

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
Факультет Программной Инженерии и  
Компьютерной Техники

Лабораторная работа №6  
по Информатике  
1972 год, 1 выпуск (Вариант 21)  
1970 год, 1 выпуск (Вариант 1)

Выполнила:  
Касьяненко Вера Михайловна  
Группа Р3120  
Преподаватель:  
Болдырева Елена Александровна

уравнений: сначала решается уравнение (4), корнями которого являются суммы  $\epsilon_1 + \epsilon_4$  и  $\epsilon_2 + \epsilon_3$  симметричных (см. рис. 6!) корней уравнения (3), а затем из уравнений (5) находятся и сами корни уравнения (3). Именно таким путем Гауссу удалось осуществить построение правильного 17-угольника: здесь тоже выделяются группы корней, суммы которых находятся последовательно из квадратных уравнений. Но как искать эти "хорошие" группы? Гаусс находит удивительный путь ответить на этот вопрос...

### Построение правильного 17-угольника

30 марта 1796 года наступает для него (Гаусса) день творческого крещения... Гаусс уже занимался с некоторого времени группировкой корней из единицы на основании своей теории "первообразных" корней. И вот однажды утром, проснувшись, он внезапно ясно и отчетливо осознал, что из его теории вытекает построение семнадцатиугольника... Это событие явилось поворотным пунктом жизни Гаусса. Он принимает решение посвятить себя не филологии, а исключительно математике.

*Ф. Клейн*

Чтобы выявить найденные Гауссом скрытые "симметрии" в множестве корней 17-й степени из единицы и, пользуясь ими, разбить корни на нужные группы, введем новую нумерацию корней. Будем возводить 3 в последовательные степени  $0, 1, 2, \dots$  и каждый раз брать остаток от деления полученного числа на 17. Избавим читателя от проведения этих выкладок и в таблице приведем окончательные результаты. В первой строке стоят показатели  $k$ , а под ними остатки от деления  $3^k$  на 17. Обратите внимание, что в нижней строке содержатся все числа от 1 до

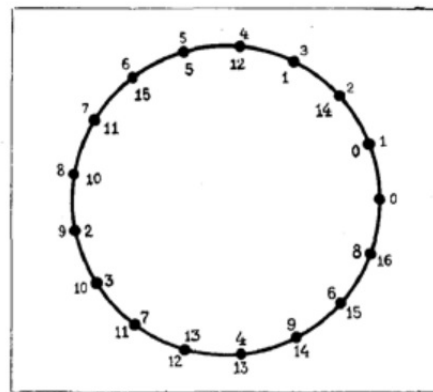


Рис. 7. Старые номера корней даны черным цветом, новые - красным.

16; затем  $3^{16}$  дает остаток 1 и далее остатки повторяются (докажите!)

Закономерность, подмеченная Гауссом, является частным случаем следующей теоремы: для всякого простого  $p$  существует такое число  $l$ , называемое первообразным корнем, что среди остатков от деления  $l^k$  на  $p$  встерчаются все числа  $1, 2, \dots, p-1$ . Этот факт впервые отметил Эйлер (1707-1783), но смог доказать лишь Лежандр (1752-1833); другое доказательство получил Гаусс, но, вероятно, в 1796 году он еще не обладал теоремой, а обнаружил приведенный факт эмпирически, проводя вычисления для конкретных чисел. Это очень важное обстоятельство, не учитывая которого, трудно правильно понять природу ранних работ Гаусса. Присвоим корню  $\epsilon_k, k = 3^k$ , новый номер, а именно  $l$ , который мы

Таблица

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Используя неравенство  $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , напомним следующую цепочку неравенств:  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{AB} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \right) \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{a_i}{A} \right)^2 + \left( \frac{b_i}{B} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{1}{B^2} \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) = 1$$

Отсюда следует неравенство (\*). Как известно, равенство в нем достигается при

$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \frac{a_2}{A} = \frac{b_2}{B}, \dots, \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B}$$

то есть при

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Покажем теперь, как применяется неравенство (\*).

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

К статье  
"Рассказ о кванте"  
(стр. 6-15)

1.  $9,8 \cdot 10^{-7} \text{ Дж/см}^2$
2.  $2,3 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \sim 1,5 \text{ электрон-вольт}$ . Максимум числа квантов:  $1,7 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \sim 1 \text{ электрон-вольт}$ .
3.  $4,4 \cdot 10^{12}$  квантов в одном кубическом сантиметре.
4. Энергия кванта: 9,6 килоэлектрон-вольта, энергия электрона: 0,1 килоэлектрон-вольта

К статье Цепные  
дроби" (стр. 16-26)

1.  $\lambda = 5215,5$ .
2.  $[0; 1, 2, 3, 4, 5]$ .
3.  $\frac{5777}{1875}$ 
  - a)  $[1; 1212 \dots]$ ,
  - b)  $[2; 444 \dots]$ ,
  - c)  $[2; 2424 \dots]$ .
5. б)  $\frac{\sqrt{ab(ab-4)}-ab}{2a} *$ .

К статье  
"Что такое функция"  
(стр. 27-36)

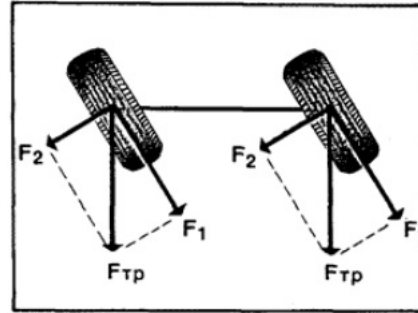
1. Естественная область определения:
  - a)  $x \neq 0$ ; б)  $x \leq -1$ ;  $x \geq 1$
4. а) 9; б) 8; в) 6.
5. а) 9; б) 8; в) 9; г) 0.
6.  $10^7 \cdot 4^7$
8.  $n^m$
12. Обратимы  $f_1$  и  $f_3$ .
- 13 и 14. Отображение совпадает с обратным к нему.
16. а) 1680; б) 9240; в)  $18150 = 3^9 - 3 \cdot 2^9 + 3$ .
18.  $A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$ , если  $m \leq n$ ;  $A_n^m = 0$ , если  $m > n$ .
20.  $\frac{28!}{(7!)^4}$

\*) Это — положительный корень уравнения

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{b+x}} \quad (1)$$

К статье  
"Сухое трение"  
(стр. 37-43)

1. Разложим силы трения, действующие на передние колеса автомобиля, на две составляющие:  $F_1$ , лежащие в плоскости колес, и  $F_2$ , перпендикулярные колесам (см. рисунок). Силы  $F_1$  заставляют колеса вращаться, а силы  $F_2$  поворачивают автомобиль.



2. Если центр тяжести палки не находится посередине между пальцами, но давление палки на кольцо различно. Различны и силы тяготения, действующие на палку со стороны пальцев. Палка смещается в ту сторону, где трение меньше.

3. Пока брусок не скользит по плоскости, сила трения равна по величине проекции веса бруска на наклонную плоскость  $F_{TP} = P \sin \alpha$ . Брусок начинает скользить, когда сила трения достигает максимальной величины трения покоя  $F_{TP} = kN = kP \cos \alpha$ . При этом выполняется условие  $kP \cos \alpha = P \sin \alpha$ . Поэтому соскальзывание бруска начинается при угле наклона плоскости к горизонту  $\alpha = \arctan k$ . После этого сила трения будет равна  $F_{TP} = kN = kP \cos \alpha$ .

Угол  $\alpha = \arctan k$ , при котором брусок начинает скользить, называют углом трения. Он имеет еще и другой геометрический смысл: если к бруску, лежащему на горизонтальной плоскости, приложить силу, составляющую с вертикалью угол меньший, чем угол трения, то брусок нельзя сдвинуть с места, сколь велика ни была бы приложенная сила. Доказать это можно так. Посадим наблюдателя на наклонную плоскость, на которой лежит бру-

Например, про отображение

$$x \rightarrow |x|$$

можно сказать, что оно является отображением  $R$  в  $R$ , но нельзя сказать, что это "отображение  $R$  на  $R$ ".

С чисто логической точки зрения наиболее простым является случай, когда область определения функции конечна. Ясно, что функция, область определения которой состоит из  $n$  элементов, не может принимать более  $n$  различных значений. Таким образом, функции, определенные на конечных множествах, осуществляют отображения конечных множеств на конечные множества. Таки отображения являются одним из предметов изучения важной части математики - *комбинаторики* (см. задачи 8, 11, 18, 19)

**П р и м е р 4.** Рассмотрим функции, область определения которых есть множество

$$M = \{A, B\}$$

из двух букв  $A$  и  $B$  и значения которых принадлежат тому же множеству, т.е. отображения множества  $M$  в себя.

Таких функций существует всего ч е т ы р е. Зададим их табличным способом:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
A	A	B	A	B
B	A	B	B	A

