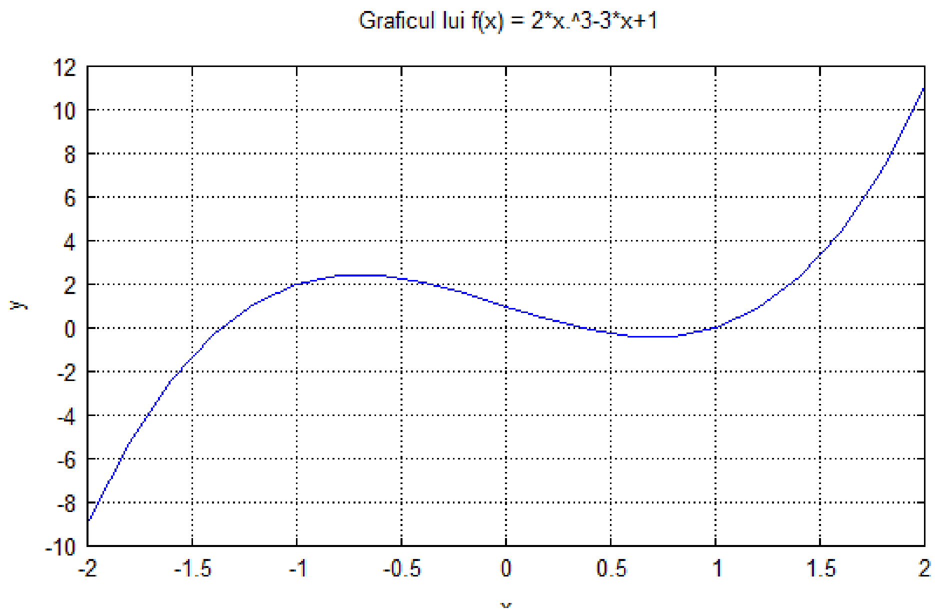
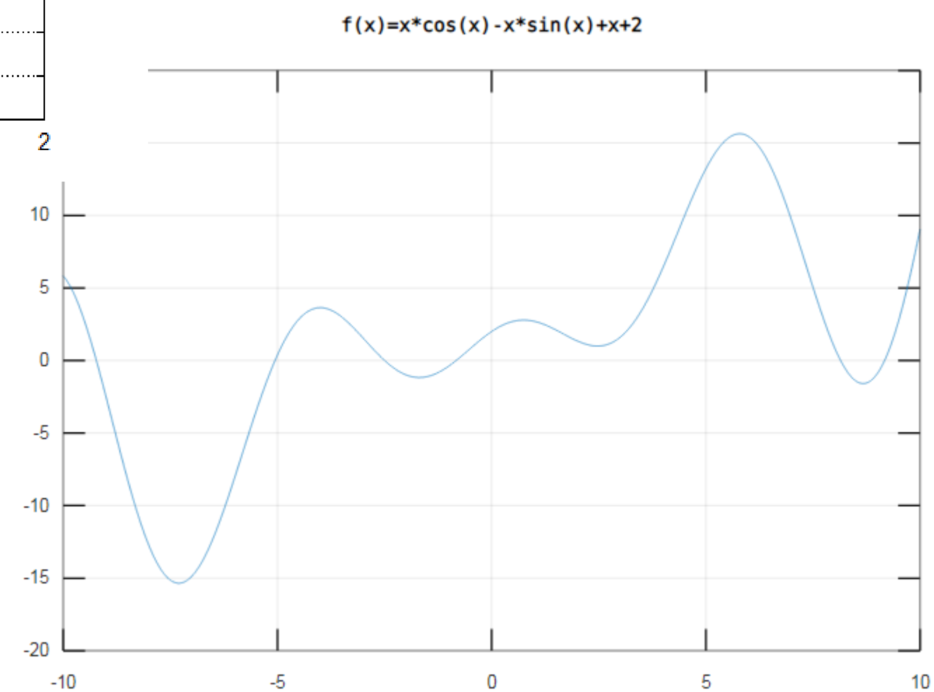
Rezolvarea ecuatiilor neliniare

Rezolvarea ecuatiilor neliniare

- Fie f o functie continua de o variabila reala x.
- Sa se determine radacinile ecuatiei f(x)=0.
- Metode numerice
  - Bisectiei
  - Tangentei
  - Secantei

Metoda grafica





Metoda bisectiei (metoda injumatatirii intervalului)

- Fie f o functie continua de o variabila reala x.
- Vrem sa determinam radacinile ecuatiei f(x)=0.
- Gasim doua valori a si b numere reale astfel incat

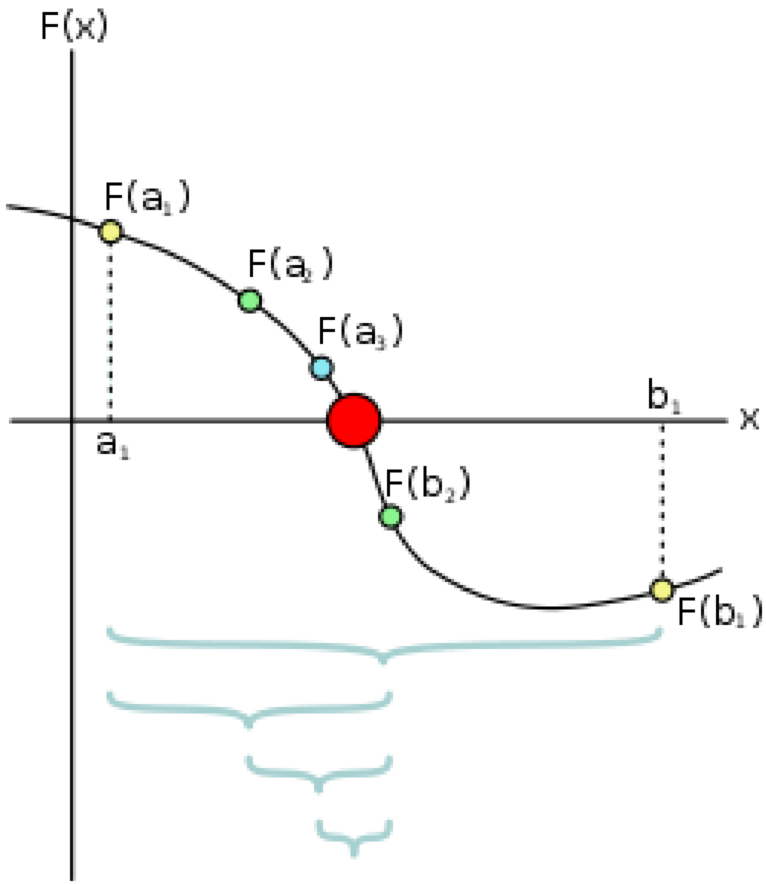
$$f(a)f(b) < 0$$

- Adica f are semne contrare in cele doua puncte.

- Deoarece f este continua pe [a, b] inseamna ca

$$\exists c \in (a, b) \text{ astfel incat } f(c) = 0$$

- Deci exista o radacina a lui f in (a,b).
- Vrem sa gasim aceasta solutie.



Sursa: Wikimedia Commons

- Micsoram intervalul de cautare prin considerarea mijlocului intervalului

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

- Daca $f(x_m) = 0$ atunci am gasit solutia.
- Daca nu, atunci $f(x_m) > 0 \; sau < 0$
- deci

$$f(x_m)f(a) < 0 \;\; sau \; f(x_m)f(b) < 0$$

- Daca $$f(x_m)f(a) < 0$$

Inseamna ca radacina se afla in (a, x_m)

Daca $$f(x_m)f(b) < 0$$

Inseamna ca radacina se afla in (x_m, b)

- Procedeul se repeta pana cand se obtine o valoare care aproximeaza bine solutia.
- Criteriu de oprire:

$$f(x_m)$$

sa fie suficient de mic (suficient de aproape de 0).

$$\left| f(x_m) \right| \leq \varepsilon$$

unde ε este precizat inainte de rularea algoritmului

Algoritm

- Notam (l,u) intervalul in care se cauta solutia
- Pas 1. l=a, u=b
- Pas 2. xm=(l+u)/2
- Pas 3. Daca |f(xm)|<=ε atunci solutia este xm si stop. Altfel mergi la Pas 4.
- Pas 4. Daca f(xm)f(l) <0 atunci u=xm
- altfel l=xm
- Pas 5. Mergi la Pas 2.

Algoritm -pseudocod

- Notam (l,u) intervalul in care se cauta solutia. f(l)*f(u)<0
- l=a, u=b, i=0
- xm=(l+u)/2
- while |f(xm)|>ε
- if f(xm)f(l) <0 then u=xm // solutia se gaseste in intervalul [l, xm]
- else l=xm // solutia se gaseste in intervalul [xm, u]
- endif
- i=i+1
- xm=(l+u)/2
- endwhile
- Solutia este xm.
- Numarul de iteratii este i.

Exercitiu

- Sa se determine o radacina a functiei $f(x) = 0$

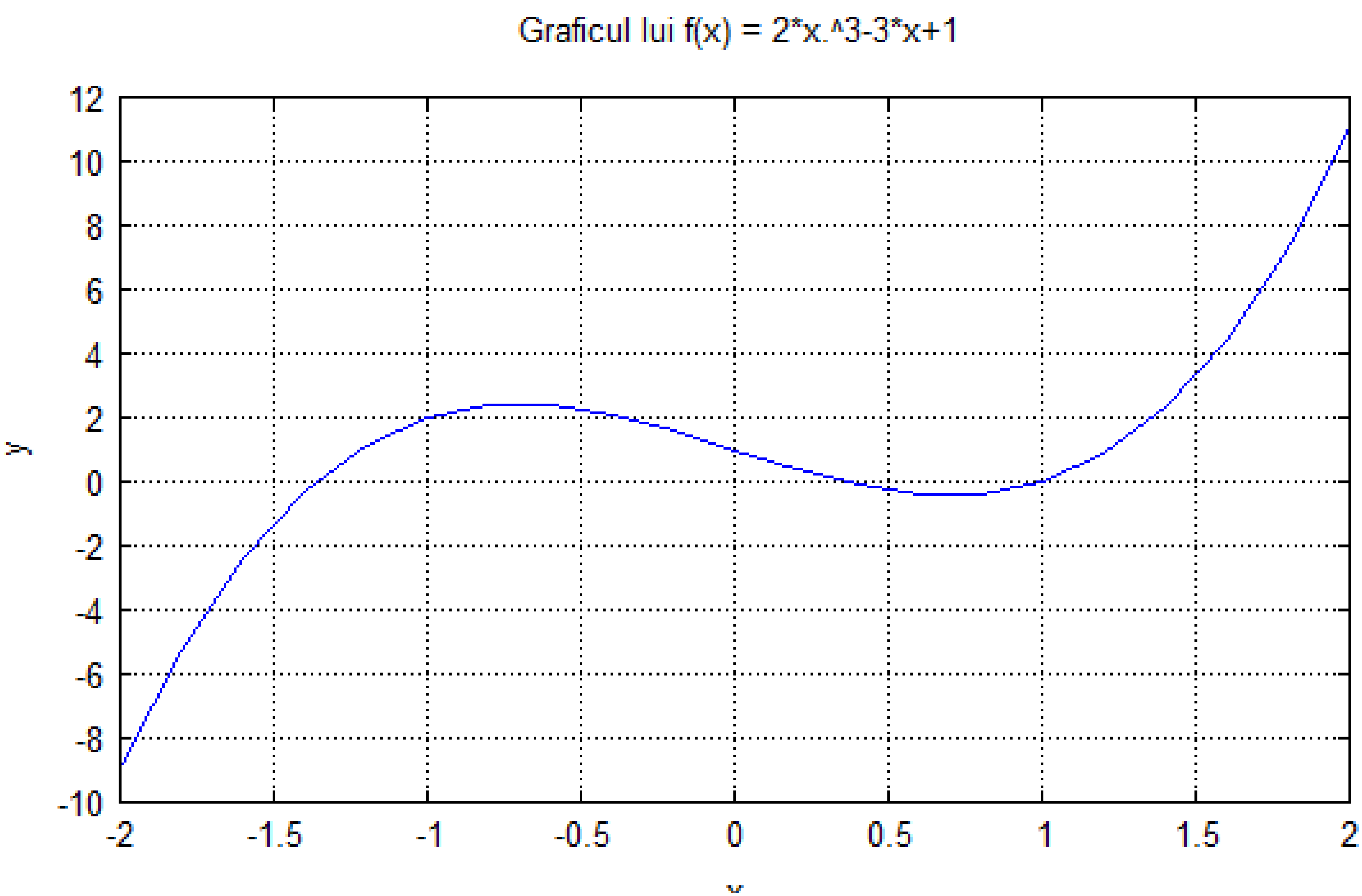
pentru

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 1$$

si ε=0.005.

Trebuie sa gasim a si b astfel incat f(a) si f(b) sa aiba semne contrare.

Apelam la metoda grafica.


Graficul lui f(x) = 2*x.^3-3*x+1
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
y
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

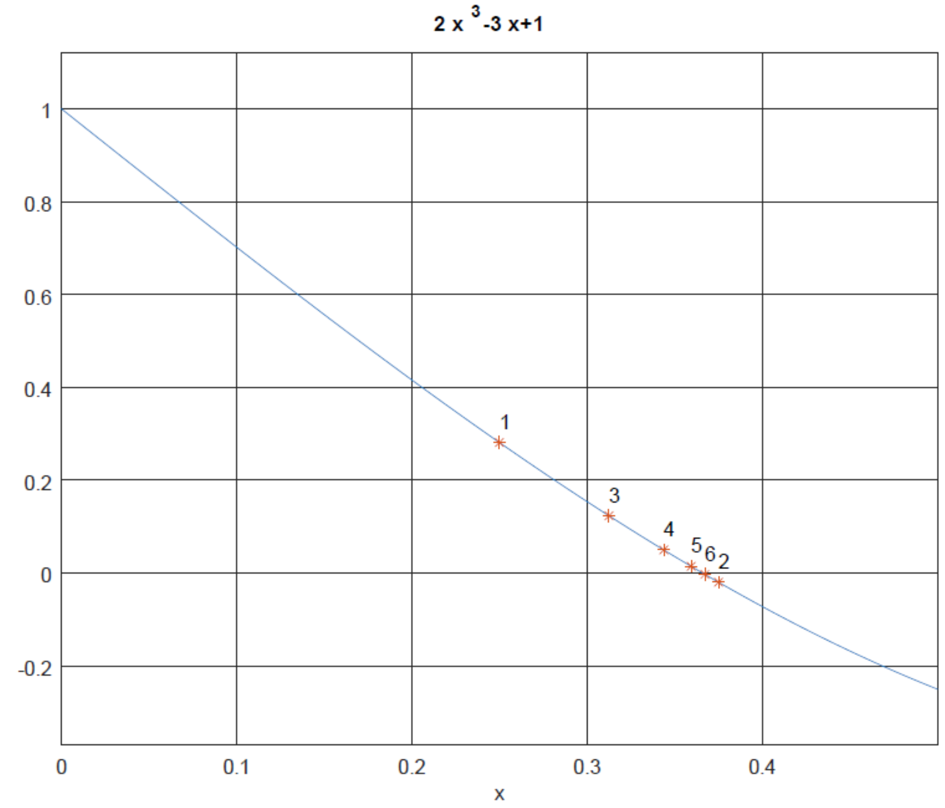
- Toate radacinile sunt in (-2, 2)
- - una in (-1.5, -1)
- -una in (0, 0.5)
- -o rad este 1.
- Vrem sa gasim radacina din intervalul (0, 0.5).

- a=0, b=0.5, ε=0.005
- f(a)=1, f(b) = -0.25
-

i	l f(l) >0	u f(u)<0	xm	f(xm)	|f(xm)| <=ε
0	0	0.5	0.25	0.2812	nu
1	0.25	0.5	0.375	-0.0195	nu
2	0.25	0.375	0.3125	0.1235	nu
3	0.3125	0.375	0.3438	0.05	nu
4	0.3438	0.375	0.3594	0.0147	nu
5	0.3594	0.375	**0.3672**	-0.0025	da

Reprezentare grafica a punctelor obtinute

- x=[0.25000;
-   0.37500;
-   0.31250;
-   0.34380;
-   0.35940;
-   0.36720]
- f=inline('2*x.^3-3*x+1', 'x')
- ezplot(f,[0,0.5])
- grid on
- hold on
- labels=cellstr(num2str([1:6]'))
- plot(x,f(x),'*')
- text(x,f(x)+0.05,labels)



Convergenta metodei

- Fie h_i lungimea intervalului in care se face cautarea dupa iteratia i.

$$h_0 = b - a$$

- Atunci $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$, pt orice i
- Deci
- $$h_{i+1} = \frac{h_i}{2} = \frac{h_{i-1}}{2^2} = \dots = \frac{h_0}{2^{i+1}}$$
- $h_i \to 0$ cand $i \to \infty$

Observatii

- Metoda nu gaseste solutii multiple.
- Metoda gaseste o singura radacina
- Se aplica numai pentru radacini reale.
- In algoritm este bine ca semnele f(a) si f(b) sa se pastreze in niste variabile.
- Pentru a fi siguri ca algoritmul se opreste, este bine sa punem conditia ca nr de iteratii sa fie limitat de un nr maxim.

- Se poate modifica algoritmul,
- if f(xm)f(l) <0 then u=xm
- else l=xm
- endif
- in
- if sign(f(xm))≠sign(f(l)) then u=xm
- else l=xm
- endif

Algoritm

- l=a, u=b, i=0. MAX = nr maxim de iteratii
- xm=(l+u)/2
- while i<=MAX and|f(xm)|>ε
-         if f(xm)f(l)<0 then u=xm
-                         else l=xm
-         endif
-         i=i+1
-         xm=(l+u)/2
- endwhile
- if |f(xm)|<=ε then solutia este xm
-                         else write ‘ nr maxim de iteratii depasit’

Metoda lui Newton-Raphson (metoda tangentei)

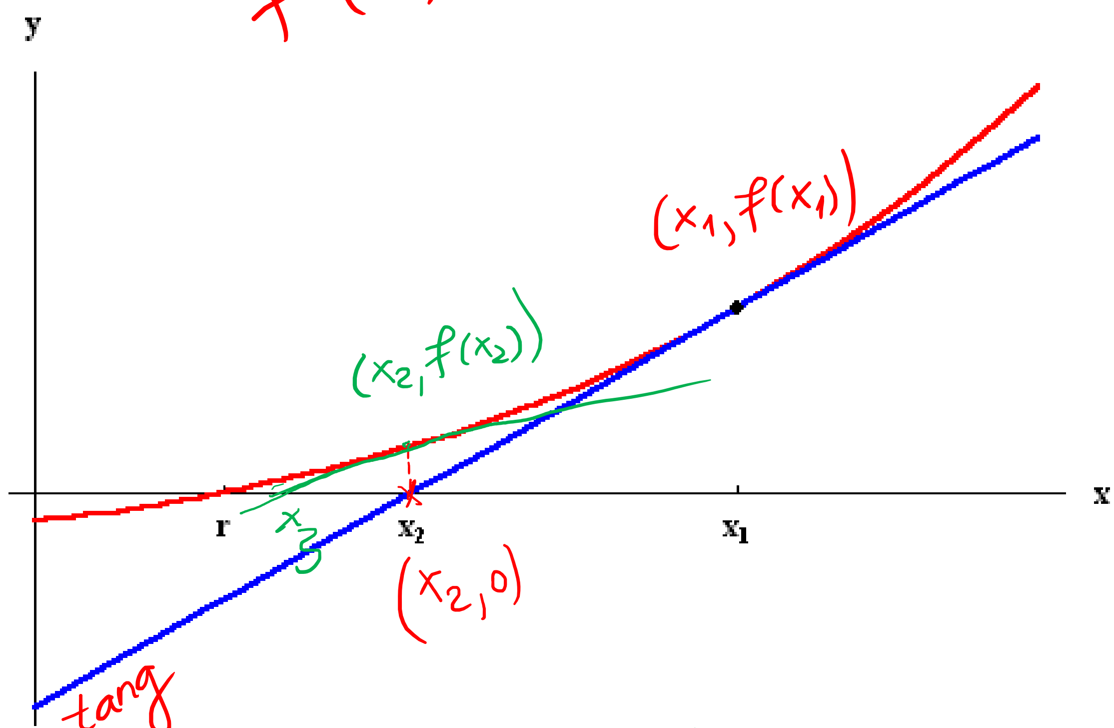
- Se da o functie reala diferentiabila.
- Vrem sa determinam o radacina a ecuatiei f(x)=0, deci sa gasim

$$r \quad astfel\ incat\ f(r) = 0$$

- Vom construi un sir de valori reale

$$\{x_n\} \quad astfel\ incat \quad x_n \to r$$

$f'(r) = \text{panta tangentei}$

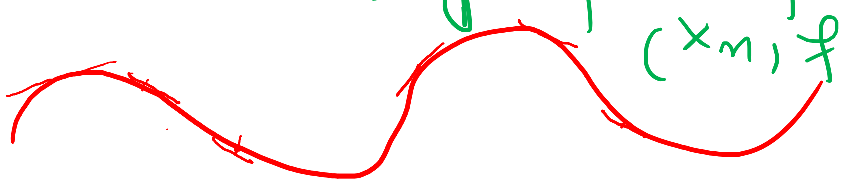


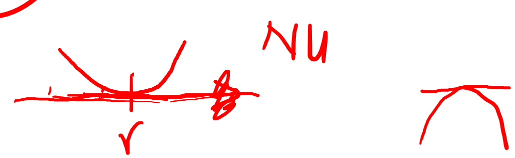
Presupunem f'(r)!= 0

→ tang la graficul lui f intersectează axa Ox într-un punct.

- Consideram x_1 un punct suficient de aproape de r pt care f' nu este zero.
- Construim tangenta la $(x_1, f(x_1))$.
- Fie x_2 intersectia tangentei cu axa Ox.
- x_2 este mai aproape de r decat x_1

x_{n+1} = intersecția tang la graficul f în $(x_n, f(x_n))$.





NU.

- In acelasi mod, construim tangenta la $(x_2, f(x_2))$.
- Fie x_3 intersectia tangentei cu axa Ox.
- x_3 este mai aproape de r decat $x_{2.}$
- Se construieste astfel sirul $\{x_n\}$.
- Se poate demonstra ca sirul astfel obtinut

$$\{x_n\} \quad astfel\ incat \quad x_n \to r$$

- Ecuatia tangentei la (x_1, f(x_1)).
- $$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

$$m = f'(x_1)$$

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$$

- x2 este intersectia tangentei cu Ox, deci setam y=0 si obtinem

$$f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0$$

$$x - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- La fel se gasesc si ceilalti termeni ai sirului

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Exercitiu

- Sa se determine o radacina a functiei

$$f(x) = 0$$

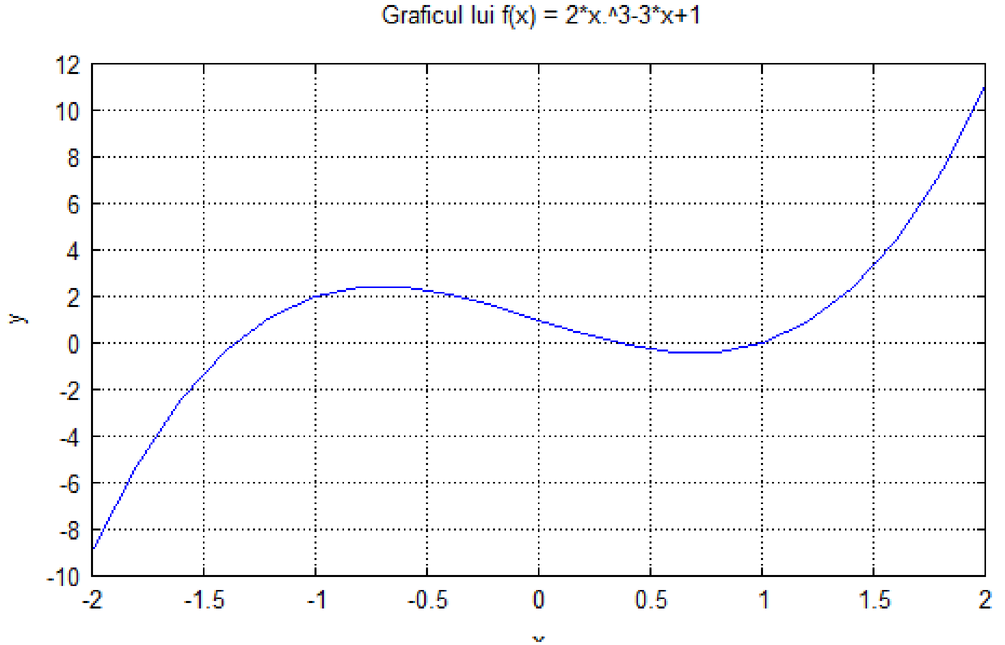
$$f(x) = 2x^3 - 3x + 1$$

Reprezentand grafic functia in intervalul [-2, 2], alegem

pentru a determina solutia

$$x_1 = 0$$

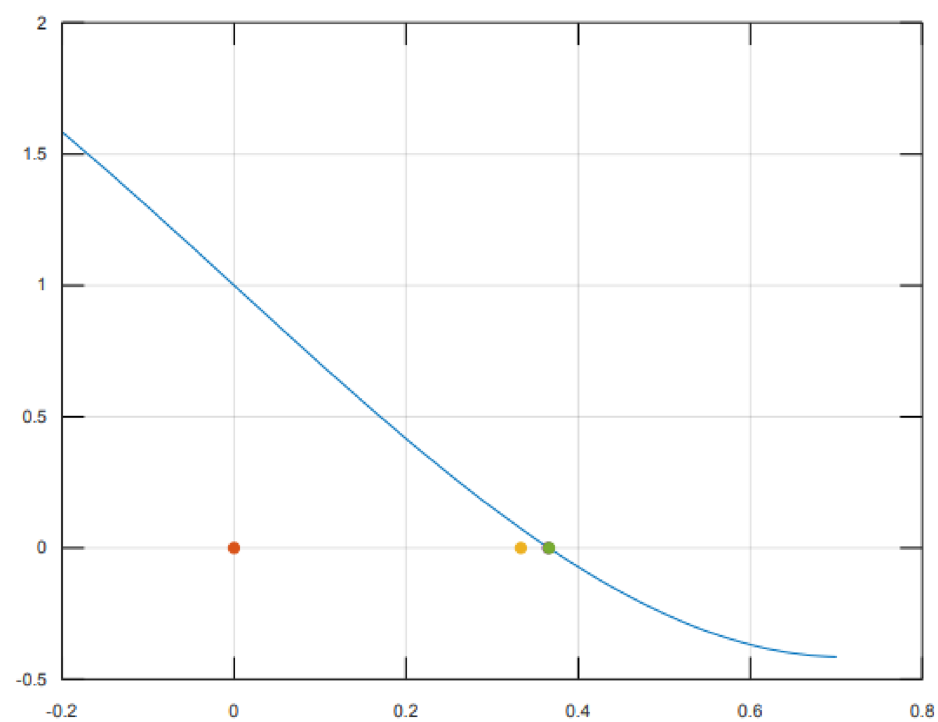
din intervalul (0,0.5).



Calculam derivata

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

i	X(i)	|x(i)-x(i-1)|	f(x)	f'(x)
1	0		1	-3
2	0.33333	0.33333	0.0741	-2.333
3	0.36508	0.031746	0.0021	-2.2003
4	0.36602	0.00094515	**1.9584e-6**	-2.1962
5	0.36603	0.00000089176	1.7464e-12	



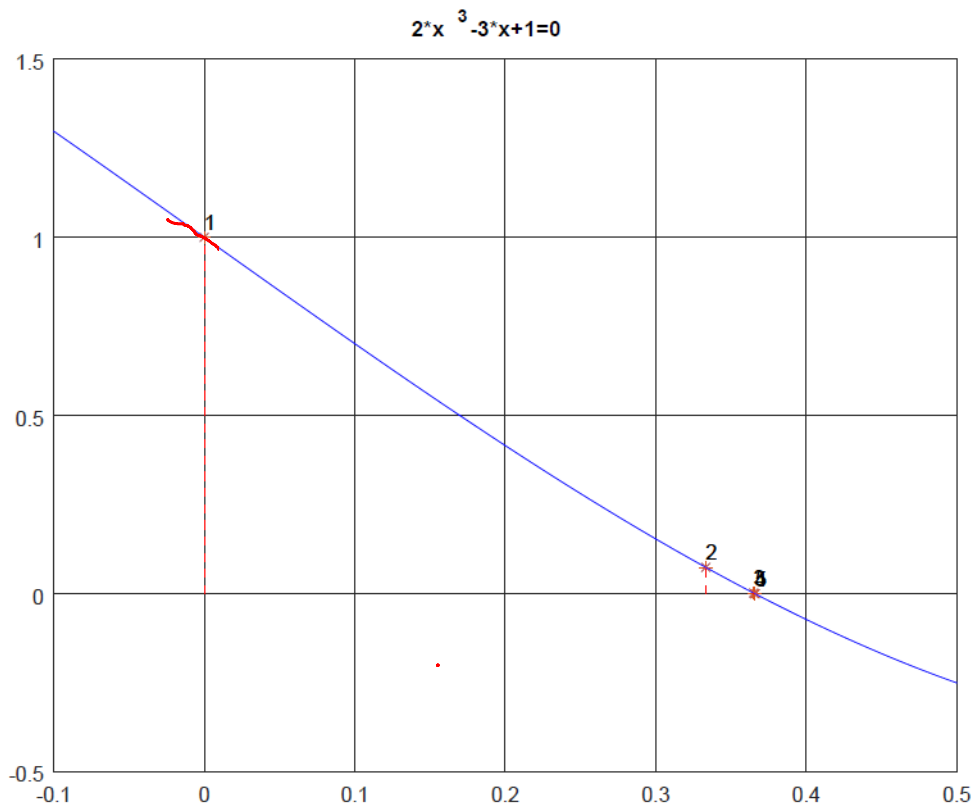

```
octave:46> x
x =

   0.00000    0.33333    0.36508    0.36602
```

Reprezentare grafica a punctelor obtinute

- x=[0;
- 0.33333;
- 0.36508;
- 0.36602;
- 0.36603]

- f=inline('2*x.^3-3*x+1', 'x');
- t=[-0.1:0.001:0.5];
-
- labels=cellstr(num2str([1:5]’))
- plot(x,f(x),'*', t, f(t),'b')
- hold on
- for i=1:3
- a=[x(i) x(i)];
- b=[0 f(x(i))];
- plot(a,b,'r--')
- end
- text(x,f(x)+0.05,labels)
- grid on
- title('2*x^3-3*x+1=0')



- Cand ne oprim?
- X_{n+1} este foarte apropiat de x_n cand $|f(x_n)|$ este f. mic, deci putem una din conditiile de oprire:

$$| f(x_n) | \leq \varepsilon, \varepsilon \quad dat$$

$$sau$$

$$| x_{n+1} - x_n | \leq \varepsilon, \varepsilon \quad dat$$

$$sau$$

$$| x_{n+1} - x_n | \leq \varepsilon |x_n|$$

Algoritm

- Se dau x1, epsilon si MAX= nr maxim de iteratii
- i=1
- do
- x(i+1)=x(i)-f(x(i))/f'(x(i))
- i=i+1
- while |x(i)-x(i-1)|> epsilon and i<=MAX
- If i<=MAX then write 'solutia este x(i)'
- else write 'Nr maxim de iteratii este depasit'

  write 'solutia este x(i)'

  endif

|x(i)-x(i-1)|> epsilon   se poate inlocui cu |f(x(i))|>epsilon
sau cu |x(i)-x(i-1)|> epsilon*|x(i-1)|

Exercitiu

- Aproximati $\sqrt{5}$ pentru epsilon=10^(-12) cu |f(x(i))|>epsilon.
- folosind metoda lui Newton-Raphson.
- Rezolvare:
- Consideram functia

$$f(x) = x^2 - 5$$

- Stim ca o valoare apropiata este 2. Luam x1=2.

i	x	f(x)	f’(x)
1	2	-1	4
2	2.25	0.0625	4.5
3	2.2361111111	1.9290e-4	4.4722
4	2.2360679779	1.8605e-9	4.4721
5	2.2360679775	**8.8818e-16**	4.4721

8.8818e-16<e-12

- https://www.intmath.com/applications-differentiation/newtons-method-interactive.php

Convergenta metodei

- Notam $e_i = r - x_i$ eroare dupa a i-a iteratie.
- Putem aproxima, folosind polinomul lui Taylor

$$f(x) \approx f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) + \tfrac{1}{2}(x - x_i)^2 f''(x_i)$$

$$0 \approx f(x_i) + (r - x_i) f'(x_i) + \tfrac{1}{2}(r - x_i)^2 f''(x_i)$$

$$0 \approx f(x_i) + e_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2} e_i^{\,2} f''(x_i)$$

$$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \approx e_i + \tfrac{1}{2} e_i^{\,2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} - x_i \approx e_i + \tfrac{1}{2} e_i^{\ 2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$e_{i+1} \approx -\tfrac{1}{2} e_i^{\ 2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$| e_{i+1} | \approx \tfrac{1}{2} | e_i |^2 \left| \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \right|$$

Ultima ecuatie indica faptul ca eroare la iteratia i este proportionala cu patratul erorii la iteratia anterioara.
Spunem ca sirul iterativ obtinut prin metoda lui Newton-Raphson are ordinul de convergenta patratica.
Metoda Newton-Raphson este o metoda rapida.

- In general, spunem ca un sir $\{x_k\}$ care converge la x^* are ordinul de convergenta p daca limita de mai jos exista si este finita

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}$$

- Cu cat p este mai mare cu atat sirul converge mai rapid.

Teorema Newton-Raphson

- Daca f este diferentiabila de ordin 2 si cu derivata de ordin 2 continua pe [a,b] si are o radacina r in [a,b] si f’(r)≠ 0, atunci exista ∂>0 astfel incat
- sirul

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_n \to r$$

- Este convergent si

  pentru orice $x_1\ in\ [\,r - \partial, r + \partial]$ equation here.

Observatii

- Metoda necesita cunoasterea derivatei functiei intr-un punct.
- Metoda este rapida in general dar poate fi lenta daca valoarea initiala x1 este f. departe de radacina.
- Exista o teorema care spune ca o alegere buna a lui x1 este cand $f(x1)f''(x1)>0$.
- In general, metoda este convergenta, dar, daca valoarea initiala (x1) este prea departe de radacina sau daca derivata $f'(x1)$ este aproape de zero, e posibil ca metoda sa nu fie convergenta.

Alegerea valorilor initiale poate duce la non-convergenta

- http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/RootFinding/NewtonMethod/Newtondd.html f(x)=x^3-x+3 cu x1=0;
- http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/RootFinding/NewtonMethod/Newtonee.html f(x)=x*exp(-x) cu x1=2;
- http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/RootFinding/NewtonMethod/Newtonff.html f(x)=arctan(x) cu x1=1.4

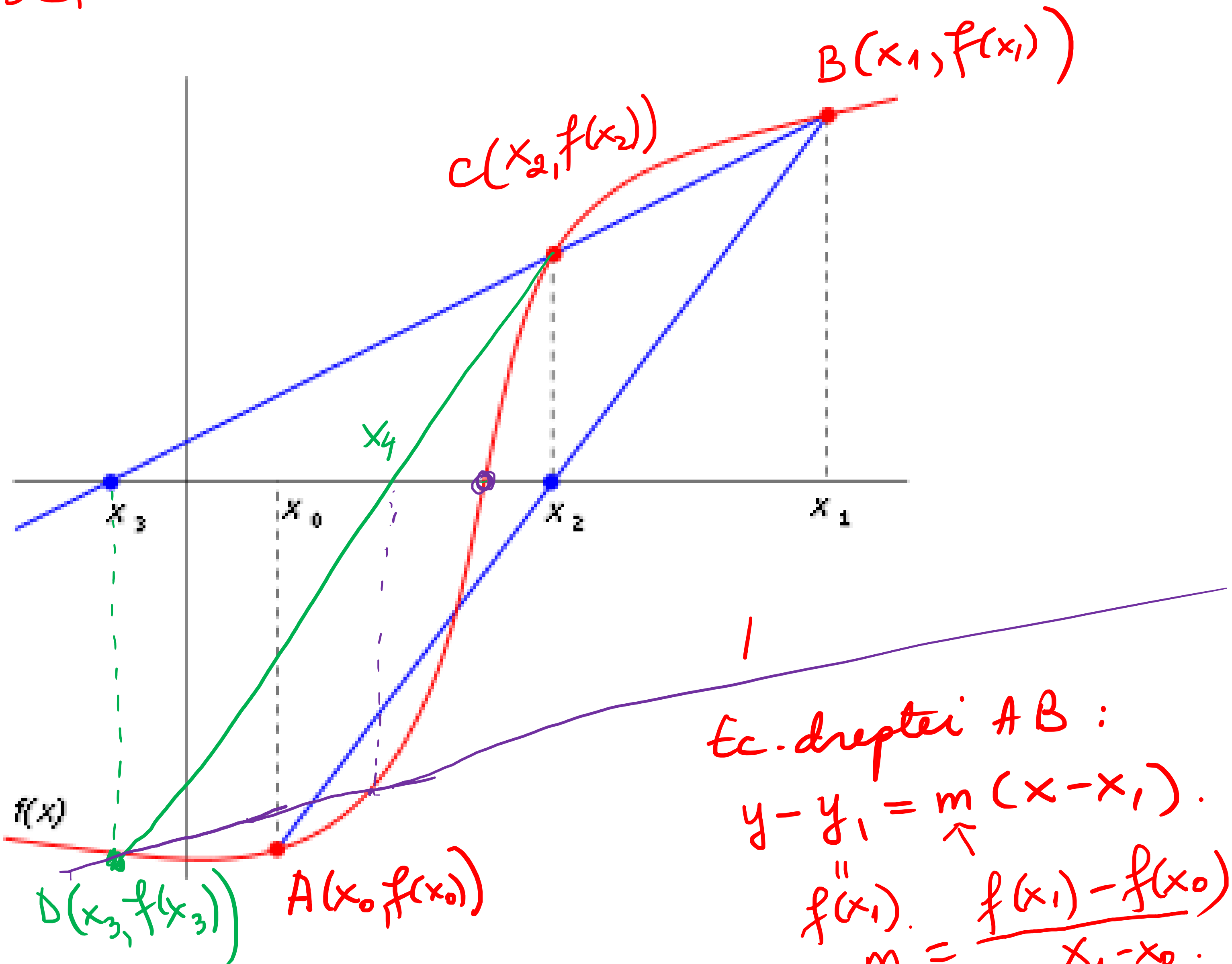
Metoda secantei

- Se da f functie infinit derivabila. Vrem sa determinam r astfel incat f(r)=0.
- Ideea acestei metode este sa se inlocuiasca functia f nu cu tangenta ci cu o dreapta care trece prin doua puncte de pe grafic.

$(x_2, 0) = AB \cap Ox$

$(x_3, 0) = BC \cap Ox$.

x_0, x_1 valori inițiale



Ec. dreptei AB:

$y - y_1 = m(x - x_1)$.

$m = f'(x_1)$.

$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$\Rightarrow$

$0 - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$

$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{m}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{m} \Rightarrow$

- Se incepe cu doua valori initiale x_0 si x_1.
- Se construieste secanta (coarda)

- Se procedeaza la fel in continuare si se defineste sirul

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

met. tang: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Algoritm

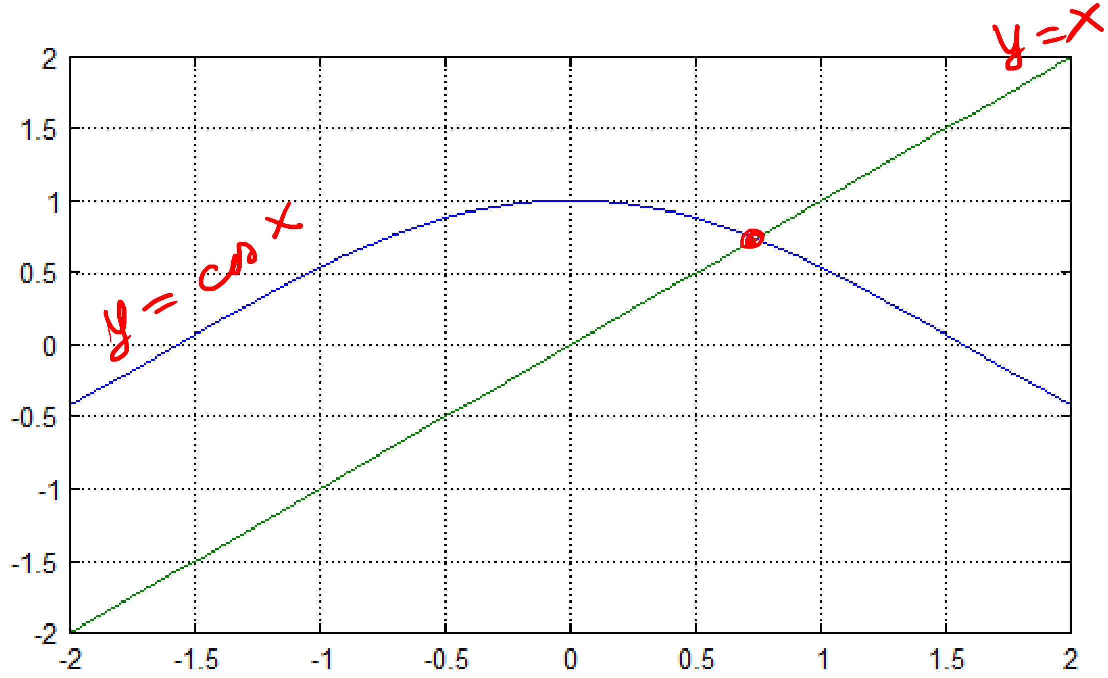
- Se dau x1, x2, epsilon si MAX= nr maxim de iteratii
- x(1)=x1, x(2)=x2, i=2
- while |f(x(i))|> epsilon and i<=MAX
-     x(i+1)=x(i)-f(x(i))*(x(i)-x(i-1))/(f(x(i))-f(x(i-1)))
-     i=i+1
- endwhile
- If i<=MAX then write 'solutia este x(i)'
-     else write 'solutia gasita este x(i)'
-     write ' Nr maxim de iteratii este depasit'
- endif

Exercitiu

- Gasiti o solutie a ecuatiei f(x)=0

  pentru f(x)=cos(x)-x

  Alegeti x0=0.5 si x1=pi/4=0.785398 si eps=0.000005=5e-6 cu |f(x(i))|<eps



<table>
<tr><th>i</th><th>xi</th><th>x(i)-x(i-1)</th><th>f(xi)</th><th>f(X(i))-f(x(i-1))</th><th>|f(xi)|<=eps</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0.5</td><td></td><td>0.377582</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>pi/4=0.785398</td><td>0.285398</td><td>-0.078291</td><td>-0.455873</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.736384</td><td>-0.049014</td><td>0.0045177</td><td>0.0828091</td><td>nu</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.739058</td><td>0.002674</td><td>4.51772e-5</td><td>-0.004472</td><td>nu</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.739085</td><td>2.7e-5</td><td>-2.6982e-8</td><td>-4.5204e-5</td><td>da</td></tr>
</table>

Convergenta metodei

- Se poate arata ca sirul $\{x_n\}$ converge la solutia r si ca ordinul de convergenta este numarul de aur

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 < 2$$

- Metoda secantei este mai lenta decat metoda lui Newton.
- Ca si in cazul metodei tangentei, convergenta este locala, deci este asigurata in cazul in care valorile initiale sunt alese suficient de aproape de sol.
- http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/n2003/SecantMethodMod.html - exemple de probl si exercitii

Alegerea metodei

- Metoda grafica poate fi folosita pentru determinarea valorilor aproximative ale solutiilor ecuatiei $f(x)=0$, dar nu are atat de multa acuratete ca celelalte metode.
- Poate in schimb fi folosita pentru determinarea valorilor initiale necesare celorlalte metode.

Alegerea metodei-continuare

- Metoda bisectiei, desi lenta, gaseste intotdeauna o solutie. Daca f(x) poate fi determinata usor atunci aceasta metoda este recomandata.
- Daca f este continua cu derivate continue, metoda lui Newton este o metoda care determina eficient o solutie. Dar este posibil ca aceasta sa nu convearga daca f' este aproape nula sau punctul initial nu este suficient de aproape de solutie.
- Cand evaluarea lui f' este dificila este recomandata folosirea metodei secantei.

Tema 1

1. Sa se determine o solutie a ecuatiei f(x)=0 unde $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ folosind metodalui Newton cu valorea initiala x0=-0.2 si apoi pentru x0=-0.3 si epsilon=0.0001.
2. Sa se determine o solutie a ecuatiei f(x)=0 unde$f(x) = 8x^3 + x^2 + 8x - 3$ folosind metoda secantei cu 0.0 si 0.6 valori initiale si epsilon=0.001.

Tema 1-continuare

3. Sa se determine o solutie a ecuatiei f(x)=0 unde$f(x) = x^3 - 4x + 2$ folosind metoda bisectiei cu valorile initiale a=0, b=1 epsilon=0.0001.
4. Se da functia de la exercitiul 3. Daca x1=1, cat este x2 din metoda lui Newton-Raphson?
5. Se da functia de la exercitiul 3. Daca x0=0 si x1=1, cat sunt x2 si x3 din metoda secantei?