05-11-2021 [LECȚIA 5]

Șiruri de funcții și Serii de funcții

1) Sunt extensii naturale ale șirurilor și seriilor de numere (reale)

Def 1: Se numește șir de funcții reale de variabilă reală, o corespondență prin care fiecărui număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ îi se asociază o funcție unică $f_n : A \to \mathbb{R}$; $A \subseteq \mathbb{R}$

Ca notație: $\boxed{(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}}$

Termenii șirului: $\boxed{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots}$ = termenii șirului

$\boxed{f_n(x)}$ -> termenul general al șirului de funcții

Pentru fiecare punct $x \in A$ șirul $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere

fie $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^2+n}$; $x \in \mathbb{R}$

$f_n(2) = \dfrac{2n}{4+n}$ -> șir de numere

-> Un șir de funcții este echivalent cu o familie de șiruri de numere:

$\boxed{(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, \ x \in A}$

Vom spune că un punct $x \in A$ este un punct de convergență al șirului de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dacă șirul de numere $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și punct de divergență în caz contrar

Să notăm E = mulțimea tuturor punctelor de convergență ale șirului de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Mulțimea E se numește mulțimea de convergență al șirului $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Evident că $E \subseteq A$

Pentru fiecare $x \in E$, șirul de funcții $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent

Fie $f(x)$ limita acestui șir.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Am stabilit o corespondență prin care fiecărui punct $x \in E$, îi asociem limita lui $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

$$x \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

Altfel spus, am definit o funcție reală

$f: E \to \mathbb{R}$ prin egalitatea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Funcția f se numește $(f: E \to \mathbb{R})$ funcția limită pe mulțimea E al șirului de funcții $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

Vom spune că șirul de funcții $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge punctual pe mulțimea E către funcția $f: E \to \mathbb{R}$. Se scrie:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Ex. $f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2 + x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat, $\Rightarrow f_n(x_0) = \dfrac{n x_0}{n^2 + x_0}$ = șir de numere

Calculăm

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot x_0}{n^2 + x_0} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} \cdot x_0}{\cancel{n}(x_0^2/n + 1)} = x_0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{x^2 + n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n} x}{\cancel{n}(\frac{x^2}{n} + 1)} = x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Convergența pusă în evidență (punct cu punct) se numește convergență simplă sau punctuală

Convergența simplă și convergența uniformă

Fie $f_n: A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}$. Fie $E \subset A$ mulțimea punctelor de convergență ale lui $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

Pentru $\forall x \in E$, x fixat, șirul de numere $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent către numărul $f(x)$

Folosind definiția convergenței cu ε a unui șir de numere reale, vom scrie:

Definiție: Șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este simplu convergent pe mulțimea E și are ca limită funcția f pe E dacă $\forall x \in E$ și $\forall \varepsilon > 0$, există un număr natural care depinde și de ε și de x, notat cu $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru $\forall n \geq n_0(\varepsilon, x)$ avem

© Herlitz

relația:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

De remarcat că numărul începând de la care, are loc această inegalitate, depinde și de ε și de ε

Exemplu fie șirul de funcții $f_n(x) = x^n$

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Să se determine mulțimea E, expresia funcției limită și să se arate că pe E convergența este punctuală (simplă)

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } x > 1 \\ 1 & \text{dacă } x = 1 \\ 0 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ \text{Nu există} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

$\Rightarrow E = (-1, 1]$ $\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$

Fie $x \in (-1, 1)$; $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$.

Să determinăm numărul $n_0(\varepsilon, x)$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$ să avem $|f_x(x) - f(x)| = |x^n - 0| < \varepsilon$

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln|x| < \ln \varepsilon \;/ : \ln|x|$$

$\Rightarrow n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|x|}$ Deci, pentru un $\varepsilon > 0$ dat, vom avea $n_0(\varepsilon, x) = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|x|}\right]$

$\Leftrightarrow$ numărul $n_0(\varepsilon, x)$ depinde și de ε și de x

Observație: Deci, dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe mulțimea E,

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$, a.î. $\forall n > n_0(\varepsilon, x)$ să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Din punct de vedere logic există 2 situații:

a) Pentru $\varepsilon > 0$, arbitrar, mulțimea numerelor $n_0(\varepsilon, x)$, când $x \in E$ este mărginită (are margine superioară)

$\Rightarrow$ există $\sup\limits_{x \in E} \{n_0(\varepsilon, x)\} = n_0(\varepsilon) < +\infty$

b) Mulțimea numerelor $\{n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită

$$\sup_{x \in E} \{n_0(\varepsilon, x)\} = +\infty$$

În cazul "a" vom lua în definiție tocmai acest rang $n_0(\varepsilon) = \sup_{x \in E} \{n_0(\varepsilon, x)\} < +\infty$

În acest caz, afirmația „$\forall x \in E$" din def. trebuie să

după afirmația referitoare la ε. $\forall \varepsilon > 0$

Astfel, definiția e de convergenței uniforme a șirului $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ către funcția $f(x)$:

Definiție: Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent pe mulțimea E și are ca limită funcția f, dacă $(\forall) \varepsilon > 0$, există un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. pentru $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ și pentru $\forall x \in E$ să avem:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Se scrie $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$

În exemplu anterior: $n_0(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}\right]$

$E = (-1, 1]$ Dacă $x \in (-1, 1] \Rightarrow$

convergentă

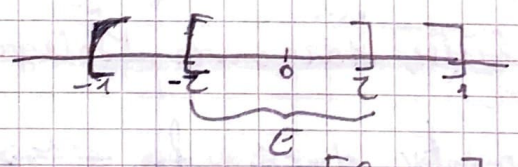
$$\Rightarrow \sup_{x \in E} (\varepsilon, x) = \sup_{|x| \in [0,1]} \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}\right]$$

$|x| \in [0, 1)$. Când $|x| \to 1 \Rightarrow \ln |x| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{|x| \in [0,1]} \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}\right] + \infty \Rightarrow$ Convergență simplă

Mulțimea raporturilor $n_0(\varepsilon, x)$ nu este mărginită, deci $x^n \to 0$

Dacă încă vom lua $E = (-r, r) \subset (-1, 1]$



$$\Rightarrow \exists\, n_0(\varepsilon) = \sup_{x \in E} \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}\right] = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln r}\right] < +\infty$$

$\Rightarrow$ Convergență uniformă $x^n \xrightarrow[n \to \infty]{u} 0$, $x \in [-r, r] \subset (-1, 1]$

© Herlitz

Teoremă: Fie $f_n : E \to \mathbb{R}$ un șir de funcții și $f: E \to \mathbb{R}$ limita sa pe E. Dacă există un șir de numere reale convergent la 0 și $\forall x \in E$ are loc relația $|f_n(x) - f(x)| < a_n$ $(a_n > 0,\ a_n \to 0)$ atunci $f_n \xrightarrow{u} f$, pe mulțimea E

Exemplu Fie $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ și $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0 \ ; \quad f(x) = 0 \Rightarrow \\ x \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{\sin(nx)}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \le \frac{1}{n}, \ \forall x \in [0, 2\pi] \\ a_n = \frac{1}{n} \ ; \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(nx)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{u} 0$$

Proprietăți ale limitei șirurilor unif. convergente

Ne punem întrebarea: Dacă o anumită proprietate pe care o au toți termenii a șirului de funcții (f_n) convergent către o funcție f, $f_n \to f$ se transferă și supra limitei.

(Continuitate, Derivabilitate, Mărginire, Integrabilitate Riemann, Existența primitivelor)

Răspunsul este afirmativ dacă $f_n \xrightarrow{u} f$, adic avem convergență uniformă a șirului f_n către funcția f, pe mulțimea E.

TEOREMA 1: Fie $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ pe E. Dacă toate funcțiile sunt continue pe E și f_n este u. conv. către f pe E, atunci și funcțiile f sunt continue în E.

TEOREMA 2: fie $(f_n): I \to \mathbb{R}$, Interval un șir de funcții derivabile pe I, $\forall n \in \mathbb{N}$

Dacă: a) Șirul $f_n \xrightarrow[\text{pe } I]{u} f$

b) Șirul derivatelor $f_n' \xrightarrow[\text{pe } I]{u} g$.

Atunci, f este derivabilă pe I și $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in I$

↳ Serii de funcții

Sunt extensii naturale ale seriilor de numere.

Fie $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots : E \to \mathbb{R}$

Vom considera seria

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E \to \text{serie de num}$$

Dacă seria este convergentă în punctul $x \in E$ ca serie de numere, notăm cu $S(x)$ suma sa. Deci

o serie de funcții este echivalentă cu o familie de serii de numere.

Se notează cu $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$

$(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ se numește șirul sumelor parțiale al seriei de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Def: Spunem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este simplu (uniform) convergentă pe E și are suma $S(x)$ $\Leftrightarrow$ Șirul sumelor parțiale $S_n(x)$ este simplu (uniform) convergentă și are limita $S(x)$ pe mulțimea E

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} (f_1(x) + \dots + f_n(x)) = S(x)}$$

Criterii de convergență uniformă pentru serii de f.

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ o serie de funcții, cu $f_n : E \to \mathbb{R}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie convergentă de numere pozitive

Dacă $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ și $\forall x \in E$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă pe mulțimea E.

Berlitz

Ex. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$.

$f_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^2}$ are prop că:

$\left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, atunci seria de funcții

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$ este uniform convergentă

Continuitatea, derivabilitatea, integrabilitatea seriilor de funcții

Aceste proprietăți au loc întocmai că la șirurile de funcții, cu mențiunea că seriile de funcții trebuie să fie u. convergente. Ele se formulează și se demonstrează cu ajutorul șirului sumelor parțiale al seriei

Pentru derivabilitate vom scrie că

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Teoremă de derivare termen cu termen al seriilor de funcții unif. convergente

Pentru Integrabilitate vom scrie că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx$$

Teoremă de integrare termen cu termen a seriilor de funcții unif. convergente

Pentru Existența primitivelor avem că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx$$

Teoremă pentru primitive

Aceste teoreme arată că seriile de funcții unif. convergente se comportă față de operațiile menționate, întocmai ca sumele cu număr finit de termeni.

Serii De puteri.

Def: Numim serie de puteri o serie de funcții

$$\sum_{n=1,0}^{\infty} f_n(x) \text{ unde } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$f_n(x) = a_n \cdot x^n$ iar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Toate rezultatele privind seriile de funcții sunt valabile și pentru seriile de puteri.

În cazul seriilor de puteri ne interesează în primul rând mulțimea de convergență al seriei $E \subseteq \mathbb{R}$, care în totdeauna este ne-vidă.

Ne mai interesează și calculul sumelor unei serii de puteri.

Ex.1 Dacă $x=0$ și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are $a_0 \neq 0$. avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots + \dots = a_0 ; \quad E = \{a_0\}$$

Ex.2 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

Ex.3 $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \xrightarrow[n\in(-1,1)]{n\to\infty} \frac{1}{1-x} \quad E = (-1,1)$$

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

- termeni seriei sunt definiți pentru $\forall x \in \mathbb{R}$
- Suma seriei $S(x) = \frac{1}{1-x}$ este definită pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Egalitatea : $1 + x + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$ este adevărată numai pentru $x \in (-1,1)$ = mulțime de convergență

IN CONTINUARE VOM PREZENTA REZULTATE TEORETICE REFERITOR LA MULTIME DE CONVERGENTA, MODUL DE DETERMINAREA ACESTEIA SI PROP. SUMEI SERIEI PE MULȚIMEA DE CONVERGENȚA

Informații despre mulțimea de convergență a unei serii de puteri ne oferă:

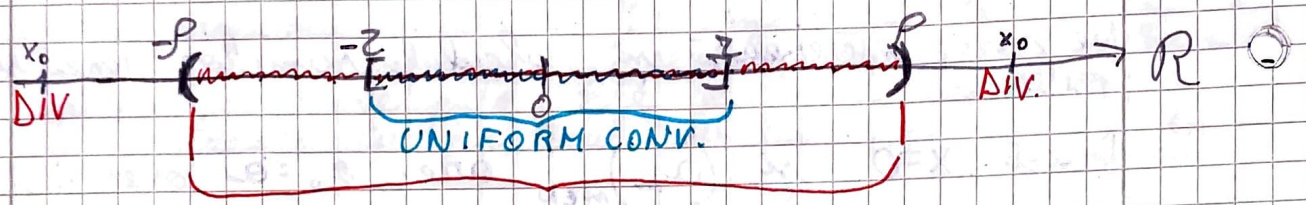
Teorema 1 lui Abel.

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, există un număr ρ cu proprietatea $0 \le \rho \le +\infty$ și astfel încât:

a) Seria este absolut convergentă pe intervalul (deschis) $(-\rho, \rho)$

b) Pentru orice x cu proprietatea $|x| > \rho$ seria este divergentă

c) Pentru orice număr r cu proprietatea $0 < r < \rho$ Seria este absolut și uniform convergentă pe intervalul (închis) $[-r, r]$



OBS: Dacă $0 < \rho < +\infty$, intervalul $(-\rho, \rho)$ se numește interval de convergență. Teorema I a lui Abel nu spune nimic despre natura seriei numerice obținute pentru $x = \rho$ sau $x = -\rho$ (extremitățile intervalului de convergență)

COM: Este posibil ca unul sau ambele puncte să fie puncte de divergență sau ambele puncte să fie puncte de convergență sau seria să fie oscilantă în aceste puncte.

Putem formula și următorul rezultat:

- Dacă seria este AC în unul dintre punctele $x = +\rho$ sau $x = -\rho$, atunci este AC și în celălalt punct. (Seria modulelor în $x = \rho$ sau $x = -\rho$ este aceeași).

- Mai rezultă că dacă în unul dintre puncte dintre punctele ρ sau $-\rho$ seria este divergentă, atunci în celălalt punct seria nu este AC (poate fi divergentă sau SC)

Teorema I a lui Abel este o teoremă de existență $\longrightarrow$ dar nu oferă și o metodă de calcul a razei de convergență.

$\downarrow$

Teorema lui Cauchy-Hadamard

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ și ρ raza sa de convergență {T. Abel}

notăm cu $w = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Atunci

$\rho = \frac{1}{w}$ dacă $0 < w < +\infty$ și $\rho = +\infty \Rightarrow w = 0$

OBS: Pentru calculul razei de convergență se poate folosi și rezultatul următor:

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ o serie de puteri. Dacă șirul $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ are limită (finită sau infinită) atunci

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Dacă ținem seamă de criteriul raportului pentru șiruri de numere pozitive, atunci rezultă că $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $(a_n > 0)$ atunci

există și $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ și sunt egale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{l}}$$

OBS: Dacă la intervalul de convergență

$I = (-\rho, \rho)$ se adaugă punctele $x = -\rho$ sau $x = \rho$ sau ambele, în care seria este convergentă, se obține mulțimea de convergență a seriei de puteri care poate fi: $E = (-\rho, \rho)$, $E = (-\rho, \rho]$, $E = [-\rho, \rho)$, $E = [-\rho, \rho]$

Herlitz

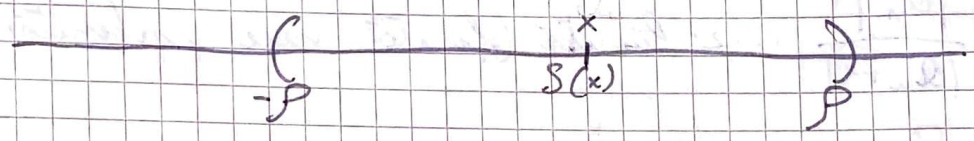
Proprietățile sumei seriilor de puteri

T. 1) Suma unei serii de puteri este o funcție continuă pe intervalul său de convergență

Teorema nu afirmă nimic despre continuitatea sumei seriei de puteri în punctele $x=-\rho$ sau $x=\rho$ sau ambele, dacă seria este convergentă și în aceste puncte.

Acest rezultat este dat de Teorema II al lui Abel.

↳ Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ serie de puteri și ρ = raza de convergență. Dacă seria este convergentă în punctul ρ (sau $-\rho$) atunci suma $S(x)$ a seriei este o funcție continuă la stânga $x=\rho$ (dreapta cu $x=-\rho$).



- $x=\rho$ punct de conv. $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to \rho \\ x<\rho}} S(x) = S(\rho)$

- $x=-\rho$ punct de conv $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -\rho \\ x>-\rho}} S(x) = S(-\rho)$

Teorema de Derivabilitate

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ este o serie de puteri și ρ raza sa de convergență, atunci:

a) Seria derivatelor de ordinul k are aceeași rază de convergență ρ

b) Suma $S(x)$ a seriei inițiale este infinit derivabilă pe intervalul de convergență și derivata sa de ordinul k, $(S(x))^{(k)}$ este egală cu suma seriei derivate de ordinul k, $\forall k \geq 1$