MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Ensemble de théorèmes, lemmes et définitions

Franz Girardin

24 août 2024

Table des matières

Définition d'une suite

Fonction $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ qui accepte $n \in \mathbb{N}^*$ et engendre une **séquence ordonnées** de $a_n \in \mathbb{R}$.

Définition d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{Raison} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$r = a_n - a_{n-1} \quad |n \geqslant 2$ — Trouver r

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot n \quad |n \geqslant 1$ — Trouver n^e terme

Définition d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = r & \text{Raison} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \mid n \geqslant 2$ — Trouver r

$a_n = a_1 r^{n-1} \mid n \geqslant 1$ — Trouver n^e terme

Convergence d'une suite géométrique

$\forall r \in \mathbb{R}$, la suite $\{r^n\}$ converge *ssi* $-1 < r \leqslant 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \{r^n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Définition formelle de convergence d'une suite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Définition formelle de divergence d'une suite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

si et seulement si,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}^* : n > N \implies |a_n| > M$$

Corollaire

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$, **alors**, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$

Attention

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

Lemme de convergence des suite éventuellement signées

1. Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement positive**, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$
2. Si $\{a_n\}$ est une suite **éventuellement négative**, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, **alors**

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \text{ si } \lim_{x\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0$$

Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynomes, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p(n)}{q(n)}$, et $k = \min\big(deg(p), deg(q)\big)$ **Alors**,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Règle de l'Hôpital

Soit une **constante** $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et supposon que :

- $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}$ est de la forme $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{|g'(x)|}$ **existe** et $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \approx c$

Alors,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Monotonicité

Soit une suite $\{a_n\}$, on dit que la suite est :

- **Strictement croissant** si $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** si $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} \geqslant a_n$
- **Strictement décroissante** si $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** si $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** si $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$
- **Monotone**

Définitions de bornes d'une suite

Minonant $m ::= \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \geqslant m$

Majorant$M ::= \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \leqslant M$

Bornée ::= *Majorée* $\wedge$ *minorée*

Théorème des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est **convergente**

Lemmes des suites monotones

- Toute suite éventuellement croissante et majorée est également **convergente**
- Tout suite éventuellement décroissante et minorée est également **convergente**

Association d'une fonction à une suite

Soit $f(x)$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$, Alors, la suite $\{a_n\} = f(n)$ admet la même limite :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \implies \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Par ailleurs, si $f(x)$ est une fonction continue en L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L, alors la limite suivante converge vers $f(L)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(L)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$$

▷ **Exemple** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\pi/2) = \sin(\lim\limits_{n\to+\infty})\pi/2 = 0$

Comparaison des suites

Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^K \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$c_n \ll d_n \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geqslant n_0, \; a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Corollaire

Si $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, **alors** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Définition d'une série numérique

Somme infinie des termes d'une suite numérique correspondante a_n : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- **Premiers termes** $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$
- **Convergence** $\lim_{n\to+\infty} s_n = s \implies \sum_n^{\infty} a_n$ **conv.**

Critère de divergence

Si la série converge, la suite correspondante **converge vers 0**, et si la suite ne converge pas vers zéro, la série est divergente

- $\sum_n^{\infty} a_n = s$ (**conv.**) $\implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_n^{\infty} a_n$ **div.**

Attention

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

Convergence d'une série géométrique

- ▷ $|r| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$ (**conv.**)
- ▷ $(|r| \geqslant 1) \wedge (a \neq 0) \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \infty$ (**div.**)

Propriétés des séries

- ► **+** et **-** de deux séries convergentes ainsi que $c \cdot \sum_n^{\infty} a_n$ engendrent une série **conv**.
- ► $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$
- ► $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

Test de l'intégrale

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ **continue**, **positive** et **décroissante** et $a_n : f(n) = a_n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.} \leftrightarrow \lim_{a\to+\infty} \int_{x=1}^{x=a} f(x)dx = s \quad (\text{conv.})$$

Série de Riemann et série puissance

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge si } p > 1, \text{ diverge si } p \leqslant 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \text{ converge si } p > 1$$

La première est un **série de Riemann** ; la seconde est une **série puissance**.

Estimation du reste par TI

Si $f : \lambda, +, \downarrow\ [m, \infty[$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$, $a_n = f(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, $R_m = s - s_m$, **alors** le reste R_m est borné et peut être estimé :

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant \left(R_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \right) \leqslant \int_{m}^{\infty} f(x)dx$$

Test de comparaison

Soient $\sum a_n, \sum b_n$ des séries à **termes positifs** et $n_0 \in \mathbb{R}$:

- ▷ $(\sum b_n$ **conv.**$) \wedge (a_n \leqslant b_n \forall n \geqslant n_0) \implies a_n$ **conv.**
- ▷ $(\sum b_n$ **div.**$) \wedge (a_n \geqslant b_n \forall n \geqslant n_0) \implies a_n$ **div.**
- ▷ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}$ **existe et** $L > 0 \implies \sum a_n$ **conv.** $\leftrightarrow \sum b_n$ **conv.**
- ► Principalement pour Riemann & géométriques

Test sur séries alternées

Soit un **rang** $n_0 \in \mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ telle que

- ▷ $0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ $(\downarrow$ **et** $+)$
- ▷ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Alors,

- ► $\sum(-1)^n b_n$ **conv.** vers $s \in \mathbb{R}$ $\forall m \geqslant n_0$ **et**
- ► $|s - s_m| \leqslant b_{m+1}$

Définition de convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{conv.} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv. } \textit{absoluement}$$

▷ **Semi-conv.** : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv. && $\neg(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|)$

► **Exemple** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv **mais** $\neg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})$ conv.

Test du rapport (d'Alembert)

Soit $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ **alors** si :

- ▷ $L = 1 \implies$ *inconclusif*
- ► $L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**
- ► $L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

Test de Cauchy

Soit $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ **alors** si :

- ▷ $L = 1 \implies$ *inconclusif*
- ► $L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**
- ► $L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

Définінition d'une série entière

Soit une variable x, les contantes $c_0, c_1, \cdots, c_n$ et $n \in \mathbb{N}$, une série est dite centrée en $a \in \mathbb{R}$ si on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Famille de séries paramétrées par x

Soit l'ensemble D des x pour lesquels la série converge, la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ engendre une somme $f(x) \in \mathbb{D}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Fonction	Somme
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$
$\frac{1}{1-x}$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$
$\ln(1+x)$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
$\arctan(x)$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
$(1+x)^k$	$\forall\ \lvert x\rvert < 1$: $1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 \ldots$

Rayon de convergence

Soit la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, il a *trois possibilités* :

- ▷ S **conv.** à $x = a \implies R = 0$
- ▷ $\forall\ x,\ S$ **conv.** $\implies R = \infty$
- ▷ $\exists R > 0$:
  - ► $|x - a| < R \implies S$ **conv.**
  - ► $|x - a| > R \implies S$ **div.**

Intervale de convergence

Soit R, le rayon de convergence d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$, l'**intervale de convergence** I est donné par :

- ▷ **Si** $R = 0 \implies I = a = [a, a]$
- ▷ Si $R = \infty \implies I = \mathbb{R}$
- ▷ **Si** $R > 0$ **et** $R \in \mathbb{R}$
  - ► $I =]a - R, a + R[$
  - ► $I =]a - R, a + R]$
  - ► $I = [a - R, a + R[$
  - ► $I = [a - R, a + R]$

Dérivation et intégration termes à termes

Soit la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ ayant un rayon de convergence $R > 0$, et $f(x) = S$ est **dérivable** sur $(a - R, a + R)$, **alors**,

- ▷ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$
- ▷ $\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Expression d'une fonction en série géométrique

Chaque fonction $f : (a-R, a+R) \to \mathbb{R}$ peut être approximé par une série géométrique :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots \end{aligned}$$

Pour trouver les **coefficients** $c_0, c_1, \dots c_n$, on a :

$$f(a) = c_0 + \cancel{c_1(a-a)} + \cancel{c_2(a-a)^2} + \cdots \cancel{c_n(a-a)^n}$$

$$f'(a) = 0 + c_1 + \cancel{2c_2(a-a)} + \cancel{3c_3(a-a)^2} + \cdots + \cancel{nc_n(a-a)^n}$$

$$f''(a) = 0 + 0 + 2c_2 + \cancel{6c_2(a-a)} + \cancel{12c_4(a-a)^2} + \cdots + \cancel{nc_n(a-a)^n}$$

$$f'''(a) = 6(c_3) = 3!c_3$$

$$f^4(a) = 24c_4 = 4!c_4$$

On peut donc exprimer les coefficients en généralisant et on obtient alors la formule de Taylor :

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

Ainsi, nous avons l'expression générale :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \textbf{ Taylor}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n \textbf{ McLaurin}$$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \textbf{ Expression générale}$$

Polynôme de Taylor

Si une $f(x)$ est *infiniment dérivable*, et est représentée par une série entière **alors** cette série est la *série de Taylor* de f.

$$\begin{aligned} T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ + \cdots \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \textbf{ Polynôme de Taylor} \end{aligned}$$

Reste du polynôme de Taylor

Soit le reste $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, si $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \ \forall \ |x-a| < R$, **alors** :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Le **reste du polynôme de Taylor** ou erreur sur l'approximation de Taylor $R_n(x)$ est la différence entre la valeur réelle de la fonction $f(x)$ et l'approximation donnée par le polynôme de Taylor de degré n noté $T_n(x)$ Si ce reste tend vers zéro pour n tendant vers l'infini, pour tout x dans un intervalle autour de a de rayon R, cela signifie que le polynôme de Taylor converge vers la fonction $f(x)$. dans cet intervalle. Cela indique que l'on peut représenter $f(x)$ aussi précisément que souhaité (dans cet intervalle) en augmentant le degré n du polynôme de Taylor.

Inégalité de Taylor

Soit $M, d \in \mathbb{R}$ deux **constantes positives** et $|f^{n+1}(x)| \leqslant M, \ \forall \ |x-a| < d$, **alors**

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \ \forall \ |x-a| < d$$

L'**inégalité de Taylor** fournit une estimation de l'erreur (le reste $R_n(x)$) commise en utilisant le polynôme de Taylor de degré n pour approximer $f(x)$ Si on connaît une borne supérieure M pour la $(n+1) - ime$ dérivée de f dans un intervalle autour de a, alors on peut utiliser cette borne pour estimer l'erreur maximale de l'approximation sur cet intervalle.

Corollaire de l'inégalité de Taylor

Soient $N, c, d \in \mathbb{R}$ des **constantes positives** et soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\forall \ n > N$ et $|x-a| < d$ **et** si on a

$$|f^n(x)| \leqslant c^n \textbf{ ou } |f^n(x)| \leqslant c \text{ (version faible)}$$

Cela implique (dans la cas le plus fort) que

$$f^{n+1}(x) \leqslant c^{n+1}$$

Et par conséquent, $f(x)$ est représentée par sa série de Taylor sur

$$(a-d, a+d)$$

.

et on a alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Le **corollaire de l'inégalité de Taylor** étend l'inégalité de Taylor en considérant des conditions sur les dérivées successives de f. Il indique que si les dérivées de f au-delà d'un certain ordre N croissent d'une manière contrôlée (soit proportionnellement à c^n ou restent sous une certaine constante c), alors $f(x)$ peut être approximée par sa série de Taylor dans un intervalle autour de a