ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO EN ADS / CFT

0. NOTACIÓN: $a,b,c,d\ldots = 0,1,2,3$; signatura $(-+++)$;
$c = \hbar = 1$; "D" ← dim. espacio-tiempo grav. "$d \equiv D-1$" ← dim. CFT.

---

1. ESPACIO DE ANTI DE SITTER.

$$\boxed{\underbrace{R_{ab} - \tfrac{1}{2} g_{ab} R}_{\substack{\text{tensor de Einstein} \\ \equiv G_{ab}}} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G\, T_{ab}}$$

$\uparrow$ constante cosmológica (Λ); $\uparrow$ constante de Newton (G); tensor energía-momento "materia" (T_{ab}).

$\approx \ddot{X} = \dfrac{F}{m}$ con $X \leftrightarrow g_{ab}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \leftrightarrow \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}$

$\approx \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$; $F/m \leftrightarrow T_{ab}$

→ Soluciones de vacío $\Leftrightarrow T_{ab} = 0 \rightarrow G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0$.

$\cup$

→ Soluciones maximalmente simétricas ↔ admiten $\dfrac{D(D+1)}{2}$ vec. Killing $\xrightarrow{D=4} 10$.

(e.g. Poincaré, Galileo...) ; $R_{abcd} = K\,(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc})$

- $\Lambda = 0$ → Minkowski.
- $\Lambda > 0$ → De Sitter.
- $\boxed{\Lambda < 0 \rightarrow \text{Anti De Sitter}}$ ← curvatura negativa ; Def. $K = -\dfrac{1}{L^2}$ ← radio de AdS

$$R_{abcd} = -\frac{1}{L^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \Rightarrow R_{ac} = g^{bd} R_{abcd} = -\frac{1}{L^2}\left(g^{bd} g_{ac} g_{bd} - g^{bd} g_{ad} g_{bc}\right)$$

$$= -\frac{1}{L^2}\left(D g_{ac} - g_{ac}\right) = -\frac{(D-1)}{L^2} g_{ac} \Rightarrow R_{ac} = -\frac{(D-1)}{L^2} g_{ac} \; ; \quad R = -\frac{D(D-1)}{L^2} \; ;$$

$$\text{Ec. de Einstein} \Rightarrow -\frac{(D-1)}{L^2} g_{ac} + \frac{1}{2} g_{ac} \frac{D(D-1)}{L^2} + \Lambda g_{ac} = 0$$

$$\frac{(D-1)}{L^2}\left(-1 + \frac{D}{2}\right) = -\Lambda \rightarrow \boxed{\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2L^2}}$$

AdS con radio L soluciona Ec. Einst. si se cumple

Métrica de AdS :

(distintas coordenadas)

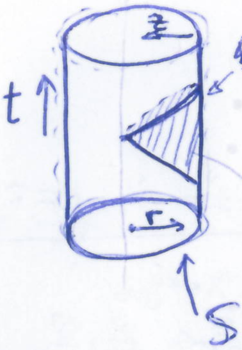
$$ds^2_{AdS} = \frac{L^2}{z^2}\left[-dt^2 + dz^2 + d\vec{x}^2\right] \leftarrow \text{coord. de Poincaré} \quad \begin{cases} z \in (0, \infty) \\ x_i \in (-\infty, \infty) \\ t \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

$z = 0$ ← frontera conforme

$$= \frac{L^2}{z^2}\underbrace{\left[dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu\right]}$$

↑ conformemente plano

Ejercicio: demostrar que ds^2_{AdS} satisface
$$R_{abcd} = -\frac{1}{L^2}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$$



frontera $(r=\infty)$ $(z=0)$

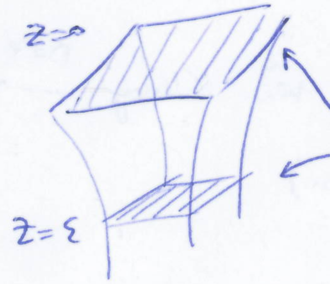
otras coordenadas ↓

$$ds^2_{AdS_{(d+1)}} = \left[-\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)} + r^2 d\Omega^2_{(d-1)}\right]$$

$d=2$

$$ds^2_{AdS_3} = \left[-\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)} + r^2 \underbrace{d\theta^2}_{S^1}\right]$$

parche de Poincaré



$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}\left(-dt^2+dz^2+d\vec{x}^2\right)$$

Minkowski en (D-1) dimensiones

Propiedades de AdS:

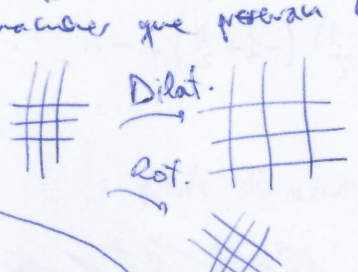
- ∂AdS de tipo tiempo ↔ espaciotiempo de dim. inferior por sí mismo.
- Rayos de luz llegan a ∂AdS en tiempo coordenado finito (como una caja)
- No es globalmente hiperbólico
- Isometrías (gen. por Killings) forman ~~un~~ grupo $SO(D-1,2)$

⇕

"grupo conforme" en (D-1)-dim. en Minkowski!!

→ transformaciones que preservan los ángulos

e.g.



2. Correspondencia

AdS/CFT ("holografía")

⇓

Gravedad cuántica (Teoría de cuerdas) en AdS_{d+1} ⟺ Teoría cuántica de campos conforme en ~~...~~ Minkowski$_d$ (sin gravedad)

"diccionario holográfico"

[Maldacena]

ejemplo paradigmático: Teoría de cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S_5$ ↔ $\mathcal{N}=4$ SYM en $d=4$, con grupo gauge $SU(N)$

límite de gravedad ~~...~~ débil ↔ CFT fuertemente acoplada (muchos colores)

¡¡ gravedad clásica para aprender cosas cuánticas!!

3. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO.

entrelazamiento $\longleftrightarrow$ no separabilidad

$\updownarrow$

correlaciones cuánticas

Consideremos sistema formado por dos subsistemas (e.g. dos electrones)

Estado del sistema $\in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

(estados puros)

Si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ se puede escribir como $|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \rightarrow$ "separable"

Si no $\Rightarrow$ $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B$ $\rightarrow$ $|\psi\rangle$ entrelazado $\Leftrightarrow$ el estado de cada subsistema ~~[illegible]~~ individual ~~[illegible]~~ no está bien definido.

$|i\rangle_A$: base de vectores de A (ortonorm.)

$|j\rangle_B$: idem B

Sólo el estado del sistema como conjunto tiene sentido.

Ejemplo: $A \leftrightarrow \{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ $\quad$ $B \leftrightarrow \{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$

$$|\psi\rangle = \left[|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= |0\rangle_A \otimes \left(\frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}}\right)_B \leftarrow \text{separable}$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \left[|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$$

¡entrelazado!

¿Cómo medimos el entrelazamiento?

$\rightarrow$ Entropía de entrelazamiento (EE). Dado $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$S(A) = -\mathrm{Tr}(\rho_A \log \rho_A) \quad \text{donde} \quad \cancel{\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB}) \; y \; \rho_{AB} = \ldots}$$

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|.$$

¡Difícil de calcular en general! Si podemos diagonalizar $\rho_A = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|$

$$\rightarrow S(A) = -\sum_j \lambda_j \ln \lambda_j$$

Ejemplos: * $|\psi\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \rightarrow \rho_A = \mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi| = \langle 0|_B \left(|0\rangle_A|1\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B\right)|0\rangle_B$

$$+ \langle 1|_B \left(|0\rangle_A|1\rangle_B\langle 0|_A\langle 1|_B\right)|1\rangle_B$$

$$= |0\rangle_A\langle 0|_A = 1 \cdot |0\rangle\langle 0| + 0\, |1\rangle\langle 1|$$

$$S(A) = -(1 \cdot \ln 1 + 0 \ln 0) = 0. \leftarrow \text{no hay entrelaz.}$$

$$* \quad |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{2}\langle 0|_B \left(|00\rangle + |11\rangle\right)\left(\langle 00| + \langle 11|\right)|0\rangle_B$$

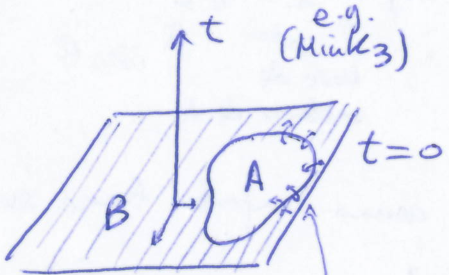
$$+ \frac{1}{2}\langle 1|_B \left(\quad '' \quad \right)\left(\quad '' \quad \right)|1\rangle_B$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle_A\langle 0|_A\right) + \frac{1}{2}\left(|1\rangle_A\langle 1|_A\right) \rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 1/2 \\ \lambda_1 = 1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow S(A) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$ ¡entrelazamiento!

En QFT ya no tenemos sistemas discretos, continuo de grados de libertad.

Biparticiones espaciales



$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

¡EE muy difícil de calcular en general!

Vacío cuántico lleno de entrelazamiento $\longleftrightarrow$ EE dominada por entrelazamiento a través de la frontera. Supongamos QFT en d-dimensiones

$$S_{EE} = c_0 \frac{R^{d-2}}{\delta^{d-2}} + c_1 \frac{R^{d-4}}{\delta^{d-4}} + \ldots + a \log\left(\frac{R}{\delta}\right) - F$$

E.g. en $d=3 \rightarrow S_{EE} = c_0 \frac{R}{\delta} - F$ — bien definido

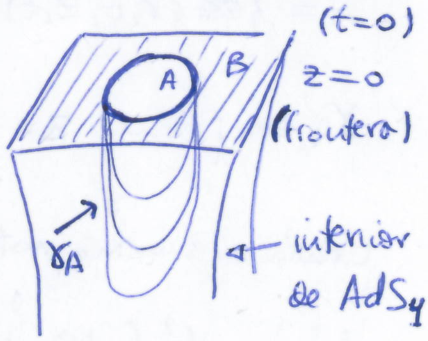
(superficie sin picos)

divergente, no universal

regulador ultravioleta.

4. EE en AdS/CFT

AdS/CFT nos permite calcular EE para las CFTs en la frontera de AdS:



(CFT) (AdS)

$$\boxed{S_{EE}(A) = \min_{\gamma_A \sim A} \frac{\text{Área}(\gamma_A)}{4G}}$$

nueva entrada en diccionario holográfico [Ryu-Takayanagi]

Superficie γ_A cuya frontera empalme con la frontera de A

- Parametrizar γ_A.
- Extremizar funcional de Área.
- Evaluar el funcional en superficie mínima.

$$\text{Área}(\gamma_A) = \int_{\gamma_A} \sqrt{h}\, d^{(d-1)}y$$

donde $h = \det h_{ij}$, $h_{ij} \leftrightarrow$ métrica inducida en la superficie por embebimiento en espacio ambiente.

Ejemplo: esfera embebida en $\mathbb{R}^3$.

$S^2 \leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = R^2$

$r^2 = R^2$

cambio coordenadas

$$ds^2_{\mathbb{R}^3} = dx^2+dy^2+dz^2;$$

$$ds^2_{\mathbb{R}^3} = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2);$$

$$ds^2_{\mathbb{R}^3} = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \quad \begin{cases} g_{rr} = 1 \\ g_{\theta\theta} = r^2 \end{cases} \quad g_{\phi\phi} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

$x^\mu = r, \theta, \varphi;$

$y^i = \theta, \varphi;$

Métrica inducida en S^2: $ds^2_{S^2} = h_{ij}\, dx^i dx^j$, $\quad h_{ij} = \frac{\partial X^\mu}{\partial y^i}\frac{\partial X^\nu}{\partial y^j} g_{\mu\nu}$

$$h_{\theta\theta} = \frac{\partial X^\mu}{\partial\theta}\frac{\partial X^\nu}{\partial\theta} g_{\mu\nu} = g_{\theta\theta}$$

$$h_{\phi\phi} = \frac{\partial X^\mu}{\partial\phi}\frac{\partial X^\nu}{\partial\phi} g_{\mu\nu} = g_{\phi\phi}$$

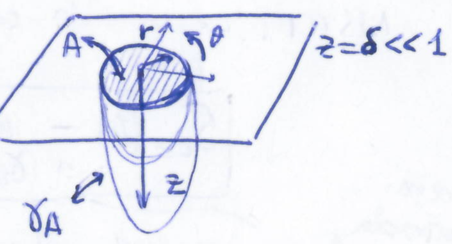
$$ds^2_{S^2_R} = R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2)$$

$$h \equiv \det h_{ij} = R^4 \operatorname{sen}^2\theta \rightarrow \sqrt{h} = R^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \text{Área}(S^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -2\pi R^2 \cos\theta\Big|_0^{\pi} = -2\pi R^2(-1-1) = 4\pi R^2$$

área de esfera ok ✓

Vuelta a AdS_4. Consideremos $A \leftrightarrow$ círculo en la frontera de AdS_4.



$$A = \{ (r, \theta, z, t) \ / \ t=0, \ z=\delta, \ r \leq R \}$$

$$\gamma_A \leftrightarrow \{ t=0, \ z = f(r,\theta) \}$$

Círculo $\leftrightarrow$ simetría rotacional heredada por $\gamma_A \rightarrow z = f(r,\theta) = f(r)$.

$$ds^2_{AdS_4} = \frac{L^2}{z^2}\left[-dt^2 + dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2\right] \xrightarrow[z=f(r)]{t=0} \qquad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) dr$$

$$ds^2_{\gamma_A} = \frac{L^2}{f(r)^2}\left[\dot f(r)^2 dr^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2\right] = \frac{L^2}{f(r)^2}\left[(1+\dot f^2)\, dr^2 + r^2 d\theta^2\right]$$

$$\rightarrow \sqrt{h} = \frac{L^2 r}{f^2}\sqrt{1+\dot f^2} \ \Rightarrow \ S_{EE} = \frac{1}{4G} \text{ mín.} \int_0^{2\pi} d\theta \int dr \, \frac{L^2 r}{f(r)^2}\sqrt{1+\dot f(r)^2}$$

$$= \frac{L^2 \pi}{2G} \text{ mín} \int dr \ \mathcal{L}[r, f(r), \dot f(r)]$$

¡Igual que Lagrangiano de partícula en 1dim!

Para minimizar $S_{EE} \leftrightarrow$ Ecr. de Euler Lagrange para $f(r)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot f}\right) = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{r\sqrt{1+\dot f^2}}{f^2}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = -\frac{2r\sqrt{1+\dot f^2}}{f^3},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot f} = +\frac{r \dot f}{f^2(1+\dot f^2)^{1/2}} \rightarrow \frac{d}{dr}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot f} = \frac{+\dot f}{f^2(1+\dot f^2)^{1/2}} + \frac{r \ddot f}{f^2(1+\dot f^2)^{1/2}} - \frac{2r\dot f^2}{f^3(1+\dot f^2)^{1/2}} - \frac{r \dot f^2 \ddot f}{f^2(1+\dot f^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f^3\sqrt{1+\dot f^2}}\left\{-2r(1+\cancel{\dot f^2}) - f\dot f - r\ddot f f + \cancel{2r\dot f^2} + \frac{r f \dot f^2 \ddot f}{(1+\dot f^2)}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow (1+\dot f^2)\left\{-2r - f\dot f - r\ddot f f\right\} + r f \dot f^2 \ddot f = 0 \ \leftarrow \text{ec. dif. 2º orden no lineal}$$

What do we know about $f(r)$? $f(r=R) \rightarrow 0$ $\quad f(r) \overset{?}{=} \sqrt{R^2 - r^2}$

$f(r=0) \rightarrow$ máx

$$\dot f = \frac{-r}{\sqrt{R^2-r^2}}; \quad \dot f^2 + 1 = \frac{R^2 - r^2 + r^2}{R^2 - r^2} = \frac{R^2}{R^2-r^2}; \quad \ddot f = \frac{-1}{\sqrt{R^2-r^2}} - \frac{r^2}{(R^2-r^2)^{3/2}} = \frac{-R^2}{(R^2-r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{(R^2-r^2)}\left\{-2r+r+\frac{rR^2}{(R^2-r^2)}\right\}+r\cancel{\sqrt{\ }}\,\frac{r^2}{\cancel{\sqrt{\ }}\sqrt{\ }}\;\frac{(-R^2)}{\sqrt{\ }(\ )}$$

$$=\frac{R^2}{(R^2-r^2)}\left(\frac{-r(\cancel{R^2}-r^2)+\cancel{r}R^2}{(R^2-r^2)}\right)-\frac{r^3R^2}{(R^2-r^2)^2}$$

$$=\frac{R^2}{(R^2-r^2)^2}\left[r^3\right]-\frac{r^3R^2}{(R^2-r^2)^2}=0$$

OK!! $\Rightarrow$ $f(r)=\sqrt{R^2-r^2}$ extremiza el Área.

$$\Rightarrow S_{EE}=\frac{\pi L^2}{2G}\int_0^R dr\,\frac{r\,R}{(R^2-r^2)\sqrt{(R^2-r^2)}}=\frac{\pi L^2R}{2G}\int_0^R dr\,\frac{r}{(R^2-r^2)^{3/2}}$$

$u=R^2-r^2 \rightarrow du=-2r\,dr$; $r=0 \leftrightarrow u=R^2$

$r=R \leftrightarrow u=0$

$$\Rightarrow S_{EE}=\frac{\pi L^2R}{2G}\int_{R^2}^{0}-\frac{du}{2u^{3/2}}=\frac{\pi L^2R}{4G}\int_0^{R^2}\frac{du}{u^{3/2}}=\frac{\pi L^2R}{4G}\cdot\left.\frac{-2}{u^{1/2}}\right|_0^{R^2}$$

$$=\frac{\pi L^2R}{2G}\left[\left.\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\right|_0^R\right]=\frac{\pi L^2R}{2G}\left[\left.\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}\right|_{r=R}-\frac{1}{R}\right]=\frac{\pi L^2}{2G}\cdot\frac{R}{\delta}-\frac{\pi L^2}{2G}$$

$r\rightarrow R \leftrightarrow z\rightarrow\delta$

$$\boxed{S_{EE}=\frac{\pi L^2}{2G}\frac{R}{\delta}-F}\quad \text{con}\quad \boxed{F=\frac{\pi L^2}{2G}}$$

¡exactamente la forma prevista!