La simple necesidad de ordenar algunas informaciones disponibles nos lleva muchas veces a la creación de matrices. Por ejemplo, si consideramos dos sucursales que venden tres modelos de un producto (llamémoslos 1, 2 y 3), al indicar la información sobre las ventas de cada modelo en cada una de las sucursales, podríamos organizar esta información en una tabla o cuadro como el siguiente:

	1	**2**	**3**
A	300 u.	700 u.	200 u.
B	100 u.	400 u.	800 u.

Al confeccionar esta tabla, hemos creado una matriz de dos filas y tres columnas que tienen los datos (no estamos considerando la fila y la columna que tienen los rótulos de fila y columna).

Basta pensar en un simple listado con los datos sobre el personal de una empresa para entender que constantemente nos enfrentaremos con matrices en nuestro trabajo.

Esperamos que a través del estudio de esta unidad usted, como alumno de esta asignatura, adquiera capacidad para:

- Abstraer los datos de una situación concreta y volcarlos en la creación de una matriz.
- Modelizar las características de una situación compleja en términos de operaciones entre matrices.

MATRICES

Aclaremos, en primer lugar, a qué nos referimos con el término **matriz**…

La idea es muy simple: es suficiente con que usted decida anotar en una tabla cuáles son los precios de algunos productos en varios supermercados para que naturalmente surja la idea de armar una tabla ordenada: una matriz.

Supongamos que una persona necesita comparar los precios de los productos yogur y leche que ofrecen los supermercados A, B, C. Imaginemos que, para uno y otro respectivamente, los precios son: \$1.40 y \$1.20 en A, \$1.50 y \$1.10 en B y, por último, \$1.50 y \$1.30 en C.

Una manera de organizar la información podría ser la siguiente:

	A	**B**	**C**
Yogurt	1,40	1,50	1,50
Leche	1,20	1,10	1,20

Sobreentendiendo el orden de productos y el de los comercios, podríamos colocar:

1,40	1,50	1,50
1,20	1,10	1,20

Esto es una matriz de 2 filas y 3 columnas. No es nada complicada y es evidente que, en cualquier actividad en la que se manejen organizadamente datos que correspondan a distintos rubros, las matrices aparecerán de modo espontáneo.

Otro ejemplo nos lo acerca una simple factura por una compra. Veámoslo:

2	**Kg de X a**	**\$1,50**
0,5	**Kg de X a**	**\$0,85**

Aquí hay una matriz muy simple:

2	**1,50**
0,5	**0,85**

Ahora bien, en estas matrices podemos distinguir algunos elementos especiales, como **filas**, **columnas** y **diagonales** y, también, estructuras especiales, como **matrices cuadradas**, **triangulares**, **diagonales escalares**, **nulas**, entre otras.

Actividad:

Busca y contesta:

a. ¿Cuáles son los elementos de una matriz?
b. ¿Cuáles son las matrices especiales?

Con las matrices se pueden efectuar **operaciones** como, por ejemplo, sumarlas; en ciertas condiciones, multiplicarlas por un número, etc. Cuando se trabaja con matrices se realizan operaciones entre éstas y también entre números y matrices. En ese contexto a esos números los llamamos **escalares**.

Suma de matrices

Dos matrices se pueden sumar sólo si tienen igual orden, es decir, si ambas son de igual m x n.
En ese caso, el resultado es otra matriz del mismo orden, que se obtiene sumando los elementos correspondientes de las dos matrices involucradas.
Vale decir que si $A \in R^{m \times n}$ y $B \in R^{m \times n}$, entonces la matriz suma A + B, que podemos simbolizar con c, cumple:

a) $c \in R^{m \times n}$
b) $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\quad \forall \in [\,1\,;\ m\,]$

$\forall \in [\,1\,;\ n\,]$

Todo esto significa que el c_{11} del resultado es:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11}$$

El c_{12} es:

$$c_{12} = a_{12} + b_{12=}$$

El c_{31} es:

$$c_{31} = a_{31} + b_{31}$$

... y así con todos los elementos.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & -3+1 \\ 4-2 & 5-3 \end{bmatrix}$$

El resultado es entonces:

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Al trabajar con la suma de números reales nos enfrentamos con la resta de reales. Ahí aprendemos que tomar **a** y restarle **b** es lo mismo que tomar **a** y sumarle el opuesto de **b**, es decir, es lo mismo realizar **a – b** que **a + (– b)**. Todos sabemos que al real **–b** lo llamamos "el opuesto de **b**".

Con las matrices sucede lo mismo: restar a la matriz A la matriz B (o sea, efectuar A-B) equivale a sumarle a A la opuesta de B (es decir, realizar la operación A + (-B)). Es decir que vale la igualdad:

$$\mathbf{A - B = A + (- B)}$$

Pero ¿qué es la opuesta de una matriz **B**? Simplemente, **la opuesta de una matriz** es la matriz que se obtiene cambiando de signo todos los elementos de la matriz **B**.

Resta de matrices de igual orden:

Restar las matrices A y B, es decir, formar la resta A – B equivale a sumarle a A la opuesta de B.

Expresado en fórmula:

$$A - B = A + (- B)$$

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -8 & -7 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 8 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Si el número es k ($k \in R$) y la matriz es $A = [\, a_{ij} \,] \in R^{m \times n}$, entonces el resultado de k . A –que podríamos llamar B– cumple:

a) $B \in R^{m \times n}$

b) $B = [\, a_{ij} \,]$ con $i \in [\, 1 \,;\, m \,]$
$j \in [\, 1 \,;\, m \,]$

...Siendo:

$$b_{ij} = k \, . \, a_{ij}$$

Es decir que para obtener los elementos del resultado hay que multiplicar cada elemento de la matriz original por k.

Ejemplo:

$$3\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\,.\,1 & 3\,.\,(-2)\\ 3\,.\,5 & 3\,.\,(-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 15 & -9\end{bmatrix}$$

Actividad: Operaciones entre matrices

1) Determine el número de filas, el número de columnas y el orden.

$$a)\ A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$c)\ C = \begin{bmatrix}3 & -1 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

2) Escriba dos matrices de cada tipo indicado a continuación (que sean de distintos órdenes).

a. Nula

b. Unidad

c. Escalar

d. Diagonal

e. Triangular Superior

f. Triangular inferior

g. Cuadrada

3) Para las siguientes matrices realice las operaciones que le pedimos que halle:

a. A + B

b. K.A

c. α.A + β. B

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix} \qquad K = 3;\ \alpha = 5\ ;\ \beta = -1$$

4) Dadas las matrices A, B y C, le solicitamos que halle:

a. A – B
b. B - C

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & 9\\ 4 & 1 & -7\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}6 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 8\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -5\end{bmatrix}$$

5) Cuando sea posible halle x, y (reales) aplicando “identidad de matrices” en cada ítem. Si no es posible, indíquelo.

$$a)\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & y\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$b)\begin{bmatrix}3+x & 5\\ 2 & 3-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x & 5\\ 2 & 7+y\end{bmatrix}$$

$$c)\ 2\begin{bmatrix}3 & -x+1\\ 4 & y\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & y\\ 2 & 4x\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1 & 3x\\ 2 & 2y\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & x+y\\ 1 & y\end{bmatrix}$$

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Para cada **matriz cuadrada**, es decir que tenga igual cantidad de filas que de columnas, hay un número asociado que llamamos su **determinante**.

Caso de matriz de 1x1

En el caso de la matriz cuadrada más simple posible, es decir la matriz de 1x1 (una fila y una columna), el determinante de esa matriz es simplemente ese número que es su único elemento.

Es común indicar el determinante de una matriz encerrando los elementos de la matriz entre dos barras verticales. De este modo el determinante de la matriz A = [-3] (que, como es obvio, es de 1x1) se indica así: |-3|. Como dijimos que en el caso de matriz de 1x1 el determinante es igual al único elemento de la matriz, entendemos que:

determinante de A = |-3| = -3.

Caso de matriz de 2x2

Si consideramos la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

su determinante se indicará así:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante será el número que se obtiene al multiplicar los elementos de la diagonal que desciende (leída de izquierda a derecha) y restarle el producto de la diagonal que asciende (leída de izquierda a derecha).

En concreto, el determinante sería:

Det= (1)(-4)-(2)(5)= -4 -10 = - 14

En general, para la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vale:

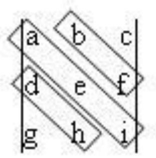
Determinante de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = a . d – b . c

Caso de matrices de 3x3

Para entender la regla de **Sarrus**, que usaremos en este caso, hagamos una analogía con la mecánica del caso anterior.

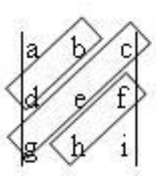
Para ello recordemos que en 2x2 multiplicábamos los elementos de la diagonal descendente y a ese producto le restábamos el producto de los elementos de la diagonal ascendente.

En la regla de Sarrus nos enfrentamos a tres filas y tres columnas, que nos dan tres diagonales descendentes y tres diagonales ascendentes, de modo que sumaremos los productos de las descendentes y restaremos los productos de las ascendentes. Pero encontraremos que hay diagonales “cortas”, que tienen dos elementos y deben ser completadas con un tercer elemento. En cada caso este elemento que completa una diagonal corta es el número que está más lejos de esa diagonal. Para comprenderlo mejor veámoslo en un esquema.



Se comienza con la diagonal corta “b f” que debe ser completada con el elemento más lejano que es “g”, de modo que el primer producto es “b . f . g”. La segunda es la diagonal “a e i”, que tiene tres elementos, de modo que el segundo producto es “a . e . i”. La tercera es la diagonal corta “d h”, que se completa con el elemento “c”, de modo que el tercer producto es “d . h . c”.

Con respecto a las diagonales ascendentes, son las que se indican en el gráfico siguiente:



Los tres productos serán: “d . b . i” el primero, “g . e . c” el segundo y “h . f . a” el tercero. Pero como son ascendentes sus valores se restan en este cálculo, con lo cual el determinante es:

$$b.\ f.\ g + a\ .\ e\ .\ i + d\ .h\ .\ c - d\ .\ b\ .\ i - g\ .\ e\ .\ c - h.\ f.\ a$$

Desarrollo de Laplace de un determinante

Hasta ahora hemos calculado determinantes de matrices de 1x1, de 2x2 y de 3x3. Ahora bien, ¿cómo se calcula el determinante de una matriz de 4x4?

Un camino posible es aplicar el llamado **Método de Laplace** a través del cual el determinante se desarrolla usando una fila o columna. Este método, que también se puede usar para calcular determinantes de menor orden, consiste en reducir el cálculo de un determinante de cierto orden a un problema más sencillo. En esencia, para calcular un determinante de orden **nxn** se deben calcular **n** determinantes de orden **n–1**.

Veamos un ejemplo…

Para obtener un determinante de orden 4 se deben calcular 4 determinantes de orden 3, en nuestro caso ya lo sabemos hacer usando la regla de Sarros.

Cuando se emplea el Método de Laplace es necesario calcular los **menores** y los **cofactores** correspondientes a cada elemento de la matriz cuyo determinante se trata de hallar.

Son dos conceptos sencillos:

- El **menor** correspondiente a un cierto elemento de una matriz cuadrada es el determinante de la matriz que queda cuando se eliminan, en la matriz original, la fila y la columna del elemento en cuestión. Por ejemplo, el **menor** correspondiente al elemento $a_{i\,j}$ de la matriz cuadrada **A** será el determinante de la matriz resultante de quitar en **A** la fila **i** y la columna **j**.
- En cuanto al **cofactor** correspondiente a un elemento cualquiera $a_{i\,j}$ de una matriz cuadrada **A** será a veces el mismo **Menor** $M_{i\,j}$ y a veces su opuesto. ¿Cuándo será el mismo menor y cuándo su opuesto?

  La respuesta es simple: si la suma **i + j** es **par**, entonces, el **Cofactor o Adjunto** $Adj_{i\,j}$ será igual al Menor $M_{i\,j}$. En cambio, si la suma **i + j** es **impar**, el **Cofactor o Adjunto** $Adj_{i\,j}$ será igual al opuesto del Menor. Por ejemplo: el **Cofactor** Adj_{12} será el opuesto del Menor M_{12} (porque 1+2 =3 que es impar) y el **Cofactor** Adj_{31} será igual al Menor M_{31} (porque 3+1 =4 que es par).

<u>Actividad: Determinante de una matriz cuadrada</u>

1) Halle los determinantes siguientes:

$$a)\ D_{(A)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b)\ D_{(B)} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$c)\ D_{(C)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2) Halle el o los valores de "x" que verifiquen la siguiente igualdad.

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ -1 & 0 & 2+x \\ 0 & 3-x & 1 \end{vmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Para comprender fácilmente el producto de matrices conviene iniciar el trabajo con las matrices más sencillas: las llamadas **matrices fila** y las **matrices columna**. Las primeras tienen una sola fila y las segundas, una sola columna.

Cuando una matriz fila y una matriz columna tienen la misma cantidad de elementos se puede realizar el producto de la matriz fila por la matriz columna. Y eso se efectúa de modo muy simple: se multiplica el primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna (en la fila se lee de izquierda a derecha y en la columna, de arriba hacia abajo). La suma de todas esas multiplicaciones es el resultado del producto de matrices.

Una vez que se ha definido el producto de matriz fila por matriz columna el producto de una matriz por otra no ofrece dificultades. En este caso, el resultado es éste: es la matriz que se obtiene multiplicando cada fila de la primera por cada columna de la segunda y ubicando el resultado en el lugar correspondiente a ese número de fila y ese número de columna. Hay una **restricción** para el producto de dos matrices, y es la siguiente: el número de filas de la primera debe ser igual al número de columnas de la segunda.

Si escribimos simbólicamente los órdenes de la primera y de la segunda como es usual, por ejemplo: **mxn** la primera y **hxk** la segunda se debe cumplir que **n=k.** Es decir que los órdenes de las matrices **A** y **B** deben ser respectivamente **m**x**n** y **n**x**k.**

Es posible multiplicar **A** x **B** si los órdenes son 3x2 y 2x5, pero no se puede, en ese caso, multiplicar **B** x **A.**

Esta condición nos indica que el producto de matrices no es conmutativo. Es decir que no es seguro que AxB sea igual que BxA. Más aún a veces existe uno de los dos productos y el otro no como acabamos de ver.

INVERSA DE UNA MATRIZ

Matriz cuadrada regular

Vimos que es cualquier matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero y, también, que tales matrices son inversibles, es decir, tienen matriz inversa.

Matriz transpuesta de una matriz A

Se designa con A^T.

La primera fila de A es la primera columna de A^T.

La segunda fila de A es la segunda columna de A^T …

Por ejemplo, si A es la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

su transpuesta resulta ser:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Menor correspondiente a un elemento de una matriz cuadrada

Consideremos la matriz cuadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Fijemos nuestra atención en el elemento “4”.

Este se encuentra en la 2ª fila y 1ª columna (es decir, es el elemento a_{21}, donde los subíndices señalan precisamente los números de fila y de columna, en ese orden).

El Menor correspondiente al elemento “4” se indica como M_{21} (notación que deja perfectamente claro que se trata del Menor correspondiente al elemento ubicado en la 2ª fila y 1ª columna). Es el determinante de la submatriz que queda al eliminar de A la 2ª fila y la 1ª columna. En concreto, es el determinante de la submatriz

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, determinante que vale $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ =2 . 9 – 8 . 3 =18 – 24 = – 6.

Este valor “–6” es el Menor correspondiente al elemento a_{21} de la matriz cuadrada A.

Veamos otro ejemplo para la misma matriz A.

¿Cuál sería el menor M_{13}? O sea: ¿cuál sería el Menor correspondiente al elemento ubicado en la 3ª fila y 1ª columna?

Es fácil comprender que ese menor, simbolizado M_{13}, es el determinante de la submatriz siguiente:

$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, que vale $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ = 4 . 8 – 7 . 5 = 32 – 35 = – 3

Cofactor o Adjunto de un elemento de una matriz cuadrada

Este concepto es muy sencillo y está vinculado al concepto de Menor. La vinculación consiste en lo siguiente:

- si la suma i + j es PAR, entonces el Cofactor o Adjunto Cof_{ij} es directamente el Menor M_{ij}
- si la suma i + j es IMPAR, entonces el Cofactor o Adjunto Cof_{ij} es el opuesto del Menor M_{ij}

Veamos un ejemplo. Continuemos trabajando sobre la misma matriz A. Deseamos encontrar el Cofactor Cof_{32}. Dado que 3 + 2 = 5 (IMPAR), el Cof_{32} es el opuesto del Menor M_{32}.

Calculemos este Menor:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1.6 - 4.3 = 6 - 12 = -6$$

Entonces, el Cofactor Cof_{32} es el número “6” (que es el opuesto de “–6”)

Si nos propusiéramos calcular, siempre para la matriz A, el Cof_{11}, hallaríamos previamente el Menor M_{11}. Éste vale $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5.9 - 8.6 = 45 - 48 = -3$. En consecuencia, el Cofactor correspondiente es $Cof_{11} = M_{11} = -(-3) = 3$.

Matriz adjunta de una matriz cuadrada

Es la transpuesta de la matriz que se obtiene reemplazando cada elemento de esa matriz por su cofactor. Es decir, se realizan dos pasos. El primero consiste en reemplazar cada elemento por su cofactor o adjunto y el segundo, en transponer la matriz obtenida en el primer paso.

Veamos un caso concreto.

Consideremos la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ Encontremos los menores de cada elemento de B.

El Menor $M_{11} = |1| = 1$, entonces el Cofactor es $Cof_{11} = 1$

El Menor $M_{12} = |4| = 4$, entonces el Cofactor es $Cof_{12} = -4$

El Menor $M_{21} = |-1| = -1$, entonces el Cofactor es $Cof_{21} = -(-1) = 1$

El Menor $M_{22} = |2| = 2$, entonces el Cofactor es $Cof_{22} = 2$

(Recuerde, para estos cuatro cálculos, que el determinante de una matriz de 1x1 es el valor del único elemento que constituye esa matriz).

La matriz que se obtiene al reemplazar cada elemento por su cofactor es:

$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Sólo falta transponerla para obtener la Adjunta de B.

Y al transponer obtenemos $Adj(B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Inversa de una matriz cuadrada regular B

Una matriz cuadrada es regular si y sólo si su determinante no es cero.

Ahora bien, dada una matriz cuadrada regular B, para obtener su inversa (que designamos B^{-1}) simplemente multiplicamos la Matriz Adjunta de B por el número $\dfrac{1}{Det(B)}$.

Tomemos como ejemplo la matriz B que acabamos de considerar. Recordemos que su Adjunta es:

$$Adj(B)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$$

Sólo necesitamos calcular su determinante y multiplicar cada elemento de esa matriz por $\frac{1}{Det(B)}$.

Veamos:

$$Det(B)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2.1-4.(-1)=2+4=6$$

De modo que sólo nos falta multiplicar cada elemento de la Adj(B) por $\frac{1}{6}$ para obtener la inversa de B.

$$A^{-1}=\frac{1}{6}Adj(B)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{4}{6} & \frac{2}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$