H1: Verzamelingen

Wat is een aftelbare verzameling, bewijs $\mathbb{Q}$ is aftelbaar en $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar. Is $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ aftelbaar?

Een **aftelbare verzameling** is een verzameling waarvan de elementen in een bijectie kunnen worden geplaatst met de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$. Dat betekent dat de verzameling eindig is, of oneindig maar dezelfde kardinaliteit heeft als $\mathbb{N}$, oftewel de verzameling is **denumerabel**.

Bewijs dat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is

De rationale getallen $\mathbb{Q}$ zijn de getallen die geschreven kunnen worden als $\frac{p}{q}$, waarbij $p, q \in \mathbb{Z}$ en $q \neq 0$. We moeten aantonen dat er een bijectie bestaat tussen $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{N}$.

Bewijs: 1. We representeren $\mathbb{Q}$ als alle breuken $\frac{p}{q}$, waarbij $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{N}$. 2. Orden alle paren (p, q) in een rooster: - p is op de horizontale as $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...)$. - q is op de verticale as $(1, 2, 3, ...)$.

3. Door een zigzagpatroon te gebruiken, zoals het diagonale doorlopen van het rooster (Cantor-diagonalisatie), kunnen we alle paren (p, q) opsommen.
4. We negeren dubbele vertegenwoordigingen van hetzelfde rationale getal (bijv. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$) en breuken waarbij p en q geen relatief priem zijn.
5. Omdat er een opsomming mogelijk is van al deze breuken, en de dubbele elementen weggefilterd kunnen worden zonder de opsomming te onderbreken, is $\mathbb{Q}$ aftelbaar.

Conclusie: Er bestaat een bijectie tussen $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{N}$, dus $\mathbb{Q}$ is aftelbaar.

Bewijs dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is

Het bewijs dat $\mathbb{R}$ niet aftelbaar is, wordt klassiek gedaan met het **diagonalisatie-argument van Cantor**.

Bewijs: 1. Veronderstel dat $\mathbb{R}$ aftelbaar is. Dat betekent dat alle reële getallen in het interval $[0, 1]$ opgesomd kunnen worden, bijv.:

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots, \quad x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots, \quad \dots$$

waarbij a_{ij} de j-de decimale cijfer van het i-de getal is.

2. Bouw een nieuw getal y door diagonaal door deze lijst te gaan en de j-de decimale cijfer van x_j te wijzigen. Stel:

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{als } a_{jj} \neq 1, \\ 2 & \text{als } a_{jj} = 1. \end{cases}$$

   Het nieuwe getal $y = 0.b_1b_2b_3\dots$ verschilt in elk cijfer b_j van x_j.

3. Het getal y zit niet in de oorspronkelijke lijst, wat in tegenspraak is met de veronderstelling dat $\mathbb{R}$ aftelbaar is.

Conclusie: $\mathbb{R}$ is niet aftelbaar.

Is $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aftelbaar?

Ja, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar. We bewijzen dit door een opsomming te construeren:

Bewijs: 1. Elk element van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kan worden gezien als een paar (m, n), waarbij $m, n \in \mathbb{N}$. 2. Orden de paren (m, n) in een rooster met m op de horizontale as en n op de verticale as. 3. Door het rooster diagonaal door te lopen (zoals Cantor-diagonalisatie), kunnen we alle paren opsommen: - Eerst $(0, 0)$, - Dan $(1, 0), (0, 1)$, - Dan $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$, enzovoort. 4. Deze opsomming geeft een bijectie tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

Conclusie: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is aftelbaar.

H2: Relaties en functies

Wat is een partieel geordende verzameling? Wat is reflexief, anti-symmetrisch, transitief (symbolisch), stel een gegeven verzameling, toon aan dat deze reflexief, anti-symmetrisch en of transitief is. Is dit een totale orde? Wat is minima en minimaal element? Stel $v = 2^x$ en $x = a, b, c$: Bewijs dat dit een partiële ordening is.

Wat is een functie en een injectieve functie (in symbolen)? Neem f, g injectief, bewijs dat $f \circ g$ injectief is of geef een tegenvoorbeeld als dit niet altijd zo is.

Wat is een relatie, equivalentierelatie en equivalentieklasse? Toon aan dat twee verschillende equivalentieklassen disjunct zijn.

Geef de definitie van een relatie, equivalentieklassen en een partitie. Toon aan dat alle equivalentierelaties partities zijn.

Wat is een functie en een injectieve functie (in symbolen)? Neem f, g injectief, bewijs dat $f \circ g$ injectief is of geef een tegenvoorbeeld als dit niet altijd zo is.

H3: Bewijstechnieken

(3x) Bewijs via inductie het Binomium van Newton.

Wat is inductie? Geef alle verschillende soorten inductie. Bewijs via inductie: $\sum_{i=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

H4: Tellen

H5: Kansrekening

Wat is een poisson verdeling (symbolisch)? Leid de verwachtingswaarde af. Wat is een toevalsveranderlijke. Bewijs $E(x + y) = ?$. Bewijs voor hetzelfde ook de var.

Wat is een poissonverdeelde toevalsveranderlijke? Wat is de variantie ervan? Bewijs.

Wat is een normaalverdeelde toevalsveranderlijke? Hoe en wanneer kunnen we hier een binomiale verdeling mee benaderen?

Wat is de formule voor de variantie van een binomiale verdeling? Bewijs.

Bewijs $E[x + y]$ en $var(x + y)$ en geef de voorwaarde hiervoor.

Wat is een toevalsveranderlijke? Toon aan dat de som van $X \sim NB(n, p)$: $P(X_i) = 1$.

Leg de paradox van Simpson uit met een voorbeeld.

Wat is een binomiaal verdeelde toevalsveranderlijke? Bewijs E(x).

Bewijs de regel van Bayes en de somregel.

Wat is een toevalsveranderlijke? Toon aan dat de som van $X \sim NB(n, p)$: $P(X_i) = 1$.

Gegeven twee poissonverdelingen $P(\lambda 1), P(\lambda 2)$. Bewijs dat $P(\lambda 1 + \lambda 2) = k$ en dat dit nog steeds poissonverdeeld is.

H6: Boolean algebra

(2x) Wat is het dualiteitsprincipe? Leg uit a.d.h.v. de terminologie. Toon aan en geef alle definities die in deze eigenschap voorkomen (verduidelijk).

H7: Genererende functies