

MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Ensemble de théorèmes, lemmes et définitions

Franz Girardin

23 septembre 2024

TABLE DES MATIÈRES

SECTION 1	SUITES NUMÉRIQUES	PAGE 3
1.1	Définition d'une suite	3
1.2	Suite par récurrence	3
1.3	Définition d'une suite arithmétique	3
1.4	Somme n termes d'une arithmétique	3
1.5	Définition d'une suite géométrique	3
1.6	Somme n termes d'une géométrique	3
1.7	Convergence d'une suite géométrique	3
1.8	Convergence d'une série géométrique	3
1.9	Monotonie	3
1.10	Propriétés limites d'une suite	3
1.11	Définitions de bornes d'une suite	3
1.12	Théorème des suites monotones	3
1.13	Définition formelle de convergence	3
1.14	Vulgarisation	3
1.15	Définition formelle de la divergence	3
1.16	Vulgarisation	3
1.17	Corollaire de divergence	4
1.18	Association d'une fonction à une suite	4
1.19	Théorème des gendarmes	4

SECTION 2	SÉRIES NUMÉRIQUES	PAGE 4
2.1	Définition d'une série numérique	4
2.2	Propriétés des séries convergentes	4
2.3	Addition et multiplication par un scal.	4
2.4	Théorème de conv. du terme général	4
2.5	Corollaire de divergence du terme général	4
2.6	Théorème du reste	4

SECTION 3	SÉRIE À TERMES POSITIFS	PAGE 4
3.1	Définition d'une série à termes positifs	4
3.2	Théorème de conv. des séries à termes positifs	4
3.3	Test de comparaison	5
3.4	Forme limite du test de comparaison	5
3.5	Critère de Riemann	5
3.6	Série de Riemann et série puissance	5
3.7	Test de l'intégrale	5
3.8	Approximation de la somme	5

SECTION 4	SÉRIES ALTERNÉES	PAGE 5
4.1	Définition d'une série alternée	5
4.2	Test sur séries alternées	5
SECTION 5	CONVERGENCE ABSOLUE	PAGE 5
5.1	Définition de convergence absolue	5
5.2	Théorème de convergence absolue	6
5.3	Test du rapport (d'Alembert)	6
5.4	Test de Cauchy	6
SECTION 6	ASTUCES POUR STEWART 1.1 - 1.5	PAGE 6
6.1	Propriétés des limites	6
6.2	Limite d'une suite polynomiale	6
6.3	Règle de l'Hôpital	6
6.4	Comparaison des suites	6
SECTION 7	LES SÉRIES DE FONCTIONS	PAGE 6
7.1	Définition d'une série de fonction	6
7.2	Définition du domaine de convergence	6
7.3	Définition d'une série entière	6
7.4	Convergence de série entière	6
7.5	Dérivation et intégration de série entière	6
7.6	Polynôme de Taylor	6
SECTION 8	PREUVE DE THÉORÈMES ET FORMULES	PAGE 7
8.1	Terme général d'une suite arithmétique	7
8.2	Somme des n premiers terme d'une suite arithmétique	7
8.3	Terme général d'une suite géométrique	8
8.4	Somme des n premiers termes d'une suite géométrique	8
8.5	Convergence d'une suite géométrique	9
8.6	Convergence d'un série géométrique	10

1

SUITES NUMÉRIQUES

Définition d'une suite

Fonction $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ qui accepte $n \in \mathbb{N}^*$ et engendre une **séquence ordonnée** de réels a_n . L'image de n est donnée par :

$$n \rightarrow a(n) = a_n$$

Notations équivalentes :

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \leftrightarrow \{a_n\} \leftrightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

On dit que a_n ou $\{a_n\}$ est le **terme général** ; c'est la règle qui définit la suite ; la **formule** qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite en fonction de n .

Suite par récurrence

Est dite **récurrente** toute suite a_n dont la règle fait appel à des termes antérieurs, après avoir établi certains termes de départ. L'**ordre de récurrence** dépend du nombre de termes auquel la formule du terme général fait appel.

Définition d'une suite arithmétique

$$a_n := \begin{cases} a_1 = y & \text{1er Terme} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$$r = a_n - a_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad \text{Raison}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad \forall n \geq 1 \quad n^{\text{e}} \text{ terme}$$

Somme n termes d'une arithmétique

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Définition d'une suite géométrique

$$a_n := \begin{cases} a_1 = y & \text{1er Terme} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \quad \text{Raison}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad n^{\text{e}} \text{ terme}$$

Somme n termes d'une géométrie

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Convergence d'une suite géométrique

$$(-1 < r \leq 1) \Rightarrow \{r^n\} \text{ conv. } \forall r \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{r^n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Convergence d'une série géométrique

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n ar^k$$

$$\begin{aligned} \triangleright (|r| < 1) &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad (\text{conv.}) \\ \triangleright (|r| \geq 1, a \neq 0) &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \infty \quad (\text{div.}) \end{aligned}$$

Monotonie

Soit une suite a_n , on dit que la suite est :

- \triangleright **Strictement croissante**
si $\forall n \geq 1, a_{n+1} > a_n$
- \triangleright **Croissante**
si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \geq a_n$
- \triangleright **Strictement décroissante**
si $\forall n \geq 1, a_{n+1} < a_n$
- \triangleright **Décroissante**
si $\forall n \geq 1, a_{n+1} \leq a_n$
- \triangleright **Stationnaire ou constante**
si elle est telle que $a_{n+1} = a_n = a_{n-1}$

Propriétés limites d'une suite

- \triangleright **Unicité.** La limite d'une suite convergente est **unique**.
- \triangleright Toute suite convergente est **bornée** ; toute suite non bornée est **divergente**.
- \triangleright Toute suite croissante et majorée est convergente. **Exemple** : $a_n = 1 - 1/n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- \triangleright Toute suite décroissante et minorée est convergente. **Exemple** : $b_n = 1/n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

- \triangleright Toute suite monotone et bornée est convergente.

Définitions de bornes d'une suite

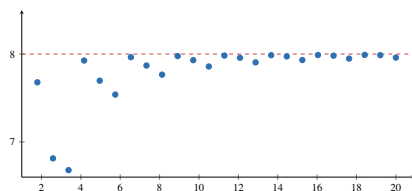
Une suite $a_{n=1}^{\infty}$ est **minorée** ou **majorée** selon les conditions suivantes :

- $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq M \Rightarrow$ **majorée**
- $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq m \Rightarrow$ **minorée**

On dit qu'elle est **bornée** si elle est à la fois **majorée** et **minorée**.

Théorème des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est nécessairement **convergente**.



Définition formelle de convergence

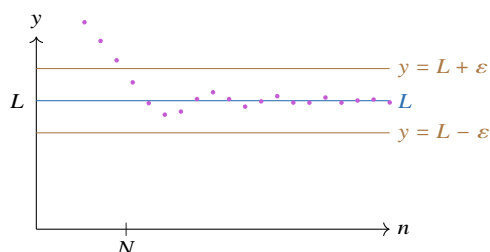
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

signifie qu'une suite est **convergente** et tend vers la limite L **si et seulement si** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Vulgarisation

Soit un nombre positif $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on souhaite. Il est toujours possible de trouver un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tous les termes de la suite dont l'indice n est supérieur à N , c'est-à-dire $n > N(\varepsilon)$, l'image a_n sera suffisamment proche de L . Autrement dit, la distance entre a_n et L sera inférieure à ε et donc négligeable, ce qui signifie que la suite se rapproche indéfiniment de la limite L au fur et à mesure que n augmente.



Définition formelle de la divergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$$

signifie qu'une suite est **divergente** ne tend vers aucune valeur particulière lorsque :

$$\forall M > 0, \exists N(M) > 0 : n > N(M) \Rightarrow a_n > M$$

Vulgarisation

Soit un nombre positif aussi grand que l'on souhaite, $M > 0$. Il est toujours possible de trouver un entier $N(M)$ tel que, pour tous les termes de la suite dont l'indice n est supérieur à N , c'est-à-dire $n > N(M)$, l'image a_n sera plus grande que M . Autrement dit, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement grands, sans jamais revenir vers des valeurs plus petites.

Corollaire de divergence

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$, alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Attention

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$

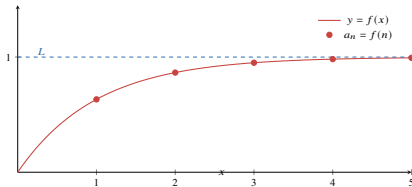
Association d'une fonction à une suite

Soit $f(x)$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$. Alors, la suite $\{a_n\} = f(n)$ admet la même limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$$



Par ailleurs, si $f(x)$ est une fonction continue en L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L , alors la limite suivante converge vers $f(L)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) &= f(L) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n) &= f(L) \end{aligned}$$

Exemple

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\pi/2) = \sin(\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$$

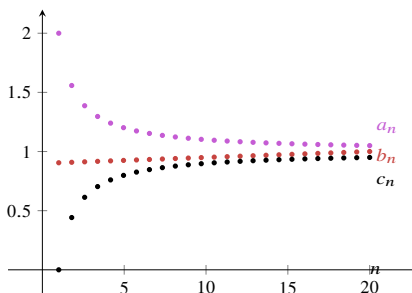
Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L$$



2

SÉRIES NUMÉRIQUES

Définition d'une série numérique

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est une série numérique de **somme** s . Lorsqu'on additionne une quantité *finie* de termes d'une série, on obtient une **somme partielle** :

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Propriétés des séries convergentes

On ne change pas la **nature** d'une série en lui enlevant ou en lui ajoutant un nombre **fini** de termes.

Soit $k \geq 0 \in \mathbb{N}$, les sommes suivantes ont le même comportement ; l'une converge **unique-**ment si l'autre converge également :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \text{ (conv.)} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} \text{ conv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \text{ (div.)} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} \text{ div.}$$

Addition et multiplication par un scal.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (conv.) et λ est un scalaire, alors la série de terme général $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda s$$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (conv.) et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ (conv.), alors la série de terme général $a_n + b_n$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s + t$$

Attention

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

Théorème de conv. du terme général

Le terme général d'une série convergente tend vers 0 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ (conv.)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

- **Implique** qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer la série si on sait que a_n **div.**

Corollaire de divergence du terme général

Une suite qui ne converge pas à zéro engendre une série qui **diverge**.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ (div.)}$$

Note:-

La **réci-proque** est fautive. Par exemple la série **harmonique** de terme général a_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

/ Mais on a également :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \text{ (div.)}$$

Théorème du reste

Soient la série de terme général a_n , la quantité s_n et le rest R_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{k=1}^n a_k = s_n, \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$$

On a l'implication suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ (conv.)} \\ &\Rightarrow R_n = s - s_n \end{aligned}$$

Cela signifie que, pour des valeurs suffisamment grandes de n , le reste R_n devient arbitrairement petit et la somme totale s est bien approchée par la somme partielle s_n .

3

SÉRIE À TERMES POSITIFS

Définition d'une série à termes positifs

$\forall n \geq 1, a_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à termes positifs.

Théorème de conv. des séries à termes positifs

Une condition **nécessaire et suffisante** pour que la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge est que la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ soit majorée.

Sommes partielles : La suite des sommes partielles s_n est la somme des premiers termes de la série, jusqu'à n -ième terme. Si cette somme partielle devient **majorée**, cela signifie qu'il existe une limite supérieure que les sommes ne pourront jamais dépasser, peu importe la valeur de n . En d'autres termes, les termes de la série s'accumulent, mais ils le font de manière contrôlée.

Séries à termes positifs : Puisque les a_n sont positifs, chaque nouveau terme a_n ajouté à la somme partielle rend la somme s_n de plus en plus grande. Si cette accumulation ne finit jamais par dépasser un certain seuil (c'est-à-dire, si elle est majorée), cela signifie que les termes a_n doivent devenir de plus en plus petits et que leur contribution totale ne fait qu'approcher un certain nombre, sans jamais devenir infinie. C'est le signe que la série **converge**.

Test de comparaison

Soient $\sum a_n, \sum b_n$ des séries à **termes positifs** et $n_0 \in \mathbb{R}$, une série **plus petite** qu'une série convergente converge nécessairement ; et une série **plus grande** qu'une série divergente diverge nécessairement :

▷ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **conv.**, $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

▷ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **div.**, $a_n \geq b_n \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**

Forme limite du test de comparaison

En évaluant le rapport entre deux suites, on peut déterminer si leur série correspondante converge ou diverge tout deux.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L \neq 0 \right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ conv.}$$

Critère de Riemann

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une **série à termes positifs**. Supposons qu'il existe un réel $p > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = l.$$

Dans ce cas :

▷ Si $p > 1$ et l est fini, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

▷ Si $p \leq 1$ et $l \neq 0$ (ou $l = +\infty$), alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**

Exemple :

$$\text{Analysons } a_n = \frac{n-1}{n^4+1}.$$

Tout d'abord, nous cherchons $p > 0$ tel que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ existe et est finie.

Approximons a_n pour n grand :

$$a_n = \frac{n-1}{n^4+1} \approx \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Ainsi, pour n grand :

$$n^p a_n \approx n^p \cdot \frac{1}{n^3} = n^{p-3}.$$

Pour que la limite soit finie et non nulle, il faut que $p-3=0$, donc $p=3$.

Calculons la limite avec $p=3$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{n-1}{n^4+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(n-1)}{n^4+1}.$$

Simplifions le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{n^3(n-1)}{n^4+1} = \frac{n^4-n^3}{n^4+1}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n^4 :

$$\frac{n^4-n^3}{n^4+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^4}}.$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n^4} \rightarrow 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^4}} = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n = 1.$$

Puisque $p=3 > 1$ et $l=1$ est fini, le critère de Riemann nous indique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+1}$ converge d'après le critère de Riemann.

Série de Riemann et série puissance

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \text{ converge si } p > 1$$

La première est une **série de Riemann** ; la seconde est une **série puissance**.

Test de l'intégrale

Soit $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante et $a_n : f(n) = a_n$, la somme suivante converge ou diverge avec son intégrale correspondante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv.}$$

↓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x=1}^{x=x} f(x) dx = S \text{ (conv.)}$$

► Utile lorsqu'on connaît une **intégrale convergente** qui est analogue à la somme qu'on veut calculer.

Approximation de la somme

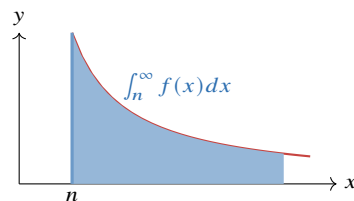
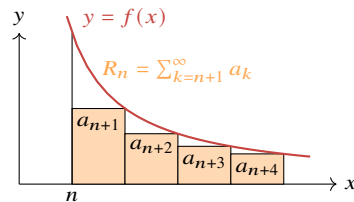
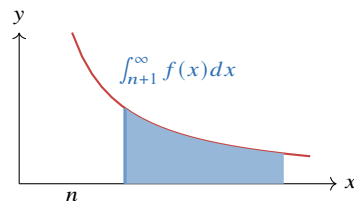
Si f : positive, continue et décroissante après sur son domaine et soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = f(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, $R_n = s - s_n$, alors le reste R_n est borné et peut être estimé :

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{\infty} f(x) dx$$

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq s \leq s_n + \int_n^{\infty} f(x) dx + s_n$$

Si f : positive, continue, décroissante après un certain rang $N \geq 0 : [N, +\infty[$, l'inégalité tient (même si f n'est pas positive décroissante et continue avant N) et on a

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = s \text{ (conv.)} \leftrightarrow \int_{n=N}^{\infty} f(x) dx \text{ conv.}$$



SÉRIES ALTERNÉES

Définition d'une série alternée

$$s = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

$$s = -a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Test sur séries alternées

Soit un rang $N \in \mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ telle que

▷ b_n **décroissante** et **positive**

$$(f(n) = b_n, f'(x) \leq 0, \forall x > N)$$

▷ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Alors,

► $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ **conv.** vers $s \in \mathbb{R} \forall m \geq N$

► $0 \leq s \leq b_1$

► $R_n = |s - s_n| \leq b_{n+1}$

CONVERGENCE ABSOLUE

Définition de convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ conv. absolu}$$

▷ **Semi-conv.** : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.** et $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **div.**

Exemple

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv mais $\neg(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n})$ conv.

Théorème de convergence absolue

Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *absolument*, alors elle converge simplement.

Test du rapport (d'Alembert)

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ alors si :

- ▷ $L = 1 \Rightarrow$ inconclusif
- ▶ $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div**.
- ▶ $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv**.

Test de Cauchy

Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ alors si :

- ▷ $L = 1 \Rightarrow$ inconclusif
- ▶ $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div**.
- ▶ $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv**.

ASTUCES POUR STEWART 1.1 - 1.5

Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0$$

Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynômes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, et $k = \min(\deg(p), \deg(q))$ Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Règle de l'Hôpital

Soit une constante $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et supposon que :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow c} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \text{ est de la forme } \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

▷ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{|g'(x)|}$ existe et $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \approx c$
Alors,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Comparaison des suites

Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^K \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$c_n \ll d_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$

7

LES SÉRIES DE FONCTIONS

Définition d'une série de fonction

Soit $u_n(x)$ une suite de fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$ Alors, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

est une série de fonction de **terme général** $u_n(x)$ et on a la somme partielle de rang n correspondante :

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

Définition du domaine de convergence

L'ensemble des $x \in E$ qui sont tels que la suite $s_n(x)$ convergent porte le nom de **domaine de convergence** $D \subset E$.

La somme $s_n(x)$ est donc la somme qu'on obtient lorsqu'on ajoute une infinité de termes $u_n(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x)$$

Définition d'une série entière

Soit des coefficients c_n , une **série entière** est une *série de fonction* de la forme

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_n x^n$$

Lorsqu'elle est **centrée en** a , une série entière prend la forme :

$$c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Convergence de série entière

Considérons la série entière

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Alors, on a l'une des trois possibilités :

$$\triangleright R = 0 \Rightarrow S \text{ conv. à } x = a$$

$$\triangleright R = +\infty \Rightarrow S \text{ conv. } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\triangleright \exists R > 0 : |x-a| < R \Rightarrow S \text{ conv.}$$

$$\triangleright \exists R > 0 : |x-a| > R \Rightarrow S \text{ div.}$$

Mais pour les points $x = a$ et $x = -a$, il faut déterminer la convergence cas par cas.

Dérivation et intégration de série entière

Considérons la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ avec } R > 0$$

Alors, la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est **dérivable** sur l'intervalle ouvert $]a, -R, a+R[$ et on peut **intégrer** termes à termes :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n(x-a)^{n+1}$$

$$\int f(x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Theorem 7.1

Si une fonction $f(x)$ peut se mettre sous la forme d'une série entière au voisinage de a :

$$c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots (*)$$

Alors, le coefficient c_n est donné par :

$$c_n = \frac{1}{n!} f^n(a)$$

et la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme d'une série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n, |x-a| < R$$

Polynôme de Taylor

Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme d'une **série entière** au voisinage de a et que $f^n(x)$ existe au voisinage de $a \quad \forall n \geq 0$ on a la somme partielle $T_n(x)$ portant le nom de polynôme de Taylor :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n, |x-a| < R$$

$$\int_{n=1}^{\infty} f(x) dx$$

PREUVE DE THÉORÈMES ET FORMULES

Terme général d'une suite arithmétique

Preuve 8.1 Terme général a_n d'une suite arithmétique

Montrons que le terme général a_n d'une suite arithmétique $a_{n=1}^\infty$ est donné par

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Nous savons que les n premiers termes de la suite sont donné par :

$$a_n = \underbrace{a_1}_{n=1; a_1}, \underbrace{(a_1 + r)}_{n=1, a_1+r}, \underbrace{\left((a_1 + r) + r\right)}_{n=3; a_1+2r}, \underbrace{\left(\left((a_1 + r) + r\right) + r\right)}_{n=4, a_1+3r}, \underbrace{(a_1 + rn)}_{n=n; a_1+rn}$$

$$a_n = a_1, a_1 + (2 - 1)r, a_1 + (3 - 1)r, \dots, a_1 + (n - 1)r$$

On constate pour tout $n \geq 2$, chaque terme de la suite prend la forme $a_1 + (n - 1)r$. Nous avons donc :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad \forall n \geq 2$$

□

Somme des n premiers terme d'une suite arithmétique**Preuve 8.2 Somme partielle d'une suite arithmétique**

Montrons que la formule générale pour la somme s_n des n premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Nous savons déjà que le n -ième terme de la suite est :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Nous pouvons développer la série des n premiers termes comme suit :

$$\sum_{k=1}^n a_k = S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

En **multipliant** la somme partielle par 2, nous obtenons et en additionnant termes à termes.

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1) \\ 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1) \end{aligned}$$

On constate alors que chaque terme entre parenthèse de l'équation se simplifie à $2a_n + (n - 1)r$. **Par exemple,**

$$(a_1 + a_n) = a_1 + (a_1 + (n - 1)r) = a_1 + a_1 + (n - 1)r = 2a_1 + (n - 1)r$$

Similairement, on a :

$$(a_2 + a_{n-1}) = a_1 + (2-1)r + (a_1 + (n-1-1)r) = a_1 + r + a_1 + rn - 2r = 2a_1 - r + rn = 2a_1 + (n-1)r$$

Par ailleurs, nous savons que $2a_1 + (n-1)r$ est simplement équivalent à $a_1 + a_n$:

$$2a_1 + (n-1)r = a_1 + (a_1 + (n-1)r) = a_1 + a_n$$

Ainsi, puisque nous chaque terme entre parenthèse se simplifie à $2a_n + (n-1)r$ ou $a_1 + a_n$ et qu'il y a n termes entre parenthèse, nous avons

$$\begin{aligned} 2S_n &= n(2a_1 + (n-1)r) \\ 2S_n &= n(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

□

Terme général d'une suite géométrique

Preuve 8.3 Terme général a_n d'une suite géométrique

Montrons que le n -ième terme a_n d'une suite géométrique $a_{n=1}^\infty$ est donné par la formule :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Nous savons, par la définition d'une suite géométrique, que pour tout terme $n \geq 2$, le terme n est obtenu en multipliant son prédécesseur par la raison r . Une suite géométrique a donc les termes suivants :

$$a_n = \underbrace{a_1}_{n=1}, \underbrace{a_1 \cdot r}_{n=2}, \underbrace{a_1 \cdot r \cdot r}_{n=3}, \dots, \underbrace{a_1 \cdot r^{n-1}}_{n=n}$$

Ainsi, pour chaque terme $n \geq 2$, l'image a_n est donnée par $a_1 \cdot r^{n-1}$:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad \forall n \geq 2$$

□

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Preuve 8.4 Somme partielle d'une suite géométrique

Montrons que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par :

$$S_n = a_0 + a_0 r + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_0 r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Étape 1 : Écriture générale de la somme

La somme des n premiers termes de la suite géométrique est :

$$S_n = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \dots + a_0 r^n$$

Factorisons par a_0 :

$$S_n = a_0 (1 + r + r^2 + \dots + r^n)$$

Nous devons maintenant trouver la formule de la somme des puissances de r .

Étape 2 : Multiplier par r

Multiplions la somme par r :

$$r \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^n) = r + r^2 + \dots + r^{n+1}$$

Étape 3 : Soustraction des deux équations

Soustrayons la somme obtenue de la somme initiale :

$$(1 + r + r^2 + \dots + r^n) - (r + r^2 + \dots + r^{n+1}) = 1 - r^{n+1}$$

Simplification :

$$(1 + r + r^2 + \dots + r^n)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

Étape 4 : Isoler la somme

Isolons la somme :

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{pour } r \neq 1$$

Étape 5 : Formule finale

Remplaçons cette expression dans la somme S_n :

$$S_n = a_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Ce qui nous donne la formule finale :

$$S_n = a_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

□

Convergence d'une suite géométrique

Preuve 8.5

Montrons qu'une suite géométrique converge vers 0 lorsque $-1 < r < 1$ et vers 1 si $r = 1$. Montrons aussi qu'elle diverge pour tout autre valeur.

Cas 1 : Si $-1 < r < 1$, alors $|r| < 1$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{p}{q} \right)^n, p < q \right] \rightarrow 0$$

car les puissances successives de r tendent vers 0. Cela est dû au fait que tout rationnel $r \in \mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme d'un quotient de naturels $p, q \in \mathbb{N}$ et que le dénominateur, étant plus grand que le numérateur, **croît plus rapidement que le numérateur**. Ainsi, le rapport p^n/q^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Cas 2 : Si $r = 1$, alors pour tout n ,

$$a_n = 1^n = 1$$

donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$$

Cas 3 : Si $r = -1$, alors

$$a_n = (-1)^n$$

La suite alterne entre -1 et 1 et n'a pas de limite. Donc, elle ne converge pas.

Cas 4 : Si $|r| > 1$, alors $|r^n|$ tend vers l'infini. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \text{ n'existe pas (la suite diverge).}$$

Conclusion : La suite converge si et seulement si $-1 < r \leq 1$ et $r \neq -1$. Plus spécifiquement, elle converge vers 0 si $-1 < r < 1$ et elle converge vers 1 si $r = 1$. Pour tout autre valeur, hors de l'intervalle $] -1, 1]$, la série diverge.

$$\boxed{-1 < r \leq 1 \text{ avec } r \neq -1}$$

Convergence d'une série géométrique

Preuve 8.6

Considérons une suite géométrique de terme initial a et de raison r . Les termes de cette suite sont donnés par $u_n = ar^n$. Nous devons prouver que si $|r| < 1$, la somme de cette suite converge vers $\frac{a}{1-r}$, et qu'elle diverge lorsque $|r| \geq 1$.

Cas 1 : $|r| < 1$

Si $|r| < 1$, la somme partielle S_n est donnée par :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \sum_{k=0}^n r^k$$

Nous savons que la somme d'une suite géométrique est :

$$S_n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Lorsque $|r| < 1$, $r^{n+1} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc, la somme infinie converge vers :

$$\boxed{S = \frac{a}{1 - r}}$$

Cas 2 : $|r| \geq 1$

Si $|r| \geq 1$, alors r^{n+1} ne tend pas vers 0 . Ainsi, la série ne converge pas, et la somme diverge.

$$\boxed{\text{La suite diverge pour } |r| \geq 1}$$

Preuve 8.7 Coefficient de Taylor

Soit le coefficient de Taylor

$$c_n = \frac{1}{n!} f^n(a)$$

Ce résultat est obtenu par la dérivation séquentielle d'une fonction $f(x)$ et l'évaluation de la dérivée à la valeur $x = a$. Soit une fonction $f(x)$ qui peut s'écrire sous la forme d'une série entière au voisinage de a :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots (*)$$

Les dérivées sont données par :

$$\begin{aligned}
 f(a) &= c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots + c_n(a-a)^{n-1} + \cdots + (*) = c_0 \\
 f'(x) &= \cancel{c_0}^0 + c_1(1) + (2)(1)c_2(x-a) + c_3(3)(2)(1)(x-a)^2 + \cdots + n!(x-a)^{n-1} + \cdots (*) \\
 f'(a) &= c_1 + 2!c_2(a-a) + 3!(a-a)^2 + \cdots + n!(a-a)^{n-1} + \cdots (*) = c_1 \\
 f''(x) &= \cancel{c_1}^0 + 2!c_2(1) + c_33! \cdot (x-a) + \cdots + (n-1)n!(x-a)^{n-2} + \cdots (*) \\
 f''(a) &= 2!c_2(1) + c_33! \cdot (a-a) + \cdots + (n-1)n!(a-a)^{n-2} + \cdots (*) = 2!c_2
 \end{aligned}$$

De façon générale, on a :

$$f^n(a) = n!c_n \Leftrightarrow \frac{1}{n!}f^n(a) = c_n$$