârfuri, $x_1, x_2 \dots x_7$ și având următoarea matrice, notată cu A, a conexiunilor.

$$
A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_5 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_6 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x_7
\end{array}
$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului rețelei de transport corespunzătoare matricii A.



2) Să se stabilească dc. în graful rețelei de transport corespunzătoare matricii A există circuite.

L_1:
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad +$$

L_2:
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad +$$

L_3:
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad +$$

L_4:
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad +$$

L_5:
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad +$$

L_6:
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad +$$

L_7:
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad +$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \underline{0} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} P(x_i) \\ 7 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 6 \\ \hline 44 \end{array}$$

Dc pe diagonala principala $t_{ii}=1$ şi $t_{kk}=1$ at în G există un circuit care conține vârfurile x_i şi x_k

TESTE DE AUTOEVALUARE

Problema 1. Într-o întreprindere există 7 secții între care se face permanent un schimb de produse sub diferite forme (componente, subansamble, ansamble, etc). Posibilitățile de transport între cele 7 secții sunt reprezentate printr-un graf cu arce valorizate cu 7 vârfuri, având matricea conexiunilor următoare:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \end{array}$$

Valoarea atașată fiecărui arc reprezintă timpul de transport dintre secțiile corespunzătoare extremităților arcului respectiv. Matricea valorilor arcelor grafului este următoarea:

$$C = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \end{array}$$

1) Să se construiască o reprezentare sagitală a grafului schemei de transport.

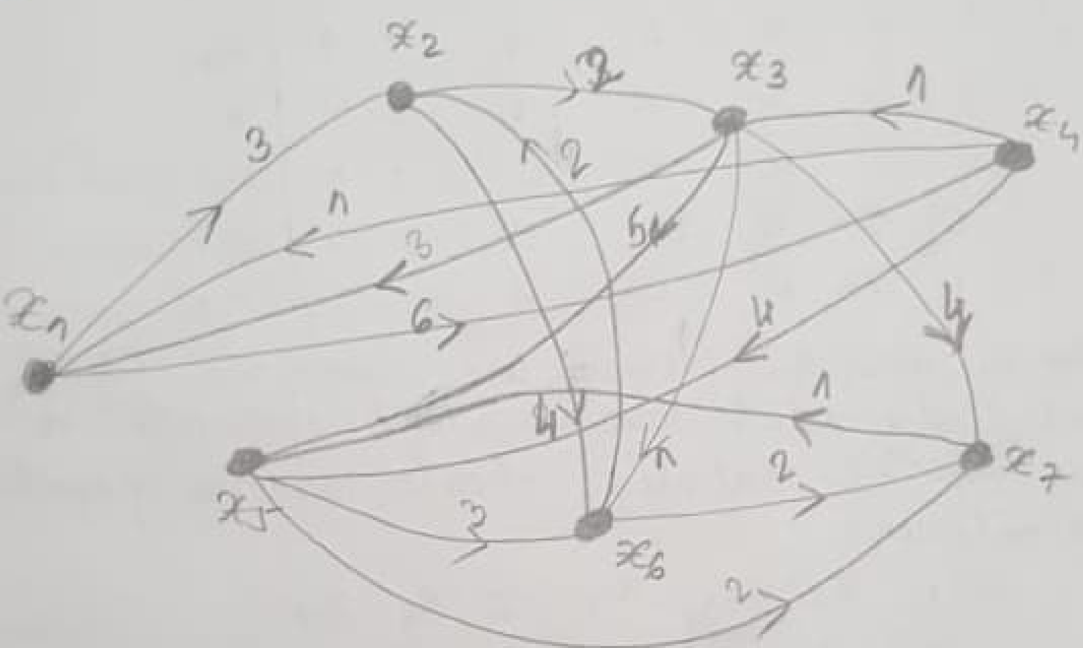
2) Să se planifice transportul de la secția x_1 la secția x_5 astfel încât acesta să se facă într-un timp minim.

3) Cum trebuie organizat transportul între oricare dintre cele 7 secții ale întreprinderii, astfel încât timpul total de transport să fie minim;

4) Presupunând că datorită unei mai bune organizări a activității din întreprindere se micșorează timpul de transport de la secția x_2 la secția x_6 cu 2 unități de timp, să se determine soluția problemei de la pct 3 în această ipoteză;

5) În ipoteza apariției unei defecțiuni care necesită suspendarea legăturii dintre secțiile x_6 și x_7, să se determine noua soluție a problemei de la pct 4.

(1)



(2) și (3) ⇒ mai întâi determinăm matricea drumurilor de valoare minimă pt. graful respectiv

$$C = C^{(1)} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \end{array}$$

FAZA 1 REZOLVARE cu BELLMAN

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 3 & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & \infty & 5 & 1 & 4 \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 3 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}$$

$V_1 = (\infty, \infty, 4, \infty, 2, 2, 0)$ ← linia se obține după col C_6 transpusă

ET 1 $V_2 = (\infty, 6, 3, 5, 2, 2, 0)$

ET 2 $V_2 = (9, 5, 3, 4, 2, 2, 0)$

ET 3 $V_3 = (8, 5, 3, 4, 2, 2, 0)$

ET 4 $V_4 = (8, 5, 3, 4, 2, 2, 0)$

$\min(0+\infty; 3+\infty, \infty+4, 6+\infty, \infty+2, \infty+2, \infty+0) = \infty$

$\min(\infty+\infty; 0+\infty, \underline{2+4}, \infty+\infty, \infty+2, 4+2, \infty+0) = 6$

$\min(3+\infty, \infty+\infty, 0+4, \infty+\infty, 5+2, \underline{1+2}, 4+0) = 3$

$\min(1+\infty, \infty+\infty, \underline{1+4}, 0+\infty, 4+2, \infty+2, \infty+0) = 5$

$\min(\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+4, \infty+\infty, 0+2, 3+2, 2+0) = 2$

$\min(\infty+\infty, 2+\infty, \infty+4, \infty+\infty, 0+2, 3+2, 2+0) = 2$

$\min(\infty+\infty, \infty+\infty, \infty+4, \infty+\infty, 1+2, \infty+2, 0+0) = 0$

FAZA 2 $\mu = (x_1, x_2, x_3, x_6, x_7) = 8.$

$V_1 = \min(8+0, \underline{5+3}, 3+\infty, 6+4, 2+\infty, 2+\infty, 0+\infty) \Rightarrow \boxed{i=2}$

$V_2 = \min(\infty+8, 0+5, \underline{2+3}, \infty+4, \infty+2, \infty+2, \infty+0) \Rightarrow \boxed{i=3}$

$V_3 = \min(3+8, \infty+5, 0+3, \infty+4, 2+5, \underline{1+2}, 4+0) \Rightarrow \boxed{i=6.}$

② Transportul optim de la x_1 la x_5

$$C_{1i} + V_{i5} = V_{15} = 9.$$

$$\mu = (x_1, x_2, x_3, x_6, x_7, x_5) = 9.$$