

IFT-1575
Modèles de recherche opérationnelle

Introduction

Franz Girardin

24 octobre 2024

TABLE DES MATIÈRES

SECTION 1	MODÉLISATION	PAGE 4
1.1	Définition de la prog. linéaire	4
1.2	Composantes du modèle	4
1.3	L'objectif	4
1.4	Contraintes	4
1.5	Terminologie de base	4
SECTION 2	MAXIMISATION ET MINIMISATION	PAGE 4
2.1	Théorème de maximisation	4
2.2	Preuve	4
SECTION 3	ALGORITHME DU SIMPLEXE	PAGE 4
3.1	Contraintes	4
3.2	Forme standard	5
3.3	Choisir les variables indépendantes	5
3.4	Pivot	5
3.5	Système suite au pivot	5
3.6	Pivot	5
3.7	Système après le pivot	6
3.8	Résumé de l'algorithme	6
SECTION 4	REPRÉSENTATION FORME TABLEAU	PAGE 7
4.1	Forme standard	7
4.2	Choix de la variable d'entrée	7
4.3	Choix de la variable de sortie	7
4.4	Pivot	7
4.5	Choix de la variable d'entrée	8
4.6	Choix de la variable de sortie	8
4.7	Concept de solutions de base	9
4.8	Résumé de l'algorithme en forme tableau	9
SECTION 5	RÉSOLUTION GRAPHIQUE	PAGE 10
5.1	Représentation graphique selon l'équation	10

SECTION 6**SIMPLEXE EN FORMULATION GÉNÉRALE****PAGE 10**

6.1	Définitions et forme standard	10
6.2	Représentation tableau de la forme générale	11
6.3	Choix de la variable d'entrée Scénario 1 : Tous les $\bar{c}_j x_j$ sont positifs — 11 • Scénario 2 : Au moins un $\bar{c}_j x_j$ est négatif — 11	11
6.4	Augmentation de la variable d'entrée Scénario 1 : Tous les \bar{a}_{is} sont négatifs — 11 • Scénario 2 : Au moins un \bar{a}_{is} est positif — 11	11
6.5	Pivot Division de la ligne pivot — 11 • Mise à jour des autres lignes — 11	11
6.6	Exemple Étape 1 : Choix de la variable d'entrée — 12 • Étape 2 : Détermination de la variable de sortie — 12 • Étape 3 : Pivot — 12 • Mise à jour des autres lignes — 12	12
6.7	Résumé de l'algorithme en forme générale	13

SECTION 7**RAPPEL D'ALGÈBRE LINÉAIRE****PAGE 14**

7.1	Définitions Exemple de produit scalaire — 14 • Dépendance linéaire — 14 • Exemples de dépendance — 14 • Exemples d'indépendance linéaire — 14 • Matrice carrée — 14	14
7.2	Multiplication de Matrices Formule Générale — 14 • Exemple Concret — 15	14
7.3	Transposée d'une Matrice : Formule Générale et Exemple Formule Générale — 15 • Exemple Concret — 15	15
7.4	Calcul du Déterminant d'une Matrice : Formule Générale et Exemple Formule Générale — 16 • Exemple Concret avec une Matrice 2×2 — 16 • Remarque sur les Mineurs et les Cofacteurs — 16 • Exemple avec une Matrice 3×3 — 16 • Conclusion — 16	16
7.5	Rang et matrices non singulières Plein rang — 16 • Matrice non singulière — 17	16

SECTION 8**ALGORITHME DU SIMPLEXE ANALYSE****PAGE 17**

8.1	Notation matricielle	17
8.2	Démonstration de la notation matricielle	17
8.3	Notation matricielle dans le problème du restaurateur	18
8.4	Base et variable de base Dérivations matricielles — 18	18
8.5	Représentation tabulée de la notation matricielle	19
8.6	Dérivation du vecteur multiplicateur du simplexe Transformation par B^{-1} — 19	19
8.7	Dérivation du vecteur multiplicateur du simplexe	19
8.8	Résolution par la méthode tabulaire et matricielle	19
8.9	Exemple de restaurateur	20
8.10	Multiplicateurs du simplexe Impact des multiplicateurs sur l'objectif — 21 • Dégénérescence — 21	21
8.11	Résumé de l'algorithme en notation matricielle	21

SECTION 9**ANALYSE POST-OPTIMALE****PAGE 22**

9.1	Modification des termes de droite	22
9.2	Modification d'un coût dans l'objectif	22
9.3	Modification d'une variable hors-base	22
9.4	Ajout d'une nouvelle action	22

SECTION 10**PROGRAMMATION LINÉAIRE DE NOMBRE ENTIERS****PAGE 22**

	Modèles binaires — 22	
10.1	Problème de coloration de graphe	22
10.2	Deux principes généraux en PLNE	23
10.3	Exemple : Problème de relaxation continue	23

SECTION 11**ALGORITHME BRANCH AND BOUND****PAGE 23**

11.1	Introduction	23
11.2	Branchement	23
11.3	Évaluation des sous-problèmes	23
11.4	Critère d'arrêt	23
11.5	Branchement et Pseudo-Code	23

$$\text{Max } f(w) \leftrightarrow \text{Min } -f(w)$$

MODÉLISATION

Définition de la prog. linéaire

Branche de la *Recherche Opérationnelle* où on utilise des **modèles** mathématiques qui font appel à des fonctions **linéaires** pour résoudre un problème. Par fonction linéaire, on entend des fonctions qui n'impliquent que des variables de **degré 1**.

Composantes du modèle

Il faut identifier l'**action** sur laquelle on doit prendre une décision et la représenter par une **variable de décision**. À cette variable sera associée un constante qui représente le **niveau** de l'action.

L'objectif

S'exprime sous la forme d'une **fonction mathématique** qui représente l'intention. P. ex. la **maximiser le profit** correspondrait à :

$$\text{Max } 5x + 3y$$

Contraintes

Elles peuvent dépendre du **contexte du problèmes** ou peuvent être plus générales. P. ex. la **non-négativité** d'une variable est une contraintes générale applicable à certains problème :

$$\begin{aligned} x &\leq 50 && \text{Production maximale de vin blanc (litres)} \\ y &\leq 60 \\ x + y &\leq 80 && \text{Production maximale totale de vin} \\ x \geq 0, y \geq 0 &&& \text{Non négativité} \end{aligned}$$

Terminologie de base

Une **solution réalisable** est un **vecteur** : de valeurs

$$\vec{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$

appartenant à $X \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque composante x_1, x_2, \dots, x_n respecte **toutes les contraintes** du problème. On peut conceptualiser X comme étant un ensemble composé de vecteurs lignes où chaque vecteur ligne est une solution réalisable :

$$X^n \subset \mathbb{R}^n : \vec{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in X^n \implies f(\vec{x}) = f_{\text{réalisable}}$$

Une **solution optimale** est une solution réalisable qui maximise ou minimise la fonction objectif $z(x)$. Autrement dit, c'est une solution réalisable qui produit la **meilleure valeur possible** pour la fonction objectif.

Note:-

Un modèle peut présenter une **infinité** de solution optimales.

MAXIMISATION ET MINIMISATION

Théorème de maximisation

La maximisation d'un objectif $f(w)$ est équivalent à l'**opposé** de la minimisation :

Preuve

Considérons le problème :

$$\text{Max } f(w)$$

s.a.

$$w \in X \subset \mathbb{R}^n$$

Soit w_{opt} , un point de X où $f(w)$ atteint son **maximum**. On a :

$$f(w_{\text{opt}}) \geq f(w) \quad \forall w \in X \leftrightarrow -f(w_{\text{opt}}) \leq -f(w) \quad \forall w \in X$$

Autrement dit, si le vecteur ligne w_{opt} produit une solution optimale $f(w_{\text{opt}})$, alors le résultat de tous les autres vecteurs lignes w appartenant à X —c'est-à-dire $f(w)$ —seront nécessairement plus petit ou égal à cette solution optimale : $f(w) \leq f(w_{\text{opt}})$. Cela implique aussi que la négation de la solution optimale—c'est-à-dire $-f(w_{\text{opt}})$ sera plus plus petite ou égale à tous les autres $-f(w)$. Par conséquent, $-f(w_{\text{opt}})$ est la valeur minimale possible parmi tous les $-f(w)$ possibles. On a alors :

$$-\text{Max } f(w) = -f(w_{\text{opt}}) = \text{Min } -f(w)$$

Ainsi, qu'on maximise $f(w)$ ou qu'on minimise $-f(w)$, on retrouve la même solution optimale w_{opt} .

ALGORITHME DU SIMPLEXE

Soit le problème suivant. Un restaurateur dispose de **14** oursins, **24** crevettes, **18** huîtres. Deux types d'assiettes de fruit de mer sont offertes par le restaurateur :

8\$: 5 oursins, 2 crevettes 1 huître

6\$: 3 oursins, 3 crevettes 3 huîtres

L'objectif est de déterminer le **nombre d'assiettes** de chaque type à préparer afin de **maximiser** le revenu total du restaurateur tout en respectant les disponibilité de fruits de mer.

Contraintes

$$5x + 3y \leq 30 \quad \text{Oursins}$$

$$2x + 3y \leq 24 \quad \text{crevettes}$$

$$x + 3y \leq 18 \quad \text{Huîtres}$$

$$x, y \geq 0 \quad \text{Non-négativité}$$

$$z = 8x + 6x \quad \text{Objectif}$$

En considérant que la maximisation d'un objectif est équivalente à la minimisation de l'opposé de la minimisation on a :

$$\text{Min} \quad -8x - 6y$$

s.a.

$$5x + 3y \leq 30$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$x + 3y \leq 18$$

$$x, y \geq 0$$

$$z = 8x + 6y$$

Forme standard

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x - 6y \\ \text{s.a.} & \\ & 5x + 3y + u \leq 30 \\ & 2x + 3y + p \leq 24 \\ & x + 3y + h \leq 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x, y, u, p, h \geq 0 \\ z = 8x + 6y \end{array}$$

Choisir les variables indépendantes

Supposons que x et y sont des *variables indépendantes*. Exprimons les *variables dépendantes* u, p, h, z en fonction de x et y

$$\begin{array}{ll} u & = 30 - 5x - 3y \\ p & = 24 - 2x - 3y \\ h & = 18 - 1x - 3y \\ -z & = -8x - 6y \end{array}$$

En supposant que x et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$x = y = 0 \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant x ; on considère donc x comme *variable d'entrée*. Soit $y = 0$, on a :

$$\begin{array}{ll} u = 30 - 5x - 3y & \implies x \leq 30/5 = 6 \\ p = 24 - 2x - 3y & \implies x \leq 24/2 = 12 \\ h = 18 - 1x - 3y & \implies x \leq 18 \end{array}$$

Explication : Soit $u = 30 - 5x - 3y \leftrightarrow u = 30 - 5x - 3(0)$, on sait que pour respecter la contrainte de non négativité, la quantité u doit être telle que $u = 30 - 5x \geq 0$. Cela se simplifie par :

$$x \leq 6$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de x jusqu'à **6**. L'équation limitante est celle qui implique u ; on dit alors que u est la *variable de sortie*. On **pivote**. La variable u prend la place de x en tant que variable indépendante; u et y sont les *nouvelles variables indépendantes*.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p , et h en fonction de u et y :

$$u = 30 - 5x - 3y \text{ et } u, y = 0$$

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

$$p = 24 - 2x - 3y \text{ et } u, y = 0$$

$$p = 12 + 2/5u - 9/5y$$

$$h = 18 - 1x - 3y \text{ et } u, y = 0$$

$$h = 12 + 1/5u - 12/5y$$

$$z = 0 - 8x - 6y \text{ et } u, y = 0$$

\Downarrow

$$z = 0 - 8(6 - 1/5u - 3/5y) - 6y$$

\Downarrow

$$z = -48 + 8/5u - 6/5y$$

Système suite au pivot

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y$$

$$p = 12 - 2/5u - 9/5y$$

$$h = 12 - 1/5u - 12/5y$$

$$z = -48 + 8/5u - 6/5y$$

Sachant que u et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$u = y = 0 \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant y ; on considère donc y comme *variable d'entrée*. Soit $u = 0$, on a :

$$\begin{array}{ll} x = 6 - 1/5u - 3/5y & \implies y \leq 10 \\ p = 12 - 2/5u - 9/5y & \implies y \leq 20/3 \\ h = 12 - 1/5u - 12/5y & \implies y \leq 5 \end{array}$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de y jusqu'à **5**. L'équation limitante est celle qui implique h ; on dit alors que h est la *variable de sortie*. On **pivote**. La variable h prend la place de y en tant que variable indépendante; h et y sont les *nouvelles variables indépendantes*.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p , et h en fonction de h et y :

$$h = 12 - 1/5u - 12/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$y = 5 + 1/12u - 5/12h$$

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$x = 6 - 1/5u - 3/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$

\Downarrow

$$x = 3 - 1/4u - 1/4y$$

$$p = 12 - 2/5u - 9/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$p = 12 - 2/5u - 9/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$

\Downarrow

$$p = 3 + 1/4u - 3/4y$$

$$z = -48 + 8/5u - 6/5y \text{ et } h, y = 0$$

\Downarrow

$$z = -48 + 8/5u - 6(5 + 1/12u - 5/12h)$$

\Downarrow

$$z = -54 + 3/2u - 1/2h$$

Système après le pivot

$$\begin{aligned}x &= 3 - 1/4u - 1/4h \\p &= 3 + 1/4u + 3/5h \\y &= 5 + 1/12u - 5/12h \\z &= -54 + 3/2u - 1/2h\end{aligned}$$

Sachant que u et h sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$u = h = 0 \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u , ni la valeur de h car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes à l'**optimum** !

Résumé de l'algorithme

► **Compter** le nombre d'équations. Un système en **forme standard** de n équations nécessite une **variables d'écart** par équation, pour un total de n variables d'écart.

Note:-

Si le système sous sa forme standard possède n variables inconnues, ce système doit avoir *au minimum* n équations pour pouvoir trouver une **solution unique**. Autrement, le système pourrait admettre **une infinité de solutions**.

► **Exprimer** les **variables d'écart** u, p, h , etc. et l'objectif z en fonction des **variables fixées à zéro**, c'est-à-dire les variables inconnues x_1, x_2, \dots, x_n .

► **Identifier** la variable dont l'↑ réduit le plus z ; cette variable minimise l'objectif et est donc la **variable d'entrée** x_s .

▷ Soit la variable x_s , trouver la variable x_r qui limite le plus l'augmentation de x_s . Il s'agit de la **variable de sortie** x_r .

► **Fixer** x_r à zéro. La variable de sortie x_r prend la place de la variable d'entrée x_s . Exprimer x_s et les autres variables x_1, x_2, \dots, x_n , ainsi que l'objectif z en fonction de x_r .

► **Évaluer** le nouveau système d'équation obtenu.

▷ Si l'**augmentation d'aucune** variable dans la fonction objectif n'entraîne une diminution de l'objectif, on a la **solution optimale**. L'algorithme est terminé.

▷ Si l'augmentation **d'au moins une** variable entraîne la diminution de l'objectif, la solution n'est pas optimale et il faut poursuivre avec **une autre itération** de l'algorithme.

REPRÉSENTATION FORME TABLEAU

Forme standard

Soit le système suivant sous la forme standard, nous allons utiliser **la représentation sous forme de tableau** pour appliquer l'algorithme du simplexe.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & -8x - 6y \\
 \text{s.a.} \quad & 5x + 3y + u \leq 30 \\
 & 2x + 3y + p \leq 24 \\
 & x + 3y + h \leq 18 \\
 & x, y, u, p, h \geq 0 \\
 & z = 8x + 6y
 \end{aligned}$$

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
-z	-8	-6				1	0

TABLE 4.1 – État initial de la **forme standard**

Le tableau doit avoir la même allure que la forme standard; il doit être possible d'identifier une **variable** par ligne du tableau. **Par exemple**, La ligne surlignée en rouge engendre l'équation :

$$5x + 3y + u = 30$$

Dans ce contexte, on sait que u est une **variable dépendante** (v.d.) et le terme de droite qui lui est associé (t.d.) est 30.

Tout comme durant la résolution algébrique, on constate que si u, p et h sont des **variables dépendantes** et que x et y sont des variables indépendantes **fixées à zéro**, la solution associée à ce système est :

$$[x, y = 0] \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0$$

Choix de la variable d'entrée

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
-z	-8	-6				1	0

TABLE 4.2 – Variable d'entrée choisie

On choisit la variable dont l'augmentation rend l'objectif z plus petit et négatif; il s'agit de x qui est la **variable d'entrée**.

Choix de la variable de sortie

Soit une ligne du tableau l , et la variable d'entrée x_s , pour trouver la variable dépendante **limite davantage l'augmentation** de la **variable d'entrée**, il suffit d'utiliser la formule :

$$\lim = \text{t.d.}(l) \div x_s(l)$$

Exemple

$$\begin{aligned}
 \lim(u) &= \text{t.d.}(u) \div x(u) = 30 \div 5 = 6 \\
 \lim(p) &= \text{t.d.}(p) \div x(p) = 24 \div 2 = 12 \\
 \lim(h) &= \text{t.d.}(h) \div x(h) = 18 \div 1 = 12
 \end{aligned}$$

Dans ce cas-ci, u limite davantage l'augmentation de x ; u est donc la variable de sortie. x_r .

Pivot

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
-z	-8	-6				1	0

TABLE 4.3 – Coefficient pivot

Le coefficient à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée x et de la rangée de la variable de sortie u est le **coefficient du pivot**. Le **pivot** est l'action par laquelle on modifie le tableau pour que la variable d'entrée prenne la place de la variable de sortie.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.4 – État suite au pivot

Pour que x soit **variable dépendante** à la place de u dans la première ligne, il faut un coefficient de 1 sous x dans la première ligne et des coefficients de 0 dans les autres lignes. Cela revient à diviser la ligne de la variable de sortie par le **coefficient du pivot**.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				30/5
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.5 – Division par le coefficient du pivot

Pour exprimer chaque variable dépendante en terme de la variable d'entrée x par le coefficient c_e sous la colonne de la variable d'entrée.

Exemple

$$x = 6 - 3/5y - 1/5u$$

$$\begin{aligned} p &= 24 - 2x - 3y \\ \Leftrightarrow p &= 24 - 2(6 - 3/5y - 1/5u) - 3y \\ \Leftrightarrow p &= 24 - 2(6 - 3/5y - 1/5u) + 2x - 2x - 3y \\ \Leftrightarrow 2x + 3y + p + 2(6) - 2(3/5y + 1/5u) - 2x &= 24 \\ \Leftrightarrow 2x + 3y + p - 2(x + 3/5y + 1/5u) &= 24 - 2(6) \end{aligned}$$

Soit $ligne(p) : 2x + 3y + p = 24$ et $ligne(x) : x + 3/5y + 1/5u = 6$, Cela revient à effectuer $ligne(p) - 2 \times ligne(x)$. On obtient alors le tableau suivant

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	-2/5	1			12
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.6 – $ligne(p) - 2 \times ligne(x)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	-2/5	1			12
h	0	12/5	-1/5		1		12
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 4.7 – $ligne(h) - 1 \times ligne(x)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	-2/5	1			12
h	0	12/5	-1/5		1		12
$-z$	0	-6/5	8/5			1	48

TABLE 4.8 – $ligne(-z) + 8 \times ligne(x)$

Nous avons complété **une itération** de l'algorithme. On obtien alors la solution suivante :

$$[y, u = 0] \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48$$

Choix de la variable d'entrée

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	-2/5	1			12
h	0	12/5	-1/5		1		12
$-z$	0	-6/5	8/5			1	48

La variable d'entrée est donc $x_s = y$

Choix de la variable de sortie

Démonstration

$$\begin{aligned} \lim(x) &= \text{t.d.}(x) \div y(x) = 6 \div 3/5 = 10 \\ \lim(p) &= \text{t.d.}(p) \div y(p) = 12 \div 9/5 = 20/3 \\ \lim(h) &= \text{t.d.}(h) \div y(h) = 18 \div 12/5 = 5 \end{aligned}$$

La variable de sortie est donc $x_r = h$, puisqu'après $y \leq 5$, h devient négatif, ce qui viole la contrainte de **non négativité**.

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	-2/5	1			12
h	0	12/5	-1/5		1		12
-z	0	-6/5	8/5			1	48

TABLE 4.9 – Coefficient de pivot

Puisque le pivot est $12/5$, on divise *ligne(h)* par cette même valeur pour que y soit variable dépendante à *ligne(h)*.

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	-2/5	1			12
y	0	1	-1/12		5/12		5
-z	0	-6/5	8/5			1	48

TABLE 4.10 – *ligne(h)* ÷ $12/5$ devient *ligne(y)*

On soustrait maintenant *ligne(y)* à *ligne(p)* et *ligne(x)* de façon à avoir un coefficient de 0 sous y.

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	0	-1/4	1	-3/4		3
y	0	1	-1/12		5/12		5
-z	0	-6/5	8/5			1	48

TABLE 4.11 – *ligne(p)* - $9/5$ *ligne(y)*

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
x	1	0	1/4	0	-1/4		3
p	0	0	-1/4	1	-3/4		3
y	0	1	-1/12		5/12		5
-z	0	-6/5	8/5			1	48

TABLE 4.12 – *ligne(x)* - $3/5$ *ligne(h)*

v.d.	x	y	u	p	h	-z	t.d
x	1	0	1/4	0	-1/4		3
p	0	0	-1/4	1	-3/4		3
y	0	1	-1/12		5/12		5
-z	0	0	3/2	0	1/2	1	54

TABLE 4.13 – *ligne(-z)* - $6/5$ *ligne(h)*

Nous avons complété **une seconde itération** de l'algorithme. Le système est associé à la solution :

$$[u, h = 0] \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u , ni la valeur de h car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes à l'optimum.

Concept de solutions de base

Soit un système de m équations et de n variables, l'algorithme du simplexe considère les solutions où $n - m$ variables sont fixées à zéro et sont donc des **variables indépendantes**. Ces solutions sont appelées **solutions de bases**. Avec n variables et $n - m$ variables fixées à zéro, il y a le nombre suivant de solutions de bases possibles :

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Exemple Soit un système de $n = 5$ variables et $m = 3$ équations, il y aura le nombre suivant de solutions de base possibles :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Résumé de l'algorithme en forme tableau

► **Organiser** les équations présentées sous la **forme standard** en un tableau. La 1^{ère} colonne contient **v.d.**, puis, dans chaque rangée subséquente de cette colonne, chacune des variable dépendante et, finalement, l'objectif négatif $-z$. La **dernière colonne** contient **t.d.** puis, dans chacune des rangées subséquentes de cette colonne, les termes de droite des équations correspondantes.

► **Choisir** la variable d'entrée x_s ; il s'agit de la variable dépendante dont l'augmentation minimise davantage l'objectif.

$$x_s = x : -z \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$$

► **Choisir** la variable de sortie x_r . Il s'agit de la variable qui limite davantage l'augmentation de la variable de sortie, puisqu'elle atteint 0 plus tôt que toutes les autres variable lorsque x_e augmente.

► **Identifier** le coefficient pivot. Il s'agit du coefficient qui se trouve à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée et la rangée de la variable de sortie.

► **Diviser** la rangée de la variable de sortie par le coefficient du pivot.

► **Soustraire** chacune des autres rangées par un facteur $f \times \text{ligne}(x_r)$, de manière à obtenir 0 dans la colonne de la variable de sortie (la même colonne que le coefficient pivot).

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Représentation graphique selon l'équation

Considérons le système d'équation suivant sous la forme standard :

$$\begin{aligned} \text{Min } -z &= -8x - 6y \\ \text{s.a.} \end{aligned}$$

$$5x + 3y \leq 30$$

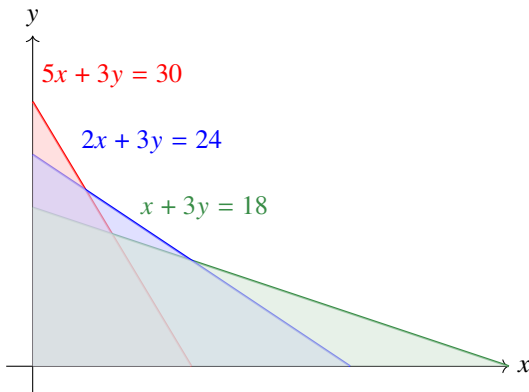
$$2x + 3y \leq 24$$

$$x + 3y \leq 18$$

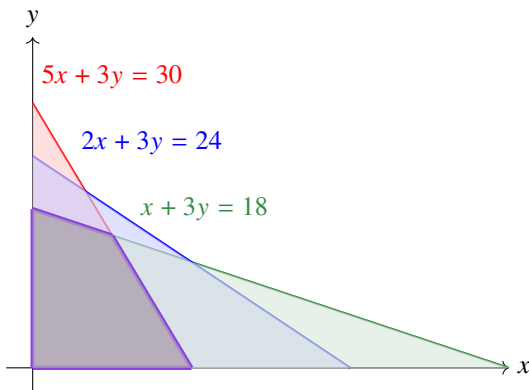
$$x, y \geq 0$$

Nous pouvons choisir chacune des équations pour la représenter par une courbe. Soit l'équation suivante, nous avons la droite correspondante :

$$5x + 3y = 30$$



Puisque l'équation contient une inégalité, nous savons que l'ensemble des points qui satisfont la contrainte se trouve nécessairement sous la courbe.



Les solutions possibles se trouvent donc dans la zone délimitée par les courbes. La solution **optimale** est se trouve au sommet de polygône définissant la zone.

pour la solution optimale $\hat{x} : (a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons :

$$\hat{x} \in \{(0, 6), (3, 5), (6, 0), (0, 0)\}$$

Selon les options possibles, la solution optimale est donc $\hat{x} = (3, 5)$ et on a

$$-z = -8(3) - 6(5) = -24 - 30 = -54$$

Selon la théorie vue précédemment, nous savons que le nombre de solutions de bases différentes dans l'espace est donné par :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Or, le polyptote ne contient que **4 coins** et donc **4** soolution optimales. Cela est dû au fait que l'algorithme du simplexe ne peut visiter que 4 solutions de base **réalisables**. Les solutions restantes sont des solutions de bases **non réalisables**.

SIMPLEXE EN FORMULATION GÉNÉRALE

Définitions et forme standard

Soit un système de programmation linéaire qui comprend **n** variables et **m** contraintes et $n \geq m$, nous avons les entités suivantes :

x_j ::= variables de décision

c_j ::= coefficient de x_j dans l'objectif

a_{ij} ::= coefficient de x_j dans la contrainte i

b_i ::= terme de droite dans la contrainte i

Les **variables de décisions** sont donc $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ et chacune d'elles est présente dans une colonne **j** du tableau. Il y a **m** rangées d'équations dans le tableau, excluant la rangée de l'objectif.

$$\text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.a.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Cela revient à la simplification suivante :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \text{ s.a. } \sum_{n=j}^n a_{ij} = b_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Représentation tableau de la forme générale

v.d.	x_1	x_2	\dots	x_r	\dots	x_m	x_{m+1}	\dots	x_s	\dots	x_n	$-z$	t.d.
x_1	1						$\bar{a}_{1,m+1}$	\dots	\bar{a}_{1s}	\dots	\bar{a}_{1n}		\bar{b}_1
x_2		1					$\bar{a}_{2,m+1}$	\dots	\bar{a}_{2s}	\dots	\bar{a}_{2n}		\bar{b}_2
\vdots			\ddots					\ddots		\ddots			\vdots
x_r				1			$\bar{a}_{r,m+1}$	\dots	\bar{a}_{rs}	\dots	\bar{a}_{rn}		\bar{b}_r
\vdots					\ddots			\ddots		\ddots			\vdots
x_m						1	$\bar{a}_{m,m+1}$	\dots	\bar{a}_{ms}	\dots	\bar{a}_{mn}		\bar{b}_m
$-z$							\bar{c}_{m+1}	\dots	\bar{c}_s	\dots	\bar{c}_n	1	\bar{z}

La solution associée est :

$$x_1 = \bar{b}_1, \quad x_2 = \bar{b}_2, \quad \dots, \quad x_m = \bar{b}_m,$$

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0, \quad z = \bar{z}$$

Choix de la variable d'entrée

La variable d'entrée $x_s = x_j$ est la variable x_j qui minimise z et est donc **celle qui est la plus négative**.

À la fin d'une itération, si tous les nouveaux coefficients sont positifs—c'est-à-dire $\forall j, \bar{c}_j \geq 0$ —**alors** l'algorithme se termine car l'objectif ne peut plus être amélioré.

Scénario 1 : Tous les $\bar{c}_j x_j$ sont positifs

$$[\forall j, \bar{c}_j x_j \geq 0] \implies z \longrightarrow \infty \text{ fin de l'algorithme}$$

Scénario 2 : Au moins un $\bar{c}_j x_j$ est négatif

Si $\bar{c}_j < 0$ pour au moins un j , la variable d'entrée x_s est choisie telle que :

$$\bar{c}_s = \min \{ \bar{c}_j : j = 1, \dots, n \}$$

Pour chaque ligne **variable dépendante** du tableau, on a :

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s, \quad i = 1, \dots, m$$

Exemple

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 6.1 – État initial de la **forme standard**

Soit $x_1 = u, i = 1, x_s = x, a_{is} = 5$ on a :

$$u = 30 - 5x$$

Augmentation de la variable d'entrée

Scénario 1 : Tous les \bar{a}_{is} sont négatifs

Si $\bar{a}_{is} < 0$ pour tout i , l'augmentation de x_s entraîne une augmentation des x_i , rendant le problème **non borné inférieurement**. Dans l'exemple précédent, si a_{is} était tel que $a_{is} = -5$ au lieu de $a_{is} = 5$, l'augmentation de x serait non bornée; u serait toujours positif qu'importe la valeur de x . Lorsqu'un a_{is} est positif, l'augmentation de x_s est limitée par la contrainte de non négativité de x_i :

$$x_i \geq 0 \implies \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \geq 0$$

Exemple

$$u \geq 0 \implies [30 - 5x \geq 0] \implies x \leq \frac{30}{5}$$

Scénario 2 : Au moins un \bar{a}_{is} est positif

Si $\bar{a}_{is} > 0$ pour au moins un i , x_s est limité par :

$$x_r = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0 \right\}$$

La variable x_r correspondante devient la variable de sortie.

Pivot

Le pivot échange la variable d'entrée x_s avec la variable de sortie x_r . La ligne pivot (ligne r) est divisée par le coefficient de pivot \bar{a}_{rs} , puis les autres lignes sont ajustées pour obtenir des zéros dans la colonne x_s .

Division de la ligne pivot

Les nouveaux coefficients de la ligne pivot sont :

$$\bar{a}_{rj} = \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}, \quad j = 1, \dots, n$$

et

$$\bar{b}_r = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}}$$

Mise à jour des autres lignes

Pour chaque ligne $i \neq r$, on ajuste :

$$\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} - \bar{a}_{is} \times \bar{a}_{rj} \quad \forall i \neq r, j = 1, \dots, n$$

et

$$\bar{b}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} \times \bar{b}_r$$

Pour la fonction objectif :

$$\bar{c}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_s \times \bar{a}_{rj}$$

et

$$-\bar{z} = -\bar{z} - \bar{c}_s \times \bar{b}_{rj}$$

Exemple

Considérons le problème du restaurateur :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x - 6y \\ \text{s.a.} & \\ & 5x + 3y + \mathbf{u} \leq 30 \\ & 2x + 3y + \mathbf{p} \leq 24 \\ & x + 3y + \mathbf{h} \leq 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x, y, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{h} \geq 0 \\ z = 8x + 6y \end{array}$$

En remplaçant les variables par x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x_1 - 6x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 5x_1 + 3x_2 + \mathbf{x_3} \leq 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 + \mathbf{x_4} \leq 24 \\ & x_1 + 3x_2 + \mathbf{x_5} \leq 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}, \mathbf{x_5} \geq 0 \\ z = 8x_1 + 6x_2 \end{array}$$

Le tableau initial du simplexe est :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
x_3	5	3	1				30
x_4	2	3		1			24
x_5	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	

Étape 1 : Choix de la variable d'entrée

On voit que $\bar{c}_j < 0$ pour au moins un j . On a alors :

$$\bar{c}_s = \min\{\bar{c}_j : j = 1, \dots, n\} = \min\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\} = \min\{-8, -6\} = -8$$

et

On identifie que $\bar{c}_1 = -8$ est le plus négatif, donc x_1 est la variable d'entrée.

Étape 2 : Détermination de la variable de sortie

On fait face au **scénario 2** : au moins un a_{is} est positif. Dans ce cas-ci, $a_{is} = a_{i1}$; on fait référence aux coefficients sous la colonne de la variable d'entrée x_1 et donc $s = 1$.

On calcule les rapports pour déterminer la variable de sortie :

$$\left[x_r = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0\right\} \right] \Rightarrow x_r = \min\left\{\frac{30}{5} = 6, \frac{24}{2} = 12, \frac{18}{1} = 18\right\}$$

Le minimum est **6**, donc $x_r = x_3$ est la variable de sortie.

Étape 3 : Pivot

On divise la ligne de x_3 par le coefficient pivot 5, donc on applique la formule

$$\left[\forall j, \bar{a}_{rj} = \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}} \right] \Rightarrow \forall j, \bar{a}_{3j} = \frac{\bar{a}_{3j}}{\bar{a}_{3s}},$$

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
x_1	1	3/5	1/5				6
x_4	2	3		1			24
x_5	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	

Durant le pivot, la variable d'entrée x_1 prend la place de la variable de sortie x_3 .

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
$\mathbf{x_1}$	1	3/5	1/5				6
x_4	2	3		1			24
x_5	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	

Mise à jour des autres lignes

Pour chaque ligne $i \neq r = x_3$ (nouvellement x_1), on ajuste :

$$\begin{aligned} \forall (i, j), [\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} - \bar{a}_{is} \times \bar{a}_{rj}] & \Rightarrow \\ \bar{a}_{41} = 0, \bar{a}_{42} = \frac{9}{5}, \bar{a}_{43} = -\frac{2}{5}, \bar{a}_{44} = 1, \bar{a}_{45} = 0 \\ \bar{a}_{51} = 0, \bar{a}_{52} = \frac{12}{5}, \bar{a}_{53} = -\frac{1}{5}, \bar{a}_{54} = 0, \bar{a}_{55} = 1 \end{aligned}$$

et

$$[\bar{b}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} \bar{b}_r] \Rightarrow \bar{b}_4 = 12, \bar{b}_5 = 6$$

$$\text{et } \left[-\bar{z} = -\bar{z} - \bar{c}_s \times \bar{b}_{rj} \right] \implies -\bar{z} = 1 - (-8) \times 6 = 48$$

Selon les résultats présentés, on optient alors le tableau suivant :

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

Résumé de l'algorithme en forme générale

▷ **Organiser** les équations sous forme standard dans un tableau.

▷ **Choisir** la variable d'entrée x_s avec le coefficient \bar{c}_s le plus négatif.

▷ **Déterminer** la variable de sortie x_r en calculant $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$ pour $\bar{a}_{is} > 0$. Si aucun \bar{a}_{is} n'est positif, **alors** aucune variable x_i ne limite l'augmentation de x_r et le système est **non borné**.

▷ **Effectuer** le pivot en divisant la ligne r par \bar{a}_{rs} . Ajuster le tableau en considérant que x_s prend la place de x_r sous la colonne t.d. . mettant à jour les autres lignes.

▷ **Mettre à jour** les autres lignes. Pour chaque ligne i , on a :

$$\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij} - a_{is} \times \bar{a}_{rj}$$

▷ **Mettre à jour** les **t.d.** . Pour chaque ligne i , on a :

$$\bar{b}_i = \bar{b}_i - a_{is} \times \bar{b}_r$$

▷ **Mettre à jour** l'objectif :

$$-\bar{z} = -\bar{z} - c_s \times \bar{b}_{rj}$$

▷ **Répéter** les étapes 2 à 7 jusqu'à ce que tous les $\bar{c}_j \geq 0$.

RAPPEL D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Définitions

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous avons les quantités suivantes :

$$\text{Produit scalaire : } x^T y = y^T x = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

$$\text{Vecteur : } \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{Tranposée : } [x_1, \dots, x_n]$$

Exemple de produit scalaire

$$\text{Prenons } n = 3, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ et } x^T = [1 \quad 2 \quad 3]$$

Calculons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} x^T y &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ &= (1)(4) + (2)(5) + (3)(6) \\ &= 4 + 10 + 18 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Ainsi, le produit scalaire de x et y est $\boxed{32}$.

Dépendance linéaire

Note:-

Un ensemble de vecteur $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ est dit **linéairement dépendant** s'il existe k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non nul tel que :

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dans le contexte d'une matrice, s'il existe une combinaison linéaire de ligne ou de colonne qui peuvent engendrer une autre ligne ou colonne, on dit que la matrice linéairement dépendantes.

Exemples de dépendance

Considérons la matrice suivante : Considérons la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Les lignes de cette matrice sont linéairement dépendantes. La première ligne est une combinaison linéaire de la 2^e ligne :

$$\text{Ligne 2} = \lambda \times \text{Ligne 1} = 2 \times \text{Ligne 1}$$

D'ailleurs, la 3^e ligne est une combinaison linéaire des deux premières lignes :

$$\text{Ligne 3} = \text{Ligne 1} + 1 \times \text{Ligne 2}$$

Cela signifie qu'il existe une relation linéaire entre les lignes, donc la matrice A est linéairement dépendante.

Exemples d'indépendance linéaire

Considérons la matrice suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les lignes de cette matrice sont linéairement indépendantes car aucune des lignes ne peut être obtenue comme une combinaison linéaire des autres lignes. Il s'agit d'une matrice identité, et donc elle est linéairement indépendante.

Matrice carrée

Soit une matrice A :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

alors, on dit que l'élément a_{ij} est à l'**intersection** de la ligne i et de la colonne j de la matrice. Une **matrice carrée** est une matrice $A_{m \times n}$ où $m = n$ et un vecteur de dimension n peut être vue comme une matrice de dimension $1 \times n$. La **matrice identité** I est une **matrice carrée** telle qu'on a :

$$\forall a_{ij} \in A_{m \times n} = I, [i = j] \implies a_{ij} = 1, \text{ et } [i \neq j] \implies a_{ij} = 0$$

Multiplication de Matrices

Formule Générale

Soient les matrices $A_{a \times n}$ et $B_{n \times b}$. Le produit matriciel $C = A \times B$ est une matrice de taille $a \times b$, où chaque élément c_{ij} est donné par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, a \text{ et } j = 1, \dots, b$$

Autrement dit, l'élément c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

Exemple Concret

Prenons A une matrice 2×3 et B une matrice 3×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Le produit $C = A \times B$ est une matrice de taille 2×2 :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Calculons chaque élément de C :

Calcul de c_{11} :

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} \\ &= (1)(7) + (2)(9) + (3)(11) \\ &= 7 + 18 + 33 \\ &= 58 \end{aligned}$$

Calcul de c_{12} :

$$\begin{aligned} c_{12} &= a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} \\ &= (1)(8) + (2)(10) + (3)(12) \\ &= 8 + 20 + 36 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Calcul de c_{21} :

$$\begin{aligned} c_{21} &= a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} \\ &= (4)(7) + (5)(9) + (6)(11) \\ &= 28 + 45 + 66 \\ &= 139 \end{aligned}$$

Calcul de c_{22} :

$$\begin{aligned} c_{22} &= a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} \\ &= (4)(8) + (5)(10) + (6)(12) \\ &= 32 + 50 + 72 \\ &= 154 \end{aligned}$$

Résultat Final : La matrice produit $C = A \times B$ est donc :

$$C = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la multiplication de A et B nous donne la matrice C ci-dessus.

Transposée d'une Matrice : Formule Générale et Exemple

Formule Générale

Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La **transposée** de A , notée A^T , est une matrice de taille $n \times m$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Autrement dit, l'élément $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$.

Exemple Concret

Prenons A une matrice 2×3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

La transposée de A est une matrice 3×2 obtenue en échangeant les lignes et les colonnes :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les éléments de A sont réorganisés pour former A^T :

- ▷ a_{11} devient $(A^T)_{11}$, a_{21} devient $(A^T)_{12}$
- ▷ a_{12} devient $(A^T)_{21}$, a_{22} devient $(A^T)_{22}$
- ▷ a_{13} devient $(A^T)_{31}$, a_{23} devient $(A^T)_{32}$

Vérification des éléments :

$$(A^T)_{11} = a_{11} = 1$$

$$(A^T)_{12} = a_{21} = 4$$

$$(A^T)_{21} = a_{12} = 2$$

$$(A^T)_{22} = a_{22} = 5$$

$$(A^T)_{31} = a_{13} = 3$$

$$(A^T)_{32} = a_{23} = 6$$

Ainsi, la transposée A^T est :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Conclusion : La transposition d'une matrice consiste à transformer ses lignes en colonnes (et vice versa), ce qui revient à refléter la matrice par rapport à sa diagonale principale.

Calcul du Déterminant d'une Matrice : Formule Générale et Exemple

Formule Générale

Le déterminant d'une matrice carrée $n \times n$ est défini de manière récursive en utilisant les mineurs et les cofacteurs. La formule générale pour le déterminant de la matrice A est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où :

- a_{ij} est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A . - A_{ij} est la matrice de dimension $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en retirant la ligne i et la colonne j de A . - Le signe $(-1)^{i+j}$ est le signe du cofacteur, positif si $i+j$ est pair, négatif si $i+j$ est impair.

Exemple Concret avec une Matrice 2×2

Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de A est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= (2) \times (4) - (3) \times (1) \\ &= 8 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant de A est $\boxed{5}$.

Remarque sur les Mineurs et les Cofacteurs

Pour une matrice 2×2 , le calcul du déterminant est direct. Pour des matrices de taille supérieure, on utilise les mineurs et les cofacteurs en appliquant le développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Exemple avec une Matrice 3×3

Soit la matrice B :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de B est :

$$\det(B) = b_{11} \det(B_{11}) - b_{12} \det(B_{12}) + b_{13} \det(B_{13})$$

où :

- B_{1j} est la matrice 2×2 obtenue en retirant la première ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B . - Par exemple, B_{11} est obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne de B .

Calcul détaillé :

Supposons que :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculons les mineurs :

$$- \det(B_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (4)(6) - (5)(0) = 24$$

$$\det(B_{12}) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (0)(6) - (5)(1) = -5$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (4)(1) = -4$$

Calcul du déterminant de B :

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \det(B_{11}) - b_{12} \det(B_{12}) + b_{13} \det(B_{13}) \\ &= (1)(24) - (2)(-5) + (3)(-4) \\ &= 24 + 10 - 12 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant de B est $\boxed{22}$.

Conclusion

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée implique l'utilisation des mineurs et des cofacteurs, en développant le déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. Pour une matrice $n \times n$, cette méthode est appliquée récursivement jusqu'à obtenir des déterminants de matrices 2×2 , qui sont calculés directement.

Rang et matrices non singulières

Le **rang** d'une matrice est le nombre maximum de lignes (ou colonnes) linéairement indépendantes.

Plein rang

Une matrice $A_{m \times n}$ est dite de **plein rang** si son rang est égal à $\min(m, n)$.

Exemple : Considérons la matrice **A** suivante de plein rang générale : (rang = 2) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a deux lignes linéairement indépendantes, donc elle est de plein rang.

Matrice non singulière

Une matrice carrée $\mathbf{A}_{n \times n}$ est dite **non singulière** si :

- ▷ ses lignes (ou colonnes) sont linéairement indépendantes,
- ▷ elle est de plein rang (rang = n),
- ▷ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$,
- ▷ elle possède une inverse \mathbf{A}^{-1} telle que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Exemple : Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est non singulière car son déterminant est non nul ($\det(\mathbf{B}) = 1$), ses lignes sont linéairement indépendantes, et elle possède une inverse.

8

ALGORITHME DU SIMPLEXE ANALYSE

Posons les quantités suivantes :

$$\mathbf{x}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des variables de décision}$$

$$\mathbf{c}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des coefficients de l'objectif}$$

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{la matrice des coefficients des contraintes}$$

$$\mathbf{b}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des termes de droite}$$

Noatation matricielle

Nous avons montré plus tôt que la forme standard peut être simplifiée par la notation suivant en utilisant le forme

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \text{ s.a. } \sum_{n=j}^n a_{ij} = b_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

Nous pouvons utiliser cette expression et les quantités matricielles que nous avons posé pour engendrer la notation matricielle de la forme standard :

$$\begin{aligned} \text{Min } z \\ \text{s.a.} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} - z &= 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Démonstration de la notation matricielle

Partons de la formulation classique du problème linéaire en forme standard :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, m$$

avec $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

En notation matricielle :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

1. Objectif :

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Le produit $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ est donc équivalent à la somme pondérée de x_j par c_j .

2. Contraintes :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

Ce produit est équivalent aux m contraintes :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

3. Conditions de non-négativité :

$$\mathbf{x} \geq 0$$

Cela signifie simplement que chaque composante $x_j \geq 0$, ce qui correspond directement aux conditions de non-négativité.

Conclusion

Nous avons montré que la notation matricielle pour l'algorithme du simplexe, $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ pour l'objectif et $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pour les contraintes, est équivalente à la formulation classique du problème. Chaque terme du produit matriciel correspond exactement aux termes de la formulation d'origine.

Notation matricielle dans le problème du restaurateur

Dans le problème du restaurateur, nous avons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & -8x - 6y \\ \text{s.a.} \quad & 5x + 3y + \mathbf{u} \leq 30 \\ & 2x + 3y + \mathbf{p} \leq 24 \\ & x + 3y + \mathbf{h} \leq 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x, y, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{h} & \geq 0 \\ z = 8x + 6y \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ p \\ h \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des variables de décision}$$

$$\mathbf{c}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des coefficients de l'objectif}$$

$$\mathbf{A}_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice des coefficients des contraintes}$$

$$\mathbf{b}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des termes de droite}$$

Puisque chacune colonne de la matrice \mathbf{A} est associée à une variable, les variables qui correspondent aux colonnes de \mathbf{B} sont appelées **variables de base**. Les autres variables sont les **variables hors-base**.

Exemple

dans le problème du restaurateur, on a la matrice $\mathbf{A}_{3 \times 5}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{u} & \mathbf{p} & \mathbf{h} \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour les exemples de bases possibles on a alors :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u} & \mathbf{p} & \mathbf{h} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{u} & \mathbf{h} \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{p} & \mathbf{y} \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array}$$

Dérivations matricielles

Ponson les quantités suivantes :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des variables}$$

$$\mathbf{x}_B^T = [x_1, x_2, \dots, x_m] \quad \text{le vecteur des variables de base}$$

$$\mathbf{x}_R^T = [x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n] \quad \text{le vecteur des variables hors-base}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_R \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des coûts}$$

$$\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \dots, c_m] \quad \text{le vecteur des coûts des variables de base}$$

$$\mathbf{c}_R^T = [c_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_n] \quad \text{le vecteur des coûts des variables hors-base}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} : \mathbf{R}] \quad \text{avec } \mathbf{B}_{m \times m} \text{ base (colonnes des variables de base)}$$

$$\mathbf{R}_{m \times (n-m)} \text{ reste de } \mathbf{A} \text{ (colonnes des variables hors-base)}$$

Base et variable de base

Soit une matrice de coefficients de contraintes $\mathbf{A}_{m \times n}$ où $m \leq n$ et $\mathbf{A}_{m \times n}$ est de plein rang m .

Alors, une sous-matrice $\mathbf{B}_{m \times m}$ est une **base** de \mathbf{A} si \mathbf{B} est **non singulière**.

Représentation tabulée de la notation matricielle

	\mathbf{x}_B^T				\mathbf{x}_R^T					
v.d.	x_1	x_2	\cdots	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	\cdots	x_n	$-z$	t.d.
	B				R					b
$-z$	c_1	c_2	\cdots	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	\cdots	c_n	1	0
	\mathbf{c}_B^T				\mathbf{c}_R^T					

Dérivation du vecteur multiplicateur du simplexe

Nous allons représenter le tableau du simplexe en utilisant les variables de base \mathbf{x}_B et les variables hors-base \mathbf{x}_R . À partir de la matrice $A = (B : R)$, on peut exprimer le système de contraintes sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z & \quad \text{Min } z \\
 \text{s.a.} & \quad \text{s.a.} \\
 [B : R] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} = \mathbf{b} & \quad \Leftrightarrow \quad B\mathbf{x}_B + R\mathbf{x}_R = \mathbf{b} \\
 [\mathbf{c}_B^T : \mathbf{c}_R^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix} - z = 0 & \quad \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}_R - z = 0 \\
 \mathbf{x}_B \geq 0, \mathbf{x}_R \geq 0 & \quad \mathbf{x}_B \geq 0, \mathbf{x}_R \geq 0
 \end{aligned}$$

où B est une sous-matrice non singulière correspondant aux variables de base.

Transformation par B^{-1}

Pour obtenir une matrice identité sous \mathbf{x}_B , on multiplie tout le système par l'inverse de la matrice B , ce qui donne :

$$B^{-1}(B\mathbf{x}_B + R\mathbf{x}_R) = B^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_B + B^{-1}R\mathbf{x}_R = B^{-1}\mathbf{b}$$

Ainsi, on peut exprimer \mathbf{x}_B comme suit :

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}R\mathbf{x}_R$$

En remplaçant cette expression dans la fonction objectif, on obtient la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_B^T (B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}R\mathbf{x}_R) + \mathbf{c}_R^T \mathbf{x}_R - z &= 0 \\
 \Rightarrow (\mathbf{c}_R^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1}R) \mathbf{x}_R - z &= -\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b}
 \end{aligned}$$

Le vecteur des multiplicateurs du simplexe π^T est défini par :

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$$

Finalement, la fonction objectif devient :

$$(\mathbf{c}_R^T - \pi^T R) \mathbf{x}_R - z = -\pi^T \mathbf{b}$$

Ainsi, π représente les multiplicateurs

Dérivation du vecteur multiplicateur du simplexe

Nous calculons le vecteur multiplicateur π associé à la base B comme suit :

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1}$$

Cela nous permet de calculer les coûts réduits pour les variables hors-base :

$$\tilde{c}_j = c_j - \pi^T a_j \quad \text{pour } j = m+1, \dots, n$$

où a_j est la j -ème colonne de la matrice A .

On peut calculer la valeur de l'objectif grâce à la formule :

$$-z = -\pi^T \mathbf{b}$$

Pour les nouveaux coût dans la ligne objectif, on a :

$$\bar{c}^T = \mathbf{c}^T - \pi^T A$$

Et pour les termes de droite on :

$$\bar{b} = B^{-1}\mathbf{b}$$

Résolution par la méthode tabulaire et matricielle

▷ **Choisir** la variable d'entrée et la variable de sortie comme on l'a vu précédemment. Pour la première itération, supposer que les variables d'équats sont les variable dépendantes. Effectuer le pivot : la variable d'entrée prend la place d'une des variables dépendantes qui est la variable de sortie. Après ce pivot, il est facile d'identifier la base $\mathbf{B}_{m \times m}$.

▷ **Calculer** les quantités B^{-1} et π^T . Calculer ensuite les quantités \bar{c}^T , \bar{b} , et $-\bar{z}$.

v.d.	x_1	x_2	\dots	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	\dots	x_n	$-z$	t.d.
x_B	$B^{-1}A$									$B^{-1}b$
$-z$	$c^T - \pi^T A$								1	$-\pi^T b$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{c_B^T} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{-\bar{z}}$

Exemple de restaurateur

après une itération, on calcule la quantité $B^{-1}A$:

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d.
x	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

$$B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

Considérons le problème du restaurateur. En notation matricielle, nous avons les quantités suivantes

$$x_B = \begin{bmatrix} x \\ p \\ y \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des variables de bases}$$

$$x_R = \begin{bmatrix} u \\ h \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des variables hors bases}$$

$$c_B = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des coûts basiques}$$

$$c_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{le vecteur des coûts non basiques}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice du tableau}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice des coefficients de base}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{la matrice des coefficients hors-base}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \quad \text{l'inverse de la matrice de base}$$

Nous connaissons déjà les coefficients sous x , p , y dans le résultat de $B^{-1}A$; ce sont des variables dépendantes dans le tableau après l'itération et auront donc un **1** sous la colonne appropriée de la matrice. Nous pouvons donc simplifier le calcul en évaluant d'abord $B^{-1}R$ et en se servant de l'information des variables dépendantes pour reconstruire la matrice $B^{-1}A$.

$$B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & h \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & h \\ 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \\ -1/12 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Cela revient à effectuer l'addition

$$B^{-1}A = B^{-1}R + \varepsilon$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

On peut calculer les termes de droite :

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On peut calculer le vecteur multiplicateur du simplexe :

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons calculer le vecteur c^T en combinant c_B^T et c_R^T :

$$c^T = [c_B^T \quad c_R^T] = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir la matrice des coefficients du tableau

On peut calculer les coût réduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T - \pi^T \mathbf{A} : \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x} & \textcolor{red}{y} & \textcolor{red}{u} & \textcolor{red}{p} & \textcolor{red}{h} \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous connaissons déjà les coefficient x, p, y dans le résultat $\mathbf{c}^T - \pi^T \mathbf{A}$. En effet chacune de ses variables aura un coefficient de 0 dans cette rangée, puisque ce sont les variables dépendantes. Nous pouvons donc simplifier le calcul en évaluant $\mathbf{c}_R^T - \pi^T \mathbf{R}$

\mathbf{R} est donné par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{u} & \textcolor{red}{h} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculons maintenant $\pi^T \mathbf{R}$:

$$\pi^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{u} & \textcolor{red}{h} \\ -3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Ainsi, le calcul de $\mathbf{c}_R^T - \pi^T \mathbf{R}$ est :

$$\mathbf{c}_R^T - \pi^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{u} & \textcolor{red}{h} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cela revient à l'addition

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T - \pi^T \mathbf{A} &= \mathbf{c}_R^T - \pi^T \mathbf{R} + \varepsilon \\ &= \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x} & \textcolor{red}{y} & \textcolor{red}{u} & \textcolor{red}{p} & \textcolor{red}{h} \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textcolor{red}{x} & \textcolor{red}{y} & \textcolor{red}{u} & \textcolor{red}{p} & \textcolor{red}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le calcul de $\pi^T \mathbf{b}$ donne :

$$\pi^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = -54$$

Multiplicateurs du simplexe

Soit x_{j_i} la variable dépendante dans la ligne i du **tableau** initial. Le coût relatif \bar{c}_{j_i} pour cette variable est donné par :

$$\bar{c}_{j_i} = c_j - \pi^T a_{.j_i} = 0 - \pi^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \pi_i, \forall i \in (1, \dots, m)$$

Les multiplicateurs π_i sont associés à chaque contrainte et permettent de calculer les coûts relatifs pour les variables de base.

Impact des multiplicateurs sur l'objectif

Le vecteur des multiplicateurs π mesure l'impact des modifications des termes de droite \mathbf{b} sur la valeur optimale de l'objectif. Si b_i est modifié de 1 unité, la valeur optimale de z change de π_i unités :

$$z = \pi^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^m \pi_i b_i$$

Les multiplicateurs π_i indiquent la sensibilité de la solution optimale à des modifications des termes de droite.

Dégénérescence

Une solution est dite **dégénérée** si au moins une variable de base a une valeur nulle. Lorsqu'il y a dégénérescence, il est possible d'effectuer un pivot sans changer la solution, ce qui entraîne un phénomène de "surplace".

Résumé de l'algorithme en notation matricielle

▷ **S'assurer** que le système est sous forme standard et **tabuler** le système. Le coeur du tableau contient la **matrice A**.

▷ **Obtenir** une base **B** en choisissant une variable d'entrée et une variable de sortie, puis en effectuant le pivot.

▷ **Calculer** la matrice \mathbf{B}^{-1} en utilisant l'algorithme de **Gauss-Jordan**.

▷ **Mettre à jour** le coeur du tableau en effectuant l'opération $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Pour simplifier ce calcul, il est possible d'effectuer d'abord $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}$ (pour les colonnes hors-base) et de reconstituer la matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ en tenant compte des variables de base. Chaque variable basique aura un 1 dans la colonne et la ligne correspondantes, et un 0 ailleurs.

▷ **Calculer** les termes de droite en effectuant l'opération

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

▷ **Calculer** le vecteur multiplicateur du simplexe en effectuant

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

▷ **Calculer** l'objectif en effectuant l'opération

$$\pi^T \mathbf{b}$$

▷ **Calculer** les coûts réduits dans le tableau final avec l'opération

$$\mathbf{c}^T - \pi^T \mathbf{A}$$

Une simplification est possible en effectuant d'abord $\mathbf{c}_R^T - \pi^T \mathbf{R}$, puis en reconstituant le tableau pour les variables de base. Chaque coefficient **non basique** c_j aura une valeur nulle dans le tableau final.

▷ **Identifier** les coûts relatifs pour une variable de base. Pour obtenir le coût réduit \bar{c}_{j_i} associé à la variable c_j dans la ligne i du tableau initial, utiliser la formule :

$$\bar{c}_{j_i} = c_j - \pi^T a_{.j_i}$$

ANALYSE POST-OPTIMALE

Modification des termes de droite

Soit une modification des termes de droite b , avec $b + \Delta b$. Nous avons :

$$\bar{b} = B^{-1}(b + \Delta b) = \bar{b} + B^{-1}\Delta b$$

La solution optimale est affectée par cette modification. La nouvelle solution optimale—le nouveau vecteur des variables de bases—est donnée par :

$$x_B = \bar{b} + B^{-1}\Delta b \geq 0, \quad x_R = 0$$

La valeur de l'objectif est perturbée comme suit :

$$\tilde{z} = \bar{z} + \pi^T \Delta b$$

Si la nouvelle solution $\tilde{b} \geq 0$, alors la base optimale reste la même. Sinon, il faut résoudre le problème modifié avec l'algorithme du simplexe.

Modification d'un coût dans l'objectif

Supposons que le coût dans la fonction objectif est modifié pour une variable x_j , avec $c_j + \Delta c_j$.

Si x_j est une variable hors-base, la modification se transmet directement dans le tableau optimal. Le coût réduit est donné par :

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{.j} + \Delta c_j = \bar{c}_j + \Delta c_j$$

Si $\bar{c}_j + \Delta c_j \geq 0$, la base optimale reste optimale. Sinon, il faut continuer avec l'algorithme du simplexe.

Modification d'une variable hors-base

Soit x_j une variable hors-base et soit $a_{.j}$ la colonne de x_j dans la matrice A , on a

$$\tilde{a}_j = a_{.j} + \Delta a_j \text{ où } \Delta a_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta a_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le coût réduit après modification est :

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_{.j} = \bar{c}_j - \pi_i^T \Delta a_{ij}$$

Si $\bar{c}_j \geq 0$, la base optimale demeure optimale. Sinon, il faut appliquer l'algorithme du simplexe.

Ajout d'une nouvelle action

L'ajout d'une nouvelle variable de décision r dans le problème correspond à l'ajout d'une nouvelle action. Cette nouvelle action peut être représentée par la nouvelle colonne de la matrice a_r et un coût c_r .

Dans le tableau optimal, la nouvelle colonne et le coût sont donnés par :

$$\tilde{a}_r = B^{-1}a_r, \quad \tilde{c}_r = c_r - \pi^T a_r$$

Si $\tilde{c}_r \geq 0$, alors la nouvelle action n'est pas profitable, et la solution optimale reste inchangée. Sinon, la nouvelle action est profitable et on continue avec l'algorithme du simplexe pour trouver la solution optimale.

PROGRAMMATION LINÉAIRE DE NOMBRE ENTIERS

La programmation linéaire avec des variables entières permet de modéliser des problèmes plus réalistes, notamment **lorsque des solutions fractionnaires ne sont pas pertinentes**.

Exemple : un restaurateur ne peut pas commander une fraction d'assiette.

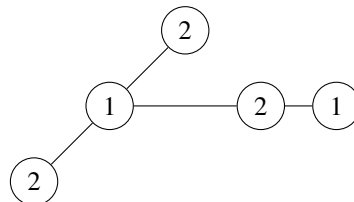
Modèles binaires

Les modèles avec variables binaires sont particulièrement utiles. Les variables $x_i \in \{0, 1\}$ représentent des décisions binaires :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'option } i \text{ est choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème de coloration de graphe

Soit un graphe non orienté $G = (V, E)$, où V représente les sommets et E les arêtes. Une coloration du graphe consiste à affecter une couleur différente à chaque sommet, de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.



Le nombre minimal de couleurs utilisées est noté m . La coloration minimale pour le graphe ci-haut est donc $m = 2$.

Pour modéliser ce problème, on utilise deux types de variables binaires :

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si la couleur } i \text{ est utilisée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } j \text{ est coloré avec } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'objectif est de minimiser $\sum_{i=1}^m c_i$, tout en respectant les contraintes suivantes :

$$x_{ij} + x_{ik} \leq 1 \quad \text{pour tout couple de sommets adjacents } (j, k)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \text{pour tout sommet } j$$

où $c_i \in \{0, 1\}$ et $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

Deux principes généraux en PLNE

Soit un problème P et sa relaxation continue \tilde{P} , où les contraintes d'intégralité sont relâchées. Nous avons alors :

$$F(P) \subseteq F(\tilde{P}) \quad \text{et} \quad v(\tilde{P}) \leq v(P)$$

Les principes suivants s'appliquent :

1. Si $F(P) \subseteq F(\tilde{P})$, alors la valeur optimale de \tilde{P} est toujours meilleure ou égale à celle de P .
2. Si x^* est une solution optimale entière de \tilde{P} , alors x^* est aussi solution optimale de P .

Exemple : Problème de relaxation continue

Considérons un problème P et sa relaxation continue \tilde{P} avec les contraintes suivantes :

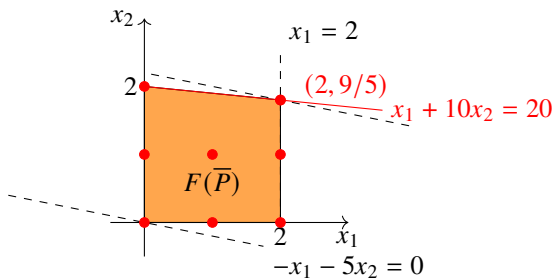
$$P : \text{ Minimiser } z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 + 10x_2 \leq 20, \quad x_1 \leq 2, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Dans la relaxation \tilde{P} , les variables x_1 et x_2 ne sont plus contraintes à être entières. La solution fractionnaire est donnée par :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 9/5$$

Cependant, la solution entière optimale est obtenue par des algorithmes de PLNE, car ni l'arrondi ni la troncature ne donnent des solutions optimales dans ce cas.



ALGORITHME BRANCH AND BOUND

Introduction

L'algorithme de **Branch-and-Bound** est utilisé pour résoudre des problèmes de **programmation linéaire en nombres entiers**. Il divise un problème en sous-problèmes tout en exploitant les solutions fractionnaires et entières.

Branchement

Si la solution optimale de la relaxation continue \bar{P} est fractionnaire, le problème est divisé en deux sous-problèmes P_1 et P_2 tels que :

$$F(P_1) \cap F(P_2) = \emptyset, \quad F(P_1) \cup F(P_2) = F(P)$$

Cela permet de réduire les domaines des sous-problèmes :

$$F(\bar{P}_1) \subset F(\bar{P}), \quad F(\bar{P}_2) \subset F(\bar{P})$$

Évaluation des sous-problèmes

L'algorithme explore les sous-problèmes en suivant un parcours en profondeur. La solution optimale entière trouvée est utilisée pour mettre à jour la borne supérieure \bar{z} .

La relaxation continue \bar{P} fournit une borne inférieure z . Si un sous-problème produit une meilleure solution entière, la borne supérieure est mise à jour.

Critère d'arrêt

Le processus de division s'arrête pour un sous-problème P_C si :

- Le domaine réalisable est vide.
- La solution optimale de P_C est entière.
- La solution optimale fractionnaire de P_C est telle que $v(P_C) \geq \bar{z}$.

Dans ces cas, diviser P_C ne permet pas de trouver une meilleure solution.

Branchement et Pseudo-Code

Si la solution optimale \bar{x} de P_C est fractionnaire, on choisit une variable x_j ayant une valeur fractionnaire w . Deux sous-problèmes sont alors créés :

$$P_{C_1} : x_j \leq \lfloor w \rfloor, \quad P_{C_2} : x_j \geq \lceil w \rceil$$

Algorithm 1: Branch-and-Bound

```
1 Étape 0 : Initialiser  $L \leftarrow \emptyset$ ,  $\bar{z} \leftarrow \infty$ ,  $x^* \leftarrow \emptyset$ ;  
2 Étape 1 : Résoudre  $\bar{P}$ , obtenir  $x^*$ ;  
3 if  $x^*$  est entier then  
4   | Aller à l'étape 3;  
5 end  
6 else  
7   | Diviser  $P$  en  $P_1$  et  $P_2$ , ajouter à  $L$ ;  
8 end  
9 Étape 2 : Pour chaque sous-problème dans  $L$ ,  
   résoudre  $P_C$ ;  
10 if  $F(P_C) = \emptyset$  ou  $v(P_C) \geq \bar{z}$  then  
11   | Continuer;  
12 end  
13 else if  $x^*$  est entier et  $v(P_C) < \bar{z}$  then  
14   | Mettre à jour  $\bar{z}$  et  $x^*$ ;  
15 end  
16 else  
17   | Diviser  $P_C$ ;  
18 end  
19 Étape 3 : Retourner  $x^*$ ;
```
