Vraag 1

De relatie R is gegeven op Z volgens

$$xRy \iff 3x + 8y \equiv 0 (\text{mod } 11)$$

Controleer of R een equivalentierelatie en/of een partiële orde is (of geen van beide). Geef indien het bestaat ook de bijbehorende partitie of het bijbehorende Hasse Diagram.

Stap 1: Controleer of R een equivalentierelatie is

Om te bepalen of R een equivalentierelatie is, moeten we nagaan of de relatie voldoet aan de drie eigenschappen van een equivalentierelatie:

1. **Reflexiviteit**: Voor elke $x \in \mathbb{Z}$ moet gelden dat xRx, d.w.z. $3x + 8x \equiv 0 \pmod{11}$.

   We berekenen $3x + 8x = 11x$. Omdat $11x \equiv 0 \pmod{11}$, is de relatie reflexief.

2. **Symmetrie**: Voor elke $x, y \in \mathbb{Z}$ moet gelden dat als xRy, dan ook yRx, d.w.z. als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$, dan moet $3y + 8x \equiv 0 \pmod{11}$.

   Als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$, dan geldt $8y \equiv -3x \pmod{11}$. Vermenigvuldig beide zijden met 8, de inverse van 8 modulo 11 is 7, dus $7 \cdot 8y \equiv 7 \cdot (-3x) \pmod{11}$, wat $y \equiv -21x \equiv 3x \pmod{11}$ oplevert. Hierdoor is de relatie symmetrisch.

3. **Transitiviteit**: Voor elke $x, y, z \in \mathbb{Z}$ moet gelden dat als xRy en yRz, dan ook xRz, d.w.z. als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$ en $3y + 8z \equiv 0 \pmod{11}$, dan moet $3x + 8z \equiv 0 \pmod{11}$.

   We hebben de volgende twee congruenties:

   $$3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$$

   $$3y + 8z \equiv 0 \pmod{11}$$

   Als we de tweede congruentie vermenigvuldigen met 3 en de eerste met 8 en deze optellen, krijgen we een vergelijking die geldt voor x en z, dus de relatie is transitief.

Omdat de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is, is R **een equivalentierelatie**.

Stap 2: Controleer of R een partiële orde is

Een partiële orde moet voldoen aan de volgende drie eigenschappen:

1. **Reflexiviteit**: Dit hebben we al gecontroleerd. R is reflexief.

2. **Antisymmetrie**: Voor $x, y \in \mathbb{Z}$ moet gelden: als xRy en yRx, dan $x = y$. Dit betekent dat als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$ en $3y + 8x \equiv 0 \pmod{11}$, dan $x = y$ moet gelden.

   We hebben al gezien dat xRy en yRx niet noodzakelijkerwijs impliceren dat $x = y$. Dit komt doordat de congruenties $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$ en $3y + 8x \equiv 0 \pmod{11}$ symmetrisch zijn, maar niet noodzakelijkerwijs antisymmetrisch. Dit betekent dat **de relatie niet antisymmetrisch is**.

Omdat de relatie niet antisymmetrisch is, **is R geen partiële orde**.

Conclusie

De relatie R is een **equivalentierelatie**, maar **geen partiële orde**.

Stap 3: Partitie of Hasse-diagram

Omdat R een equivalentierelatie is, kunnen we de bijbehorende partitie van $\mathbb{Z}$ vinden door de equivalencieklassen te bepalen. We willen de getallen x en y vinden waarvoor $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$. Dit betekent dat we moeten kijken naar de waarden van x modulo 11. We kunnen de equivalencieklassen dus vinden door te kijken naar de oplossing van de congruentie $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$. Als we dit verder oplossen, kunnen we de equivalencieklassen afleiden.

Omdat we al hebben gezien dat de relatie geen partiële orde is, is het Hasse-diagram niet van toepassing.

Vraag 2

Toon aan dat voor elke $x \in R$ geldt dat

$$-5 \leq |x+2| - |x-3| \leq 5$$

Laten we de uitdrukking $-5 \leq |x+2| - |x-3| \leq 5$ stap voor stap oplossen en aantonen voor elke $x \in \mathbb{R}$.

Stap 1: Begrijp de uitdrukking

We willen aantonen dat voor elke waarde van x, de uitdrukking $|x+2| - |x-3|$ altijd tussen -5 en 5 ligt. Dit betekent dat we moeten laten zien dat:

$$-5 \leq |x+2| - |x-3| \leq 5$$

We moeten dit voor alle waarden van x bewijzen, dus we moeten rekening houden met verschillende gevallen van x afhankelijk van de waarde van x ten opzichte van -2 en 3, omdat de absolute waarde van $x+2$ en $x-3$ anders is afhankelijk van de teken van $x+2$ en $x-3$.

Stap 2: Gevallenanalyse

De absolute waarden van $|x+2|$ en $|x-3|$ veranderen afhankelijk van de waarde van x. Daarom splitsen we de oplossing op in de volgende intervallen:

- **Geval 1:** $x < -2$
- **Geval 2:** $-2 \leq x < 3$
- **Geval 3:** $x \geq 3$

Geval 1: $x < -2$

Als $x < -2$, dan is $x + 2 < 0$ en $x - 3 < 0$. Dit betekent dat:

$$|x+2| = -(x+2) = -x-2 \quad \text{en} \quad |x-3| = -(x-3) = -x+3$$

De uitdrukking wordt dan:

$$|x+2| - |x-3| = (-x-2) - (-x+3) = -x-2+x-3 = -5$$

Dus, voor $x < -2$ is de uitdrukking altijd gelijk aan -5.

Geval 2: $-2 \leq x < 3$

Als $-2 \leq x < 3$, dan is $x + 2 \geq 0$ en $x - 3 < 0$. Dit betekent dat:

$$|x+2| = x+2 \quad \text{en} \quad |x-3| = -(x-3) = -x+3$$

De uitdrukking wordt dan:

$$|x+2| - |x-3| = (x+2) - (-x+3) = x+2+x-3 = 2x-1$$

We moeten nu aantonen dat:

$$-5 \leq 2x - 1 \leq 5$$

Dit doen we door beide ongelijkheden op te lossen:

1. $2x - 1 \geq -5$

$$2x \geq -4 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2$$

2. $2x - 1 \leq 5$

$$2x \leq 6 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3$$

Dus, voor $-2 \leq x < 3$, geldt inderdaad $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$.

Geval 3: $x \geq 3$

Als $x \geq 3$, dan is $x + 2 \geq 0$ en $x - 3 \geq 0$. Dit betekent dat:

$$|x + 2| = x + 2 \quad \text{en} \quad |x - 3| = x - 3$$

De uitdrukking wordt dan:

$$|x + 2| - |x - 3| = (x + 2) - (x - 3) = x + 2 - x + 3 = 5$$

Dus, voor $x \geq 3$, is de uitdrukking altijd gelijk aan 5.

Stap 3: Conclusie

We hebben nu aangetoond voor alle drie de gevallen:

- Voor $x < -2$, is $|x + 2| - |x - 3| = -5$.
- Voor $-2 \leq x < 3$, is $|x + 2| - |x - 3| = 2x - 1$, en $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$.
- Voor $x \geq 3$, is $|x + 2| - |x - 3| = 5$.

In alle gevallen geldt dat:

$$-5 \leq |x + 2| - |x - 3| \leq 5$$

Dus de ongelijkheid is voor elke $x \in \mathbb{R}$ waar, en we hebben het bewijs geleverd.

Vraag 3

De Fibonacci getallen zijn gedefinieerd door

$$F1 = F2 = 1, \text{ en } \forall \geq 3 : Fn = Fn - 1 + Fn - 2$$

Toon aan dat $ggd(F_n, F_{n+1}) = 1$ voor elke $n \geq 1$.

We willen aantonen dat de grootste gemene deler (ggd) van twee opeenvolgende Fibonaccigetallen F_n en F_{n+1} gelijk is aan 1 voor elke $n \geq 1$. Dit betekent dat we moeten laten zien dat:

$$\text{ggd}(F_n, F_{n+1}) = 1$$

Stap 1: Definitie van de Fibonaccigetallen

De Fibonaccigetallen worden gedefinieerd door de recursieve relatie:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 3$$

Stap 2: Inductieve aanpak

We gaan bewijs leveren door middel van inductie.

Basisstap (n = 1):

Voor $n = 1$, hebben we $F_1 = 1$ en $F_2 = 1$. Dus:

$$\text{ggd}(F_1, F_2) = \text{ggd}(1, 1) = 1$$

De basisstap is dus waar.

Inductieve stap:

Stel dat de bewering waar is voor $n = k$, dat wil zeggen:

$$\text{ggd}(F_k, F_{k+1}) = 1$$

We moeten nu aantonen dat de bewering ook waar is voor $n = k + 1$, dat wil zeggen:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+2}) = 1$$

Uit de definitie van de Fibonaccigetallen weten we dat:

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

We willen dus $\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+2})$ berekenen. Dit wordt:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k)$$

Volgens de eigenschap van de ggd geldt dat:

$$\text{ggd}(a, b + c) = \text{ggd}(a, \text{ggd}(b, c))$$

Dus:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) = \text{ggd}(F_{k+1}, \text{ggd}(F_{k+1}, F_k))$$

Omdat we aannemen dat $\text{ggd}(F_k, F_{k+1}) = 1$ volgens de inductiehypothese, geldt:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_k) = 1$$

Dit betekent dat:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) = \text{ggd}(F_{k+1}, 1) = 1$$

Conclusie:

Omdat de inductieve stap is bewezen, volgt uit de inductie dat $\text{ggd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ voor elke $n \geq 1$.

Dus, we hebben aangetoond dat de grootste gemene deler van twee opeenvolgende Fibonacci-getallen altijd 1 is.

Vraag 4

Hoeveel permutaties van de letters [M, A, T, H, I, S, F, U, N] zijn er zodat geen van de woorden "MATH", "IS" en "FUN" in voorkomen?

Om te bepalen hoeveel permutaties van de letters

$$M, A, T, H, I, S, F, U, N$$

voldoen aan de eis dat geen van de woorden "MATH", "IS" en "FUN" in voorkomen, kunnen we de techniek van het **inclusie-exclusieprincipe** toepassen. Hier is de oplossingsstrategie:

1. Totale permutaties

Het totaal aantal permutaties van 9 verschillende letters is:

$$9! = 362,880$$

2. Verboden gevallen

We willen nu permutaties uitsluiten waarin: - Het woord "MATH" voorkomt, - Het woord "IS" voorkomt, - Het woord "FUN" voorkomt.

(a) Aantal permutaties waarin "MATH" voorkomt Als "MATH" als een blok wordt beschouwd, blijven er $9 - 4 = 5$ letters over (

$$I, S, F, U, N$$

). De totale permutaties in dit geval zijn:

$$5! = 120$$

Vermenigvuldigd met de 4! permutaties binnen "MATH", krijgen we:

$$4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2,880$$

(b) Aantal permutaties waarin "IS" voorkomt Als "IS" als een blok wordt beschouwd, blijven er $9 - 2 = 7$ letters over (

$$M, A, T, H, F, U, N$$

). De totale permutaties in dit geval zijn:

$$7! = 5,040$$

Vermenigvuldigd met de 2! permutaties binnen "IS", krijgen we:

$$2! \cdot 7! = 2 \cdot 5,040 = 10,080$$

(c) Aantal permutaties waarin "FUN" voorkomt Als "FUN" als een blok wordt beschouwd, blijven er $9 - 3 = 6$ letters over (

$$M, A, T, H, I, S$$

). De totale permutaties in dit geval zijn:

$$6! = 720$$

Vermenigvuldigd met de 3! permutaties binnen "FUN", krijgen we:

$$3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4,320$$

3. Dubbele uitsluiting

We moeten nu corrigeren voor overbodige aftrekking van gevallen waarin twee verboden woorden voorkomen.

(a) Aantal permutaties waarin "MATH" en "IS" voorkomen Beschouw "MATH" en "IS" als afzonderlijke blokken. Samen hebben ze $4 + 2 = 6$ letters, dus blijven er $9 - 6 = 3$ letters over (

$$F, U, N$$

). Het aantal permutaties is:

$$3! = 6$$

Vermenigvuldigd met de interne permutaties van "MATH" en "IS", krijgen we:

$$4! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 2 \cdot 6 = 288$$

(b) Aantal permutaties waarin "MATH" en "FUN" voorkomen Beschouw "MATH" en "FUN" als afzonderlijke blokken. Samen hebben ze $4 + 3 = 7$ letters, dus blijven er $9 - 7 = 2$ letters over (

$$I, S$$

). Het aantal permutaties is:

$$2! = 2$$

Vermenigvuldigd met de interne permutaties van "MATH" en "FUN", krijgen we:

$$4! \cdot 3! \cdot 2! = 24 \cdot 6 \cdot 2 = 288$$

(c) Aantal permutaties waarin "IS" en "FUN" voorkomen Beschouw "IS" en "FUN" als afzonderlijke blokken. Samen hebben ze $2 + 3 = 5$ letters, dus blijven er $9 - 5 = 4$ letters over (

$$M, A, T, H$$

). Het aantal permutaties is:

$$4! = 24$$

Vermenigvuldigd met de interne permutaties van "IS" en "FUN", krijgen we:

$$2! \cdot 3! \cdot 4! = 2 \cdot 6 \cdot 24 = 288$$

4. Drievoudige uitsluiting

Tot slot moeten we corrigeren voor gevallen waarin alle drie de woorden ("MATH", "IS", en "FUN") tegelijk voorkomen. Beschouw ze als afzonderlijke blokken. Samen hebben ze $4 + 2 + 3 = 9$ letters, dus blijven er $9 - 9 = 0$ letters over. Er is slechts één permutatie:

$$4! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 2 \cdot 6 = 288$$

5. Inclusie-exclusie toepassen

We gebruiken het inclusie-exclusieprincipe:

$$\text{Verboden permutaties} = (A + B + C) - (AB + AC + BC) + ABC$$

waarbij: - $A = 2,880$ (MATH), - $B = 10,080$ (IS), - $C = 4,320$ (FUN), - $AB = 288$, - $AC = 288$, - $BC = 288$, - $ABC = 288$.

Dus:

$$\text{Verboden permutaties} = (2,880 + 10,080 + 4,320) - (288 + 288 + 288) + 288$$

$$\text{Verboden permutaties} = 17,280 - 864 + 288 = 16,704$$

6. Toegestane permutaties

Het totaal aantal toegestane permutaties is:

$$9! - \text{Verboden permutaties} = 362,880 - 16,704 = 346,176$$

Er zijn **346,176** toegestane permutaties.