MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Introduction

Franz Girardin

5 septembre 2024

Table des matières

1

Fonctions et propriétés

1.1 Fonction exponentielle

- **Domaine** : $\mathbb{R}$
- **Continuité** : Continue sur **domaine**
- **Croissance** : $0 <$ **base** $< 1 \implies$ **Strict.** $\downarrow$
- **Croissance** : **base** $> 1 \implies$ **Strict.** $\uparrow$
- **Ordonnée à l'ori.** : $e^0 = 1$
- **Signe** : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
- $e^x : x \longrightarrow \infty+ : \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$
- $e^x : x \longrightarrow \infty- : \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

1.2 Propriétés exponentielles

1. $e^{x+y} = e^x e^y k$
2. $e^{xy} = (e^x)^y$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \log_e$

1.3 Fonction logarithmique

- **Domaine** : $]0, \infty[$
- **Continuité** : Continue sur son **domaine**
- **Croissance** $0 <$ **base** < 1 : **Strict.** $\downarrow$
- **Croissance** : **base** > 1 : **Strict.** $\uparrow$
- **Abscisse à l'ori.** : $\log_e(1) = 0$
- **Signe** : $\forall x > 1 \log_a x > 0$
- **Signe** : $\forall x,\ 0 < x < 1, \log_a x < 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_a x = -\infty$

1.4 Propriétés logarithmiques

1. $\log(x+y) = \log x + \log y$
2. $\log x^y = y \log x$
3. $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b}$
4. $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

1.5 Optimisation

- **Maximum** : point $x \in$ **dom** : $\forall y \in f, y \neq x, f(x) \geqslant f(y)$
- **Minimum** : point $x \in$ **dom** : $\forall y \in f, y \neq x, f(x) \leqslant f(y)$
- **Point d'inflexion** : $\uparrow - \downarrow$ ou $\downarrow - \uparrow$
- **Potentiel max ou min** : $(f'(x) = 0 \vee f'(x) \nexists) \implies$ **max.** $\vee$ **min.**

1.6 Test de la dérivé première

Soit $f(x)$, on peut considérer $f'(x)$ pour déduire des **informations** propres à f.

Table 1.1 – Test de la dérivé première pour une fonction hypothétique

	$-\infty$		-2		1		10
f'		$+$		$+$	$\nexists$	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	inflex.	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Exemple 1 Interpréter un tableau de test de dérivé première

1. Comportement à la frontière Appliquer une limite aux deux frontières de la fonction, dans ce cas-ci $x \to -\infty$ et $x \to 10$. On a :

$$\lim_{x \to \infty^+} f(x) = \infty \textbf{ et } \lim_{x \to 10} f(x) = 0$$

2. Calculer f'. Trouver x tels que :

1 $f'(x) = 0$

2 $f'(x)$ n'existe pas

Dans le contexte de l'exemple, on a trouvé la valeur -2, qui correspond au moment ou $f'(x) = 0$. Et la valeur 1 correspond au moment ou la dérivé n'existe pas.

3. Trouver le signe f' sur chacun des intervales entre nos points d'intérêts pour déterminer le comportement de la fonction.
Entre $-\infty$ **et** -2, la dérivé est positive ; la fonction est donc **croissante** sur cet interval.
Entre -2 **et** 1, la dérivé est positive ; la fonction est donc **croissante** sur cet interval.
Entre 1 **et** 10, la dérivé est négative ; la fonction est donc **décroissante** sur cet interval.

Noter que pour déterminer le signe de la dérivé, il suffit d'évaluer $f'(x)$ à n'importe quel endroit dans l'interval (e.g. $f'(1)$ pour l'intervale de $-\infty$ à -2)

1.7 Test de la dérivé seconde

Concept. 1 Test de la dérivé seconde

Si et seulement si on obtient un point d'intérêt ou la dérivée première est nulle, on peut trouver les maximums et minimums locaux, grâce au test de la dérivé seconde

Définition Maximum et minimum local

Soit $f'(x) = 0$ **et** $f''(x) < 0$, on a un **maximum local** en x.

Soit $f'(x) = 0$ **et** $f''(x) > 0$, on a un **minimum local** en x.

1.8 Fonctions sinus et cosinus

Table 1.3 – Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Propriété	Descritpion
Domaine	$\mathbb{R}$
Continuité	Continue sur leur domaine
Croissance	Toutes deux 2π périodiques.

Identité 1 Cosinus pair et sinus impart

1. $\cos(-x) = \cos(x)$
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$

Identité 2 Règle de dérivation de la fonction cosinus

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

Identité 3 Règle de dérivation de la fonction sinus

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = -\cos(x)$$

Identité 4 Rayon d'un cercle

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Identité 5 Sinus d'une addition

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
2. $\sin(a+b) = -\sin a \cos b + \cos a \sin b$

2

Limites des fonctions

2.1 Limite

Définition

$\lim_{x \to a} f(x)$ Converge vers L si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de L **lorsque** $x \to a$

2.2 Limite à droite et à gauche

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$
La limite à droite est la limite lorsque x s'approche de a, venant de la **droite** :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \implies x \in D \text{ et } x > a$$

La limite à droite est la limite lorsque x s'approche de a, venant de la **gauche** :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \implies x \in D \text{ et } x < a$$

Lorsque les deux limites sont équivalente, la limite existe :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to a} = L$$

Si aucun $x < a$ on considère uniquement la limite à droite, puisque f est définit sur un domaine $[x > a, b]$. Et si la limite à droite existe, la limite de f correspond à la limite à droite :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si aucun $x > a$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Définition Divergence d'une fonction

$\lim_{x \to a} f(x)$ **diverge** si la limite ne converge vers aucun $L \in \mathbb{R}$

Cas particulier si

1. $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = M$
3. $L \neq M$

alors, $\lim_{x \to a} f(x)$ **diverge**.

2.3 Propriétés des limites

Concept. 2 Addition, soustraction et multiplication de limite

Supposon que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) \mid L, M \in \mathbb{R}$

1. $\lim_{x \to a} \Big(f(x) + g(x) \Big) =$
$\lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$
2. $\lim_{x \to a} \Big(f(x) - g(x) \Big) =$
$\lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$
3. $\lim_{x \to a} \Big(f(x) g(x) \Big) =$
$\lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = LM$
4. $\lim_{x \to a} \Big(c f(x) \Big) = c \lim_{x \to a} f(x)$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ **si** $M \neq 0$

Concept. 3 Comportement asymptotique et c > 0

Soit $\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ **et** $\lim_{x \to a} f(x) = c \neq 0, \pm\infty$ si c > 0, on a :

Concept. 4 Comportement asymptotique et c > 0

Soit $\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, **et** $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, **mais** $\lim_{x \to a} f(x) = c \neq 0, \pm\infty$.

Si $c > 0$, on a alors un comportement asymptotique équivalent. En d'autres termes, il existe une constante C telle que pour x proche de a, $f(x)$ et $g(x)$ partagent la même "tendance" de croissance ou de décroissance, de sorte que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0.$$

Cela signifie que $f(x)$ et $g(x)$ sont asymptotiquement comparables en a, et que l'écart entre eux reste proportionnel à c.

2.4 Continuité

Concept. 5 Fonction continue

$f : D \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in D$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Autrement dit, une fonction est continue sur sont domaine si pour chaque élément $a \in D$, la limite lorsque $x \to a$ est égale à $f(a)$. Et donc, la limite à gauche et à droite est approche la même valeur $f(a)$

Identité 6 Conséquence de la continuité de deux fonctions

Si f et g sont continues en a, alors

1. $f + g$ et fg sont continues en a
2. $\frac{f}{g}$ est fg continues en a si $g(a) \neq 0$
3. $f \circ g$ et fg sont continues en a si $f \circ g$ est définie près de a

2.5 Dérivée

Définition La dérivée d'une fonction

Soit $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Si cette limite existe, on dit que on dit qu'il s'agit de la dérivée de la fonction f au point a. Géométriquement, la valeur vers laquelle converge $f'(a)$ correspond à la pente de la droite tengente en a.

2.6 Formule

Concept. 6 Règles de dérivations pour des fonctions courantes

1. $(c)' = 1$, c une constante
2. $(x^r)' = r x^{r-1}$, $\forall r \in \mathbb{R}$
3. $(a^x)' = a^x ln(a)$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
6. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$

7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = -\sec^2 x$

10. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$
11. $(\text{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$
11. $(\arcsin x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

2.7 Propriétés d'addition et de multiplication

Concept. 7 Propriétés de la dérivée

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables

1. $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$, ou c est une constante.

2. $\left(f(x)+g(x)\right)' = cf'(x)+g'(x)$

3. $f'(x) = 0$ si et seulement si f est une constante.

2.8 Règles de différenciation

Concept. 8 Règles de calcul

1. Produit : $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

2. Quotient : $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

3. Dérivation en chaîne : $\left(f(g(x))\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$

2.9 Les formes indéterminées

Toute expression représenté par une des formes suivantes est dite indéterminée :

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty\quad 1^{\infty},\quad 0\times\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0$$

Ces formes indéterminées peuvent être simplifiées en utilisant différentes techniques :

- **Manipulations algébriques** facorisation, multipliucation par le conjugué, simplification
- Règle de l'Hôpital
- Utilisation du logarithme

3

Intégration

3.1 Définition d'une intégrale

Concept. 9 Intégrale et théorème fondamental du calcul

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale de a à b de f est noté :

$$\int_a^b f(x)dx$$

3.2 Propriétés de l'intégrale

Concept. 10

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Alors,

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \textbf{ et}$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Si $a < c < b$**, alors**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx =$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Définition Théorème fondamental du calcul

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur l'intervale. Si une fonction $F(x)$ correspond à la dérivée de $f(t)$ en fonction de x sur l'intervalle $[a,b]$, autrement dit :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors, $F(x)$ est dérivable et on a :

$$F'(x) = f(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int_a^b f(t)dt = f(x)$$

Si F est une fonction de la dérivée est f ; autrement dit :

$$F'(x) = f(x)$$

Alors, l'intégrale définit de $f(x)$ sur l'intervale $[a,b]$ correspond à la différence entre les ordonnées de a et b sur F :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt}f(t)dt = f(b)-f(a)$$

3.3 Trouver l'aire sous la courbe

4

Techniques de bases

4.1 Polynôme

Définition

Un polynôme a la forme $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et la puissance d'un polynôme est l'exposant le plus elevé de l'expression.

Note:-

Lorsque le degré du numérateur est plus grand ou égal au degré du dénominateur, on peut effectuer une division polynomiale pour simplifier une expression :

$$\frac{x^-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

Concept. 11 Complétion du carré

Soit un polynôme $p = ax^2+bx+c$, on peut compléter le carré en considérant :

$$h = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$p(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x-\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c$$

$$p(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x-\frac{b^2}{4a}\right)+\frac{b^2}{4a}+c$$

$$p(x) = a\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4a}+c$$