MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Ensemble de théorèmes, lemmes et définitions

Franz Girardin

12 septembre 2024

Table des matières

1

Suites numériques

Définition d'une suite

Fonction $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ qui accepte $n \in \mathbb{N}^*$ et engendre une **séquence ordonnée** de **réels** a_n. L'image de n est donnée par :

$$n \to a(n) = a_n$$

Notations équivalentes :

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \leftrightarrow \{a_n\} \leftrightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

On dit que $a_n ou \{a_n\}$ est le **terme général** ; c'est la règle qui définit la suite ; *laformule* qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite en fonction de n.

Suite par récurrence

Est dite **récurrente** toute suite a_n dont la règle fait appel à des termes antérieurs, après avoir établit certains termes de départ. L'**ordre de récurrence** dépend du nombre de termes auquel la formule du terme général fait appel.

Définition d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = y & \textbf{1}^{\textbf{er}}\ \textbf{Terme} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$r = a_n - a_{n-1} \quad \forall n \geqslant 2$ **Raison**

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad \forall n \geqslant 1$ n^{e} terme

Définition d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = y & \textbf{1}^{\textbf{er}}\ \textbf{Terme} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \ \forall\ n \geqslant 2$ **Raison**

$a_n = a_1 r^{n-1} \ \forall\ n \geqslant 1$ n^{e} terme

Convergence d'une suite géométrique

$$\Big(-1 < r \leqslant 1\Big) \implies \{r^n\}\ \textbf{conv}.\ \forall r \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \{r^n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Convergence d'une série géométrique

- $\Big(|r| < 1\Big) \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$ (**conv.**)
- $\Big(|r| \geqslant 1, a \neq 0\Big) \implies \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \infty$ (**div.**)

Theorem 1.1 Somme géométrique

Considérons la suite géométrique $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de raison $r \neq 1$. Alors on a la formule pour la somme des $(n+1)$ **1^er termes** :

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$= a_0 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Monotonicité

Soit une suite a_n, on dit que la suite est :

- **Strictement croissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} \geqslant a_n$
- **Strictement décroissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** **si**

Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

$\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$

- **Monotone** **si** elle est croissante, décroissante ou constante.

Définitions de bornes d'une suite

- **Minorant** : $\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \geqslant m$
- **Majorant** : $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \{a_n\}, a_n \leqslant M$
- **Bornée** : $\exists M \wedge m$

Theorem 1.2 Thm des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est nécessairement **convergente**.

Définition 1 Dfn. formelle de convergence d'une suite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ssi, $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$:
$n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon$

Vulgarisation
Soit un nombre positif $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on souhaite. Il est toujours possible de trouver un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tous les termes de la suite dont l'indice n est supérieur à N, c'est-à-dire $n > N(\varepsilon)$, l'image a_n sera suffisamment proche de L. Autrement dit, la distance entre a_n et L sera inférieure à ε et donc négligeable, ce qui signifie que la suite se rapproche indéfiniment de la limite L au fur et à mesure que n augmente.

Définition 2 Définition formelle de la divergence d'une suite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

ssi, $\forall M > 0, \exists N(M) > 0$:

$$n > N(M) \implies a_n > M$$

Vulgarisation
Soit un nombre positif aussi grand que l'on souhaite, $M > 0$. Il est toujours possible de trouver un entier $N(M)$ tel que, pour tous les termes de la suite dont l'indice n est supérieur à N, c'est-à-dire $n > N(M)$, l'image a_n sera plus grande que M. Autrement dit, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement grands, sans jamais revenir vers des valeurs plus petites.

Propriétés limites d'une suite

- **Unicité.** La limite d'une suite convergente est *unique*.
- Toute suite convergente est **bornée** ; toute suite non bornée est **divergente**.
- Toute suite croissante et majorée est convergente. **Exemple** : $a_n = 1 - 1/n$.
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$
- Toute suite décroissante et minorée est convergente. **Exemple** : $b_n = 1/n$.
  $$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$
- Toute suite monotone et bornée est convergente.

Corollaire

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$, **alors**,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Attention

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \not\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

Association d'une fonction à une suite

Soit $f(x)$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$, Alors, la suite $\{a_n\} = f(n)$ admet *la même limite* :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \implies \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Par ailleurs, si $f(x)$ est une fonction continue en L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L, alors la limite suivante converge vers $f(L)$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(L)$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)$$

Exemple : $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi/2) = \sin(\lim_{n\to+\infty})\pi/2 = 0$

Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}, \{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

2

Séries numériques

Définition d'une série

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est une série numérique de **somme** s. Lorsqu'on additionne une quantité *finie* de termes d'une série, on obtient une **somme partielle** :

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Theorem 2.1 Propriétés des séries convergentes

On ne change pas la nature d'une série en lui enlevant ou en lui ajoutant un nombre **fini** des termes.

Soit $k \geqslant 0 \in \mathbb{N}$, les sommes suivantes ont le même comportement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \ (\textbf{conv.}) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} \ \textbf{conv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \ (\textbf{div.}) \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} \ \textbf{div.}$$

Addition et multiplication par un scal.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (converge) et λ est un scalaire, alors la série de terme général $\sum_n^{\infty} \lambda a_n$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda s$$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (converge) et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ (converge), alors la série de terme général $a_n + b_n$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s + t$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq (\sum_{n=1}^{\infty} a_n)(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

Theorem 2.2 Conv. du terme général

Le terme général d'une série convergente **tend vers 0** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \ (\textbf{conv.}) \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

▶ **Implique** qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer la si lorsqu'on sait que a_n **div**.

Corollaire 2.1 Div. du terme général

Une suite qui ne converge par à zéro engendre une série qui **diverge**.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \ (\textbf{div.})$$

Note:-

La **réciproque** est fausse. Par exemple la série **harmonique** de terme général a_n :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Mais on a également :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty(\textbf{div.})$$

Theorem 2.3 Thm. du reste

Soient la série de terme général a_n, la quantité s_n et le rest R_n, :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$$

On a l'implication suivante :

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \ (\textbf{conv.})$$
$$\implies R_n = s - s_n$$

Cela signifie que, pour des valeurs suffisamment grandes de n, le reste R_n devient arbitrairement petit et la somme totale s est bien approchée par la somme partielle s_n.

3

Série à termes positifs

Définition d'une série à termes positifs

$\forall n \geqslant 1 a_n \geqslant 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ à termes positifs.

Theorem 3.1 Conv. série à termes positifs

Un conditions nécessaire et suffisante pour que la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge est que la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ soit majorée.

Sommes partielles : La suite des sommes partielles s_n est la somme des premiers termes de la série, jusqu'au n-ième terme. Si cette somme partielle devient **majorée**, cela signifie qu'il existe une limite supérieure que les sommes ne pourront jamais dépasser, peu importe la valeur de n. En d'autres termes, les termes de la série s'accumulent, mais ils le font de manière contrôlée.

Séries à termes positifs : Puisque les a_n sont positifs, chaque nouveau terme a_n ajouté à la somme partielle rend la somme s_n de plus en plus grande. Si cette accumulation ne finit jamais par dépasser un certain seuil (c'est-à-dire, si elle est majorée), cela signifie que les termes a_n doivent devenir de plus en plus petits et que leur contribution totale ne fait qu'approcher un certain nombre, sans jamais devenir infinie. C'est le signe que la série **converge**.

Test de comparaison

Soient $\sum a_n, \sum b_n$ des séries à **termes positifs** et $n_0 \in \mathbb{R}$:

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **conv.**, $a_n \leqslant b_n\ \forall n \geqslant n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **div.**, $a_n \geqslant b_n \forall n \geqslant n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**

Theorem 3.2 Forme limite du test de comparaison

En évaluant le rapport entre deux suites, ont peut déterminer si leur série correspondente convergent ou divergent tout deux.

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=L\neq 0\right)\implies \sum_{n=1}^{\infty}a_n \textbf{ conv.} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n \textbf{ conv.}$$

Theorem 3.3 Critère de Riemann

oit $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ une série à termes positifs. Supposons qu'il existe un réel $p>0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}n^p a_n=l.$$

Dans ce cas :

— Si $p>1$ et l est fini, alors $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge.

— Si $p\leqslant 1$ et $l\neq 0$ (ou si $l=+\infty$), alors $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge.

Exemple Prenons $a_n=\dfrac{n-1}{n^4+1}$. On a

$$n^{3/2}a_n=n^{3/2}\cdot\frac{n-1}{n^4+1}$$

et

$$n^{3/2}a_n=\sqrt{n^3}\cdot\frac{n-1}{n^4+1}=n^3\cdot\frac{n-1}{n^4+1}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+10/n^4}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}n^{3/2}a_n=l=1.$$

On en conclut que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{n^4+1}$ est convergente.

Série de Riemann et série puissance

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\text{ converge si } p>1\text{, diverge si } p\leqslant 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\text{ converge si } p>1$$

La première est un **série de Riemann** ; la seconde est une **série puissance**.

Theorem 3.4 Test de l'intégrale

Soit $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ **continue**, **positive** et **décroissante** et $a_n:f(n)=a_n$, la somme suivante converge ou diverge avec son intégrale correspondante.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \textbf{conv.}$$

$$\updownarrow$$

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{x=1}^{x=a}f(x)dx=s\quad(\textbf{conv.})$$

► Utile lorsqu'on connait **une intégrale convergente** qui est analogue à la somme qu'on veut calculer.

Approximation de la somme

Si f : **positive**, **continue** et **décroissante** après sur son domaine et soit $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=f(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s\in\mathbb{R}$, $R_n=s-s_n$, **alors** le reste R_n est borné et peut être estimé :

$$\int_{n+1}^{\infty}f(x)dx\leqslant R_n=\sum_{k=1}^{m}a_k\leqslant\int_{n}^{\infty}f(x)dx$$

$$s_n+\int_{n+1}^{\infty}f(x)dx\leqslant s\leqslant\int_{n}^{\infty}f(x)dx+s_n$$

Si f : **positive**, **continue**, **décroissante** après un certain range $N\geqslant 0$: $[N,+\infty]$, l'inégalité tient et on a

$$\sum_{n=N}^{\infty}a_n=s(\textbf{conv.})\leftrightarrow\int_{n+1}^{\infty}f(x)dx\ \textbf{conv.}$$

4

Séries alternées

Définition d'une série alternée

$$s=a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

$$s=-a_1+a_2+\cdots+(-1)^n a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Test sur séries alternées

Soit un **rang** $n_0\in\mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ telle que

▷ $0\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$ ($\downarrow$ **et** $+$)

▷ $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

Alors,

► $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ **conv.** vers $s\in\mathbb{R}$ $\forall m\geqslant n_0$

► $0\leqslant s\leqslant a_1$

► $R_n=|s-s_m|\leqslant b_{m+1}$

5

Convergence absolue

Définition de convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\textbf{conv.}\implies\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \textbf{conv. absolument}$$

▷ **Semi-conv.** : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **conv.** **et** $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ **div.**

► **Exemple** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ conv **mais** $\neg(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n})$ conv.

Theorem 5.1 Critère suffisant

Si une série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge *absolument*, **alors** elle converge simplement.

Test du rapport (d'Alembert)

Soit $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L$ **alors** si :

▷ $L=1\implies$ *inconclusif*

► $L>1\implies\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **div.**

► $L<1\implies\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **conv.**

Test de Cauchy

Soit $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ **alors** si :

▷ $L=1\implies$ *inconclusif*

► $L>1\implies\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **div.**

► $L<1\implies\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **conv.**

Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, **alors**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}ca_n=c\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}\text{ si }\lim_{x\to\infty}b_n\neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n^p=\left[\lim_{n\to\infty}a_n\right]^p\text{ si } p>0\text{ et } a_n>0$$

Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynomes, $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$, et $k=\min\big(deg(p),deg(q)\big)$ **Alors,**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Règle de l'Hôpital

Soit une **constante** $c\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et supposon que :

— $\lim_{x\to c}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

— $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{|g'(x)|}$ **existe** et $g'(x)\neq 0\ \ \forall x\approx c$

Alors,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Comparaison des suites

Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^K \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$c_n \ll d_n \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{d_n} = 0$$