LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

CONF. UNIV.DR.
DANIELA JOITA

ASIST. UNIV.DRD.
VERONICA CORNACIU

STRUCTURA CURSULUI

- 14 CURSURI+14 SEMINARII
- ULTIMUL CURS-recapitulare pentru examen
- PARŢIAL- in jurul cursului 8(din Unitatea de învaţare 1+ Unitatea de învaţare 2)

SISTEMUL DE NOTARE

- 70% notă examen final
- 20% notă parţial
- 10% activitate la seminar+temă

CUPRINSUL CURSULUI

Unitatea de învăţare 1-ALGEBRE BOOLE

- Elemente de teoria mulţimilor

  - calcul propoziţional;

  - mulţimi, operaţii cu mulţimi;

  - calculul predicatelor;

  - relaţii şi funcţii;

  - mulţimi echipotente, cardinali;

  - relaţii de ordine.

CUPRINSUL CURSULUI

- Algebre Boole

  - latici;
  - algebre Boole, proprietăţi generale;
  - filtre, algebre Boole cât;
  - teorema de reprezentare a lui Stone;
  - algebre Boole finite.

CUPRINSUL CURSULUI

Unitatea de învăţare 2-LOGICA PROPOZIŢIONALĂ

- limbajul logicii propoziţionale;
- concepte semantice în logica propoziţională;
- tabele de adevăr;
- consecinţe logice;
- forme normale;
- tablouri semantice;
- rezoluţie.

CUPRINSUL CURSULUI

Unitatea de învăţare 3- LOGICA PREDICATELOR

- limbajul logicii predicatelor;
- notaţii în programarea logică;
- forme normale în logica predicatelor;
- interpretări în logica predicatelor;
- rezoluţie în LPr.

CUPRINSUL CURSULUI

Unitatea de învăţare 4- MAŞINI TURING ŞI ALGORITMI MARKOV

- Masini Turing;
- Algoritmi Markov.

CE ESTE LOGICA?

logikē tekhnē = știința raționamentelor
logos = cuvînt, raționament

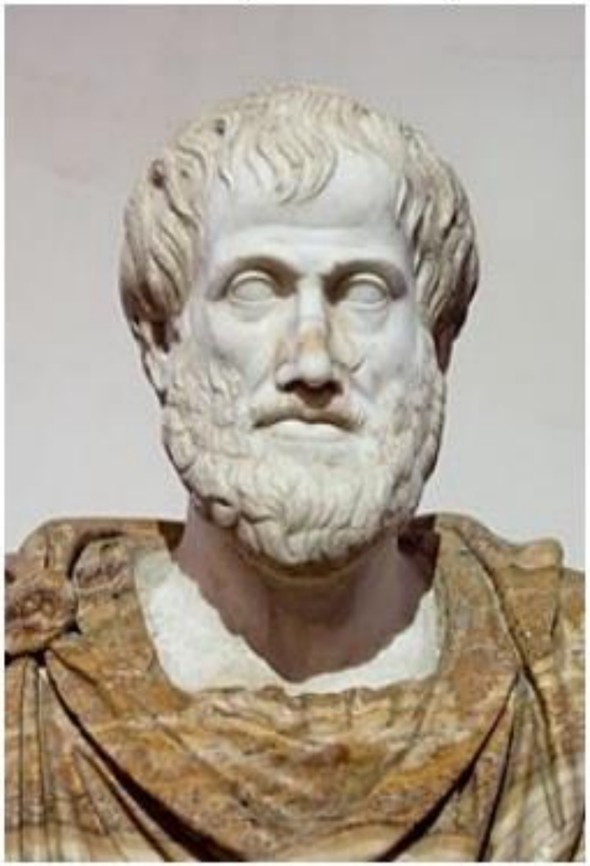
"A deduction is speech (logos) in which, certain things having been supposed, something different from those supposed results of necessity because of their being so." (Aristotel, Prior Analytics)
Smith, R., "Aristotle's Logic", SEP (Spring 2014), Ed. N. Zalta (ed.)

"Contrariwise [...] if it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic."
Lewis Carroll, Through the Looking-Glass, and What Alice Found There

"Logic is the beginning of wisdom, [...], not the end. "
Captain Spock, Star Trek VI: The Undiscovered Country (1991)

ÎNCEPUTURILE LOGICII

Aristotel (IV i.e.n.)



- primul studiu formal al logicii
- a studiat *silogismele*, deductii formate din doua premise si o concluzie.

Premisa	Totii oamenii sunt muritori.
Premisa	Grecii sunt oameni.
Concluzie	Deci grecii sunt muritori.

SILOGISMELE

- Patru tipuri de enunţuri(**A**ff**I**rmo n**E**g**O**)

A: *Toţi X sunt Y.* (universal afirmativ)

E: *Nici un X nu este Y.* (universal negativ)

I: *Unii X sunt Y.* (particular afirmativ)

O: *Unii X nu sunt Y.* (particular negativ)

- Un silogism este format din doua premise şi o concluzie, fiecare avand una din formele **A, E, I, O**.

SILOGISMELE

Legi de structură:

1. Silogismul conţine 3 propoziţii , doua premise şi o concluzie. Cel puţin una dintre premise este afirmativă;
2. Silogismul conţine 3 termeni: major, mediu şi minor;
3. Termenul mediu trebuie distribuit cel puţin într-o premisă, pentru a putea face legătura între termenii extremi;
4. Termenii extremi, majorul şi minorul, figurează separat în câte o premisă şi împreună în concluzie.

SILOGISMELE

Structura standard a silogismului:

- Un silogism este format din 3 propoziţii categorice: premisa majora, premisa minora şi concluzia;
- Premisa majora conţine termenul major sau mediu şi predicatul logic al concluziei;
- Premisa minora conţine termenul minor sau mediu şi subiectul logic al concluziei;
- Concluzia conţine subiectul şi predicatul logic.

EXEMPLU

Premisa majoră: Toţi oamenii sunt muritori.

Premisa minora: Grecii sunt oameni.

Concluzia: Deci grecii sunt muritori.

Subiectul logic - “grecii”(termen minor)

Predicatul logic- “muritor”(termen major)

“om”(termen mediu)

LOGICA MATEMATICĂ

- **Friedrich Ludwig Gottlob Frege**, *Begriffsschrift*, 1879 (a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought)
- **Giuseppe Peano**, *Formulario Mathematico*, 1894-1908
- **Bertrand Russell** și **Alfred North Whitehead** *Principia Mathematica*, 1910-1913
- **David Hilbert**, Hilbert's Pogram , 1921 "Once a logical formalism is established one can expect that a systematic, so-to-say computational, treatment of logic formulas is possible, which would somewhat correspond to the theory of equations in algebra."
- **Kurt Gödel** Teorema de completitudine a calculului cu predicate (1929), Teoremele de incompletitudine (1931)
- **Alfred Tarski** *The Concept of Truth in Formalized Languages* (1935), *On the Concept of Logical Consequence* (1936)

LOGICA MATEMATICĂ

O *logică* este
un sistem formal
cu două componente:
sintaxa și *semantica*.
Orice sistem logic are un
mecanism de *deducție*.

Exemple din *logica clasică*:

Sintaxa: $p \to q$

Semantica:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Deducția: $\dfrac{p \to q, p}{q}$ (*modus ponens*)

LOGICĂ ŞI INFORMATICĂ

"Computing and Computing Science unavoidably emerge as an exercise in formal mathematics or, if you wish an acronym, as exercise in VLSAL (Very Large Scale Application of Logic)."
Dijkstra, E.W. The next fifty years (EWD1243a). E.W. Dijkstra Archive. Center for American History, University of Texas at Austin.

"Logic is the calculus of computation."
Aaron R. Bradley, Zohar Manna, The Calculus of Computation Decision Procedures with Applications to Verification, Springer,2007

"Computer science is the continuation of logic by other means."
Georg Gottlob: Logic and Artificial Intelligence, Media Seminar, VSL 2014

LOGICĂ ŞI INFORMATICĂ

Aplicaţii ale logicii în informatică:

- arhitectura calculatoarelor(circuite logice);
- software engineering(testare şi verificare);
- limbaje de programare(semantică, programare logică);
- baze de date(algebre de relaţii);
- Inteligenţă artificială(demonstrare automată);
- calculabiliatate şi complexitate.

Logică şi Informatică în România

Grigore C. Moisil (1906-1973)

"As a professor of the Bucharest University, he was the first to teach there mathematical logic. Articulating logic and automata, Moisil was well prepared to organize the Romanian development in the emergent field of Computer Science...we can say that 1957 is the date of birth of Romanian Computer Science, under the guidance of Professor Moisil and with the collaboration of engineers and mathematicians."

S. Marcus, Grigore C. Moisil: A life becoming a myth, IJCCC 1, 73-79, 2006.

Gr.C. Moisil - Computer Pioneer Award of IEEE Computer Society

Unitatea de învăţare 1-ALGEBRE BOOLE

- Elemente de teoria mulţimilor
  - calcul propoziţional;
  - mulţimi, operaţii cu mulţimi;
  - calculul predicatelor;
  - relaţii şi funcţii;
  - mulţimi echipotente, cardinali;
  - relaţii de ordine.
- Algebre Boole
  - latici;
  - algebre Boole, proprietăţi generale;
  - filtre, algebre Boole cât;
  - teorema de reprezentare a lui Stone;
  - algebre Boole finite.

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

- În calculul propoziţional se studiază propoziţiile din punctul de vedere al adevărului sau falsităţii lor, neluându-le în considerare conţinutul lor.
- Vom nota propoziţiile prin literele *p*, *q*, *r*, … . Pentru orice propoziţie *p*, definim **valoarea ei logică**

$$v(p) = \begin{cases} 1, \text{ daca propozitia } p \text{ este adevarata} \\ 0, \text{ daca propozitia } p \text{ este falsa} \end{cases}$$

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

- Dacă *p*, *q* sunt două propoziţii oarecare, atunci **<u>conjuncţia</u>** lor $p \wedge q$ este propoziţia "*p* şi *q*", iar valoarea ei de adevăr este dată de:

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1, \text{ daca } p,\ q \text{ sunt simultan adevarate} \\ 0, \text{ daca cel putin una din propozitiile } p,\ q \text{ este falsa} \end{cases}$$

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

<u>**Disjuncţia**</u> $p \vee q$ a propoziţiilor *p*, *q* este propoziţia "*p* sau *q*", iar valoarea ei logică este definită prin:

$$v(p \vee q) = \begin{cases} 1, \text{ daca cel putin una din propozitiile } p \text{ si } q \text{ sunt adevarate} \\ 0, \text{ daca ambele propozitii } p \text{ si } q \text{ sunt false} \end{cases}$$

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

<u>Negaţia</u> $\neg p$ a unei propoziţii p are următoarea valoare de adevăr:

$$v(\neg p) = \begin{cases} 0, \text{ daca } p \text{ este adevarata} \\ 1, \text{ daca } p \text{ este falsa} \end{cases}$$

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

- Date fiind două propoziţii *p*, *q*, **implicaţia** $p \to q$ este propoziţia "*p* implică *q*" a cărei valoare de adevăr este:

$$v(p \to q) = \begin{cases} 0, & \text{daca } v(p) = 1 \text{ si } v(q) = 0 \\ 1, & \text{in rest} \end{cases}$$

.

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

- **<u>Echivalenţa</u>** $p \leftrightarrow q$ a două propoziţii *p*, *q* este propoziţia “*p* echivalent cu *q*” a cărei valoare de adevăr este dată de:

$$v(p \leftrightarrow q) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } v(p) = v(q)$$

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

- Aceste definiţii pot fi concentrate in următoarele tabele de adevăr:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

disjunctia

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

conjunctia

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \to q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

implicaţia

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

echivalenta

$v(p)$	$v(\neg p)$
1	0
0	1

negaţia

CALCULUL PROPOZIŢIONAL CLASIC

- Următoarele propoziţii sunt adevărate pentru orice *p,q,r*:

1. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$; $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$;
2. $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$; $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$;
3. $(p \vee p) \leftrightarrow p$; $(p \wedge p) \leftrightarrow p$;
4. $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$; $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$;
5. $[p \vee (p \wedge q)] \leftrightarrow p$; $[p \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow p$;
6. $p \vee \neg p$; $\neg(p \wedge \neg p)$;
7. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$; $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$;
8. $(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$; $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$;
9. $\neg\neg p \leftrightarrow p$;
10. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$;
11. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;
12. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg p)$;

EXERCIŢIU

Fie p propozitia: *Azi este joi, deci avem curs de logica.*

Cine este $\neg p$?

Propozitia $\neg p$ este: *Azi este joi si nu avem curs de logica.*

PUZZLE-URI LOGICE

Propoziţia adevărată

Dintre propoziţiile de mai jos doar una este adevărată. Care este propoziţia adevărată?

1. Propoziţia 2 este adevărată.
2. Propoziţia 5 este falsă.
3. Toate cele cinci propoziţii sunt adevărate.
4. Toate cele cinci propoziţii sunt false.
5. Propoziţia 1 este falsă.

PUZZLE-URI LOGICE

Propoziţia falsă

Dintre propoziţiile de mai jos doar una este falsă. Care este propoziţia falsă?

a. Propoziţia *d* este adevărată.

b. Propoziţia *a* este falsă.

c. Propoziţia *b* este falsă.

d. Propoziţia *c* este adevărată.

PUZZLE-URI LOGICE

Cele trei premii

Presupuneti ca vreau sa va ofer unul din premiile:

A

B

C

Voi trebuie sa enuntati o propozitie p. Daca p este adevarata atunci primiti unul din premiile **A** sau **B**. Daca p este falsa atunci primiti premiul **C**.

PUZZLE-URI LOGICE

- Enunţaţi o propoziţie *p* astfel încât să luaţi cu siguranţă unul din premiile A sau B.
- Enunţaţi o propoziţie *p* astfel încât să luaţi cu siguranţă premiul C.
- Enunţaţi o propoziţie *p* astfel încât să luaţi cu siguranţă premiul A.

PUZZLE-URI LOGICE

Laurenţiu, Leo şi Teodor

Laurenţiu, Leo şi Teodor sunt trei fraţi gemeni.

- Laurenţiu, Leo mint întotdeauna, iar
- Teodor spune întotdeauna adevărul.

Într-o zi întâlnţi pe stradă unul din cei trei fraţi.

Aveţi voie să îi puneţi o singură întrebare, formată din cel mult trei cuvinte, la care el va răspunde Da sau Nu.

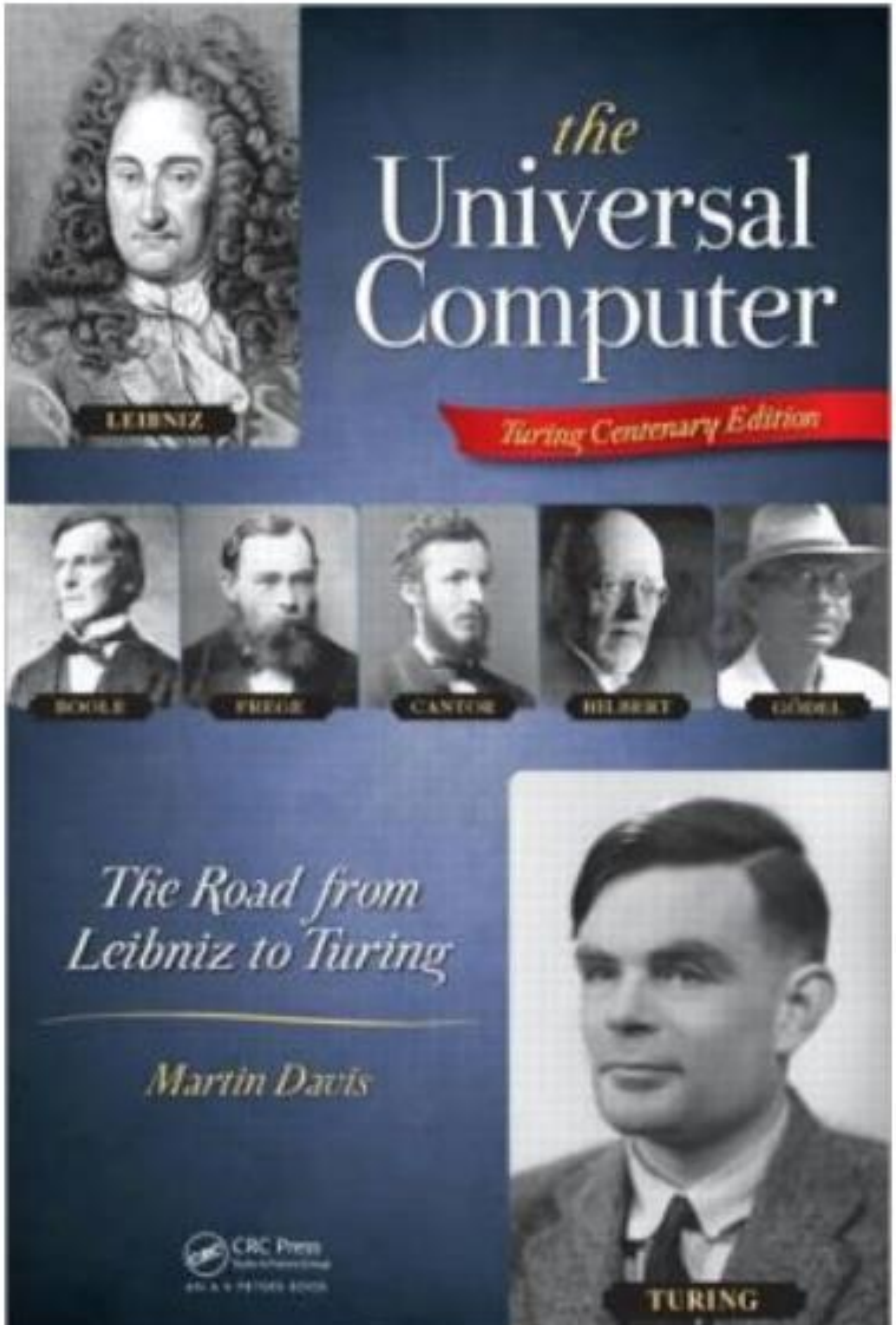
Care din următoarele întrebări va permite să decideţi dacă persoana cu care vorbiţi este Leo?

1. Eşti tu Teodor?
2. Eşti tu Leo?
3. Eşti tu Laurenţiu?

PUZZLE-URI LOGICE

Caracatiţele

Un delfin se întâlneşte cu patru caracatiţe. Mamiferul, inteligent cum îl ştie toată lumea, a învăţat la şcoala delfinilor că nu există decât caracatiţe cu 6, 7 sau 8 picioare. A mai învăţat şi că cele cu 7 picioare mint întotdeauna, iar cele cu 6 sau 8 picioare spun întotdeauna adevărul. Cum cele patru stau ascunse cu picioatele în nisip, delfinul le întreabă: “Câte picioare aveţi împreună?” .Cele patru răspund pe rând, de la stânga spre dreapta “28...27...26...25”. Câte picioare au împreună cele patru caracatiţe?



"... a computing machine is really a logic machine. Its circuits embody the distilled insights of a remarkable collection of logicians, developed over century. Nowdays, as computer technology advances with such breathtaking rapidity, as we admire the truly accomplishments of the engineers, it is all too easy to overlook the logicians whose ideas made it all possible. This book tells their story."

M. Davis, The Universal Computer

Cuprins

Bibliografie

- V. E. Cazanescu, Curs de bazele informaticii, Tipografia Universitatii din Bucuresti, 1976.
- G. Georgescu, Elemente de logica matematica, Academia Militara, Bucuresti, 1978.
- G. Georgescu, A. Iorgulescu, Logica matematica, Editura ASE, Bucuresti, 2010.
- Gr. C Moisil, Elemente de logica matematica si de teoria multimilor, Editura Stiintifica, Bucuresti, 1968.
- S. Rudeanu, Curs de bazele informaticii, Tipografia Universitatii din Bucuresti, 1982.

Bibliografie

- M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge Univ. Press, 2009
- A.R. Bradley, Z. Manna, The Calculus of Computation Decision Procedures with Applications to Verification, Springer,2007
- M. Ben-Ari, Mathematical Logic For Computer Science, Springer, 2003
- S. Burris, Logic for Mathematics and Computer Science, Prentice Hall, 1998
- H.R. Lewis, C.H. Papadimitriou, Elements of the Theory of Computation, Prentice-Hall, 1981.
- J.D. Monk, Mathematical Logic, Springer Verlag, 1976.

MULŢUMESC!