IFT1575
Modèles de recherche opérationnelle

Introduction

Franz Girardin

11 septembre 2024

Table des matières

1

Modélisation

Définition de la prog. linéaire

Branche de la *Recherche Opérationnelle* où on utilise des **modèles** mathématiques qui font appel à des fonction **linéaire** pour résoudre un problème.

$$\texttt{prod. } \text{vin blanc} \implies x \text{ (litres)}$$
$$\texttt{prod. } \text{vin rouge} \implies y \text{ (litres)}$$

Composantes du modèle

Il faut identifier **l'action** sur laquelle on doit prendre une décision et la représenter par un **variable de décision**. À cette variable sera associée un constante qui représente le **niveau** de l'action.

L'objectif

S'exprime sous le forme d'une **fonction mathématique** qui représente l'intention. P. ex. **maximiser le profit** correspondrait à :

$$\text{Max } 5x + 3y$$

Contraintes

Elles peuvent dépendre du *contexte du problèmes* ou peuvent être plus générales ; p. ex. la **non-négativité** d'une entité :

$x \leqslant 50$	`prod.`max vin blanc
$y \leqslant 60$	
$x + y \leqslant 80$	`prod.`max totale de vin
$x \geqslant 0, y \geqslant 0$	Non-nég.

Terminologie de base

Une **solution réalisable** est un **vecteur** de valeurs $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartenant à $X \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque composante $x_1, x_2, \dots, x_n$ respecte *toutes les contraintes* du problème. Dans ce contexte, X est l'ensemble des solutions possibles, c'est-à-dire l'ensemble des points qui satisfont toutes des contraintes imposées au problème. Chaque point dans X est un vecteur de longueur n Cet ensemble X est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^n$ qui comprends tous les vecteurs possibles où $n \in [1, n \longrightarrow \infty[$.

Une solution **optimale** est une solution réalisable qui maximise (ou minimise) la fonction objectif $z(x)$, en fonction de la nature du problème (maximisation ou minimisation). Autrement dit, c'est une solution réalisable qui produit la *meilleure valeur possible* pour la fonction objectif z.

2

Maximisation et minimisation

Note:-

Un modèle peut présenter une **infinité** de solution optimales.

Theorem 2.1

La maximisation d'un objectif $f(w)$ est équivalent à l'**opposé** de la minimisation :

$$\text{Max } f(w) \leftrightarrow \text{Min } -f(w)$$

Preuve 2.1

Considérons le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(w) \\ &\text{s.a } \; w \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Soit w_{opt} un point de X où $f(w)$ atteint son **maximum**. On a :

$$\begin{gathered} f\left(w_{\text{opt}}\right) \geqslant f(w) \quad \forall w \in X \\ \updownarrow \\ -f\left(w_{\text{opt}}\right) \leqslant -f(w) \quad \forall w \in X \end{gathered}$$

Par conséquent, $-f(w_{\text{opt}})$ est la valeur minimale possible parmi tous les $-f(w)$ possibles :

$$-\text{Max} f(w) = -f\left(w_{\text{opt}}\right) = \text{Min } -f(w)$$

Ainsi, qu'on maximise $f(w)$ ou qu'on minimise $-f(w)$, on retrouve la même solution optimale w_{opt}.

Explication

Soit la fonction objectif $f : X \to \mathbb{R}$ Dans cette situation, le vecteur w joue deux rôles distincts : il est à la fois l'argument de la fonction objectif $f(w)$ et un élément soumis aux contraintes. Ces deux aspects sont essentiels dans un problème de maximisation en programmation linéaire ou non linéaire.

1. Vecteur dans la fonction objectif : La fonction objectif $f(w)$ est la fonction que l'on cherche à maximiser. Elle prend un vecteur w comme entrée, qui est un point dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur w représente une solution candidate du problème, et $f(w)$ retourne un nombre réel, par exemple un profit ou une performance, que l'on souhaite maximiser.

2. Vecteur dans les contraintes : Le vecteur w doit aussi satisfaire un ensemble de contraintes qui définissent l'ensemble des solutions réalisables, noté $X \subset \mathbb{R}^n$. Ces contraintes peuvent être des inégalités ou des égalités (par exemple, $g(w) \leqslant 0$, $h(w) = 0$), et elles définissent l'ensemble des vecteurs w admissibles.

Synthèse des deux rôles :

- **Maximisation :** On cherche à maximiser la fonction $f(w)$, c'est-à-dire à trouver la meilleure valeur possible de $f(w)$.
- **Contraintes :** Le vecteur w doit se situer dans un ensemble admissible X, défini par les contraintes du problème.

En résumé, w doit satisfaire les contraintes (ce qui garantit qu'il est une solution réalisable), tout en maximisant la valeur de $f(w)$. Le problème consiste à trouver le w optimal qui satisfait ces deux aspects à la fois.

Soit le problème suivant. Un restaurateur dispose de **14** oursins, **24** crevettes, **18** huîtres. Deux types d'assiètes de fruit de mer sont offertes par le restaurateur :

8$: 5 oursins, 2 crevettes 1 huître

6$: 3 oursins, 3 crevettes 3 huîtres

L'objectif est de déterminer le **nombres d'assiètes** de chaque type à préparer afin de *maximiser* le revenu total du restaurateur tout en respectant les disponibilité de fruits de mer.

Contraintes

$5x + 3y \leqslant 30$	Oursins
$2x + 3y \leqslant 24$	crevettes
$x + 3y \leqslant 18$	Huîtres
$x, y \geqslant 0$	Non-négativité
$z = 8x + 6x$	Objectif

En considérant que la maximisation d'un objectif est équivalente à la minimisation de l'opposé de la minimisation on a :

$$\begin{aligned} \text{Min } \quad -8x - 6y \\ \text{s.a.} \\ 5x + 3y \leqslant 30 \\ 2x + 3y \leqslant 24 \\ x + 3y \leqslant 18 \\ x, y \geqslant 0 \\ z = 8x + 6x \end{aligned}$$

Forme standard

$$
\begin{aligned}
\text{Min} z &= -8 - 6y \\
&\text{s.a.} \\
&5x + 3y + u \qquad\qquad = 30 \\
&2x + 3y \quad + p \qquad = 24 \\
&x + 3y \qquad\quad + h = 18 \\
&x, y, u, p, h \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Choisir les variables indépendantes

Supposons que x et y sont des ***variables indépendantes***. Exprimons les ***variable dépendantes*** u, p, h, z en fonction de x et y

$$
\begin{aligned}
u \qquad\qquad &= 30 - 5x - 3y \\
p \qquad &= 24 - 2x - 3y \\
h &= 18 - x - 3y
\end{aligned}
$$

. . . .

$$z = 0 - 8x - 6y$$

En supposant que x et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$x = y = 0 \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0$$