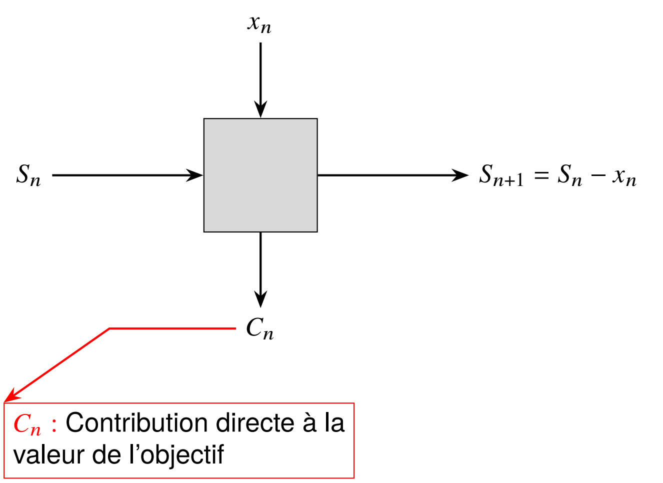
1

Programmation dynamique probabiliste

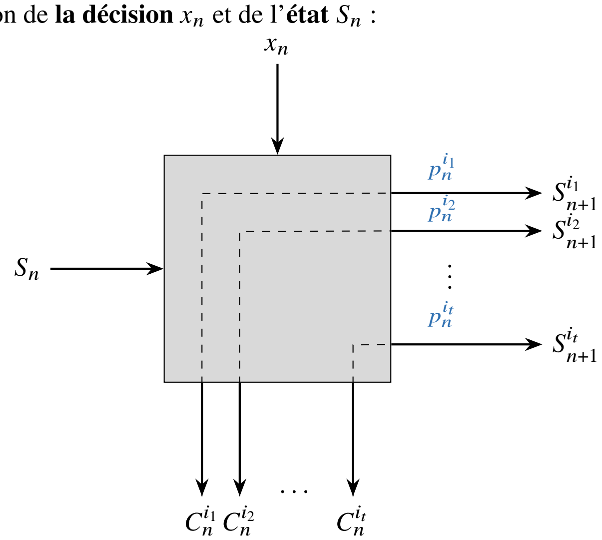
1.1 Principe

Dans le contexte de programmation dynamique déterministe, l'état S_{n+1} à l'étape $n+1$ est **complètement déterminé** par l'état S_n à l'étape n et la décision prise dans l'état S_n.



Dans le contexte de programmation dynamique probabiliste, l'état S_{n+1} à l'étape $n+1$ **n'est pas** complètement déterminé par l'état S_n à l'étape n et la décision x_n prise dans l'état S_n

On a donc une **distribution de probabilités**. On peut Il est possible d'obtenir différents états S_{n+1} à l'état $n+1$, en fonction de **la décision** x_n et de l'**état** S_n :



- ▷ **Ensemble des états suivants possibles**
  - ▶ $A_{n+1} = s_{n+1}^1, s_{n+1}^2, \ldots, s_{n+1}^{|A_{n+1}|}$
- ▷ **Probabilité d'atteindre l'état spécifique s_{n+1}^i**
  - ▶ $p_n^i = \text{Prob}\{s_{n+1} = s_{n+1}^i\} \quad i = 1, \ldots, |A_{n+1}|$
- ▷ **États atteignabless $s_n^{i_{n+1}}$** $\in A_{\text{atteingnable}} \subseteq A_{n+1}$
  - ▶ $p_n^i > 0 \quad 1 = i_1, \ldots, i_t$
  - ▷ $\{s_{n+1}^{i_1}, s_{n+1}^{i_2}, \ldots, s_{n+1}^{i_t}\} \subseteq A_{n+1}$
- ▷ **États non atteignabless**
  - ▶ $p_n^i = 0 \quad i = 1, \ldots, |A_{n+1}|, i \neq i_1, \ldots, i_t$

Note:-

Dans le diagramme et le texte, p_n^i représente **la probabilité de transition** vers un état spécifique s_{n+1}^i à l'étape $n+1$, **conditionnellement à être dans l'état s_n et après avoir effectué l'action x_n**.

Pour chaque état s_n, on a donc le le système suivant :

$$p_n^i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, |A_{n+1}|$$
$$\sum_{i=1}^{|A_{n+1}|} p_n^i = 1$$

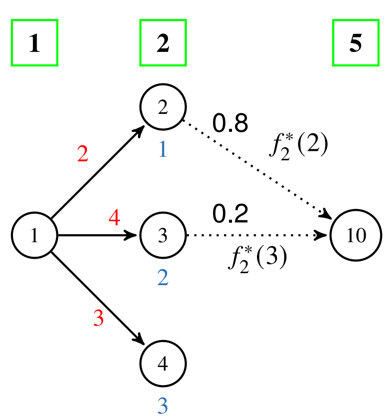
1.2 Exemple du problème de diligence

On peut imaginer un scénario où **il n'est pas garantit** que lorsqu'on prend la décision de se déplacer à la ville $x_n \in A_{n+1}$ **en partant** de x, il n'est pas garantit qu'on atteigne cette ville.

1.2.1 Tenter de se rendre à la ville 2

Supponons que nous voulons nous rendre à la ville 2. Posons qu'il y a une **probabilité** de 0.8 qu'on arrive à la ville 2 et une **probabilité** de 0.2 qu'on arrive à la ville 3, lorsqu'on prendre la **décision de se rendre à la ville** 2. Ponsons que la distance de 1 à 2 et de 1 à 3 est de 2 et 4 unités, respectivement.

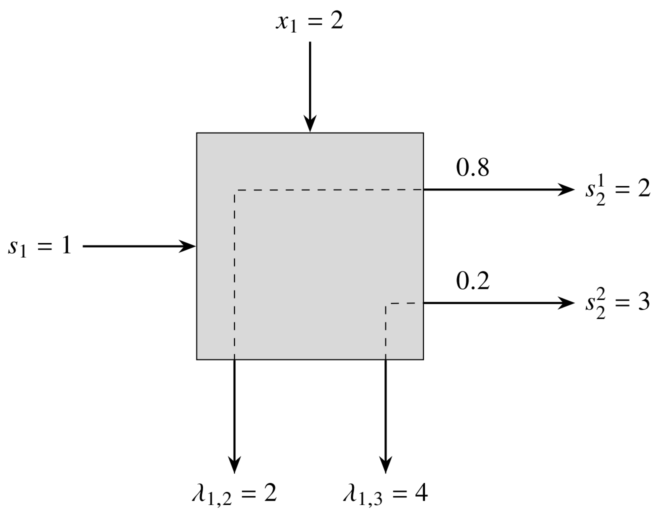
Nous avons alors la situation suivante :



Ainsi, le chemin optimal pour se rendre de 1 à 2 dépend de la probabilité de d'arriver à 2 ou 3 :

$$f_1(1,2) = \texttt{0.8}(2 + f_2^*(2)) + \texttt{0.2}(4 + f_2^*(3))$$

On peut également représenter la situation avec le diagramme d'état suivant :

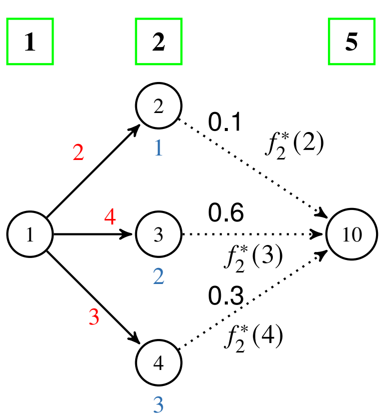


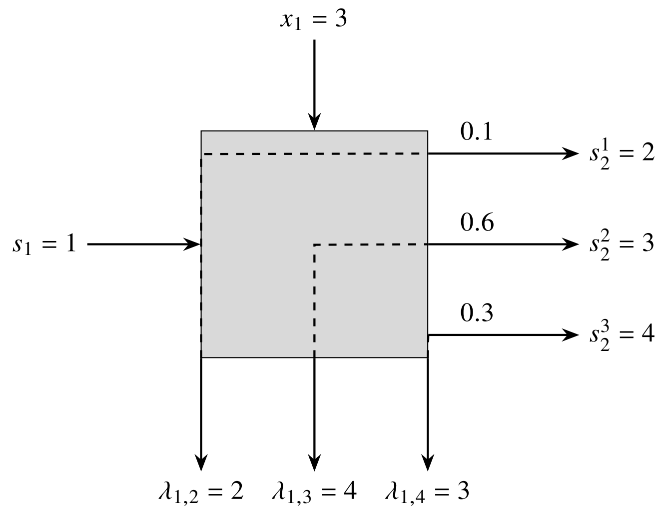
1.2.2 Tenter de se rendre à la ville 3

$n = 1, \quad s_1 = 1, \quad x_1 = 3,$

$s_2^1 = 2, \quad s_2^2 = 3, \quad s_2^3 = 4,$

$p_1^1(1,3) = 0.1, \quad p_1^2(1,3) = 0.6, \quad p_1^3(1,3) = 0.3.$



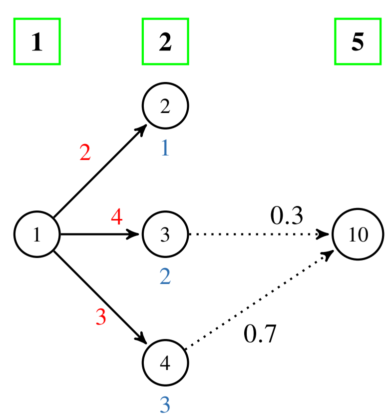


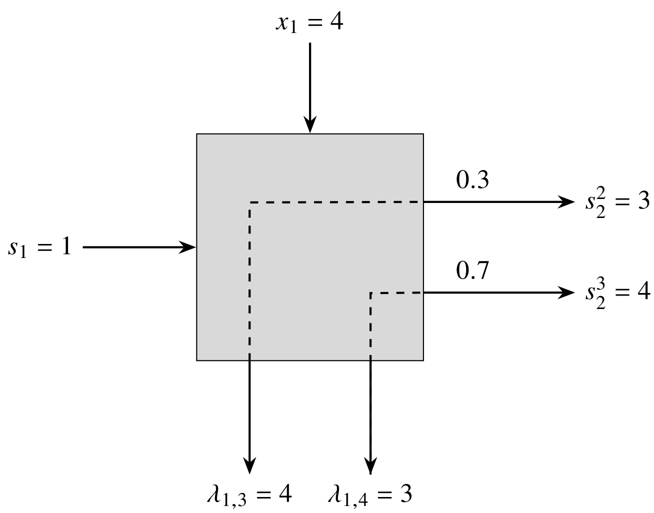
1.2.3 Tenter de se rendre à la ville 4

$n = 1, \quad s_1 = 1, \quad x_1 = 4,$

$s_2^1 = 2, \quad s_2^2 = 3, \quad s_2^3 = 4,$

$p_1^1(1,4) = 0, \quad p_1^2(1,4) = 0.3, \quad p_1^3(1,4) = 0.7.$





1.2.4 Formule de récurrence

Considérons les probabilité suivantes :

$$\begin{aligned}
&p_1^1(1,2) = 0.8, \quad p_1^2(1,2) = 0.2, \quad p_1^3(1,2) = 0.0,\\
&p_1^1(1,3) = 0.1, \quad p_1^2(1,3) = 0.6, \quad p_1^3(1,3) = 0.3,\\
&p_1^1(1,4) = 0.0, \quad p_1^2(1,4) = 0.3, \quad p_1^3(1,4) = 0.7.
\end{aligned}$$

Nous avons déterminé poids du **chemin probable** pour chacune des villes $2, 3, 4$ qu'on souhaite vistiter lorsqu'on se trouve à la **ville 1**, soient $f_1(1,2)$, $f_1(1,3)$, $f_1(1,4)$:

$$\begin{aligned}
f_1(1,2) &= 0.8\,(2 + f_2^*(2)) + 0.2\,(4 + f_2^*(3)) + 0.0\,(3 + f_2^*(4)),\\
f_1(1,3) &= 0.1\,(2 + f_2^*(2)) + 0.6\,(4 + f_2^*(3)) + 0.3\,(3 + f_2^*(4)),\\
f_1(1,4) &= 0.0\,(2 + f_2^*(2)) + 0.3\,(4 + f_2^*(3)) + 0.7\,(3 + f_2^*(4)).
\end{aligned}$$

En considérant chaque poids de chemin probables, le poids du **chemin minimal probable** est le poids minimal parmi ceux-ci :

$$\begin{aligned}
f^*(1) &= \min\left\{f_1(1,2), f_1(1,3), f_1(1,4)\right\},\\
&= \min_{x_1 \in \{2,3,4\}} f_1(1,x_1),\\
&= \min_{x_1 \in A_2} \left\{ \sum_{i=1}^{|A_2|} p_1^i(1,x_1)\left(\lambda_{1,s_2^i} + f_2^*(s_2^i)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

De façon générale, pour une étape n et un état s_n, nous avons la formule de récurence suivante :

$$\boxed{f_n^*(s_n) = \min_{x_n \in A_{n+1}} \left\{ \sum_{i=1}^{|A_{n+1}|} p_n^i(s_n,x_n)\left(\lambda_{s_n,s_{n+1}^i} + f_{n+1}^*(s_{n+1}^i)\right)\right\}}$$

1.3 Généralisation

1.3.1 Programmation probabiliste

$$\begin{aligned}
f_n(s_n,x_n) &= C_n + f_{n+1}^*(s_{n+1})\\
f_n^*(s_n) &= \min \text{ ou } \max_{x_n \in X(s_n)} \{f_n(s_n,x_n)\}
\end{aligned}$$

1.3.2 Programmation probabiliste

$$\begin{aligned}
f_n(s_n,x_n) &= \sum_{i=1}^{|A_{n+1}|} p_n^i(s_n,x_n)\left(C_n^i + f_{n+1}^*(s_{n+1}^i)\right)\\
f_n^*(s_n) &= \min \text{ ou } \max_{x_n \in X(s_n)} \{f_n(s_n,x_n)\}
\end{aligned}$$

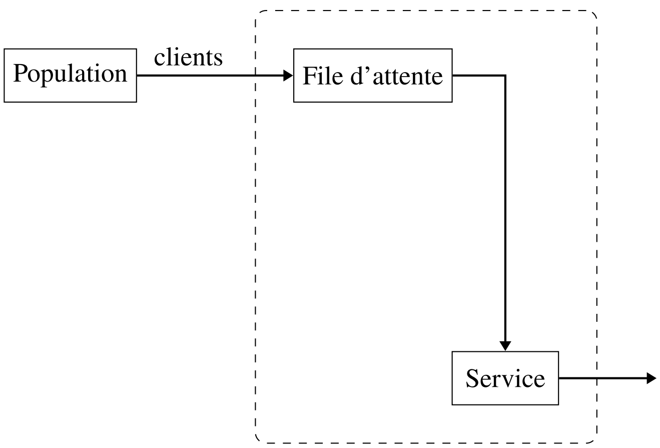
où $X(s_n)$ est ensemble des décisions possibles dans l'état s_n à l'étape n

2

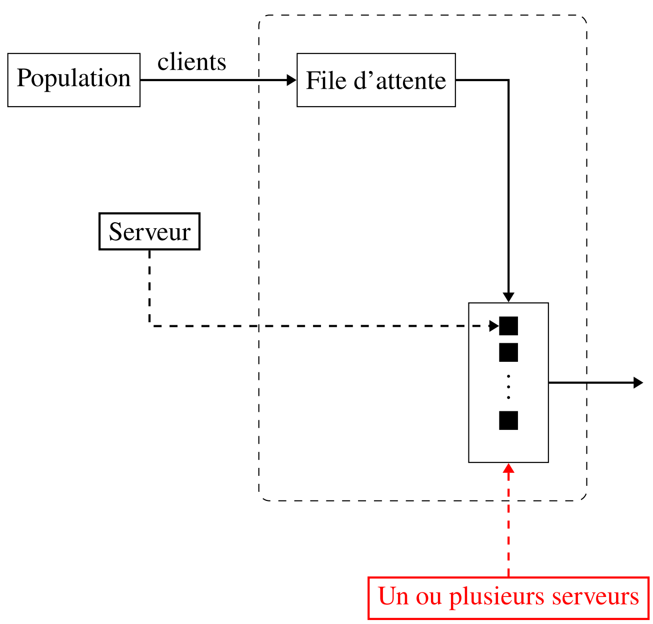
File d'attente

2.1 Principe

Un file d'attente est introduite lorsque le **demande** excède la capacité d'**offre de service**. Or, bien qu'**augmenter la capacité** entraîne une amélioration de la **qualité du service**, cela entraîne aussi une augmentation de **coût** .



La théorie des files d'attente permet de **modéliser** un tel problème pour aider le gestionnaire à **prendre une décision éclairée**.



2.2 Notation

- s : nombre de **serveurs**
- Soient n client dans le système :
  - λ_n : **Taux d'arrivée** des clients. On suppose que :

    $$\lambda_n = \lambda$$

    Autrement dit, le nombre de clients n dans le système n'affecte pas le taux t'arrivée λ et donc le taux d'arrivé ne varie par selon n : $\lambda_n = \lambda$.
  - μ_n : **Taux moyen** de service *pour l'ensemble des serveurs*.
  - μ : Taux moyen de service **par serveur** :

    $$\mu_n = s\mu, \quad \forall n \geqslant s$$

  - $1/\lambda_n$: Taux moyen entre **deux arrivées consécutives**
- $1/\mu$: **Temps** moyen de service *par serveur*.
- ρ : **Facteur d'utilisation** :

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Au début, l'état du système correspond à n, soit le nombre de client dans la file et le nombre de client **entrain d'être servis**

Le système atteint éventuellement un **équilibre** où il y a une distribution de probabilités $\{P(n) = P_n : n \in \mathbb{N}\}$

Note:-

L'équilibre est atteint tant que le **facteur d'utilisation** n'est pas excessif :

$$\rho < 1$$

Autre, la file **croît à l'infini**.

- P_n : **Probabilité** qu'il y ait n clients dans le système
- L : **Nombre moyen** de clients dans le système.
- L_q : **Nombre moyen** de client dans la file. Soit s représentant le service :

$$L = L_q + n_s$$

- W : **Temps moyen** passé par un client **dans le système**
- W_q : **Temps moyen** passé par un client **dans la file**

2.3 Formule de Little

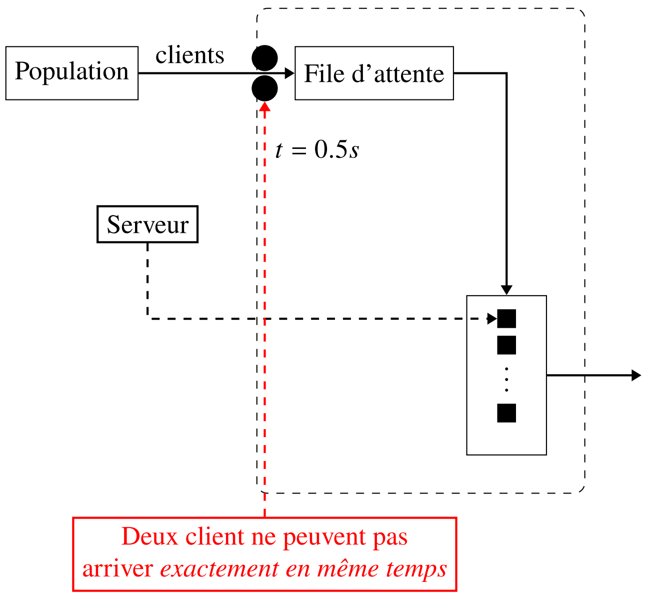
$$\begin{aligned} L &= \lambda W \\ L_q &= \lambda W_q \\ W &= W_q + 1/\mu \end{aligned}$$

2.4 Loi de Poisson Rappel

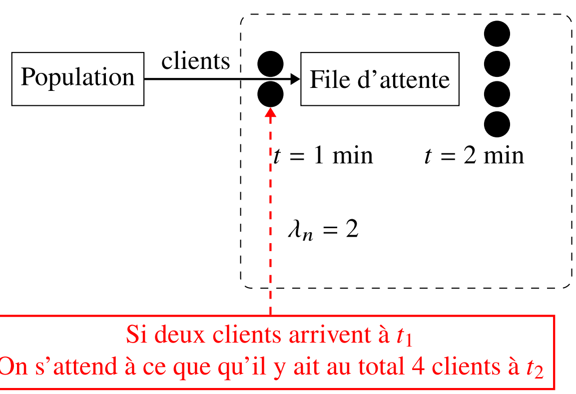
La **Loi de Poisson** permet de d'écrire le **nombre d'évènements** se produisant dans un intervalle de temps donnée.

Une distribution d'évènements obéit à la loi de Poisson si elle respecte **trois conditions** :

- ▷ Les évènements sont **indépendants**
- ▷ La probabilité que deux évènements se produisent sur un intervalle très court est **néglibable**.



- ▷ La probabilité d'occurence d'un évènement sur un intervalle donné est proportionnelle à la taille de l'intervalle



2.4.1 Formule mathématique de la loi de poisson

Soit i, le nombre **d'évenèment** observé dans un intervalle λ le **taux moyens** d'évènement observables, la probabilité d'observer un évènement i dans cet intervalle est donné par :

$$p(i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

2.5 Arrivée des clients

Le **taux d'arrivé des clients** λ est une **variable aléatoire** qui obéit à la Loi de Poisson.

Note:-
Par concidence, la variable représentant le taux d'arrivé λ a le même symbole qu'une variable alétoire quelconque obéissant à la Loi de Poisson et ayant un taux moyen de λ.

► Si le taux moyen d'arrivé est de $\lambda = 6$ client pas minutes, la probabilité qu'il y a 2 clients qui arrivent dans la prochaine minute est de :

$$p(2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} \approx 0.0446 = 4.46\%$$

2.5.1 Espérance du taux d'arrivé

L'espérance d'une variable aléatoire X correspond à sa **valeur moyenne sur le long terme**. Pour une loi de Poisson de paramètre λ, l'espérance est simplement λ. Cela signifie que si l' on observe le système sur une longue période, le nombre moyen de clients arrivant par unité de temps sera λ. Plus formellement, on a :

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \boxed{\lambda}$$

2.6 Variable aléatoire continue

Une **variable aléatoire continue** peut prendre une infinité de valeur sur un intervalle donnée. La probabilité qu'elle prenne une valeur spécifique est donc nulle, puisque l'ensemble des valeurs possibles est **infini**. pour étudier une variable aléatoire continue, on utilise plutôt une **fonction de densité de probabilité f(x)** qui satisfait les conditions :

- ▷ $\forall x, f(x) \geqslant 0$ et $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La **probabilité qu'une variable aléatoire continue X prenne une valeur dans l'intervalle $[a, b]$** est donné par :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.7 Variable aléatoire exponentielle

Il s'agit d'un **cas particulier** d'une variable aléatoire continue qui modélise le **temps entre deux évènements qui suivent un processus Poisson**—des évènements qui arrivent de manière alétoire mais à taux constant.

Une variable aléatoire exponentielle X a une **fonction de densité de probabilité** :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En intégrant par partie on obtien l'espérence $E[X]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

2.8 Arrivées consécutives des clients

Le temps t qui s'écoule entre deux arrivés consécutives est un **variable aléatoire exponentielle de paramètre λ**. La **fonction de densité de probabilité** est donc

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Soit T une variable aléatoire exponentielle, la probabilité qu'il s'écoule ($T > t$) plus d'une unité de temps entre deux arrivées consicutives de clients est équivalent à la probabilité qu'il n'y ai aucun client aui arrive pendant une unité de temps :

$$\begin{aligned} P(T > t) = 1 - P(T \leqslant t) = 1 - \int_0^t f(x) dx \\ = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

On a alors :

$$P(T > 1) = e^{\lambda} = P(X = 0) = p(0)$$

2.9 Temps de service

Le temps de service est **variable aléatoire exponentielle de paramètre μ**. La **fonction de densité de probabilité** est donc :

$$f(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

L'espérance, c'est-à-dire le temps moyen de service, est donné par $^1/_\mu$

3

File d'attente avec un serveur

De façon générale, $\boldsymbol{P_n}$ est la **probabilité qu'il y ait n client dans le système**—qu'il s'agisse de clients dans la file ou au service.

Il est possible dériver des équations d'états pour montrer que :

$$P_n = \frac{\lambda_n}{\mu_n} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0, \qquad \text{puisque } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

De façon générale, on a :

$$\boxed{P_0 = \rho^n P_0, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

Puisque n est une variable aléatoire l'espérence de n, soit L, le nombre moyen de client dans le système est donné par :

$$E[n] = L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

En dérivant partiellement, on obtient :

$$\boxed{L = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

Ou, puisqu'on sait que $p = {}^{\lambda}/_{\mu}$, on a :

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}}$$

Les équations de Little demeurent valides. Généralement, il suffit d'observer les variables fournies par une problème pour déduire les inconnues **en appliquant les formules de Little**. Lorsqu'on parvient à identifier soit L, L_q, W, ou W_q, il est possible de déduire toutes les autres inconnues.

3.1 Formule de Little

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \lambda W \\ L_q &= \lambda W_q \\ W &= W_q + {}^{1}/_{\mu} \end{aligned}}$$

4

File d'attent avec plusieurs serveurs

On considère **deux scénarios** :

- $n < s$ où le service augmente selon le nombre de clients
- $n \geqslant s$ où le le taux moyen de service μ reste stable à $s\mu$

Lorsque $n < s$, $\boldsymbol{P_n}$ la **probabilité qu'il y ait n clients dans le système** est donnée par :

$$\boxed{P_n = \frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^n}{n!} P_0, \quad n = 1, 2, \ldots, s}$$

Pour simplifier la notation, on considère le facteur $C_n = \frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^n}{n!}$:

$$\boxed{P_n = C_n P_0, \quad n = 1, 2, \ldots, s}$$

Lorsque $n \geqslant s$, $\boldsymbol{P_n}$ la **probabilité qu'il y ait n clients dans le système** est donnée par :

$$\boxed{P_n = \frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^n}{s^{n-s} s!} P_0, \quad n = s+1, s+2, \ldots}$$

Pour simplifier la notation, on considère le facteur C_n :

$$\boxed{\frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^n}{s^{n-s} s!}}$$

Puisque P_n est une **distribution de probabilité**, nous avons $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. De là, nous pouvons montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_0 = 1$$

Nous pouvons réarranger les expressions pour montrer que :

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right)^{-1}$$

En simplifiant l'expression, on obtient la formule qui permet de déterminer la **probabilité d'être à l'état 0 dans une file d'attente de plusieurs serveur** :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^n}{n!} + \left(\frac{({}^{\lambda}/_{\mu})^n}{s!} \cdot \frac{1}{1-\rho}\right)\right)^{-1}}$$

Soit $L_q = 0 \cdot P_0, + \cdots + 0 \cdot P_{s-1} + \sum_{n=s}^{\infty} (n-1) P_n$, il est possible de dériver l'expression pour obtenir une formule simplifiée de L_q :

$$\boxed{L_q = \frac{P_0 \, (\lambda/\mu)^s}{s! \, (1-\rho)^2}}$$

5

Problème du Camelo

Le problème illustre une situation où un camelot commande des journaux **la veille** et veut les vendre **le lendemain**. Dans ce scénario, la **demande** est une variable aléatoire discrète puisqu'il est impossible de savoir à l'avance la quantité de personne qui achetera des journaux.

5.1 Notation

- x : Nombre de journaux commandés la veille
- c : Coût de chaque journal
- p : Prix de vente de chaque journal
- D : Variable aléatoire représentant la demande

Soient les **bornes inférieure et supérieure** $\underline{d}$ et $\overline{d}$ respectivement, on a la fonction de probabilité suivante :

$$p(d) = P(D = d), \quad \underline{d} \leqslant d \leqslant \overline{d}$$

Si le demande est inférieure à la quantité de journaux commandé la veille, le camelot vendras **autant de journaux que la demande**, soit d. Sinon, il vendra la **totalité des journaux qu'il a commandé**, soit x :

$$\text{Journaux vendus} = \min\{d, x\} = \begin{cases} d & \text{si } d < x \\ x & \text{si } d > x \end{cases}$$

$$\text{Profit : } A(d,x) = -cx + p \min\{d,x\}$$

Le profit espéré, la moyenne du profit sur le long terme est, est simplement l'espérance de la variable aléatoire du profit, $A(d,x))$:

$$\begin{aligned} E(D(D,x)) &= \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} A(d,x) P(D=d) = \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} (-cx+p) P(D=d) \\ &= -cx \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} P(D=d) + p \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} \min\{d,x\} P(D=d) \\ &= -cx(1) \qquad\qquad + p \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} \min\{d,x\} P(D=d) \\ &= -cx \qquad\qquad\quad + p \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} \min\{d,x\} P(D=d) \end{aligned}$$

On a alors la formule du profit espéré $A(x)$:

$$\underbrace{E(A(D,x))}_{A(x)} = -cx + p \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} \min d, x P(D=d)$$

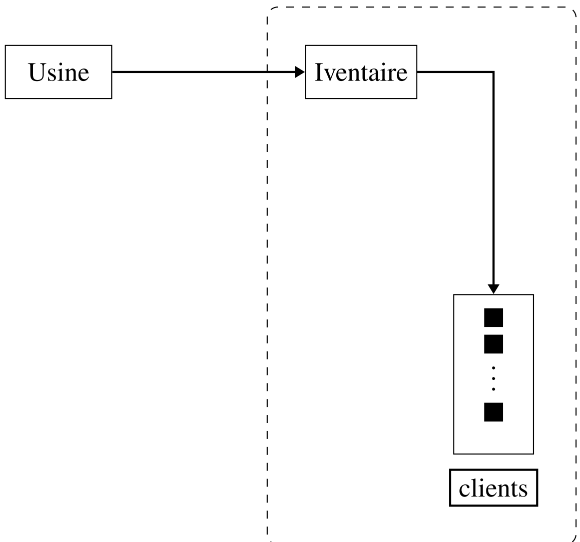
Pour maximiser le profit espérer, il faut donc déterminer la quantité optimale x^* de journaux à commander :

$$\boxed{\max_{\underline{d} \leqslant x \leqslant \overline{d}} \{A(x)\} = \max_{\underline{d} \leqslant x \leqslant \overline{d}} \left\{ -cx + p \sum_{d=\underline{d}}^{\overline{d}} \min\{d,x\} P(D=d) \right\}}$$

6

Modèle inventaire

Il s'agit d'un problème où déterminer **quand acheter** ou **combien** de lot il faut acheter, en considérant les contraintes de coût d'inventaire, de coût fixe par lot, de coût de lot par unité de produit de demande, etc.

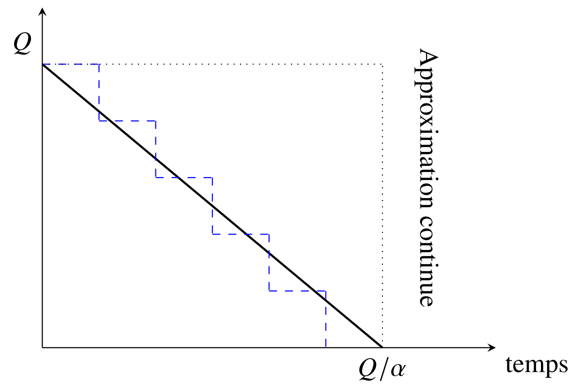


6.1 Modèle de commande périodique en lot

On considère que la gestion se fait en considérant le demande et en lots et en décidant quant à la **quantité optimale** Q^* d'unité de produit dans un lot à acheter selon **contraintes de coût**

6.1.1 Notation

- a : Taux de **demande**—nb. unités de produit par unité de temps
- K : Coût **fixe** d'aquisition d'**un lot**
- c : Coût d'acquisition par unité du produit
- h Coût d'inventaire par unité du produit par unité de temps
- Q Nombre d'**unités de produit** das un lot



La logeur d'un cycle est donnée par $\dfrac{Q}{a}$. En effet, si on commande Q unité et vend un quantité $a = Q$, il restera $Q - Q = 0$ unités à la fin du cycle.

En considérant $Q > 0$, le niveau **moyen d'inventaire** et le **coût moyen d'inventaire** respectivement, son donné par

$$^{Q}/_{2}, \quad ^{hQ}/_{2}$$

On a alors le **coût d'inventaire par cycle** :

$$^{hQ}/_{2} \cdot {}^{Q}/_{a} = {}^{hQ^2}/_{2a}$$

Soient le **coût d'inventaire par cycle** $^{hQ^2}/_{2a}$, et le **coût d'acquisition par cycle** $K + cQ$, on a le coût total par cycle :

$$K + cQ + {}^{hQ^2}/_{2a}$$

Le coût moyen par unité de temps est alors :

$$T(Q) = \frac{K + cQ + {}^{hQ^2}/_{2a}}{^{Q}/_{a}}$$

En dérivant paritiellement, on obtient :

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}}$$

6.2 Modèle de demande variable

On divise le temps en **périodes** et suppose que la demande peut varier selon la période.

6.2.1 Notation

- r_n : Nombre d'**unités du produit** demandées. à la période $n = 1, \ldots, N$
- K : **Coût fixe** d'acquisition d'unités du produit.
- c : Coût d'acquisition **par unité du produit**.
- h : **Coût d'inventaire** par unité de produit par période.

Il faut donc déterminer le nombre d'unité du produit à obtenir **au début de chaque période** afin de **minimiser le coût** sur N périodes **tout en satisfaisant la demande**.

6.2.2 Programmation dynamique

Soient n **périodes**, un état s_n correspondant au nombre d'**unités en inventaire** au début de la période n, et une variable x_n correspondant au **nombre d'unités à acquérir** au début de la périodes n, la contribution directe à la valeur de l'objectif est donnée par :

$$B_n(s_,x_n) = \begin{cases} K + cx_n + h(s_n + x_n - r_n) & \text{si } x_n > 0 \\ h(s - r_n) & \text{si } x_n = 0 \end{cases}$$

Le coût d'acquisition jusqu'à la fin de la période N si s_n unités sont en inventaire et la décision est prise d'acquérir x_n nouvelles unités au début de la période n est alors :

$$f_n(s_n, x_n) = B_n(s_n, x_n) + f^{n+1}(s_n + x_n - r_n)$$

Le coût **coût minimal d'acquisition**, $f_n(s_n)$ est donné par :

$$f_n^{s_n} = \min_{x_n \geqslant \max\{0, r_n - s_n\}} \left\{ f_n(s_n, x_n) \right\} = f_n(s_n, x_n^*)$$

On a donc la formule de récurrence :

$$\boxed{f_n^*(s_n) = \min_{x_n \geqslant \max\{0, r_n - s_n\}} \left\{ B_n(s_n, x_n) + f_{n+1}(s_n + x_n - r) \right\}}$$