

1) 假设 $\log N$ 为 $\ln N$, 方便证明, 既证明存在常数 C 使得 $(\ln N)^k \leq CN$

$$(\ln N)^k < CN$$

$$\Rightarrow (\ln N)^k < ((CN)^{1/k})^k$$

$$\Rightarrow (\ln N) < (CN)^{1/k}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} ((\ln N) / ((CN)^{1/k})) < 1$$

洛必达法则

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} ((1/n) / (C^{1/k} * (1/k) * (CN)^{1/k-1})) < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} (1/C^{1/k} * N^{1/k} * (1/k)) < 1$$

因为 $\lim_{N \rightarrow \infty} (1/C^{1/k} * N^{1/k} * (1/k)) = 0 < 1$ 故必存在常数 C 使得 $(\ln N)^k \leq CN$

2) 证明:

$$(N!)^2 = (N * (N-1) * (N-2) * \dots * 1) * (1 * 2 * 3 * \dots * N) \geq N * N * N * \dots * N = N^N$$

$$\log(N!) \geq (1/2)N \log N$$

$$N! \leq N^N$$

$$\log(N!) \leq N \log N$$

$$(1/2)N \log N \leq \log(N!) \leq N \log N$$

所以 $\log(N!)$ 与 $N \log N$ 同阶

3)

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 2T(1) + 2\log 2 = 2 + 2\log 2$$

$$T(4) = 2T(2) + 4\log 4 = 4 + 4\log 2 + 4\log 4$$

$$T(8) = 2T(4) + 8\log 8 = 8 + 8\log 2 + 8\log 4 + 8\log 8$$

..

$$T(N) = N + N \log 2 + N^2 \log 2 + N^3 \log 2 + \dots + N \log N \log 2$$

$$= N + N * (1 + 2 + 3 + \dots \log N) * \log 2$$

$$= N * (1 + \log N) * \log N / 2 * \log 2$$

$$\text{故 } T(N) = O(N * \log^2 N)$$

4)

$$1 | T(n) = O(3^n) \text{ 理由 } T(n) = 5 * 3^n$$

$$2 | T(n) = O(n \log n)$$

理由 $T(n)$ = 估算为 $C * N!$

$$\text{即证明 } C_1 * N! \leq T(n) \leq C_2 * N!$$

易得 $C_1 = 1$ 时成立

$$\text{又 } T(0) = 1, T(1) = 2 \leq 3 * 1!, T(2) = 5 \leq 3 * 2!, T(3) = 16 \leq 3 * 3!, T(4) = 65 \leq 3 * 4! \dots$$

易得 $C_2 = 3$ 时成立

$$\text{有 } T(n) = O(n!) \text{ 又 } N! = O(n \log n) \text{ 故 } T(n) = O(n \log n)$$

$$3 | T(n) = O(5^n)$$

$$\text{理由 } T(n) = 2^n + 3 * 2^{n-1} + 3^2 * 2^{n-2} + \dots + 3^n * 2^0 + 3^{n+1} = (3 + 2)^n + 3^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} (3^{n+1} / 5^n) = 0$$

$$\text{易得 } T(n) = O(5^n)$$

$$4 | T(n) = O(2^n)$$

$$\text{理由 } T(n) = n^2 + 2 * (n-1)^2 + 2^2 * (n-2)^2 + 2^3 * (n-3)^2 \dots + 2^{n-1} * 1^2 + 2^n$$

$$= 2^n * \sum_{x=0}^{n-1} x^2 / 2^x$$

$$\text{设 } S(n) = \sum_{x=0}^{n-1} x^2 / 2^x, \text{ 利用错位相减 } 2S - S \text{ 易得 } S = 6 - 1/2^{n-1} - 1/2^{n-3} - n^2/2^n - (n-1)/2^{n-2} \lim_{n \rightarrow \infty} (S(n)) = 6, \text{ 故 } T(n) = O(2^n)$$

$$5 | T(n) = O(n^{\log_3 5})$$

理由 master 定理(一条)

$$6 | T(n) = O(n^2)$$

理由 master 定理 (一条)

$$7 | T(n) = \Theta(n)$$

理由 master 定理 (一条)

$$8 | T(n) = \Theta(n)$$

理由
$$\begin{aligned} T(n) &= T(1/2n) + T(3/4n) + n \\ &= n + 1/2*n + 3/4*n + (1/2)^{2*n} + (3/4)^{2*n} + \dots (1/2)^{\log_2 n*n} + \\ &\quad (3/4)^{\log(4/3) n*n} \\ &= 2n + 3n = 5n \end{aligned}$$

$$9 | T(n) = \Theta(n^2)$$

理由 master 定理 (3 条)

$$10 | T(n) = \Theta(n^{(1/2)})$$

理由 master 定理 (3 条)