IFT-1575

Modèles de recherche opérationnelle

Introduction

Franz Girardin

15 octobre 2024

Table des matières

1

Modélisation

Définition de la prog. linéaire

Branche de la *Recherche Opérationnelle* où on utilise des **modèles** mathématiques qui font appel à des fonction **linéaire** pour résoudre un problème.

$$\texttt{prod. } \text{vin blanc} \implies x \text{ (litres)}$$
$$\texttt{prod. } \text{vin rouge} \implies y \text{ (litres)}$$

Composantes du modèle

Il faut identifier **l'action** sur laquelle on doit prendre une décision et la représenter par un **variable de décision**. À cette variable sera associée un constante qui représente le **niveau** de l'action.

L'objectif

S'exprime sous le forme d'une **fonction mathématique** qui représente l'intention. P. ex. **maximiser le profit** correspondrait à :

$$\text{Max } 5x + 3y$$

Contraintes

Elles peuvent dépendre du *contexte du problèmes* ou peuvent être plus générales ; p. ex. la **non-négativité** d'une entité :

$$\begin{array}{ll} x \leqslant 50 & \texttt{prod.}\text{max vin blanc} \\ y \leqslant 60 & \\ x + y \leqslant 80 & \texttt{prod.}\text{max totale de vin} \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & \text{Non-nég.} \end{array}$$

Terminologie de base

Une **solution réalisable** est un **vecteur** de valeurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartenant à $X \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque composante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respecte *toutes les contraintes* du problème. Dans ce contexte, X est l'ensemble des solutions possibles, c'est-à-dire l'ensemble des points qui satisfont toutes des contraintes imposées au problème. Chaque point dans X est un vecteur de longueur n Cet ensemble X est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^n$ qui comprends tous les vecteurs possibles où $n \in [1, n \longrightarrow \infty[$.

Une solution **optimale** est une solution réalisable qui maximise (ou minimise) la fonction objectif $z(x)$, en fonction de la nature du problème (maximisation ou minimisation). Autrement dit, c'est une solution réalisable qui produit la *meilleure valeur possible* pour la fonction objectif z.

2

Maximisation et minimisation

Note:-

Un modèle peut présenter une **infinité** de solution optimales.

Theorem 2.1

La maximisation d'un objectif $f(w)$ est équivalent à l'**opposé** de la minimisation :

$$\text{Max } f(w) \leftrightarrow \text{Min} - f(w)$$

Preuve 2.1

Considérons le problème :

$$\begin{array}{c} \text{Max } f(w) \\ \text{s.a } \; w \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Soit w_{opt} un point de X où $f(w)$ atteint son **maximum**. On a :

$$f\left(w_{\text{opt}}\right) \geqslant f(w) \quad \forall w \in X$$
$$\updownarrow$$
$$-f\left(w_{\text{opt}}\right) \leqslant -f(w) \quad \forall w \in X$$

Par conséquent, $-f(w_{\text{opt}})$ est la valeur minimale possible parmi tous les $-f(w)$ possibles :

$$-\text{Max} f(w) = -f\left(w_{\text{opt}}\right) = \text{Min} - f(w)$$

Ainsi, qu'on maximise $f(w)$ ou qu'on minimise $-f(w)$, on retrouve la même solution optimale w_{opt}.

Explication

Soit la fonction objectif $f : X \to \mathbb{R}$ Dans cette situation, le vecteur w joue deux rôles distincts : il est à la fois l'argument de la fonction objectif $f(w)$ et un élément soumis aux contraintes. Ces deux aspects sont essentiels dans un problème de maximisation en programmation linéaire ou non linéaire.

1. Vecteur dans la fonction objectif : La fonction objectif $f(w)$ est la fonction que l'on cherche à maximiser. Elle prend un vecteur w comme entrée, qui est un point dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur w représente une solution candidate du problème, et $f(w)$ retourne un nombre réel, par exemple un profit ou une performance, que l'on souhaite maximiser.

2. Vecteur dans les contraintes : Le vecteur w doit aussi satisfaire un ensemble de contraintes qui définissent l'ensemble des solutions réalisables, noté $X \subset \mathbb{R}^n$. Ces contraintes peuvent être des inégalités ou des égalités (par exemple, $g(w) \leqslant 0$, $h(w) = 0$), et elles définissent l'ensemble des vecteurs w admissibles.

Synthèse des deux rôles :

- **Maximisation :** On cherche à maximiser la fonction $f(w)$, c'est-à-dire à trouver la meilleure valeur possible de $f(w)$.
- **Contraintes :** Le vecteur w doit se situer dans un ensemble admissible X, défini par les contraintes du problème.

En résumé, w doit satisfaire les contraintes (ce qui garantit qu'il est une solution réalisable), tout en maximisant la valeur de $f(w)$. Le problème consiste à trouver le w optimal qui satisfait ces deux aspects à la fois.

3

Algorithme du Simplexe

Soit le problème suivant. Un restaurateur dispose de **14** oursins, **24** crevettes, **18** huîtres. Deux types d'assiètes de fruit de mer sont offertes par le restaurateur :

8$: 5 oursins, 2 crevettes 1 huître

6$: 3 oursins, 3 crevettes 3 huîtres

L'objectif est de déterminer le **nombres d'assiètes** de chaque type à préparer afin de *maximiser* le revenu total du restaurateur tout en respectant les disponibilité de fruits de mer.

Contraintes

$$\begin{array}{rl} 5x + 3y \leqslant 30 & \text{Oursins} \\ 2x + 3y \leqslant 24 & \text{crevettes} \\ x + 3y \leqslant 18 & \text{Huîtres} \\ & \\ x, y \geqslant 0 & \text{Non-négativité} \\ & \\ z = 8x + 6x & \text{Objectif} \end{array}$$

En considérant que la maximisation d'un objectif est équivalente à la minimisation de l'opposé de la minimisation on a :

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & -8x - 6y \\
\text{s.a.} & \\
5x + 3y &\leqslant 30 \\
2x + 3y &\leqslant 24 \\
x + 3y &\leqslant 18 \\
x, y &\geqslant 0 \\
z &= 8x + 6x
\end{aligned}
$$

Forme standard

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } z = -8 - 6y \\
\text{s.a.} \\
\begin{array}{llllll}
5x + 3y & + u & & & = & 30 \\
2x + 3y & & + p & & = & 24 \\
x + 3y & & & + h & = & 18 \\
\end{array} \\
x, y, u, p, h \geqslant 0
\end{array}
$$

Choisir les variables indépendantes

Supposons que x et y sont des ***variables indépendantes***. Exprimons les ***variables dépendantes*** u, p, h, z en fonction de x et y

$$
\begin{aligned}
u &= 30 - 5x - 3y \\
p &= 24 - 2x - 3y \\
h &= 18 - x - 3y
\end{aligned}
$$

. . . .

$$z = 0 - 8x - 6y$$

En supposant que x et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{x = y = 0 \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0}$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant x ; on considère donc x comme ***variable d'entrée***. Soit $y = 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
u = 30 - 5x - 3y &\implies x \leqslant 30/5 = 6 \\
p = 24 - 2x - 3y &\implies x \leqslant 24/2 = \mathbf{12} \\
h = 18 - x - 3y &\implies x \leqslant \mathbf{18}
\end{aligned}
$$

Explication : Soit $u = 30 - 5x - 3\cancelto{0}{y}$, on sait que pour respecter la contrainte de non négativité, la quantité $u = 30 - 5x \geqslant$. Cela se simplifie par

$$x \leqslant 6$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de x jusqu'à **6** L'équation limitante est celle qui implique u ; on dit alors que u est le ***variable de sortie***. On **pivote**. La variable u prend la place de x en tant que variable indépendante ; u et y sont les ***nouvelles variables indépendantes***.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p, et h en fonction de u et y :

$$u \quad = 30 - 5x - 3y \textbf{ et } u, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = 6 - 1/5u - 3/5y}$$

$$p \quad = 24 - 2x - 3y \textbf{ et } u, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{p = 12 + 2/5u - 9/5y}$$

$$h \quad = 18 - x - 3y \textbf{ et } u, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{h = 12 + 1/5u - 12/5y}$$

$$z \quad = 0 - 8x - 6y \textbf{ et } u, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$z \quad = 0 - 8(6 - 1/5u - 3/5y) - 6y$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z = -48 + 8/5u - 6/5y}$$

Système 2

$$
\begin{aligned}
x &= 6 - 1/5u - 3/5y \\
p &= 12 - 2/5u - 9/5y \\
h &= 12 - 1/5u - 12/5y
\end{aligned}
$$

. . . .

$$z = -48 + 8/5x - 6/5y$$

Sachant que u et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{u = y = 0 \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48}$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant y ; on considère donc y comme ***variable d'entrée***. Soit $u = 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
x = 6 - 1/5u - 3/5y &\implies y \leqslant \mathbf{10} \\
p = 12 - 2/5u - 9/5y &\implies y \leqslant \mathbf{20/3} \\
h = 12 - 1/5u - 12/5y &\implies y \leqslant \mathbf{5}
\end{aligned}
$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de y jusqu'à **5** L'équation limitante est celle qui implique h ; on dit alors que h est le ***variable de sortie***. On **pivote**. La variable h prend la place de u en tant que variable indépendante ; h et y sont les ***nouvelles variables indépendantes***.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p, et h en fonction de h et y :

$$h \quad = 12 - 1/5u - 12/5y \textbf{ et } h, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{y = 5 + 1/12u - 5/12h}$$

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y \textbf{ et } h, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x = 6 - 1/5u - 3/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = 3 - 1/4u - 1/4y}$$

$$p = 12 - 2/5u - 9/5y \textbf{ et } h, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$p = 12 - 2/5u - 9/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{p = 3 + 1/4u - 3/4y}$$

$$z \quad = -48 + 8/5u - 6/5y \textbf{ et } h, y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$z = -48 + 8/5u - 6(5 + 1/12u - 5/12h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z = -54 + 3/2u - 1/2h}$$

Système 3

$$
\begin{aligned}
x &= 3 - 1/4u - 1/4h \\
p &= 3 + 1/4u + 3/5h \\
y &= 5 + 1/12u - 5/12h
\end{aligned}
$$

. . . .

$$z = -54 + 3/2u - 1/2h$$

Sachant que u et h sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{u = h = 0 \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54}$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u, ni la valeur de $h$car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes **à l'optimum** !

Résumé de l'algorithme

► **Compter** le nombre d'équations. Un système en *forme standard* de N équations nécessaite une **variables d'équart** par équation, pour un total de N variable d'équart.

Note:-

Si le système sous sa forme standard possède n variables inconnues, ce système doit avoir *au minimum* n équations pour pouvoir trouver une **solution unique**. Autrement, le sytème pourrait admettre **une infinité de solutions**.

► **Exprimer** les **variables d'équart** u, p, h, etc. et l'objectif z en fonction des des **variables fixées à zéro**, c'est-à-dire les variables inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.
► **Identifier** la variable dont l'↑ réduit le plus z ; cette variable minimise l'objectif et est donc la **variable d'entrée** x_e.
▹ Soit la variable x_e, trouver la variable x_s qui limite le plus l'augmentation de x_e. Il s'agit de la **variable de sortie** x_s.
► **Fixer** x_s à zéro. La variable de sortie x_s prend la place de la variable d'entrée x_e. Exprimer x_e et les autres variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, ainsi que l'objectif z en fonction de x_s.
► **Évaluer** le nouveau système d'équation obtenu.
▹ **Si l'augmentation d'aucune** variable dans la fonction objectif n'entraîne une diminution de l'objectif, on a la **solution optimale**. L'algorithme est terminé.
▹ Si l'augmentation **d'au moins une** variable entraîne la diminution de l'objectif, la solution n'est pas optiomale et il faut poursuivre avec **une autre itération** de l'algorithme.

4

Représentation forme tableau

Forme standard

Soit le sytème suivant sous la forme standard, nous allons utiliser la représentation sous forme de tableau pour appliquer l'algorithme du simplexe.

$$
\begin{aligned}
\text{Min } z = -8 - 6y \\
\text{s.a.} \\
5x + 3y + u &= 30 \\
2x + 3y \quad + p &= 24 \\
x + 3y \quad\quad + h &= 18 \\
x, y, u, p, h \geqslant 0
\end{aligned}
$$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.1 – État initial de la forme STD

Le tableau doit avoir la même allure que la forme standard ; il doit être possible d'identifier une **variable** par ligne du tableau. **Par exemple**, Le ligne surlignée en rouge engendre l'équation :

$$5x + 3y + u = 30$$

Dans ce contexte, on sait que u est une **variable dépendante** (v.d.) et le terme de droite qui lui est associé (t.d.) est 30.

Tout comme durant la résolution algébrique, on constate que si u, p et h sont des **variables dépendantes** et que x et y sont des variables indépendantes **fixées à zéro**, la solution associée à ce système est :

$$\boxed{[x, y = 0] \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0}$$

Choix de la variable d'entrée

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.2 – Variable d'entrée choisie

On choisit la variable dont l'augmentation rend l'objectif z plus petit et négatif ; il sagit de x qui est la **variable d'entrée**.

Choix de la variable de sortie

Soit une ligne du tableau l, et la variable d'entrée x_e, pour trouver la variable dépendante **limite davantage l'augmentation** de la **variable d'entrée**, il suffit d'utiliser la formule :

$$\boxed{\lim \ = \text{t.d.}(l) \ \div \ x_e(l)}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\lim(\mathbf{u}) &= \text{t.d.}(\mathbf{u}\ ) \div x(\mathbf{u}) = 30 \div 5 = 6 \\
\lim(\mathbf{p}) &= \text{t.d.}(\mathbf{p}\ ) \div x(\mathbf{p}) = 24 \div 2 = 12 \\
\lim(\mathbf{h}) &= \text{t.d.}(\mathbf{h}\ ) \div x(\mathbf{h}) = 18 \div 1 = 12
\end{aligned}
$$

Dans ce cas-ci, u limite davantage l'augementation de x ; u est donc la variable de sortie.

Pivot

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.3 – Coefficient pivot

Le coefficient à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée (x) et de la rangée de la variable de sortie (u) est le *coefficient pivot*. Le **pivot** est l'action par laquelle on modifie le tableau pour que la variable d'entrée prenne la place de la variable de sortie.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.4 – État suite au pivot

Pour que x soit variable dépendante à la place de u dans la première ligne, il faut un coefficient de 1 sous x dans la première ligne et des coefficients de 0 dans les autres lignes. Cela revient à diviser la ligne de la variable de sortie par le coefficient du pivot.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				$30/5$
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.5 – Division par le cofficient du pivot

Pour exprimer chaque variable dépendante en terme de la variable d'entrée (x) par le coefficient c_e sous la colonne de la variable d'entrée.

Exemple

$$\boxed{x = 6 - 3/5y - 1/5u}$$

$$\begin{aligned}
& p = 24 - 2x - 3y \\
\leftrightarrow\ & p = 24 - 2(6 - 3/5y - 1/5u) - 3y \\
\leftrightarrow\ & p = 24 - 2(6 - 3/5y - 1/5u) + 2x - 2x - 3y \\
\leftrightarrow\ & 2x + 3y + p + 2(6) - 2(3/5y + 1/5u) - 2x = 24 \\
\leftrightarrow\ & 2x + 3y + p - 2(x + 3/5y + 1/5u) = 24 - 2(6)
\end{aligned}$$

Soit $ligne(p) : 2x+3y+p = 24$ et $ligne(x) : x+3/5+1/5 = 6$, Cela revient à effectuer $ligne(p)\ -\ 2\ \times\ ligne(x)$. On obtient alors le tableau suivant

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.6 – $ligne(p)\ -\ 2\ \times\ ligne(x)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.7 – $ligne(h)\ -\ 1\ \times\ ligne(x)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

TABLE 4.8 – $ligne(-z)\ -\ 8\ \times\ ligne(x)$

Nous avons complété **une itération** de l'algorithme. On obtien alors la solution suivante :

$$\boxed{[y, u = 0] \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48}$$

Choix de la variable d'entrée

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

La variable de sortie est donc y

Choix de la variable de sortie

Démonstration

$$\begin{aligned}
\lim(\mathbf{x}) &= \text{t.d.}(\mathbf{x}\ ) \div y(\mathbf{x}) = 6 \div 3/5 = 10 \\
\lim(\mathbf{p}) &= \text{t.d.}(\mathbf{p}\ ) \div y(\mathbf{p}) = 12 \div 9/5 = 20/3 \\
\lim(\mathbf{h}) &= \text{t.d.}(\mathbf{h}\ ) \div y(\mathbf{h}) = 18 \div 12/5 = 5
\end{aligned}$$

La variable de sortie est donc h, puisqu'après $y \leqslant 5$, h devient négatif, ce qui viole la contrainte de **non-négativité**.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

Table 4.9 – Coefficient de pivot

Puisque le pivot est **$12/5$**, on divise $ligne(h)$ par cette même valeur pour que y soit variable dépendante à $ligne(h)$.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
y	0	1	$-1/12$		$5/12$		5
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

Table 4.10 – $ligne(h) \div 12/5$

On soustrait maintenant $ligne(h)$ à $ligne(p)$ et $ligne(x)$ de façon à avoir un coefficient de 0 sous y.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	**0**	**0**	**$-1/4$**	**1**	**$-3/4$**		**3**
y	0	1	$-1/12$		$5/12$		5
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

Table 4.11 – $ligne(p) - 9/5\ ligne(h)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	**1**	**0**	**$1/4$**	**0**	**$-1/4$**		**3**
p	**0**	**0**	**$-1/4$**	**1**	**$-3/4$**		**3**
y	0	1	$-1/12$		$5/12$		5
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

Table 4.12 – $ligne(x) - 3/5\ ligne(h)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	**1**	**0**	**$1/4$**	**0**	**$-1/4$**		**3**
p	**0**	**0**	**$-1/4$**	**1**	**$-3/4$**		**3**
y	0	1	$-1/12$		$5/12$		5
$-z$	**0**	**0**	**$3/2$**	**0**	**$1/2$**	**1**	**54**

Table 4.13 – $ligne(-z) - 6/5\ ligne(h)$

Nous avons complété **une seconde itération** de l'algorithme. Le système est associé à la solution :

$$\boxed{[u, h = 0] \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54}$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u, ni la valeur de h car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes à l'optimum.

Concept de solutions de base

Soit un système de m équations et de n variables, l'algorithme du simplexes considère les solutions où $n - m$ variables sont fixées à zéro et sont donc des **variables indépantes**. Ces solutions sont appeleés **solutions de bases**. Avec n variables et $n - m$ *variables fixées à zéro*, il y a le nombre suivant de solutions de bases possibles :

$$\boxed{\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}}$$

Exemple Soit un système de $n = 5$ variables et $m = 3$ équations, il y aura le nombre suivant de solutions de base possibles :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Résumé de l'algorithme en forme tableau

► **Organiser** les équations présentées sous la *forme standard* en un tableau. La 1[ere] colonne contient `v.d.`, puis, dans chaque rangée subséquente de cette colonne, chacune des variable dépendante et, finalement, l'objectif négatif $-z$. La **dernière colonne** contient `t.d.` puis, dans chacune des rangées subséquentes de cette colonne, les termes de droite des équations correspondantes.
► **Choisir** la variable d'entrée $\boldsymbol{x_e}$; il s'agit de la variables dépendante dont l'augmentation minimise davantage l'objectif.

$$\boxed{x_e = x : -z \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty}$$

► **Choisir** la variable de sortie $\boldsymbol{x_s}$. Il s'agit de la variable qui limite davantage l'augmentation de la variable de sortie, puisqu'elle atteint 0 plus tôt que toutes les autres variable lorsque x_e augmente.
► **Identifier** le coefficient pivot. Il s'agit du coefficient qui se trouve à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée et la rangée de la variable de sortie.
► **Diviser** la rangée de la variable de sortie par le coefficient du pivot.
► **Soustraire** chacune des autres rangées par un facteur $f \times ligne(x_s)$, de manière à obtenir 0 dans la colonne de la variable de sortie (la même colonne que le coefficient pivot).

5

Résolution Graphique

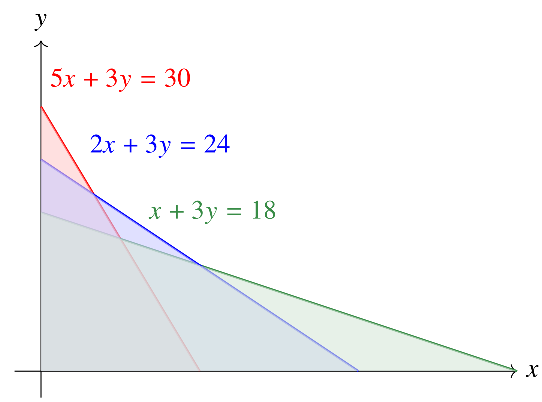
Représentation graphique selon l'équation

Considérons le système d'équation suivant sous la forme standard :

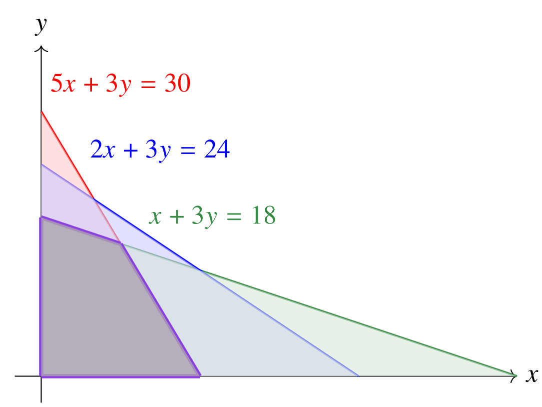
$$\begin{aligned} \text{Min} - z = \quad & -8x - 6y \\ & \text{s.a.} \\ \\ 5x + 3y &\leqslant 30 \\ 2x + 3y &\leqslant 24 \\ x + 3y &\leqslant 18 \\ \\ x, y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir chacune des équations pour la représenter par une courbe. Soit l'équation suivante, nous avons la droite correspondante :

$$5x + 3y = 30$$



Puisque l'équation contient une inégalité, nous savons que l'ensemble des points qui satisfont la contrainte se trouve nécessairement sous la courbe.



Les solutions possibles se trouvent donc dans la zone délimitée par les courbes. La solution **optimale** est se trouve au sommet de polygôme définissant la zone.

pour la solution optimale $\hat{x} : (a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons :

$$\hat{x} \in \Big\{(0,6),\ (3,5),\ (6,0),\ (0,0)\Big\}$$

Selon les options possibles, la solution optimale est donc $\hat{x} = (3, 5)$ et on a

$$\boxed{-z = -8(3) - 6(5) = -24 - 30 = -54}$$

Selon la théorie vue précedemment, nous savons que le nombre de solutions de bases différentes dans l'espace est donné par :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Or, le polyptote ne contient que **4** *coins* et donc **4** soolution optimales. Cela est dû au fait que l'algorithme du simplexe ne peut visiter que 4 solutions de base **réalisables**. Les solutions restantes sont des solutions de bases **non réalisables**.

6

Simplexe en formulation générale

Définitions et forme standard

Soit un système de programmation linéaire qui comprend $\boldsymbol{n}$ **variables** et $\boldsymbol{m}$ **contraintes** et $n \geqslant m$, nous avons les entités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x_j} ::= \textit{variables de décision}\\
&\boldsymbol{c_j} ::= \textit{coeff. de } \boldsymbol{x_j} \textit{ dans l'objectif}\\
&\boldsymbol{a_{ij}} ::= \textit{coeff. de } \boldsymbol{x_j} \textit{ dans la contrainte } \boldsymbol{i}\\
&\boldsymbol{b_i} ::= \textit{terme de droite dans la contrainte } \boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

Les **variables de décisions** sont donc x_j, $j = 1, 2, \cdots n$ et chacune delle est présente dans une colonne $\boldsymbol{j}$ du tableau. Il y a $\boldsymbol{m}$ rangées d'équations dans le tableau, incluant la rangée de l'objectif.

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n\\
&\text{s.a.}\\
\\
&a_{11}x_1 + a12x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a22x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2\\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\\
&a_{m1}x_1 + am2x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m\\
&x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Cela revient à la simplification suivante :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \ \textbf{s.a.} \sum_{n=j}^{n} a_{ij} = b_i, i = 1, \cdots, m$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, n$$

Représentation tableau de la forme générale

v.d.	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	-z		t.d
x_1	1						$\overline{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{1s}$	$\cdots$	$\overline{a}_{1n}$			$\overline{b}_1$
x_2		1					$\overline{a}_{2m+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{2s}$	$\cdots$	$\overline{a}_{2n}$			$\overline{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$					$\ddots$		$\ddots$				$\vdots$
x_r				1			$\overline{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{rs}$	$\cdots$	$\overline{a}_{rn}$			$\overline{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$		$\ddots$	$\ddots$		$\ddots$	$\overline{a}_{1n}$			$\vdots$
x_m						1	$\overline{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{ms}$	$\cdots$	$\overline{a}_{mn}$			$\overline{b}_m$
$-z$						1	$\overline{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\overline{c}_s$	$\cdots$	$\overline{c}_n$			$\overline{z}$

Ce système est associé à la solution suivante :

$$\begin{aligned}
&x_1 = \overline{b}_1, x_2 = \overline{b}_2, \ldots, x_r = \overline{b}_r, \ldots, x_m = \overline{b}_1\\
&x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_s = x_n = 0\\
&z = \overline{z}
\end{aligned}$$

Exemple Dans le problème du restaurateur :

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = -8 - 6y\\
&\qquad\qquad \text{s.a.}\\
&\qquad 5x + 3y + \boldsymbol{u} \qquad\qquad\qquad = 30\\
&\qquad 2x + 3y \quad + \boldsymbol{p} \qquad\qquad = 24\\
&\qquad\ x + 3y \qquad\quad + \boldsymbol{h} \qquad = 18\\
&\qquad\quad x, y, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser le problème et changer les **variables** x, y, u, p, h par $\boldsymbol{x_1}$ $\boldsymbol{x_2}$ $\boldsymbol{x_3}$ $\boldsymbol{x_4}$ $\boldsymbol{x_5}$

Choix de la variable d'entrée

La variable d'entrée est la une variable x_j telle que c_jx_j minimise l'objectif z. Cela implique que **si tous les coefficients $\boldsymbol{c_j}$** $\geqslant 0$, **alors** l'augmentation des x_j correspondante ne peuvent pas minimiser l'objectif et l'algorithme se termine.

$$\boxed{\left[\forall c_j, c_jx_j \geqslant 0\right] \implies z \longrightarrow \infty \ (\text{fin algo } :z \uparrow \text{ au lieu de } \downarrow)}$$

Si $\overline{c}_j < 0$ pour au moins un indice $j = 1, \ldots, n$, **alors** la **variable d'entrée** est la variable x_s telle que :

$$\overline{c}_s = \min_{j=1,\ldots,n} \{\overline{c}_j\} < 0$$