MATH1400

# Calcul à plusieurs variables

## Travail Pratique 1

Franz Girardin

10 septembre 2024

# Table des matières

**Définition de convergence**

**Exercice 1** (Stewart 1.1.2)

Qu'est-ce qu'une *suite convergente* ? Donnez **deux exemples**. Qu'est-ce qu'une *suite divergente* ? Donnez **deux** exemples

Est **convergente** toute **suite** $\{a_n\}$ dont les termes $a_n$ s'approchent autant que l'on veut d'une valeur $L$ lorsque l'entier $n$ devient arbitrairement grand :

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L\right) \implies a_n \text{ conv.}$$

Plus formellement, soit une valeur positive arbitrairement petite $\varepsilon$, il existe toujours un entier $N(\varepsilon)$ qui représente un rang à partir duquel s'il y a un entier naturel $n > N(\varepsilon)$, **alors** l'image de cet entier naturel, $a_n$ sera aussi proche que l'on veut d'une **valeur** $L$ représentant *le point de convergence de la suite* :

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

**Exemple de suites convergentes** : $\{a_n\} = \dfrac{1}{n}, \quad \{b_n\} = \dfrac{1}{n^2}$

Est **divergente** toute suite dont les termes $a_n$ ne convergent vers acune valeur particulière ; ils s'approchent plutôt de $\pm\infty$ :

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty\right) \implies a_n \text{ div.}$$

Plus formellement, soit un nombre positif arbitrairement grand $M > 0$, on pourra toujours trouver une valeur $N(M) \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les entiers $n > M$ auront une image $a_n$ **plus grande** que nombre arbitrairement grand. Cela signifie que les termes de la suites ne s'approchent d'aucune valeur.

$$\forall\, M > 0 : \exists N(M) \in \mathbb{N} > 0 : n > N \implies a_n > M(\text{div. } +\infty)$$

**Identification des termes**

**Exercice 2** (Stewart 1.1.8)

Donnez les **cinq premiers termes** de la suite $a_n = \frac{(-1)^n n}{n!+1}$

$$a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = -\frac{3}{7},\ a_4 = \frac{4}{25} a_5 = -\frac{5}{121}$$

**Exercice 3** (Stewart 1.1.11)

Donnez les **cinq premiers termes** de la suite $a_n = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5},\ a_4 = \frac{2}{5}\times\frac{5}{7} = \frac{2}{7},\ a_5 = \frac{2}{7}\times\frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

**Trouver la règle**

**Exercice 4** (Stewart 1.1.15)
Trouver la formule du **terme général** $a_n$ de la suite $\left\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\right\}$

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{3^{n-2}}$$

**Exercice 5** (Stewart 1.1.18)
Trouver la formule du **terme général** $a_n$ de la suite $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \cdots\}$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

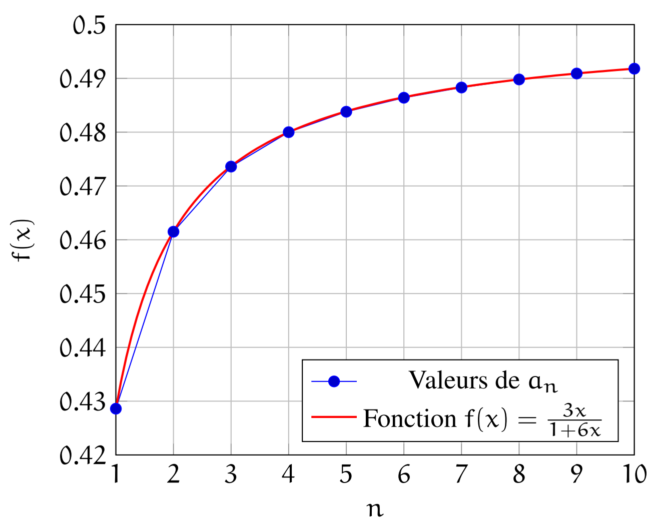
**Estimer un somme**

**Exercice 6** (Stewart 1.1.19 - 1.1.22)
Calculez, **à la quatrième décimale**, les dix premiers termes de la suite et utilisez-les pour tracer le graphique de la suite à la main. La suite semble-t-elle avoir une limite ? Si oui, **calculez cette limite**. Si non, expliquez pourquoi.

**1.1.19** $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$

$$a_1 = 0.4286,\ a_2 = 0.4615,\ a_3 = 0.4736,\ a_4 = 0.4800,\ a_5 = 0.4838,$$
$$a_6 = 0.4864,\ a_7 = 0.4883,\ a_8 = 0.4998,\ a_9 = 0.4909,\ a_{10} = 0.4918$$

Graphe de la suite $a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$ et de la fonction $f(x) = \dfrac{3x}{1+6x}$



**Déterminer la convergence**

> **Exercice 7** (Stewart 1.1.23 - 1.1.56)
> Déterminez si la suite converge ou diverge. Si elle converge, **trouvez sa limite**.

**1.1.23** $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \implies \dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\frac{3+5n^2}{n+n^2} = \frac{n^2(\frac{1}{3n}+5)}{n^2(1+\frac{1}{n})} = a_n \quad \text{(Simplifié)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5+\frac{1}{n}\cancelto{0}{\frac{1}{n}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{1} = \frac{5}{1}$$

**1.1.42** $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{n}$

Nous savons que la fonction $a_n$ est bornée entre les valeurs $\cos^2 n \in [0,1]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons les équivalences suivantes :

$$G0 \leqslant \cos^2 n \leqslant 1$$
$$\frac{0}{n} \leqslant \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{0}{n}} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{n}}$$

Ainsi nous savons que la limite est bornée **inférieurement et supérieurement** par zéro, lorsque $n \longrightarrow \infty$. Ainsi, nous pouvons conclure que la limite est égale à zéro et que la suite $a_n$ converge vers $L = 0$.

**1.1.44** $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

$$a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}} = \left(2 \cdot 2^{3n}\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{3n}{n}} \quad \text{(Développé)}$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} = 2^{\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} \cdot 2^3 = 8$$

**1.1.46** $a_n = 2^{-n} \cos n\pi$
Nous savons que la suite $\{a_n\}$ est bornée par les valeurs $-1$ et $1$ : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant a_n \leqslant 1$. En utilisant l'identité $\cos \pi n = (-1)^n$, nous avons :

$$a_n = 2^{-1} \cos \pi n = b_n = 2^{-1}(-1)^n$$

Nous pouvons ainsi évaluer la limite lorsque $n \longrightarrow 0$ :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{2^n}} \cdot (-1)^n = \lim_{n\to+\infty} 0 \cdot (-1)^n = 0$$

**1.1.52** $ha_n = \arctan(\ln n)$

Nous savons que la fonction $\ln x$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. Et par le théorème d'association d'une fonction à une suite, nous savons que la suite analogue $b_n = \ln n$ tend également vers $+\infty$. Nous avons alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \arctan \cancelto{\infty}{(\ln n)} = \lim_{M\to+\infty} \arctan(M) = \frac{\pi}{2}$$

**1.1.52** $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$

**1.1.56** $\dfrac{(-3)^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-3)^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n 3^n \frac{n(n+1)}{2} =$$