Vraag 1

De relatie R is gegeven op Z volgens

$$xRy \iff 3x + 8y \equiv 0 (\text{mod } 11)$$

Controleer of R een equivalentierelatie en/of een partiële orde is (of geen van beide). Geef indien het bestaat ook de bijbehorende partitie of het bijbehorende Hasse Diagram.

Stap 1: Controleer of R een equivalentierelatie is

Om te bepalen of R een equivalentierelatie is, moeten we nagaan of de relatie voldoet aan de drie eigenschappen van een equivalentierelatie:

1. **Reflexiviteit**: Voor elke $x \in \mathbb{Z}$ moet gelden dat xRx, d.w.z. $3x + 8x \equiv 0 \pmod{11}$.

   We berekenen $3x + 8x = 11x$. Omdat $11x \equiv 0 \pmod{11}$, is de relatie reflexief.

2. **Symmetrie**: Voor elke $x, y \in \mathbb{Z}$ moet gelden dat als xRy, dan ook yRx, d.w.z. als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$, dan moet $3y + 8x \equiv 0 \pmod{11}$.

   Als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$, dan geldt $8y \equiv -3x \pmod{11}$. Vermenigvuldig beide zijden met 8, de inverse van 8 modulo 11 is 7, dus $7 \cdot 8y \equiv 7 \cdot (-3x) \pmod{11}$, wat $y \equiv -21x \equiv 3x \pmod{11}$ oplevert. Hierdoor is de relatie symmetrisch.

3. **Transitiviteit**: Voor elke $x, y, z \in \mathbb{Z}$ moet gelden dat als xRy en yRz, dan ook xRz, d.w.z. als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$ en $3y + 8z \equiv 0 \pmod{11}$, dan moet $3x + 8z \equiv 0 \pmod{11}$.

   We hebben de volgende twee congruenties:

   $$3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$$

   $$3y + 8z \equiv 0 \pmod{11}$$

   Als we de tweede congruentie vermenigvuldigen met 3 en de eerste met 8 en deze optellen, krijgen we een vergelijking die geldt voor x en z, dus de relatie is transitief.

Omdat de relatie reflexief, symmetrisch en transitief is, is R **een equivalentierelatie**.

Stap 2: Controleer of R een partiële orde is

Een partiële orde moet voldoen aan de volgende drie eigenschappen:

1. **Reflexiviteit**: Dit hebben we al gecontroleerd. R is reflexief.
2. **Antisymmetrie**: Voor $x, y \in \mathbb{Z}$ moet gelden: als xRy en yRx, dan $x = y$. Dit betekent dat als $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$ en $3y + 8x \equiv 0 \pmod{11}$, dan $x = y$ moet gelden.

   We hebben al gezien dat xRy en yRx niet noodzakelijkerwijs impliceren dat $x = y$. Dit komt doordat de congruenties $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$ en $3y + 8x \equiv 0 \pmod{11}$ symmetrisch zijn, maar niet noodzakelijkerwijs antisymmetrisch. Dit betekent dat **de relatie niet antisymmetrisch is**.

Omdat de relatie niet antisymmetrisch is, **is R geen partiële orde**.

Conclusie

De relatie R is een **equivalentierelatie**, maar **geen partiële orde**.

Stap 3: Partitie of Hasse-diagram

Omdat R een equivalentierelatie is, kunnen we de bijbehorende partitie van $\mathbb{Z}$ vinden door de equivalencieklassen te bepalen. We willen de getallen x en y vinden waarvoor $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$. Dit betekent dat we moeten kijken naar de waarden van x modulo 11. We kunnen de equivalencieklassen dus vinden door te kijken naar de oplossing van de congruentie $3x + 8y \equiv 0 \pmod{11}$. Als we dit verder oplossen, kunnen we de equivalencieklassen afleiden.

Omdat we al hebben gezien dat de relatie geen partiële orde is, is het Hasse-diagram niet van toepassing.

Vraag 2

Toon aan dat voor elke $x \in R$ geldt dat

$$-5 \leq |x + 2| - |x - 3| \leq 5$$

Laten we de uitdrukking $-5 \leq |x + 2| - |x - 3| \leq 5$ stap voor stap oplossen en aantonen voor elke $x \in \mathbb{R}$.

Stap 1: Begrijp de uitdrukking

We willen aantonen dat voor elke waarde van x, de uitdrukking $|x + 2| - |x - 3|$ altijd tussen -5 en 5 ligt. Dit betekent dat we moeten laten zien dat:

$$-5 \leq |x + 2| - |x - 3| \leq 5$$

We moeten dit voor alle waarden van x bewijzen, dus we moeten rekening houden met verschillende gevallen van x afhankelijk van de waarde van x ten opzichte van -2 en 3, omdat de absolute waarde van $x+2$ en $x-3$ anders is afhankelijk van de teken van $x+2$ en $x-3$.

Stap 2: Gevallenanalyse

De absolute waarden van $|x+2|$ en $|x-3|$ veranderen afhankelijk van de waarde van x. Daarom splitsen we de oplossing op in de volgende intervallen:

- **Geval 1:** $x < -2$
- **Geval 2:** $-2 \leq x < 3$
- **Geval 3:** $x \geq 3$

Geval 1: $x < -2$

Als $x < -2$, dan is $x+2 < 0$ en $x-3 < 0$. Dit betekent dat:

$$|x+2| = -(x+2) = -x-2 \quad \text{en} \quad |x-3| = -(x-3) = -x+3$$

De uitdrukking wordt dan:

$$|x+2| - |x-3| = (-x-2) - (-x+3) = -x-2+x-3 = -5$$

Dus, voor $x < -2$ is de uitdrukking altijd gelijk aan -5.

Geval 2: $-2 \leq x < 3$

Als $-2 \leq x < 3$, dan is $x+2 \geq 0$ en $x-3 < 0$. Dit betekent dat:

$$|x+2| = x+2 \quad \text{en} \quad |x-3| = -(x-3) = -x+3$$

De uitdrukking wordt dan:

$$|x+2| - |x-3| = (x+2) - (-x+3) = x+2+x-3 = 2x-1$$

We moeten nu aantonen dat:

$$-5 \leq 2x-1 \leq 5$$

Dit doen we door beide ongelijkheden op te lossen:

1. $2x - 1 \geq -5$

$$2x \geq -4 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2$$

2. $2x - 1 \leq 5$

$$2x \leq 6 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3$$

Dus, voor $-2 \leq x < 3$, geldt inderdaad $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$.

Geval 3: $x \geq 3$

Als $x \geq 3$, dan is $x + 2 \geq 0$ en $x - 3 \geq 0$. Dit betekent dat:

$$|x + 2| = x + 2 \quad \text{en} \quad |x - 3| = x - 3$$

De uitdrukking wordt dan:

$$|x + 2| - |x - 3| = (x + 2) - (x - 3) = x + 2 - x + 3 = 5$$

Dus, voor $x \geq 3$, is de uitdrukking altijd gelijk aan 5.

Stap 3: Conclusie

We hebben nu aangetoond voor alle drie de gevallen:

- Voor $x < -2$, is $|x + 2| - |x - 3| = -5$.
- Voor $-2 \leq x < 3$, is $|x + 2| - |x - 3| = 2x - 1$, en $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$.
- Voor $x \geq 3$, is $|x + 2| - |x - 3| = 5$.

In alle gevallen geldt dat:

$$-5 \leq |x + 2| - |x - 3| \leq 5$$

Dus de ongelijkheid is voor elke $x \in \mathbb{R}$ waar, en we hebben het bewijs geleverd.

Vraag 3

De Fibonacci getallen zijn gedefinieerd door

$$F1 = F2 = 1, \text{ en } \forall \geq 3 : Fn = Fn - 1 + Fn - 2$$

Toon aan dat $ggd(F_n, F_{n+1}) = 1$ voor elke $n \geq 1$.

We willen aantonen dat de grootste gemene deler (ggd) van twee opeenvolgende Fibonaccigetallen F_n en F_{n+1} gelijk is aan 1 voor elke $n \geq 1$. Dit betekent dat we moeten laten zien dat:

$$\text{ggd}(F_n, F_{n+1}) = 1$$

Stap 1: Definitie van de Fibonaccigetallen

De Fibonaccigetallen worden gedefinieerd door de recursieve relatie:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 3$$

Stap 2: Inductieve aanpak

We gaan bewijs leveren door middel van inductie.

Basisstap (n = 1):

Voor $n = 1$, hebben we $F_1 = 1$ en $F_2 = 1$. Dus:

$$\text{ggd}(F_1, F_2) = \text{ggd}(1, 1) = 1$$

De basisstap is dus waar.

Inductieve stap:

Stel dat de bewering waar is voor $n = k$, dat wil zeggen:

$$\text{ggd}(F_k, F_{k+1}) = 1$$

We moeten nu aantonen dat de bewering ook waar is voor $n = k + 1$, dat wil zeggen:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+2}) = 1$$

Uit de definitie van de Fibonaccigetallen weten we dat:

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$$

We willen dus $\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+2})$ berekenen. Dit wordt:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k)$$

Volgens de eigenschap van de ggd geldt dat:

$$\text{ggd}(a, b + c) = \text{ggd}(a, \text{ggd}(b, c))$$

Dus:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) = \text{ggd}(F_{k+1}, \text{ggd}(F_{k+1}, F_k))$$

Omdat we aannemen dat $\text{ggd}(F_k, F_{k+1}) = 1$ volgens de inductiehypothese, geldt:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_k) = 1$$

Dit betekent dat:

$$\text{ggd}(F_{k+1}, F_{k+1} + F_k) = \text{ggd}(F_{k+1}, 1) = 1$$

Conclusie:

Omdat de inductieve stap is bewezen, volgt uit de inductie dat $\text{ggd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ voor elke $n \geq 1$.

Dus, we hebben aangetoond dat de grootste gemene deler van twee opeenvolgende Fibonaccigetallen altijd 1 is.