

MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Travail Pratique 1

Franz Girardin

13 septembre 2024

TABLE DES MATIÈRES

0.1	Définition de convergence	2
0.2	Identification des termes	2
0.3	Trouver la règle	3
0.4	Estimer un somme	3
0.5	Déterminer la convergence	4
0.6	Convergence de a_{n+1}	6
0.7	Théorie sur les suites monotones	7
0.8	Déterminer la convergence de suites monotones	7

EXERCICES SUR LES SUITE NUMÉRIQUES

Définition de convergence

Exercice 1 (Stewart 1.1.2)

Qu'est-ce qu'une *suite convergente*? Donnez **deux exemples**. Qu'est-ce qu'une *suite divergente*? Donnez **deux exemples**

Est **convergente** toute **suite** $\{a_n\}$ dont les termes a_n s'approchent autant que l'on veut d'une valeur L lorsque l'entier n devient arbitrairement grand :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \right) \implies a_n \text{ conv.}$$

Plus formellement, soit une valeur positive arbitrairement petite ε , il existe toujours un entier $N(\varepsilon)$ qui représente un rang à partir duquel s'il y a un entier naturel $n > N(\varepsilon)$, **alors** l'image de cet entier naturel, a_n sera aussi proche que l'on veut d'une **valeur** L représentant *le point de convergence de la suite* :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Exemple de suites convergentes : $\{a_n\} = \frac{1}{n}$, $\{b_n\} = \frac{1}{n^2}$

Est **divergente** toute suite dont les termes a_n ne convergent vers aucune valeur particulière ; ils s'approchent plutôt de $\pm\infty$:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \right) \implies a_n \text{ div.}$$

Plus formellement, soit un nombre positif arbitrairement grand $M > 0$, on pourra toujours trouver une valeur $N(M) \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les entiers $n > M$ auront une image a_n **plus grande** que nombre arbitrairement grand. Cela signifie que les termes de la suites ne s'approchent d'aucune valeur.

$$\forall M > 0 : \exists N(M) \in \mathbb{N} > 0 : n > N \implies a_n > M(\text{div. } +\infty)$$

Identification des termes

Exercice 2 (Stewart 1.1.8)

Donnez les **cinq premiers termes** de la suite $a_n = \frac{(-1)^n n}{n! + 1}$

$$a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = -\frac{3}{7}, a_4 = \frac{4}{25}, a_5 = -\frac{5}{121}$$

Exercice 3 (Stewart 1.1.11)

Donnez les **cinq premiers termes** de la suite $a_n = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}, a_4 = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}, a_5 = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

Trouver la règle

Exercice 4 (Stewart 1.1.15)

Trouver la formule du **terme général** a_n de la suite $\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \dots\}$

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Exercice 5 (Stewart 1.1.18)

Trouver la formule du **terme général** a_n de la suite $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Estimer un somme

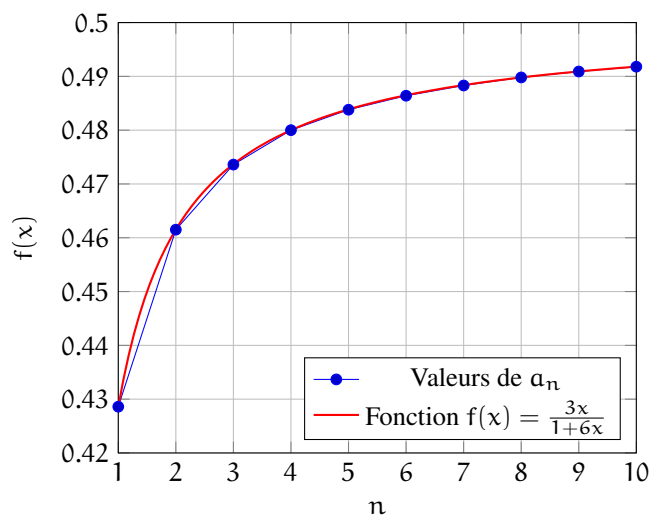
Exercice 6 (Stewart 1.1.19 - 1.1.22)

Calculez, **à la quatrième décimale**, les dix premiers termes de la suite et utilisez-les pour tracer le graphique de la suite à la main. La suite semble-t-elle avoir une limite ? Si oui, **calculez cette limite**. Si non, expliquez pourquoi.

1.1.19 $a_n = \frac{3n}{1+6n}$

$$a_1 = 0.4286, a_2 = 0.4615, a_3 = 0.4736, a_4 = 0.4800, a_5 = 0.4838, \\ a_6 = 0.4864, a_7 = 0.4883, a_8 = 0.4909, a_9 = 0.4918, a_{10} = 0.4918$$

Graph de la suite $a_n = \frac{3n}{1+6n}$ et de la fonction $f(x) = \frac{3x}{1+6x}$



Déterminer la convergence

Exercice 7 (Stewart 1.1.23 - 1.1.56)

Déterminez si la suite converge ou diverge. Si elle converge, **trouvez sa limite**.

$$1.1.23 \ a_n = \frac{3 + 5n^2}{n + n^2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}.$$

$$\frac{3 + 5n^2}{n + n^2} = \frac{n^2(\frac{1}{3n^2} + 5)}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = a_n \quad (\text{Simplifié})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{1} = \frac{5}{1}$$

$$1.1.42 \ a_n = \frac{\cos^2 n}{n}$$

Nous savons que la fonction a_n est bornée entre les valeurs $\cos^2 n \in [0, 1]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos^2 n \leq 1 \\ \frac{0}{n} &\leq \frac{\cos^2 n}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ainsi nous savons que la limite est bornée **inférieurement et supérieurement** par zéro, lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, nous pouvons conclure que la limite est égale à zéro et que la suite a_n converge vers $L = 0$.

$$1.1.44 \ a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$$

$$a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}} = (2 \cdot 2^{3n})^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 2^{\frac{3n}{n}} \quad (\text{Développé})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot 2^3 = 2^0 \cdot 2^3 = 8$$

$$1.1.46 \ a_n = 2^{-n} \cos n\pi$$

Nous savons que la suite $\{a_n\}$ est bornée par les valeurs -1 et $1 : \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq a_n \leq 1$. En utilisant l'identité $\cos \pi n = (-1)^n$, nous avons :

$$a_n = 2^{-1} \cos \pi n = b_n = 2^{-1} (-1)^n$$

Nous pouvons ainsi évaluer la limite lorsque $n \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \cdot (-1)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot (-1)^n = 0$$

$$1.1.52 \ a_n = \arctan(\ln n)$$

Nous savons que la fonction $\ln x$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Et par le théorème d'association d'une fonction à une suite, nous savons que la suite analogue $b_n = \ln n$ tend également vers $+\infty$. Nous avons alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(\ln n) \xrightarrow{+\infty} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \arctan(M) = \frac{\pi}{2}$$

1.1.54 $a_n = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$

En observant la suite, on constate que le dénominateur pour les termes n **impairs** est équivalent à $\frac{n+1}{2}$:

$$\frac{1}{\left(\frac{1+1}{2}\right)} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{\left(\frac{3+1}{2}\right)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\left(\frac{5+1}{2}\right)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{\left(\frac{7+1}{2}\right)} = \frac{1}{4}, \dots$$

Et en observant la suite, on constate que le dénominateur pour les termes n **pairs** est équivalent à $\frac{n}{2} + 2$:

$$\frac{1}{\left(\frac{2}{2} + 2\right)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{\left(\frac{4}{2} + 2\right)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\left(\frac{6}{2} + 2\right)} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{\left(\frac{8}{2} + 2\right)} = \frac{1}{6},$$

On peut donc conclure que la suite obéit à la règle $a_n = \frac{1}{\frac{n+1}{2}}$ pour les termes **impairs** et $a_n = \frac{1}{\frac{n}{2} + 2}$ pour les termes **pairs**. En simplifiant les fractions, on obtient :

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & n \text{ impairs} \\ \frac{2}{n+4} & n \text{ pairs} \end{cases}$$

1.1.56 $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-3)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\cos(n\pi) \frac{3^n}{n!} \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\pi) \frac{3^n}{n!} \xrightarrow{0} \\ &\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

La partie importante ici est le rapport entre $(-3)^n$ et $n!$. Bien que 3^n croisse exponentiellement, $n!$ croît beaucoup plus rapidement que 3^n , car $n!$ est un produit d'entiers successifs qui croît super-exponentiellement. Cela signifie que pour des n suffisamment grands, le dénominateur $n!$ va dominer le numérateur 3^n , ce qui entraînera la limite de a_n vers 0.

Exercice 8 (Stewart 1.1.64)

Déterminez si la suite définie par récurrence est convergente ou divergente :

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4 - a_n \quad \forall n \geq 1$$

1.1.64a Les premiers termes de la suite sont les suivantes :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 1, \dots$$

On voit que la suite oscille entre les valeurs 1 et 3, en fonction du fait que n est **pair** ou **impair** :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 1, \dots$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ impair} \\ 3 & n \text{ pair} \end{cases}$$

Puisque la suite oscille entre deux valeurs, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ est **indéfinie** et on peut conclure que la suite diverge.

1.1.64b

Si la valeur de a_1 était $a_1 = 2$, on aurait les premiers termes suivants :

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 2, \quad \dots$$

Ainsi, on constate qu'après le premier termes, la suite a une valeur constante $a_n = 2 \forall n > 1$. On peut donc conclure que la suite converge vers l'entier naturel 2.

Convergence de a_{n+1}

Exercice 9 (Stewart 1.1.70a)

Si $\{a_n\}$ converge, montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Preuve directe. La définition de convergence d'une suite suggère que a_n est **convergente** si pour toute valeur arbitrairement petite et positive, $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ qui représente un seuil à partir duquel pour toute valeur $n > N(\varepsilon)$, la distance entre a_n et L est suffisamment petite ($|a_n - L| < \varepsilon$). Après ce seuil N les images a_n de chaque $n > N$ sont suffisamment proche d'une valeur limite L . Autrement dit :

$$a_n \text{ conv.} \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) > 0 : n > N(\varepsilon) \implies |a_n - L| < \varepsilon$$

Supposons que la suite $\{a_n\}$ converge vers L . Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N(\varepsilon)$, on a $|a_n - L| < \varepsilon$.

Maintenant, considérons la suite $\{a_{n+1}\}$. Lorsque $n > N(\varepsilon)$, il est évident que $n + 1 > N(\varepsilon)$ également. Ainsi, pour $n > N(\varepsilon)$, on a aussi :

$$|a_{n+1} - L| < \varepsilon.$$

Cela montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = L$, puisque la distance entre a_{n+1} et L devient arbitrairement petite pour des n suffisamment grands.

Ainsi, nous avons montré que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = L$.

Conclusion : Puisque les deux suites $\{a_n\}$ et $\{a_{n+1}\}$ convergent vers la même limite L , nous avons :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.}$$

Exercice 10 (Stewart 1.1.70b)

Une suite $\{a_n\}$ est définie par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $\forall n \geq 1$. En supposant que $\{a_n\}$ converge, trouvez sa limite.

Les premiers termes de la suite sont :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{5}{8}, \quad a_6 = \frac{8}{13}, \quad a_7 = \frac{13}{21}, \quad a_8 = \frac{21}{34}, \quad a_9 = \frac{34}{55}, \quad a_{10} = \frac{55}{89}$$

Supposons, comme suggère l'énoncé, que la suite $\{a_n\}$ converge vers L :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Or, la relation de récurrence, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Et puisque $a_n \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$, la récurrence engendre l'équivalence :

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+L}$$

Nous avons montré que si a_n converge vers L , alors a_{n+1} converge également vers L . On a donc :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{1+L} \\ L(1+L) &= 1 \\ L + L^2 &= 1 \\ L^2 + L - 1 &= 0 \end{aligned}$$

En appliquant la formule quadratique, on obtient :

$$L = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Cela engendre les solutions $L_1 \approx 0.618$ et $L_2 \approx -1.628$. Puisque les valeurs des termes de la suite sont positives (voir a_1 à a_{10}), on peut **rejeter la solution négative**. La limite de la suite $\{a_n\}$ est :

$$L = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Théorie sur les suites monotones

Exercice 11 (Stewart 1.1.71)

Supposez que vous savez que est une suite décroissante et que tous ses termes sont compris entre les nombres 5 et 8. Expliquez pourquoi cette suite possède une limite. Que pouvez-vous dire à propos de la valeur de cette limite ?

Par la propriété des suites monotones, toute suite décroissante et bornée est également convergente. Plus formellement, supposons que $\{a_n\}$ est décroissante et que toutes les valeurs de $\{a_n\}$ sont comprises entre 5 et 8. Sachant que $\{a_n\}$ est décroissante, nous savons également que $\forall n \geq 1, a_{n+1} \leq a_n$. Ainsi, chaque valeur a_{n+1} est au moins égale ou plus petite que son prédécesseur a_n . Ainsi, lorsque $n \rightarrow \infty$, valeurs de la suite s'approchent de la borne inférieure et la limite de $\{a_n\}$ est une certaine valeur $L \geq 5$.

Déterminer la convergence de suites monotones

Exercice 12 (Stewart 1.1.72-1.1.78)

Déterminez si la suite est croissante, décroissante ou non monotone. Est-elle bornée ?

1.1.72 $a_n = \frac{1}{2n+3}$. La suite $\{a_n\}$ est strictement décroissante ; il s'agit donc d'une suite monotone. On constate que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L = 0$. Ainsi, on peut conclure que $\{a_n\}$ est bornée inférieurement.

1.1.75 $a_n = n(-1)^n$. La suite $\{a_n\}$ oscille entre des valeurs positives et négatives à cause de l'exposant $(-1)^n$. Ainsi, lorsque $n \rightarrow \infty$, a_n ne s'approche d'aucune valeur particulière. Ainsi, on peut conclure que $\{a_n\}$ est non bornée, divergente et non monotone.