

একটা খুব ইন্ট্রেস্টিং প্রব্লেম নিয়ে আলোচনা করা যাক । ধরা যাক তোমাকে কিছু Value এবং তাঁদের Weight দেওয়া আছে । বলা হলো এমন k সংখ্যক value নিতে হবে যেন তাঁদের Average ম্যাক্সিমাম হয় । গাণিতিকভাবে জিনিসটাকে লিখা যায় এভাবেঃ

$$\frac{\sum_{j=1}^k v_{i_j}}{\sum_{j=1}^k w_{i_j}} = A$$

আমাকে এমন k সংখ্যক (v,w) জোড় সিলেক্ট করতে হবে যেন A সর্বোচ্চ হয় । এখন n সংখ্যক (v,w) জোড়ের এভারেজ 0 থেকে শুরু করে v এর সর্বোচ্চ সম্ভাব্য মান পর্যন্ত যেকোন মান হতে পারে । একটা এভারেজ ভ্যালু R চিন্তা করে নেই । মনে করি আমাদের নির্ণেয় এভারেজ A এই R এর সমান বা বড় , $A \geq R$ । কাজেই,

$$\frac{\sum_{j=1}^k v_{i_j}}{\sum_{j=1}^k w_{i_j}} \geq R \text{ ----- (i)}$$

যদি আমার ধরে নেওয়া R , k সংখ্যক জোড় নিয়ে গঠিত এভারেজের সম্ভব সবচেয়ে বড় মানের চেয়ে বড় হয়ে যায় তবে R কে কমাব , আর যদি সম্ভব মান পেয়ে যাই তাহলে R কে আরেকটু বাড়ায় দিয়ে চেক করব । এই কাজটা একটু বুদ্ধি খাটায়ে করব আমরা । নীচে দেখ (I) কে লিখা যায় এভাবেঃ

$$\frac{\sum_{j=1}^k v_{i_j}}{\sum_{j=1}^k w_{i_j}} \geq R$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^k v_{i_j} - R * \sum_{j=1}^k w_{i_j} \geq 0 \text{ ----- (ii)}$$

এবার (ii) নং কে খাতায় বিশ্লেষণ করে দেখত ব্যাপারটা এমন আসে না ?

$$\Rightarrow (v_{i_1} - R * w_{i_1}) + (v_{i_2} - R * w_{i_2}) + \dots + (v_{i_k} - R * w_{i_k}) \geq 0 \text{ ----- (iii)}$$

তাহলে প্রতিটা $(v_{i_j} - R * w_{i_j})$ এর মান আমরা যত বড় করতে পারব ততই লাভ । অর্থাৎ আমরা (v,w) এর এমন সব জোড় নিব যেন $(v_{i_j} - R * w_{i_j})$ এর মান যতটা সম্ভব বড় হয়ে যায় । এ কথাটাকে এভাবে বলা যায় যে আমরা প্রথম k সংখ্যক (v,w) জোড় নিব $(v_{i_j} - R * w_{i_j})$ এর মানের বড় হওয়ার ভিত্তিতে । তাই আমরা (v,w) কে $(v_{i_j} - R * w_{i_j})$ এর মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে নিব ।

এবার প্রথম k সংখ্যক (v,w) জোড় নিয়ে (ii) নং চেক করব । যদি দেখি (ii) নং সত্য হচ্ছে , তাঁর মানে R এর এই মান গ্রহণযোগ্য । কিন্তু তাঁর মানে এই না যে এটাই R এর সেই সর্বোচ্চ মান । তাই আমরা R কে আবারও আরেকটু বাড়িয়ে দিয়ে একই প্রসেসে চেক করব ।

যদি (ii) নং সত্য না হয় , তাঁর মানে হলো R এর এই মান গ্রহণযোগ্য নয় । অর্থাৎ R এর মান আমরা এতই বড় নিয়ে ফেলেছি যে k সংখ্যক (v,w) জোড়ের এভারেজ কোনভাবেই সেখানে পৌছাতে পারবে না । তাই আমরা R কে একটু ছোট করে দিব , এরপর আবার উপরের প্রসেসে চেক করব ।

লক্ষ্য কর আমরা শর্তের ভিত্তিতে R এর মান কখনো বাড়ায়ে দিচ্ছি , কখনও কমায়ে দিচ্ছি । এবং R এর মানটা আমরা ০ থেকে শুরু করে “সম্ভাব্য সর্বোচ্চ এভারেজের(?)” মধ্যে থেকে নিচ্ছি । ০ থেকে শুরু করে এইসে সম্ভাব্য সর্বোচ্চ এভারেজ , এটা একটা স্টেড লিস্ট না ? যেমন ধরা যাক , আমার সম্ভাব্য সর্বোচ্চ এভারেজ হচ্ছে ১০ । তাহলে ০ থেকে ১০ পর্যন্ত সংখ্যাগুলো কী স্টেড না অলরেডি ? ০, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ১০ । কাজেই R এর মানটা আমরা বাইনারী সার্কেলের মত করে কমাতে বাড়াতে পারি । বাকী সব কাজ উপরের বর্ণনার মত করে করলে আমরা সর্বোচ্চ এভারেজটা পেয়ে যাব ।