MATH-1400

Calcul Mutivariables

Franz Girardin

2024

Table des matières

1

Suites numériques

Définition d'une suite

Fonction $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ qui accepte des valeurs entières $n \in \mathbb{N}^*$ et engendre une **séquence ordonnée** de **réels** a_n. L'image de n est donnée par :

$$n \to a(n) = a_n$$

Notations équivalentes :

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \Leftrightarrow \{a_n\} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

On dit que a_n ou $\{a_n\}$ est le **terme général** ; c'est la règle qui définit la suite ; *la formule* qui permet de calculer n'importe quel terme de la suite en fonction de n.

Suite par récurrence

Est dite **récurrente** toute suite a_n dont la règle fait appel à des termes antérieurs, après avoir établit certains termes de départ. L'**ordre de récurrence** dépend du nombre de termes auquel la formule du terme général fait appel.

Définition d'une suite arithmétique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = a_1 & \textbf{1}^{\textbf{er}}\textbf{ Terme} \\ a_n = a_{n-1} + r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$$r = a_n - a_{n-1} \quad \forall n \geqslant 2 \qquad \textbf{Raison}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \quad \forall n \geqslant 1 \qquad n^{\text{e}} \text{ terme}$$

Somme n termes d'une arithmétique

Nous pouvons **montrer** que la somme des n premiers termes d'une suites arithmétique $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est donnée par :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Définition d'une suite géométrique

$$a_n ::= \begin{cases} a_1 = a_1 & \textbf{1}^{\textbf{er}}\textbf{ Terme} \\ a_n = a_{n-1} \cdot r & \text{Récurrence} \end{cases}$$

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} \ \forall\, n \geqslant 2 \qquad \textbf{Raison}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \ \forall\, n \geqslant 1 \qquad n^{\text{e}} \text{ terme}$$

Somme n termes d'une géométrique

Nous pouvons **montrer** que la somme des n premiers termes d'une suites arithmétique $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est donnée par :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad \boldsymbol{r \neq 1}}$$

Convergence d'une suite géométrique

$$\lim_{n \to +\infty} a_1 r^n \begin{cases} \textbf{conv.} & \text{si } -1 < r \leqslant 1 \\ \textbf{div.} & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_1 r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}}$$

Convergence d'une série géométrique

Nous pouvons **montrer** qu'une série géométrique converge vers la valeur suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^n \begin{cases} \textbf{conv.} & \text{si } |r| < 1 \\ \textbf{div.} & \text{si } |r| \geqslant 1 \end{cases}$$

Si la série converge, on a :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^n = \frac{a_1}{1 - r}, \quad \forall r : |r| < 1}$$

Monotonicité

Soit une suite a_n, on dit que la suite est :

- **Strictement croissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} > a_n$
- **Croissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} \geqslant a_n$
- **Strictement décroissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} < a_n$
- **Décroissante** **si** $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} \leqslant a_n$
- **Stationnaire** ou **constante** **si** elle est telle que $a_{n+1} = a_n = a_{n-1}$

Propriétés limites d'une suite

- **Unicité.** La limite d'une suite convergente est *unique*. Ainsi, les limite à gauche et celle à droite sont les mêmes.
- Toute suite convergente est **bornée** ; toute suite non bornée est **divergente**.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
  Exemple : $a_n = 1 - 1/n$.
  $$\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$$
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
  Exemple : $b_n = 1/n$.
  $$\lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$
- Toute suite monotone et bornée est convergente.

Définitions de bornes d'une suite

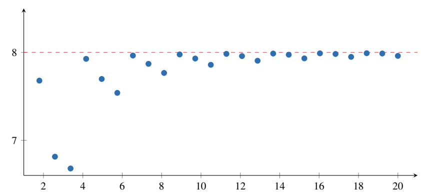
Une suite est **minoriée** ou **majorée** selon les conditions suivantes :

$$a_n \begin{cases} \textbf{Majorée} & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant M \\ \textbf{Minorée} & \text{si } \forall n \in \mathbb{N} a_n \geqslant m \end{cases}$$

On dit qu'elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème des suites monotones

Toute suite monotone et bornée est nécessairement **convergente**.



Définition formelle de convergence

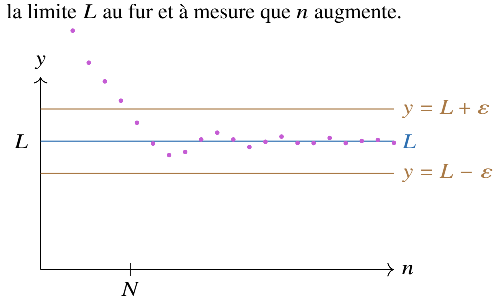
$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

signifie qu'une suite est **convergente** et tend vers la limite L **si et seulement si** :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon}$$

Vulgarisation

Soit un nombre positif $\varepsilon > 0$ **aussi petit que l'on souhaite**. Il est toujours possible de trouver un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tous les termes de la suite dont l'indice n est supérieur à N, c'est-à-dire $n > N(\varepsilon)$, l'image a_n sera suffisamment proche de L. Autrement dit, la distance entre a_n et L sera inférieure à ε et donc négligeable, ce qui signifie que la suite se rapproche indéfiniment de la limite L au fur et à mesure que n augmente.



Définition formelle de la divergence

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$$

signifie qu'une suite est **divergente** ne tend vers **aucune valeur particulière** lorsque :

$$\boxed{\forall M > 0, \exists N(M) > 0 : n > N(M) \implies a_n > M}$$

Vulgarisation

Soit un nombre positif **aussi grand que l'on souhaite**, $M > 0$. Il est toujours possible de trouver un entier $N(M)$ tel que, pour tous les termes de la suite dont l'indice n est supérieur à N, c'est-à-dire $n > N(M)$, l'image a_n sera plus grande que M. Autrement dit, à partir d'un certain rang, les termes de la suite deviennent arbitrairement grands, sans jamais revenir vers des valeurs plus petites.

Corollaire de divergence

Si une série diverge, **alors** son inverse $1/a_n$ **converge à zéro** :

$$\left[\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty\right] \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

Attention

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0\right] \not\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

Mais lorsqu'une série $1/a_n$ converge à zéro cela **n'implique pas nécessairement** que son inverse a_n diverge à l'infini.

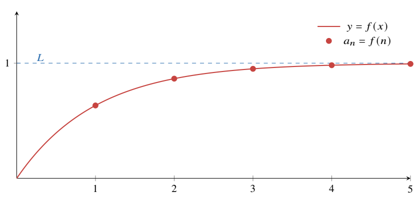
Association d'une fonction à une suite

Soit $f : x \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une limite L à $+\infty$, Alors, la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = f(n)$ admet **la même limite** :

$$\left[f(n) = a_n,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = L\right] \implies \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

De la même façon :

$$\left[f(n) = a_n,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\right] \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$



Par ailleurs, si $f(x)$ est **une fonction continue en** L et si la suite $\{a_n\}$ converge vers L, alors la limite suivante **converge** vers $f(L)$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L)}$$

Exemple

Soit la fonction $f(x) = \sin(x)$, qui est continue sur $\mathbb{R}$. Considérons la suite $\{a_n\}$ définie par :

$$a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$$

Cette suite converge vers $L = \frac{\pi}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.

Selon le théorème de continuité des fonctions en limite de suite, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi, nous avons :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = 1$$

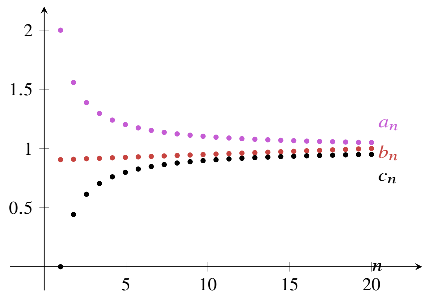
Théorème des gendarmes

Soient $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
- $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L$$



2

Séries numériques

Définition d'une série numérique

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

est une série numérique de **somme** s. Lorsqu'on additionne une quantité *finie* de termes d'une série, on obtient une **somme partielle** :

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Propriétés des séries convergentes

On ne change pas **la nature** d'une série en lui enlevant ou en lui ajoutant un nombre **fini** de termes.

Soit $k \geqslant 0 \in \mathbb{N}$, les sommes suivantes ont le même comportement ; l'une converge **uniquement si l'autre converge également** :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L\ (\textbf{conv.}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}\ \textbf{conv.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty\ (\textbf{div.}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}\ \textbf{div.}$$

Addition et multiplication scalaire

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (**conv.**) et λ est un scalaire, alors la série de terme général $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge et a pour somme :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda s}$$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ (**conv.**) et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ (**conv.**), alors la série de terme général $a_n + b_n$ converge et a pour somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s + t$$

Attention

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$

Théorème de convergence du terme général

Le terme général d'une série convergente **tend vers 0** :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s\ (\textbf{conv.}) \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

► **Implique** qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer la série si on sait que a_n **div.**

Corollaire de divergence du terme général

Une suite qui ne converge pas à zéro engendre une série qui **diverge**.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\ (\textbf{div.})}$$

Note:-

La **réciproque** est fausse. Par exemple la série **harmonique** de terme général a_n :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Mais on a également :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty(\textbf{div.})$$

Théorème du reste

Soient la série de terme général a_n, la quantité s_n et le rest R_n, :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\quad \sum_{k=1}^{n} a_k = s_n,\quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$$

On a l'implication suivante :

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s\ (\textbf{conv.})$$
$$\implies R_n = s - s_n$$

Cela signifie que, pour des valeurs suffisamment grandes de n, le reste R_n devient arbitrairement petit et la somme totale s est bien approchée par la somme partielle s_n.

3

Série à termes positifs

Définition d'une série à termes positifs

Il s'agit d'une série dont tous les termes a_n sont **positifs** :

$$[\forall n \geqslant 1 : a_n \geqslant 0] \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ à termes positifs.}$$

Théorème de convergence des séries à termes positifs

Une condition **nécessaire et suffisante** pour que la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge est que la suite des sommes partielles $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ soit majorée.

Sommes partielles : La suite des sommes partielles s_n est la somme des premiers termes de la série, jusqu'au n-ième terme. Si cette somme partielle devient **majorée**, cela signifie qu'*il existe une limite supérieure que les sommes ne pourront jamais dépasser*, peu importe la valeur de n. En d'autres termes, les termes de la série s'accumulent, mais ils le font de manière contrôlée.

Séries à termes positifs : Puisque les a_n sont positifs, chaque nouveau terme a_n ajouté à la somme partielle rend la somme s_n de plus en plus grande. Si cette accumulation ne finit jamais par dépasser un certain seuil (c'est-à-dire, si elle est majorée), cela signifie que les termes a_n doivent devenir de plus en plus petits et que leur contribution totale ne fait qu'approcher un certain nombre, sans jamais devenir infinie. C'est le signe que la série **converge**.

Test de comparaison

Soient $\sum a_n, \sum b_n$ des séries à **termes positifs** et $n_0 \in \mathbb{R}$, une série **plus petite** qu'une série convergente converge nécessairement ; et une série **plus grande** qu'une série divergente diverge nécessairement :

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **conv.**, $a_n \leqslant b_n \forall n \geqslant n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **div.**, $a_n \geqslant b_n \forall n \geqslant n_0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**

Forme limite du test de comparaison

En évaluant le rapport entre deux suites de termes positifs, on peut déterminer si leurs séries correspondantes convergent ou divergent toutes deux.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels positifs, avec $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour tout n suffisamment grand. **Si** :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \quad \text{avec} \quad 0 < L < \infty,$$

alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ conv.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textbf{ conv.}$$

Critère de Riemann

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une **série à termes positifs**. Supposons qu'il existe un réel $p > 0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l.$$

Dans ce cas :
▷ Si $p > 1$ et l est fini, **alors** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv**
▷ Si $p \leqslant 1$ et $l \neq 0$ (ou $l = +\infty$), **alors** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**

Exemple :

Analysons $a_n = \dfrac{n-1}{n^4+1}$.

Tout d'abord, nous cherchons $p > 0$ tel que la limite $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ existe et est finie.

Approximons a_n pour n grand :

$$a_n = \frac{n-1}{n^4+1} \approx \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}.$$

Ainsi, pour n grand :

$$n^p a_n \approx n^p \cdot \frac{1}{n^3} = n^{p-3}.$$

Pour que la limite soit finie et non nulle, il faut que $p - 3 = 0$, donc $p = 3$.

Calculons la limite avec $p = 3$:

$$\lim_{n\to\infty} n^3 a_n = \lim_{n\to\infty} n^3 \cdot \frac{n-1}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n-1)}{n^4+1}.$$

Simplifions le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{n^3(n-1)}{n^4+1} = \frac{n^4-n^3}{n^4+1}.$$

Divisons le numérateur et le dénominateur par n^4 :

$$\frac{n^4-n^3}{n^4+1} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^4}}.$$

Lorsque $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n^4} \to 0$, donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^4}} = 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to\infty} n^3 a_n = 1.$$

Puisque $p = 3 > 1$ et $l = 1$ est fini, le critère de Riemann nous indique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^4+1}$ converge d'après le critère de Riemann.

Astuce pour le critère de Riemann

Soit k et l, les valeurs de l'exposant de plus petit degré et du plus grand degré du polynôme, il suffit de choisir p tel que $p + k = l$. Dans l'**exemple** précédent, nous avions $k = 1, l = 4$ et $p = l - k = 3$ et $n^p = n^3$.

Série de Riemann et série puissance

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge si} & p > 1 \\ \text{diverge si} & p \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \begin{cases} \text{converge si} & p < 1 \\ \text{diverge si} & p \geqslant 1 \end{cases}$$

La première est un **série de Riemann** ; la seconde est une **série puissance**.

Test de l'intégrale

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ **continue**, **positive** et **décroissante** et $a_n : f(n) = a_n$, la somme suivante converge ou diverge avec son intégrale correspondante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ conv.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{x=1}^{x=a} f(x)dx = S \ \ (\textbf{conv.})$$

► Utile lorsqu'on connait **une intégrale convergente** qui est analogue à la somme qu'on veut calculer.

Approximation de la somme

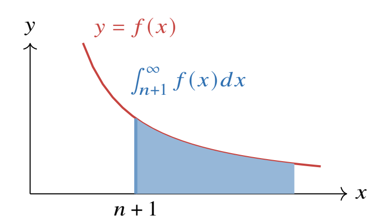
Si f : **positive**, **continue** et **décroissante** sur son domaine, soit un seuil $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $a_n = f(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$, $R_n = s - s_n$, **alors** le reste R_n est borné et peut être estimé :

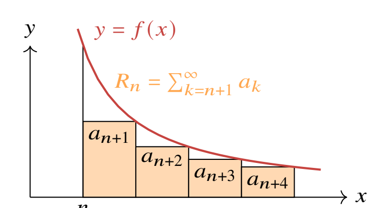
$$\boxed{\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)dx}$$

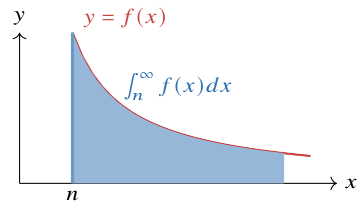
$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant s \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)dx + s_n$$

Si f : **positive**, **continue**, **décroissante** après un certain range $N \geqslant 0$: $[N, +\infty]$, l'inégalité tient (même si f n'est pas positive décroissante et continue avant N) et on a

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = s \ (\textbf{conv.}) \Leftrightarrow \int_{n}^{\infty} f(x)dx \textbf{ conv.}$$







4

Séries alternées

Définition d'une série alternée

$$\begin{aligned} s &= a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= -a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n \end{aligned}$$

Test sur séries alternées

Soit un **rang** $N \in \mathbb{N}$ et soit une **série alternée** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ telle que :

- ▷ b_n **décroissante** et **positive** $\left(f(n) = b_n, f'(x) \leqslant 0, \ \forall \ \ x > N\right)$
- ▷ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Alors,

- ▸ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ **conv.** vers $s \in \mathbb{R}$ $\ \forall m \geqslant N$
  - ▸ $0 \leqslant s \leqslant b_1$
  - ▸ $R_n = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$

5

Convergence absolue

Définition de convergence absolue

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \ \textbf{conv.} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{conv. absolument}$$

▷ **Semi-conv.** : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.** **et** $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ **div.**

Exemple

La **série harmonique alternée** converge vers $\ln(2)$, mais la **série harmonique simple** est **divergente** :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \ \textbf{conv.} \quad \textbf{mais} \ \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \ \textbf{div.}$$

Théorème de convergence absolue

Si une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *absolument*, **alors** elle converge simplement.

Test du rapport (d'Alembert)

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ **alors** si :

- ▷ $L = 1 \implies$ *inconclusif*
- ▸ $L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**
- ▸ $L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

Test de Cauchy

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ **alors** si :

- ▷ $L = 1 \implies$ *inconclusif*
- ▸ $L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div.**
- ▸ $L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **conv.**

6

Astuces pour Stewart 1.1 - 1.5

Propriétés des limites

Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont des suites convergentes et si c est une constante, **alors**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \text{ si } \lim_{x\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \text{ si } p > 0 \text{ et } a_n > 0$$

Limite d'une suite polynomiale

Soit deux polynomes, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$, et $k = \min\big(\deg(p), \deg(q)\big)$ **Alors**,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{p(n)/n^k}{q(n)/n^k}$$

Règle de l'Hôpital

Soit une **constante** $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et supposon que :

- ▷ $\lim\limits_{x\to c}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ est de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
- ▷ $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{|g'(x)|}$ **existe** et $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \approx c$

Alors,

$$\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Comparaison des suites

Si $a > 1$ et $k > 0$, on a

$$\ln(n) \ll n^K \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$c_n \ll d_n \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{c_n}{d_n} = 0$$

7

Les séries de fonctions

Définition d'une série de fonction

Soit $u_n(x)$ une suite de fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$ **Alors**, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

est une série de fonction de **terme général** $u_n(x)$ et on a la somme partielle s_n correspondante :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

Définition du domaine de convergence

L'ensemble des $x \in E$ qui sont tels que la série $s_n(x)$ converge porte le nom de **domaine de convergence** $D \subset E$.

La somme $s_n(x)$ est donc la somme qu'on obtient lorsqu'on ajoute une infinité de termes $u_n(x)$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x)}$$

Définition d'une série entière

Soit des coefficients c_n, une **série entière** est une *série de fonction* de la forme

$$\boxed{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n}$$

Lorsqu'elle est **centrée en** a, une série entière prend la forme :

$$\begin{aligned} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \\ = \sum_{k=1}^{\infty} c_n(x-a)^n \end{aligned}$$

Rayon de convergence

Le **rayon de convergence** R d'une série entière $S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ représente la distance maximale à a pour laquelle la série converge. La convergence dépend de la décroissance des coefficients c_n, et R est calculé à l'aide des coefficients.

Étapes pour déterminer R et la convergence

1. **Analyser les coefficients c_n :** Trouver la limite L à partir du *critère de d'Alembert* ($\lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$) ou du *critère de Cauchy* ($\lim \sqrt[n]{|c_n|}$).
2. **Calculer R :**
$$\boxed{R = \frac{1}{L}}$$
3. **Vérifier la convergence :**
▷ $R = 0 \implies S$ **conv.** à $x = a$
▷ $R = +\infty \implies S$ **conv.** $\forall x \in \mathbb{R}$
   - $|x - a| < R \implies S$ **conv.**
   - $|x - a| > R \implies S$ **div.**
4. **Analyser le bord $|x - a| = R$:** Tester les points où $|x - a| = R$ pour déterminer individuellement s'ils convergent ou non. Ces points incluent typiquement $x = a + R$ et $x = a - R$.

Exemple conv. série entière

Considérons la série entière :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-2)^n.$$

Étape 1 : Rayon de convergence

Les coefficients sont $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Par le critère de Cauchy :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Ainsi, le rayon de convergence est $R = 1$.

Étape 2 : Domaine de convergence

La série **converge** pour $|x - 2| < 1$. La série **diverge** pour $|x - 2| > 1$. Sur le bord $|x - 2| = 1$, testons $x = 3$ et $x = 1$.

Étape 3 : Analyse du bord

Cas $x = 3$: Si $x = 3$, alors $(x-2)^n = 1$. La série devient :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Elle converge par le critère des séries alternées.
Cas $x = 1$: Si $x = 1$, alors $(x - 2)^n = (-1)^n$. La série devient :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

C'est la série harmonique, qui diverge.

Conclusion

Le rayon de convergence est $R = 1$, et :

- La série converge pour $|x - 2| < 1$.
- Sur $|x - 2| = 1$:
  - $x = 3$: convergence.
  - $x = 1$: divergence.

Dérivation et intégration de série entière

Considérons la **série entière**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ avec } R > 0$$

Alors, la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ est **dérivable** sur l'intervalle ouvert $]a, -R, a+R[$ et on peut **intégrer** *termes à termes* :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n+1}$$

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Théorème des série de fonctions

Si une fonction $f(x)$ peut se mettre sous la forme d'une série entière au voisinage de a :

$c_0 + c1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots (*)$

Alors, le **coefficient** c_n est donné par :

$$c_n = \frac{1}{n!} f^n(a)$$

et la fonction $f(x)$ peut s'écrire sous la forme d'une **série de Taylor** :

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n, \; |x - a| < R$

Exemple de développement en série entière

Développons $f(x) = \ln(1 + x)$ en série de Taylor autour de $a = 0$.

Étape 1 : Dérivées successives de $f(x)$

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = \ln(1) = 0,$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1,$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(3)}(0) = 2,$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

Étape 2 : Coefficients c_n

Les coefficients de la série sont donnés par :

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Pour les premières valeurs :

$$c_0 = \frac{f(0)}{0!} = 0,$$
$$c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1,$$
$$c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-1}{2},$$
$$c_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
$$c_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-6}{24} = \frac{-1}{4}.$$

Donc on a c_n :

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Étape 3 : Série de Taylor

En remplaçant les coefficients c_n, la série de Taylor devient :

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

Étape 4 : Rayon de convergence

La série converge si $|x| < 1$, car la fonction $\ln(1+x)$ est définie uniquement pour $x > -1$. Ainsi, le rayon de convergence est $R = 1$.

De série géométrique à série entière

Si une fonction peut être exprimée sous la forme $\frac{1}{1-u(x)}$, alors elle peut être développée en série entière en utilisant la série géométrique :

$$\frac{1}{1-u(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} [u(x)]^n, \quad \text{pour } |u(x)| < 1.$$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{1+x}$

1. **Réécriture de la fonction :** Exprimons $f(x)$ sous la forme
$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)},$$
avec $u(x) = -x$.
2. **Utilisation de la série géométrique :** En appliquant la série
$$\sum_{n=0}^{\infty} [u(x)]^n,$$
on obtient :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$
3. **Simplification :** Simplifions la série pour obtenir :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$
4. **Rayon de convergence :** La série converge pour $|u(x)| = |x| < 1$, donc $R = 1$.

Résultat final

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \text{pour } |x| < 1.$$

Cette méthode exploite la convergence de la série géométrique pour obtenir rapidement une série entière sans calculer explicitement les dérivées.

Polynôme de Taylor

Si $f(x)$ peut se mettre sous la forme d'une **série entière** au voisinage de a et que $f^n(x)$ existe au voisinage de a $\forall n \geqslant 0$ on a la somme partielle $T_n(x)$ portant le nom de polynôme de Taylor :

$$f(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k(a)(x-a)^k, \ |x-a| < R$$

$$\int_{n=1}^{\infty} f(x)dx$$

Théorème de l'inégalité de Taylor

S'il existe une quantité M telle que $\left|f^{n+1}(x) \leqslant M(x)\right|$ pour $|x-a| < R$, c.-à-d. **si** $f^{n+1}(x)$ est bornée sur l'intervalle $]a-R, a+R[$, **alors**, on a :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M(x)}{(n+1)}|x-a|^{n+1}, \forall\ x \in]a-R, a+R$$

8

Fonctions plusieurs variables

Kamel p.4

$\mathbb{R}^2$ est équivalent à l'ensemble des réels qui comprends les couples (x, y)

Les équations de la forme :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Sont représenté graphiquement par un cercle de rayon z. Lorsqu'on cherche le **domaine**, il est possible de simplifier.

> **Exemple 1**
> $\sqrt{x^2+y^2-9}$ a un domaine dans $\mathbb{R}^2$ pour toutes valeur à l'extérieur du cercle de rayon $r = 3$

9

Preuve de Théorèmes et formules

Terme général d'une suite arithmétique

Preuve 9.1 Terme général a_n d'une suite arithmétique

Montrons que le terme général a_nd'une suite arithmétique $a_{n=1}^{\infty}$ est donné par

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Nous savons que les n premiers termes de la suite sont donné par :

$$a_n = \underbrace{a_1}_{n=1;a_1},\ \underbrace{(a_1+r)}_{n=1,a_1+r},\ \underbrace{\Big((a_1+r)+r\Big)}_{n=3;a_1+2r},\ \underbrace{\Big(\Big((a_1+r)+r\Big)+r\Big)}_{n=4,a_1+3r},\ \underbrace{\Big(a_1+rn\Big)}_{n=n;a_1+rn}$$

$$a_n = \quad a_1,\ l\ a_1 + (2-1)r,\ \ +a_1 + (3-1)r,\ \ \cdots\ \ a_1 + (n-1)r$$

On constate pour tout $n \geqslant 2$, chaque terme de la suite prend la forme $a_1 + (n-1)r$. Nous avons donc :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r,\quad \forall n \geqslant 2}$$

□

Somme des n premiers terme d'une suite arithmétique

Preuve 9.2 Somme partielle d'une suite arithmétique

Montrons que la formule générale pour la somme s_n des n premiers termes d'une **suite arithmétique** est donnée par :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Nous savons déjà que le n-ième terme de la suite est :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Nous pouvons développer la série des n premiers termes comme suit :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

En **multipliant** la somme partielle par 2, nous obtenons et et en additionnant termes à termes.

$$2S_n = \Big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\Big) + \Big(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1\Big)$$
$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

On constate alors que chaque terme entre parenthèse de l'équation se simplifie à $2a_n + (n-1)r$. **Par exemple**,

$$(a_1 + a_n) = a_1 + \Big(a_1 + (n-1)r\Big) = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$$

Similairement, on a :

$$(a_2 + a_{n-1}) = a_1 + (2-1)r + \Big(a_1 + (n-1-1)r\Big) = a_1 + r + a_1 + rn - 2r = 2a_1 + -r + rn = 2a_1 + (n-1)r$$

Par ailleurs, nous savons que $2a_1 + (n-1)r$ est simplement équivalent à $a_1 + a_n$:

$$2a_1 + (n-1)r = a_1 + \Big(a_1(n-1)r\Big) = a_1 + a_n$$

Ainsi, puisque nous chaque terme entre parenthèse se simplifie à $2a_n + (n-1)r$ ou $a_1 + a_n$ et qu'il y a n termes entre parenthèse, nous avons

$$2S_n = n\Big(2a_n + (n-1)r\Big)$$
$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

□

Terme général d'une suite géométrique

Preuve 9.3 Terme général a_n d'une suite géométrique

Montrons que le n-ième terme a_n d'une suite géométrique $a_{n=1}^{\infty}$ est donné par la formule :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Nous savons, par la définition d'une suite géométrique, que pour tout terme $n \geqslant 2$, le terme n est obtenu en multipliant son prédécesseur par la raison r. Une suite géométrique a donc les termes suivants :

$$a_n = \underbrace{a_1}_{n=1}, \underbrace{a_1 \cdot r}_{n=2}, \underbrace{a_1 \cdot r \cdot r}_{n=3}, \cdots, \underbrace{a_1 \cdot r^{n-1}}_{n=n}$$

Ainsi, pour chaque terme $n \geqslant 2$, l'image a_n est donnée par $a_1 \cdot r^{n-1}$:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2}$$

□

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

Preuve 9.4 Somme partielle d'une suite géométrique

Montrons que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est donnée par :

$$S_n = a_0 + a_0 r + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_0 r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Étape 1 : Écriture générale de la somme
La somme des n premiers termes de la suite géométrique est :

$$S_n = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n$$

Factorisons par a_0 :

$$S_n = a_0 \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right)$$

Nous devons maintenant trouver la formule de la somme des puissances de r.
Étape 2 : Multiplier par r
Multiplions la somme par r :

$$r \cdot \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right) = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}$$

Étape 3 : Soustraction des deux équations
Soustrayons la somme obtenue de la somme initiale :

$$\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right) - \left(r + r^2 + \cdots + r^{n+1}\right) = 1 - r^{n+1}$$

Simplification :

$$\left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right)(1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

Étape 4 : Isoler la somme
Isolons la somme :

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \text{pour } r \neq 1$$

Étape 5 : Formule finale
Remplaçons cette expression dans la somme S_n :

$$S_n = a_0 \cdot \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Ce qui nous donne la formule finale :

$$\boxed{S_n = a_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$$

□

Convergence d'une suite géométrique

Preuve 9.5

Montrons qu'une suite géométrique converge vers 0 lorsque $-1 < r < 1$ et vers 1 si $r = 1$. Montrons aussi qu'elle diverge pour tout autre valeur.

Cas 1 : Si $-1 < r < 1$, alors $|r| < 1$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{p}{q}\right)^r, p < q\right] \longrightarrow 0$$

car les puissances successives de r tendent vers 0. Cela est dû au fait que tout rationnel $r \in \mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme d'un quotien de naturels $p, q \in \mathbb{N}$ et que le dénominateur, étant plus grand que le numérateur, **croît plus rapidement que le numérateur**. Ainsi, le rapport p^n/q^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Cas 2 : Si $r = 1$, alors pour tout n,

$$a_n = 1^n = 1$$

donc,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

Cas 3 : Si $r = -1$, alors

$$a_n = (-1)^n$$

La suite alterne entre -1 et 1 et n'a pas de limite. Donc, elle ne converge pas.
Cas 4 : Si $|r| > 1$, alors $|r^n|$ tend vers l'infini. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} r^n \text{ n'existe pas (la suite diverge).}$$

Conclusion : La suite converge si et seulement si $-1 < r \leqslant 1$ et $r \neq -1$. Plus spécifiquement, elle converge vers 0 si $-1 < r < 1$ et elle converge vers 1 si $r = 0$. Pour tout autre valeur, hors de l'intervalle $]-1, 1]$, la série diverge.

$$\boxed{-1 < r \leqslant 1 \text{ avec } r \neq -1}$$

Convergence d'un série géométrique

Preuve 9.6

Considérons une suite géométrique de terme initial a et de raison r. Les termes de cette suite sont donnés par $u_n = ar^n$. Nous devons prouver que si $|r| < 1$, la somme de cette suite converge vers $\dfrac{a}{1-r}$, et qu'elle diverge lorsque $|r| \geqslant 1$.
Cas 1 : $|r| < 1$

Si $|r| < 1$, la somme partielle S_n est donnée par :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = a\sum_{k=0}^{n} r^k$$

Nous savons que la somme d'une suite géométrique est :

$$S_n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Lorsque $|r| < 1$, $r^{n+1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc, la somme infinie converge vers :

$$\boxed{S = \frac{a}{1-r}}$$

Cas 2 : $|r| \geqslant 1$

Si $|r| \geqslant 1$, alors r^{n+1} ne tend pas vers 0. Ainsi, la série ne converge pas, et la somme diverge.

$$\boxed{\text{La suite diverge pour } |r| \geqslant 1}$$

Preuve 9.7 Coefficient de Taylor

Soit le coefficient de Taylor

$$c_n = \frac{1}{n!} f^n(a)$$

Ce résultat est obenu par la dérivation séquentielle d'une fonction $f(x)$ et l'évaluation de la dévirvée à la valeur $x = a$. Soit une fonction $f(x)$ qui peut s'écrire sous la forme d'une série entière au voisinage de a :

$$f(x) = c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots (*)$$

Les dérivées sont données par :

$$
\begin{aligned}
f(a) &= c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots + c_n(a-a)^{n-1} + \cdots + (*) = c_0 \\
f'(x) &= \cancelto{0}{c_0} + c_1(1) + (2)(1)c_2(x-a) + c_3(3)(2)(1)(x-a)^2 + \cdots + n!(x-a)^{n-1} + \cdots (*) \\
f'(a) &= c_1 + 2!c_2(a-a) + 3!(a-a)^2 + \cdots + n!(a-a)^{n-1} + \cdots (*) = c_1 \\
f''(x) &= \cancelto{0}{c_2} + 2!c_2(1) + c_3 3! \cdot (x-a) + \cdots + (n-1)n!(x-a)^{n-2} + \cdots (*) \\
f''(a) &= 2!c_2(1) + c_3 3! \cdot (a-a) + \cdots + (n-1)n!(a-a)^{n-2} + \cdots (*) = 2!c_2
\end{aligned}
$$

De façon générale, on a :

$$\boxed{f^n(a) = n!c_n \Leftrightarrow \frac{1}{n!} f^n(a) = c_n}$$