



PGPS Documentation

Debug 0.0.1

PGPS Development Team

September 15, 2022



PGPS 文档

版本 0.0.1

PGPS 开发团队

2022 年 9 月 15 日

前言

欧几里得的生平已无法考证，只知他约生于公元前 330 年，死于公元前 275 年。他将当时人们所取得的丰富知识，总结成几个原始概念和公理，并用逻辑推理的方法演绎成具有较为完整科学体系的几何学，完成了世界上第一部公理法巨著《几何原本》。也正因如此，欧几里得的名字与几何学成了同义词而流传千古。在几千年后的今天，现代公理化的欧几里得几何被广泛应用于中学教育中，以此锻炼学生的逻辑推理能力和想象力。与大多数人的认知不同，欧式几何其实是个难学的科目，因为欧式几何公理体系本质上是一种非机械化的数学：即使我们熟知了所有的公理，在解决问题时，依然要依靠人类的直觉和经验选择合适的定理求解问题，没有固定的解题步骤。

用固定的程序去解决一类问题，就是**机械化**。计算机出现后，人们尝试使用计算机实现欧式几何机械化，但长久以来该领域受制于**几何证明无定法**和**证明过程不可读**两大难题，进展缓慢。当今人工智能技术的快速发展，为几何问题机械化求解提供了新思路：使用**人工智能模型**模拟人的直觉来指导解题方向和定理的选择，以此解决几何证明无定法难题；设计一套精密且直观的形式化语言，作为计算机与人类沟通的桥梁，以此解决证明过程不可读的问题。在这个新思路中，推理过程涉及三个体系：

第一个体系是面向人类的**公理体系**。从欧几里得的几何原本到现代化公理系统，都称其为公理体系。在这些体系中，几何体的性质、定义和公理等采用自然语言和图像描述，此外代数表达式和一些基本常识也融入其中。人类理解起来这些描述非常轻松，任何一个经过训练的中学生阅读相关描述后都能理解题目所表达的意思；但因为自然语言所具有的模糊性和不确定性，计算机无法按照特定的算法来处理这些描述。于是第二个体系——**形式化体系**出现了。形式化体系是人类与计算机交流的中介，在三个体系中具有最重要的地位，因为其：①需要将公理体系中文字信息和图像信息转化为统一的格式，并且不造成信息损失和歧义。②语句描述要准确，同时要具有固定的语言结构，便于计算机处理。③要具有良好的可读性，以供人类理解和检验推理步骤。最后一个体系是**计算机体系**。在此体系中，几何问题的描述进一步抽象、映射为特定的数据结构，如集合、列表等；几何定理则被抽象成定义在这些数据结构上的数据操作，如增删改查。

此文档要讲述的，便是后两个体系——**平面几何形式化体系和计算机体系的设计原则**。形式化系统的设计是困难的，原因在于：①人类所建立的欧式几何公理体系，通常包含自然语言描述、数学公式和图像，形式化系统需要将其三部分统一成一类结构相似的描述。②欧式几何公理体系千变万化，解题形式多种多样，形式化系统的表示能力要足够强。③形式化系统要面向计算机，这要求其形式要精简，推理过程要精确。④形式化系统要面向人类，这便对其可读性做出了要求。以上四点，在实践中往往相互制约，不能同时达到最优。

在对上述问题研究中，逐渐形成了 PGPS 平面几何问题求解系统。为方便用户使用，编写此文档。

目录

前言	1
一、形式化系统	6
1.1 完备性理论	6
1.2 PGPS 形式化系统	6
1.2.1 几何本体论	6
1.2.2 PGPS 语法及谓词设计	6
1.2.3 图形的文字表示	6
二、推理器实现	6
三、数据集标注	6
2.1 构图	6
图形 Shape(\$)	6
共线 Collinear(\$)	7
2.2 实体	7
点 Point(\$)	7
线 Line(\$)	7
角 Angle(\$)	8
三角形 Triangle(\$)	8
直角三角形 RightTriangle(\$)	8
等腰三角形 IsoscelesTriangle(\$)	9
等边三角形 EquilateralTriangle(\$)	9
多边形 Polygon(\$)	9
2.3 实体属性	10
线长度 Length(Line(\$))	10
角大小 Measure(Angle(\$))	10
三角形面积 Area(Triangle(\$))	11
三角形周长 Perimeter(Triangle(\$))	11
三角形高 Altitude(Triangle(\$))	11
2.4 实体关系	12
中点 Midpoint(Point(\$),Line(\$))	12
相交 Intersect(Point(\$),Line(\$),Line(\$))	12
平行的 Parallel(Line(\$),Line(\$))	13
垂直的 Perpendicular(Point(\$),Line(\$),Line(\$))	13
垂直平分线 PerpendicularBisector(Point(\$),Line(\$),Line(\$))	13
角平分线 Bisector(Line(\$),Angle(\$))	14
中线 Median(Line(\$),Triangle(\$))	14
高 IsAltitude(Line(\$),Triangle(\$))	15
中位线 Neutrality(Line(\$),Triangle(\$))	15
外心 Circumcenter(Point(\$),Triangle(\$))	15
内心 Incenter(Point(\$),Triangle(\$))	16
重心 Centroid(Point(\$),Triangle(\$))	16
垂心 Orthocenter(Point(\$),Triangle(\$))	16
全等三角形 Congruent(Triangle(\$),Triangle(\$))	16

相似三角形 Similar(Triangle(\$),Triangle(\$))	17
镜像全等三角形 MirrorCongruent(Triangle(\$),Triangle(\$))	17
镜像相似三角形 MirrorSimilar(Triangle(\$),Triangle(\$))	18
2.5 代数表达式	18
加 Add(Var1,Var2)	18
减 Sub(Var1,Var2)	18
乘 Mul(Var1,Var2)	19
除 Div(Var1,Var2)	19
幂 Pow(Var1,Var2)	19
Sin Sin(Var)	19
Cos Cos(Var)	19
Tan Tan(Var)	19
实数 R	20
表达式 \$	20
和 Sum(Var1,Var2,...)	20
平均 Average(Var1,Var2,...)	20
相等 Equal(Var1,Var2)	20
2.6 解题目标	20
Find(\$)	20
2.7 定理	21
nous_1_area_addition	21
nous_2_line_addition	21
nous_3_angle_addition	21
nous_4_intersect_extend	21
nous_5_perpendicular_extend	21
nous_6_	21
nous_7_	21
nous_8_	21
nous_9_	21
nous_10_	21
auxiliary_11_	21
auxiliary_12_	21
auxiliary_13_	21
auxiliary_14_	21
auxiliary_15_	21
auxiliary_16_	21
auxiliary_17_	21
auxiliary_18_	22
auxiliary_19_	22
auxiliary_20_	22
theorem_21_triangle_property_angle_sum	22
theorem_22_triangle_property_equal_line_angle	22
theorem_23_pythagorean	22
theorem_24_right_triangle_property_rt	22

theorem_25_right_triangle_property_special_rt	22
theorem_26_pythagorean_inverse	22
theorem_27_right_triangle_judgment	22
theorem_28_isosceles_triangle_property_angle_equal	22
theorem_29_isosceles_triangle_property_side_equal	22
theorem_30_isosceles_triangle_property_line_coincidence	22
theorem_31_isosceles_triangle_judgment_angle_equal	22
theorem_32_isosceles_triangle_judgment_side_equal	22
theorem_33_equilateral_triangle_property_angle_equal	22
theorem_34_equilateral_triangle_property_side_equal	22
theorem_35_equilateral_triangle_judgment_angle_equal	22
theorem_36_equilateral_triangle_judgment_side_equal	23
theorem_37_equilateral_triangle_judgment_isos_and_angle60	23
theorem_38_intersect_property	23
theorem_39_parallel_property	23
theorem_40_parallel_judgment	23
theorem_41_perpendicular_judgment	23
theorem_42_parallel_perpendicular_combination	23
theorem_43_midpoint_judgment	23
theorem_44_perpendicular_bisector_property_distance_equal	23
theorem_45_perpendicular_bisector_judgment	23
theorem_46_bisector_property_line_ratio	23
theorem_47_bisector_property_angle_equal	23
theorem_48_bisector_judgment_angle_equal	23
theorem_49_median_property	23
theorem_50_median_judgment	23
theorem_51_altitude_property	23
theorem_52_altitude_judgment	23
theorem_53_neutrality_property_similar	23
theorem_54_neutrality_property_angle_equal	24
theorem_55_neutrality_property_line_ratio	24
theorem_56_neutrality_judgment	24
theorem_57_circumcenter_property_line_equal	24
theorem_58_circumcenter_property_intersect	24
theorem_59_circumcenter_judgment	24
theorem_60_incenter_property_line_equal	24
theorem_61_incenter_property_intersect	24
theorem_62_incenter_property_judgment	24
theorem_63_centroid_property_line_equal	24
theorem_64_centroid_property_intersect	24
theorem_65_centroid_property_judgment	24
theorem_66_orthocenter_property_line_equal	24
theorem_67_orthocenter_property_intersect	24
theorem_68_orthocenter_property_judgment	24

theorem_69_congruent_property_line_equal	24
theorem_70_congruent_property_angle_equal	24
theorem_71_congruent_property_area_equal.....	24
theorem_72_congruent_judgment_sss	25
theorem_73_congruent_judgment_sas.....	25
theorem_74_congruent_judgment_asa	25
theorem_75_congruent_judgment_aas	25
theorem_76_congruent_judgment_hl	25
theorem_77_similar_property_angle_equal.....	25
theorem_78_similar_property_line_ratio.....	25
theorem_79_similar_property_perimeter_ratio	25
theorem_80_similar_property_area_square_ratio	25
theorem_81_similar_judgment_sss.....	25
theorem_82_similar_judgment_sas	25
theorem_83_similar_judgment_aa.....	25
theorem_84_triangle_perimeter_formula.....	25
theorem_85_triangle_area_formula_common	25
theorem_86_triangle_area_formula_heron	25
theorem_87_triangle_area_formula_sine	25
theorem_88_sine	25
theorem_89_cosine.....	25

一、形式化系统

1.1 完备性理论

1.2 PGPS 形式化系统

1.2.1 几何本体论

1.2.2 PGPS 语法及谓词设计

1.2.3 图形的文字表示

二、推理器原理

三、数据集标注

本章节对 PGPS 系统所有形式化语句的语法规则和标注方法做详细介绍，并配有适量的例题标注以方便读者理解。根据 1.2 节对 PGPS 形式化语言谓词的讨论，把形式化语句分为 6 类，分别是构图语句、实体声明语句、实体属性声明语句、实体关系声明语句、代数表达式定义语句和解题目标声明语句。

2.1 构图

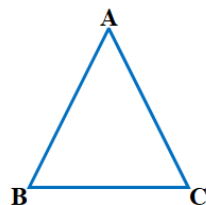
构图语句是最基本的形式化语句。推理器读取构图语句，自动扩展出所有的点、线、角和几何图形，实现 1.2 节中介绍的“拼图法”。

图形 Shape(\$)

►描述：内部无连线、由直线组成的封闭图形定义为 shape。shape 由若干 point 组成，shape 的标注要求按照逆时针按顺序标出所有的点。根据选择的起始 point 不同，一个 shape 可以有多种标注形式，选择一种即可。

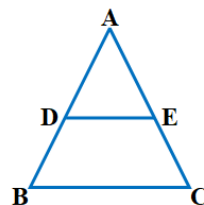
►要点：①内无连线的封闭图形 ②逆时针 ③多种形式选其一④标全

►标注示例：



2.1.1 (a)

(a) Shape(ABC)



2.1.1 (b)

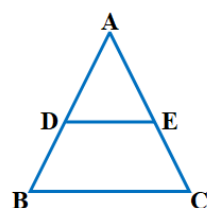
or {Shape(BCA)
Shape(CAB)}
(b) Shape(ADE), Shape(DBCE)

共线 Collinear(\$)

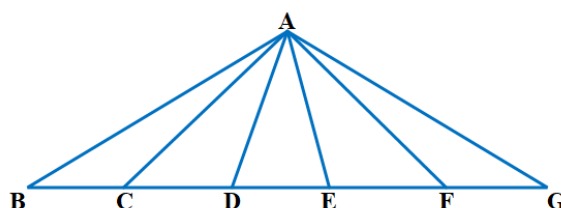
►描述：共线的若干点定义为 collinear。collinear 由若干 point 组成，collinear 的标注要求按照一条线上点的先后顺序标出所有的点。根据选择的起始 point 不同，一个 collinear 可以有 2 种标注形式，选择一种即可。

►要点：①共线点 ②先后顺序 ③2 种形式选其一④标全

►标注示例：



2.1.2 (a)



2.1.2 (b)

(a) Collinear(ADB), Collinear(AEC)

or {Collinear(BDA)
Collinear(CEA)}

(b) Collinear(BCDEFG)

or {Collinear(GFEDCB)}

2.2 实体

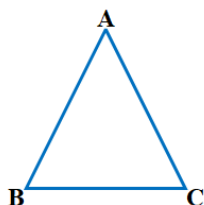
实体声明语句表示图形中的几何元素。

点 Point(\$)

►描述：构成图形的点。可由推理器自动生成，无需标注。

►要点：①无需标注

►标注示例：



2.2.1 (a)

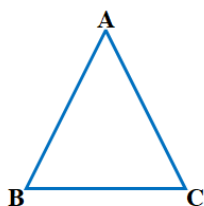
(a) Point(A), Point(B), Point(C)

线 Line(\$)

►描述：构成图形的线。可由推理器自动生成，无需标注。一条线有两种标注形式，选择一种即可。

►要点：①无需标注②2 种形式选其一

►标注示例：



2.2.2 (a)

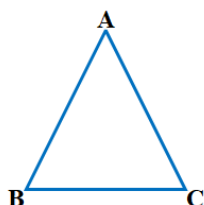
(a) `Line(AB), Line(BC), Line(AC)`

角 `Angle($)`

►描述：构成图形的角。可由推理器自动生成，无需标注。一个角只有一种标注方式，逆时针标出构成角的三个点

►要点：①无需标注②只有 1 种表示方式

►标注示例：



2.2.3 (a)

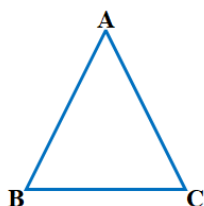
(a) `Angle(ABC), Angle(BCA), Angle(CAB)`

三角形 `Triangle($)`

►描述：可由推理器自动生成，无需标注。逆时针标出构成三角形的三个点，因选择的起始点不同，一个三角形有 3 种表示方式。

►要点：①无需标注②3 种形式选其一

►标注示例：



2.2.4 (a)

(a) `Triangle(ABC)`
or `{Triangle(BCA)`
`Triangle(CAB)}`

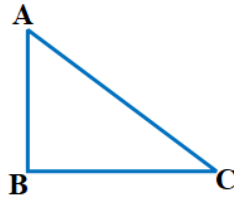
直角三角形 `RightTriangle($)`

►描述：逆时针标出构成三角形的三个点。第二个点对应直角三角形中的直

角，因此一个直角三角形只有一种表示形式。

►要点：①逆时针②只有 1 种表示方式

►标注示例：



2.2.5 (a)

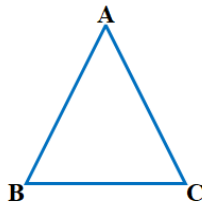
(a) `RightTriangle(ABC)`

等腰三角形 `IsoscelesTriangle($)`

►描述：逆时针标出构成三角形的三个点。第二、三个点对应等腰三角形中的两个底角，因此一个等腰三角形只有一种表示形式。

►要点：①逆时针②只有 1 种表示方式

►标注示例：



2.2.6 (a)

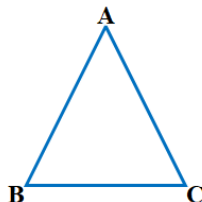
(a) `IsoscelesTriangle(ABC)`

等边三角形 `EquilateralTriangle($)`

►描述：逆时针标出构成三角形的三个点。一个等边三角形有 3 种表示形式。

►要点：①逆时针②3 种形式选其一

►标注示例：



2.2.6 (a)

(a) `EquilateralTriangle(ABC)`

or {`EquilateralTriangle(BCA)`
`EquilateralTriangle(CAB)`}

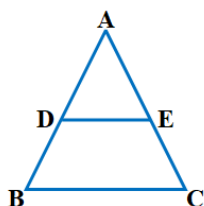
多边形 `Polygon($)`

►描述：边的数量大于 3 的图形称为多边形。可由推理器自动生成，无需标

注。逆时针标出构成多边形的点。一个多边形有多种表示形式，选其一即可。

►要点：①无需标注②逆时针③多种形式选其一

►标注示例：



2.2.6 (a)

(a) Polygon(DBCE)
or {Polygon(BCED)
Polygon(CEDB)
Polygon(EDBC)}

2.3 实体属性

实体属性声明语句由一个谓词嵌套一个实体声明语句构成，表示实体的某个属性的度量。在形式化语句中实体属性声明语句不会单独出现，而是与 2.5 节中将要介绍的表达式定义语句嵌套使用。

在推理器中，每一条实体属性声明语句都会被转化为一个符号描述。

实体属性声明语句中的实体按照 2.2 中实体声明语句的标注标准标注。

线长度 Length(Line(\$))

►描述：线的长度。一条线有 2 种标注方式，因此一条线的长度也有 2 种标注方式。

►要点：①2 形式选其一

►标注示例：线 DE 的长度



2.3.1 (a)

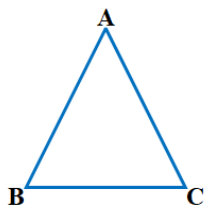
(a) Length(Line(DE))
or {Length(Line(ED))}

角大小 Measure(Angle(\$))

►描述：角的大小。一个角只有 1 种标注方式，因此角的大小也只有 1 种标注方式。

►要点：①只有 1 种表示方式

►标注示例：角 ABC 的大小



2.3.2 (a)

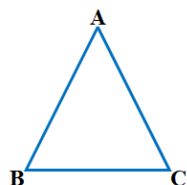
(a) $\text{Measure}(\text{Angle}(\text{ABC}))$

三角形面积 $\text{Area}(\text{Triangle}(\$))$

►描述：三角形的面积。一个三角形有 3 种表示方式，因此三角形的面积也有 3 种表示方式。

►要点：①3 种表示方式选其一

►标注示例：三角形 ABC 的面积



2.3.3 (a)

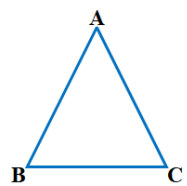
(a) $\text{Area}(\text{Triangle}(\text{ABC}))$
or $\{\text{Area}(\text{Triangle}(\text{BCA}))$
 $\text{Area}(\text{Triangle}(\text{CAB}))\}$

三角形周长 $\text{Perimeter}(\text{Triangle}(\$))$

►描述：三角形的周长。一个三角形有 3 种表示方式，因此三角形的周长也有 3 种表示方式。

►要点：①3 种表示方式选其一

►标注示例：三角形 ABC 的周长



2.3.4 (a)

(a) $\text{Perimeter}(\text{Triangle}(\text{ABC}))$
or $\{\text{Perimeter}(\text{Triangle}(\text{BCA}))$
 $\text{Perimeter}(\text{Triangle}(\text{CAB}))\}$

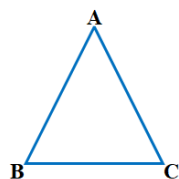
三角形高 $\text{Altitude}(\text{Triangle}(\$))$

►描述：高的长度。特别提醒，一个三角形有三条高，每条高对应一种三角形的表示，因此一个高对应一个三角形表示。

►要点：①只有 1 种表示方式

►标注示例:

三角形 ABC 的高 (底边 BC 的高)



2.3.5 (a)

(a) $\text{Altitude}(\text{Angle}(\text{ABC}))$

2.4 实体关系

实体关系声明语句说明图形中的几何元素之间的关系,这类关系通过定理可以推导出新的实体关系或实体属性的代数关系。

中点 $\text{Midpoint}(\text{Point}(\$),\text{Line}(\$))$

►描述: 点与线的关系。一条线有 2 种标注方式, 因此中点也有 2 种标注方式。

►要点: ①2 种表示方式选其一

►标注示例:



2.4.1 (a)

(a) $\text{Midpoint}(\text{Point}(\text{M}),\text{Line}(\text{AB}))$

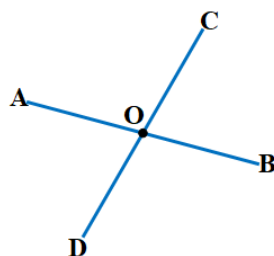
or $\{\text{Midpoint}(\text{Point}(\text{M}),\text{Line}(\text{BA}))\}$

相交 $\text{Intersect}(\text{Point}(\$),\text{Line}(\$),\text{Line}(\$))$

►描述: 线与线的关系。其中 point 指两条线的交点; 在标注两条线时, 按照从左向右的顺序标注构成第一条线的点, 按照从上到下的原则标注构成第二条线的点。一个相交关系有 4 种表示方法。

►要点: ①从左到右从上到下①4 种表示方式选其一

►标注示例:



2.4.2 (a)

(a) $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{AB}),\text{Line}(\text{CD}))$

or $\{\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{CD}),\text{Line}(\text{BA})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{BA}),\text{Line}(\text{DC})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{DC}),\text{Line}(\text{AB}))\}$

平行的 $\text{Parallel}(\text{Line}(\$),\text{Line}(\$))$

►描述：线与线的关系。构成平行关系的两条线，其点的方向应是一致的，按照从左到右从上到下的原则标注。一个相交关系有 2 种表示方法。

►要点：①从左到右从上到下①2 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.3 (a)

(a) $\text{Parallel}(\text{Line}(\text{AB}),\text{Line}(\text{CD}))$

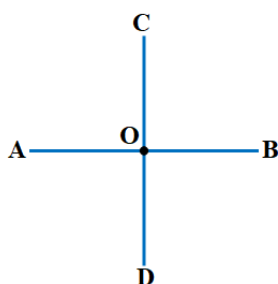
or $\{\text{Parallel}(\text{Line}(\text{DC}),\text{Line}(\text{BA}))\}$

垂直的 $\text{Perpendicular}(\text{Point}(\$),\text{Line}(\$),\text{Line}(\$))$

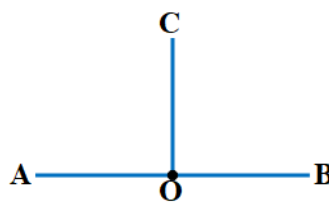
►描述：线与线的关系。与相交的标注方法一致。需注意的是，垂直的图形有 3 种变形，如例题所示。

►要点：①从左到右从上到下①4 种表示方式选其一

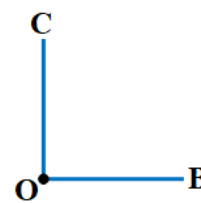
►标注示例：



2.4.4 (a)



2.4.4 (b)



2.4.4 (c)

(a) $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{AB}),\text{Line}(\text{CD}))$

or $\{\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{CD}),\text{Line}(\text{BA})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{BA}),\text{Line}(\text{DC})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{DC}),\text{Line}(\text{AB}))\}$

(b) $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{AB}),\text{Line}(\text{CO}))$

or $\{\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{CO}),\text{Line}(\text{BA})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{BA}),\text{Line}(\text{OC})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{OC}),\text{Line}(\text{AB}))\}$

(c) $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{OB}),\text{Line}(\text{CO}))$

or $\{\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{CO}),\text{Line}(\text{BO})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{BO}),\text{Line}(\text{OC})),$
 $\text{Intersect}(\text{Point}(\text{O}),\text{Line}(\text{OC}),\text{Line}(\text{OB}))\}$

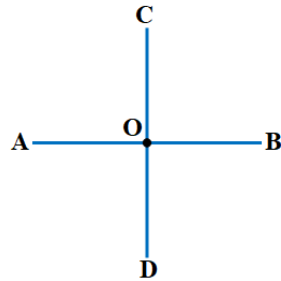
垂直平分线 $\text{PerpendicularBisector}(\text{Point}(\$),\text{Line}(\$),\text{Line}(\$))$

►描述：线与线的关系。与垂直的标注方法一致。第一条线表示被平分的线，

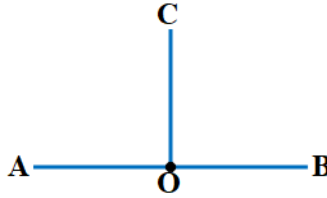
第二条线表示垂直平分线，因此此关系只有 2 种表示方式。垂直的图形有 2 种变形，如例题所示。

►要点：①从左到右从上到下②2 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.4 (a)



2.4.4 (b)

(a) `Intersect(Point(O),Line(AB) ,Line(CD))`
`Intersect(Point(O),Line(BA) ,Line(DC))`

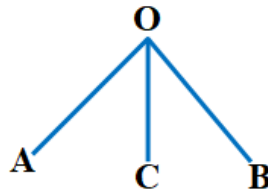
(b) `Intersect(Point(O),Line(AB) ,Line(CO))`
`Intersect(Point(O),Line(BA) ,Line(OC))`

角平分线 `Bisector(Line($),Angle($))`

►描述：线与角的关系。构成线的第一个点要与角的顶点相同。注意标注角时要按点的逆时针方向。

►要点：①point 相同

►标注示例：



2.4.5 (a)

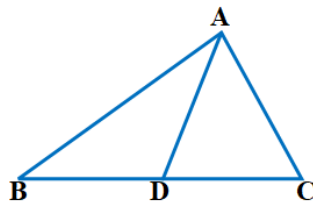
(a) `Bisector(Line(OC),Angle(BOA))`

中线 `Median(Line($),Triangle($))`

►描述：中线是指三角形顶点与底边中点的连线。构成线的第一个点要与三角形的顶点相同。注意标注三角形时要按点的逆时针方向。

►要点：①point 相同

►标注示例：



2.4.6 (a)

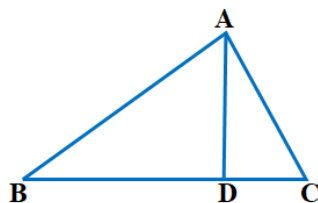
(a) `Median(Line(AD),Triangle(ABC))`

高 `IsAltitude(Line($),Triangle($))`

►描述：三角形的高。构成线的第一个点要与三角形的顶点相同。注意标注三角形时时要按点的逆时针方向。

►要点：①point 相同

►标注示例：



2.4.7 (a)

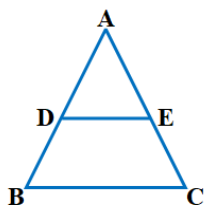
(a) `IsAltitude(Line(AD),Triangle(ABC))`

中位线 `Neutrality(Line($),Triangle($))`

►描述：中位线是指平行于三角形底边，且位于三角形内部的线。线的方向与三角形底边方向相同。注意标注三角形时时要按点的逆时针方向。

►要点：①方向相同

►标注示例：



2.4.8 (a)

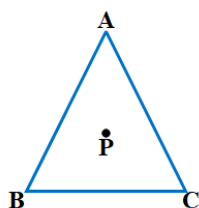
(a) `Neutrality(Line(DE),Triangle(ABC))`

外心 `Circumcenter(Point($),Triangle($))`

►描述：三角形三边垂直平分线的交点。三角形有 3 种表示方式，因此外心也有 3 种表示方式。

►要点：①3 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.9 (a)

(a) **Circumcenter(Point(P),Triangle(ABC))**
 or {Circumcenter(Point(P),Triangle(BCA)),
 Circumcenter(Point(P),Triangle(CAB))}

内心 Incenter(Point(\$),Triangle(\$))

►描述：三角形三角角平分线的交点。三角形有 3 种表示方式，因此内心也有 3 种表示方式。

►要点：①3 种表示方式选其一

►标注示例：

(a) **Incenter(Point(P),Triangle(ABC))**
 or {Incenter(Point(P),Triangle(BCA)),
 Incenter(Point(P),Triangle(CAB))}

重心 Centroid(Point(\$),Triangle(\$))

►描述：三角形三边中线的交点。三角形有 3 种表示方式，因此重心也有 3 种表示方式。

►要点：①3 种表示方式选其一

►标注示例：

(a) **Centroid(Point(P),Triangle(ABC))**
 or {Centroid(Point(P),Triangle(BCA)),
 Centroid(Point(P),Triangle(CAB))}

垂心 Orthocenter(Point(\$),Triangle(\$))

►描述：三角形高的交点。三角形有 3 种表示方式，因此垂心也有 3 种表示方式。

►要点：①3 种表示方式选其一

►标注示例：

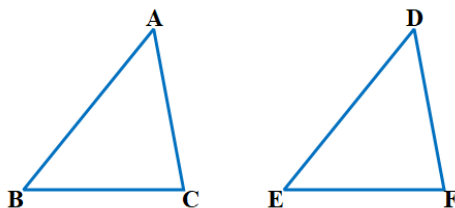
(a) **Orthocenter(Point(P),Triangle(ABC))**
 or {Orthocenter(Point(P),Triangle(BCA)),
 Orthocenter(Point(P),Triangle(CAB))}

全等三角形 Congruent(Triangle(\$),Triangle(\$))

►描述：按照点一一对应的方法，标注全等三角形。因为三角形有 3 种表示方式，两个三角形的先后顺序又可互换，所以全等有 6 种表示方式。

►要点：①点一一对应②6 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.10 (a)

(a) **Congruent(Triangle(ABC),Triangle(DEF))**

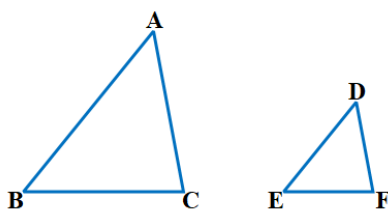
or {Congruent(Triangle(BCA),Triangle(EFD)),
 Congruent(Triangle(CAB),Triangle(FDE)),
 Congruent(Triangle(DEF),Triangle(ABC)),
 Congruent(Triangle(EFD),Triangle(BCA)),
 Congruent(Triangle(FDE),Triangle(CAB))}

相似三角形 Similar(Triangle(\$),Triangle(\$))

►描述：按照点一一对应的方法，标注相似三角形。因为三角形有 3 种表示方式，两个三角形的先后顺序又可互换，所以相似有 6 种表示方式。

►要点：①点一一对应②6 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.11(a)

(a) **Similar(Triangle(ABC),Triangle(DEF))**

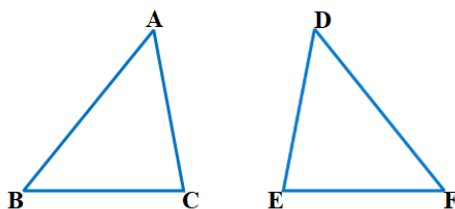
or {Similar(Triangle(BCA),Triangle(EFD)),
 Similar(Triangle(CAB),Triangle(FDE)),
 Similar(Triangle(DEF),Triangle(ABC)),
 Similar(Triangle(EFD),Triangle(BCA)),
 Similar(Triangle(FDE),Triangle(CAB))}

镜像全等三角形 MirrorCongruent(Triangle(\$),Triangle(\$))

►描述：按照点一一对应的方法，标注镜像全等三角形。如例题所示， $\triangle ABC$ 按照点一一对应得到的全等三角形应是 $\triangle DFE$ ；但 $\triangle DFE$ 是三角形的顺时针表示，不是合法的表示，因此交换后两点得到， $\triangle ABC$ 镜像全等 $\triangle DEF$ 。因为三角形有 3 种表示方式，两个三角形的先后顺序又可互换，所以镜像全等有 6 种表示方式。

►要点：①点一一对应再交换②6 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.12 (a)

(a) **MirrorCongruent(Triangle(ABC),Triangle(DEF))**

or {MirrorCongruent(Triangle(BCA),Triangle(FDE)),

```

MirrorCongruent(Triangle(CAB),Triangle(EFD)),
MirrorCongruent(Triangle(DEF),Triangle(ABC)),
MirrorCongruent(Triangle(FDE),Triangle(BCA)),
MirrorCongruent(Triangle(EFD),Triangle(CAB))}

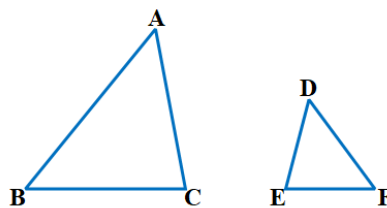
```

镜像相似三角形 MirrorSimilar(Triangle(\$),Triangle(\$))

►描述：按照点一一对应的方法，标注镜像相似三角形。如例题所示， $\triangle ABC$ 按照点一一对应得到的相似三角形应是 $\triangle DFE$ ；但 $\triangle DFE$ 是三角形的顺时针表示，不是合法的表示，因此交换后两点得到， $\triangle ABC$ 镜像相似 $\triangle DEF$ 。因为三角形有 3 种表示方式，两个三角形的先后顺序又可互换，所以镜像相似有 6 种表示方式。

►要点：①点一一对应再交换②6 种表示方式选其一

►标注示例：



2.4.13 (a)

(a) **MirrorSimilar(Triangle(ABC),Triangle(DEF))**
or {MirrorSimilar(Triangle(BCA),Triangle(FDE)),
MirrorSimilar(Triangle(CAB),Triangle(EFD)),
MirrorSimilar(Triangle(DEF),Triangle(ABC)),
MirrorSimilar(Triangle(FDE),Triangle(BCA)),
MirrorSimilar(Triangle(EFD),Triangle(CAB))}

2.5 表达式

代数表达式由变量、数字以及运算符三部分构成。例如在代数表达式 $x+3$ 中， x 是变量， $+$ 是运算符， 3 是数字。

在 2.3 节中提到过，实体的属性在推理器中会以符号（即变量）表示，因此实体属性声明语句可以与此节的代数表达式一起嵌套使用。本小节形式化语句中的参数 $expr$ ，可以由①代数表达式定义语句②代数表达式③实体属性声明语句

起始的 8 个谓词对应 8 种运算，分别是加、减、乘、除、幂、正弦、余弦、正切，对应运算符 $+$ 、 $-$ 、 $*$ 、 $/$ 、 $^$ 、 $@$ 、 $\#$ 、 $\$$ 。

加 Add(expr1,expr2)

►对应表达式： $expr1+expr2$

►示例：Add(x, 3)

Add(Length(Line(AB)), 3)

Add(Measure(Angle(ABC)), 3+x)

减 Sub(expr1,expr2)

►对应表达式: $\text{expr1}-\text{expr2}$

►示例: `Sub (x, 3)`
`Sub (Length (Line (AB)), 3)`
`Sub (Measure (Angle (ABC)), 3+x)`

乘 `Mul(expr1,expr2)`

►对应表达式: $\text{expr1}*\text{expr2}$

►示例: `Mul (x, 3)`
`Mul (Length (Line (AB)), 3)`
`Mul (Measure (Angle (ABC)), Sub (Add (3+x, 1), Length (Line (AB))))`

除 `Div(expr1,expr2)`

►对应表达式: $\text{expr1}/\text{expr2}$

►示例: `Div (x, 3)`
`Div (Length (Line (AB)), 3)`
`Div (Measure (Angle (ABC)), Sub (Add (3+x, 1), Length (Line (AB))))`

幂 `Pow(expr1,expr2)`

►对应表达式: $\text{expr1}^{\text{expr2}}$

►示例: `Pow (x, 3)`
`Pow (Length (Line (AB)), 3)`
`Pow (Measure (Angle (ABC)), Sub (Add (3+x, 1), Length (Line (AB))))`

正弦 `Sin(expr)`

►对应表达式: $@\text{expr}$

►示例: `Sin (x)`
`Sin (60)`
`Sin (Measure (Angle (ABC)))`

余弦 `Cos(expr)`

►对应表达式: $\#\text{expr}$

►示例: `Cos (Add (x, y))`
`Cos (60)`
`Cos (Measure (Angle (ABC)))`

正切 `Tan(expr)`

►对应表达式: $\$\text{expr}$

►示例: `Tan (x+3)`
`Tan (60)`
`Tan (Measure (Angle (ABC)))`

实数 R

表达式 expr

8 种运算符、变量和数字的组合式子，需注意运算符之间的优先级，必要时可使用 {} 来规定各表达式之间的优先级，如 $\{x+3\} * 2$ 。

和 Sum(expr1,expr2, ...)

▶ 对应表达式: $\text{expr1} + \text{expr2} + \dots$

▶ 示例: `Sum(x+3, y+2, z+1)`

平均 Avg(expr1,expr2, ...)

▶ 对应表达式: $\{\text{expr1} + \text{expr2} + \dots + \text{expr}_n\} / n$

▶ 示例: `Avg(x+3, y+2, z+1)`

相等 Equal(expr1,expr2)

▶ 对应方程式: $\text{expr1} - \text{expr2} = 0$

▶ 示例: `Equal(x+3, y+2)`
`Equal(Measure(Angle(ABC)), 60)`
`Equal(Length(Line(AB)), z+4)`

2.6 解题目标

Find 谓词用于定义解题目标，其参数可以是上述介绍的任意类型形式化语句，如实体声明语句，实体属性声明语句等。

Find(\$)

▶ 构图语句 自然语言: 求证点 A、B、C 共线

形式化语言: `Find(Collinear(ABC))`

▶ 实体声明语句 自然语言: 求证三角形 ABC 为等边三角形

形式化语言: `Find(IsoscelesTriangle(ABC))`

▶ 实体属性声明语句 自然语言: 求边 AB 的长度

形式化语言: `Find(Length(Line(AB)))`

▶ 实体关系声明语句 自然语言: 求证 AB 平行于 CD

形式化语言: `Find(Parallel(Line(AB), Line(CD)))`

▶ 代数表达式定义语句 自然语言: 求 x 的值

形式化语言: `Find(x)`

2.7 定理

nous_1_area_addition

nous_2_line_addition

nous_3_angle_addition

nous_4_intersect_extend

nous_5_perpendicular_extend

nous_6_

nous_7_

nous_8_

nous_9_

nous_10_

auxiliary_11_

auxiliary_12_

auxiliary_13_

auxiliary_14_

auxiliary_15_

auxiliary_16_

auxiliary_17_

auxiliary_18_

auxiliary_19_

auxiliary_20_

theorem_21_triangle_property_angle_sum

theorem_22_triangle_property_equal_line_angle

theorem_23_pythagorean

theorem_24_right_triangle_property_rt

theorem_25_right_triangle_property_special_rt

theorem_26_pythagorean_inverse

theorem_27_right_triangle_judgment

theorem_28_isosceles_triangle_property_angle_equal

theorem_29_isosceles_triangle_property_side_equal

theorem_30_isosceles_triangle_property_line_coincidence

theorem_31_isosceles_triangle_judgment_angle_equal

theorem_32_isosceles_triangle_judgment_side_equal

theorem_33_equilateral_triangle_property_angle_equal

theorem_34_equilateral_triangle_property_side_equal

theorem_35_equilateral_triangle_judgment_angle_equal

theorem_36_equilateral_triangle_judgment_side_equal

theorem_37_equilateral_triangle_judgment_isos_and_angle60

theorem_38_intersect_property

theorem_39_parallel_property

theorem_40_parallel_judgment

theorem_41_perpendicular_judgment

theorem_42_parallel_perpendicular_combination

theorem_43_midpoint_judgment

theorem_44_perpendicular_bisector_property_distance_equal

theorem_45_perpendicular_bisector_judgment

theorem_46_bisector_property_line_ratio

theorem_47_bisector_property_angle_equal

theorem_48_bisector_judgment_angle_equal

theorem_49_median_property

theorem_50_median_judgment

theorem_51_altitude_property

theorem_52_altitude_judgment

theorem_53_neutrality_property_similar

theorem_54_neutrality_property_angle_equal

theorem_55_neutrality_property_line_ratio

theorem_56_neutrality_judgment

theorem_57_circumcenter_property_line_equal

theorem_58_circumcenter_property_intersect

theorem_59_circumcenter_judgment

theorem_60_incenter_property_line_equal

theorem_61_incenter_property_intersect

theorem_62_incenter_property_judgment

theorem_63_centroid_property_line_equal

theorem_64_centroid_property_intersect

theorem_65_centroid_property_judgment

theorem_66_orthocenter_property_line_equal

theorem_67_orthocenter_property_intersect

theorem_68_orthocenter_property_judgment

theorem_69_congruent_property_line_equal

theorem_70_congruent_property_angle_equal

theorem_71_congruent_property_area_equal

theorem_72_congruent_judgment_sss

theorem_73_congruent_judgment_sas

theorem_74_congruent_judgment_asa

theorem_75_congruent_judgment_aas

theorem_76_congruent_judgment_hl

theorem_77_similar_property_angle_equal

theorem_78_similar_property_line_ratio

theorem_79_similar_property_perimeter_ratio

theorem_80_similar_property_area_square_ratio

theorem_81_similar_judgment_sss

theorem_82_similar_judgment_sas

theorem_83_similar_judgment_aa

theorem_84_triangle_perimeter_formula

theorem_85_triangle_area_formula_common

theorem_86_triangle_area_formula_heron

theorem_87_triangle_area_formula_sine

theorem_88_sine

theorem_89_cosine