IFT1575
Modèles de recherche opérationnelle

Introduction

Franz Girardin

16 septembre 2024

Table des matières

1

Modélisation

Définition de la prog. linéaire

Branche de la *Recherche Opérationnelle* où on utilise des **modèles** mathématiques qui font appel à des fonction **linéaire** pour résoudre un problème.

$$\texttt{prod. } \text{vin blanc} \implies x \text{ (litres)}$$
$$\texttt{prod. } \text{vin rouge} \implies y \text{ (litres)}$$

Composantes du modèle

Il faut identifier **l'action** sur laquelle on doit prendre une décision et la représenter par un **variable de décision**. À cette variable sera associée un constante qui représente le **niveau** de l'action.

L'objectif

S'exprime sous le forme d'une **fonction mathématique** qui représente l'intention. P. ex. **maximiser le profit** correspondrait à :

$$\text{Max } 5x + 3y$$

Contraintes

Elles peuvent dépendre du *contexte du problèmes* ou peuvent être plus générales ; p. ex. la **non-négativité** d'une entité :

$$\begin{aligned} x &\leqslant 50 && \texttt{prod.}\text{max vin blanc} \\ y &\leqslant 60 \\ x + y &\leqslant 80 && \texttt{prod.}\text{max totale de vin} \\ x \geqslant 0&, y \geqslant 0 && \text{Non-nég.} \end{aligned}$$

Terminologie de base

Une **solution réalisable** est un **vecteur** de valeurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartenant à $X \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque composante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respecte *toutes les contraintes* du problème. Dans ce contexte, X est l'ensemble des solutions possibles, c'est-à-dire l'ensemble des points qui satisfont toutes des contraintes imposées au problème. Chaque point dans X est un vecteur de longueur n Cet ensemble X est un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^n$ qui comprends tous les vecteurs possibles où $n \in [1, n \longrightarrow \infty[$.

Une solution **optimale** est une solution réalisable qui maximise (ou minimise) la fonction objectif $z(x)$, en fonction de la nature du problème (maximisation ou minimisation). Autrement dit, c'est une solution réalisable qui produit la *meilleure valeur possible* pour la fonction objectif z.

2

Maximisation et minimisation

Note:-

Un modèle peut présenter une **infinité** de solution optimales.

Theorem 2.1

La maximisation d'un objectif $f(w)$ est équivalent à l'**opposé** de la minimisation :

$$\text{Max } f(w) \leftrightarrow \text{Min} - f(w)$$

Preuve 2.1

Considérons le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(w) \\ &\text{s.a } \ w \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Soit w_{opt} un point de X où $f(w)$ atteint son **maximum**. On a :

$$f\left(w_{\text{opt}}\right) \geqslant f(w) \quad \forall w \in X$$
$$\updownarrow$$
$$-f\left(w_{\text{opt}}\right) \leqslant -f(w) \quad \forall w \in X$$

Par conséquent, $-f(w_{\text{opt}})$ est la valeur minimale possible parmi tous les $-f(w)$ possibles :

$$-\text{Max} f(w) = -f\left(w_{\text{opt}}\right) = \text{Min} - f(w)$$

Ainsi, qu'on maximise $f(w)$ ou qu'on minimise $-f(w)$, on retrouve la même solution optimale w_{opt}.

Explication

Soit la fonction objectif $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Dans cette situation, le vecteur w joue deux rôles distincts : il est à la fois l'argument de la fonction objectif $f(w)$ et un élément soumis aux contraintes. Ces deux aspects sont essentiels dans un problème de maximisation en programmation linéaire ou non linéaire.

1. Vecteur dans la fonction objectif : La fonction objectif $f(w)$ est la fonction que l'on cherche à maximiser. Elle prend un vecteur w comme entrée, qui est un point dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur w représente une solution candidate du problème, et $f(w)$ retourne un nombre réel, par exemple un profit ou une performance, que l'on souhaite maximiser.

2. Vecteur dans les contraintes : Le vecteur w doit aussi satisfaire un ensemble de contraintes qui définissent l'ensemble des solutions réalisables, noté $X \subset \mathbb{R}^n$. Ces contraintes peuvent être des inégalités ou des égalités (par exemple, $g(w) \leqslant 0$, $h(w) = 0$), et elles définissent l'ensemble des vecteurs w admissibles.

Synthèse des deux rôles :

- **Maximisation :** On cherche à maximiser la fonction $f(w)$, c'est-à-dire à trouver la meilleure valeur possible de $f(w)$.
- **Contraintes :** Le vecteur w doit se situer dans un ensemble admissible X, défini par les contraintes du problème.

En résumé, w doit satisfaire les contraintes (ce qui garantit qu'il est une solution réalisable), tout en maximisant la valeur de $f(w)$. Le problème consiste à trouver le w optimal qui satisfait ces deux aspects à la fois.

Soit le problème suivant. Un restaurateur dispose de **14** oursins, **24** crevettes, **18** huîtres. Deux types d'assiètes de fruit de mer sont offertes par le restaurateur :

8$: 5 oursins, 2 crevettes 1 huître

6$: 3 oursins, 3 crevettes 3 huîtres

L'objectif est de déterminer le **nombres d'assiètes** de chaque type à préparer afin de *maximiser* le revenu total du restaurateur tout en respectant les disponibilité de fruits de mer.

Contraintes

$$\begin{aligned} 5x + 3y &\leqslant 30 && \text{Oursins} \\ 2x + 3y &\leqslant 24 && \text{crevettes} \\ x + 3y &\leqslant 18 && \text{Huîtres} \\ \\ x, y &\geqslant 0 && \text{Non-négativité} \\ \\ z &= 8x + 6x && \text{Objectif} \end{aligned}$$

En considérant que la maximisation d'un objectif est équivalente à la minimisation de l'opposé de la minimisation on a :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad -8x - 6y \\ \text{s.a.} \\ \\ 5x + 3y \leqslant 30 \\ 2x + 3y \leqslant 24 \\ x + 3y \leqslant 18 \\ \\ x, y \geqslant 0 \\ \\ z = 8x + 6x \end{aligned}$$

Forme standard

$$
\begin{array}{l}
\text{Min } z = -8 - 6y \\
\qquad\qquad \text{s.a.} \\
\qquad\qquad 5x + 3y + u \qquad\qquad\quad = 30 \\
\qquad\qquad 2x + 3y \quad + p \qquad\quad = 24 \\
\qquad\qquad\;\; x + 3y \qquad\quad + h \quad = 18 \\
\qquad\qquad\quad x, y, u, p, h \geqslant 0
\end{array}
$$

Choisir les variables indépendantes

Supposons que x et y sont des ***variables indépendantes***. Exprimons les ***variables dépendantes*** u, p, h, z en fonction de x et y

$$
\begin{array}{lll}
u & & = 30 - 5x - 3y \\
& p & = 24 - 2x - 3y \\
& \quad h & = 18 - x - 3y
\end{array}
$$

. . . .

$$z = 0 - 8x - 6y$$

En supposant que x et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{x = y = 0 \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0}$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant x ; on considère donc x comme ***variable d'entrée***. Soit $y = 0$, on a :

$$
\begin{array}{lll}
u = 30 - 5x - 3y & \implies & x \leqslant 30/5 = \mathbf{6} \\
p = 24 - 2x - 3y & \implies & x \leqslant 24/2 = \mathbf{12} \\
h = 18 - x - 3y & \implies & x \leqslant \mathbf{18}
\end{array}
$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de x jusqu'à **6** L'équation limitante est celle qui implique u ; on dit alors que u est le ***variable de sortie***. On **pivote**. La variable u prend la place de x en tant que variable indépendante ; u et y sont les ***nouvelles variables indépendantes***.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p, et h en fonction de u et y :

$$u \quad = 30 - 5x - 3y \textbf{ et } u, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = 6 - 1/5u - 3/5y}$$

$$p \quad = 24 - 2x - 3y \textbf{ et } u, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p = 12 + 2/5u - 9/5y}$$

$$h \quad = 18 - x - 3y \textbf{ et } u, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{h = 12 + 1/5u - 12/5y}$$

$$z \quad = 0 - 8x - 6y \textbf{ et } u, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z \quad = 0 - 8(6 - 1/5u - 3/5y) - 6y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z = -48 + 8/5u - 6/5y}$$

Système 2

$$
\begin{array}{lll}
x & & = 6 - 1/5u - 3/5y \\
& p & = 12 - 2/5u - 9/5y \\
& \quad h & = 12 - 1/5u - 12/5y
\end{array}
$$

. . . .

$$z = -48 + 8/5x - 6/5y$$

Sachant que u et y sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{u = y = 0 \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48}$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant y ; on considère donc y comme ***variable d'entrée***. Soit $u = 0$, on a :

$$
\begin{array}{lll}
x = 6 - 1/5u - 3/5y & \implies & y \leqslant \mathbf{10} \\
p = 12 - 2/5u - 9/5y & \implies & y \leqslant \mathbf{20/3} \\
h = 12 - 1/5u - 12/5y & \implies & y \leqslant \mathbf{5}
\end{array}
$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de y jusqu'à **5** L'équation limitante est celle qui implique h ; on dit alors que h est le ***variable de sortie***. On **pivote**. La variable h prend la place de u en tant que variable indépendante ; h et y sont les ***nouvelles variables indépendantes***.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p, et h en fonction de h et y :

$$h \quad = 12 - 1/5u - 12/5y \textbf{ et } h, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = 5 + 1/12u - 5/12h}$$

$$x = 6 - 1/5u - 3/5y \textbf{ et } h, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 6 - 1/5u - 3/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = 3 - 1/4u - 1/4y}$$

$$p = 12 - 2/5u - 9/5y \textbf{ et } h, y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$p = 12 - 2/5u - 9/5(5 + 1/12u - 5/12h)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{p = 3 + 1/4u - 3/4y}$$

$$z \quad = -48 + 8/5u - 6/5y \textbf{ et } h, y = 0$$

$$u \Downarrow$$

$$z = -48 + 8/5u - 6(5 + 1/12u - 5/12h)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z = -54 + 3/2u - 1/2h}$$

Système 3

$$
\begin{array}{llll}
x & & & = 3 - 1/4u - 1/4h \\
& p & & = 3 + 1/4u + 3/5h \\
& & y & = 5 + 1/12u - 5/12h
\end{array}
$$

. . . .

$$z = -54 + 3/2u - 1/2h$$

Sachant que u et h sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{u = h = 0 \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54}$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u, ni la valeur de $h$car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes **à l'optimum** !