IFT-1575
Modèles de recherche opérationnelle

Introduction

Franz Girardin

26 octobre 2024

Table des matières

1

Modélisation

Définition de la prog. linéaire

Branche de la *Recherche Opérationnelle* où on utilise des **modèles** mathématiques qui font appel à des fonctions **linéaires** pour résoudre un problème. Par fonction linéaire, on entend des fonctions qui n'impliquent que des variables de **degré 1**.

Composantes du modèle

Il faut identifier **l'action** sur laquelle on doit prendre une décision et la représenter par une **variable de décision**. À cette variable sera associée un constante qui représente le **niveau** de l'action.

L'objectif

S'exprime sous la forme d'une **fonction mathématique** qui représente l'intention. P. ex. **maximiser le profit** correspondrait à :

$$\text{Max } 5x + 3y$$

Contraintes

Elles peuvent dépendre du **contexte du problèmes** ou peuvent être plus générales. P. ex. la **non-négativité** d'une variable est une contraintes générale applicable à certains problème :

$$\begin{array}{ll} x \leqslant 50 & \text{Production maximale de vin blanc (litres)} \\ y \leqslant 60 & \\ x + y \leqslant 80 & \text{Production maximale \textbf{totale} de vin} \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 & \text{Non négativité} \end{array}$$

Terminologie de base

Une **solution réalisable** est un **vecteur** : de valeurs

$$\vec{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$$

appartenant à $X \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque composante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respecte **toutes les contraintes** du problème. On peut conceptualiser X comme étant un ensemble composé de vecteurs lignes où chaque vecteur ligne est une solution réalisable :

$$X^n \subset R^n : \vec{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in X^n \implies f(\vec{x}) = f_{\text{réalisable}}$$

Une solution optimale est une solution réalisable qui maximise ou minimise la fonction objectif $z(x)$. Autrement dit, c'est une solution réalisable qui produit la **meilleure valeur possible** pour la fonction objectif.

> **Note:-**
> Un modèle peut présenter une **infinité** de solution optimales.

2

Maximisation et minimisation

Théorème de maximisation

La maximisation d'un objectif $f(w)$ est équivalent à l'**opposé** de la minimisation :

$$\text{Max } f(w) \leftrightarrow \text{Min } -f(w)$$

Preuve

Considérons le problème :

$$\begin{array}{l} \text{Max } f(w) \\ \text{s.a.} \\ \qquad w \in X \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Soit $w_{\text{opt.}}$ un point de X où $f(w)$ atteint son **maximum**. On a :

$$f\left(w_{\text{opt}}\right) \geqslant f(w) \quad \forall w \in X \leftrightarrow -f\left(w_{\text{opt}}\right) \leqslant -f(w) \quad \forall w \in X$$

Autrement dit, si le vecteur ligne $w_{\text{opt.}}$ produit une solution optimale $f(w_{\text{opt.}})$, alors le résultat de tous les autres vecteurs lignes w appartenant à X— c'est-à-dire $f(w)$—seront nécessairement plus petit ou égal à cette solution optimale : $f(w) \leqslant f(w_{\text{opt.}})$. Cela implique aussi que la négation de la solution optimale—c'est-à-dire -$f(w_{\text{opt.}})$ sera plus plus petite ou égale à tous les autres $-f(w)$. Par conséquent, $-f(w_{\text{opt}})$ est la valeur minimale possible parmi tous les $-f(w)$ possibles. On a alors :

$$\boxed{-\text{Max} f(w) = -f\left(w_{\text{opt}}\right) = \text{Min } -f(w)}$$

Ainsi, qu'on maximise $f(w)$ ou qu'on minimise $-f(w)$, on retrouve la même solution optimale w_{opt}.

3

Algorithme du Simplexe

Soit le problème suivant. Un restaurateur dispose de **14** oursins, **24** crevettes, **18** huîtres. Deux types d'assiètes de fruit de mer sont offertes par le restaurateur :

8$: 5 oursins, 2 crevettes 1 huître

6$: 3 oursins, 3 crevettes 3 huîtres

L'objectif est de déterminer le **nombres d'assiètes** de chaque type à préparer afin de **maximiser** le revenu total du restaurateur tout en respectant les disponibilité de fruits de mer.

Contraintes

$$\begin{array}{rl} 5x + 3y \leqslant 30 & \text{Oursins} \\ 2x + 3y \leqslant 24 & \text{crevettes} \\ x + 3y \leqslant 18 & \text{Huîtres} \\ & \\ x, y \geqslant 0 & \text{Non-négativité} \\ & \\ z = 8x + 6x & \text{Objectif} \end{array}$$

En considérant que la maximisation d'un objectif est équivalente à la minimisation de l'opposé de la minimisation on a :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x - 6y \\ \text{s.a.} & \\ & 5x + 3y \leqslant 30 \\ & 2x + 3y \leqslant 24 \\ & x + 3y \leqslant 18 \\ & \\ & x, y \quad \geqslant 0 \\ & z = 8x + 6y \end{array}$$

Forme standard

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & -8x-6y \\
\text{s.a.} & \\
& 5x+3y+\boldsymbol{u} \leqslant 30 \\
& 2x+3y+\boldsymbol{p} \leqslant 24 \\
& x+3y+\boldsymbol{h} \leqslant 18 \\
& \\
& x,\ y,\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{p},\boldsymbol{h} \geqslant 0 \\
& z = 8x+6y
\end{array}$$

Choisir les variables indépendantes

Supposons que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des ***variables indépendantes***. Exprimons les ***variables dépendantes*** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}$ en fonction de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

$$\begin{aligned}
u &= 30-5x-3y \\
p &= 24-2x-3y \\
h &= 18-1x-3y \\
-z &= \quad -8x-6y
\end{aligned}$$

En supposant que $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{x=y=0 \implies \boldsymbol{u}=30, \boldsymbol{p}=24, \boldsymbol{h}=18, z=0}$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant x ; on considère donc x comme ***variable d'entrée***. Soit $y=0$, on a :

$$\begin{aligned}
u &= 30-5x-3y & \implies \quad & x \leqslant 30/5 = \mathbf{6} \\
p &= 24-2x-3y & \implies \quad & x \leqslant 24/2 = \mathbf{12} \\
h &= 18-1x-3y & \implies \quad & x \leqslant \mathbf{18}
\end{aligned}$$

Explication : Soit $u = 30-5x-3y \leftrightarrow u = 30-5x-3(0)$, on sait que pour respecter la contrainte de non négativité, la quantit éu doit être telle que $u = 30-5x \geqslant$. Cela se simplifie par :

$$\boxed{x \leqslant 6}$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de x jusqu'à **6**. L'équation limitante est celle qui implique u ; on dit alors que $\boldsymbol{u}$ est le ***variable de sortie***. On **pivote**. La variable u prend la place de x en tant que variable indépendante ; $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{y}$ sont les ***nouvelles variables indépendantes***.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p, et h en fonction de u et y :

$$u \quad = 30-5x-3y \textbf{ et } \boldsymbol{u},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = 6 - 1/5u - 3/5y}$$

$$p \quad = 24-2x-3y \textbf{ et } \boldsymbol{u},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{p = 12 + 2/5u - 9/5y}$$

$$h \quad = 18-1x-3y \textbf{ et } \boldsymbol{u},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{h = 12 + 1/5u - 12/5y}$$

$$z \quad = 0-8x-6y \textbf{ et } \boldsymbol{u},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$z \quad = 0-8(6-1/5u-3/5y)-6y$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z = -48 + 8/5u - 6/5y}$$

Système suite au pivot

$$\begin{aligned}
x &= 6 \ -1/5u-3/5y \\
p &= 12-2/5u-9/5y \\
h &= 12-1/5u-12/5y \\
& \\
z &= -48+8/5x-6/5y
\end{aligned}$$

Sachant que $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{y}$ sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{u=y=0 \implies \boldsymbol{x}=6, \boldsymbol{p}=12, \boldsymbol{h}=12, z=-48}$$

En observant le système, on constate qu'il possible de **minimiser** z en augmentant y ; on considère donc y comme ***variable d'entrée***. Soit $u=0$, on a :

$$\begin{aligned}
x &= 6-1/5u-3/5y & \implies \quad & y \leqslant \mathbf{10} \\
p &= 12-2/5u-9/5y & \implies \quad & y \leqslant \mathbf{20/3} \\
h &= 12-1/5u-12/5y & \implies \quad & y \leqslant \mathbf{5}
\end{aligned}$$

Pivot

Le système est limité par la diminution de y jusqu'à **5** L'équation limitante est celle qui implique h ; on dit alors que $\boldsymbol{h}$ est le ***variable de sortie***. On **pivote**. La variable h prend la place de u en tant que variable indépendante ; $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{y}$ sont les ***nouvelles variables indépendantes***.

On peut utiliser les équations du système pour extrapoler x, p, et h en fonction de h et y :

$$h \quad = 12-1/5u-12/5y \textbf{ et } \boldsymbol{h},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{y = 5 + 1/12u - 5/12h}$$

$$x = 6-1/5u-3/5y \textbf{ et } \boldsymbol{h},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x = 6-1/5u-3/5(5+1/12u-5/12h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{x = 3 - 1/4u - 1/4y}$$

$$p = 12-2/5u-9/5y \textbf{ et } \boldsymbol{h},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$p = 12-2/5u-9/5(5+1/12u-5/12h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{p = 3 + 1/4u - 3/4y}$$

$$z \quad = -48+8/5u-6/5y \textbf{ et } \boldsymbol{h},\boldsymbol{y} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$z = -48+8/5u-6(5+1/12u-5/12h)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z = -54 + 3/2u - 1/2h}$$

Système après le pivot

$$
\begin{aligned}
x \qquad\qquad &= 3 - 1/4u - 1/4h \\
p \qquad &= 3 + 1/4u + 3/5h \\
y &= 5 + 1/12u - 5/12h \\
\\
z &= -54 + 3/2u - 1/2h
\end{aligned}
$$

Sachant que ***u*** et ***h*** sont **fixés à 0**, on a la **solution** :

$$\boxed{u = h = 0 \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54}$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u, ni la valeur de $h$car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes **à l'optimum** !

Résumé de l'algorithme

► **Compter** le nombre d'équations. Un système en **forme standard** de n équations nécessite une **variables d'équart** par équation, pour un total de n variables d'équart.

Note:-

Si le système sous sa forme standard possède n variables inconnues, ce système doit avoir *au minimum* n équations pour pouvoir trouver une **solution unique**. Autrement, le sytème pourrait admettre **une infinité de solutions**.

► **Exprimer** les **variables d'équart** $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}$, etc. et l'objectif z en fonction des des **variables fixées à zéro**, c'est-à-dire les variables inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

► **Identifier** la variable dont l'↑ réduit le plus z ; cette variable minimise l'objectif et est donc la **variable d'entrée** x_s.

▷ Soit la variable x_s, trouver la variable x_r qui limite le plus l'augmentation de x_s. Il s'agit de la **variable de sortie** x_r.

► **Fixer** x_r à zéro. La variable de sortie x_r prend la place de la variable d'entrée x_s. Exprimer x_s et les autres variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, ainsi que l'objectif z en fonction de x_r.

► **Évaluer** le nouveau système d'équation obtenu.

▷ **Si l'augmentation** **d'aucune** variable dans la fonction objectif n'entraîne une diminution de l'objectif, on a la **solution optimale**. L'algorithme est terminé.

▷ Si l'augmentation **d'au moins une** variable entraîne la diminution de l'objectif, la solution n'est pas optiomale et il faut poursuivre avec **une autre itération** de l'algorithme.

4

Représentation forme tableau

Forme standard

Soit le sytème suivant sous la forme standard, nous allons utiliser **la représentation sous forme de tableau** pour appliquer l'algorithme du simplexe.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Min} & -8x - 6y & & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
& 5x + 3y + u & & & \leqslant 30 \\
& 2x + 3y & + p & & \leqslant 24 \\
& x + 3y & & + h & \leqslant 18 \\
& & & & \\
& x, \quad y, \quad u, p, h & & & \geqslant 0 \\
& z = 8x + 6y & & &
\end{array}
$$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.1 – État initial de la **forme standard**

Le tableau doit avoir la même allure que la forme standard ; il doit être possible d'identifier une **variable** par ligne du tableau. **Par exemple**, Le ligne surlignée en rouge engendre l'équation :

$$5x + 3y + u = 30$$

Dans ce contexte, on sait que u est une **variable dépendante** (v.d.) et le terme de droite qui lui est associé (t.d.) est 30.

Tout comme durant la résolution algébrique, on constate que si u, p et h sont des **variables dépendantes** et que x et y sont des variables indépendantes **fixées à zéro**, la solution associée à ce système est :

$$\boxed{[x, y = 0] \implies u = 30, p = 24, h = 18, z = 0}$$

Choix de la variable d'entrée

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.2 – Variable d'entrée choisie

On choisit la variable dont l'augmentation rend l'objectif z plus petit et négatif ; il sagit de x qui est la **variable d'entrée**.

Choix de la variable de sortie

Soit une ligne du tableau l, et la variable d'entrée x_s, pour trouver la variable dépendante **limite davantage l'augmentation** de la **variable d'entrée**, il suffit d'utiliser la formule :

$$\boxed{\lim \; = \text{t.d.}(l) \;\div\; x_s(l)}$$

Exemple

$$
\begin{aligned}
\lim(u) &= \text{t.d.}(u) \div x(u) = 30 \div 5 = 6 \\
\lim(p) &= \text{t.d.}(p) \div x(p) = 24 \div 2 = 12 \\
\lim(h) &= \text{t.d.}(h) \div x(h) = 18 \div 1 = 12
\end{aligned}
$$

Dans ce cas-ci, u limite davantage l'augementation de x ; u est donc la variable de sortie. x_r.

Pivot

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.3 – Coefficient pivot

Le coefficient à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée x et de la rangée de la variable de sortie u est le ***coefficient du pivot***. Le **pivot** est l'action par laquelle on modifie le tableau pour que la variable d'entrée prenne la place de la variable de sortie.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.4 – État suite au pivot

Pour que x soit ***variable dépendante*** à la place de u dans la première ligne, il faut un coefficient de 1 sous x dans la première ligne et des coefficients de 0 dans les autres lignes. Cela revient à diviser la ligne de la variable de sortie par le ***coefficient du pivot*** .

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				$30/5$
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.5 – Division par le cofficient du pivot

Pour exprimer chaque variable dépendante en terme de la variable d'entrée x par le coefficient c_e sous la colonne de la variable d'entrée.

Exemple

$$\boxed{x = 6 - 3/5y - 1/5u}$$

$$\begin{aligned}
& p = 24 - 2x - 3y \\
\leftrightarrow\ & p = 24 - 2(6 - 3/5y - 1/5u) - 3y \\
\leftrightarrow\ & p = 24 - 2(6 - 3/5y - 1/5u) + 2x - 2x - 3y \\
\leftrightarrow\ & 2x + 3y + p + 2(6) - 2(3/5y + 1/5u) - 2x = 24 \\
\leftrightarrow\ & 2x + 3y + p - 2(x + 3/5y + 1/5u) = 24 - 2(6)
\end{aligned}$$

Soit $ligne(p) : 2x+3y+p = 24$ et $ligne(x) : x+3/5+1/5 = 6$, Cela revient à effectuer $ligne(p) - 2 \times ligne(x)$. On obtient alors le tableau suivant

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.6 – $ligne(p) - 2 \times ligne(x)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	-8	-6				1	0

Table 4.7 – $ligne(h) - 1 \times ligne(x)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

Table 4.8 – $ligne(-z) + 8 \times ligne(x)$

Nous avons complété **une itération** de l'algorithme. On obtien alors la solution suivante :

$$\boxed{[y, u = 0] \implies x = 6, p = 12, h = 12, z = -48}$$

Choix de la variable d'entrée

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	$3/5$	$1/5$				6
p	0	$9/5$	$-2/5$	1			12
h	0	$12/5$	$-1/5$		1		12
$-z$	0	$-6/5$	$8/5$			1	48

La variable d'entrée est donc $x_s = y$

Choix de la variable de sortie

Démonstration

$$\begin{aligned}
\lim(x) &= \text{t.d.}(x) \div y(x) = 6 \div 3/5 = 10 \\
\lim(p) &= \text{t.d.}(p) \div y(p) = 12 \div 9/5 = 20/3 \\
\lim(h) &= \text{t.d.}(h) \div y(h) = 18 \div 12/5 = 5
\end{aligned}$$

La variable de sortie est donc $x_r = h$, puisqu'après $y \leqslant 5$, h devient négatif, ce qui viole la contrainte de **non négativité**.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	−2/5	1			12
h	0	12/5	−1/5		1		12
$-z$	0	−6/5	8/5			1	48

TABLE 4.9 – Coefficient de pivot

Puisque le pivot est **12/5**, on divise $ligne(h)$ par cette même valeur pour que y soit variable dépendante à $ligne(h)$.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	−2/5	1			12
y	0	1	−1/12		5/12		5
$-z$	0	−6/5	8/5			1	48

TABLE 4.10 – $ligne(h) \div 12/5$ devient $ligne(y)$

On soustrait maintenant $ligne(y)$ à $ligne(p)$ et $ligne(x)$ de façon à avoir un coefficient de 0 sous y.

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	0	−1/4	1	−3/4		3
y	0	1	−1/12		5/12		5
$-z$	0	−6/5	8/5			1	48

TABLE 4.11 – $ligne(p) \; - \; 9/5 \; ligne(y)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	0	1/4	0	−1/4		3
p	0	0	−1/4	1	−3/4		3
y	0	1	−1/12		5/12		5
$-z$	0	−6/5	8/5			1	48

TABLE 4.12 – $ligne(x) \; - \; 3/5 \; ligne(h)$

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	0	1/4	0	−1/4		3
p	0	0	−1/4	1	−3/4		3
y	0	1	−1/12		5/12		5
$-z$	0	0	3/2	0	1/2	1	54

TABLE 4.13 – $ligne(-z) \; - \; 6/5 \; ligne(h)$

Nous avons complété **une seconde itération** de l'algorithme. Le système est associé à la solution :

$$\boxed{[u, h = 0] \implies x = 3, p = 3, y = 5, z = -54}$$

Il n'est pas intéressant d'augmenter ni la valeur de u, ni la valeur de h car la valeur de z augmente. Ainsi, nous sommes à l'optimum.

Concept de solutions de base

Soit un système de m équations et de n variables, l'algorithme du simplexes considère les solutions où $n - m$ variables sont fixées à zéro et sont donc des **variables indépantes**. Ces solutions sont appeleés **solutions de bases**. Avec n variables et $n - m$ *variables fixées à zéro*, il y a le nombre suivant de solutions de bases possibles :

$$\boxed{\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}}$$

Exemple Soit un système de $n = 5$ variables et $m = 3$ équations, il y aura le nombre suivant de solutions de base possibles :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Résumé de l'algorithme en forme tableau

► **Organiser** les équations présentées sous la **forme standard** en un tableau. La 1ere colonne contient `v.d.`, puis, dans chaque rangée subséquente de cette colonne, chacune des variable dépendante et, finalement, l'objectif négatif $-z$. La **dernière colonne** contient `t.d.` puis, dans chacune des rangées subséquentes de cette colonne, les termes de droite des équations correspondantes.
► **Choisir** la variable d'entrée $\boldsymbol{x_s}$; il s'agit de la variable dépendante dont l'augmentation minimise davantage l'objectif.

$$\boxed{x_s = x : -z \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} -\infty}$$

► **Choisir** la variable de sortie $\boldsymbol{x_r}$. Il s'agit de la variable qui limite davantage l'augmentation de la variable de sortie, puisqu'elle atteint 0 plus tôt que toutes les autres variable lorsque x_e augmente.
► **Identifier** le coefficient pivot. Il s'agit du coefficient qui se trouve à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée et la rangée de la variable de sortie.
► **Diviser** la rangée de la variable de sortie par le coefficient du pivot.
► **Soustraire** chacune des autres rangées par un facteur $f \times ligne(x_r)$, de manière à obtenir 0 dans la colonne de la variable de sortie (la même colonne que le coefficient pivot).

5

Résolution Graphique

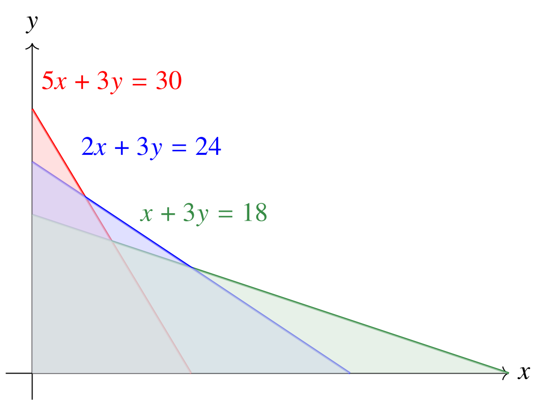
Représentation graphique selon l'équation

Considérons le système d'équation suivant sous la forme standard :

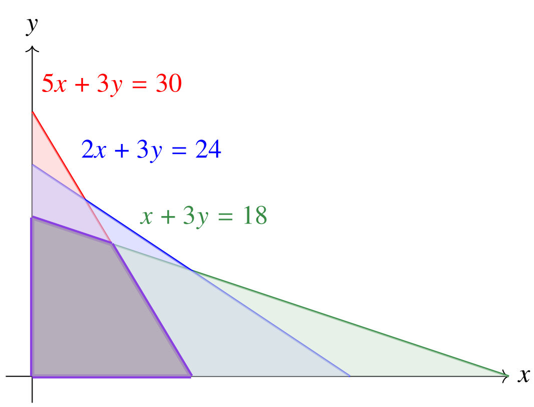
$$\begin{aligned} \text{Min} - z = \quad & -8x - 6y \\ & \text{s.a.} \\ \\ 5x + 3y &\leqslant 30 \\ 2x + 3y &\leqslant 24 \\ x + 3y &\leqslant 18 \\ \\ x, y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir chacune des équations pour la représenter par une courbe. Soit l'équation suivante, nous avons la droite correspondante :

$$5x + 3y = 30$$



Puisque l'équation contient une inégalité, nous savons que l'ensemble des points qui satisfont la contrainte se trouve nécessairement sous la courbe.



Les solutions possibles se trouvent donc dans la zone délimitée par les courbes. La solution **optimale** est se trouve au sommet de polygôme définissant la zone.

pour la solution optimale $\hat{x} : (a, b) \in \mathbb{R}^2$ nous avons :

$$\hat{x} \in \Big\{(0,6),\ (3,5),\ (6,0),\ (0,0)\Big\}$$

Selon les options possibles, la solution optimale est donc $\hat{x} = (3, 5)$ et on a

$$\boxed{-z = -8(3) - 6(5) = -24 - 30 = -54}$$

Selon la théorie vue précedemment, nous savons que le nombre de solutions de bases différentes dans l'espace est donné par :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \mathbf{10}$$

Or, le polyptote ne contient que **4** *coins* et donc **4** soolution optimales. Cela est dû au fait que l'algorithme du simplexe ne peut visiter que 4 solutions de base **réalisables**. Les solutions restantes sont des solutions de bases **non réalisables**.

6

Simplexe en formulation générale

Définitions et forme standard

Soit un système de programmation linéaire qui comprend $\boldsymbol{n}$ **variables** et $\boldsymbol{m}$ **contraintes** et $n \geqslant m$, nous avons les entités suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_j} &::= && \text{variables de décision} \\ \boldsymbol{c_j} &::= && \text{coeficient de } \boldsymbol{x_j} \text{ dans l'objectif} \\ \boldsymbol{a_{ij}} &::= && \text{coefficient de } \boldsymbol{x_j} \text{ dans la contrainte } \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{b_i} &::= && \text{terme de droite dans la contrainte } \boldsymbol{i} \end{aligned}$$

Les **variables de décisions** sont donc $x_j, j = 1, 2, \cdots n$ et chacune d'elles est présente dans une colonne $\boldsymbol{j}$ du tableau. Il y a $\boldsymbol{m}$ rangées d'équations dans le tableau, excluant la rangée de l'objectif.

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{s.a.} \\ \\ &a_{11}x_1 + a12x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a22x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + am2x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \\ &x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Cela revient à la simplification suivante :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \ \textbf{s.a.} \sum_{n=j}^{n} a_{ij} = b_i, i = 1, \ldots, m$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n$$

Représentation tableau de la forme générale

v.d.	x_1	x_2	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	$-z$		t.d.
x_1	1						$\overline{a}_{1,m+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{1s}$	$\cdots$	$\overline{a}_{1n}$			$\overline{b}_1$
x_2		1					$\overline{a}_{2,m+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{2s}$	$\cdots$	$\overline{a}_{2n}$			$\overline{b}_2$
$\vdots$			$\ddots$					$\ddots$		$\ddots$				$\vdots$
x_r				1			$\overline{a}_{r,m+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{rs}$	$\cdots$	$\overline{a}_{rn}$			$\overline{b}_r$
$\vdots$					$\ddots$		$\ddots$	$\ddots$		$\ddots$	$\overline{a}_{1n}$			$\vdots$
x_m						1	$\overline{a}_{m,m+1}$	$\cdots$	$\overline{a}_{ms}$	$\cdots$	$\overline{a}_{mn}$			$\overline{b}_m$
$-z$							$\overline{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\overline{c}_s$	$\cdots$	$\overline{c}_n$	1		$\overline{z}$

La solution associée est :

$$x_1 = \overline{b}_1, \quad x_2 = \overline{b}_2, \quad \ldots, \quad x_m = \overline{b}_m,$$
$$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0, \quad z = \overline{z}$$

Choix de la variable d'entrée

La variable d'entrée $x_s = x_j$ est la variable x_j qui minimise z et est donc **celle qui est la plus négative**.

À la fin d'une itération, si tous les nouveaux coefficients sont positifs—c'est-à-dire $\forall j, \ \overline{c}_j \geqslant 0$—**alors** l'algorithme se termine car l'objectif ne peut plus être amélioré.

Scénario 1 : Tous les $\overline{c}_j x_j$ sont positifs

$$\left[\forall j, \ \overline{c}_j x_j \geqslant 0\right] \implies z \longrightarrow \infty \ \textbf{fin de l'algorithme}$$

Scénario 2 : Au moins un $\overline{c}_j x_j$ est négatif

Si $\overline{c}_j < 0$ pour au moins un j, la variable d'entrée x_s est choisie telle que :

$$\overline{c}_s = \min\left\{\overline{c}_j : j = 1, \ldots, n\right\}$$

Pour chaque ligne **variable dépendante** du tableau, on a :

$$x_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{is} x_s, \quad i = 1, \ldots, m$$

Exemple

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
u	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

TABLE 6.1 – État initial de la **forme standard**

Soit $x_1 = u, i = 1, x_s = x, a_{is} = 5$ on a :

$$u = 30 - 5x$$

Augmentation de la variable d'entrée

Scénario 1 : Tous les $\overline{a}_{is}$ sont négatifs

Si $\overline{a}_{is} < 0$ pour tout i, l'augmentation de x_s entraîne une augmentation des x_i, rendant le problème **non borné inférieurement**. Dans l'exemple précédent, si a_{is} était tel que $a_{is} = -5$ au lieu de $a_{is} = 5$, l'augmentation de x serait non bornée ; u serait toujours positif qu'importe la valeur de x. Lorsqu'un a_{is} est positif, l'augmentation de x_s est limitée par la contraite de non négativité de x_i :

$$x_i \geqslant 0 \implies \overline{b} - \overline{a}_{is} x_s \geqslant 0$$

Exemple

$$u \geqslant 0 \implies [30 - 5x \geqslant 0] \implies x \leqslant \frac{30}{5}$$

Scénario 2 : Au moins un $\overline{a}_{is}$ est positif

Si $\overline{a}_{is} > 0$ pour au moins un i, x_s est limité par :

$$x_r = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}} : \overline{a}_{is} > 0\right\}$$

La variable x_r correspondante devient la variable de sortie.

Pivot

Le pivot échange la variable d'entrée x_s avec la variable de sortie x_r. La ligne pivot (ligne r) est divisée par le coefficient de pivot $\overline{a}_{rs}$, puis les autres lignes sont ajustées pour obtenir des zéros dans la colonne x_s.

Division de la ligne pivot

Les nouveaux coefficients de la ligne pivot sont :

$$\tilde{\overline{a}}_{rj} = \frac{\overline{a}_{rj}}{\overline{a}_{rs}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

et

$$\tilde{\overline{b}}_r = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}}$$

Mise à jour des autres lignes

Pour chaque ligne $i \neq r$, on ajuste :

$$\tilde{\overline{a}}_{ij} = \tilde{\overline{a}}_{ij} - \overline{a}_{is} \times \tilde{\overline{a}}_{rj} \quad \forall i \neq r, \ j = 1, \ldots, n$$

et

$$\tilde{\overline{b}}_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{is} \times \tilde{\overline{b}}_r$$

Pour la fonction objectif :

$$\bar{\bar{c}}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_s \times \bar{\bar{a}}_{rj}$$

et

$$-\bar{\bar{z}} = -\bar{z} - \bar{c}_s \times \bar{\bar{b}}_{rj}$$

Exemple

Considérons le problème du restaurateur :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x - 6y \\ \text{s.a.} & \\ & 5x + 3y + \boldsymbol{u} \quad\quad \leqslant 30 \\ & 2x + 3y \quad + \boldsymbol{p} \quad \leqslant 24 \\ & x + 3y \quad\quad + \boldsymbol{h} \leqslant 18 \\ & \\ & x, \quad y, \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h} \quad \geqslant 0 \\ & z = 8x + 6y \end{array}$$

En remplaçant les variables par x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -8x_1 - 6x_2 \\ \text{s.a.} & \\ & 5x_1 + 3x_2 + \boldsymbol{x_3} \quad\quad \leqslant 30 \\ & 2x_1 + 3x_2 \quad + \boldsymbol{x_4} \quad \leqslant 24 \\ & x_1 + 3x_2 \quad\quad + \boldsymbol{x_5} \leqslant 18 \\ & \\ & x_1, \quad x_2, \ \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{x_5} \quad \geqslant 0 \\ & z = 8x + 6y \end{array}$$

Le tableau initial du simplexe est :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
x_3	5	3	1				30
x_4	2	3		1			24
x_5	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	

Étape 1 : Choix de la variable d'entrée

On voit que $\overline{c_j} < 0$ pour au moins un j. On a alors :

$$\bar{c}_s = \min\left\{\bar{c}_j : j = 1, \ldots, n\right\} = \min\left\{\bar{c}_1, \bar{c}_2\right\} = \min\left\{\mathbf{-8}, -6\right\} = \mathbf{-8}$$

On identifie que $\bar{c}_1 = -8$ est le plus négatif, donc x_1 est la variable d'entrée.

Étape 2 : Détermination de la variable de sortie

On fait face au **scénario 2** : au moins un a_{is} est positif. Dans ce cas-ci, $a_{is} = a_{i1}$; on fait référence aux coefficients sous la colonne de la variable d'entrée x_1 et donc $s = 1$.

On calcule les rapports pour déterminer la variable de sortie :

$$\left[x_r = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} : \bar{a}_{is} > 0\right\}\right] \implies x_r = \min\left\{\tfrac{30}{5} = \mathbf{6}, \ \tfrac{24}{2} = 12, \ \tfrac{18}{1} = 18\right\}$$

Le minimum est **6**, donc $x_r = x_3$ est la variable de sortie.

Étape 3 : Pivot

On divise la ligne de x_3 par le coefficient pivot 5, donc on a applique la formule

$$\left[\forall j, \ \bar{\bar{a}}_{rj} = \frac{\bar{a}_{rj}}{\bar{a}_{rs}}\right] \implies \forall j, \ \bar{\bar{a}}_{3j} = \frac{\bar{a}_{3j}}{\bar{a}_{3s}},$$

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
x_1	1	3/5	1/5				6
x_4	2	3		1			24
x_5	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	

Durant le pivot, la variable d'entrée x_1 prend la place de la variable de sortie x_3.

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	t.d.
x_1	1	3/5	1/5				6
x_4	2	3		1			24
x_5	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	

Mise à jour des autres lignes

Pour chaque ligne $i \neq r = x_3$(nouvellement x_1, on ajuste :

$$\forall(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}), \ \left[\bar{\bar{a}}_{\boldsymbol{ij}} = \bar{a}_{\boldsymbol{ij}} - \bar{a}_{is} \times \bar{\bar{a}}_{rj} \quad\right] \implies$$

$$\bar{\bar{a}}_{41} = 0, \ \bar{\bar{a}}_{42} = \frac{9}{5}, \ \bar{\bar{a}}_{43} = -\frac{2}{5}, \ \bar{\bar{a}}_{44} = 1, \ \bar{\bar{a}}_{45} = 0$$

$$\bar{\bar{a}}_{51} = 0, \ \bar{\bar{a}}_{52} = \frac{12}{5}, \ \bar{\bar{a}}_{53} = -\frac{1}{5}, \ \bar{\bar{a}}_{54} = 0, \ \bar{\bar{a}}_{55} = 1$$

et

$$\left[\bar{\bar{b}}_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is}\bar{\bar{b}}_r\right] \implies \bar{\bar{b}}_4 = 12, \ \bar{\bar{b}}_5 = 6$$

et

$$\left[\bar{\bar{c}}_j = \bar{c}_j - \bar{c}_s \times \bar{\bar{a}}_{rj}\right] \implies \bar{\bar{c}}_1 = 0, \ \bar{\bar{c}}_2 = -\frac{6}{5}, \ \bar{\bar{c}}_3 = \frac{8}{5}$$

et $\left[-\bar{\tilde{z}} = -\bar{z} - \bar{c}_s \times \bar{\tilde{b}}_{rj}\right] \implies -\bar{\tilde{z}} = 1 - (-8) \times 6 = 48$

Selon les résultats présentés, on optient alors le tableau suivant :

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	1	3/5	1/5				6
p	0	9/5	−2/5	1			12
h	0	12/5	−1/5		1		12
$-z$	0	−6/5	8/5			1	48

Résumé de l'algorithme en forme générale

▷ **Organiser** les équations sous forme standard dans un tableau.
▷ **Choisir** la variable d'entrée x_s avec le coefficient $\bar{c}_s$ le plus négatif.
▷ **Déterminer** la variable de sortie x_r en calculant $\dfrac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}}$ pour $\bar{a}_{is} > 0$. Si aucun $\bar{a}_{is}$ n'est positif, **alors** aucune variable x_i ne limite l'augmentation de x_r et le système est **non borné**.
▷ **Effectuer** le pivot en divisant la ligne r par $\bar{a}_{rs}$. Ajuster le tableau en considérant que x_s prend la place de x_r sous la colonne `t.d.`. mettant à jour les autres lignes.
▷ **Mettre à jour** les autres lignes. Pour chaque ligne $\boldsymbol{i}$, on a :

$$\bar{\tilde{a}}_{ij} = \bar{a}_{ij} - a_{is} \times \bar{\tilde{a}}_{rj}$$

▷ **Mettre à jour** les `t.d.` . Pour chaque ligne $\boldsymbol{i}$, on a :

$$\bar{\tilde{b}}_i = \bar{b}_i - a_{is} \times \bar{\tilde{b}}_r$$

▷ **Mettre à jour** l'objectif :

$$-\bar{\tilde{z}} = -\bar{z} - c_s \times \bar{\tilde{b}}_{rj}$$

▷ **Répéter** les étapes 2 à 7 jusqu'à ce que tous les $\bar{c}_j \geqslant 0$.

7

Rappel d'algèbre linéaire

Définitions

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous avons les quantités suivantes :

$$\text{Produit scalaire} \;:\quad x^T y = y^T x = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$\text{Vecteur} \;:\; \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{Tranposée} \;:\quad [x_1, \dots x_n]$$

Exemple de produit scalaire

Prenons $n = 3$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, et $x^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
Calculons le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ &= (1)(4) + (2)(5) + (3)(6) \\ &= 4 + 10 + 18 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Ainsi, le produit scalaire de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ est $\boxed{32}$.

Dépendance linéaire

Note:-

Un ensemble de vecteur $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ est dit **linéairement dépendant** s'il existe k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ *non nul* tel que :

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_k x^k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dans le contexte d'une matrice, s'il existe une combinaison linéaire de ligne ou de colonne qui peuvent engendrer une autre ligne ou colonne, on dit que la matrice linéairement dépendantes.

Exemples de dépendance

Considérons la matrice suivante : Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

Les lignes de cette matrice sont linéairement dépendantes. La première ligne est une combinaison linéaire de la 2e ligne :

$$\text{Ligne 2} = \lambda \times \text{Ligne 1} = 2 \times \text{Ligne 1}$$

D'ailleurs, la 3e ligne est une combinaison linéaire des deux premières lignes :

$$\text{Ligne 3} = \text{Ligne 1} + 1 \times \text{Ligne 2}$$

Cela signifie qu'il existe une relation linéaire entre les lignes, donc la matrice $\mathbf{A}$ est linéairement dépendante.

Exemples d'indépendance linéaire

Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les lignes de cette matrice sont linéairement indépendantes car aucune des lignes ne peut être obtenue comme une combinaison linéaire des autres lignes. Il s'agit d'une matrice identité, et donc elle est linéairement indépendante.

Matrice carrée

Soit une matrice A :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

alors, on dit que l'élément a_{ij} est à **l'intersection** de la ligne i et de la colonne j de la matrice. Une **matrice carrée** est une matrice $A_{m \times n}$ où $m = n$ et un vecteur de dimension n peut être vue comme une matrice de dimension $1 \times n$. La **matrice identité** I est une **matrice carrée** telle qu'on a :

$$\boxed{\forall a_{ij} \in A_{m \times n} = I, \; [i = j] \implies a_{ij} = 1, \; \textbf{et} \; [i \neq j] \implies a_{ij} = 0}$$

Multiplication de Matrices

Formule Générale

Soient les matrices $A_{a \times n}$ et $B_{n \times b}$. Le produit matriciel $C = A \times B$ est une matrice de taille $a \times b$, où chaque élément c_{ij} est donné par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, a \text{ et } j = 1, \dots, b$$

Autrement dit, l'élément c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Exemple Concret

Prenons A une matrice 2×3 et B une matrice 3×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Le produit $C = A \times B$ est une matrice de taille 2×2 :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Calculons chaque élément de C :

Calcul de c_{11} :

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} \\ &= (1)(7) + (2)(9) + (3)(11) \\ &= 7 + 18 + 33 \\ &= 58 \end{aligned}$$

Calcul de c_{12} :

$$\begin{aligned} c_{12} &= a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32} \\ &= (1)(8) + (2)(10) + (3)(12) \\ &= 8 + 20 + 36 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Calcul de c_{21} :

$$\begin{aligned} c_{21} &= a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31} \\ &= (4)(7) + (5)(9) + (6)(11) \\ &= 28 + 45 + 66 \\ &= 139 \end{aligned}$$

Calcul de c_{22} :

$$\begin{aligned} c_{22} &= a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32} \\ &= (4)(8) + (5)(10) + (6)(12) \\ &= 32 + 50 + 72 \\ &= 154 \end{aligned}$$

Résultat Final : La matrice produit $C = A \times B$ est donc :

$$C = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la multiplication de A et B nous donne la matrice C ci-dessus.

Transposée d'une Matrice : Formule Générale et Exemple

Formule Générale

Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La **transposée** de A, notée A^T, est une matrice de taille $n \times m$, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Autrement dit, l'élément $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$.

Exemple Concret

Prenons A une matrice 2×3 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

La transposée de A est une matrice 3×2 obtenue en échangeant les lignes et les colonnes :

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ainsi, les éléments de A sont réorganisés pour former A^T :

- a_{11} devient $(A^T)_{11}$, a_{21} devient $(A^T)_{12}$
- a_{12} devient $(A^T)_{21}$, a_{22} devient $(A^T)_{22}$
- a_{13} devient $(A^T)_{31}$, a_{23} devient $(A^T)_{32}$

Vérification des éléments :

$$\begin{aligned} (A^T)_{11} &= a_{11} = 1 \\ (A^T)_{12} &= a_{21} = 4 \\ (A^T)_{21} &= a_{12} = 2 \\ (A^T)_{22} &= a_{22} = 5 \\ (A^T)_{31} &= a_{13} = 3 \\ (A^T)_{32} &= a_{23} = 6 \end{aligned}$$

Ainsi, la transposée A^T est :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Conclusion : La transposition d'une matrice consiste à transformer ses lignes en colonnes (et vice versa), ce qui revient à refléter la matrice par rapport à sa diagonale principale.

Calcul du Déterminant d'une Matrice : Formule Générale et Exemple

Formule Générale

Le déterminant d'une matrice carrée $n \times n$ est défini de manière récursive en utilisant les mineurs et les cofacteurs. La formule générale pour le déterminant de la matrice A est :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où :

- a_{ij} est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. - A_{ij} est la matrice de dimension $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en retirant la ligne i et la colonne j de A. - Le signe $(-1)^{i+j}$ est le signe du cofacteur, positif si $i + j$ est pair, négatif si $i + j$ est impair.

Exemple Concret avec une Matrice 2×2

Soit la matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de A est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= (2) \times (4) - (3) \times (1) \\ &= 8 - 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant de A est $\boxed{5}$.

Remarque sur les Mineurs et les Cofacteurs

Pour une matrice 2×2, le calcul du déterminant est direct. Pour des matrices de taille supérieure, on utilise les mineurs et les cofacteurs en appliquant le développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Exemple avec une Matrice 3×3

Soit la matrice B :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de B est :

$$\det(B) = b_{11} \det(B_{11}) - b_{12} \det(B_{12}) + b_{13} \det(B_{13})$$

où :

- B_{1j} est la matrice 2×2 obtenue en retirant la première ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. - Par exemple, B_{11} est obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne de B.

Calcul détaillé :

Supposons que :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Calculons les mineurs :

- $\det(B_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (4)(6) - (5)(0) = 24$ - $\det(B_{12}) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (0)(6) - (5)(1) = -5$ - $\det(B_{13}) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0)(0) - (4)(1) = -4$

Calcul du déterminant de B :

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11} \det(B_{11}) - b_{12} \det(B_{12}) + b_{13} \det(B_{13}) \\ &= (1)(24) - (2)(-5) + (3)(-4) \\ &= 24 + 10 - 12 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant de B est $\boxed{22}$.

Conclusion

Le calcul du déterminant d'une matrice carrée implique l'utilisation des mineurs et des cofacteurs, en développant le déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. Pour une matrice $n \times n$, cette méthode est appliquée récursivement jusqu'à obtenir des déterminants de matrices 2×2, qui sont calculés directement.

Rang et matrices non singulières

Le **rang** d'une matrice est le nombre maximum de lignes (ou colonnes) linéairement indépendantes.

Plein rang

Une matrice $\mathbf{A}_{m \times n}$ est dite de **plein rang** si son rang est égal à $\min(m, n)$.

Exemple : Considérons la matrice $\mathbf{A}$ suivante de plein rang (rang = 2) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a deux lignes linéairement indépendantes, donc elle est de plein rang.

Matrice non singulière

Une matrice carrée $\mathbf{A}_{n\times n}$ est dite **non singulière** si :

- ▷ ses lignes (ou colonnes) sont linéairement indépendantes,
- ▷ elle est de plein rang (rang = n),
- ▷ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$,
- ▷ elle possède une inverse $\mathbf{A}^{-1}$ telle que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Exemple : Considérons la matrice suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est non singulière car son déterminant est non nul ($\det(\mathbf{B}) = 1$), ses lignes sont linéairement indépendantes, et elle possède une inverse.

8

Algorithme du Simplexe Analyse

Posons les quantités suivantes :

$$\mathbf{x}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ le vecteur des **variables de décision**

$$\mathbf{c}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ le vecteur des **coefficients de l'objectif**

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ la matrice des **coefficients des contraintes**

$$\mathbf{b}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ le vecteur des **termes de droite**

Noatation matricielle

Nous avons montré plus tôt que la forme standard peut être simplifiée par la notation suivant en utilisant le forme générale :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\ \textbf{s.a.} \sum_{n=j}^{n} a_{ij} = b_i, i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n$$

Nous pouvons utiliser cette expression et les quantités matricielles que nous avons posé pour engendrer la notation matricielle de la forme standard :

$$\begin{aligned} &\text{Min } z \\ &\text{s.a.} \\ &A\mathbf{x} = b \\ &c^T\mathbf{x} - z = 0 \\ &x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Démonstration de la notation matricielle

Partons de la formulation classique du problème linéaire en forme standard :

$$\text{Min } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m$$

avec $x_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

En notation matricielle :

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

1. Objectif :

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Le produit $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ est donc équivalent à la somme pondérée de x_j par c_j.

2. Contraintes :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

Ce produit est équivalent aux m contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

3. Conditions de non-négativité :

$$\mathbf{x} \geqslant 0$$

Cela signifie simplement que chaque composante $x_j \geqslant 0$, ce qui correspond directement aux conditions de non-négativité.

Conclusion

Nous avons montré que la notation matricielle pour l'algorithme du simplexe, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ pour l'objectif et $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pour les contraintes, est équivalente à la formulation classique du problème. Chaque terme du produit matriciel correspond exactement aux termes de la formulation d'origine.

Notation matricielle dans le problème du restaurateur

Dans le problème du restaurateur, nous avons les quantités suivantes :

$$\begin{array}{lrl}
\text{Min} & -8x - 6y & \\
\text{s.a.} & & \\
& 5x + 3y + u & \leqslant 30 \\
& 2x + 3y + p & \leqslant 24 \\
& x + 3y + h & \leqslant 18 \\
& & \\
& x,\ y,\ u, p, h & \geqslant 0 \\
& z = 8x + 6y &
\end{array}$$

$$\mathbf{x}_{5\times1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \\ p \\ h \end{bmatrix}$$ le vecteur des **variables de décision**

$$\mathbf{c}_{5\times1} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ le vecteur des **coefficients de l'objectif**

$$\mathbf{A}_{3\times5} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ la matrice des **coefficients des contraintes**

$$\mathbf{b}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$ le vecteur des **termes de droite**

Base et variable de base

Soit une matrice de coefficents de contraintes $\mathbf{A}_{m\times n}$ où $m \leqslant n$ et $\mathbf{A}_{m\times n}$ est de plein range m.

Alors, une sous-matrice $B_{m\times m}$ est une **base** de $\mathbf{A}$ si $\mathbf{B}$ est **non singulière**.

Puisque chacune colonne de la matrice $\mathbf{A}$ est associée à une variable, les variables qui correspondent aux colonnes de $\mathbf{B}$ sont appelées **variables de base**. Les autres variables sont les **variables hors-base**.

Exemple

dans le problème du restaurateur, on a la matrice $A_{3\times5}$:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & u & p & h \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Pour leses examples de bases possibles on a alors :

$$\underset{B_1}{\begin{array}{c} \begin{matrix} u & p & h \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \quad \underset{B_2}{\begin{array}{c} \begin{matrix} x & u & h \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \quad \underset{B_3}{\begin{array}{c} \begin{matrix} x & p & y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}}$$

Dérivations matricielles

Ponson les quantités suivantes :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_R \end{bmatrix}$$ le vecteur des **variables**

$$\mathbf{x}_B^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m]$$ le vecteur des **variables de base**

$$\mathbf{x}_R^T = [x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n]$$ le vecteur des **variables hors-base**

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_R \end{bmatrix}$$ le vecteur des **coûts**

$$\mathbf{c}_B^T = [c_1, c_2, \ldots, c_m]$$ le vecteur des **coûts des variables de base**

$$\mathbf{c}_R^T = [c_{m+1}, c_{m+2}, \ldots, c_n]$$ le vecteur des **coûts des variables hors-base**

$$\mathbf{A} = [B : R]$$ avec $B_{m\times m}$ base (colonnes des variables de base)

$R_{m\times(n-m)}$ reste de A (colonnes des variables hors-base)

Représentation tabulée de la notation matricielle

$$\overbrace{\qquad\qquad}^{\mathbf{x}_B^T}\qquad\qquad\overbrace{\qquad\qquad}^{\mathbf{x}_R^T}$$

v.d.	$x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m$	$x_{m+1} \quad x_{m+2} \quad \cdots \quad x_n$	$-z$	t.d.
	B	R		b
$-z$	$c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_m$	$c_{m+1} \quad c_{m+2} \quad \ldots \quad c_n$	1	0

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{c}_B^T}\qquad\qquad\underbrace{\qquad\qquad}_{\mathbf{c}_R^T}$$

Dérivation du vecteur multiplicateur du simplexe

Nous allons représenter le tableau du simplexe en utilisant les variables de base $\mathbf{x}_B$ et les variables hors-base $\mathbf{x}_R$. À partir de la matrice $A = (B : R)$, on peut exprimer le système de contraintes sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{array}{lcl}
\text{Min } z & & \text{Min } z \\
\text{s.a.} & & \text{s.a.} \\
[B : R]\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_R\end{bmatrix} = \mathbf{b} & \Leftrightarrow & B\mathbf{x}_B + R\mathbf{x}_R = \mathbf{b} \\
\left[\mathbf{c}_B^T : \mathbf{c}_R^T\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_R\end{bmatrix} - z = 0 & & \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_R^T\mathbf{x}_R - z = 0 \\
\mathbf{x}_B \geqslant 0, \mathbf{x}_R \geqslant 0 & & \mathbf{x}_B \geqslant 0, \mathbf{x}_R \geqslant 0
\end{array}$$

où B est une sous-matrice non singulière correspondant aux variables de base.

Transformation par B^{-1}

Pour obtenir une matrice identité sous $\mathbf{x}_B$, on multiplie tout le système par l'inverse de la matrice B, ce qui donne :

$$B^{-1}(Bx_B + Rx_R) = B^{-1}b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_B + B^{-1}R\mathbf{x}_R = B^{-1}b$$

Ainsi, on peut exprimer $\mathbf{x}_B$ comme suit :

$$\boxed{\mathbf{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}R\mathbf{x}_R}$$

En remplaçant cette expression dans la fonction objectif, on obtient la forme suivante :

$$c_B^T\left(B^{-1}b - B^{-1}R\mathbf{x}_R\right) + c_R^T\mathbf{x}_R - z = 0$$

$$\Rightarrow \left(c_R^T - c_B^T B^{-1}R\right)\mathbf{x}_R - z = -c_B^T B^{-1}b$$

Le vecteur des multiplicateurs du simplexe π^T est défini par :

$$\boxed{\pi^T = c_B^T B^{-1}}$$

Finalement, la fonction objectif devient :

$$\boxed{\left(c_R^T - \pi^T R\right)\mathbf{x}_R - z = -\pi^T b}$$

Ainsi, π représente les multiplicateurs

Dérivation du vecteur multiplicateur du simplexe

Nous calculons le vecteur multiplicateur π associé à la base B comme suit :

$$\pi^T = c_B^T B^{-1}$$

Cela nous permet de calculer les coûts réduits pour les variables hors-base :

$$\boxed{\tilde{c}_j = c_j - \pi^T a_j \quad \text{pour } j = m+1, \ldots, n}$$

où a_j est la j-ème colonne de la matrice A.

On peut calculer la valeur de l'objectif grâce à la formule :

$$\boxed{-z = -\pi^T b}$$

Pour les nouveaux coût dans la ligne objectif, on a :

$$\overline{c}^T = c^T - \pi^T A$$

Et pour les termes de droite on :

$$\boxed{\overline{b} = B^{-1}b}$$

Résolution par la méthode tablualire et matricielle

▷ **Choisir** le variable d'entrée et la variable de sortie comme on l'a vu précédemment. Pour la première itération, supposer que les variables d'équarts sont les variable dépendantes. Effectuer le pivot : la variable d'entrée prend la place d'une des variables dépendantes qui est la variable de sortie. Après ce pivot, il est facile d'identifier la base $\boldsymbol{B}_{m\times m}$.
▷ **Calculer** les quantités B^{-1} et π^T. Calculer ensuite les quantités $\overline{c}^T$, $\overline{b}$, et $-\overline{z}$.

v.d.	x_1 x_2 $\cdots$ x_m x_{m+1} x_{m+2} $\cdots$ x_n	$-z$	t.d.
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{B^{-1}A}$		$\boldsymbol{B^{-1}b}$
$-z$	$\boldsymbol{c^T - \pi^T A}$	1	$-\pi^T b$
	$\mathbf{c}_B^T$		$-\bar{z}$

Exemple de restaurateur

v.d.	x	y	u	p	h	$-z$	t.d
x	5	3	1				30
p	2	3		1			24
h	1	3			1		18
$-z$	-8	-6				1	0

Considérons le problème du restaurateur. En notation matricielle, nous avons les quatités suivantes

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x \\ p \\ y \end{bmatrix}$$ le vecteur des **variables de bases**

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} u \\ h \end{bmatrix}$$ le vecteur des **variables hors bases**

$$\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$ le vecteur des **coûts basiques**

$$\mathbf{c}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ le vecteur des **coûts non basiques**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ la matrice du **tableau**

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & p & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$ la matrice des coefficients **de base**

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$ la matrice des coefficients **hors-base**

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & p & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \end{array}$$ l'inverse de la matrice **de base**

Pour obtenir la matrice des coefficients du tableau après une itération, on calcule la quantité $B^{-1}A$:

$$B^{-1}A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & p & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & p & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nous conaissons déjà les coefficients sous x, p, y dans le résultat de $B^{-1}A$; ce sont des variables dépendantes dans le tableau après l'itération et auront donc un **1** sous la colonne appropriée de la matrice. Nous pouvons donc simplifier le calcul en évaluant d'abord $B^{-1}R$ et en se servant de l'information des variables dépendantes pour reconstruire la matrice $B^{-1}A$.

$$B^{-1}R = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \\ -1/12 & 5/12 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cela revient à effectuer l'addition

$$B^{-1}A = B^{-1}R + \varepsilon$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & & p & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & u & & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \end{array}$$

On peut calculer les termes de droite :

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On peut calculer le vecteur multiplicateur du simplexe :

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T B^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & p & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/12 & 0 & 5/12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons calculer le vecteur $\mathbf{c}^T$ en combinant $\mathbf{c}_B^T$ et $\mathbf{c}_R^T$:

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_R^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut calculer les coût réduit :

$$\mathbf{c}^T - \pi^T\mathbf{A} :$$
$$= \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{h} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nous connaissons déjà les coefficient x, p, y dans le résultat $\mathbf{c}^T - \pi^T\mathbf{A}$. En effet chacune de ses variables aura un coefficient de $\mathbf{0}$ dans cette rangée, puisque ce sont les variables dépendantes. Nous pouvons donc simplifier le calcul en évaluant $c_R^T - \pi^T R$

R est donné par :

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{h} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calculons maintenant $\pi^T R$:

$$\pi^T R = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{h} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ainsi, le calcul de $\mathbf{c}_R^T - \pi^T R$ est :

$$\mathbf{c}_R^T - \pi^T R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{h} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Cela revient à l'addition

$$\mathbf{c}^T - \pi^T\mathbf{A} = \mathbf{c}_R^T - \pi_R^T + \varepsilon$$
$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{h} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{h} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Le calcul de $\pi^T b$ donne :

$$\pi^T b = \begin{bmatrix} -3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = -54$$

Multiplicateurs du simplexe

Soit x_{j_i} la variable dépendante dans le ligne i du **tableau** initial. Le coût relatif $\overline{c}_{j_i}$ pour cette variable est donné par :

$$\overline{c}_{j_i} = c_j - \pi^T a_{.j_i} = 0 - \pi^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \pi_i, \ \forall i \in (1, \dots, m)$$

Les multiplicateurs π_i sont associés à chaque contrainte et permettent de calculer les coûts relatifs pour les variables de base.

Impact des multiplicateurs sur l'objectif

Le vecteur des multiplicateurs π mesure l'impact des modifications des termes de droite b sur la valeur optimale de l'objectif. Si b_i est modifié de 1 unité, la valeur optimale de z change de π_i unités :

$$z = \pi^T b = \sum_{i=1}^{m} \pi_i b_i$$

Les multiplicateurs π_i indiquent la sensibilité de la solution optimale à des modifications des termes de droite.

Dégénérescence

Une solution est dite **dégénérée** si au moins une variable de base a une valeur nulle. Lorsqu'il y a dégénérescence, il est possible d'effectuer un pivot sans changer la solution, ce qui entraîne un phénomène de "surplace".

Résumé de l'algorithme en notation matricielle

▷ **S'assurer** que le système est sous forme standard et **tabuler** le système. Le coeur du tableau contient la **matrice A**.
▷ **Obtenir** une base **B** en choisissant une variable d'entrée et une variable de sortie, puis en effectuant le pivot.
▷ **Calculer** la matrice $\mathbf{B}^{-1}$ en utilisant l'algorithme de **Gauss-Jordan**.
▷ **Mettre à jour** le coeur du tableau en effectuant l'opération $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Pour simplifier ce calcul, il est possible d'effectuer d'abord $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{R}$ (pour les colonnes hors-base) et de reconstituer la matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ en tenant compte des variables de base. Chaque variable basique aura un 1 dans la colonne et la ligne correspondantes, et un 0 ailleurs.
▷ **Calculer** les termes de droite en effectuant l'opération

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

▷ **Calculer** le vecteur multiplicateur du simplexe en effectuant

$$\pi^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$$

▷ **Calculer** l'objectif en effectuant l'opération

$$\pi^T\mathbf{b}$$

▷ **Calculer** les coûts réduits dans le tableau final avec l'opération

$$\mathbf{c}^T - \pi^T\mathbf{A}$$

Une simplification est possible en effectuant d'abord $\mathbf{c}_R^T - \pi^T\mathbf{R}$, puis en reconstituant le tableau pour les variables de base. Chaque coefficient **non basique** c_j aura une valeur nulle dans le tableau final.
▷ **Identifier** les coûts relatifs pour une variable de base. Pour obtenir le coût réduit $\overline{c}_{j_i}$ associé à la variable c_j dans la ligne i du tableau initial, utiliser la formule :

$$\overline{c}_{j_i} = c_j - \pi^T a_{.j_i}$$

9

Analyse post-optimale

Modification des termes de droite

Soit une modification des termes de droite b, avec $b + \Delta b$. Nous avons :

$$\boxed{\bar{\tilde{b}} = B^{-1}(b + \Delta b) = \bar{b} + B^{-1}\Delta b}$$

La solution optimale est affectée par cette modification. La nouvelle solution optimale—le nouveau vecteur des variables de bases—est donnée par :

$$x_B = \bar{b} + B^{-1}\Delta b \geqslant 0, \quad x_R = 0$$

La valeur de l'objectif est perturbée comme suit :

$$\boxed{\tilde{z} = \bar{z} + \pi^T \Delta b}$$

Si la nouvelle solution $\tilde{b} \geqslant 0$, alors la base optimale reste la même. Sinon, il faut résoudre le problème modifié avec l'algorithme du simplexe.

Modification d'un coût dans l'objectif

Supposons que le coût dans la fonction objectif est modifié pour une variable x_j, avec $c_j + \Delta c_j$.

Si x_j est une variable hors-base, la modification se transmet directement dans le tableau optimal. Le coût réduit est donné par :

$$\boxed{\bar{\tilde{c}}_j = c_j - \pi^T a_{.j} + \Delta c_j = \bar{c}_j + \Delta c_j}$$

Si $\tilde{c}_j + \Delta c_j \geqslant 0$, la base optimale reste optimale. Sinon, il faut continuer avec l'algorithme du simplexe.

Modification d'une variable hors-base

Soit x_j une variable hors-base et soit $a_{.j}$ la colonne de x_j dans la matrice A, on a

$$\tilde{a}_j = a_{.j} + \Delta a_j \text{ où } \Delta a_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta a_{ij} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le coût réduit après modification est :

$$\boxed{\bar{\tilde{c}}_j = c_j - \pi^T a_{.j} = \bar{c}_j - \pi_i^T \Delta a_{ij}}$$

Si $\tilde{c}_j \geqslant 0$, la base optimale demeure optimale. Sinon, il faut appliquer l'algorithme du simplexe.

Ajout d'une nouvelle action

L'ajout d'une nouvelle variable de décision r dans le problème correspond à l'ajout d'une nouvelle action. Cette nouvelle action peut être représentée par la nouvelle colonne de la matrice a_r et un coût c_r.

Dans le tableau optimal, la nouvelle colonne et le coût sont donnés par :

$$\boxed{\tilde{a}_r = B^{-1}a_r, \quad \tilde{c}_r = c_r - \pi^T a_r}$$

Si $\tilde{c}_r \geqslant 0$, alors la nouvelle action n'est pas profitable, et la solution optimale reste inchangée. Sinon, la nouvelle action est profitable et on continue avec l'algorithme du simplexe pour trouver la solution optimale.

10

Programmation linéaire de nombre entiers

La programmation linéaire avec des variables entières permet de modéliser des problèmes plus réalistes, notamment **lorsque des solutions fractionnaires ne sont pas pertinentes**.

Exemple : un restaurateur ne peut pas commander une fraction d'assiette.

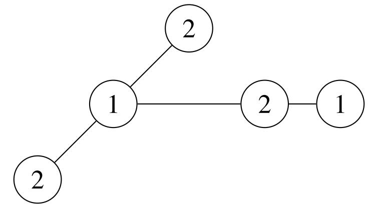
Modèles binaires

Les modèles avec variables binaires sont particulièrement utiles. Les variables $x_i \in \{0, 1\}$ représentent des décisions binaires :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'option } i \text{ est choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Problème de coloration de graphe

Soit un graphe non orienté $G = (V, E)$, où V représente les sommets et E les arêtes. Une coloration du graphe consiste à affecter une couleur différente à chaque sommet, de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.



Le nombre minimal de couleurs utilisées est noté m. La coloration minimale pour le graphe ci-haut est donc $m = 2$.

Pour modéliser ce problème, on utilise deux types de variables binaires :

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si la couleur } i \text{ est utilisée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } j \text{ est coloré avec } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'objectif est de minimiser $\sum_{i=1}^{m} c_i$, tout en respectant les contraintes suivantes :

$$\boxed{x_{ij} + x_{ik} \leqslant 1 \quad \text{pour tout couple de sommets adjacents } (j, k)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \text{pour tout sommet } j$$

où $c_i \in \{0, 1\}$ et $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

Deux principes généraux en PLNE

Soit un problème P et sa relaxation continue $\tilde{P}$, où les contraintes d'intégralité sont relâchées. Nous avons alors :

$$F(P) \subseteq F(\tilde{P}) \quad \text{et} \quad v(\tilde{P}) \leqslant v(P)$$

Les principes suivants s'appliquent :

1. Si $F(P) \subseteq F(\tilde{P})$, alors la valeur optimale de $\tilde{P}$ est toujours meilleure ou égale à celle de P.
2. Si x^* est une solution optimale entière de $\tilde{P}$, alors x^* est aussi solution optimale de P.

Exemple : Problème de relaxation continue

Considérons un problème P et sa relaxation continue $\tilde{P}$ avec les contraintes suivantes :

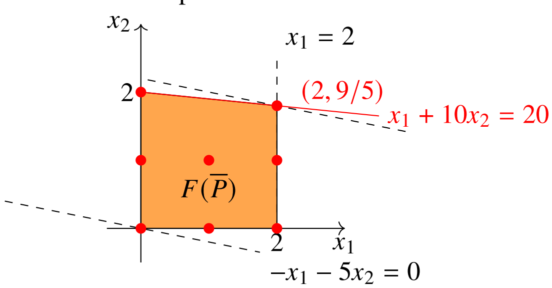
$$P : \quad \text{Minimiser} \quad z = -x_1 - 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + 10x_2 \leqslant 20, \quad x_1 \leqslant 2, \quad x_1, x_2 \geqslant 0$$

Dans la relaxation $\tilde{P}$, les variables x_1 et x_2 ne sont plus contraintes à être entières. La solution fractionnaire est donnée par :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 9/5$$

Cependant, la solution entière optimale est obtenue par des algorithmes de PLNE, car ni l'arrondi ni la troncature ne donnent des solutions optimales dans ce cas.



Algorithme Branch and Bound

Introduction

L'algorithme de **Branch-and-Bound** est utilisé pour résoudre des problèmes de **programmation linéaire en nombres entiers**. Il divise un problème en sous-problèmes tout en exploitant les solutions fractionnaires et entières.

Branchement

Si la solution optimale de la relaxation continue $\overline{P}$ est fractionnaire, le problème est divisé en deux sous-problèmes P_1 et P_2 tels que :

$$F(P_1) \cap F(P_2) = \emptyset, \quad F(P_1) \cup F(P_2) = F(P)$$

Cela permet de réduire les domaines des sous-problèmes :

$$F(\overline{P}_1) \subset F(\overline{P}), \quad F(\overline{P}_2) \subset F(\overline{P})$$

Évaluation des sous-problèmes

L'algorithme explore les sous-problèmes en suivant un parcours en profondeur. La solution optimale entière trouvée est utilisée pour mettre à jour la borne supérieure $\overline{z}$.

La relaxation continue $\overline{P}$ fournit une borne inférieure z. Si un sous-problème produit une meilleure solution entière, la borne supérieure est mise à jour.

Pourquoi $\overline{z} \geqslant z$ pour tous les sous-problèmes

1. **Borne inférieure de la relaxation continue** : La solution optimale de $\overline{P}$, notée z, est la plus petite valeur que le problème peut atteindre si l'on relâche les contraintes d'intégralité. Comme cette relaxation assouplit les contraintes, elle donne une borne inférieure pour le problème entier : aucun sous-problème ne peut offrir une solution plus basse que z.
2. **Valeur des sous-problèmes** :
   - Lorsque l'on branche (divise) le problème initial P en sous-problèmes P_1, P_2, etc., les domaines réalisables des sous-problèmes sont des sous-ensembles de l'ensemble des solutions de $\overline{P}$.
   - Les solutions optimales de ces sous-problèmes (relaxés ou non) seront donc **au mieux** égales à z et souvent plus grandes, car on ajoute des contraintes lors du branchement.
3. **Borne supérieure** $\overline{z}$: Au cours de l'algorithme, on met à jour $\overline{z}$, la meilleure solution entière trouvée jusqu'à présent. Cette borne supérieure est donc nécessairement supérieure ou égale à la borne inférieure z, car z représente la valeur optimale dans le cas où toutes les contraintes d'intégralité sont relâchées.

Critère d'arrêt

Le processus de division s'arrête pour un sous-problème P_C si :

- Le domaine réalisable est vide.
- La solution optimale de P_C est entière.
- La solution optimale fractionnaire de P_C est telle que $v(P_C) \geqslant \bar{z}$.

Dans ces cas, diviser P_C ne permet pas de trouver une meilleure solution.

Branchement et Pseudo-Code

Si la solution optimale $\bar{x}$ de P_C est fractionnaire, on choisit une variable x_j ayant une valeur fractionnaire w. Deux sous-problèmes sont alors créés :

$$P_{C_1} : x_j \leqslant \lfloor w \rfloor, \quad P_{C_2} : x_j \geqslant \lceil w \rceil$$

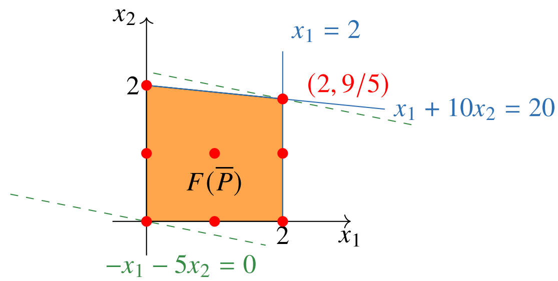
Algorithm 1: Branch-and-Bound

Étape 0 : Initialiser $L \leftarrow \emptyset$, $\bar{z} \leftarrow \infty$, $x^* \leftarrow \emptyset$;
Étape 1 : Résoudre $\overline{P}$, obtenir x^*;
if *x^* est entier* **then**
  Aller à l'étape 3;
end
else
  Diviser P en P_1 et P_2, ajouter à L;
end
Étape 2 : Pour chaque sous-problème dans L, résoudre P_C;
if $F(P_C) = \emptyset$ ***ou*** $v(P_C) \geqslant \bar{z}$ **then**
  Continuer;
end
else if *x^* est entier **et** $v(P_C) < \bar{z}$* **then**
  Mettre à jour $\bar{z}$ et x^*;
end
else
  Diviser P_C;
end
Étape 3 : Retourner x^*;

Exemple de branch and bound

Problème P

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = -x - 5x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x_1 + 10x_2 \leqslant 20 \\
&\qquad x_1 \leqslant 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \geqslant 0 \textbf{ et entier}
\end{aligned}$$



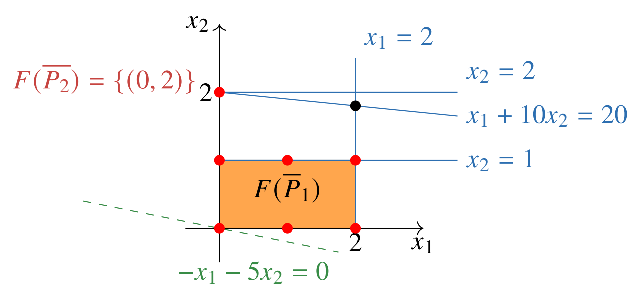
On a la solution

$$\boxed{x_1 = 2,\ x_2 = \frac{9}{5},\ z = -11}$$

Ainsi, notre borne inférieure est $z = -11$. Comme $x_2 = \frac{9}{5}$ n'est pas entier, nous considérons les sous-problèmes suivants : $P_1 : x_2 \leqslant \lfloor 9/5 \rfloor = 1$ et $P_2 : x_2 \geqslant \lceil 9/5 \rceil = 2$

Problème P_1

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x_1 + 10x_2 \leqslant 20 \\
&\qquad x_1 \leqslant 2 \\
&\qquad x_2 \leqslant 1 \\
&\qquad x_1, x_2 \geqslant 0 \textbf{ et entiers}
\end{aligned}$$



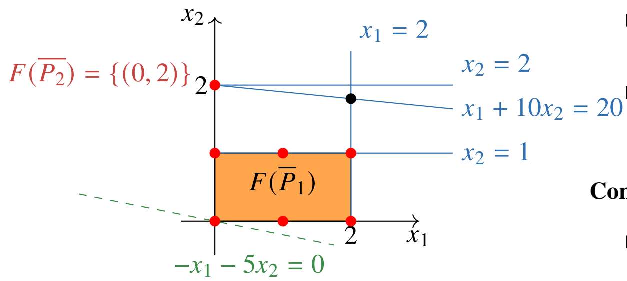
La solution pour P_1 est :

$$\boxed{x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ z = -7}$$

Cette solution est entière, donc elle devient la nouvelle borne supérieure : $\bar{z} = -7$.

Problème P_2

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = -x_1 - 5x_2 \\
&\text{s.a.} \\
&\qquad x_1 + 10x_2 \leqslant 20 \\
&\qquad x_1 \leqslant 2 \\
&\qquad x_2 \geqslant 2 \\
&\qquad x_1, x_2 \geqslant 0 \textbf{ et entiers}
\end{aligned}$$



La solution de P_2 est :

$$\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ z = -10}$$

Cette solution entière est meilleure que la précédente. On a doc une nouvelle solution optimale $\overline{z} = -10$ Puisqu'il n'y a pas de sous-problème restant, l'algorithme s'arrête et on retourne la valeur de la solution optimale.

La solution optimale de P est donc :

$$\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ \text{avec } z = -10}$$

12

Optimisation de graphes et réseaux

Notions de base

- Un **graphe non orienté** $G = (V, E)$ est constitué d'un ensemble fini V de sommets et d'un ensemble fini E d'arêtes. Chaque arête reliant deux sommets i et j est représentée par le couple non ordonné (i, j).
- Deux sommets i et j sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête (i, j).
- Une arête (i, j) est dite **incidente** aux sommets i et j.

Chaînes, cycles et graphes connexes

- Une **chaîne** dans un graphe G est une suite d'arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_p$ connectant une séquence de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}$ tels que $e_i = (v_i, v_{i+1})$.
- Un **cycle** est une chaîne où le premier et le dernier sommet sont identiques $(v_1 = v_{p+1})$.
- Un **graphe connexe** est un graphe dans lequel une chaîne relie chaque paire de sommets distincts.

Graphe orienté et concepts associés

- Un **graphe orienté** $G = (V, A)$ comprend un ensemble fini de sommets V et un ensemble fini d'arcs A, où chaque arc reliant deux sommets i et j est représenté par le couple ordonné (i, j).
- Un **graphe simple** ne contient ni boucles (arcs reliant un sommet à lui-même) ni arcs parallèles reliant le même couple de sommets dans la même direction.
- Un **chemin** dans un graphe orienté G est une suite d'arcs orientés dans la même direction.
- Un **circuit** dans un graphe orienté est un cycle dans lequel tous les arcs sont orientés dans la même direction.

Concepts de flot et contraintes sur les arcs

- Dans un graphe orienté, chaque arc $(i, j) \in A$ est associé à :
  - une **borne inférieure** l_{ij} sur le flot minimal pouvant transiter sur l'arc,
  - une **capacité** u_{ij}, borne supérieure du flot sur l'arc, telle que $0 \leqslant l_{ij} \leqslant u_{ij}$,
  - un **coût** c_{ij} par unité de flot transitant sur l'arc.
- On cherche à déterminer la quantité maximale de flot pouvant être acheminée de la **source** s au **puits** t, ou encore le coût minimal pour faire circuler un flot donné entre ces deux points en respectant les bornes sur chaque arc.

Problèmes de flots à coût minimal

Le but dans un problème de flot à coût minimal est de trouver une manière d'acheminer un flot donné à travers un réseau tout en minimisant le coût total associé au transit sur les arcs.

Notations de base

- $G = (V, A)$: Un graphe orienté où V est l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs.
- c_{ij} : Le coût par unité de flot sur l'arc (i, j).
- x_{ij} : Le flot qui passe sur l'arc (i, j).
- u_{ij} : La capacité maximale de l'arc (i, j).
- s : Le sommet source du flot.
- t : Le sommet puits où le flot doit être acheminé.

L'objectif est de **minimiser** le coût total du flot, qui est donné par la somme :

$$\text{Minimiser} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

sous les contraintes :

$$\underbrace{\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}}_{\text{flots \textbf{sortans} de } i} - \underbrace{\sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}}_{\text{flot \textbf{entrants} de } i} = 0, \quad \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A$$

Ces contraintes garantissent :

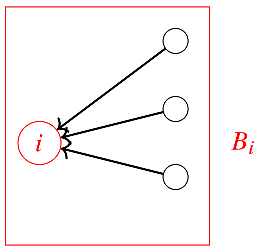
- **Conservation du flot** : Le flot est conservé en tout sommet autre que la source et le puits.
- **Respect des capacités** : Le flot sur chaque arc respecte les bornes de capacité de l'arc.

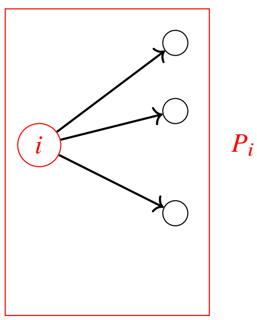
Sous-ensembles B_i et P_i

- B_i : L'ensemble des sommets qui envoient un flot vers i via des arcs orientés entrants.
- P_i : L'ensemble des sommets qui reçoivent un flot provenant de i via des arcs orientés sortants.

Ces ensembles modélisent les relations de dépendance du flot au niveau d'un sommet i.

Diagramme pour B_i et P_i





Critères d'optimalité des flots

Les solutions optimales aux problèmes de flots à coût minimal sont celles qui satisfont :

- **Conservation du flot** : La somme des flots entrants est égale à la somme des flots sortants pour tous les sommets, sauf la source et le puits.
- **Capacité des arcs** : Le flot respectant les bornes de capacité.
- **Condition de minimalité** : Le coût total est minimal, en fonction des flots sur les arcs.

Résumé du modèle mathématique de flots à coût minimal

L'objectif est de minimiser le coût total du flot dans un graphe orienté en tenant compte des contraintes de conservation du flot, des capacités des arcs, et de l'acheminement de la quantité désirée de flot d de la source s au puits t.

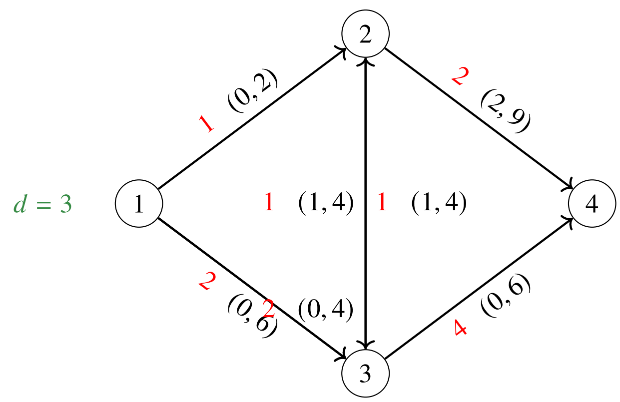
Conservation du flot

- Pour le sommet source s, la somme des flots sortants doit être égale à d, car le flot est injecté dans le réseau à partir de ce sommet.
- Pour le sommet puits t, la somme des flots entrants doit être égale à d, car c'est là que le flot est collecté.
- Pour tout autre sommet $i \neq s, t$, la somme des flots entrants doit être égale à la somme des flots sortants, car le flot qui entre dans un sommet doit en sortir.

Modèle mathématique

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ji} = \begin{cases} d & \text{si } i = s \\ -d & \text{si } i = t \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \end{cases} \\
& x_{ij} \geqslant l_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \\
& x_{ij} \leqslant u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Exemple de problème à coût minimal



Minimiser :

$$x_{12} + 2x_{13} + 2x_{23} + 2x_{24} + x_{32} + 4x_{34}$$

sous les contraintes :

$$
\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} &= 3 \quad \text{(sommet 1)} \\
-x_{12} + x_{23} + x_{24} - x_{32} &= 0 \quad \text{(sommet 2)} \\
-x_{13} - x_{23} + x_{32} + x_{34} &= 0 \quad \text{(sommet 3)} \\
-x_{24} - x_{34} &= -3 \quad \text{(sommet 4)}
\end{aligned}
$$

Bornes :

$$x_{12} \leqslant 2, \quad x_{13} \leqslant 4, \quad x_{23} \leqslant 6, \quad x_{24} \leqslant 9, \quad x_{32} \leqslant 4, \quad x_{34} \leqslant 6$$

Contraintes de positivité :

$$x_{12} \geqslant 0, \quad x_{13} \geqslant 0, \quad x_{23} \geqslant 0, \quad x_{24} \geqslant 2, \quad x_{32} \geqslant 1, \quad x_{34} \geqslant 0$$

Généralisation pour un problème de flot à coût minimal avec plusieurs sources et puits

Dans cette extension du problème de flot à coût minimal, nous considérons plusieurs sources et plusieurs puits.

Chaque source $s_i \in S$ doit envoyer un certain flot d_i, et chaque puits $t_j \in T$ doit recevoir un flot d_j. Le problème consiste à acheminer le flot des sources vers les puits tout en minimisant les coûts associés au transit sur les arcs du réseau.

Notations

- S : l'ensemble des sources, où chaque $s_i \in S$ doit envoyer une quantité d_i de flot.
- T : l'ensemble des puits, où chaque $t_j \in T$ doit recevoir une quantité d_j de flot.
- $G = (V, A)$: un graphe orienté avec un ensemble de sommets V et un ensemble d'arcs A.
- c_{ij} : le coût par unité de flot sur l'arc (i, j).
- x_{ij} : le flot circulant sur l'arc (i, j).
- u_{ij} : la capacité maximale de l'arc (i, j).

Formulation du problème

L'objectif est de minimiser le coût total de transport tout en respectant les contraintes de conservation du flot et les capacités des arcs, pour plusieurs sources et puits.

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

Sous les contraintes :

1. **Conservation du flot pour chaque sommet** :

$$\sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i \in S, \\ -d_j & \text{si } i \in T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. **Capacité des arcs** :

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant u_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A.$$

Interprétation

- Les sources S doivent injecter une quantité totale de flot $\sum_{i\in S} d_i$ dans le réseau.
- Les puits T doivent collecter la même quantité de flot, avec $\sum_{j\in T} d_j = \sum_{i\in S} d_i$, assurant ainsi la conservation globale du flot dans le système.
- Chaque arc possède une capacité u_{ij} qui impose une limite maximale au flot circulant sur cet arc.

Problèmes de flot à coût maximal avec arc fictif

Pour résoudre un problème de flot à coût maximal, nous introduisons un arc fictif ts reliant la source s au puits t, avec une capacité infinie et un coût c_{ts}. Le but est de maximiser le flot sur cet arc fictif tout en minimisant les coûts totaux associés au reste du réseau.

Formulation mathématique

Le problème de flot à coût maximal est formulé comme un problème de minimisation, avec une fonction objectif modifiée pour inclure l'arc fictif ts :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{(i,j)\in A^+} c_{ij}x_{ij} = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + c_{ts}x_{ts} = -x_{ts}$$

Ceci équivaut à maximiser x_{ts}, donc on réécrit l'objectif comme suit :

$$\text{Maximiser} \quad x_{ts}$$

Sous les contraintes suivantes :

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ji} = 0, \quad i \in V,$$

$$x_{ts} \geqslant 0,$$

$$x_{ij} \geqslant l_{ij}, \quad (i, j) \in A,$$

$$x_{ij} \leqslant u_{ij}, \quad (i, j) \in A.$$

Interprétation

L'ajout de l'arc fictif ts permet de transformer un problème de minimisation des coûts en un problème de maximisation du flot sur cet arc. Cela fonctionne parce que l'arc ts capte tout le flot sortant de la source s et entrant dans le puits t, tout en respectant les contraintes de capacité et de conservation du flot dans le réseau.

- L'arc fictif ts simplifie la gestion des flots, en concentrant l'optimisation sur le flot maximal qui peut être transféré de s à t.
- Le coût associé à cet arc fictif est négatif, ce qui explique pourquoi la minimisation revient à maximiser le flot total sur cet arc.

13

Dijkstra

Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra permet de déterminer les chemins les plus courts dans un graphe connexe non orienté $G = (V, E)$ entre un sommet de départ s et tous les autres sommets.

Notations et Ensembles

- ▷ $\lambda_{ij} \geqslant 0$: longueur de l'arête (i, j).
- ▷ N_i : ensemble des sommets adjacents au sommet i, soit $N_i = \{j \in V : (i, j) \in E\}$.
- ▷ EM : ensemble des sommets marqués (ceux pour lesquels le chemin le plus court à partir de s est déjà identifié).
- ▷ EM^c : ensemble des sommets non marqués, soit $V \setminus EM$.
- ▷ δ_j : longueur de la chaîne la plus courte entre s et j (appelée **étiquette**).

Étapes de l'algorithme

1. **Initialisation** :
   - ► $EM = \{s\}$ et $\delta_s = 0$.
- ▷ **Étape 1 : Identifier le sommet adjacent le plus proche** :
  - ► Pour chaque sommet marqué $i \in EM$, identifier le sommet non marqué j_i adjacent à i avec la plus petite distance :

$$\lambda_{ij_i} = \min_{j \in N_i \cap EM^c} \lambda_{ij}$$

  - ► Remarque : Si $N_i \cap EM^c = \emptyset$, alors le minimum est défini comme étant ∞.
- ▷ **Étape 2 : Choix du sommet le plus proche** :
  - ► Identifier le sommet $k \in EM$ qui minimise la somme $\delta_k + \lambda_{kj_k}$, soit :

$$\delta_k + \lambda_{kj_k} = \min_{i \in EM} (\delta_i + \lambda_{ij_i})$$

  - ► Ce sommet k est celui dont la chaîne la plus courte à partir de s vers un sommet non marqué est la plus courte.
- ► **Étape 3 : Marquer le sommet** :
  - ► Marquer j_k en l'ajoutant à EM : $EM = EM \cup \{j_k\}$.
  - ► Mettre à jour l'étiquette : $\delta_{j_k} = \delta_k + \lambda_{kj_k}$.
- ► **Étape 4 : Répéter** :
  - ► Si $EM^c \neq \emptyset$ (c'est-à-dire, s'il reste des sommets non marqués), retourner à l'Étape 1. Sinon, l'algorithme se termine.

Cet algorithme identifie les chemins les plus courts de s vers tous les sommets de G. Notez que l'algorithme suppose que toutes les longueurs d'arêtes $\lambda_{ij} \geqslant 0$.