MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Travail Pratique 1

Franz Girardin

15 septembre 2024

Table des matières

Définition de convergence

Exercice 1 (Stewart 1.1.2)
Qu'est-ce qu'une *suite convergente* ? Donnez **deux exemples**. Qu'est-ce qu'une *suite divergente* ? Donnez **deux** exemples

Est **convergente** toute **suite** $\{a_n\}$ dont les termes a_n s'approchent autant que l'on veut d'une valeur L lorsque l'entier n devient arbitrairement grand :

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L\right) \implies a_n \textbf{ conv}.$$

Plus formellement, soit une valeur positive arbitrairement petite ε, il existe toujours un entier $N(\varepsilon)$ qui représente un rang à partir duquel s'il y a un entier naturel $n > N(\varepsilon)$, **alors** l'image de cet entier naturel, a_n sera aussi proche que l'on veut d'une **valeur** L représentant *le point de convergence de la suite* :

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Exemple de suites convergentes : $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}, \quad \{b_n\} = \dfrac{1}{n^2}$

Est **divergente** toute suite dont les termes a_n ne convergent vers acune valeur particulière ; ils s'approchent plutôt de $\pm\infty$:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty\right) \implies a_n \textbf{ div}.$$

Plus formellement, soit un nombre positif arbitrairement grand $M > 0$, on pourra toujours trouver une valeur $N(M) \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les entiers $n > M$ auront une image a_n **plus grande** que nombre arbitrairement grand. Cela signifie que les termes de la suites ne s'approchent d'aucune valeur.

$$\forall\, M > 0 : \exists N(M) \in \mathbb{N} > 0 : n > N \implies a_n > M(\textbf{div}. +\infty)$$

Identification des termes

Exercice 2 (Stewart 1.1.8)
Donnez les **cinq premiers termes** de la suite $a_n = \frac{(-1)^n n}{n!+1}$

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = -\frac{3}{7},\ a_4 = \frac{4}{25} a_5 = -\frac{5}{121}$$

Exercice 3 (Stewart 1.1.11)
Donnez les **cinq premiers termes** de la suite $a_n = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5},\ a_4 = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7} = \frac{2}{7},\ a_5 = \frac{2}{7}\times\frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

Trouver la règle

Exercice 4 (Stewart 1.1.15)
Trouver la formule du **terme général** a_n de la suite $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right\}$

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Exercice 5 (Stewart 1.1.18)
Trouver la formule du **terme général** a_n de la suite $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots\}$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

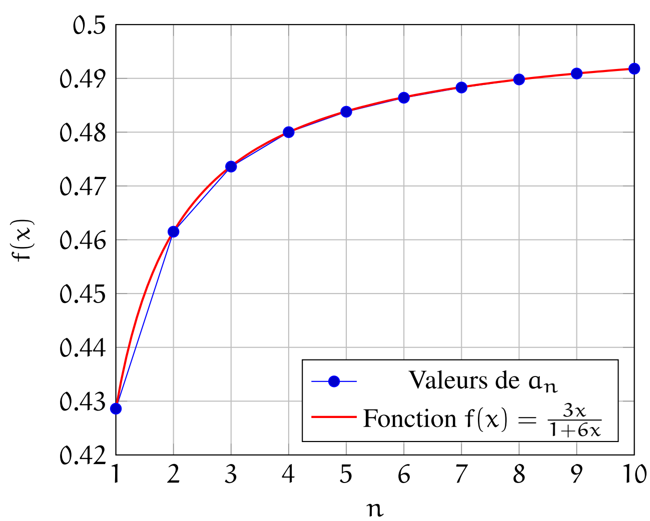
Estimer un somme

Exercice 6 (Stewart 1.1.19 - 1.1.22)
Calculez, **à la quatrième décimale**, les dix premiers termes de la suite et utilisez-les pour tracer le graphique de la suite à la main. La suite semble-t-elle avoir une limite ? Si oui, **calculez cette limite**. Si non, expliquez pourquoi.

1.1.19 $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$

$$a_1 = 0.4286,\ a_2 = 0.4615,\ a_3 = 0.4736,\ a_4 = 0.4800,\ a_5 = 0.4838,$$
$$a_6 = 0.4864,\ a_7 = 0.4883,\ a_8 = 0.4998,\ a_9 = 0.4909,\ a_{10} = 0.4918$$

Graphe de la suite $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$ et de la fonction $f(x) = \dfrac{3x}{1+6x}$



Déterminer la convergence

Exercice 7 (Stewart 1.1.23 - 1.1.56)
Déterminez si la suite converge ou diverge. Si elle converge, **trouvez sa limite**.

1.1.23 $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2} \lim_{n\to+\infty} a_n \implies \dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{3+5n^2}{n+n^2} = \frac{n^2(\frac{1}{3n^2}+5)}{n^2(1+\frac{1}{n})} = a_n \quad \text{(Simplifié)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}\cancelto{0}{\frac{1}{n}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{1} = \frac{5}{1}$$

1.1.42 $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{n}$

Nous savons que la fonction a_n est bornée entre les valeurs $\cos^2 n \in [0,1]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons les équivalences suivantes :

$$G0 \leqslant \cos^2 n \leqslant 1$$
$$\frac{0}{n} \leqslant \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{0}{n}} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{n}}$$

Ainsi nous savons que la limite est bornée **inférieurement et supérieurement** par zéro, lorsque $n \longrightarrow \infty$. Ainsi, nous pouvons conclure que la limite est égale à zéro et que la suite a_n converge vers $L = 0$.

1.1.44 $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

$$a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}} = \left(2 \cdot 2^{3n}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{3n}{n}} \quad \text{(Développé)}$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} = 2^{\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} \cdot 2^3 = 8$$

1.1.46 $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$
Nous savons que la suite $\{a_n\}$ est bornée par les valeurs -1 et 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant a_n \leqslant 1$. En utilisant l'identité $\cos \pi n = (-1)^n$, nous avons :

$$a_n = 2^{-1} \cos \pi n = b_n = 2^{-1}(-1)^n$$

Nous pouvons ainsi évaluer la limite lorsque $n \longrightarrow 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{2^n}} \cdot (-1)^n = \lim_{n\to+\infty} 0 \cdot (-1)^n = 0$$

1.1.52 $a_n = \arctan(\ln n)$

Nous savons que la fonction $\ln x$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. Et par le théorème d'association d'une fonction à une suite, nous savons que la suite analogue $b_n = \ln n$ tend également vers $+\infty$. Nous avons alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan \big(\overset{\infty}{\cancel{\ln n}}\big) = \lim_{M\to+\infty} \arctan(M) = \frac{\pi}{2}$$

1.1.54 $a_n = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

En observant la suite, on constate que le dénominateur pour les termes n **impairs** est équivalent à $\frac{n+1}{2}$:

$$\frac{1}{\left(\frac{1+1}{2}\right)} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{\left(\frac{3+1}{2}\right)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\left(\frac{5+1}{2}\right)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{\left(\frac{7+1}{2}\right)} = \frac{1}{4}, \cdots$$

Et en observant la suite, on constate que le dénominateur pour les termes n **pairs** est équivalent à $\frac{n}{2} + 2$:

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{2}+2\right)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{\left(\frac{4}{2}+2\right)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\left(\frac{6}{2}+2\right)} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{\left(\frac{8}{2}+2\right)} = \frac{1}{6},$$

On peut donc conclure que la suite obéit à la règle $a_n = \frac{1}{\frac{n+1}{2}}$ pour les termes **impairs** et $a_n = \frac{1}{\frac{n+4}{2}}$ pour les termes **pairs**. En simplifiant les fractions, on obtient :

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+1} & n \text{ impairs} \\[2ex] \dfrac{2}{n+4} & n \text{ pairs} \end{cases}$$

1.1.56 $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-3)^n}{n!} &= \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} -\cos(n\pi)\frac{3^n}{n!} \\
&= -\lim_{n\to+\infty} \cos(n\pi)\overset{0}{\cancel{\frac{3^n}{n!}}} \\
&\implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

La partie importante ici est le rapport entre $(-3)^n$ et $n!$. Bien que 3^n croisse exponentiellement, $n!$ croît beaucoup plus rapidement que 3^n, car $n!$ est un produit d'entiers successifs qui croît super-exponentiellement. Cela signifie que pour des n suffisamment grands, le dénominateur $n!$ va dominer le numérateur 3^n, ce qui entraînera la limite de a_n vers 0.

> **Exercice 8** (Stewart 1.1.64)
> Déterminez si la suite définie par récurrence est convergente ou divergente :
>
> $$a_1 = 1, \; a_{n+1} = 4 - a_n \; \forall n \geqslant 1$$

1.1.64a Les premiers termes de la suite sont les suivantes :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 1, \cdots$$

On voit que la suite oscille entre les valeurs 1 et 3, en fonction du fait que n est **pair** ou **impair** :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 1, \cdots$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ impair} \\ 3 & n \text{ pair} \end{cases}$$

Puisque la suite oscille entre deux valeurs, la limite $\lim_{n \to +\infty} a_n$ est **indéfinie** et on peut conclure que la suite diverge.

1.1.64b

Si la valeur de a_1 était $a_1 = 2$, on aurait les premiers termes suivants :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 2, \quad \cdots$$

Ainsi, on constate qu'après le premier termes, la suite a une valeur constante $a_n = 2 \forall n > 1$. On peut donc conclure que la suite converge vers l'entier naturel 2.

Convergence de a_{n+1}

> **Exercice 9** (Stewart 1.1.70a)
>
> Si $\{a_n\}$ converge, montrez que
>
> $$\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

Preuve directe. La définition de convergence d'une suite suggère que a_n est **convergente** si pour toute valeur arbitrairement petite et positive, $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ qui représente un seuil à partir duquel pour toute valeur $n > N(\varepsilon)$, la distance entre a_n et L est suffisamment petite ($|a_n - L| < \varepsilon$). Après ce seuil N les images a_n de chaque $n > N$ sont suffisamment proche d'une valeur limite L. Autrement dit :

$$a_n \textbf{ conv.} \implies \forall\, \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Supposons que la suite $\{a_n\}$ converge vers L. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N(\varepsilon)$, on a $|a_n - L| < \varepsilon$.

Maintenant, considérons la suite $\{a_{n+1}\}$. Lorsque $n > N(\varepsilon)$, il est évident que $n + 1 > N(\varepsilon)$ également. Ainsi, pour $n > N(\varepsilon)$, on a aussi :

$$|a_{n+1} - L| < \varepsilon.$$

Cela montre que $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = L$, puisque la distance entre a_{n+1} et L devient arbitrairement petite pour des n suffisamment grands.

Ainsi, nous avons montré que si $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$, alors $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = L$.

Conclusion : Puisque les deux suites $\{a_n\}$ et $\{a_{n+1}\}$ convergent vers la même limite L, nous avons :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} a_n.}$$

Exercice 10 (Stewart 1.1.70b)

Une suite $\{a_n\}$ est définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $\forall n \geqslant 1$. En supposant que $\{a_n\}$ converge, trouvez sa limite.

Les premiers termes de la suite sont :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{5}{8}, \quad a_6 = \frac{8}{13}, \quad a_7 = \frac{13}{21}, \quad a_8 = \frac{21}{34}, \quad a_9 = \frac{34}{55}, \quad a_{10} = \frac{55}{89}$$

Supposons, comme suggère l'énoncé, que la suite $\{a_n\}$ converge vers L :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

Or, la relation de récurrence, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$. Et puisque $a_n \to L$ lorsque $n \to \infty$, la récurrence engendre l'équivalence :

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+L}$$

Nous avons montré que si a_n converge vers L, alors a_{n+1} converge également vers L. Ona donc :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{1+L} \\ L(1+L) &= 1 \\ L + L^2 &= 1 \\ L^2 + L - 1 &= 0 \end{aligned}$$

En appliquant la formule quadratique, on obtient :

$$L = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Cela engendre les solutions $L_1 \approx 0.618$ et $L_2 \approx -1.628$. Puisque les valeurs des termes de la suite sont positives (voir a_1 à a_{10}), on peut **rejeter la solution négative**. La limite de la suite $\{a_n\}$ est :

$$\boxed{L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Théorie sur les suites monotones

Exercice 11 (Stewart 1.1.71)

Supposez que vous savez que est une suite décroissante et que tous ses termes sont compris entre les nombres 5 et 8. Expliquez pourquoi cette suite possède une limite. Que pouvez-vous dire à propos de la valeur de cette limite ?

Par la propriété des suites monotones, toute suite décroissante et bornée est également convergente. Plus formellement, supposons que $\{a_n\}$ est décroissante et que toutes les valeurs de $\{a_n\}$ sont comprises entre 5 et 8. Sachant que $\{a_n\}$ est décroissante, nous savons également que $\forall\ n \geqslant 1, a_{n+1} \leqslant a_n$. Ainsi, chaque valeur a_{n+1} est au moins égale ou plus petite que son prédécesseur a_n. Ainsi, lorsque $n \to \mathtt{infty}$, valeurs de la suite s'approchent de la borne inférieure et la limite de $\{a_n\}$ est une certaine valeur $L \geqslant 5$.

Déterminer la convergence de suites monotones

Exercice 12 (Stewart 1.1.72-1.1.78)
Déterminez si la suite est croissante, décroissante ou non monotone. Est-elle bornée ?

1.1.73 $a_n = \frac{1}{2n+3}$. La suite $\{a_n\}$ est strictement décroissante ; il s'agit donc d'une suite monotome. On constate que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L = 0$ Ainsi, on peut conclure que $\{a_n\}$ est bornée inférieurement.

1.1.75 $a_n = n(-1)^n$. La suite $\{a_n\}$ oscille entre des valeurs positives et négatives à cause de l'exposant $(-1)^n$. Ainsi, lorsque $n \to \infty$, a_n ne s'approche d'aucune valeur particulière. Ainsi, on peut conclure que $\{a_n\}$ est non bornée, divergente et non monotone.

Exercice 13 (Stewart 1.1.82)
Montrer que la suite définie par

$$a_n = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$$

satisfait à $0 < a_n \leqslant 2$ et qu'elle est décroissante. Désuisez que cette suite converge et trouvez sa limite

Soit la suite définie par :

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}.$$

1. Montrons que la suite (a_n) est décroissante.

Preuve par récurrence

Description : Nous voulons montrez $P(n)$, c'est-à-dire que $0 < a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, nous voulons montrer que la suite est décroissante.

Initialisation : Pour $n = 1$, calculons a_n et a_{n+1} ; vérifions $P(1)$:

$$a_n = a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_2 = \frac{1}{3-a_1} = \frac{1}{3-2} = 1.$$

Ainsi, on a

$$0 < \underbrace{a_{n+1}}_{=1} \leqslant \underbrace{a_n}_{=2} \leqslant 2$$

et le **cas de base** est vérifié ; $P(1)$ est vrai. Nous voulons maintenant montrer que si $P(n)$ est vrai, cela implique que $P(n+1)$ est aussi vrai :

$$P(n) \implies P(n+1)$$

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geqslant 1$, on a $0 < a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 2$. Montrons que cela implique que $a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
& a_{n+2} \leqslant a_{n+1} && \text{À vérifier} \\
& \frac{1}{3-a_{n+1}} \leqslant a_{n+1} && \text{Définition de } a_{n+2} \\
& 0 < \frac{1}{3-a_{n+1}} \leqslant a_{n+1} \leqslant 2 && \text{Inclusion des bornes}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous constatons que si l'hypothèse d'hérédité est vraie, le terme suivant a_{n+2} sera toujours compris entre les bornes 0 et 2 tel que $0 < a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 2$. Et un terme quelconque $n+2$ sera donc toujours plus petit que son prédécesseur $n+1$.

2. Montrons que la suite converge.

Puisque nous savons que la suite est monotone (décroissante) et bornée, par le **théorème des suites bornées**, nous pouvons conclure qu'elle est également convergente. Pour trouver vers quelle valeur la suite converge, on peut utiliser les expressions qui définissent la suite.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = L &= \frac{1}{3 - \cancelto{L}{a_n}} \\
L &= \frac{1}{3-L} \\
&\implies L(3-L) = 1 \\
&\implies 3L - L^2 = 1 \\
&\implies L^2 - 3L + 1 = 0
\end{aligned}$$

Les deux solutions possibles pour cette équation sont :

$$L = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solution $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ engendre une valeur $\alpha \approx 2.618 > 2$ qui est supérieure à notre borne supérieure $a_1 = 2$. La seule valeur possible est donc :

$$\boxed{0 < L = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 1.882 \leqslant 2}$$

Conclusion : La suite (a_n) est décroissante, elle vérifie $a_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$, et elle converge vers $L = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 14 (Stewart 1.1.92a)

Montrez que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = L$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L$, alors $\{a_n\}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{Z}^+$ tel que pour tout $n > N$, on ait $|a_n - L| < \varepsilon$.

Hypothèses :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = L$, c'est-à-dire qu'il existe $N_1 \in \mathbb{Z}^+$ tel que pour tout $n > N_1$,
$$|a_{2n} - L| < \varepsilon.$$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = L$, c'est-à-dire qu'il existe $N_2 \in \mathbb{Z}^+$ tel que pour tout $n > N_2$,
$$|a_{2n+1} - L| < \varepsilon.$$

Cas 1 : n est pair

Si n est pair, alors $n = 2m$ pour un certain entier m. On utilise la limite des termes pairs :

$$|a_n - L| = |a_{2m} - L| < \varepsilon, \quad \text{pour } m > N_1.$$

Cela implique que pour $n = 2m$ et $n > 2N_1$, on a $|a_n - L| < \varepsilon$.

Cas 2 : n est impair

Si n est impair, alors $n = 2m+1$ pour un certain entier m. On utilise la limite des termes impairs :

$$|a_n - L| = |a_{2m+1} - L| < \varepsilon, \quad \text{pour } m > N_2.$$

Cela implique que pour $n = 2m+1$ et $n > 2N_2 + 1$, on a $|a_n - L| < \varepsilon$.

Conclusion

Il suffit de prendre $N = \max(2N_1, 2N_2+1)$. Ainsi, pour tout $n > N$, que n soit pair ou impair, on a $|a_n - L| < \varepsilon$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.