1) SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots . + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots . + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots . + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Tendremos m ecuaciones y n incógnitas donde:

- a_{ij} se denominan coeficientes de las incógnitas.
- $b_1, b_2, \dots \dots b_n$ son los términos independientes.
- $x_1, x_2, \dots .., x_n$ son las incógnitas del sistema.

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones

Matriz de los coeficientes	**Matriz Ampliada**
A = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots .. & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots .. & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots . & \dots . & \dots .. & \dots . \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \dots .. & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots . & \boldsymbol{a_{1n}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots . & \boldsymbol{a_{2n}} & \boldsymbol{b_2} \\ \dots . & \dots . & \dots . & \dots . & \dots . \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \dots . & \boldsymbol{a_{mn}} & \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}$
Matriz de los términos Independientes	**Matriz de las incógnitas**
B = $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \dots . \\ \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}$	**X**= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \dots . \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$

- La matriz ampliada es la matriz que se obtiene al añadir a la matriz de los coeficientes la columna b de los términos independientes. Lo podemos representar como A^* y $(A|B)$
- Utilizando las matrices que acabamos de definir, el sistema se puede expresar como A·X = B
- Si el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones lineales, podemos asegurar que el sistema es **cuadrado.** Es decir la matriz A es cuadrada (matriz de los coeficientes)

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 8 \\ -2x + 6y = 7 \end{cases}$$

Matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ Matriz $A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \\ -2 & 6 & 7 \end{array}\right)$ Matriz incógnitas X=$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Matriz términos Independientes B = $\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

A· X = B → $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) <u>Tipo de Sistemas de Ecuaciones</u>

Dependiendo del número de soluciones que tengan los sistemas de ecuaciones lineales tendremos:

- Sistema Incompatible: no tiene solución.
- Sistema Compatible Determinado (SCD): posee una única solución.
- Sistema Compatible Indeterminado (SCI): posee infinitas soluciones.

Sistemas Equivalentes

Son aquellos sistemas que poseen las mismas soluciones aunque posean distinto número de ecuaciones.
Podremos obtener sistemas equivalentes si realizamos cualquiera de las siguientes transformaciones:

- Multiplicar o dividir los miembros de una ecuación por un número que sea distinto de cero.
- Cambiar una ecuación por otra.
- Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.
- Eliminar una ecuación que sea igual a otra o que sea combinación lineal de otras.

Ejemplo: Los siguientes sistemas de ecuaciones son equivalentes:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_2]{} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_3]{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y + z = 1 \\ -y - 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3]{} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 2 \\ -3y + z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - 3f_2]{} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 2 \\ 7z = -5 \end{cases}$$

Sistemas Escalonados

En un sistema escalonado cada ecuación posee una incógnita menos que la anterior.

Ejemplo: $\begin{cases} x + 2y - z = 10 \\ 3y + 2z = 2 \\ 4z = 8 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Ejemplo:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ También es un sistema escalonado pero es un sistema con dos ecuaciones con tres incógnitas.

Consideramos $z = \lambda$ donde λ es un parámetro que puede tomar cualquier valor real $\rightarrow$

$x = 1 - y - z = 1 - 1 + \lambda - \lambda = 0$

$y = 1 - z = 1 - \lambda$

$z = \lambda$

3) Resolución de sistemas mediante el método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro sistema equivalente hasta conseguir un **sistema escalonado.**

Tomamos la matriz ampliada A^* e intentamos transformarla en una matriz escalonada:

- Si alguna de las filas está formada por ceros exceptuando el término independiente, el cual es distinto de cero, tendremos un **Sistema Incompatible** (no tiene solución). Ejemplo: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$
- Si el sistema no es Incompatible, el sistema puede ser:
  - Si el número de filas coincide con el número de incógnitas, el sistema será **Compatible Determinado (S.C.D)** y el sistema tendrá una única solución. Para obtener la solución resolvemos el sistema escalonado de abajo a arriba.
  - Si el número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas, el sistema será **Compatible Indeterminado (S.C.I)** y el sistema tendrá infinitas soluciones.

    El número de parámetros que debemos escribir será la diferencia entre el número de incógnitas y el número de filas no nulas.

Ejemplos:

1) S.C.D (Sistema Compatible Determinado) (Una única Solución)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$

2) S.C.I (Sistema Incompatible Indeterminado) (∞ ***Soluciones*****)**

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_1]{f_2 \to f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que el número de filas no nulas < número de incógnitas.

Número de parámetros= número de incógnitas – número de filas no nulas = 3-2= 1 parámetro

z = ʎ

-2y+2z = -2 → -y + z = -1 → y = ʎ + 1

$$\to \begin{cases} x = -ʎ - 3 \\ y = ʎ + 1 \\ z = ʎ \end{cases} \quad \forall ʎ \in \mathbb{R}$$

x – y +2z = -4 → x = ʎ + 1 -2ʎ - 4 = -ʎ -3

3) (S.I) Sistema Incompatible (No tiene Solución)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to f_3 - 2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Una vez conseguida la matriz escalonada, observamos que en la fila 3 todos los términos son iguales a cero exceptuando el término independiente que es distinto de cero ($0 \neq -2$) → El Sistema es Incompatible (No tiene solución)

4) <u>Regla de Cramer para Sistemas Cuadrados</u>

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer se debe cumplir que el determinante de la matriz de los coeficientes sea distinto de cero. Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D) cuya solución será:

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -2x - 5y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → El sistema será Compatible Determinado.

Para resolver el sistema mediante la regla de Cramer:

- Cuando estemos calculando la variable x el determinante que se encuentra en el numerador debemos cambiar los coeficientes de la x por los términos independientes. Por eso la primera columna (que corresponde a la x) hemos escrito los términos independientes. En las otras columnas escribimos los coeficientes que le corresponden.
- Cuando estemos calculando la variable y el determinante que se encuentra en el numerador debemos cambiar los coeficientes de la y por los términos independientes. Por eso la segunda columna (que corresponde a la y) hemos escrito los términos independientes. En las otras columnas escribimos los coeficientes que le corresponden.

X = $\dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}} = \dfrac{-32}{-1} = 32$ y = $\dfrac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}} = \dfrac{14}{-1} = -14$

<u>Regla de Cramer para Sistemas no Cuadrados</u>

Cuando en un sistema el número de incógnitas > que el número de filas no nulas, tendremos un sistema Compatible Indeterminado. (S.C.I)

Número de parámetros = número de incógnitas – número de filas no nulas.

Ejemplo 1: Observamos que el siguiente sistema no es cuadrado.

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ Número de parámetros = número de incógnitas – número de filas no nulas.

Nº de parámetros = 3 – 2 = 1 parámetro → z = λ

Resolvemos el sistema mediante la regla de Cramer

$\begin{cases} x+y=1-\lambda \\ x+2y=2+\lambda \end{cases}$ → A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ podremos aplicar Cramer.

X= $\dfrac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{2-2\lambda-2-\lambda}{1} = -3\lambda$ y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 2+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{2+\lambda-1+\lambda}{1} = 1+2\lambda$

Solución: $\begin{cases} x=-3\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Ejemplo 2: Observamos que el siguiente sistema no es cuadrado.

$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-4y+z=2 \end{cases}$ Número de parámetros = número de incógnitas – número de filas no nulas.

Nº de parámetros = 3 – 2 = 1 parámetro → z = λ

Resolvemos el sistema mediante la regla de Cramer:

$\begin{cases} x-2y=1-\lambda \\ 2x-4y=2-\lambda \end{cases}$ → A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ No podremos aplicar Cramer.

Podemos hacer que y = λ

$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-4y+z=2 \end{cases}$ → $\begin{cases} x+z=1+2\lambda \\ 2x+z=2+4\lambda \end{cases}$ → A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ Podremos aplicar Cramer

X = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 1 \\ 2+4\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1+2\lambda-2-4\lambda}{-1} = 1+2\lambda$ z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2\lambda \\ 2 & 2+4\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{2+4\lambda-2-4\lambda}{-1} = 0$

Solución: $\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$

5) Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots . + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots . + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots . + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sea A (matriz de los coeficientes) y A^* (matriz ampliada)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots . . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots . . & a_{2n} \\ \dots . & \dots . & \dots . . & \dots . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots . . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots . & a_{2n} & b_2 \\ \dots . & \dots . & \dots . & \dots . & \dots . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones Lineales

- Si rg(A) ≠ rg (A^*) → El Sistema es Incompatible (S.I) (no tiene solución)
- Si rg(A) = rg (A^*) → El Sistema es Compatible
  - Si rg(A) = rg (A^*) = nº de incógnitas → El Sistema es Compatible Determinado (S.C.D) (una única solución)
  - Si rg(A) = rg (A^*) < nº de incógnitas → El Sistema es Compatible Indeterminado (S.C.I) (Infinitas soluciones)

6) Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la matriz Inversa

En los temas anteriores hemos aprendido a calcular la matriz inversa y multiplicar matrices por lo tanto podremos resolver un sistema de ecuaciones lineales (siempre que exista el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de coeficientes no sea nulo). Procederemos de la siguiente manera:

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots . + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots . + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots . + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Lo escribo de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots . . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots . . & a_{2n} \\ \dots . & \dots . & \dots . . & \dots . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots . . & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots . \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = B$$

Por lo tanto si quiero solucionar el sistema : $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{B}$

Ejemplo

$\begin{cases} 3x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 4z = 21 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{cases}$ A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}$

X = $A^{-1} \cdot B$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

X = $A^{-1} \cdot B$ = $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ → X = $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

X = $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

7) <u>Sistemas Homogéneos</u>

Se trata de sistemas en los que todos los términos independientes de las ecuaciones son iguales a cero.

La expresión de un sistema homogéneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots . + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots . + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots . + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas homogéneos pueden ser: **Sistema Compatible Determinado o Indeterminado**

- Si rg(A) = nº de incógnitas → Sistema Compatible Determinado y tiene como única solución la trivial. (x=0, y=0, z=0….)
- Si rg(A) < nº de incógnitas → Sistema Compatible Indeterminado. Entre las infinitas soluciones está también la trivial.

8) <u>Resumen de la resolución de Sistemas</u>

Primero deberemos averiguar si posee solución y posteriormente resolverlo si las posee (una o infinitas soluciones)

Para ello:

- **Análisis**: Mediante el método de <u>Gauss</u> o el teorema de <u>Rouché</u> podremos analizar el sistema y averiguar cuántas soluciones posee.
- **Cálculo**: Mediante la regla de <u>Cramer</u>, método de <u>Gauss</u> y el cálculo de la <u>matriz inversa</u> podremos averiguar dichas soluciones.

9) Sistemas dependientes de parámetros estudiando rangos

Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones lineales, alguno o algunos de los coeficientes o los términos independientes dependan de uno o más parámetros. Primeramente debemos calcular aquellos valores del parámetro que me hacen que el sistema sea compatible. Una vez que los hemos calculado, debemos distinguir los casos en los que el sistema es compatible determinado o compatible indeterminado.

1. Calculamos los valores del parámetro para los que el rango de la matriz de los coeficientes (A) sea distinto al rango de la matriz ampliada (A*).
2. En el caso de que una de estas matrices sea cuadrada empezaremos calculando su rango. Si ninguna de las matrices fuera cuadrada se comienza calculando el rango de la matriz de los coeficientes (A).
3. Calculamos los rangos tanto de la matriz de los coeficientes como de la matriz ampliada para los distintos valores del parámetro.
4. Aplicamos el teorema de Rouché-Frobenius

Ejemplo: Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = a \end{cases}$$

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son:

A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ y A*=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 & a \end{pmatrix}$

En este caso, el máximo rango que pueden tener ambas matrices es 3.

Como hemos indicado en el apartado 2 vamos a comenzar por aquella matriz que sea cuadrada, en este caso la matriz cuadrada es la matriz de los coeficientes (A).

Calculamos el rango de A

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ → rg(A)<3

Tomamos una menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$=-2+3=1≠0 → rg(A) =2

Calculamos El rango de A*

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -14 \\ 3 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & a \end{vmatrix}$= -2a+42+16-56+3a-8 = a-6 =0 → a=6

Por tanto hay que distinguir dos casos:

<u>Caso I : Cuando a ≠ 6</u>

Tenemos que rg(A)≠rg(A*) ya que rg(A)=2 y rg(A*)=3 → por lo tanto el sistema es incompatible

Caso II Cuando a =6

Se cumple que rg(A)=rg(A*)=2<nº de incógnitas → Tenemos un sistema compatible Indeterminado.

Calculamos las soluciones

- Marcamos en el sistema el menor que ha servido para obtener rg(A)=2. Las ecuaciones que no intervienen se pasan al segundo miembro con valor de parámetro.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -14 \\ 3x - y - z = -4 \\ 4x - y - 5z = 6 \end{cases} \Rightarrow Z=\lambda, \begin{cases} 2x - y = -14 - 3\lambda \\ 3x - y = -4 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = 10 + 4\lambda \\ y = 34 + 11\lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$