

MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Introduction

Franz Girardin

21 août 2024

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 FONCTIONS ET PROPRIÉTÉS PAGE 2

1.1	Fonction exponentielle	2
1.2	Propriétés exponentielles	2
1.3	Fonction logarithmique	2
1.4	Optimisation	2
1.5	Test de la dérivé première	2
1.6	Test de la dérivé seconde	2
1.7	Fonctions sinus et cosinus	2

CHAPITRE 2 LIMITES DES FONCTIONS PAGE 2

2.1	Limite	2
2.2	Limite à droite et à gauche	3
2.3	Propriétés des limites	3
2.4	Continuité	3
2.5	Dérivée	3
2.6	Formule	3
2.7	Propriétés d'addition et de multiplication	3
2.8	Règles de différenciation	3
2.9	Les formes indéterminées	4

CHAPITRE 3 INTÉGRATION PAGE 4

3.1	Définition d'une intégrale	4
3.2	Propriétés de l'intégrale	4
3.3	Trouver l'aire sous la courbe	4

CHAPITRE 4 TECHNIQUES DE BASES PAGE 4

4.1	Polynôme	4
-----	----------	---

FONCTIONS ET PROPRIÉTÉS

1.1 Fonction exponentielle

- ▷ **Domaine** : \mathbb{R}
- ▷ **Continuité** : Continue sur **dom**
- ▷ **Croissance** $0 < base < 1$: Stric. ↓
- ▷ **Croissance** $base > 1$: Stric. ↑
- ▷ **Ordonnée O.** : $e^0 = 1$
- ▷ **Signe** : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- ▷ $e^x : x \rightarrow \infty + : \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$
- ▷ $e^x : x \rightarrow \infty - : \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

1.2 Propriétés exponentielles

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad | \quad e^{xy} = (e^x)^y$$

$$(e^x)' = e^x \quad | \quad (a^x)' = a^x \log_e a$$

1.3 Fonction logarithmique

- ▷ **Domaine** : $]0, \infty[$
- ▷ **Continuité** : Continue sur **dom**
- ▷ **Croissance** $0 < base < 1$: Stric. ↓
- ▷ **Croissance** $base > 1$: Stric. ↑
- ▷ **Abscisse O.** : $\log_e(1) = 0$
- ▷ **Signe** : $\forall x > AO, \log_a x > 0$; $\forall x, 0 < x < AO, \log_a x < 0$
- ▷ $e^x : x \rightarrow \infty + : \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \infty$
- ▷ $e^x : x \rightarrow \infty - : \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = -\infty$

$$\log(x+y) = \log x + \log y \quad | \quad \log x^y = y \log x$$

$$\log_a x = \frac{\log_a x}{\log_b x} \quad | \quad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

1.4 Optimisation

- ▷ **Maximum** : point $x \in \text{dom} : \forall y \in f, y \neq x, f(x) \geq f(y)$
- ▷ **Minimum** : point $x \in \text{dom} : \forall y \in f, y \neq x, f(x) \leq f(y)$
- ▷ **Point d'inflexion** : $\uparrow - \downarrow$ ou $\downarrow - \uparrow$
- ▷ **Potentiel max ou min** : $f'(x) = 0$ ou $f'(x) \nexists$

1.5 Test de la dérivé première

Soit $f(x)$, on peut considérer $f'(x)$ pour déduire des **informations** propres à f .

TABLE 1.1 – Test de la dérivé première pour une fonction hypothétique

	$-\infty$		-2		1		10
f'		+		+	\nexists	-	
f	$-\infty$	\nearrow	inflex.	\nearrow	max	\searrow	0

Exemple 1 Interpréter un tableau de test de dérivé première

1. Comportement à la frontière Appliquer une limite aux deux frontières de la fonction, dans ce cas-ci $x \rightarrow -\infty$ et $x \rightarrow 10$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty+} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 10} f(x) = 0$$

2. Calculer f' . Trouver x tels que :

1 $f'(x) = 0$

2 $f'(x)$ n'existe pas

Dans le contexte de l'exemple, on a trouvé la valeur -2, qui correspond au moment où $f'(x) = 0$. Et la valeur 1 correspond au moment où la dérivé n'existe pas.

3. Trouver le signe f' sur chacun des intervalles entre nos points d'intérêts pour déterminer le comportement de la fonction.

Entre $-\infty$ et -2, la dérivé est positive; la fonction est donc **croissante** sur cet interval.

Entre -2 et 1, la dérivé est positive; la fonction est donc **croissante** sur cet interval.

Entre 1 et 10, la dérivé est négative; la fonction est donc **décroissante** sur cet interval.

Noter que pour déterminer le signe de la dérivé, il suffit d'évaluer $f'(x)$ à n'importe quel endroit dans l'intervalle (e.g. $f'(1)$ pour l'intervalle de $-\infty$ à -2)

1.6 Test de la dérivé seconde

Concept. 1 Test de la dérivé seconde

Si et seulement si on obtient un point d'intérêt où la dérivée première est nulle, on peut trouver les maximums et minimums locaux, grâce au test de la dérivé seconde

Définition Maximum et minimum local

Soit $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$, on a un **maximum local** en x .

Soit $f'(x) = 0$ et $f''(x) > 0$,

on a un **minimum local** en x .

1.7 Fonctions sinus et cosinus

TABLE 1.3 – Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Propriété	Description
Domaine	\mathbb{R}
Continuité	Continue sur leur domaine
Croissance	Toutes deux 2π périodiques.

Identité 1 Cosinus pair et sinus impair

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x)$$

Identité 2 Règle de dérivation de la fonction cosinus

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Identité 3 Règle de dérivation de la fonction sinus

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

Identité 4

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Identité 5

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

LIMITES DES FONCTIONS

2.1 Limite

Définition

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **Converge vers L** si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de L lorsque $x \rightarrow a$

2.2 Limite à droite et à gauche

Définition

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

La **limite à droite** est la limite lorsque x s'approche de a , venant de la **droite** :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \implies x \in D \text{ et } x > a$$

La **limite à gauche** est la limite lorsque x s'approche de a , venant de la **gauche** :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \implies x \in D \text{ et } x < a$$

Lorsque les deux limites sont équivalentes, la **limite existe** :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si **aucun** $x < a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \\ \Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Si **aucun** $x > a$:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \\ \Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Définition Divergence d'une fonction

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **diverge** si la limite ne converge vers aucun $L \in \mathbb{R}$

Cas particulier si

- 1 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$
- 2 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M$
- 3 $L \neq M$

alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **diverge**.

2.3 Propriétés des limites

Concept. 2 Addition, soustraction et multiplication de limite

Supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, $L, M \in \mathbb{R}$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LM$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ si } M \neq 0$$

Concept. 3 Comportement asymptotique et $c > 0$

Soit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \neq 0, \pm\infty$ si $c > 0$, on a

Concept. 4 Comportement asymptotique et $c < 0$

Soit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \neq 0, \pm\infty$ si $c < 0$, on a

2.4 Continuité

Concept. 5 Fonction continue

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue** en $a \in D$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Autrement dit, une fonction est continue sur son domaine si pour chaque élément $a \in D$, la limite lorsque $x \rightarrow a$ est égale à $f(a)$. Et donc, la limite à gauche et à droite est la même valeur $f(a)$

Identité 6 Conséquence de la continuité de deux fonctions

Si f et g sont continues en a , alors

1. $f + g$ et fg sont continues en a
2. $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$
3. $f \circ g$ et fg sont continues en a si $f \circ g$ est définie près de a

2.5 Dérivée

Définition La dérivée d'une fonction

Soit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Si cette limite existe, on dit que on dit qu'il s'agit de la **dérivée de la fonction** f au point a . Géométriquement, la valeur vers laquelle converge $f'(a)$ correspond à la pente de la droite tangente en a .

2.6 Formule

Concept. 6 Règles de dérivations pour des fonctions courantes

1. $(c)' = 1$, c une constante
2. $(x^r)' = rx^{r-1}$, $\forall r \in \mathbb{R}$
3. $(a^x)' = a^x \ln(a)$ 4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ 6. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$

7. $(\sin x)' = \cos x$ 8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \sec^2 x$

10. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$
11. $(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
11. $(\arcsin x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

2.7 Propriétés d'addition et de multiplication

Concept. 7 Propriétés de la dérivée

Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables

1. $(cf(x))' = cf'(x)$, ou c est une constante.
2. $(f(x) + g(x))' = cf'(x) + g'(x)$
3. $f'(x) = 0$ si et seulement si f est une constante.

2.8 Règles de différenciation

Concept. 8 Règles de calcul

1. **Produit** : $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

2. Quotient : $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

3. Dérivation en chaîne : $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

2.9 Les formes indéterminées

Toute expression représenté par une des formes suivantes est dite **indéterminée** :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty, 0 \times \infty, \infty^0, 0^0$$

Ces formes indéterminées peuvent être simplifiées en utilisant différentes techniques :

Manipulations algébriques factorisation, multiplication par le conjugué, simplification

Règle de l'Hôpital

Utilisation du logarithme

3

INTÉGRATION

3.1 Définition d'une intégrale

Concept. 9 Intégrale et théorème fondamental du calcul

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale de a à b de f est noté :

$$\int_a^b f(x)dx$$

3.2 Propriétés de l'intégrale

Concept. 10

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
Alors,

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ et}$$

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Si $a < c < b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b c f(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx =$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Définition Théorème fondamental du calcul

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur l'intervalle. Si une fonction $F(x)$ correspond à la dérivée de $f(t)$ en fonction de x sur l'intervalle $[a, b]$, autrement dit :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors, $F(x)$ est dérivable et on a :

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Si F est une fonction de la dérivée est f ; autrement dit :

$$F'(x) = f(x)$$

Alors, l'intégrale définit de $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ correspond à la différence entre les ordonnées de a et b sur F :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

\Updownarrow

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(t)dt = f(b) - f(a)$$

3.3 Trouver l'aire sous la courbe

4

TECHNIQUES DE BASES

4.1 Polynôme

Définition

Un polynôme a la forme $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et la **puissance** d'un polynôme est l'exposant le plus élevé de l'expression.

Note:-

Lorsque le degré du numérateur est plus grand ou égal au degré du dénominateur, on peut effectuer une division polynomiale pour simplifier une expression :

$$\frac{x^{-1}}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

Concept. 11 Complétion du carré

Soit un polynôme $p = ax^2 + bx + c$, on peut compléter le carré en considérant :

$$h = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{4a}\right) + \frac{b^2}{4a} + c$$

$$p(x) = a\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} + c$$