

IFT1575
Modèles de recherche opérationnelle

Introduction

Franz Girardin

16 septembre 2024

TABLE DES MATIÈRES

SECTION 1	MODÉLISATION	PAGE 2
-----------	--------------	--------

1.1	Définition de la prog. linéaire	2
1.2	Composantes du modèle	2
1.3	L'objectif	2
1.4	Contraintes	2
1.5	Terminologie de base	2

SECTION 2	MAXIMISATION ET MINIMISATION	PAGE 2
-----------	------------------------------	--------

SECTION 3	ALGORITHME DU SIMPLEXE	PAGE 2
-----------	------------------------	--------

3.1	Contraintes	2
3.2	Forme standard	3
3.3	Choisir les variables indépendantes	3
3.4	Pivot	3
3.5	Système 2	3
3.6	Pivot	3
3.7	Système 3	3

MODÉLISATION

Définition de la prog. linéaire

Branche de la *Recherche Opérationnelle* où on utilise des **modèles** mathématiques qui font appel à des fonction **linéaire** pour résoudre un problème.

prod. vin blanc $\Rightarrow x$ (litres)

prod. vin rouge $\Rightarrow y$ (litres)

Composantes du modèle

Il faut identifier l'**action** sur laquelle on doit prendre une décision et la représenter par un **variable de décision**. À cette variable sera associée une constante qui représente le **niveau** de l'action.

L'objectif

S'exprime sous la forme d'une **fonction mathématique** qui représente l'intention. P. ex. **maximiser le profit** correspondrait à :

$$\text{Max } 5x + 3y$$

Contraintes

Elles peuvent dépendre du *contexte du problème* ou peuvent être plus générales; p. ex. la **non-négativité** d'une entité :

$$\begin{aligned} x &\leq 50 && \text{prod. max vin blanc} \\ y &\leq 60 \\ x + y &\leq 80 && \text{prod. max totale de vin} \\ x &\geq 0, y \geq 0 && \text{Non-nég.} \end{aligned}$$

Terminologie de base

Une **solution réalisable** est un **vecteur** de valeurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartenant à $X \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque composante x_1, x_2, \dots, x_n respecte *toutes les contraintes* du problème. Dans ce contexte, X est l'ensemble des solutions possibles, c'est-à-dire l'ensemble des points qui satisfont toutes des contraintes imposées au problème. Chaque point dans X est un vecteur de longueur n . Cet ensemble X est un sous-ensemble de l'espace \mathbb{R}^n qui comprends tous les vecteurs possibles où $n \in [1, n \rightarrow \infty]$.

Une solution **optimale** est une solution réalisable qui maximise (ou minimise) la fonction objectif $z(x)$, en fonction de la nature du problème (maximisation ou minimisation). Autrement dit, c'est une solution réalisable qui produit la *meilleure valeur possible* pour la fonction objectif z .

MAXIMISATION ET MINIMISATION

Note:-

Un modèle peut présenter une **infinité** de solution optimales.

Theorem 2.1

La maximisation d'un objectif $f(w)$ est équivalent à l'**opposé** de la minimisation :

$$\text{Max } f(w) \leftrightarrow \text{Min } -f(w)$$

Preuve 2.1

Considérons le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(w) \\ &\text{s.a. } w \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Soit w_{opt} un point de X où $f(w)$ atteint son **maximum**. On a :

$$\begin{aligned} f(w_{\text{opt}}) &\geq f(w) \quad \forall w \in X \\ &\downarrow \\ -f(w_{\text{opt}}) &\leq -f(w) \quad \forall w \in X \end{aligned}$$

Par conséquent, $-f(w_{\text{opt}})$ est la valeur minimale possible parmi tous les $-f(w)$ possibles :

$$-\text{Max } f(w) = -f(w_{\text{opt}}) = \text{Min } -f(w)$$

Ainsi, qu'on maximise $f(w)$ ou qu'on minimise $-f(w)$, on retrouve la même solution optimale w_{opt} .

Explication

Soit la fonction objectif $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dans cette situation, le vecteur w joue deux rôles distincts : il est à la fois l'argument de la fonction objectif $f(w)$ et un élément soumis aux contraintes. Ces deux aspects sont essentiels dans un problème de maximisation en programmation linéaire ou non linéaire.

1. Vecteur dans la fonction objectif :

La fonction objectif $f(w)$ est la fonction que l'on cherche à maximiser. Elle prend un vecteur w comme entrée, qui est un point dans l'espace \mathbb{R}^n . Ce vecteur w représente une solution candidate du problème, et $f(w)$ retourne un nombre réel, par exemple un profit ou une performance, que l'on souhaite maximiser.

2. Vecteur dans les contraintes :

Le vecteur w doit aussi satisfaire un ensemble de contraintes qui définissent l'ensemble des solutions réalisables, noté $X \subset \mathbb{R}^n$. Ces

contraintes peuvent être des inégalités ou des égalités (par exemple, $g(w) \leq 0$, $h(w) = 0$), et elles définissent l'ensemble des vecteurs w admissibles.

Synthèse des deux rôles :

- **Maximisation** : On cherche à maximiser la fonction $f(w)$, c'est-à-dire à trouver la meilleure valeur possible de $f(w)$.
- **Contraintes** : Le vecteur w doit se situer dans un ensemble admissible X , défini par les contraintes du problème.

En résumé, w doit satisfaire les contraintes (ce qui garantit qu'il est une solution réalisable), tout en maximisant la valeur de $f(w)$. Le problème consiste à trouver le w optimal qui satisfait ces deux aspects à la fois.

ALGORITHME DU SIMPLEXE

Soit le problème suivant. Un restaurateur dispose de **14** oursins, **24** crevettes, **18** huîtres. Deux types d'assiettes de fruit de mer sont offertes par le restaurateur :

8\$: 5 oursins, 2 crevettes 1 huître

6\$: 3 oursins, 3 crevettes 3 huîtres

L'objectif est de déterminer le **nombre d'assiettes** de chaque type à préparer afin de *maximiser* le revenu total du restaurateur tout en respectant les disponibilité de fruits de mer.

Contraintes

$$5x + 3y \leq 30 \quad \text{Oursins}$$

$$2x + 3y \leq 24 \quad \text{crevettes}$$

$$x + 3y \leq 18 \quad \text{Huîtres}$$

$$x, y \geq 0 \quad \text{Non-négativité}$$

$$z = 8x + 6y \quad \text{Objectif}$$

En considérant que la maximisation d'un objectif est équivalente à la minimisation de l'opposé de la minimisation on a :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x - 6y \\ \text{s.a.} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x + 3y \leq 30 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ x + 3y \leq 18 \end{array}$$

$$x, y \geq 0$$

$$z = 8x + 6y$$

Forme standard

$$\begin{array}{ll} \text{Min } z = & -8 - 6y \\ \text{s.a.} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 5x + 3y + u & = & 30 \\ 2x + 3y + p & = & 24 \\ x + 3y + h & = & 18 \\ x, y, u, p, h & \geq & 0 \end{array}$$

Choisir les variables indépendantes

Supposons que x et y sont des *variables indépendantes*. Exprimons les *variables dépendantes* u, p, h, z en fonction de x et y

$$\begin{array}{ll} u & = 30 - 5x - 3y \\ p & = 24 - 2x - 3y \\ h & = 18 - x - 3y \end{array}$$

$$z = 0 - 8x - 6y$$

En supposant que x et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$x = y = 0 \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant x ; on considère donc x comme *variable d'entrée*. Soit $y = 0$, on a :

$$\begin{array}{ll} u = 30 - 5x - 3y & \implies x \leq 30/5 = 6 \\ p = 24 - 2x - 3y & \implies x \leq 24/2 = 12 \\ h = 18 - x - 3y & \implies x \leq 18 \end{array}$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de x jusqu'à **6**. L'équation limitante est celle qui implique u ; on dit alors que u est le *variable de sortie*. On **pivote**. La variable u prend la place de x en tant que variable indépendante; u et y sont les *nouvelles variables indépendantes*.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p , et h en fonction de u et y :

$$u = 30 - 5x - 3y \text{ et } u, y = 0$$

\Downarrow

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

$$p = 24 - 2x - 3y \text{ et } u, y = 0$$

\Downarrow

$$p = 12 + 2/5u - 9/5y$$

$$h = 18 - x - 3y \text{ et } u, y = 0$$

\Downarrow

$$h = 12 + 1/5u - 12/5y$$

$$z = 0 - 8x - 6y \text{ et } u, y = 0$$

\Downarrow

$$z = 0 - 8(6 - 1/5u - 3/5y) - 6y$$

\Downarrow

$$z = -48 + 8/5u - 6/5y$$

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$x = 6 - 1/5u - 3/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$

\Downarrow

$$x = 3 - 1/4u - 1/4y$$

$$p = 12 - 2/5u - 9/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$p = 12 - 2/5u - 9/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$

\Downarrow

$$p = 3 + 1/4u - 3/4y$$

$$z = -48 + 8/5u - 6/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$z = -48 + 8/5u - 6(5 + 1/12u - 5/12h)$$

\Downarrow

$$z = -54 + 3/2u - 1/2h$$

Système 2

$$\begin{array}{ll} x & = 6 - 1/5u - 3/5y \\ p & = 12 - 2/5u - 9/5y \\ h & = 12 - 1/5u - 12/5y \end{array}$$

$$z = -48 + 8/5u - 6/5y$$

Sachant que u et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$u = y = 0 \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant y ; on considère donc y comme *variable d'entrée*. Soit $u = 0$, on a :

$$\begin{array}{ll} x = 6 - 1/5u - 3/5y & \implies y \leq 10 \\ p = 12 - 2/5u - 9/5y & \implies y \leq 20/3 \\ h = 12 - 1/5u - 12/5y & \implies y \leq 5 \end{array}$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de y jusqu'à **5**. L'équation limitante est celle qui implique h ; on dit alors que h est le *variable de sortie*. On **pivote**. La variable h prend la place de y en tant que variable indépendante; h et y sont les *nouvelles variables indépendantes*.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p , et h en fonction de h et y :

$$h = 12 - 1/5u - 12/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$y = 5 + 1/12u - 5/12h$$

Système 3

$$\begin{array}{ll} x & = 3 - 1/4u - 1/4h \\ p & = 3 + 1/4u + 3/5h \\ y & = 5 + 1/12u - 5/12h \end{array}$$

$$z = -54 + 3/2u - 1/2h$$

Sachant que u et h sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$u = h = 0 \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u , ni la valeur de h car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes à l'**optimum** !