

**И. К. Марчевский, О. В. Щерица**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

*Методические указания к выполнению  
лабораторных работ по курсу  
«Методы вычислений»*

Под редакцией *М. П. Галанина*

  
Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н. Э. Баумана  
2 0 1 6

УДК 519.6  
ББК 32.97  
М30

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*  
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/93/book1559>

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Прикладная математика»

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом МГТУ им. Н. Э. Баумана  
в качестве методических указаний*

Рецензент  
канд. техн. наук, доц. *А. В. Котович*

**Марчевский, И. К.**  
М30 Численные методы решения задач математической физики :  
методические указания к выполнению лабораторных работ по  
курсу «Методы вычислений» / И. К. Марчевский, О. В. Щерица;  
под ред. М. П. Галанина. — Москва : Издательство МГТУ им.  
Н. Э. Баумана, 2016. — 63, [1] с.

ISBN 978–5–7038–4474–8

Лабораторный практикум по курсу «Методы вычислений» ориен-  
тирован на изучение численных методов решения задач математической  
физики, а также дифференциальных и интегральных уравнений. При-  
ведены примеры заданий, сформулированы контрольные вопросы и  
требования, предъявляемые к отчетам по лабораторным работам.

Для студентов 3-го курса, обучающихся по направлению подготов-  
ки бакалавров «Прикладная математика».

УДК 519.6  
ББК 32.97

ISBN 978–5–7038–4474–8

© МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016  
© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016

## Предисловие

Курс «Методы вычислений» занимает одно из центральных мест в цикле дисциплин, определяющих уровень профессиональной подготовки бакалавров, обучающихся по направлению «Прикладная математика». Лабораторный практикум составлен в соответствии с учебной программой дисциплины, рассчитан на один семестр и предполагает выполнение пяти лабораторных работ. Задачами лабораторного практикума являются изучение численных методов и алгоритмов, их использование для решения прикладных задач и получение навыков вычислительного программирования.

Для успешного выполнения заданий необходимо знание следующих дисциплин, включенных в учебный план специальности «Прикладная математика»: математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ и интегральные уравнения, методы вычислений (в объеме первого семестра), информатика, практикум по математическим пакетам.

Выполнение лабораторных работ включает написание программ, реализующих соответствующие численные методы, и подготовку отчета. Содержание отчетов приведено в заданиях к лабораторным работам.

На защите лабораторной работы студент должен продемонстрировать знание теории численных методов в необходимом объеме и умение применять ее на практике. ***Способ проведения защиты определяется преподавателем.*** При подготовке к защите рекомендуется использовать контрольные вопросы, приведенные в конце каждого задания.

Объем лабораторных работ достаточно велик, поэтому рекомендуется выполнять их последовательно в течение всего семестра в соответствии с материалом, изучаемым на лекциях и практических занятиях. Рекомендуемый график защиты лабораторных работ приведен в таблице.

№ п/п	Тема лабораторной работы	Неделя защиты
1	Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений	4
2	Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности	7
3	Численное решение краевых задач для одномерного волнового уравнения	10
4	Численное решение краевых задач для двумерного уравнения Пуассона	13
5	Методы численного решения интегральных уравнений	16

Написание программ допускается на любом языке программирования (C/C++, Pascal/Delphi, Fortran и др.). Во всех случаях предполагается, что для хранения в памяти компьютера чисел с плавающей точкой следует использовать тип данных, обеспечивающий **повышенную точность**. В языках программирования C/C++ и Pascal/Delphi это соответствует типу `double`.

При выполнении лабораторных работ целесообразно пользоваться вычислительными процедурами, реализованными в ходе выполнения лабораторных работ предыдущего семестра. К таким процедурам относятся, в частности, решение систем линейных алгебраических уравнений. В свою очередь, реализованные в рамках выполнения данных лабораторных работ вычислительные процедуры могут быть полезны при освоении последующих дисциплин учебного плана. Поэтому рекомендуется разрабатывать соответствующие программные модули достаточно гибко, имея в виду их возможное использование в будущем.

Авторы выражают искреннюю благодарность за полезное обсуждение текста пособия и помощь в подготовке заданий для лабораторных работ своим коллегам, а также студентам кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н. Э. Баумана.

# Лабораторная работа № 1

## Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

### Цель работы

Изучение численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

### Содержание работы

Рассмотрим задачу Коши<sup>1</sup> для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}), \quad t \in [t_0, T] \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$\vec{u}(t_0) = (u_1(t_0), u_2(t_0), \dots, u_n(t_0))^T = \vec{u}_0. \quad (1.2)$$

Здесь  $n$  — порядок системы дифференциальных уравнений.

Предполагается, что условия теоремы существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.2) выполнены.

Требуется выполнить следующие действия.

1. Написать программу для численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.1)–(1.2) следующими методами:

---

<sup>1</sup> Огюстен Луи Коши (1789–1857) — великий французский математик, разработал фундамент современного математического анализа, внес огромный вклад в алгебру, математическую физику и многие другие области математики.

- методом Рунге<sup>2</sup> — Кутты<sup>3</sup> четвертого порядка точности;
  - методом Адамса<sup>4</sup> — Башфорта<sup>5</sup> четвертого порядка точности;
  - методом «прогноз-коррекция» четвертого порядка точности.
2. В программе, реализующей метод Рунге — Кутты, предусмотреть процедуру автоматического выбора шага интегрирования, обеспечивающую заданную точность решения. Точность контролировать по правилу Рунге.
  3. На тестовых примерах (имеющих точное аналитическое решение) продемонстрировать работоспособность созданных программ. В качестве одного из тестовых примеров взять уравнение малых колебаний маятника. Повторить численное исследование фазовой плоскости и фазовых траекторий, проведенное в настоящем пособии на стр. 10, и дополнить его расчетами с использованием методов второго порядка точности. Для всех методов найти величину шага по времени, обеспечивающую точность решения  $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-7}$ .
  4. Экспериментально исследовать свойства методов: подтвердить расчетами, что точность метода совпадает с порядком аппроксимации. Сравнить методы по трудоемкости.
  5. Для своего варианта задания на фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  построить фазовые траектории системы. Численно исследовать фазовый портрет вблизи особых точек системы.

---

<sup>2</sup> Карл Давид Тольме Рунге (1856–1927) — немецкий математик, физик и спектроскопист, разработал методы численного интегрирования ОДУ, получил фундаментальные результаты в теории полиномиальной интерполяции, функциональном анализе, векторном анализе.

<sup>3</sup> Мартин Вильгельм Кутта (1867–1944) — немецкий математик, соавтор семейства методов численного интегрирования ОДУ и фундаментального принципа аэродинамики (условие Чаплыгина — Жуковского — Кутты).

<sup>4</sup> Джон Куч Адамс (1819–1892) — британский математик и астроном, изучал вопросы численного интегрирования ОДУ, предсказал существование и положение в пространстве Нептуна.

<sup>5</sup> Фрэнсис Башфорт (1819–1912) — британский математик и баллистик, исследовал движение снарядов в воздухе, форму капель жидкости под действием поверхностного натяжения, занимался инженерными расчетами в строительстве.

## Методические указания

### Общие сведения о задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Обычно задача Коши возникает при анализе процессов, эволюция которых однозначно определяется начальным состоянием. Примерами таких процессов являются динамика механических систем, большинство химических реакций и пр.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка, разрешенного относительно старшей производной:

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad t \in [t_0, T], \\ u(t_0) &= u_0, \quad u'(t_0) = u'_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(t_0) = u_0^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

С помощью замены  $u_k = u^{(k-1)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , задача (1.3) сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме (1.1)–(1.2):

$$\begin{cases} u'_k = u_{k+1}, & k = 1, 2, \dots, (n-1), \\ u'_n = f(t, u_1, \dots, u_n), \\ u_s(t_0) = u_0^{(s-1)}, & s = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.4)$$

### Простейшие методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Некоторые этапы выполнения лабораторной работы проиллюстрируем на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего горизонтальное движение без трения шарика массы  $m$  на пружине с коэффициентом жесткости  $k$ . Переменную координату, задающую положение шарика, обозначим через  $x = x(t)$ . Тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения шарика будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (1.5)$$

Это уравнение обычно записывается в форме

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1.6)$$

Представим уравнение (1.6) в виде (1.1):

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -\frac{k}{m}u_1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Будем считать, что в начальный момент времени  $t = t_0$  шарик находится в точке с координатой  $x(t_0) = 1$ , при этом его скорость  $\dot{x}(t_0) = 0$ , поэтому начальные условия для системы (1.7) имеют вид

$$u_1(t_0) = 1, \quad u_2(t_0) = 0. \quad (1.8)$$

Для численного решения задачи (1.1)–(1.2) можно использовать **явный метод Эйлера**. Введем на отрезке  $[t_0, T]$  равномерную разностную сетку с шагом  $\tau$ :

$$\omega_\tau = \{t_n : t_n = t_0 + n\tau, \quad n = 0, 1, \dots\}.$$

Запишем вместо исходной системы дифференциальных уравнений (1.1) систему алгебраических уравнений:

$$\frac{\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n}{\tau} = \vec{f}(t_n, \vec{y}_n).$$

Здесь  $\vec{y}_n = \vec{y}(t_n)$  — численное решение, известное только в узлах сетки  $\omega_\tau$ . Отсюда с учетом начального условия (1.2) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \tau \vec{f}(t_n, \vec{y}_n), \quad n = 0, 1, \dots, \\ \vec{y}_0 &= \vec{u}_0. \end{aligned}$$

В **неявном методе Эйлера** система (1.1) заменяется системой уравнений

$$\frac{\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n}{\tau} = \vec{f}(t_{n+1}, \vec{y}_{n+1}).$$

Таким образом, на каждом шаге при переходе от  $\vec{y}_n$  к  $\vec{y}_{n+1}$  приходится решать систему уравнений относительно  $\vec{y}_{n+1}$ .



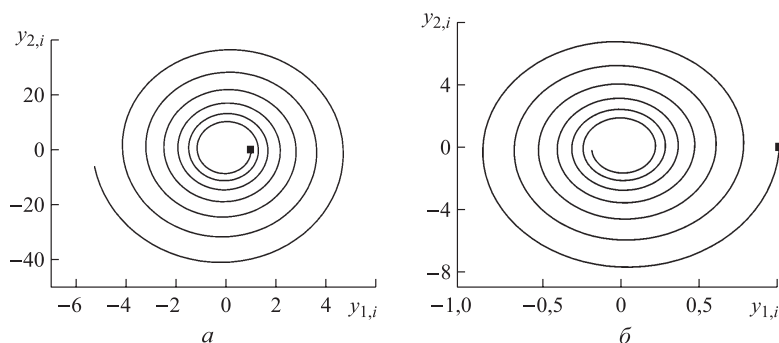
Рассмотрим результаты численного решения задачи (1.7) явным и неявным методами Эйлера. Полученные решения сравним с точным решением задачи (1.6), которое имеет вид

$$x(t) = r \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.9)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — частота колебаний. Амплитуда  $r$  и начальная фаза  $\alpha$  колебаний определяются начальными условиями, т. е. положением шарика  $x_0 = x(t_0)$  и его начальной скоростью  $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$ .

Построим *фазовые траектории*, полученные в результате численного расчета (рис. 1.1). Из точного решения (1.9) следует, что если начальные условия отличны от положения равновесия ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ), то траектория должна быть замкнутой.

Однако с помощью явного метода Эйлера получаем «неустойчивый фокус» (рис. 1.1, а), а неявный метод Эйлера дает «устойчивый фокус» (рис. 1.1, б). Почему так произошло?



**Рис. 1.1.** Фазовые траектории, полученные явным (а) и неявным (б) методом Эйлера. Квадратиком отмечена начальная точка. Параметры системы:  $m = 0,3$  кг,  $k = 20$  Н/м. Шаг по времени  $\tau = 0,01$  с.

Явный метод Эйлера для задачи (1.7)–(1.8) можно записать в виде

$$\vec{y}_{n+1} = (E + \tau G)\vec{y}_n, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

где  $E$  — единичная матрица. Матрица  $G$  имеет два собственных значения  $\lambda^{\pm} = \pm i\omega$ , которым соответствуют два линейно незави-

симых собственных вектора  $\vec{v}^+$ ,  $\vec{v}^-$ . Запишем разложение вектора начальных условий  $\vec{y}_0$  по этому базису:  $\vec{y}_0 = \alpha^+ \vec{v}^+ + \alpha^- \vec{v}^-$ . Подставив это разложение в (1.10), после простых преобразований получим

$$\vec{y}_n = (E + \tau G)^n (\alpha^+ \vec{v}^+ + \alpha^- \vec{v}^-).$$

В то же время векторы  $\vec{v}^+$  и  $\vec{v}^-$  являются собственными векторами матрицы  $(E + \tau G)$ , соответствующими собственным значениям  $1 + \tau \lambda^\pm$ . Поэтому  $\vec{y}_n$  остается ограниченным при  $n \rightarrow \infty$ , если для всех  $\tau$  выполнено  $|1 + \tau \lambda^\pm| \leq 1$ .

В рассматриваемой задаче  $|1 + \tau \lambda^\pm| = \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} > 1$ . Поэтому  $\vec{y}_n$  неограниченно растет (по модулю) при  $n \rightarrow \infty$  и на фазовом портрете наблюдается «неустойчивый фокус» (рис. 1.1, а).

Неявный метод Эйлера для задачи (1.7)–(1.8) имеет вид

$$(E - \tau G) \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n. \quad (1.11)$$

Рассуждая аналогично, получаем, что  $\vec{y}_n$  при  $n \rightarrow \infty$  будет оставаться ограниченным, если для всех  $\tau$  выполнено условие

$\frac{1}{|1 - \tau \lambda^\pm|} \leq 1$ . Для задачи (1.7) выполнено неравенство  $\frac{1}{|1 - \tau \lambda^\pm|} < 1$ , таким образом в расчетах амплитуда колебаний затухает и вместо замкнутой фазовой траектории получаем «устойчивый фокус», и фазовые траектории системы сходятся к положению равновесия (0, 0) (рис. 1.1, б).

В качестве методов второго порядка точности предлагается рассмотреть **симметричную схему**:

$$\frac{\vec{y}_{n+1} - \vec{y}_n}{\tau} = \frac{\vec{f}(t_n, \vec{y}_n) + \vec{f}(t_{n+1}, \vec{y}_{n+1})}{2}$$

и **метод Рунге — Кутты** второго порядка.

### Методы Рунге — Кутты

Проинтегрируем (1.1) по  $t$  от  $t_n$  до  $t_{n+1}$  и, воспользовавшись формулой Ньютона — Лейбница, получим

$$\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{u}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{f}(t, \vec{u}(t)) dt. \quad (1.12)$$

Если бы входящий в это равенство интеграл можно было вычислить аналитически, то получилась бы простая формула, позволяющая последовательно находить решение в узлах сетки. В большинстве случаев на практике это невозможно, и интеграл приходится находить численно, используя *квадратурные формулы*.

Введем на отрезке  $[t_n, t_{n+1}]$   $m$  вспомогательных узлов:

$$t_n^{(1)} = t_n + a_1\tau, \quad t_n^{(2)} = t_n + a_2\tau, \quad \dots, \quad t_n^{(m)} = t_n + a_m\tau,$$

где  $0 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq 1$ . Заметим, что  $t_n^{(1)} = t_n$ ,  $t_n^{(m)} \leq t_{n+1}$ . Тогда для вычисления (1.12) можно использовать следующую приближенную формулу:

$$\vec{y}_{n+1} \approx \vec{y}_n + \tau \sum_{i=1}^m \sigma_i \vec{f}(t_n^{(i)}, \vec{y}_n^{(i)}). \quad (1.13)$$

Здесь  $\sigma_i$  — некоторые коэффициенты. Но воспользоваться равенством (1.13) для вычисления  $\vec{y}_{n+1}$  нельзя, так как неизвестны значения  $\vec{y}_n^{(i)}$  функции  $\vec{y}$  в точках  $t_n^{(i)}$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ . Чтобы найти эти значения, запишем равенства, аналогичные (1.12):

$$\vec{u}_n^{(i)} = \vec{u}_n + \int_{t_n}^{t_n^{(i)}} \vec{f}(t, \vec{u}(t)) dt, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (1.14)$$

Заменяя для каждого  $i$  входящий в формулу (1.14) интеграл приближенным значением, вычисленным по соответствующей квадратурной формуле с узлами  $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}, \dots, t_n^{(i-1)}$ , придем к приближенным равенствам

$$\begin{aligned} \vec{y}_n^{(2)} &\approx \vec{y}_n + \tau b_{21} \vec{f}(t_n^{(1)}, \vec{y}_n^{(1)}), \\ \vec{y}_n^{(3)} &\approx \vec{y}_n + \tau \left( b_{31} \vec{f}(t_n^{(1)}, \vec{y}_n^{(1)}) + b_{32} \vec{f}(t_n^{(2)}, \vec{y}_n^{(2)}) \right), \\ &\dots \\ \vec{y}_n^{(i)} &\approx \vec{y}_n + \tau \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \vec{f}(t_n^{(j)}, \vec{y}_n^{(j)}), \\ &\dots \\ \vec{y}_n^{(m)} &\approx \vec{y}_n + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} \vec{f}(t_n^{(j)}, \vec{y}_n^{(j)}), \end{aligned}$$

позволяющим последовательно вычислить значения  $\vec{y}_n^{(2)}, \vec{y}_n^{(3)}, \dots, \vec{y}_n^{(m)}$ .

После подстановки этих значений в (1.13) и замены приближенных равенств точными получим:

$$\begin{aligned}
 \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \tau \vec{K}_n, & \vec{K}_n &= \sum_{i=1}^m \sigma_i \vec{k}_n^{(i)}, \\
 \vec{k}_n^{(1)} &= \vec{f}(t_n, \vec{y}_n), \\
 \vec{k}_n^{(2)} &= \vec{f}\left(t_n + a_2\tau, \vec{y}_n + \tau b_{21} \vec{k}_n^{(1)}\right), \\
 \vec{k}_n^{(3)} &= \vec{f}\left(t_n + a_3\tau, \vec{y}_n + \tau(b_{31} \vec{k}_n^{(1)} + b_{32} \vec{k}_n^{(2)})\right), \\
 &\dots \\
 \vec{k}_n^{(m)} &= \vec{f}\left(t_n + a_m\tau, \vec{y}_n + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} \vec{k}_n^{(j)}\right).
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Заметим, что формулы (1.15) задают *явный*  $m$ -этапный (иногда говорят « $m$ -стадийный») метод Рунге — Кутты. Конкретные значения параметров  $m$ ,  $\sigma_i$ ,  $a_i$  и  $b_{ij}$  выбираются из соображений аппроксимации и точности. Например, можно предложить следующий двухэтапный метод Рунге — Кутты второго порядка:

$$\begin{aligned}
 \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \tau(0,5\vec{k}_n^{(1)} + 0,5\vec{k}_n^{(2)}), \\
 \vec{k}_n^{(1)} &= \vec{f}(t_n, \vec{y}_n), & \vec{k}_n^{(2)} &= \vec{f}\left(t_n + \tau, \vec{y}_n + \tau\vec{k}_n^{(1)}\right).
 \end{aligned}$$

Возможен и другой часто используемый двухэтапный метод Рунге — Кутты второго порядка:

$$\begin{aligned}
 \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \tau\vec{k}_n^{(2)}, \\
 \vec{k}_n^{(1)} &= \vec{f}(t_n, \vec{y}_n), & \vec{k}_n^{(2)} &= \vec{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{k}_n^{(1)}\right).
 \end{aligned}$$

Наиболее распространенным вариантом метода Рунге — Кутты является четырехэтапный метод четвертого порядка точности:

$$\begin{aligned}
 \vec{y}_{n+1} &= \vec{y}_n + \tau \vec{K}_n, & \vec{K}_n &= \frac{1}{6}(\vec{k}_n^{(1)} + 2\vec{k}_n^{(2)} + 2\vec{k}_n^{(3)} + \vec{k}_n^{(4)}), \\
 \vec{k}_n^{(1)} &= \vec{f}(t_n, \vec{y}_n), & \vec{k}_n^{(2)} &= \vec{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{k}_n^{(1)}\right), \\
 \vec{k}_n^{(3)} &= \vec{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, \vec{y}_n + \frac{\tau}{2}\vec{k}_n^{(2)}\right), & \vec{k}_n^{(4)} &= \vec{f}(t_n + \tau, \vec{y}_n + \tau\vec{k}_n^{(3)}).
 \end{aligned}$$

Отметим, что существуют явные пятиэтапные методы Рунге — Кутты пятого порядка, однако для  $m > 5$  нельзя построить явный метод Рунге — Кутты  $m$ -го порядка с  $m$  промежуточными вычислениями правой части. В частности, явный метод Рунге — Кутты шестого порядка является по крайней мере семиэтапным.

### Методы Адамса

Воспользуемся для вычисления интеграла в формуле (1.12) квадратурной формулой *интерполяционного типа*. Заменим подынтегральную функцию  $\vec{F}(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t))$  интерполяционным полиномом  $(k-1)$ -й степени  $\vec{P}_{k-1}(t)$ , принимающим значения  $\vec{f}_n, \vec{f}_{n-1}, \dots, \vec{f}_{n-k+1}$  в тех узлах  $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k+1}$ , где значения сеточной функции  $\vec{y}$  уже найдены. Интегрирование этого многочлена дает приближенное равенство

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{f}(t, \vec{u}(t)) dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{P}_{k-1}(t) dt = \tau \sum_{j=1}^k b_j \vec{f}_{n+1-j}.$$

В результате получаем формулу

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \sum_{j=1}^k b_j \vec{f}_{n+1-j}, \quad (1.16)$$

соответствующую  $k$ -шаговому методу Адамса — Башфорта.

Несмотря на высокий порядок точности, которым обладают явные  $k$ -шаговые методы Адамса, в вычислительной практике они используются редко. Одна из основных причин заключается в том, что в задачах, представляющих наибольший интерес для приложений, неявные методы обладают лучшими свойствами устойчивости и позволяют вести расчеты с существенно большими шагами, нежели явные методы.

Сложность использования неявных методов Адамса состоит в необходимости решать уравнение, которое может оказаться нелинейным относительно  $\vec{y}_{n+1}$ :

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \sum_{j=0}^k b_j \vec{f}_{n+1-j}. \quad (1.17)$$

Значение  $\vec{y}_{n+1}$  можно найти, используя, например, метод простой итерации

$$\vec{y}_{n+1}^{(s+1)} = \vec{\psi}(\vec{y}_{n+1}^{(s)}), \quad s \geq 0,$$

где  $\vec{\psi}(\vec{y}) = \tau b_0 \vec{f}(t_{n+1}, \vec{y}) + \vec{y}_n + \tau \sum_{j=1}^k b_j \vec{f}_{n+1-j}$ .

Часто в качестве начального приближения  $\vec{y}_{n+1}^{(0)}$  принимают значение, получаемое по явной формуле Адамса (1.16), и выполняют только одну итерацию в методе простой итерации. В результате приходят к методу **прогноза и коррекции**. Один из широко используемых методов прогноза и коррекции получается при совместном использовании методов (1.16) и (1.17) четвертого порядка точности:

$$\begin{aligned} \text{прогноз: } \vec{y}_{n+1}^{(0)} &= \vec{y}_n + \frac{\tau}{24}(55\vec{f}_n - 59\vec{f}_{n-1} + 37\vec{f}_{n-2} - 9\vec{f}_{n-3}), \\ \vec{f}_{n+1}^{(0)} &= \vec{f}(t_{n+1}, \vec{y}_{n+1}^{(0)}); \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\text{коррекция: } \vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{\tau}{24}(9\vec{f}_{n+1}^{(0)} + 19\vec{f}_n - 5\vec{f}_{n-1} + \vec{f}_{n-2}).$$

Заметим, что метод (1.18) — явный.

### Автоматический выбор шага. Правило Рунге

Ясно, что на участках плавного изменения решения счет можно вести с достаточно крупным шагом  $\tau$ . В то же время на участках, где происходят резкие изменения решения, необходимо выбирать мелкий шаг интегрирования. Обычно начальное значение шага  $\tau_1$  задается пользователем, далее шаг интегрирования меняется в соответствии с величиной локальной погрешности, получаемой в ходе вычислений. Один из способов оценки локальной погрешности и выбора очередного шага интегрирования — это использование **правила Рунге**.

Пусть в точке  $t_n \in [t_0, T]$  найдено численное решение  $\vec{y}_n$  задачи (1.1). Задавая величину шага  $\tau_{n+1}$ , можно найти решение  $\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}}$  в точке  $t_{n+1}$ . Для метода Рунге — Кутты  $p$ -го порядка точности

справедлива следующая оценка локальной погрешности:

$$\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}} = \vec{r}(t_n, u(t_n))\tau_{n+1}^{p+1} + O(\tau_{n+1}^{p+2}),$$

где  $\vec{R}(t) = \vec{r}(t, u(t))$  — непрерывная вектор-функция;  $\vec{u}(t)$  — точное решение задачи (1.1). Следовательно, при достаточно малых  $\tau_{n+1}$  справедливо приближенное равенство

$$\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}} \approx \vec{r}(t_n, u(t_n))\tau_{n+1}^{p+1}. \quad (1.19)$$

Уменьшим шаг интегрирования в 2 раза

$$\tau_{n+1/2} = \frac{\tau_{n+1}}{2}$$

и снова найдем решение в точке  $t_{n+1}$ ; для этого потребуется выполнить два шага. Полученное таким образом значение  $\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}}$  будет отличаться от  $\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}}$ . Выполнение двух шагов величиной  $\tau_{n+1/2}$  приведет к локальной погрешности

$$\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} \approx 2\vec{r}(t_n, u(t_n))\tau_{n+1/2}^{p+1}. \quad (1.20)$$

Вычитая из равенства (1.19) соотношение (1.20), получим следующую формулу:

$$\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}} \approx (2^p - 1) 2\vec{r}(t_n, u(t_n))\tau_{n+1/2}^{p+1}.$$

С ее помощью из (1.20) найдем *апостериорную погрешность* вычислений:

$$\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} \approx \frac{\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}}}{2^p - 1}.$$

Если требуемая точность достигнута, т. е.

$$\|\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}}\| \approx \left\| \frac{\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}}}{2^p - 1} \right\| \leq \varepsilon,$$

то принимают  $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}}$  и переходят к вычислению  $\vec{y}_{n+2}$ . В противном случае нужно в качестве  $\tau_{n+1}$  взять половину первоначального значения и повторить описанную процедуру.

Отметим, что если выполняется неравенство

$$\|\vec{u}(t_{n+1}) - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}}\| \approx \left\| \frac{\vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1/2}} - \vec{y}_{n+1}^{\tau_{n+1}}}{2^p - 1} \right\| \ll \varepsilon,$$

то величину шага целесообразно удвоить, начиная со следующего шага.

### Содержание отчета

1. Постановка задачи.
2. Номер варианта и исходные данные.
3. Краткое описание методов решения.
4. Тестовые примеры, демонстрирующие работоспособность программы.
5. Результаты расчетов и их анализ. Сравнение решений, полученных различными методами с разной точностью. Сравнение эффективности рассмотренных методов.
6. Исследование фазового портрета системы. Анализ особых точек и аттракторов. Физическая интерпретация результатов расчетов.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?
2. Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией? Что называют интегральной кривой?
3. Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?
4. Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?



5. Как найти  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ , чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции (1.18)?
6. Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким? Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достигнуть заданную точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?
- 7.\* Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?

### Примеры заданий

1. Постройте фазовые траектории и численно исследуйте особые точки системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$$

Особые точки:  $(0, 1)$  — седло,  $(0, -1)$  — фокус.

2. Постройте фазовые траектории и численно исследуйте особые точки системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$$

Особые точки:  $(0, 1)$  — центр,  $(0, -1)$  — седло.

3. Постройте фазовые траектории системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

при следующих значениях параметров:  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ .

## Лабораторная работа № 2

### **Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности**

#### **Цель работы**

Изучение разностных методов решения краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности. Изучение интегро-интерполяционного метода построения разностных схем.

#### **Содержание работы**

Рассмотрим одномерную математическую модель, описывающую распространение теплоты в тонком стержне длиной  $L$  с теплоизолированной боковой поверхностью, на концах которого задан температурный режим. Процесс теплопроводности описывается уравнением параболического типа

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — линейная плотность;  $K(u, x)$  — коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры и координаты.

Пусть один конец стержня поддерживается при заданной фиксированной температуре или теплоизолирован, на другом конце задан тепловой поток. Таким образом, возможны следующие варианты краевых условий ( $0 \leq t \leq T$ ):

$$\begin{aligned}
1) \quad & -K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = P(t), \quad u(L, t) = u_{right}(t); \\
2) \quad & u(0, t) = u_{left}(t), \quad K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L,t)} = P(t); \\
3) \quad & -K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = P(t), \quad K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L,t)} = 0; \\
4) \quad & -K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} = 0, \quad K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L,t)} = P(t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Будем считать, что тепловой поток  $P(t)$  на конце стержня задается одной из функций, зависящих от времени:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \begin{cases} Q, & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0; \end{cases} \\
P_2 &= \begin{cases} 2Qt, & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0; \end{cases} \\
P_3 &= \begin{cases} 2Q(t_0 - t), & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0; \end{cases} \\
P_4 &= \begin{cases} 2Qt, & 0 \leq t \leq 0,5t_0, \\ 2Q(t_0 - t), & 0,5t_0 < t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В начальный момент времени  $t = 0$  распределение температуры по длине стержня примем известным:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \tag{2.4}$$

Требуется выполнить следующие действия.

1. Для задачи (2.1)–(2.4) интегро-интерполяционным методом построить разностную схему.
2. Написать программу для численного решения задачи (2.1)–(2.4). Рассмотреть два случая:

- а) коэффициент теплопроводности зависит от пространственной координаты:

$$K = K(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq x_1, \\ k_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + k_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < x < x_2, \\ k_2, & x_2 \leq x \leq L; \end{cases}$$

- б) коэффициент теплопроводности зависит от температуры:

$$K = K(u) = \alpha + \beta u^\gamma.$$

3. Найти момент времени  $T^*$ , в который температура в середине стержня будет наибольшей. Расчеты выполнить с точностью  $\varepsilon = 0,01$ .
4. Проиллюстрировать результаты расчетов анимацией или серией графиков, позволяющей наблюдать эволюцию распределения теплоты в стержне.

Удельная теплоемкость стержня  $c$ , плотность  $\rho$ , начальная температура стержня  $u_0$ , постоянные  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , определяющие коэффициент теплопроводности материала, а также константа  $Q$  и момент времени  $t_0$ , задающие температурный режим на концах, определяются вариантом задания.

## Методические указания

### Общие сведения о краевой задаче для одномерного уравнений теплопроводности

Параболическое уравнение (2.1) является квазилинейным, так как оно линейно в отношении старшей производной.

Температурный режим на концах стержня описывается уравнениями, определяющими граничные условия. Если на конце задана температура  $\bar{u}$ , то граничное условие принимает вид  $u(0, t) = \bar{u}$  или  $u(L, t) = \bar{u}$ . Если на конце задан тепловой поток  $P(t)$ , то граничное условие будет иметь вид

$$-K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0, t)} = P(t) \quad (2.5)$$

или

$$K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L, t)} = P(t). \quad (2.6)$$

В частном случае, если конец теплоизолирован,  $P(t) = 0$  и граничное условие принимает вид

$$-K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0, t)} = 0 \quad \text{или} \quad K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L, t)} = 0.$$

В дальнейшем для упрощения выкладок остановимся на одном варианте, когда на левом конце ( $x = 0$ ) задана температура, а на правом ( $x = L$ ) — тепловой поток  $P(t)$ , в начальный момент времени стержень равномерно прогрет, т. е.  $u_0 = \text{const}$ . Тогда получаем смешанную задачу

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < L, \quad (2.8)$$

$$u(0, t) = u_{\text{left}}(t) \equiv u_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.9)$$

$$K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L, t)} = P(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.10)$$

### Разностная схема

Для численного решения задачи (2.7)–(2.10) строится ее дискретный аналог. Непрерывная область определения искомой функции  $u(x, t)$  заменяется на дискретную, представляющую собой конечное множество точек — сетку. Непрерывная функция заменяется сеточной, определенной в узлах сетки. Дифференциальное уравнение, начальное и граничные условия заменяются своими дискретными аналогами, связывающими значения сеточной функции. В результате задача сводится к решению системы алгебраических уравнений, часто линейных, определяющих некоторую сеточную функцию. Эта сеточная функция дает приближенное решение исходной непрерывной задачи в узлах сетки. Для нахождения решения исходной задачи (2.7)–(2.10) между узлами сетки используются методы интерполяции.

Однородную консервативную разностную схему для уравнения теплопроводности можно получить при помощи **интегро-интерполяционного метода**. Для упрощения изложения предположим, что коэффициент теплопроводности  $K$  зависит только от координаты  $x$ , т. е.  $K = K(x)$ .

Построим в области  $\Omega_T = \{0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T\}$  сетку:

$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = L/N\}$  — равномерная сетка с шагом  $h$  на отрезке  $0 \leq x \leq L$ ;

$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau = T/N_0\}$  — равномерная сетка с шагом  $\tau$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ ;

тогда  $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_i, t_j), \quad x_i \in \omega_h, \quad t_j \in \omega_\tau\}$  — сетка в  $\Omega_T$ .

Искомая функция  $u(x, t)$  является функцией двух переменных, поэтому для записи ее сеточного аналога  $y_i^j$  понадобится два индекса: нижний соответствует узлу сетки по пространству  $x_i$ , верхний — моменту времени  $t_j$ .

Рассмотрим уравнение (2.7), проинтегрируем его по прямоугольной ячейке  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}$  ( $0 < i < N$ ):

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (2.11)$$

Введем обозначение  $w(x, t) = K(x) \frac{\partial u}{\partial x}$ , тогда уравнение (2.11) можно записать в виде

$$c\rho \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)) dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (w(x_{i+1/2}, t) - w(x_{i-1/2}, t)) dt, \quad 0 < i < N. \quad (2.12)$$

Аппроксимируем входящие в уравнение (2.12) интегралы и производные следующим образом:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx \approx hu(x_i, t),$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} w(x_{i-1/2}, t) dt \approx \tau \left( \sigma w(x_{i-1/2}, t_{j+1}) + (1 - \sigma) w(x_{i-1/2}, t_j) \right).$$

Здесь  $\sigma$  — числовой параметр,  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

Выразим  $w(x_{i-1/2}, t_j)$  через значения функции  $u(x, t)$  в точках сетки. Для этого проинтегрируем соотношение  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w(x, t)}{K(x)}$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ . Получим

$$u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x, t)}{K(x)} dx \approx w(x_{i-1/2}, t) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)}. \quad (2.13)$$

Обозначим

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{K(x)} \right)^{-1}, \quad (2.14)$$

получим  $w(x_{i-1/2}, t) \approx a_i \frac{u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)}{h} = a_i u_{\bar{x}, i}$ , тогда

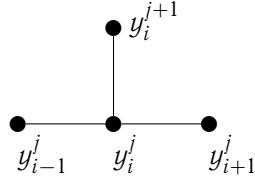
$$w(x_{i-1/2}, t_j) \approx a_i u_{\bar{x}, i}^j, \quad w(x_{i+1/2}, t_j) \approx a_{i+1} u_{x, i}^j.$$

Подставляя эти выражения в (2.12), заменяя  $u$  на  $y$  и вводя обозначения  $w_{i-1/2}^j = a_i y_{\bar{x}, i}^j$ ,  $w_{i+1/2}^j = a_{i+1} y_{x, i}^j$ , получим следующую однородную консервативную разностную схему:

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( \sigma (w_{i+1/2}^{j+1} - w_{i-1/2}^{j+1}) + (1 - \sigma) (w_{i+1/2}^j - w_{i-1/2}^j) \right),$$

$$0 < i < N. \quad (2.15)$$

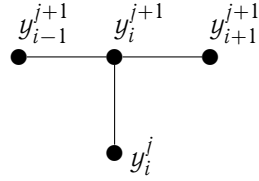
Конфигурация соседних узлов, используемых для записи сеточного уравнения, называется **шаблоном** разностной схемы. При  $\sigma = 0$  получим шаблон



и сеточное уравнение

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - a_i \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} \right), \quad 0 < i < N. \quad (2.16)$$

Вариант  $\sigma = 1$  дает шаблон



и сеточное уравнение

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - a_i \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right), \quad 0 < i < N. \quad (2.17)$$

Дискретные аналоги граничных условий строятся по тому же принципу. Для задачи (2.7)–(2.10) левое граничное условие (2.9) принимает вид

$$y_0^{j+1} = u_0. \quad (2.18)$$

Для аппроксимации правого граничного условия проинтегрируем уравнение (2.7) по прямоугольной области  $x_{N-1/2} \leq x \leq x_N$ ,  $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ :

$$c\rho \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)) dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (w(x_N, t) - w(x_{N-1/2}, t)) dt.$$



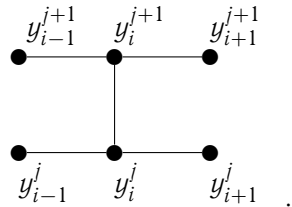
Из граничного условия (2.10) известно, что  $w(x_N, t) = P(t)$ . Таким образом, на границе области получаем следующее разностное уравнение:

$$c\rho \frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} = \frac{2}{h} \left( \sigma (P(t_{j+1}) - w_{N-1/2}^{j+1}) + (1 - \sigma) (P(t_j) - w_{N-1/2}^j) \right). \quad (2.19)$$

Совокупность значений сеточной функции  $T^j = \{y_i^j, i = 0, 1, \dots, N\}$ , отвечающих одному моменту времени, называется **временным слоем**. Полученные уравнения связывают два соседних временных слоя. Учитывая, что решение на нулевом слое  $T^0$  определяется начальными данными (2.8), заключаем, что уравнения (2.16) (или (2.17)) совместно с (2.18) и (2.19) позволяют последовательно рассчитывать значения сеточной функции по слоям: значения  $T^1$  — на основе известных значений  $T^0$ , значения  $T^2$  — на основе уже известных значений  $T^1$  и т. д.

Различие между уравнениями (2.16) и (2.17) состоит в том, что первое из них позволяет непосредственно вычислять значения решения на слое  $T^{j+1}$  по значениям на слое  $T^j$ , в то время как при использовании (2.17) для получения значений на очередном временном слое требуется решить систему из  $(N + 1)$  алгебраических уравнений ( $(N - 1)$  уравнение (2.17) для внутренних узлов и уравнения (2.18) и (2.19) для граничных узлов). Разностная схема, основанная на уравнении (2.16), называется **двухслойной явной**, а разностная схема, основанная на уравнении (2.17), — **двухслойной неявной**.

Отметим, что построенные разностные схемы (2.15) при  $\sigma \neq 0$  и  $\sigma \neq 1$  порождают целое семейство схем с шеститочечным шаблоном



Такие схемы называются **смешанными**. Крайние значения параметра  $\sigma$  отвечают ранее построенным явной и неявной схемам, при  $\sigma = 1/2$  схема называется **симметричной**. Параметр  $\sigma$  называется **весом схемы**.

При анализе разностной схемы (2.15), как, впрочем, и любой другой разностной схемы, возникают следующие вопросы.

1. Существует ли решение системы линейных алгебраических уравнений (2.15), (2.18), (2.19) и единственно ли оно?
2. Каким методом осуществлять поиск этого решения?
3. Какое отношение имеет система разностных уравнений (2.15), (2.18), (2.19) к исходной задаче (2.7)–(2.10); иначе говоря, переходит ли разностное уравнение (2.15) в уравнение (2.7), (2.9) в (2.18) и (2.10) в (2.19), если шаги сетки  $h$  и  $\tau$  стремятся к нулю? Это вопрос аппроксимации дифференциальной задачи (2.7)–(2.10) разностной схемой (2.15), (2.18), (2.19).
4. Сходится ли решение разностной задачи  $y_i^j$  к решению  $u(x, t)$  дифференциальной задачи при  $h \rightarrow 0$  и  $\tau \rightarrow 0$ ?

На первые два вопроса легко ответить. Разностная задача (2.15), (2.18), (2.19) решается методом прогонки. Систему уравнений (2.15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} &= -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0^{j+1} &= u_0, \quad y_N^{j+1} = \varkappa y_{N-1}^{j+1} + \mu, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\sigma}{h} a_i, \quad B_i = \frac{\sigma}{h} a_{i+1}, \quad C_i = \frac{\sigma}{h} a_i + \frac{\sigma}{h} a_{i+1} + c\rho \frac{h}{\tau}, \\ F_i &= c\rho \frac{h}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma)(w_{i+1/2}^j - w_{i-1/2}^j), \\ \varkappa &= \frac{\sigma a_N / h}{c\rho h / (2\tau) + \sigma a_N / h}, \\ \mu &= \frac{c\rho y_N^j h / (2\tau) + \sigma P(t_{j+1}) + (1 - \sigma)(P(t_j) - w_{N-1/2}^j)}{c\rho h / (2\tau) + \sigma a_N / h}. \end{aligned}$$

Из условий  $a_i > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $h > 0$  следует, что  $C_i > A_i + B_i > 0$ , т. е. выполнены условия устойчивости прогонки. Поэтому разностная задача (2.15), (2.18), (2.19) однозначно разрешима и ее можно решать методом прогонки.

### Аппроксимация

Важной характеристикой разностной схемы является ее соответствие исходной задаче. Сравнение непрерывных и сеточных функций проще всего делать на узлах сетки. Пусть  $u(x, t)$  — функция, заданная в области  $\{(x, t): 0 < x < L, 0 < t < T\}$ , тогда обозначим через  $\bar{u}$  ее сужение на сетку  $\omega_{h\tau}$ .

Исходную краевую задачу можно условно записать в виде

$$\mathcal{L}u = f,$$

где  $\mathcal{L}$  — совокупность левых частей всех уравнений (дифференциального уравнения, граничных и начального условий), а  $f$  — совокупность правых частей этих уравнений. Аналогично разностную задачу можно записать в виде

$$\bar{\mathcal{L}}\bar{u} = \bar{f}.$$

Сравнивать непосредственно сеточные функции  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  достаточно трудно. Проще выяснить результат применения к ним оператора  $\bar{\mathcal{L}}$ . Если  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  близки, то близки и функции  $\bar{\mathcal{L}}\bar{u}$  и  $\bar{\mathcal{L}}\bar{v}$ .

Величина  $\bar{\mathcal{L}}\bar{u} - \bar{\mathcal{L}}\bar{v} = \bar{\mathcal{L}}\bar{u} - \bar{f}$  называется **невязкой**. По величине невязки можно судить о величине расхождения  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ . Если  $\bar{\mathcal{L}}$  — линейный оператор, то получаем  $\bar{\mathcal{L}}\bar{u} - \bar{\mathcal{L}}\bar{v} = \bar{\mathcal{L}}(\bar{u} - \bar{v}) = \delta\bar{f}$ , где  $\delta\bar{f}$  — невязка. Если разностная схема, характеризуемая оператором  $\bar{\mathcal{L}}$ , устойчива, то малому значению невязки будет соответствовать малое значение разности  $(\bar{u} - \bar{v})$ . В общем случае связь между невязкой и разностью  $(\bar{u} - \bar{v})$  сложнее, но смысл результата тот же: малая невязка соответствует малому различию сеточных функций  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ .

Если шаги сетки стремятся к нулю, невязка должна также стремиться к нулю. Порядок невязки относительно шагов сетки называется **порядком аппроксимации** разностной схемы.

Для вычисления порядка аппроксимации смешанной разностной схемы (2.15), (2.18), (2.19) необходимо в уравнения схемы вместо значений решения задачи (2.7)–(2.10) подставить в соответствующих точках шаблона разложения по формуле Тейлора подходящей точности. Учитывая связь частных производных в силу дифференциального уравнения и граничных условий, получим порядок невязки.

Оценим порядок аппроксимации неявной ( $\sigma = 1$ ) схемы (2.17). Введем обозначение  $u_i^j = u(x_i, t_j)$ , где  $u(x, t)$  — непрерывное решение задачи (2.7)–(2.10), и рассмотрим разность  $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ . Подставляя  $y_i^j = z_i^j + u_i^j$  в (2.17), получим задачу для  $z$  вида

$$c\rho \frac{z_i^{j+1} - z_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{z_{i+1}^{j+1} - z_i^{j+1}}{h} - a_i \frac{z_i^{j+1} - z_{i-1}^{j+1}}{h} \right) + \psi_i^j, \quad (2.21)$$

где  $\psi_i^j = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - a_i \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right) - c\rho \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}$  — погрешность аппроксимации (невязка) схемы (2.17) на решении  $u = u(x, t)$  уравнения (2.7).

Предположим, что  $u = u(x, t)$  имеет нужное число производных по  $x$  и по  $t$ . Подставляя в выражение для  $\psi_i^j$  разложения

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} &= u_x(x_i, t_{j+1}) + \frac{h}{2} u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + \frac{h^2}{6} u_{xxx}(x_i, t_{j+1}) + O(h^3), \\ \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} &= u_x(x_i, t_{j+1}) - \frac{h}{2} u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + \frac{h^2}{6} u_{xxx}(x_i, t_{j+1}) + O(h^3), \\ \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} &= u_t(x_i, t_{j+1}) + O(\tau), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h} u_x(x_i, t_{j+1}) + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} u_{xx}(x_i, t_{j+1}) + \\ &+ \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} u_{xxx}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2) - c\rho u_t(x_i, t_{j+1}) + O(\tau). \end{aligned}$$

С другой стороны,  $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = K(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ .  
Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi = & \left( \frac{a_{i+1} - a_i}{h} - \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x_i} \right) u_x \Big|_{(x_i, t_{j+1})} + \left( \frac{a_{i+1} + a_i}{2} - K \Big|_{x_i} \right) u_{xx} \Big|_{(x_i, t_{j+1})} + \\ & + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} u_{xxx} \Big|_{(x_i, t_{j+1})} + O(h^2 + \tau). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\psi = O(h^2 + \tau)$ , если выполнены условия

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{\partial K}{\partial x} \Big|_{x_i} + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = K(x_i) + O(h^2), \quad (2.22)$$

или

$$a_i = K(x_i) - \frac{1}{2} h K'(x_i) + O(h^2). \quad (2.23)$$

Условия (2.22) являются достаточными условиями второго порядка аппроксимации по пространству. При выводе предполагалось, что функция  $u(x)$  имеет ограниченную четвертую производную по  $x$  и  $K(x)$  — дифференцируемая функция. Нетрудно показать, что условиям (2.22) удовлетворяют, например, следующие функции:

$$a_i = 0,5(K(x_i) + K(x_{i-1})), \quad a_i = K(x_i - 0,5h), \quad a_i = \sqrt{K(x_i)K(x_{i-1})}.$$

Заметим, что если принять  $a_i = K(x_i)$ , то получим только первый порядок аппроксимации по пространству. Этот результат верен для смешанной схемы с произвольным  $\sigma$ . Отметим, что при  $\sigma = 1/2$  из-за дополнительной симметрии порядок аппроксимации смешанной схемы становится выше и составляет  $O(\tau^2 + h^2)$ .

При выполнении условия (2.23) порядок аппроксимации граничного условия (2.10) разностным уравнением (2.19) так же, как и в регулярной точке, является вторым по пространству и первым по времени при  $\sigma \neq 1/2$  и вторым по пространству и по времени при  $\sigma = 1/2$ .

### Устойчивость

**Устойчивость** — внутреннее свойство разностной схемы, означающее, что незначительное изменение исходных данных (правых частей дифференциального уравнения, начальных и граничных условий) вызывает малое изменение ее решения. Если это требование нарушается, то малейшие ошибки в исходных данных приведут к лавинообразному росту ошибок в полученных значениях в узлах сетки, что в конце концов даст неприемлемый результат. Поэтому неустойчивые схемы неприменимы на практике.

В поставленной задаче требование устойчивости налагает ограничения на параметры сетки. Смешанная разностная схема, определяемая параметром  $\sigma$ , устойчива, если

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{4\tau\bar{K}}, \quad \bar{K} = \max_{0 \leq x \leq L} K(x). \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что смешанная схема с  $\sigma \geq 1/2$ , в частности, неявная схема устойчивы при любых соотношениях параметров  $\tau$  и  $h$ , то есть устойчивы абсолютно. Смешанная схема при  $\sigma < 1/2$  устойчива при достаточно малом отношении  $\tau/h^2$ . В этом случае говорят об условной устойчивости. Доказательство устойчивости смешанной разностной схемы и вывод оценки (2.24) можно найти в [3].

### Сходимость

Основным вопросом теории разностных схем является вопрос сходимости. Решение разностной задачи  $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{y} = \tilde{f}$  сходится к решению дифференциальной задачи  $\mathcal{L}u = f$ , если при дроблении сетки  $\|\tilde{y} - \bar{u}\|_h \rightarrow 0$ , где  $\|\cdot\|_h$  — некоторая норма в пространстве сеточных функций. Разностная схема имеет  $k$ -й порядок точности, если существуют постоянные  $k > 0$ ,  $M > 0$ , не зависящие от  $h$  и такие, что  $\|\tilde{y} - \bar{u}\|_h \leq M|h|^k$ .

Справедлива следующая **теорема** о связи устойчивости и сходимости.

Пусть дифференциальная задача  $\mathcal{L}u = f$  поставлена корректно, разностная схема  $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{y} = \tilde{f}$  аппроксимирует исходную

задачу и является корректной, т.е. ее решение существует и единственно при любой правой части  $\bar{f}$  и схема устойчива. Тогда решение разностной задачи  $\tilde{\mathcal{L}}\bar{u} = \bar{f}$  сходится к решению задачи  $\mathcal{L}u = f$ , причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.

Эта теорема позволяет разделить изучение сходимости на два отдельных этапа: доказательство аппроксимации и доказательство устойчивости. Таким образом, при выполнении условия (2.24) решение разностной задачи (2.15), (2.18), (2.19) сходится к решению исходной задачи (2.7)–(2.10) со вторым порядком точности по пространству и первым по времени при  $\sigma \neq 1/2$  или вторым порядком точности по пространству и по времени при  $\sigma = 1/2$ .

### Квазилинейное уравнение теплопроводности

До сих пор мы рассматривали лишь линейное уравнение теплопроводности. Между тем для высокотемпературных процессов, протекающих, например, в плазме, коэффициент теплопроводности является нелинейной функцией температуры, а в ряде задач — еще и градиентом температуры. Ограничимся рассмотрением случая, когда функция  $K = K(u) = \alpha + \beta u^\gamma$ ,  $K(u) > 0$ ,  $\gamma > 0$ :

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0, & 0 < x < l, \\ u(0, t) &= u_0, & 0 \leq t \leq T, \\ K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(l,t)} &= P(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

При решении нелинейных уравнений, если пределы изменения функции  $K(u)$  заранее неизвестны, избегают использования явных схем. Неявная схема, линейная относительно  $y_i^{j+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, (N-1)$ , имеет вид (2.17)

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - a_i \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right), \quad 0 < i < N, \quad (2.25)$$

где  $a_i = 0,5(K(y_i^j) + K(y_{i-1}^j))$ . Эта схема абсолютно устойчива, имеет первый порядок аппроксимации по  $\tau$  и второй по  $h$ . Решение  $y_i^j$ ,  $i = 1, 2, \dots, (N-1)$  находится методом прогонки.

Часто используется нелинейная схема

$$c\rho \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a(y_{i+1}^{j+1}) \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - a(y_i^{j+1}) \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right),$$

$$a(y_i^{j+1}) = 0,5(K(y_i^{j+1}) + K(y_{i-1}^{j+1})). \quad (2.26)$$

Для ее реализации необходимо применить тот или иной итерационный метод. Например:

$$c\rho \frac{y_i^{(s+1)} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left( a(y_{i+1}^{(s)}) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a(y_i^{(s)}) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right),$$

$$s = 0, 1, \dots, M,$$

$$y_i^{j+1} = y_i^{(M)}, \quad 0 < i < N, \quad (2.27)$$

где  $s$  — номер итерации. Как видно из выражения (2.27), нелинейные коэффициенты берутся с предыдущей итерации, а в качестве начального приближения для  $y_i^{j+1}$  выбирается  $y_i^j$ . Это начальное приближение тем лучше, чем меньше шаг  $\tau$ . Число итераций  $M$  задается из соображений точности. В задачах с гладкими коэффициентами при  $K(u) \geq c > 0$  часто достаточно провести две-три итерации. Значения  $y_i^{(s+1)}$  на новой итерации находятся из системы (2.27) методом прогонки. При  $M = 1$  итерационный метод (2.26) совпадает с (2.25).



**Содержание отчета**

1. Постановка задачи.
2. Номер варианта и исходные данные.
3. Разностная схема.
4. Описание метода решения.
5. Тестовые примеры, демонстрирующие работоспособность программы.
6. Исследование монотонности рассмотренных разностных схем.
7. Исследование устойчивости метода решения системы разностных уравнений.
8. Анализ результатов. Сравнение решений, полученных с помощью явной, неявной и симметричной схем. Обоснование выбора шагов по пространству и по времени. Сравнение эффективности рассмотренных схем.

**Контрольные вопросы**

1. Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.
2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?
3. Будет ли смешанная схема (2.15) иметь второй порядок аппроксимации при  $a_i = \frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i) + K(x_{i-1})}$ ?
4. Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий (2.5), (2.6) с порядком точности  $O(\tau + h^2)$ ,  $O(\tau^2 + h^2)$  и  $O(\tau^2 + h)$  вы знаете?
5. При каких  $h$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.
6. Какие ограничения на  $h$ ,  $\tau$  и  $\sigma$  накладывают условия устойчивости прогонки?

7. В случае  $K = K(u)$  чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?
- 8.\* Для случая  $K = K(u)$  предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

### Примеры заданий

1. Найдите распределение теплоты в стержне, концы которого поддерживаются при заданной температуре:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < l, & \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) &= u_0 + x(L - x), & 0 < x < L; \\ u(0, t) &= u_0, \quad u(L, t) = u_0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

2. Найдите распределение теплоты в стержне с теплоизолированными концами:

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), & 0 < x < L, & \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) &= u_0 + x(L - x), & 0 < x < L; \\ -K(u, 0) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,t)} &= 0, \quad K(u, L) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(L,t)} = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

3. Найдите распределение теплоты в нелинейной среде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), & x > 0, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(0, t) = u_0 t^{1/\sigma}, & u_0 &= \left( \frac{\sigma c^2}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma}. \end{aligned}$$

Значения параметров  $\sigma = 2$ ,  $\kappa_0 = 0,5$ ,  $c = 5$ . Расчеты проводить с шагами  $h = 0,2$  (число точек 50) и  $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ .

Точное решение  $u(x, t) = \begin{cases} [\sigma c \kappa_0^{-1} (ct - x)]^{1/\sigma}, & x \leq ct, \\ 0, & x \geq ct. \end{cases}$

## Лабораторная работа № 3

### **Численное решение краевых задач для одномерного волнового уравнения**

#### **Цель работы**

Изучение методов численного решения краевых задач для гиперболических уравнений на примере одномерного волнового уравнения.

#### **Содержание работы**

Рассмотрим одномерную математическую модель малых колебаний однородной струны длины  $L$ , концы которой движутся по заданному закону. Процесс колебаний описывается уравнением гиперболического типа

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

где  $u(x, t)$  — отклонение струны от положения равновесия,  $a$  — скорость распространения малых возмущений. В начальный момент времени заданы форма струны

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (3.2)$$

и скорости всех точек струны

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (3.3)$$

Известны также законы движения концов струны:

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Требуется выполнить следующие действия.

1. Для краевой задачи (3.1)–(3.4) построить разностную схему типа «крест» с шагом  $\tau$  по времени и  $h$  по пространству, имеющую порядок аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$ .
2. Написать программу для численного решения краевой задачи (3.1)–(3.4).
3. Отобразить эволюцию решения  $u(x, t)$  графически.
4. Оценить точность полученного решения. Обосновать выбор параметров сетки.

## Методические указания

### Общие сведения о волновом уравнении

Колебательные процессы описываются уравнениями вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{L}u + F(x, t), \quad t > 0, \quad (3.5)$$

где  $\rho > 0$ ,  $\mathcal{L}$  — эллиптический дифференциальный оператор. В частном случае  $\mathcal{L}u = k\Delta u$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа, коэффициент  $k$  характеризует натяжение мембраны (струны); если мембрана (струна) однородна, то  $\rho = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ . Уравнение (3.5) является уравнением гиперболического типа. В случае одной пространственной переменной оно описывает колебания струны.

Если  $F(x, t) = 0$ , т. е. отсутствуют воздействия внешних сил, то уравнение (3.5) является однородным.

Считаем, что краевая задача (3.1)–(3.4) поставлена корректно: ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных<sup>1</sup>.

В отличие от параболического уравнения, рассмотренного в лабораторной работе № 2, гиперболическая задача (3.1)–(3.4) имеет два начальных условия: начальное отклонение  $u(x, 0)$  точек струны от положения равновесия и начальная скорость  $u_t(x, 0)$ .

<sup>1</sup>См., например, Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 743 с.

**Разностная схема типа «крест»**

Построим разностную схему для задачи (3.1)–(3.4) при  $0 \leq t \leq T$ . Введем сетку, равномерную по пространству

$$\omega_h = \left\{ x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{L}{N} \right\}$$

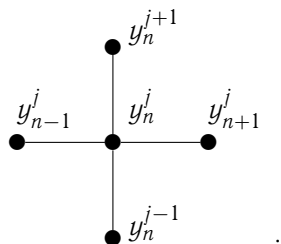
и по времени

$$\omega_\tau = \left\{ t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau = \frac{T}{N_0} \right\},$$

таким образом в расчетной области  $[0, L] \times [0, T]$  задана сетка

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau = \{(x_n, t_j), \quad x_n \in \omega_h, \quad t_j \in \omega_\tau\}.$$

Минимальный шаблон, на котором можно аппроксимировать уравнение (3.1), — это шаблон «крест»:



Простейшая разностная аппроксимация уравнения (3.1) имеет вид

$$\frac{1}{\tau^2} (y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}) = \frac{a^2}{h^2} (y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j), \quad (3.6)$$

$$1 \leq n \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N_0-1.$$

В отличие от схем, рассмотренных в лабораторной работе № 2, в которых используются два временных слоя  $t_j$  и  $t_{j+1}$ , в данном случае требуются три слоя:  $t_{j-1}$ ,  $t_j$  и  $t_{j+1}$ .

Аппроксимация начального условия (3.2) и граничных условий (3.4) производится очевидным способом:

$$y_n^0 = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

$$y_0^j = \varphi(t_j), \quad y_N^j = \psi(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_0. \quad (3.8)$$

Вычисление решения проводится последовательно по временным слоям. На нулевом слое решение известно из начального условия (3.7). На первом слое решение можно вычислить с помощью начальных данных (3.3). Для этого воспользуемся формулой Тейлора:

$$\frac{1}{\tau}(u(x, \tau) - u(x, 0)) = u_t(x, 0) + O(\tau) = g(x) + O(\tau).$$

Тогда аппроксимация второго начального условия (3.3)

$$\frac{1}{\tau}(y_n^1 - y_n^0) = g(x_n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (3.9)$$

имеет лишь первый порядок по  $\tau$ . Поскольку уравнение (3.6) аппроксимирует дифференциальное уравнение (3.1) со вторым порядком, желательно, чтобы разностный аналог начальных условий имел такой же порядок аппроксимации. Воспользуемся следующим членом разложения

$$\frac{u(x, \tau) - u(x, 0)}{\tau} = u_t(x, 0) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x, 0) + O(\tau^2).$$

Тогда

$$\frac{1}{\tau}(y_n^1 - y_n^0) \approx u_t(x_n, 0) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_n, 0) = g(x_n) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_n, 0); \quad (3.10)$$

или

$$y_n^1 = y_n^0 + \tau g(x_n) + \frac{\tau^2}{2} u_{tt}(x_n, 0).$$

Недостающее выражение для  $u_{tt}(x_n, 0)$  получим, подставив в (3.1) одно из начальных условий

$$u_{tt}(x, 0) = a^2 u_{xx}(x, 0),$$

тогда

$$u_{tt}(x, 0) = a^2 f_{xx}(x).$$

В итоге получаем

$$y_n^1 = y_n^0 + \tau g(x_n) + \frac{a^2 \tau^2}{2} f_{xx}(x_n), \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (3.11)$$

Схема (3.6) явная и позволяет выразить значения разностной функции  $y_n^{j+1}$  через ее значения с двух предыдущих слоев. Начиная со второго слоя, разностное решение вычисляется по этой схеме.

Описанный алгоритм показывает, что после того, как выбрана одна из начальных формул (3.9) или (3.11), решение разностной схемы существует и единственно.

### Устойчивость

Исследуем устойчивость полученной разностной схемы методом гармоник; для этого возьмем решение вида

$$y_n^j = \rho_q^j e^{iqx_n}$$

и подставим его в разностное уравнение (3.6). Для множителя  $\rho_q$ , определяющего рост гармоник, получаем квадратное уравнение

$$\rho_q^2 - 2\rho_q \left( 1 - 2\frac{a^2\tau^2}{h^2} \sin^2 \frac{qh}{2} \right) + 1 = 0. \quad (3.12)$$

По теореме Виета произведение его корней  $\rho_q^{(1)} \rho_q^{(2)} = 1$ . Значит, условие устойчивости  $|\rho_q| \leq 1$  может быть выполнено, если  $|\rho_q^{(1)}| = |\rho_q^{(2)}| = 1$ . Для уравнения с действительными коэффициентами (3.12) это означает, что корни являются комплексно сопряженными, для этого дискриминант уравнения должен быть неположительным, что равносильно справедливости неравенства

$$\left| 1 - 2\left( \frac{a\tau}{h} \sin \frac{qh}{2} \right)^2 \right| \leq 1.$$

Чтобы это условие выполнялось для любых гармоник, необходимо и достаточно соблюдения условия Куранта<sup>2</sup>:

$$\left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq 1. \quad (3.13)$$

Таким образом, схема «крест» условно устойчива.

<sup>2</sup> Рихард Курант (1888–1972) — немецкий и американский математик, педагог и научный организатор. Основные научные результаты Куранта относятся к теории конформных отображений, к краевым задачам для уравнений математической физики.

### Сходимость

Из теоремы, приведенной в лабораторной работе № 2 (с. 30), следует, что схема (3.6) с начальными условиями (3.8), (3.11) при выполнении условия Куранта (3.13) сходится со скоростью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

### Содержание отчета

1. Номер варианта и исходные данные.
2. Разностная схема и описание метода решения.
3. Анализ погрешности аппроксимации и исследование монотонности разностной схемы «крест».
4. Тестовые примеры, демонстрирующие работоспособность программы. Анализ точности получаемых решений.
5. Результаты расчетов и их анализ. Обоснование выбора шагов по пространству и по времени.

### Контрольные вопросы

1. Предложите разностные схемы, отличные от схемы «крест», для численного решения задачи (3.1)–(3.4).
2. Постройте разностную схему с весами для уравнения колебаний струны. Является ли такая схема устойчивой и монотонной?
3. Предложите способ контроля точности полученного решения.
- 4.\* Приведите пример трехслойной схемы для уравнения теплопроводности. Как реализовать вычисления по такой разностной схеме? Является ли эта схема устойчивой?

### Примеры заданий

Ниже приведены исходные данные и точные решения для задачи

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < L, \\u(0, t) &= \varphi(t), \quad u(L, t) = \psi(t), & t > 0.\end{aligned}$$



1. Исходные данные:  $f(x) = \sin \pi x$ ,  $g(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ .

Точное решение:  $u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t$ .

2. Исходные данные:  $f(x) = x(1 - x)$ ,  $g(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = 0$ ,  $\psi(t) = 0$ .

Точное решение:

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi t.$$

Во втором примере решение  $u(x, t)$  вычисляется с точностью  $\varepsilon$  следующим образом: выбираем целое число  $k$  так, что

$$k \geq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi^2 \varepsilon}} - 1 \right),$$

тогда

$$u(x, t) \approx \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi t,$$

при этом погрешность

$$\frac{8}{\pi^3} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)\pi x \cos(2n+1)\pi t \leq \varepsilon.$$

## Лабораторная работа № 4

### **Численное решение краевых задач для двумерного уравнения Пуассона**

#### **Цель работы**

Изучение экономичных методов численного решения многомерных краевых задач для эллиптических уравнений на примере двумерного уравнения Пуассона.

#### **Содержание работы**

Рассмотрим математическую модель однородной прямоугольной упругой мембраны, на которую действует распределенная нагрузка  $f(x_1, x_2)$ . Малый прогиб мембраны  $u(x_1, x_2)$  удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\Delta u = -f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (4.1)$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$  — оператор Лапласа,  $G = [0, L_1] \times [0, L_2]$  — область мембраны. На части границы мембраны  $\partial G_1$  задаются граничные условия 1-го рода

$$u(x_1, x_2) = \xi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial G_1, \quad (4.2)$$

на остальной части границы  $\partial G_2$  задаются граничные условия 2-го рода

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial \vec{n}} = \psi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial G_2, \quad (4.3)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial G_2$ .

Требуется выполнить следующие действия.

1. Написать программу для численного решения краевой задачи (4.1)–(4.3) методом счета на установление, используя разностную схему переменных направлений.
2. Получить решение задачи (4.1)–(4.3) с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$ .
3. Отобразить решение  $u(x_1, x_2)$  графически либо в виде трехмерного графика, либо с помощью линий уровня на двумерном графике.

## Методические указания

### Общие сведения о решении эллиптических уравнений

Исследование стационарных процессов различной физической природы (упругость, теплопроводность, диффузия и др.) часто приводит к краевым задачам для уравнений эллиптического типа, для решения которых разработано много эффективных методов.

Поиск решения задачи (4.1)–(4.3) можно осуществить методом установления. Вместо исходной задачи рассматривается вспомогательная нестационарная задача

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U + f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad 0 < t < T, \quad (4.4)$$

$$U(x_1, x_2, t) = \xi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial G_1, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial U(x_1, x_2, t)}{\partial \vec{n}} = \psi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial G_2, \quad (4.6)$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \partial G. \quad (4.7)$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу о распространении тепла в области  $G$  с коэффициентом температуропроводности, равным единице. В этом случае функция  $f(x_1, x_2)$  описывает распределение плотности источников тепловыделения, тогда  $\xi(x_1, x_2)$  — температура, заданная на части границы  $\partial G_1$ ;  $\psi(x_1, x_2)$  — тепловой поток, заданный на части границы  $\partial G_2$ .

Поскольку плотность источников тепловыделения  $f(x_1, x_2)$  и граничные условия  $\xi(x_1, x_2)$ ,  $\psi(x_1, x_2)$  не зависят от времени, то естественно ожидать, что решение  $U(x_1, x_2, t)$  с течением времени будет меняться все медленнее; в пределе при  $t \rightarrow \infty$  распределение температуры  $U(x_1, x_2, t)$  становится стационарным и удовлетворяет краевой задаче (4.1)–(4.3), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2).$$

В соответствии с этим подходом вместо исходной задачи (4.1)–(4.3) решают задачу (4.4)–(4.7), в которой начальное условие  $U_0(x_1, x_2)$  выбирается достаточно произвольно. Для ее решения можно предложить много разностных схем, но не все они одинаково эффективны (см. лабораторную работу № 2). Например, простая в реализации явная разностная схема является условно устойчивой, при этом ограничения на шаг по времени становятся жестче с увеличением количества измерений. Использование чисто неявных разностных схем, которые являются безусловно устойчивыми, приводит к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности.

Существуют схемы, сочетающие в себе достоинства явного (малое количество вычислений) и неявного (безусловная устойчивость) подходов. Такие схемы принято называть экономичными. Существует несколько способов построения таких схем. В данной лабораторной работе рассматривается **метод переменных направлений**, называемый также схемой Писмена — Рекфорда.

### Метод переменных направлений

Для простоты изложения рассмотрим задачу (4.1)–(4.3) с краевыми условиями первого рода на всей границе, т. е.  $\partial G_1 = \partial G$ . В области  $G = [0, L_1] \times [0, L_2]$  введем прямоугольную сетку  $\omega_h$  с шагами  $h_1 = \frac{L_1}{N_1}$  и  $h_2 = \frac{L_2}{N_2}$  по пространственным координатам, где  $N_1$  и  $N_2$  — число ячеек вдоль направлений  $x_1$  и  $x_2$  соответственно.

Спроецируем на сетку  $\omega_h$  функцию плотности источников тепловыделения:

$$\varphi_{ij} = f(ih_1, jh_2), \quad i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2.$$

Введем разностные операторы

$$\Lambda_1 y_{ij}^k = \frac{y_{i+1,j}^k - 2y_{ij}^k + y_{i-1,j}^k}{h_1^2}, \quad \Lambda_2 y_{ij}^k = \frac{y_{i,j+1}^k - 2y_{ij}^k + y_{i,j-1}^k}{h_2^2}. \quad (4.8)$$

Далее будем опускать индексы  $i$  и  $j$  при условии, что они у всех слагаемых одинаковы.

Введем равномерную сетку по времени

$$\omega_\tau = \left\{ t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau = \frac{T}{N_0} \right\}.$$

Для записи схемы переменных направлений введем промежуточный временной слой  $t_{k+1/2} = t_k + 0,5\tau$ . Отнесем к нему сеточную функцию  $y^{k+1/2}$ , при этом переход с временного слоя  $t_k$  на слой  $t_{k+1}$  производится в два (по числу измерений) этапа:

$$\frac{y^{k+1/2} - y^k}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^k + \varphi, \quad (4.9)$$

$$\frac{y^{k+1} - y^{k+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^{k+1} + \varphi. \quad (4.10)$$

На первом этапе схема (4.9) является неявной по направлению  $x_1$  и явной по направлению  $x_2$ , а на втором этапе (4.10) — наоборот. При любом фиксированном индексе  $j$  уравнения (4.9) образуют относительно неизвестных  $y_{ij}^{k+1/2}$  линейную систему с трехдиагональной матрицей. Поэтому значения  $y_{ij}^{k+1/2}$  легко вычисляются одномерной прогонкой по индексу  $i$ , т.е. по направлению  $x_1$ . Наоборот, при переходе с помощью уравнений (4.10) с полуцелого слоя на целый, схема явна по направлению  $x_1$  и неявна по  $x_2$ . Поэтому решение  $\hat{y}_{ij}$  на целом слое также вычисляется одномерной прогонкой, но в поперечном направлении  $x_2$ .

Как и в одномерной схеме (лабораторная работа № 2), диагональные матричные элементы в уравнениях (4.9), (4.10) преобладают; следовательно, прогонка устойчива, а разностное решение существует и единственно.

Остановимся подробнее на методе решения задач (4.9)–(4.10). Запишем схему переменных направлений в виде

$$\frac{2}{\tau}y^{k+1/2} - \Lambda_1 y^{k+1/2} = \frac{2}{\tau}y^k + \Lambda_2 y^k + \varphi, \quad (4.11)$$

$$\frac{2}{\tau}y^{k+1} - \Lambda_2 y^{k+1} = \frac{2}{\tau}y^{k+1/2} + \Lambda_1 y^{k+1/2} + \varphi. \quad (4.12)$$

Обозначим

$$F(y) = \frac{2}{\tau}y + \Lambda_2 y + \varphi, \quad F_{ij}^k = F(y_{ij}^k),$$

$$\hat{F}(y) = \frac{2}{\tau}y + \Lambda_1 y + \varphi, \quad \hat{F}_{ij}^{k+1/2} = \hat{F}(y_{ij}^{k+1/2}).$$

Заметим, что эти величины вычисляются явным образом. Обозначая через  $\Omega_{i,j} = \xi(x_{1,i}, x_{2,j})$  значения искомой функции в граничных узлах области, преобразуем уравнения (4.11) и (4.12):

$$\frac{1}{h_1^2}y_{i-1,j}^{k+1/2} - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau}\right)y_{ij}^{k+1/2} + \frac{1}{h_1^2}y_{i+1,j}^{k+1/2} = -F_{ij}^k, \quad (4.13)$$

$$u_{0,j} = \Omega_{0,j}, \quad u_{N_1,j} = \Omega_{N_1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

$$\frac{1}{h_2^2}y_{i,j-1}^{k+1} - 2\left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau}\right)y_{ij}^{k+1} + \frac{1}{h_2^2}y_{i,j+1}^{k+1} = -\hat{F}_{ij}^{k+1/2}, \quad (4.14)$$

$$u_{i,0} = \Omega_{i,0}, \quad u_{i,N_2} = \Omega_{i,N_2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1.$$

Пусть значение  $y^k$  известно из начальных данных либо вычислено на предыдущем шаге по времени. Сначала вычисляем значения  $F^k$  в каждой внутренней точке, затем поочередно для каждого индекса  $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$  вдоль направления  $x_1$  решаем методом прогонки систему (4.13) и находим значения  $y^{k+1/2}$ . После этого вычисляем значения  $\hat{F}^{k+1/2}$ , решаем систему

(4.14) для каждого индекса  $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$  вдоль направления  $x_2$ , находим  $y^{k+1}$ . При переходе на каждый новый временной слой процедура повторяется, т.е. направление счета все время чередуется, отсюда название метода.

### **Граничные условия, устойчивость и порядок аппроксимации**

При решении нестационарных задач методом переменных направлений требуется использовать особые аппроксимации граничных условий для промежуточных слоев. Однако если  $\xi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  не зависят от времени (как в нашем случае), без этого можно обойтись.

Выше рассмотрен случай, когда на всей границе заданы условия первого рода, однако метод успешно применим и в случае, если на некоторых участках границы задана нормальная производная решения. Студентам предлагается самостоятельно выписать аппроксимации подобных граничных условий, используя опыт выполнения лабораторной работы № 2.

Метод переменных направлений устойчив по правой части и начальным данным и обладает квадратичной скоростью сходимости по времени и пространству ( $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$ ).

### **Содержание отчета**

1. Постановка задачи.
2. Номер варианта и исходные данные.
3. Описание метода решения (включая аппроксимацию граничных условий и обоснование критерия останова).
4. Анализ результатов.

### **Контрольные вопросы**

1. Оцените число действий, необходимое для перехода на следующий слой по времени методом переменных направлений.

2. Почему при увеличении числа измерений резко возрастает количество операций для решения неявных схем (по сравнению с одномерной схемой)?
3. Можно ли использовать метод переменных направлений в областях произвольной формы?
4. Можно ли использовать метод переменных направлений для решения пространственных и вообще  $n$ -мерных задач?
5. Можно ли использовать метод переменных направлений на неравномерных сетках?

### Примеры заданий

1. Найдите прогиб мембраны с зафиксированной границей:

$$\Delta u = 0, \quad (x_1, x_2) \in G = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(x_1, x_2) = 1, \quad (x_1, x_2) \in \partial G.$$

Ответ:  $u(x_1, x_2) = 1$ .

2. Найдите распределение теплоты в пластине, на части границы которой задана температура, а на оставшейся части — тепловой поток:

$$\Delta u = 0, \quad (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_2=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_2=1} = 1,$$

$$u|_{x_1=0} = 1 + x_2, \quad u|_{x_1=1} = 1 + x_2.$$

Ответ:  $u(x_1, x_2) = 1 + x_2$ .

3. Найдите распределение теплоты в пластине, на части границы которой задана температура, а на оставшейся части — тепловой поток:

$$\Delta u = 4, \quad (x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_1=1} = 2,$$

$$u|_{x_2=0} = x_1^2, \quad u|_{x_2=1} = 1 + x_1^2.$$

Ответ:  $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .



## **Лабораторная работа № 5**

### **Методы численного решения интегральных уравнений**

#### **Цель работы**

Изучение методов численного решения интегральных уравнений Фредгольма с ограниченными ядрами, а также уравнений с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность (сингулярных).

#### **Содержание работы**

Лабораторная работа состоит из двух частей. В первой части необходимо реализовать три метода решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода:

- 1) метод квадратур;
- 2) метод простой итерации;
- 3) метод решения уравнений с вырожденным ядром.

Для применения последнего метода требуется осуществить замену ядра исходного интегрального уравнения на близкое к нему вырожденное.

Во второй части требуется реализовать численный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром, имеющим неинтегрируемую особенность, на замкнутом контуре. Необходимо рассмотреть интегральное уравнение на единичной окружности с заданной правой частью и дополнительным условием, обеспечивающим выделение единственного решения.

Квадратуры везде, где это возможно, нужно вычислять с погрешностью не выше, чем  $O(h^2)$ . Во всех случаях следует провести анализ точности полученных результатов и предусмотреть возможность их представления в виде графиков.

## Методические указания

### Общие сведения об интегральных уравнениях

При аналитическом исследовании краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений в ряде случаев удобнее рассматривать эквивалентные им интегральные уравнения, которые содержат в себе полную математическую постановку описываемой задачи. Кроме того, многие физические законы (законы сохранения) имеют вид интегральных соотношений, поэтому сведение исходной задачи к интегральному уравнению является наиболее естественным. Интегральные уравнения могут использоваться и для непосредственного численного решения краевых задач без перехода к дифференциальным уравнениям.

Отметим также, что обратный переход не всегда возможен: известны многие случаи интегральных уравнений, не имеющих аналогов среди дифференциальных уравнений и не допускающих поэтому соответствующих преобразований без применения каких-либо приемов аппроксимации.

Интегральным уравнением Фредгольма<sup>1</sup> 2-го рода называют уравнение вида

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (5.1)$$

где  $u(x)$  — искомая функция;  $\lambda$  — параметр;  $K(x, s)$  — ядро интегрального уравнения;  $f(x)$  — правая часть, при этом предполагается, что  $K(x, s)$  и  $f(x)$  являются кусочно-непрерывными функциями либо удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds = B^2 < \infty, \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Существование решения уравнения Фредгольма 2-го рода и его единственность зависят от значения параметра  $\lambda$ .

---

<sup>1</sup> Фредгольм Эрик Йвар (1866–1927) — шведский математик, известен работами по теории линейных интегральных уравнений.

### Метод квадратур

Наиболее очевидным методом численного решения уравнения (5.1) является **метод квадратур**, суть которого сводится к замене интеграла в (5.1) конечной суммой с использованием какой-либо квадратурной формулы.

Введем на отрезке  $[a, b]$  равномерную сетку с узлами  $s_0, s_1, \dots, s_N$ , при этом  $s_i = a + h \cdot i$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Тогда получаем

$$\int_a^b K(x, s) u(s) ds = \sum_{k=0}^N a_k^N K(x, s_k) y_k + R_N \approx \sum_{k=0}^N a_k^N K(x, s_k) y_k, \quad (5.2)$$

где  $y_k = u(s_k)$  — значение функции в  $k$ -м узле сетки;  $a_k^N$  — коэффициенты квадратурной формулы;  $R_N$  — остаточный член квадратурной формулы.

С учетом (5.2) уравнение (5.1) записывается в виде

$$u(x) - \lambda \sum_{k=0}^N a_k^N K(x, s_k) y_k = f(x). \quad (5.3)$$

Введем на отрезке  $[a, b]$  изменения переменной  $x$ , на котором рассматривается исходное уравнение, то же самое разбиение, что и при приближенном вычислении интеграла в (5.2), т.е.  $x_i = a + h \cdot i$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , и запишем уравнение (5.3) в узлах этой сетки:

$$y_i - \lambda \sum_{k=0}^N a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (5.4)$$

Таким образом, (5.4) представляет собой систему из  $(N+1)$  линейных алгебраических уравнений относительно  $(N+1)$  неизвестных значений функции в узлах, решив которую можно получить значения  $y_0, y_1, \dots, y_N$ . Затем путем интерполяции находится приближенное решение интегрального уравнения (5.1) на всем отрезке  $[a, b]$ .

Точность получаемого решения определяется точностью используемой в (5.2) квадратурной формулы, а также существенно зависит от гладкости ядра и правой части. При выборе квадратурной формулы необходимо учитывать, что чем более точную формулу предполагается применить, тем большие требования должны быть предъявлены к гладкости ядра, решения и правой части исходного уравнения.

Матрица системы (5.4) является заполненной, в общем случае она не симметрична и не знакоопределена. Это затрудняет использование метода квадратур, поскольку для получения решения с высокой точностью может потребоваться достаточно мелкое разбиение отрезка (т.е. размерность системы может стать достаточно большой), и ее решение методом Гаусса либо его модификациями потребует больших затрат машинного времени, а условия сходимости относительно «быстрых» итерационных методов для такой системы могут не выполняться.

Ситуация еще больше усугубляется при рассмотрении многомерных интегральных уравнений — размерность линейных систем становится чрезвычайно большой, сама система может быть плохо обусловленной; кроме того, могут возникнуть технические трудности с ее хранением в оперативной памяти и обеспечением возможности быстрого доступа к элементам матрицы.

Тем не менее метод квадратур часто применяется на практике, поскольку является универсальным в отношении принципа построения алгоритмов решения как линейных, так и нелинейных интегральных уравнений.

### Метод простой итерации

В ряде случаев для поиска приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (5.1) могут эффективно применяться итерационные методы. Рассмотрим более подробно применение **метода простой итерации**, который является частным случаем более общего **метода последовательных приближений**.

Алгоритм метода основан на сходимости итерационного процесса, в соответствии с которым  $(k+1)$ -е приближение к решению исходного уравнения (5.1) находится по известному  $k$ -му приближению по формуле

$$u^{(k+1)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) u^{(k)}(s) ds. \quad (5.5)$$

Достаточным условием сходимости метода простой итерации в норме  $\|\cdot\|_C$  является выполнение условия<sup>2</sup>

$$q_1 = |\lambda| \cdot \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, s)| ds < 1.$$

При этом оценки погрешности даются следующими неравенствами:

$$\|u - u^{(k)}\|_C \leq q_1^k \|u - u^{(0)}\|_C, \quad \|u - u^{(k)}\|_C \leq q_1^k \frac{\|u^{(k)} - u^{(0)}\|_C}{1 - q_1^k}. \quad (5.6)$$

Начальное приближение  $u^{(0)}(x)$  для формулы (5.5) может быть выбрано произвольным образом. Однако, исходя из физической постановки задачи, априорные (чаще всего качественные) данные о решении можно определить, что позволяет удачным выбором начального приближения ускорить итерационный процесс, т. е. уменьшить количество приближений в процессе решения.

В расчетах интеграл в (5.5) заменяется конечной суммой с использованием квадратурной формулы, при этом следует помнить, что оценка (5.6) справедлива при условии точного вычисления интегралов и не учитывает погрешностей, неизбежно возникающих при применении квадратурных формул.

Недостатком метода простой итерации является необходимость приближенного вычисления большого количества интегралов, что может приводить к значительным затратам машинного времени. Если на отрезке  $[a, b]$  выбираются  $N$  точек, которые

<sup>2</sup> См., например, *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 128 с.

служат одновременно узлами квадратурной формулы и точками, в которых вычисляется приближенное значение решения, то задача сводится к вычислению  $N \cdot K$  квадратур ( $K$  — число итераций), каждая из которых вычисляется по  $N$  точкам.

В то же время этот метод является достаточно универсальным и позволяет решать нелинейные интегральные уравнения вида

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, s, u(s)) ds = f(x),$$

однако при этом сам факт сходимости и скорость сходимости часто зависят от начального приближения и правой части.

### Метод решения уравнений с вырожденным ядром

Ядро интегрального уравнения (5.1) называется **вырожденным**, если оно представимо в виде

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \psi_i(s), \quad (5.7)$$

где  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  — система линейно независимых функций.

Такой вид ядра позволяет предложить эффективный метод решения уравнения (5.1). Запишем уравнение (5.1) с учетом (5.7) в виде

$$u(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \cdot \int_a^b \psi_i(s) u(s) ds = f(x). \quad (5.8)$$

Введем обозначение

$$\int_a^b \psi_i(s) u(s) ds = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

тогда из (5.8) получаем, что решение исходного уравнения (5.1) можно представить в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m C_i \varphi_i(x). \quad (5.9)$$

Для определения значений констант  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , подставим решение (5.9) в уравнение (5.8):

$$\lambda \sum_{i=1}^m C_i \varphi_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \cdot \int_a^b \psi_i(s) \left( f(s) + \lambda \sum_{j=1}^m C_j \varphi_j(s) \right) ds = 0,$$

или, после преобразований,

$$\sum_{i=1}^m \left[ C_i - \int_a^b \psi_i(s) \left( f(s) + \lambda \sum_{j=1}^m C_j \varphi_j(s) \right) ds \right] \varphi_i(x) = 0. \quad (5.10)$$

С учетом линейной независимости функций  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , получаем, что алгебраическое уравнение (5.10) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_1, \dots, C_m$ :

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} C_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.11)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \psi_i(s) \varphi_j(s) ds, \quad \beta_i = \int_a^b \psi_i(s) f(s) ds, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.12)$$

Система (5.11) решается прямым либо итерационным методом, в результате чего находятся значения постоянных  $C_i$  и приближенное решение уравнения по формуле (5.9).

Таким образом, поиск решения интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к вычислению  $(m^2 + m)$  квадратур (5.12) от заранее известных функций и решению системы (5.11).

Поскольку значение  $m$  обычно невелико и едва ли может превышать 10, вычисление этих квадратур не требует слишком значительных затрат машинного времени даже при их вычислении с высокой точностью.

Для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с ядром общего вида можно использовать прием, заключающийся в замене ядра исходного уравнения близким к нему вырожденным. Тогда в результате применения вышеописанного метода можно получить приближенное решение уравнения, которое будет содержать погрешность, вызванную аппроксимацией ядра.

Пусть

$$K(x, s) = K^*(x, s) + \Delta K(x, s),$$

причем ядро  $K^*(x, s)$  является вырожденным и близким к исходному ядру  $K(x, s)$  в смысле малости нормы ядра  $\Delta K(x, s)$ . Будем считать  $\lambda = 1$ , тогда норма разности решений исходного интегрального уравнения (5.1) и уравнения с вырожденным ядром

$$u^*(x) - \int_a^b K^*(x, s) u^*(s) ds = f(x)$$

может быть оценена с помощью формулы

$$\|y(x) - y^*(x)\| \leq \|\Delta K\| \cdot (1 + \|R_K\|) \cdot (1 + \|R_{K^*}\|) \cdot \|f\|,$$

где  $\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ ,  $\|\Delta K\|$ ,  $\|R_K\|$  и  $\|R_{K^*}\|$  — нормы операторов с соответствующими ядрами;  $R_K$  и  $R_{K^*}$  — резольвенты ядер  $K$  и  $K^*$ . Норма оператора с произвольным ядром  $Q(x, s)$  определяется как

$$\|Q\| = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |Q(x, s)| ds,$$

для оценки нормы его резольвенты  $R_Q$  используют формулу

$$\|R_Q\| \leq \frac{\|Q\|}{1 - |\lambda| \cdot \|Q\|}$$

при условии, что  $|\lambda| \cdot \|Q\| < 1$ .

Основную трудность в реализации указанного метода решения представляет сам процесс нахождения вырожденного ядра, близкого к исходному. Существует несколько методов, позволяющих строить такие ядра; однако в простейших случаях вполне допустимо использовать разложения исходных ядер по формуле Тейлора (при условии, что соответствующие ряды Тейлора являются сходящимися).



### Сингулярные интегральные уравнения

Решение многих задач математической физики может быть сведено к решению интегральных уравнений, ядра которых имеют неинтегрируемую особенность. Это означает, что соответствующие несобственные интегралы являются расходящимися. Поясним сказанное на примере.

Пусть, например, подынтегральная функция имеет вид  $z(x) = \frac{1}{x}$ , тогда при любых значениях  $a > 0$ ,  $b > 0$  интеграл

$$\int_{-a}^b z(x) dx,$$

понимаемый в смысле несобственного, расходится, т. е. предел

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-a}^{-\varepsilon_1} z(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^b z(x) dx$$

не существует.

В то же время предел

$$\tilde{I} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon} z(x) dx + \int_{\varepsilon}^b z(x) dx \right)$$

существует и конечен,  $\tilde{I} = \ln \frac{b}{a}$ .

Интегралы такого типа принято называть **сингулярными**, а величина  $\tilde{I}$  в этом случае называется **главным значением сингулярного интеграла в смысле Коши**.

Предположим, что интеграл в исходном интегральном уравнении обладает аналогичным свойством, т. е. если его понимать как несобственный, то он расходится, но его главное значение в смысле Коши существует и конечно. Такие уравнения называются **сингулярными** и интеграл в них следует понимать именно в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим метод приближенного решения сингулярных интегральных уравнений на примере уравнения

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \oint_C \mathbf{Q}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \gamma(\boldsymbol{\rho}) d\mathbf{l}_\rho = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in C, \quad (5.13)$$

где интеграл берется вдоль гладкого простого замкнутого контура  $C$ , который обходится против часовой стрелки;  $\gamma(\boldsymbol{\rho})$  — искомая функция, определенная в точках контура  $C$ ;  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  — единичный вектор внешней нормали к контуру. Пусть  $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \xi \cdot \mathbf{i} + \eta \cdot \mathbf{j}$ , т. е. контур лежит в плоскости  $Oxy$ , и ядро интегрального уравнения имеет вид

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{Q}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-(y - \eta)\mathbf{i} + (x - \xi)\mathbf{j}}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (5.14)$$

Как видно, это ядро имеет неинтегрируемую особенность при  $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \mathbf{r}$  (т. е. при  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ ).

Известно, что уравнение (5.13) с ядром (5.14) имеет решения в том и только в том случае, когда правая часть удовлетворяет условию

$$\oint_C f(\mathbf{r}) d\mathbf{l}_r = 0.$$

Будем считать это условие выполненным.

Для численного решения уравнения (5.13) интеграл заменяется конечной суммой в соответствии с квадратурной формулой специального вида, которая позволяет приближенно вычислять главное значение сингулярного интеграла в смысле Коши. Контур разбивается на  $N$  участков, на каждом из которых выбирается одна **контрольная точка** с радиус-вектором  $\mathbf{k}_i$  и одна **расчетная точка** с радиус-вектором  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Дискретизация осуществляется таким образом, чтобы каждая контрольная точка  $\mathbf{k}_i$  находилась на одинаковом расстоянии от двух ближайших к ней расчетных точек.

Тогда исходное интегральное уравнение (5.13) может быть приближенно заменено системой линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{n}(\mathbf{k}_i) \cdot \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{k}_i, \mathbf{c}_j) g_j \Delta l_j = f(\mathbf{k}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.15)$$

где  $\Delta l_j$  — длина дуги между двумя контрольными точками, ближайшими к  $j$ -й расчетной точке;  $g_j$  — приближенное значение искомой функции  $\gamma(\mathbf{r})$  в расчетной точке  $\mathbf{c}_j$ .

При этом погрешность вычисления главного значения интеграла в смысле Коши составляет величину  $O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right)$ , где  $\alpha = \text{const} > 0$ .

Для простоты предположим, что контур  $C$  представляет собой единичную окружность с центром в начале координат, которая разбита на  $N$  равных участков-дуг.

Тогда  $i$ -я контрольная точка будет иметь радиус-вектор

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{i} \cdot \cos \frac{2\pi(i-0,5)}{N} + \mathbf{j} \cdot \sin \frac{2\pi(i-0,5)}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$j$ -я расчетная точка будет иметь радиус-вектор

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{i} \cdot \cos \frac{2\pi(j-1)}{N} + \mathbf{j} \cdot \sin \frac{2\pi(j-1)}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

нормаль в контрольной точке  $\mathbf{k}_i$  будет иметь координаты

$$\mathbf{n}(\mathbf{k}_i) = \mathbf{i} \cdot \cos \frac{2\pi(i-0,5)}{N} + \mathbf{j} \cdot \sin \frac{2\pi(i-0,5)}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

длины всех дуг  $\Delta l_j$  одинаковы и равны  $\frac{2\pi}{N}$ .

Решение исходного интегрального уравнения (5.13) с ядром (5.14) не является единственным и определено с точностью до аддитивной константы, поэтому матрица системы алгебраических уравнений (5.15) близка к вырожденной (поскольку в реальных расчетах всегда присутствуют по крайней мере ошибки округления, и квадратурная формула может быть не точна, на практике матрица системы оказывается невырожденной).

Для выделения единственного решения в задаче (5.13)–(5.14) нужно использовать дополнительное условие, которое обычно следует из физической постановки задачи. Примем в качестве такого условия равенство нулю интеграла от решения по всему контуру:

$$\oint_C \gamma(\rho) dl_\rho = 0. \quad (5.16)$$

Интеграл в уравнении (5.16) заменяется по квадратурной формуле очевидным образом:

$$\sum_{j=1}^N g_j \Delta l_j = 0. \quad (5.17)$$

Система (5.15), (5.17) содержит  $(N + 1)$  уравнение относительно  $N$  неизвестных значений  $g_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  и в общем случае несовместна.

Для того чтобы найти приближенное решение задачи (5.13)–(5.14), (5.16), в систему алгебраических уравнений (5.15), (5.17) вводят дополнительную переменную  $R$  следующим образом:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{k}_i) \cdot \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}(\mathbf{k}_i, \mathbf{c}_j) g_j \Delta l_j + R &= f(\mathbf{k}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=1}^N g_j \Delta l_j &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Система (5.18) относительно неизвестных  $g_1, \dots, g_N, R$  имеет единственное решение, первые  $N$  компонент которого определяют приближенное решение исходной задачи (5.13)–(5.14), (5.16).

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (5.18) оправдано применение метода Гаусса с частичным выбором ведущего элемента, поскольку матрица системы является матрицей общего вида и не обладает свойствами симметрии и диагонального преобладания, а результаты расчетов показывают, что в случае контура  $C$ , близкого к окружности, ее число обусловленности близко к  $N$ .

### Содержание отчета

1. Постановка задачи, номер варианта и исходные данные.
2. Краткое описание методов решения.
3. Построение вырожденного ядра интегрального уравнения, близкого к исходному, исследование ошибки приближенного решения в зависимости от количества учтенных слагаемых в разложении ядра уравнения.
4. Тестовые примеры, демонстрирующие работоспособность программы.
5. Анализ результатов: сравнение решений, полученных разными методами; исследование точности и эффективности рассмотренных методов.

### Контрольные вопросы

1. При выполнении каких условий интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет решение? В каком случае решение является единственным?
2. Можно ли привести матрицу СЛАУ, получающуюся при использовании метода квадратур, к симметричному виду в случае, если ядро интегрального уравнения является симметричным, т. е.  $K(x, s) = K(s, x)$ ?
3. Предложите способ контроля точности результата вычислений при использовании метода квадратур.
4. Оцените возможность и эффективность применения методов квадратур, простой итерации и замены ядра при решении интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода.
5. Что называют резольвентой ядра интегрального уравнения?
- 6.\* Почему замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева, а не по формуле Тейлора?
- 7.\* Какие вы можете предложить методы решения переопределенной системы (5.13), (5.17) помимо введения дополнительно переменной  $R$ ?

**Примеры заданий**

**Для части 1:** рассмотреть уравнение вида (5.1) с двумя различными вариантами правых частей:

$$u(x) - \int_a^b \frac{1}{2}(1 - x \cdot \cos(xs)) u(s) ds = \frac{1}{2}(1 + \sin x), \quad x \in [a, b],$$

$$u(x) - \int_a^b \frac{1}{2}(1 - x \cdot \cos(xs)) u(s) ds = x^2 + \sqrt{x}, \quad x \in [a, b].$$

Рассмотреть два случая пределов интегрирования:

1)  $a = 0, b = 1$ ;

2)  $a = 0,1, b = 1$ .

**Для части 2:** рассмотреть сингулярное интегральное уравнение на единичной окружности с центром в начале координат; правую часть взять в виде

для нечетных номеров вариантов:

$$f(\mathbf{r}) = \sin \frac{N+1}{2} \varphi;$$

для четных номеров вариантов:

$$f(\mathbf{r}) = \cos \frac{N}{2} \varphi.$$

Здесь  $N$  — номер варианта,  $\varphi$  — полярный угол точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .

## Литература

1. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 592 с.
2. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В.* Вычислительные методы. М.: Изд-во МЭИ, 2008. 670 с.
3. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2005. 288 с.
4. *Калиткин Н.Н., Альшина Е.А.* Численный анализ. М.: Академия, 2013. 304 с. (Сер. «Университетский учебник»).
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 622 с.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000. 315 с.

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Лабораторная работа № 1.</b> Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений .....	5
<b>Лабораторная работа № 2.</b> Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности .	18
<b>Лабораторная работа № 3.</b> Численное решение краевых задач для одномерного волнового уравнения .....	35
<b>Лабораторная работа № 4.</b> Численное решение краевых задач для двумерного уравнения Пуассона .....	42
<b>Лабораторная работа № 5.</b> Методы численного решения интегральных уравнений .....	49
<b>Литература</b> .....	63

*Учебное издание*

**МАРЧЕВСКИЙ** Илья Константинович  
**ЩЕРИЦА** Ольга Владимировна

**Численные методы решения задач  
математической физики**

Редактор *В. В. Коростелина*  
Корректор *Ю. Н. Морозова*  
Художник *Я. М. Ильина*  
Компьютерная верстка *И. К. Марчевского*

Оригинал-макет подготовлен  
в Издательстве МГТУ им. Н. Э. Баумана

Подписано в печать 30.09.2016. Формат 60×90/16.  
Усл. печ. л. 4,0. Изд. № 528-2015 Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1.  
[press@bmstu.ru](mailto:press@bmstu.ru)  
[www.baumanpress.ru](http://www.baumanpress.ru)

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н. Э. Баумана.  
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1.