MATH1400
Calcul à plusieurs variables

Travail Pratique 2

Franz Girardin

23 septembre 2024

Table des matières

Exercices sur la convergence de suite et séries

Définitions

Exercice 1 (Stewart 1.2.2)
Expliquez ce que signifie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$

Cette expression signifie que la somme ayant le terme général a_n converge vers la veleur $L = 5$. Autrement dit, lorsqu'on additionne les termes de la somme a_n de façon **indéfinie**, on obtient la somme 5.

Exercice 2 (Stewart 1.2.4)
Calculez la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dont les les sommes partielles sont données :

$$S_n = \frac{n^2 - 1}{4^n + 1}$$

Soit la somme parielle S_n, nous pouvons calculer la série comme suit :

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 1}{4^n + 1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cancelto{0}{1}}{\frac{4^n}{n^2} + \cancelto{0}{1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

Puisque la quantité 4^n croît plus rapidement que n^2, nous avons

$$\left[n^2 \ll 4^n\right] \implies \lim_{\to +\infty} S_n = \frac{n^2}{4^n} \longrightarrow 0 = S$$

Ainsi, nous avons

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0}$$

Exercice 3 (Stewart 1.2.16)
Expliquez la différence entre

a)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Les deux sommes représentent la même somme. La différente entre elles est uniquement la variable de sommation. Or, puisque les variables de sommation i et j sont considéré comme des variables muettes, le nom de la variable n'affecte pas le résultat de la somme.

b)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_j$$

Les sommes sont **différentes**. La première somme implique l'addition de termes a_i sur un intervalle de sommation de $i = 1$ à l'infini. Or, pour la seconde somme la variable de sommation j n'affecte pas les termes a_j de la somme. **Ainsi**, la somme constante par rapport à i.

Convergence de série géométrique

Exercice 4 (Stewart 1.2.20)

Déterminez si la série géométrique converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa somme.

20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + 0.5 + 0.125 + 0.03125 + \cdots$$

La série géométrique suit la règle $a_1 = 2$ et $a_n = a_1 r^{n-1} \forall n \geqslant 1$. **Donc**, nous avons :

$$\left[a_2 = a_1 r^{n-1}\right] \implies \left[0.5 = 2 + r^1\right] \implies r = -\frac{3}{2}$$

Ainsi, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2r^{-3/2}$$

Puisque la raison $r = -3/2$ de la somme est hors de l'intervalle de convergence d'une suite géométrique, nous pouvons conclure que la somme **div**.

$$\boxed{[r = -3/2 \notin]-1,1]] \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{div}}$$

Convergence de série

Exercice 5 (Stewart 17-26)

Déterminez si la série géométrique converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa somme

24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$$

Consirérons la minupulation suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^n} = (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^n}$$

Selon le **théorème de convergence du terme général**, une une condition nécessaire à la convergence d'une série est que la limite du terme général a_n de celle-ci tende vers 0. **Ainsi**, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 3(-1)^n \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 3(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 0$$

Ainsi, puisque la limite du terme général a_n ne tend pas vers 0, nous pouvons conclure que la suite est **div**.

25.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{6^{n-1}}$$

Considérons la limite du terme général a_n :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2n}}{6^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6e^{2n}}{6^n} = 6\left[\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^2}{6}\right)^n\right] \longrightarrow +\infty \neq 0$$

Puisque la limite du terme général **tend vers l'infini**, nous pouvons conclure que la suite $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div**.

26.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6-2^{2n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{3^n} - \frac{2^{2n-1}}{3^n}\right]$$

Évaluons le terme général a_n de la suite, sachant que $a_n = b_n + c_n$ où $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{3^n}$ et $c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{2n-1}}{3^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n + \lim_{n\to+\infty} c_n = \left[\cancelto{0}{\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{3^n}}\right] + \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} = 0 + \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

La seconde suite est une **suite géométrique** de raison $r = \frac{4}{3} \geqslant 1$. Ce suite divergente. **Ainsi**, puisque la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se décompose en une suite d'une somme $\sum_{n=1}^{\infty} b_n + c_n$ et la limite du terme général $b_n + c_n = a_n$ tend vers l'infini, on peut conclure que la sommme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **div**.

Exercice 6 (Stewart 27 - 42)

Déterminez si la série converge ou diverge. Si elle converge, trouvez la somme.

27.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots$$

Nous avons la somme :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $r = -1$, par la critère de convergence d'une suite géométrique, on peut conclure que la somme **div** :

$$\boxed{r = -1 \notin]-1, 1] \implies \sum_{n=1}^{\infty} ar^n \textbf{div}}$$

Exercice 7 (Stewart 1.2.27 - 1.2.42)

Déterminez si la série converge ou diverge. SI elle converge, trouvez sa somme

28. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{2}{81} + \dfrac{1}{243} + \dfrac{2}{729} + \cdots$

Nous pouvons déduire le terme général a_n de la somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$$

Il s'agit donc d'une **suite géométrique** de raison $\boxed{r = 1/3 < 1}$. **Ainsi**, on peut conclure que la série **conv**.

Comparaison de séries

Exercice 8 (Stewart 1.3.2)
Supposez que f est une fonction continue, positive et décroissante pour $x \geqslant 1$ et que $a_n = f(n)$. À l'aide d'un figure, classez les trois quantités suivantes dans l'ordre croissant.

$$\int_1^6 f(x)dx \quad \sum_{i=1}^{5} a_i \quad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

Selon le **théorème du reste**, nous avons :

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n = R_n \leqslant \int_{n=1}^{\infty} f(x)dx$$

Supposons que f est une fonction continue, positive et décroissante pour $x \geqslant 1$, et que $a_n = f(n)$. Nous devons classer les trois quantités suivantes dans l'ordre croissant :

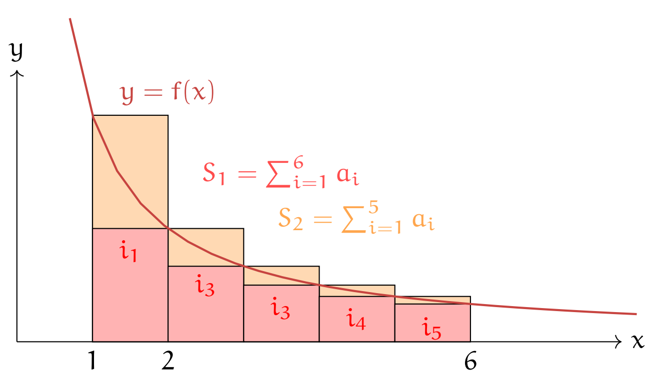
$$\int_1^6 f(x)dx, \quad \sum_{i=1}^{5} a_i, \quad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

La somme $\sum_{i=1}^{5} a_i$ additionne les valeurs de $f(x)$ pour $i = 1$ à $i = 5$. Comme f est **décroissante**, chaque terme a_i est plus grand que a_{i+1}.

La somme $\sum_{i=2}^{6} a_i$ additionne les valeurs de $f(x)$ pour $i = 2$ à $i = 6$, **en excluant** a_1, qui est le plus grand terme. Donc, $\sum_{i=1}^{5} a_i > \sum_{i=2}^{6} a_i$.

L'intégrale $\int_1^6 f(x)dx$ représente **l'aire sous la courbe** de $f(x)$ entre $x = 1$ et $x = 6$. Cette aire se situe entre les deux sommes discrètes, car l'intégrale correspond à la somme d'une infinité de petites contributions situées entre les rectangles formés par les sommes discrètes.
Ainsi, nous avons :

$$\boxed{\sum_{i=2}^{6} a_i < \int_1^6 f(x)dx < \sum_{i=1}^{5} a_i}$$



Exercice 9 (Stewart 1.3.8)
Utilisez le test de l'intégrale pour déterminer si la série converge ou diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

Le **test de l'intégrale** consiste à évaluer l'intégrale correspondante pour une fonction continue positive et décroissante associée au terme général de la série. Considérons la fonction :

$$f(x) = x^2 e^{-x^3}$$

Nous devons évaluer l'intégrale impropre suivante :

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx$$

Pour résoudre cette intégrale, nous effectuons le **changement de variable** $u = x^3$, ce qui donne $du = 3x^2 dx$, ou encore :

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{e^{-u}}{3}\, du$$

Cette dernière intégrale est une intégrale exponentielle classique :

$$\frac{1}{3}\int_1^{\infty} e^{-u}\, du$$

La primitive de e^{-u} est $-e^{-u}$, donc nous avons :

$$\frac{1}{3}\left[-e^{-u}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{3}\left(0 + e^{-1}\right) = \frac{e^{-1}}{3}$$

L'intégrale converge donc, ce qui implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ converge par le test de l'intégrale.

Exercice 10 (Stewart 1.3.9-1.3.26)
Déterminez si la série converge ou diverge

Utilisation du critère de Riemann

14. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

Nous pouvons déduire le terme général a_n de la suite et réécrire la somme comme suit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Puisqu'il s'agit d'une **série à termes positifs**, nous pouvons appliquer le critère de Riemann. **Ainsi**, nous avons :

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = \lim_{n\to+\infty} n^{3/2}\frac{1}{n^{3/2}} = l = 1$$

Puisque la quantité p est telle que $p > 1$, par **le critère de Riemann**, la série conv.

20. $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{3n-4}{n^2-2n}$

Puisqu'il s'agit d'une **série à termes positifs**, nous pouvons appliquer le critère de Riemann. **Considérons** la fraction polynômiale donnée par le terme général :

$$a_n = \frac{q}{r} = \frac{3n-4}{n^2-2n}$$

Considérons le degré le plus faible de cette fraction polynômiale, soit $\deg(q) = 1 = p$. Multiplions la fraction par $n^p = n^1$. **Ainsi**, nous avons :

$$na_n = n \cdot \frac{3n-4}{n^2-2} = \frac{3n^2-4n}{n^2-2}$$

Nous pouvons maintenant évaluer la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4n}{n^2-2} \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{3-\frac{4}{n}}{1-\frac{2}{n}} \longrightarrow 3$$

Ainsi, nous avons $p = 1 \leqslant 1$ et $l = 3 \neq 0$. Par le **critère de Riemann**, nous pouvons conclure que la série **div**.

> **Exercice 11** (Stewart 1.3.28)
> Expliquez pourquoi on ne peut pas utiliser le test de l'intégrale pour déterminer si la série converge.
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{1+n^2}$$

Le test de l'intégral peut s'appliquer sur une fonction $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ **positive croissante** et **continue**. Or, si l'une de ces conditions n'est pas respectée, on ne peut appliquer le test. La suite $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est associée à la fonction $f(x)$ correspondante :

$$\left[a_n = \frac{\cos^2 n}{1+n^2}\right] \implies f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+x^2}$$

Or, le numérateur de la fonction est 2π périodique ; la fonction n'est donc pas monotone. Ainsi, nous ne pouvonsa lui appliquer le test de l'intégrale.

Convergence de série alternées

> **Exercice 12** (Stewart 1.4.7)
> Déterminez si la série converge ou diverge.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n-1}{2n+1}$

Appliquons le critère de convergence nécessaire pour le terme général. Soit une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, une condition nécessaire pour que cette série converge est que la limite du terme général tende vers 0. Nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{2n+1} \equiv \lim_{n\to+\infty} \frac{3-\cancelto{0}{\frac{1}{n}}}{2+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{3}{2} \neq 0$$

Ainsi, par le **critère de divergence du terme général**, nous pouvons conclure que la série **div**.

$$\boxed{\left[\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0\right] \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \infty \ (\textbf{div})}$$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{2n+3}$

La somme ressemble à une **série alternée** sur laquelle on peut appliquer le critère de convergence des série alternées. Vérifions la **limite du terme général** a_n :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3} \equiv \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n^{1/2} + \cancelto{0}{\frac{3}{n^{1/2}}}} \longrightarrow \mathbf{0}$$

Ainsi, nous savons que la limite du terme général tend vers 0. Considérons la la fonction $f : [N, \infty] \to \mathbb{R}$ telle que $f(n) = b_n$. Calculons la dérivée :

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{(n)^{1/2}}{2n+3}\right] = \frac{\left(n^{1/2}\right)'(2n+3) - (2n+3)'n^{1/2}}{(2n+3)^2} = \frac{(2n+3)\cdot 1/2n^{-1/2} - 1/2(n^{1/2})}{(2n+3)^2} = \frac{\frac{(2+3)}{n^{1/2}} - \frac{n^{1/2}}{2}}{(2n+3)^2}$$

Puisque la différence du numérateur est négative $\forall n \in \mathbb{N}$, la fraction polynômiale engendre une quantité négative. Ainsi, la dérivée est négative, ce qui implique que la fonction est **décroissante**. **Ainsi**, la suite a_{n+1} est décroissante et majorée par a_n et puisque le terme général a_n tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$, par **le critère des série alternées**, nous pouvons conclure que la série **conv**.

$$\boxed{\left[\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \textbf{ et } f(n) = b_n, f'(x) \leqslant 0, \forall\ n \geqslant N\right] \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{conv}}$$

Convergence absolue

> **Exercice 13** (Stewart 1.5.4)
>
> Déterminez si la série est **absolument convergente**, simplement convergente ou divergente.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$

Considérons la valeur absolue du terme général $|a_n|$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^3+1}\right| = \frac{1}{n^3+1}, \ \forall\ n \geqslant 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^p, p = 3$$

Il s'agit d'une **série de Riemann** avec $p = 3 > 1$. Par la **définition d'une série de Riemann**, nous pouvons conclure que la somme converge **absolument**. puisque cette somme est plus grande que la somme originale, par le test de comparaison, nous pouvons conclure que la somme originale diverge.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \approx \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad (\textbf{conv}, \ \textbf{Riemann})\right] \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}}$$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

Évaluons la somme par le test de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{(2n+1)(2n)!}} \longrightarrow \mathbf{0}$$

Par le critère de **Cauchy**, nous pouvons conclure que la somme **conv**.

$$\boxed{\left[\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1\right] \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ \textbf{conv}}$$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n}{n^n}$

Évaluons la somme par le test de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n^n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} \longrightarrow \mathbf{0} < 1$$

Par le critère de **Cauchy**, nous pouvons conclure que la somme **conv**.