Chapter 24

向量自回归模型

24.1 VAR(1) 模型

多个资产收益率的联合模型中最常用的是向量自回归 (Vector Autoregression, VAR) 模型。称 k 元时间序列 r_t 服从一个一阶向量自回归模型，即 VAR(1)，若有

$$r_t = \phi_0 + \Phi r_{t-1} + a_t \tag{24.1}$$

其中 ϕ_0 是 k 维常数向量，Φ 是 k 阶常数方阵，$\{a_t\}$ 是序列不相关的弱平稳列，$Ea_t = 0$, $\text{Var}(a_t) = \Sigma > 0$(对称正定矩阵)。

文献中经常假定 $\{a_t\}$ 服从多元正态分布 $N_k(0, \Sigma)$，则这时 a_t 是独立同分布随机向量序列。

记 $a_t = (a_{1t}, \dots, a_{kt})^T$，$\phi_0 = (\phi_{10}, \dots, \phi_{k0})^T$, $\Phi = (\phi_{ij})_{k \times k}$。

24.2 模型结构和格兰杰因果性

考虑 $k = 2$ 的情形。模型变成

$$\begin{cases} r_{1t} = \phi_{10} + \phi_{11} r_{1,t-1} + \phi_{12} r_{2,t-1} + a_{1t} \\ r_{2t} = \phi_{20} + \phi_{21} r_{1,t-1} + \phi_{22} r_{2,t-1} + a_{2t} \end{cases} \tag{24.2}$$

如果 $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$, 则 r_{1t} 和 r_{2t} 两个序列是分离的：

$$\begin{aligned} r_{1t} =& \phi_{10} + \phi_{11} r_{1,t-1} + a_{1t} \\ r_{2t} =& \phi_{20} + \phi_{22} r_{2,t-1} + a_{2t} \end{aligned}$$

这时两个序列分别服从单独的一元 AR(1) 模型；如果 a_{1t} 和 a_{2t} 不相关，则 $\{r_{1t}\}$ 序列与 $\{r_{2s}\}$ 序列不相关。称这样的分离的序列为**非耦合**的。

如果 $\phi_{12} \neq 0$, $\phi_{21} \neq 0$, 这时两个序列之间有相互反馈关系。

如果 $\phi_{12}=0$, $\phi_{21}\neq 0$, 模型变成

$$\begin{cases} r_{1t}=\phi_{10}+\phi_{11}r_{1,t-1}+a_{1t} \\ r_{2t}=\phi_{20}+\phi_{21}r_{1,t-1}+\phi_{22}r_{2,t-1}+a_{2t} \end{cases} \tag{24.3}$$

这时 r_{1t} 不受到 r_{2t} 的过去值的影响，但 r_{2t} 受到 $r_{1,t-1}$ 的过去值的影响。可以将 r_{1t} 作为输入变量，r_{2t} 作为输出变量。

在统计学文献中，如果 a_{1t} 和 a_{2t} 也不相关，称式(24.3)的 r_{1t} 和 r_{2t} 之间有传递函数 (transfer function) 关系。传递函数模型是 VARMA 的一种特殊形式，在控制工程中非常有用，可以通过调整 r_{1t} 的值来影响 r_{2t}。在计量经济学文献中，此模型意味着两个序列之间存在格兰杰因果关系，r_{1t} 的过去值影响 r_{2t}，但 r_{2t} 的过去值不影响 r_{1t}。

(C. W. J. Granger, 1969) 提出了因果关系的概念，适用于解释 VAR 模型的结果。考虑一个二元序列 $\boldsymbol{r}_t=(r_{1t},r_{2t})^T$ 的超前 l 步预测问题。可以分别用 VAR 模型和每个分量的一元模型来进行预测。如果 r_{2t} 的二元预测比它的一元预测更准确，则称 r_{1t} 是 r_{2t} 的格兰格原因，这是因为 r_{1t} 的信息提高了 r_{2t} 的预测精度。这里预测精度用预测的均方误差来度量。当然，r_{2t} 也可以同时是 r_{1t} 的格兰格原因。

令 F_t 表示截止到时刻 t 的可用信息，即 F_t 包含 $\{\boldsymbol{r}_t,\boldsymbol{r}_{t-1},\boldsymbol{r}_{t-2},\dots\}$。令 $F_{-i,t}$ 表示 F_t 中去掉第 i 个分量的信息的集合。考虑(24.2)的二元 VAR(1) 模型。F_t 包含 $\{r_{1t},r_{2t},r_{1,t-1},r_{2,t-1},\dots\}$, $F_{-1,t}$ 包含 $\{r_{2t},r_{2,t-1},\dots\}$。考虑基于 F_t 的超前 l 步预测，其预测误差为

$$\boldsymbol{e}_t(l)=(e_{1t}(l),e_{2t}(l))^T=\boldsymbol{r}_{t+l}-E(\boldsymbol{r}_{t+l}|F_t)$$

其中对 $r_{2,t+l}$ 的预测误差为

$$e_{2t}(l)=r_{2,t+l}-E(r_{2,t+l}|F_t)$$

考虑基于 $F_{-1,t}$ 对 $r_{2,t+l}$ 的预测，其预测误差为

$$\tilde e_{2t}(l)=r_{2,t+l}-E(r_{2,t+l}|F_{-1,t})=r_{2,t+l}-E(r_{2,t+l}|r_{2,t},r_{2,t-1},\dots)$$

如果

$$Ee_{2t}^2(l)=\text{Var}(r_{2,t+l}|F_t)<E\tilde e_{2t}^2(l)=\text{Var}(r_{2,t+l}|F_{-1,t})$$

即使用截止到 t 时刻为止的全部信息预测 $r_{2,t+l}$，均方误差比不利用第一个分量序列的均方误差小，则称 r_{1t} 是 r_{2t} 的格兰格原因。

回到二元 VAR(1) 模型(24.2)，如果 $\phi_{12}=0$ 而 $\phi_{21}\neq 0$，则 $r_{2,t+1}$ 依赖于 $r_{1,t}$，预测 $r_{2,t+1}$ 时需要利用 r_{1t} 的信息，序列 r_{1t} 是序列 r_{2t} 的格兰格原因；$r_{1,t+1}$ 不依赖于 $r_{2,t}$，预测 $r_{1,t+1}$ 就不需要用到 r_{2t}，所以序列 r_{2t} 不是序列 r_{1t} 的格兰格原因。

事实上，对(24.3)，不妨设 $\{\boldsymbol{a}_t\}$ 是独立的多元弱平稳列，这时 $E(\boldsymbol{a}_{t+1}|F_t)=\boldsymbol{0}$, $E(a_{2,t+1}|F_{-1,t})=0$, $\text{Var}(a_{2,t+1}|F_t)=\text{Var}(a_{2,t+1}|F_{-1,t})=\sigma_{22}$，又

$$\begin{aligned} E(r_{2,t+1}|F_t)=&\phi_{20}+\phi_{21}r_{1,t}+\phi_{22}r_{2,t} \\ \text{Var}(r_{2,t+1}|F_t)=&E[(r_{2,t+1}-E(r_{2,t+1}|F_t))^2|F_t] \\ =&E(a_{2,t+1}^2|F_t)=\sigma_{22} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} E(r_{2,t+1}|F_{-1,t})=&\phi_{20}+\phi_{21}E(r_{1,t}|F_{-1,t})+\phi_{22}r_{2,t} \\ \text{Var}(r_{2,t+1}|F_{-1,t})=&E[(r_{2,t+1}-E(r_{2,t+1}|F_{-1,t}))^2|F_{-1,t}] \\ =&E[\left\{\phi_{21}(r_{1,t}-E(r_{1,t}|F_{-1,t}))+a_{2,t+1}\right\}^2|F_{-1,t}] \\ =&\phi_{21}^2\text{Var}(r_{1,t}|F_{-1,t})+\sigma_{22}>\sigma_{22} \end{aligned}$$

即 r_{1t} 是 r_{2t} 的格兰格原因。

另一方面，

$$
\begin{aligned}
E(r_{1,t+1}|F_t) =&\phi_{10} + \phi_{11} r_{1,t} \\
\text{Var}(r_{1,t+1}|F_t) =&E[(r_{1,t+1} - E(r_{1,t+1}|F_t))^2|F_t] \\
=&E(a_{1,t+1}^2|F_t) = \text{Var}(a_{1,t+1}) = \sigma_{11} \\
E(r_{1,t+1}|F_{-2,t}) =&\phi_{10} + \phi_{11} r_{1,t} \\
\text{Var}(r_{1,t+1}|F_{-2,t}) =&E[(r_{1,t+1} - E(r_{1,t+1}|F_{-2,t}))^2|F_{-2,t}] \\
=&E(a_{1,t+1}^2|F_{-2,t}) = \text{Var}(a_{1,t+1}) = \sigma_{11}
\end{aligned}
$$

所以 r_{2t} 不是 r_{1t} 的格兰格原因。

如果 $\phi_{21} = 0$ 而 $\phi_{12} \neq 0$，则序列 r_{2t} 是序列 r_{1t} 的格兰格原因，而序列 r_{1t} 不是序列 r_{2t} 的格兰格原因。

如果新息 $a_t = (a_{1t}, a_{2t})^T$ 的协方差阵 Σ 不是对角阵，则 r_{1t} 和 r_{2t} 之间存在同步相关性，这时两个序列存在即期（同期，瞬时）格兰格因果关系，这种即期因果关系是双向的。

注意，这样定义的格兰格因果性依赖于 VAR(1) 模型(24.1)这样的模型形式（称为简化形式），如果改变模型的形式（比如改为下面的结构形式），可能就不会在 ϕ_{12} 和 ϕ_{21} 这样的简单数值上反映出格兰格因果性。

更多分量的 VAR(1) 可以有更灵活的格兰格因果关系。比如三元的模型，如果 Φ 是下三角阵:

$$
\begin{pmatrix}
\phi_{11} & & \\
\phi_{21} & \phi_{22} & \\
\phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33}
\end{pmatrix}
$$

则：

- r_{2t} 和 r_{3t} 都不是 r_{1t} 的格兰格原因；
- r_{1t} 是 r_{2t} 的格兰格原因，但 r_{3t} 不是 r_{2t} 的格兰格原因；
- r_{1t} 和 r_{2t} 都是 r_{3t} 的格兰格原因。

如果 Φ 有其他稀疏形式，关系可能多种多样。

24.3 VAR 的简化形式和结构形式

式(24.1)的系数矩阵 Φ 度量了 r_t 的动态相依性，r_{1t} 与 r_{2t} 之间的同步相依性可以通过 a_t 的协方差阵 Σ 的非对角元素 σ_{12} 来反映。如果 $\sigma_{12} = 0$，则两个分量 r_{1t} 和 r_{2t} 之间没有同步线性关系。在计量经济文献中式(24.1)中的 VAR(1) 模型称为**简化形式** (reduced form) 的模型，因为该模型没有清楚地表现出分量序列之间的同步线性相依性。

可以利用矩阵变换对(24.1)进行变换，得到显式地表现同步关系的模型。对 $\Sigma > 0$(正定)，存在 Cholesky 分解 $\Sigma = LGL^T$, 其中 G 是对角线元素都为正数的 k 阶对角方阵，L 为对角线元素都等于 1 的下三角阵，定义

$$
b_t = L^{-1} a_t = (b_{1t}, \dots, b_{kt})^T
$$

则

$$
\begin{aligned}
Eb_t =&0 \\
\text{Var}(b_t) =&L^{-1}\text{Var}(a_t)L^{-T} = G
\end{aligned}
$$

其中 $L^{-T}=(L^T)^{-1}=(L^{-1})^T$。上式表明 b_t 的各分量不相关。将式(24.1)两边同时左乘 L^{-1}，得

$$\begin{aligned} L^{-1}r_t =& L^{-1}\phi_0 + L^{-1}\Phi r_{t-1} + L^{-1}a_t \qquad (24.4)\\ =& \phi_0^* + \Phi^* r_{t-1} + b_t \qquad (24.5) \end{aligned}$$

记 $\phi_0^*=(\phi_{10}^*,\dots,\phi_{k0}^*)^T$, $\Phi^*=(\phi_{ij}^*)_{k\times k}$，设 L^{-1} 的最后一行为 $(w_{k1},\dots,w_{k,k-1},1)$，则模型(24.5)的最后一个方程（第 k 个方程）为

$$r_{kt}+\sum_{i=1}^{k-1} w_{ki} r_{it} = \phi_{k0}^* + \sum_{i=1}^{k} \phi_{ki}^* r_{i,t-1} + b_{kt} \qquad (24.6)$$

对 $i<k$，因为 b_{kt} 与 b_{ki} 不相关，所以式(24.6)明确表示了 r_{kt} 对 r_{it} 的同步依赖性。在计量经济文献中式(24.6)称为 r_{kt} 的一个**结构方程** (structural form)。

对 r_t 的任何其它分量 $r_{jt}(j<k)$，可以对 VAR 模型各个方程的次序进行重排，比如，将第 j 个方程与第 k 个方程对换位置，再用前面的方法得到关于 r_{jt} 的结构方程。因此，式(24.1)的简化形式等价于式(24.6)的结构形式。

在时间序列分析中通常使用简化形式，因为

- 简化形式更容易估计；
- 在预测时，同步形式无法使用。

例 2.1

为了说明从简化形式到结构方程的变换，考虑如下的二元 VAR(1) 模型：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix} \\ \text{Var}(a_t) =& \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对 Σ 作 Cholesky 分解得 $\Sigma = LGL^T$, 其中

$$G=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad L^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

在简化形式的 VAR(1) 模型两边同时左乘 L^{-1}，得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.7 & 0.95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1t} \\ b_{2t} \end{pmatrix} \\ \text{Var}(b_t) =& G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中第二个方程为

$$r_{2t} = 0.3 + 0.5 r_{1t} - 0.7 r_{1,t-1} + 0.95 r_{2,t-1} + b_{2t}$$

此方程明确表现了 r_{2t} 对 r_{1t} 的同步依赖（系数 +0.5），方程中也有 r_{2t} 对 $r_{1,t-1}$ 的交叉依赖，对 $r_{2,t-1}$ 的自身依赖。

为了给出 r_{1t} 的结构方程，将简化形式的两个方程对换位置，得（注意 Φ 需要行互换、列互换）

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_{2t} \\ r_{1t} \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{2,t-1} \\ r_{1,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{2t} \\ a_{1t} \end{pmatrix} \\
\Sigma =& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

此 Σ 的 Cholesky 分解有

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

在调换次序的 VAR(1) 模型的两边同时左乘 L^{-1}，得

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{2t} \\ r_{1t} \end{pmatrix} =& \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.1 & -0.6 \\ -0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{2,t-1} \\ r_{1,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \end{pmatrix} \\
\text{Var}(c_t) =& G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

其中第二个方程为

$$r_{1t} = -0.2 + 1.0 r_{2t} - 0.8 r_{2,t-1} + 0.8 r_{1,t-1} + c_{2t}$$

这个方程明确地表现了 r_{1t} 对 r_{2t} 的同步线性依赖。

利用 R 计算 LGL^T 分解的 L^{-1} 和 G 的程序：

```r
ldl.decomp <- function(A){
  R <- chol(A)
  D <- diag(diag(R))
  Linv <- solve(t(solve(D, R)))
  G <- D^2

  list(Linv=Linv, G=G)
}
```

例如

```r
Sigma <- rbind(c(2,1), c(1,1)); Sigma
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    1
## [2,]    1    1
```

```r
ldl.decomp(Sigma)
```

```
## $Linv
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]  1.0    0
## [2,] -0.5    1
##
## $G
##      [,1] [,2]
## [1,]    2  0.0
## [2,]    0  0.5
```

```
Sigma <- rbind(c(1,1), c(1,2)); Sigma
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    1
## [2,]    1    2
```

```
ldl.decomp(Sigma)
```

```
## $Linv
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]   -1    1
##
## $G
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

24.4 VAR(1) 模型的平稳性条件和矩

设(24.1)式中的 VAR(1) 模型的 r_t 是弱平稳的，在方程两边取期望得

$$Er_t = \phi_0 + \Phi E r_{t-1}$$

由 $Er_t = Er_{t-1}$ 得 $I - \Phi$ 满秩（也叫做非奇异）时

$$\mu = Er_t = (I - \Phi)^{-1}\phi_0$$

在式(24.1)中代入 $\phi_0 = (I - \Phi)\mu$, 则模型(24.1)可以写成

$$r_t - \mu = \Phi(r_{t-1} - \mu) + a_t$$

记中心化的 r_t 为 $\tilde{r}_t = r_t - \mu$，则 VAR(1) 模型(24.1)变成

$$\tilde{r}_t = \Phi\tilde{r}_{t-1} + a_t \tag{24.7}$$

将(24.7)递归得

$$\tilde{r}_t = a_t + \Phi a_{t-1} + \Phi^2 a_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j a_{t-j} \tag{24.8}$$

其中 $\Phi^0 = I_k$。这相当于一元时间序列的 Wold 表示。

由(24.8)可以推出：

- 因为 $\{a_t\}$ 序列不相关，所以 $\text{Cov}(a_t, r_{t-l}) = 0 (l > 0$ 时)。因此可以将 a_t 称为序列 $\{r_t\}$ 在 t 时刻的一个扰动或者新息（innovation）。一般定义新息为 $a_t = r_t - E(r_t|F_{t-1})$ 或 $a_t = r_t - L(r_t|H_{t-1})$，$L(\cdot|\cdot)$ 表示均方误差最小线性预测，H_{t-1} 表示由 $\{r_{t-1}, r_{t-2}, \dots\}$ 张成的 Hilbert 空间。平稳的 VAR(1) 中 a_{it} 是用 $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots$ 对 r_{it} 作最优线性预测的预测误差。
- 在(24.8)两边同时右乘 a_t^T 后取期望，得 $\text{Cov}(r_t, a_t) = \Sigma$。
- 对 VAR(1) 模型(24.1)导出的 Wold 表示(24.8)，r_t 按系数矩阵 Φ^j 依赖于过去的新息 a_{t-j}。为了使得(24.8)收敛，需要 $j \to \infty$ 时 $\Phi^j \to 0$，这当且仅当 Φ 的所有特征值的模都小于 1。如果存在模大于或等于 1 的特征值，则 $j \to \infty$ 时 Φ^j 发散或者不收敛到 0 矩阵。仿照一元情形的特征多项式的讨论，因为特征值的模小于 1 当且仅当 $|\lambda I - \Phi|$ 的根的模都小于 1，而 $|\lambda I - \Phi| = \lambda^k |I - \Phi \lambda^{-1}|$，记 $z = \lambda^{-1}$，称关于 z 的多项式 $|P(z)| = |I - \Phi z|$ 为模型的 (逆序) **特征多项式**，则式(24.8)收敛的充分必要条件是特征多项式 $|P(z)|$ 的根都在单位圆外。这个条件称为 VAR(1) 模型的**平稳性条件**。当且仅当平稳性条件成立时，模型(24.1)存在满足 a_t 与 $r_{t-1}, r_{t-2}, \dots$ 不相关条件的平稳解。
- 利用推移算子和特征多项式可以将模型(24.1)写成 $P(B) r_t = \phi_0 + a_t$。
- 利用 Wold 表示(24.8)式还可得

$$\text{Var}(r_t) = \Sigma + \Phi \Sigma \Phi^T + \Phi^2 \Sigma (\Phi^2)^T + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi^j \Sigma (\Phi^j)^T$$

考虑 VAR(1) 模型的互协方差阵和互相关阵。将式(24.7)两边乘以 $\tilde{r}_{t-l}^T$ 后取期望，得互协方差阵

$$\begin{aligned}
\Gamma_l =& E(\tilde{r}_t \tilde{r}_{t-l}^T) = \text{Cov}(r_t, r_{t-l}) && (24.9)\\
=& \Phi E(\tilde{r}_{t-1} \tilde{r}_{t-l}^T) + E(a_t \tilde{r}_{t-l}) && (24.10)\\
=& \Phi \Gamma_{l-1}, \quad (l > 0) && (24.11)
\end{aligned}$$

这个结果是一元时间序列 AR(1) 模型性质的推广。

通过递推可得

$$\Gamma_l = \Phi^l \Gamma_0, \quad l > 0$$

其中 $\Gamma_0 = \text{Var}(r_t)$。

设 D 为 Γ_0 的对角阵，则 VAR(1) 模型的互相关阵为

$$\begin{aligned}
\rho_l =& D^{-\frac{1}{2}} \Gamma_l D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} \Phi \Gamma_{l-1} D^{-\frac{1}{2}} \\
=& D^{-\frac{1}{2}} \Phi D^{\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{l-1} D^{-\frac{1}{2}} \\
=& D^{-\frac{1}{2}} \Phi D^{\frac{1}{2}} \rho_{l-1} = \Upsilon \rho_{l-1}
\end{aligned}$$

其中 $\Upsilon = D^{-\frac{1}{2}} \Phi D^{\frac{1}{2}}$ (Υ 读作 Upsilon)。递推得

$$\rho_l = \Upsilon^l \rho_0, \quad l = 1, 2, \dots$$

例 2.2

考虑二元 VAR(1) 模型

$$\begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 2 \end{pmatrix}$$

计算 Φ 的特征值的绝对值：

```
abs(eigen(rbind(c(0.2, 0.3), c(-0.6, 1.1)))$value)
```

```
## [1] 0.8 0.5
```

特征值的绝对值都小于 1。模型是平稳的。

注意 $\phi_{22} = 1.1 > 1$，但不影响平稳性。多元弱平稳一定也是一元弱平稳的。

24.5 VAR(1) 模型的边缘模型

对 VAR(1) 模型(24.1)的如上的 Wold 表示，同时也将 r_t 的每个分量，表示成了一元的无穷阶 MA，但其中的新息是多元的。利用这种思想，将分量的一元模型可以写成一元 ARMA 模型。

设矩阵 A 是可逆方阵，令 $C = (c_{ij})$，其中 c_{ij} 是 A 删除第 i 行和第 j 列后的子矩阵的行列式乘以 $(-1)^{i+j}$，c_{ij} 称为 A 的 (i,j) 元素的代数余子式，C^T 称为 A 的伴随矩阵，记为 $\text{adj}(A)$，有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A), \quad A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = |A| \cdot I$$

VAR(1) 的 Wold 表示相当于

$$r_t = (I - \Phi B)^{-1} \cdot (\phi_0 + a_t)$$

利用伴随矩阵可得

$$|I - \Phi B| r_t = \text{adj}(I - \Phi B) \cdot (\phi_0 + a_t)$$

其中 $|I - \Phi z|$ 是 z 的 k 阶多项式；$\text{adj}(I - \Phi z)$ 的每个元素是 z 的 $k-1$ 阶多项式。这样，分量 r_{it} 服从一个 ARMA(k, q) 模型，模型中的 MA 部分涉及到多元的新息，但是可以设法转换成一元的新息。

例 2.3

考虑例 2.2 中的模型。

$$\begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 2 \end{pmatrix}$$

这时

$$
\begin{aligned}
\Phi =& \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.6 & 1.1 \end{pmatrix} \\
I - \Phi z =& \begin{pmatrix} 1-0.2z & -0.3z \\ 0.6z & 1-1.1z \end{pmatrix} \\
\text{adj}(I - \Phi z) =& \begin{pmatrix} 1-1.1z & 0.3z \\ -0.6z & 1-0.2z \end{pmatrix} \\
|I - \Phi z| =& 1 - 1.3z + 0.4z^2
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(1 - 1.3B + 0.4B^2) \begin{pmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 1-1.1 & 0.3 \\ -0.6 & 1-0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-1.1B & 0.3B \\ -0.6B & 1-0.2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以分量 r_{1t} 的一元模型为

$$
r_{1t} - 1.3r_{1,t-1} + 0.4r_{1,t-2} = 5.4 + a_{1t} + 0.3a_{2,t-1} - 1.1a_{1,t-1}
$$

令 $\eta_t = a_{1t} + 0.3a_{2,t-1} - 1.1a_{1,t-1}$，易见 $\{\eta_t\}$ 是弱平稳列，且其 ACF 在 $q = 1$ 之后截尾（即 $\rho_\eta(j) = 0, j > 1$）。所以 $\{\eta_t\}$ 是 MA(1) 序列，从而分量 r_{1t} 服从一个一元的 ARMA(2,1) 模型。

一般地，k 元的 VAR(1) 模型的分量服从一元的 ARMA$(k, k-1)$ 模型。由于方程左右可能有公共根，所以模型阶数可能会降低。

24.6 VAR(p) 模型

称 k 元时间序列 r_t 服从一个 VAR(p) 模型，如果

$$
r_t = \phi_0 + \Phi_1 r_{t-1} + \dots + \Phi_p r_{t-p} + a_t \tag{24.12}
$$

其中 ϕ_0 和 $\{a_t\}$ 同 VAR(1) 的规定，Φ_ℓ 是 k 阶方阵（$\ell = 1, 2, \dots, p$），其 (i, j) 元素记为 $\phi_{ij}(\ell)$。利用向后推移算子（滞后算子）B 可以将模型写成

$$
(I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) r_t = \phi_0 + a_t
$$

记

$$
P(z) = I - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p \tag{24.13}
$$

这是一个从复数 z 到 k 阶方阵 $P(z)$ 的变换，$P(z)$ 的每个元素是关于 z 的阶数不超过 p 的多项式。称一元多项式函数 $\det(P(z))$（或记为 $|P(z)|$）为模型的（逆序）特征多项式。

利用矩阵推移函数 $P(B)$ 可以将模型简记为

$$
P(B) r_t = \phi_0 + a_t
$$

如果 r_t 弱平稳，则在下式的逆矩阵存在的条件下

$$
\mu = E r_t = (I - \Phi_1 - \dots - \Phi_p)^{-1} \phi_0 = (P(1))^{-1} \phi_0
$$

中心化 r_t 得 $\tilde{r}_t = r_t - \mu$，这时模型(24.12)变成

$$\tilde{r}_t = \Phi_1 \tilde{r}_{t-1} + \cdots + \Phi_p \tilde{r}_{t-p} + a_t \tag{24.14}$$

称 VAR(p) 满足平稳性条件，如果特征多项式 $\det(P(z))$ 的根都在单位圆外。当 VAR(p) 满足平稳性条件时，有如下的 Wold 表示的平稳解：

$$r_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t-j},$$

其中 $j \to \infty$ 时 Ψ_j 的元素以负指数速度趋于 0，Ψ_j 有如下的递推公式:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 =& I, \\
\Psi_j =& \sum_{s=0}^{p} \Phi_s \Psi_{j-s},
\end{aligned}$$

对 $s < 0$ 记 $\Psi_s = 0$。

由上述 Wold 表示可知，对平稳解 r_t 有

- $\text{Cov}(r_t, a_t) = \Sigma = \text{Var}(a_t)$;
- $\text{Cov}(r_{t-l}, a_t) = 0 (l > 0)$。

互协方差阵满足如下递推关系

$$\Gamma_l = \Phi_1 \Gamma_{l-1} + \cdots + \Phi_p \Gamma_{l-p},\ l > 0$$

这个性质称为 VAR(p) 的**矩方程**，是一元 AR(p) 模型的 Yule-Walker 方程的多元形式。用 CCM 表示为

$$\rho_l = \Upsilon_1 \rho_{l-1} + \cdots + \Upsilon_p \rho_{l-p},\ l > 0$$

其中 $\Upsilon_j = D^{-\frac{1}{2}} \Phi_j D^{\frac{1}{2}}$，$D$ 是 Σ 的对角阵。

事实上，VAR(p) 模型可以改写成一个 VAR(1) 模型，然后可以用 VAR(1) 模型的结果去研究 VAR(p) 模型的性质。令

$$x_t = \begin{pmatrix} \tilde{r}_t \\ \tilde{r}_{t-1} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{t-p+1} \end{pmatrix} \quad b_t = \begin{pmatrix} a_t \\ 0_{k\times 1} \\ \vdots \\ 0_{k\times 1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Var}(b_t) = \begin{pmatrix} \Sigma & 0_{k\times k(p-1)} \\ 0_{k(p-1)\times k} & 0_{k(p-1)\times k(p-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$x_t = \Phi^* x_{t-1} + b_t \tag{24.15}$$

是关于 kp 元时间序列 x_t 的 VAR(1) 模型。

r_t 弱平稳当且仅当 x_t 弱平稳，其充分必要条件是 Φ^* 的所有特征值模小于 1，计算可知这相当于要求用行列式表示的 z 的多项式 $|P(z)|$ 的根都在单位圆外, $P(z)$ 定义见(24.13)。但是，因为计算 $\det(I - \Phi_1 z - \cdots - \Phi_p z^p)$ 这种用行列式表示的多项式的根还需要求多项式的各个系数，而求 Φ^* 的所有特征值或模最大的特征值则有比较成熟的数值方法，所以为了判断一个 VAR(p) 模型是否满足平稳性条件，可以生成 Φ^* 并判断其模最大的特征值是否模小于 1。

如果 $\det(P(1)) = 0$，或 Φ^* 有等于 1 的特征值，即有单位根，则 r_t 的各个分量中至少有一个是单位根过程，各个分量之间还有可能存在协整关系，可以用 VECM(向量误差修正模型) 建模，参见25。

对 VAR(p) 模型，系数矩阵 $\Phi_l = (\phi_{ij}(l))_{k\times k}$ 的值也表现了 r_t 各个分量之间的先导、滞后关系。比如 $k=2$ 时，如果所有 $\phi_{12}(l)=0$，但存在 $l>0$ 使得 $\phi_{21}(l)\neq 0$，则 r_{1t} 不依赖于 r_{2t} 的过去值，r_{2t} 依赖于 r_{1t} 的过去值。r_{1t} 是 r_{2t} 的格兰杰原因，r_{2t} 不是 r_{1t} 的格兰杰原因。

24.7 估计和定阶

VAR 模型建模也基本遵循定阶、模型估计和模型检验这样的反复尝试过程。一元的 PACF 可以推广到多元情形用以辅助定阶。

考虑如下的阶数递进的 VAR 模型：

$$
\begin{aligned}
r_t =& \phi_0 + \Phi_1 r_{t-1} + a_t && (24.16)\\
r_t =& \phi_0 + \Phi_1 r_{t-1} + \Phi_2 r_{t-2} + a_t && (24.17)\\
& \vdots && (24.18)\\
r_t =& \phi_0 + \Phi_1 r_{t-1} + \cdots + \Phi_p r_{t-p} + a_t && (24.19)
\end{aligned}
$$

模型参数可以对每个方程分别用 OLS（最小二乘）方法估计，在多元统计分析文献中称为多元线性估计，参见 (Johnson & Wichern, 1998)。

对于(24.19)的第 i 个方程，令 $\hat{\Phi}_j^{(i)}$ 是 Φ_j 的最小二乘估计，$\hat{\phi}_0^{(i)}$ 是 ϕ_0 的的最小二乘估计。残差为

$$
\hat{a}_t^{(i)} = r_t - \hat{\Phi}_1^{(i)} r_{t-1} - \cdots - \hat{\Phi}_i^{(i)} r_{t-i}
$$

当 $i=0$ 时定义 $\hat{a}_t^{(0)} = r_t - \bar{r}$，其中 $\bar{r}$ 是 r_t 的样本均值。

残差的方差阵估计为

$$
\hat{\Sigma}_i = \frac{1}{T-(k+1)i-1} \sum_{t=i+1}^{T} \hat{a}_t^{(i)} [\hat{a}_t^{(i)}]^T
$$

(参见 (R. S. Tsay, 2014) 节 2.5.1 P.34。)

为了定阶，可以对 $l=1,2,\ldots$ 逐一地检验 $H_0: \Phi_l = 0 \leftrightarrow H_a: \Phi_l \neq 0$。

对 $l=1$，要检验 $H_0: \Phi_1 = 0 \leftrightarrow H_a: \Phi_1 \neq 0$, 使用检验统计量

$$
M(1) = -(T - k - \frac{5}{2}) \ln \frac{|\hat{\Sigma}_1|}{|\hat{\Sigma}_0|}
$$

在一些正则性条件下当 H_0 成立时 $M(1)$ 渐近服从 $\chi^2(k^2)$ 分布，参见 (G. C. Tiao & Box, 1981)。计算右侧 p 值。

一般地，可以通过(24.19)的第 $l-1$ 个方程和第 l 个方程检验 $H_0: \Phi_l = 0 \leftrightarrow H_a: \Phi_l \neq 0$。取检验统计量

$$
M(l) = -(T - l - kl - \frac{3}{2}) \ln \frac{|\hat{\Sigma}_l|}{|\hat{\Sigma}_{l-1}|}
$$

在 H_0 下 $M(l)$ 渐近服从 $\chi^2(k^2)$ 分布，计算右侧 p 值。

另一种定阶方法是利用 AIC 或其它类似的信息准则。设 $\{a_t\}$ 是独立同多元正态分布的多元白噪声，可以用最大似然 (ML) 方法估计模型，对于 VAR 模型，最小二乘估计 $\hat{\phi}_0$ 和 $\hat{\Phi}_j$ 与条件最大似然估计等价，但误差项方差阵 Σ 的 ML 估计为

$$\tilde{\Sigma}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^{T} \hat{a}_t^{(i)} [\hat{a}_t^{(i)}]^T$$

VAR(i) 模型在正态假定下的 AIC 值定义为

$$\text{AIC}(i) = \ln |\tilde{\Sigma}_i| + \frac{2k^2 i}{T}$$

取最终的阶 p 使得 $\text{AIC}(p) = \min_{0 \leq i \leq p_0} \text{AIC}(i)$，其中 p_0 是预先规定的可取的最大阶数。

类似的信息准则还有

$$\begin{aligned}
\text{BIC}(i) &= \ln |\tilde{\Sigma}_i| + \frac{k^2 i \ln T}{T} \\
\text{HQ}(i) &= \ln |\tilde{\Sigma}_i| + \frac{k^2 i \ln \ln T}{T}
\end{aligned}$$

HQ 准则是 Hannan 和 Quinn(1979) 提出的。

这些准则的选择结果不受量纲的影响，对数据乘以常数 λ，结果会使得 $\ln |\tilde{\Sigma}_i|$ 固定地增加 $\ln(\lambda^{2k})$。

24.7.1 英、加、美 GDP 的 VAR 建模

考虑英国、加拿大、美国 GDP 的季度增长率，时间从 1980 年第二季度到 2011 年第二季度。数据经过季节调整，来自圣路易斯联邦储备银行的数据库。GDP 是以本国货币百亿为单位，增长率表示为 GDP 的对数的差分。

读入数据，计算对数增长率:

```r
da <- read_table2("q-gdp-ukcaus.txt")
```

```
## Parsed with column specification:
## cols(
##   year = col_double(),
##   mon = col_double(),
##   uk = col_double(),
##   ca = col_double(),
##   us = col_double()
## )
```

```r
ts.gdp3 <- ts(as.matrix(da[,c("uk", "ca", "us")]),
              start=c(1980,1), frequency=4)
ts.gdp3r <- diff(log(ts.gdp3))*100
```

三个国家的季度 GDP 对数增长率的时间序列图:

```
plot(as.xts(ts.gdp3r), type="l",
     multi.panel=TRUE, theme="white",
     main=" 英国、加拿大、美国 GDP 的季度增长率 (%)",
     major.ticks="years",
     grid.ticks.on = "years")
```

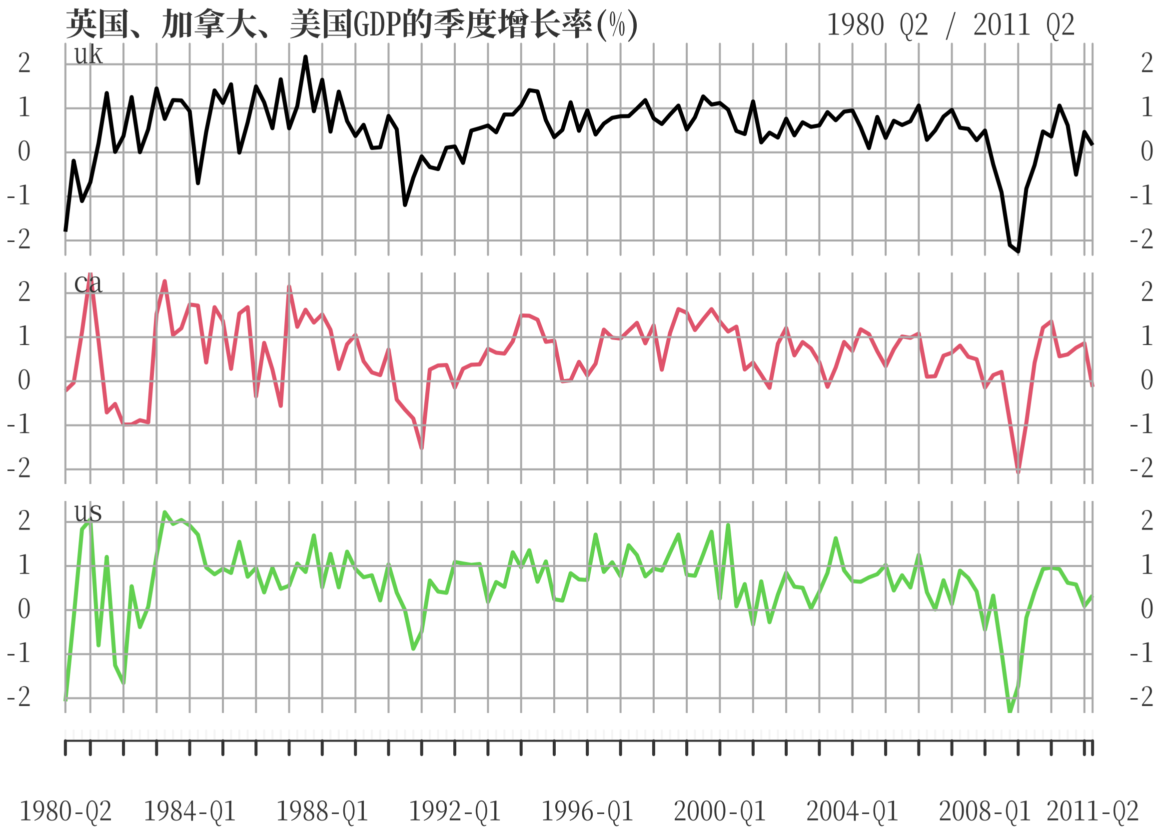


图 24.1: 英国、加拿大、美国 GDP 的季度增长率

利用 MTS 包的 `VAR()` 函数估计 VAR(1) 模型：

```
library(MTS, quietly = TRUE)
```

```
##
## Attaching package: 'MTS'
```

```
## The following object is masked from 'package:TTR':
##
##     VMA
```

```
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
m1.gdp3r <- MTS::VAR(Z, 1)
```

```
## Constant term:
## Estimates:  0.1713324 0.1182869 0.2785892
## Std.Error:  0.06790162 0.07193106 0.07877173
## AR coefficient matrix
## AR( 1 )-matrix
##       [,1]  [,2]   [,3]
## [1,] 0.434 0.189 0.0373
## [2,] 0.185 0.245 0.3917
## [3,] 0.322 0.182 0.1674
## standard error
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0811 0.0827 0.0872
## [2,] 0.0859 0.0877 0.0923
## [3,] 0.0940 0.0960 0.1011
##
## Residuals cov-mtx:
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.28933472 0.01965508 0.06619853
## [2,] 0.01965508 0.32469319 0.16862723
## [3,] 0.06619853 0.16862723 0.38938665
##
## det(SSE) =  0.02721916
## AIC =  -3.459834
## BIC =  -3.256196
## HQ  =  -3.377107
```

估计 VAR(2) 模型：

```
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
m2.gdp3r <- MTS::VAR(Z, 2)
```

```
## Constant term:
## Estimates:  0.1258163 0.1231581 0.2895581
## Std.Error:  0.07266338 0.07382941 0.0816888
## AR coefficient matrix
## AR( 1 )-matrix
##       [,1]  [,2]   [,3]
## [1,] 0.393 0.103 0.0521
## [2,] 0.351 0.338 0.4691
## [3,] 0.491 0.240 0.2356
```

```
## standard error
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0934 0.0984 0.0911
## [2,] 0.0949 0.1000 0.0926
## [3,] 0.1050 0.1106 0.1024
## AR( 2 )-matrix
##         [,1]   [,2]     [,3]
## [1,]  0.0566  0.106  0.01889
## [2,] -0.1914 -0.175 -0.00868
## [3,] -0.3120 -0.131  0.08531
## standard error
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0924 0.0876 0.0938
## [2,] 0.0939 0.0890 0.0953
## [3,] 0.1038 0.0984 0.1055
##
## Residuals cov-mtx:
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.28244420 0.02654091 0.07435286
## [2,] 0.02654091 0.29158166 0.13948786
## [3,] 0.07435286 0.13948786 0.35696571
##
## det(SSE) =  0.02258974
## AIC =  -3.502259
## BIC =  -3.094982
## HQ  =  -3.336804
```

VAR(1) 的 AIC 为 -3.46，VAR(2) 的 AIC 为 -3.50, VAR(2) 占优。设 r_t 的三个分量分别是英国、加拿大、美国的 GDP 对数增长率（单位为百分之一），得到的模型 VAR(2) 模型可以写成

$$
\begin{aligned}
r_t =& \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.12 \\ 0.29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.39 & 0.10 & 0.05 \\ 0.35 & 0.34 & 0.47 \\ 0.49 & 0.24 & 0.24 \end{pmatrix} r_{t-1} \\
&+ \begin{pmatrix} 0.06 & 0.11 & 0.02 \\ -0.19 & -0.18 & -0.01 \\ -0.31 & -0.13 & 0.09 \end{pmatrix} r_{t-2} + a_t \\
\text{Var}(a_t) =& \begin{pmatrix} 0.28 & 0.03 & 0.07 \\ 0.03 & 0.29 & 0.14 \\ 0.07 & 0.14 & 0.36 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

结果中也包括系数的标准误差，可以看出有些系数是不显著的。比如，三个序列的次序为英国、加拿大、美国，$\phi_{12}(l)$, $\phi_{13}(l) (l = 1, 2)$ 都不显著，说明英国的 GDP 季度增长率不受加拿大和美国的过去值的影响，或者粗略地说，加拿大和美国的 GDP 季度增长率不是英国的 GDP 季度增长率的格兰格原因。更严格地分析应该进行假设检验。

利用 MTS 包的 VARorder 函数可以计算 VAR 定阶的 $M(i)$ 统计量检验和各种信息准则：

```r
library(MTS, quietly = TRUE)
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
m3.gdp3r <- VARorder(Z/100)
```

```
## selected order: aic =  2
## selected order: bic =  1
## selected order: hq =  1
## Summary table:
##         p      AIC      BIC       HQ     M(p) p-value
##  [1,]   0 -30.9560 -30.9560 -30.9560   0.0000  0.0000
##  [2,]   1 -31.8830 -31.6794 -31.8003 115.1329  0.0000
##  [3,]   2 -31.9643 -31.5570 -31.7988  23.5389  0.0051
##  [4,]   3 -31.9236 -31.3127 -31.6754  10.4864  0.3126
##  [5,]   4 -31.8971 -31.0826 -31.5662  11.5767  0.2382
##  [6,]   5 -31.7818 -30.7636 -31.3682   2.7406  0.9737
##  [7,]   6 -31.7112 -30.4893 -31.2148   6.7822  0.6598
##  [8,]   7 -31.6180 -30.1925 -31.0389   4.5469  0.8719
##  [9,]   8 -31.7570 -30.1279 -31.0952  24.4833  0.0036
## [10,]   9 -31.6897 -29.8569 -30.9451   6.4007  0.6992
## [11,]  10 -31.5994 -29.5630 -30.7721   4.3226  0.8889
## [12,]  11 -31.6036 -29.3636 -30.6936  11.4922  0.2435
## [13,]  12 -31.6183 -29.1746 -30.6255  11.8168  0.2238
## [14,]  13 -31.6718 -29.0245 -30.5964  14.1266  0.1179
```

从 AIC 比较来看，应该取 $p = 2$。从检验来看，从 $i = 3$ 阶开始 Φ_i 就不显著了，但 Φ_1 和 Φ_2 显著，所以应该取 $p = 2$ 阶。

还可以用 vars 包的 `VAR()` 函数估计。估计 VAR(1):

```r
da1 <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
var1 <- vars::VAR(da1, p=1)
summary(var1)
```

```
##
## VAR Estimation Results:
## =========================
## Endogenous variables: uk, ca, us
## Deterministic variables: const
## Sample size: 124
## Log Likelihood: -304.407
## Roots of the characteristic polynomial:
## 0.7091 0.08735 0.05004
```

```
## Call:
## vars::VAR(y = da1, p = 1)
##
##
## Estimation results for equation uk:
## ===================================
## uk = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + const
##
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.43435    0.08106   5.358 4.12e-07 ***
## ca.l1  0.18888    0.08275   2.282   0.0242 *
## us.l1  0.03727    0.08716   0.428   0.6697
## const  0.17133    0.06790   2.523   0.0129 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Residual standard error: 0.5468 on 120 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.3687,  Adjusted R-squared: 0.3529
## F-statistic: 23.36 on 3 and 120 DF,  p-value: 5.596e-12
##
##
## Estimation results for equation ca:
## ===================================
## ca = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + const
##
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.18499    0.08587   2.154   0.0332 *
## ca.l1  0.24475    0.08766   2.792   0.0061 **
## us.l1  0.39166    0.09233   4.242 4.38e-05 ***
## const  0.11829    0.07193   1.644   0.1027
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Residual standard error: 0.5792 on 120 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.4685,  Adjusted R-squared: 0.4552
## F-statistic: 35.26 on 3 and 120 DF,  p-value: < 2.2e-16
##
##
## Estimation results for equation us:
## ===================================
## us = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + const
```

```
##
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.32153    0.09404   3.419 0.000859 ***
## ca.l1  0.18196    0.09600   1.895 0.060438 .
## us.l1  0.16740    0.10111   1.656 0.100410
## const  0.27859    0.07877   3.537 0.000577 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Residual standard error: 0.6343 on 120 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.3044,  Adjusted R-squared: 0.287
## F-statistic:  17.5 on 3 and 120 DF,  p-value: 1.725e-09
##
##
##
## Covariance matrix of residuals:
##         uk      ca      us
## uk 0.29898 0.02031 0.06841
## ca 0.02031 0.33552 0.17425
## us 0.06841 0.17425 0.40237
##
## Correlation matrix of residuals:
##         uk      ca     us
## uk 1.00000 0.06413 0.1972
## ca 0.06413 1.00000 0.4742
## us 0.19722 0.47424 1.0000
```

与 `MTS::VAR()` 的输出格式不同，`vars::VAR()` 对每个分量单独输出其方程，好处是用我们熟悉的格式显示估计值、标准误差、检验统计量和 p 值。得到的模型与 `MTS::VAR()` 结果相同。

用 AIC 自动选择阶，指定 `ic="AIC"` 和 `lag.max=5`:

```r
da1 <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
var2 <- vars::VAR(da1, ic="AIC", lag.max=5)
summary(var2)
```

```
##
## VAR Estimation Results:
## =========================
## Endogenous variables: uk, ca, us
## Deterministic variables: const
## Sample size: 121
## Log Likelihood: -252.647
```

```
## Roots of the characteristic polynomial:
## 0.785 0.7516 0.7516 0.7336 0.7336 0.6144 0.6144 0.5679 0.5679 0.5165 0.5122 0.5122
## Call:
## vars::VAR(y = da1, lag.max = 5, ic = "AIC")
##
##
## Estimation results for equation uk:
## ===================================
## uk = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + uk.l2 + ca.l2 + us.l2 + uk.l3 + ca.l3 + us.l3 + uk.l4 + ca.l4 + us.l4 +
##
##        Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.515685   0.095298   5.411  3.8e-07 ***
## ca.l1  0.071863   0.094459   0.761  0.44844
## us.l1  0.063904   0.088668   0.721  0.47264
## uk.l2 -0.050370   0.101228  -0.498  0.61979
## ca.l2  0.160043   0.098620   1.623  0.10754
## us.l2 -0.001984   0.095495  -0.021  0.98346
## uk.l3  0.052363   0.102949   0.509  0.61205
## ca.l3 -0.278830   0.098341  -2.835  0.00547 **
## us.l3  0.141145   0.093728   1.506  0.13501
## uk.l4  0.040130   0.091050   0.441  0.66028
## ca.l4  0.261731   0.086947   3.010  0.00325 **
## us.l4 -0.246485   0.088234  -2.794  0.00617 **
## const  0.147957   0.074786   1.978  0.05043 .
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Residual standard error: 0.5013 on 108 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.478,   Adjusted R-squared:  0.42
## F-statistic: 8.242 on 12 and 108 DF,  p-value: 7.84e-11
##
##
## Estimation results for equation ca:
## ===================================
## ca = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + uk.l2 + ca.l2 + us.l2 + uk.l3 + ca.l3 + us.l3 + uk.l4 + ca.l4 + us.l4 +
##
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.37782    0.10199   3.705 0.000336 ***
## ca.l1  0.31603    0.10109   3.126 0.002276 **
## us.l1  0.40963    0.09489   4.317 3.52e-05 ***
## uk.l2 -0.17399    0.10834  -1.606 0.111193
## ca.l2 -0.25407    0.10554  -2.407 0.017771 *
```

```
## us.l2  0.06295    0.10220   0.616 0.539247
## uk.l3  0.09615    0.11018   0.873 0.384757
## ca.l3  0.12035    0.10525   1.143 0.255362
## us.l3  0.01366    0.10031   0.136 0.891925
## uk.l4  0.07470    0.09744   0.767 0.445006
## ca.l4 -0.09031    0.09305  -0.971 0.333959
## us.l4 -0.09781    0.09443  -1.036 0.302622
## const  0.07757    0.08004   0.969 0.334593
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Residual standard error: 0.5365 on 108 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.5661,  Adjusted R-squared: 0.5179
## F-statistic: 11.74 on 12 and 108 DF,  p-value: 8.189e-15
##
##
## Estimation results for equation us:
## ===================================
## us = uk.l1 + ca.l1 + us.l1 + uk.l2 + ca.l2 + us.l2 + uk.l3 + ca.l3 + us.l3 + uk.l4 + ca.l4 + us.l4 +
##
##       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## uk.l1  0.51905    0.10938   4.745 6.41e-06 ***
## ca.l1  0.17304    0.10841   1.596   0.1134
## us.l1  0.15039    0.10177   1.478   0.1424
## uk.l2 -0.21784    0.11618  -1.875   0.0635 .
## ca.l2 -0.15931    0.11319  -1.407   0.1622
## us.l2  0.22561    0.10960   2.058   0.0420 *
## uk.l3  0.04783    0.11816   0.405   0.6864
## ca.l3 -0.07856    0.11287  -0.696   0.4879
## us.l3  0.07384    0.10758   0.686   0.4939
## uk.l4  0.15409    0.10450   1.475   0.1433
## ca.l4 -0.15182    0.09979  -1.521   0.1311
## us.l4 -0.05350    0.10127  -0.528   0.5984
## const  0.23868    0.08584   2.781   0.0064 **
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
##
## Residual standard error: 0.5754 on 108 degrees of freedom
## Multiple R-Squared: 0.4531,  Adjusted R-squared: 0.3923
## F-statistic: 7.457 on 12 and 108 DF,  p-value: 7.522e-10
##
```

```
##
##
## Covariance matrix of residuals:
##         uk      ca     us
## uk 0.25130 0.04912 0.1001
## ca 0.04912 0.28783 0.1084
## us 0.10009 0.10840 0.3310
##
## Correlation matrix of residuals:
##        uk     ca     us
## uk 1.0000 0.1826 0.3470
## ca 0.1826 1.0000 0.3512
## us 0.3470 0.3512 1.0000
```

结果选择了 4 阶模型，与 `MTS::VARorder()` 结果不同。

vars 包的 `SVAR()` 函数可以用来估计 VAR 的结构形式。

24.8 模型检验

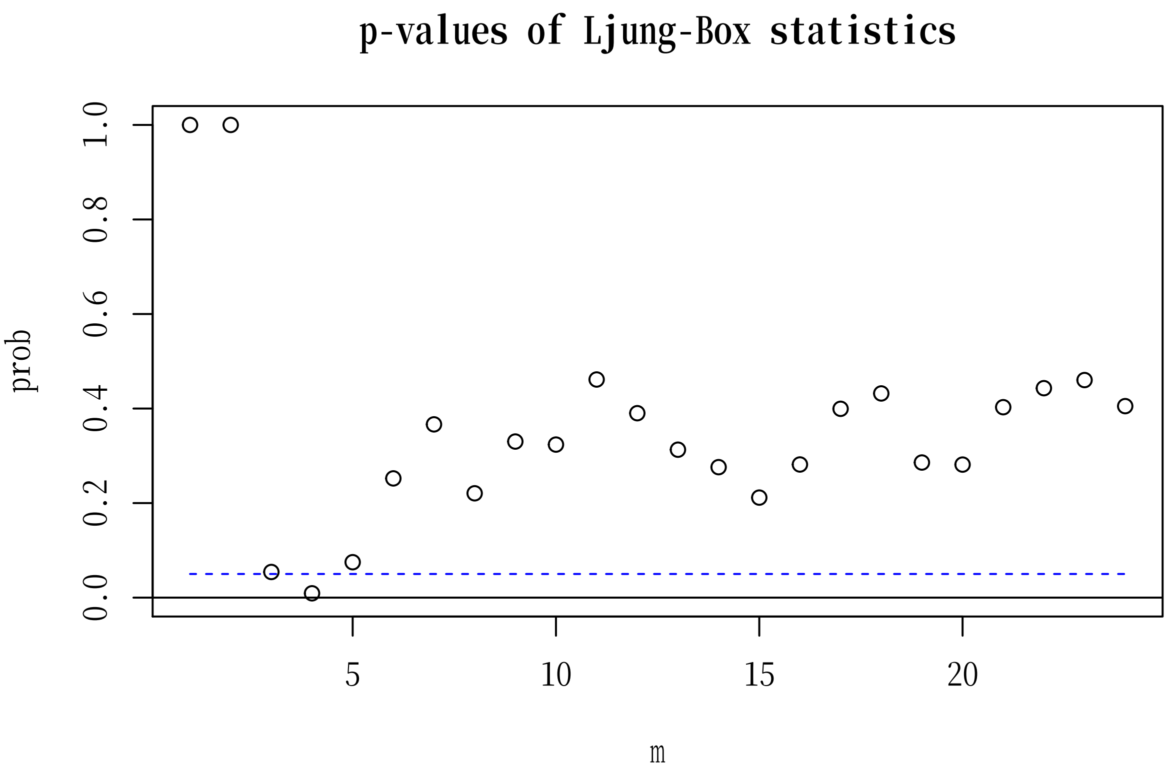
可以计算模型残差，对残差进行多元白噪声检验（多元混成检验）。残差的多元混成检验因为使用了估计的参数，所以统计量的自由度会减少 $k^2 p$，这是系数矩阵 Φ_j, $j = 1, 2, \dots, p$ 中的参数个数。如果系数矩阵中某些参数固定为 0，应按无约束的参数个数计算要扣除的自由度。在 MTS 包的 `mq()` 函数中用 `adj=` 指定需要减少的自由度。

例 3.2 对例 3.1 的三个国家的 GDP 季度增速建模，VAR(2) 模型的残差的多元混成检验程序如下：

```
resi <- m2.gdp3r$residuals
MTS::mq(resi, adj=3^2 * 2)
```

```
## Ljung-Box Statistics:
##             m       Q(m)      df    p-value
##  [1,]    1.000     0.816  -9.000     1.00
##  [2,]    2.000     3.978   0.000     1.00
##  [3,]    3.000    16.665   9.000     0.05
##  [4,]    4.000    35.122  18.000     0.01
##  [5,]    5.000    38.189  27.000     0.07
##  [6,]    6.000    41.239  36.000     0.25
##  [7,]    7.000    47.621  45.000     0.37
##  [8,]    8.000    61.677  54.000     0.22
##  [9,]    9.000    67.366  63.000     0.33
## [10,]   10.000    76.930  72.000     0.32
## [11,]   11.000    81.567  81.000     0.46
```

```
## [12,]  12.000    93.112  90.000     0.39
## [13,]  13.000   105.327  99.000     0.31
## [14,]  14.000   116.279 108.000     0.28
## [15,]  15.000   128.974 117.000     0.21
## [16,]  16.000   134.704 126.000     0.28
## [17,]  17.000   138.552 135.000     0.40
## [18,]  18.000   146.256 144.000     0.43
## [19,]  19.000   162.418 153.000     0.29
## [20,]  20.000   171.948 162.000     0.28
## [21,]  21.000   174.913 171.000     0.40
## [22,]  22.000   182.056 180.000     0.44
## [23,]  23.000   190.276 189.000     0.46
## [24,]  24.000   202.141 198.000     0.41
```



检验结果只有在滞后 4 显著，基本可以认为模型是充分的。

对残差还可以进行异方差等检验。

24.9 模型简化

当 VAR 中分量个数 k 较大时，模型有许多参数，系数矩阵中参数个数为 k^2p 个。如果没有先验知识要求参数非零，可以将不显著的参数约束为零再估计。

模型简化没有公认的最优做法。一种办法是计算参数估计值与标准误差的比值，称为 t 比值，将 t 比值绝对值小于 1.645(相当于 0.10 检验水平) 或者小于 1.96（相当于 0.05 检验水平）的系数设置为零。MTS 包的 `VARchi()` 函数输入多元时间序列和 VAR 的阶，以及 `thres=1.645` 或 `thres=1.96` 这样的 t 比值界限，返回可设置为零的个数，以及这些参数同时等于零的零假设的卡方检验结果。

例 3.3 对三个国家的 GDP 对数增长率的 VAR(2) 模型进行化简。

```
library(MTS, quietly = TRUE)
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
VARchi(Z, 2, thres=1.645)
```

```
## Number of targeted parameters:  8
## Chi-square test and p-value:  15.16379 0.05603778
```

```
VARchi(Z, 2, thres=1.96)
```

```
## Number of targeted parameters:  10
## Chi-square test and p-value:  31.68739 0.000451394
```

结果表明在 0.10 水平下，逐个检验有 8 个参数不显著，如果检验这 8 个参数同时等于零的零假设，p 值为 0.056，可以同时设这 8 个参数等于 0。如果在 0.05 水平下逐个检验有 10 个参数不显著，但是其同时等于零的检验的 p 值为 0.0005，所以不能同时将 10 个参数删去。

MTS 包的 `refVAR()` 输入一个无约束的 VAR 模型的结果，以及 `thres=1.96` 这样的 t 比值界限，生成设置部分系数为零的约束估计结果。可以通过 AIC 比较完全模型和约束模型。如：

```
library(MTS, quietly = TRUE)
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
cat("================ Full model:\n")
```

```
## ================ Full model:
```

```
mods1.gdp3r <- VAR(Z, 2)
```

```
## Constant term:
## Estimates:  0.1258163 0.1231581 0.2895581
## Std.Error:  0.07266338 0.07382941 0.0816888
## AR coefficient matrix
## AR( 1 )-matrix
##       [,1]  [,2]   [,3]
## [1,] 0.393 0.103 0.0521
## [2,] 0.351 0.338 0.4691
## [3,] 0.491 0.240 0.2356
## standard error
```

```
##         [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0934 0.0984 0.0911
## [2,] 0.0949 0.1000 0.0926
## [3,] 0.1050 0.1106 0.1024
## AR( 2 )-matrix
##          [,1]   [,2]     [,3]
## [1,]  0.0566  0.106  0.01889
## [2,] -0.1914 -0.175 -0.00868
## [3,] -0.3120 -0.131  0.08531
## standard error
##         [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0924 0.0876 0.0938
## [2,] 0.0939 0.0890 0.0953
## [3,] 0.1038 0.0984 0.1055
##
## Residuals cov-mtx:
##             [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.28244420 0.02654091 0.07435286
## [2,] 0.02654091 0.29158166 0.13948786
## [3,] 0.07435286 0.13948786 0.35696571
##
## det(SSE) =  0.02258974
## AIC =  -3.502259
## BIC =  -3.094982
## HQ  =  -3.336804
```

```
cat("\n\n================ Restricted model:\n")
```

```
##
##
## ================ Restricted model:
```

```
mods2.gdp3r <- refVAR(mods1.gdp3r, thres=1.96)
```

```
## Constant term:
## Estimates:  0.1628247 0 0.2827525
## Std.Error:  0.06814101 0 0.07972864
## AR coefficient matrix
## AR( 1 )-matrix
##       [,1]  [,2]  [,3]
## [1,] 0.467 0.207 0.000
## [2,] 0.334 0.270 0.496
## [3,] 0.468 0.225 0.232
```

```
## standard error
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0790 0.0686 0.0000
## [2,] 0.0921 0.0875 0.0913
## [3,] 0.1027 0.0963 0.1023
## AR( 2 )-matrix
##        [,1] [,2] [,3]
## [1,]  0.000    0    0
## [2,] -0.197    0    0
## [3,] -0.301    0    0
## standard error
##        [,1] [,2] [,3]
## [1,] 0.0000    0    0
## [2,] 0.0921    0    0
## [3,] 0.1008    0    0
##
## Residuals cov-mtx:
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.29003669 0.01803456 0.07055856
## [2,] 0.01803456 0.30802503 0.14598345
## [3,] 0.07055856 0.14598345 0.36268779
##
## det(SSE) =  0.02494104
## AIC =  -3.531241
## BIC =  -3.304976
## HQ  =  -3.439321
```

无约束的 VAR(2) 的 AIC 值为 -3.50，约束 10 个参数为零的 VAR(2) 的 AIC 值为 -3.53，所以约束模型较优。约束模型为

$$
\begin{aligned}
r_t =& \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0 \\ 0.29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.47 & 0.21 & 0 \\ 0.33 & 0.27 & 0.50 \\ 0.47 & 0.23 & 0.23 \end{pmatrix} r_{t-1} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.20 & 0 & 0 \\ -0.30 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_{t-2} + a_t \\
\text{Var}(a_t) =& \begin{pmatrix} 0.29 & 0.02 & 0.07 \\ 0.02 & 0.31 & 0.15 \\ 0.07 & 0.15 & 0.36 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

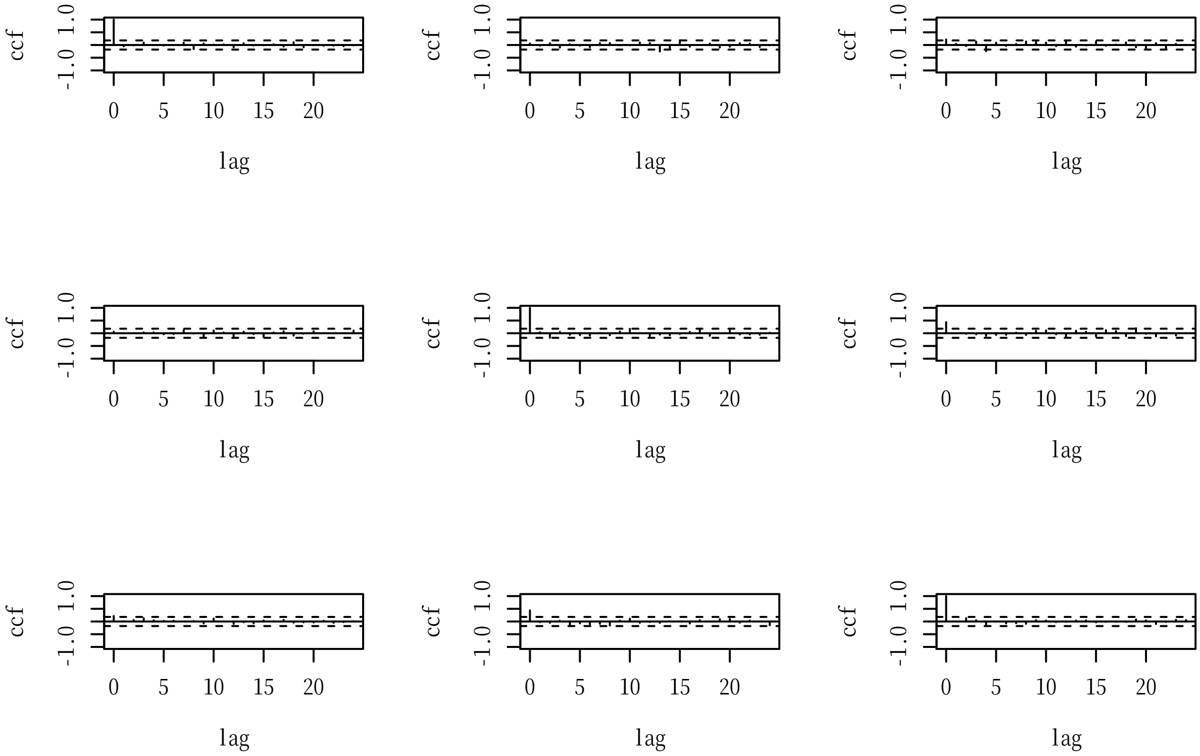
对这个简化的模型的检验，可以提取残差后用 `MTS::mq()` 函数检验，这时自由度缩减个数由原来的 $3^2 \times 2 = 18$ 个，减少到 9 个，因为模型中约束了 9 个参数等于零。MTS 包还提供了一个 `MTSdiag()` 函数，输入模型结果和 `adj=` 自由度缩减个数，作残差的 CCM 估计表、图和残差的多元混成检验：

```r
library(MTS, quietly = TRUE)
MTSdiag(mods2.gdp3r, adj=9)
```

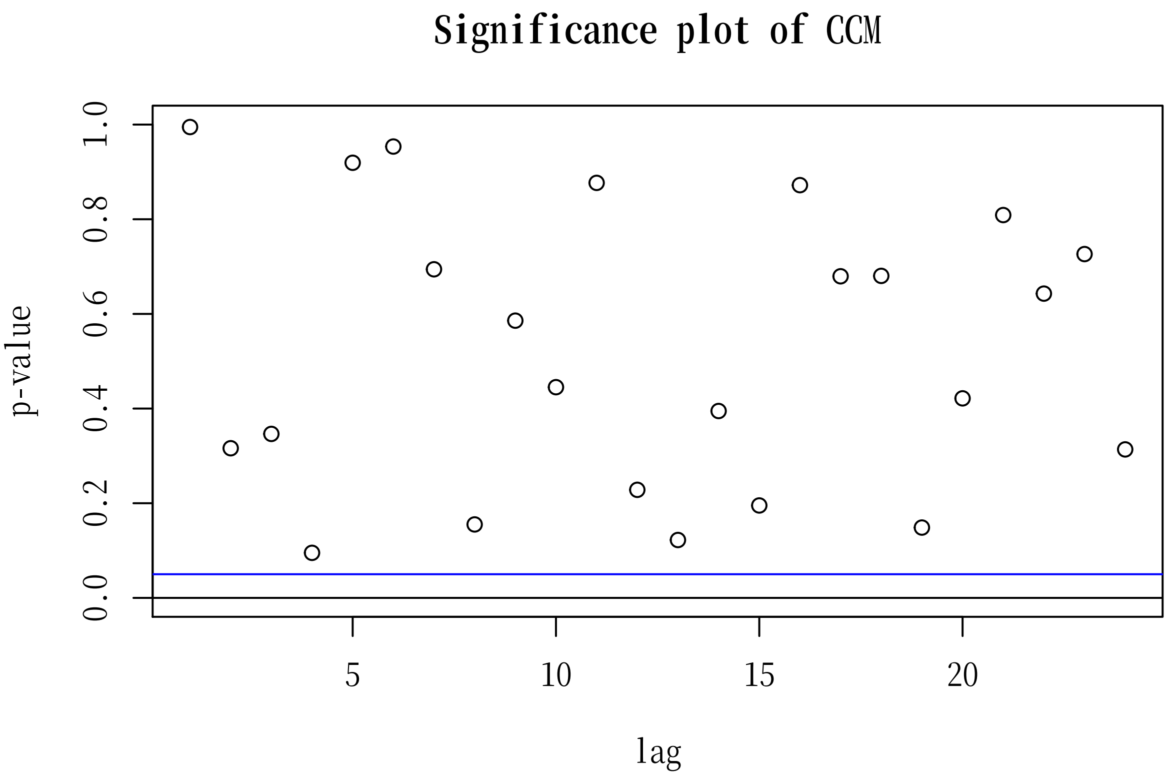
```
## [1] "Covariance matrix:"
##        uk     ca     us
## uk 0.2924 0.0182 0.0711
## ca 0.0182 0.3084 0.1472
## us 0.0711 0.1472 0.3657
## CCM at lag:  0
##        [,1]   [,2]  [,3]
## [1,] 1.0000 0.0605 0.218
## [2,] 0.0605 1.0000 0.438
## [3,] 0.2175 0.4382 1.000
## Simplified matrix:
## CCM at lag:  1
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  2
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  3
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  4
## . . -
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  5
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  6
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  7
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  8
```

```
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  9
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  10
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  11
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  12
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  13
## . - .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  14
## . - .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  15
## . + .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  16
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  17
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  18
## . . .
## . . .
## . . .
```

```
## CCM at lag:  19
## . . .
## . . +
## . . .
## CCM at lag:  20
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  21
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  22
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  23
## . . .
## . . .
## . . .
## CCM at lag:  24
## . . .
## . . .
## . . .
```

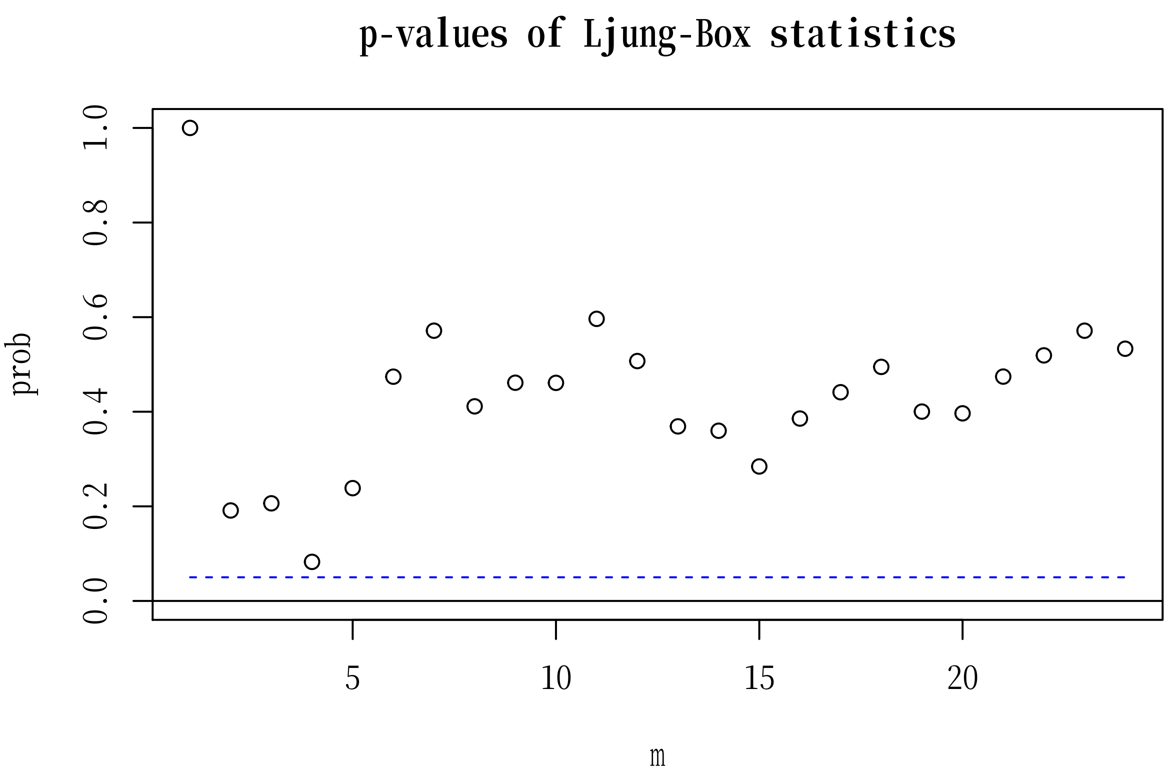


Hit Enter for p-value plot of individual ccm:

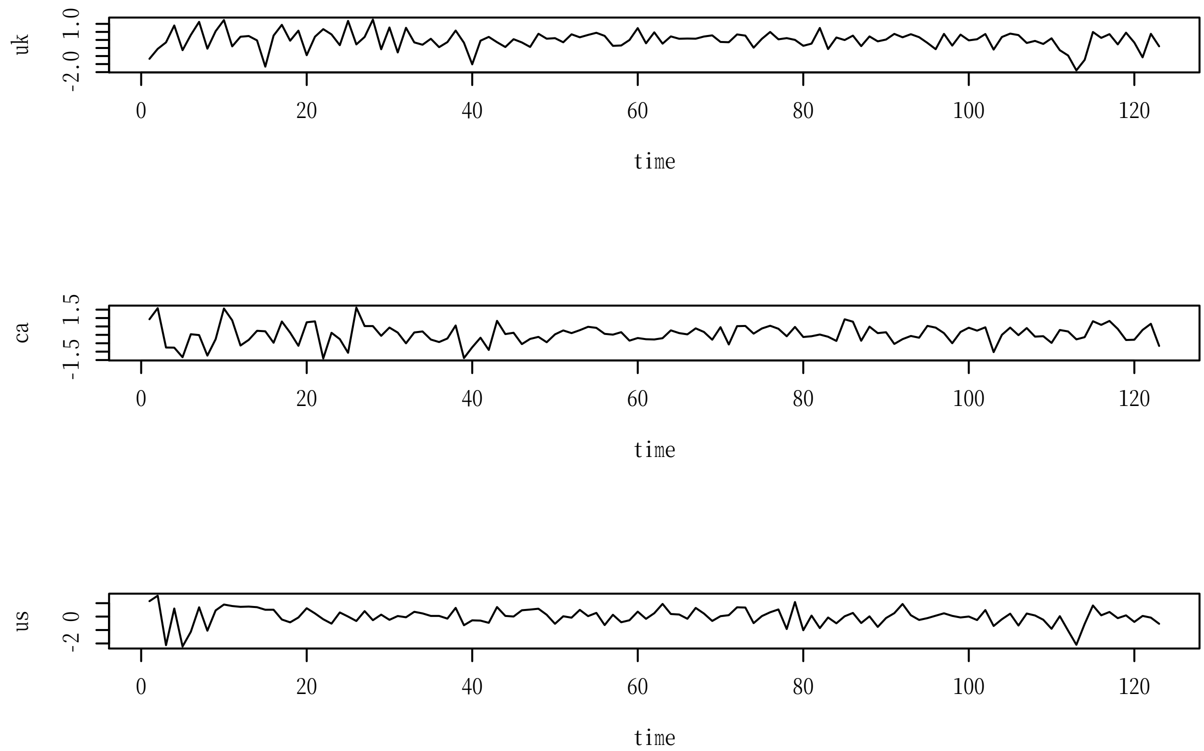



```
## Hit Enter to compute MQ-statistics:
##
## Ljung-Box Statistics:
##          m       Q(m)     df    p-value
##  [1,]   1.00      1.78    0.00     1.00
##  [2,]   2.00     12.41    9.00     0.19
##  [3,]   3.00     22.60   18.00     0.21
##  [4,]   4.00     37.71   27.00     0.08
##  [5,]   5.00     41.65   36.00     0.24
##  [6,]   6.00     44.95   45.00     0.47
##  [7,]   7.00     51.50   54.00     0.57
##  [8,]   8.00     64.87   63.00     0.41
##  [9,]   9.00     72.50   72.00     0.46
## [10,]  10.00     81.58   81.00     0.46
## [11,]  11.00     86.12   90.00     0.60
## [12,]  12.00     98.08   99.00     0.51
## [13,]  13.00    112.31  108.00     0.37
## [14,]  14.00    121.89  117.00     0.36
## [15,]  15.00    134.58  126.00     0.28
## [16,]  16.00    139.16  135.00     0.39
## [17,]  17.00    145.85  144.00     0.44
```

```
## [18,]  18.00    152.56  153.00     0.49
## [19,]  19.00    165.91  162.00     0.40
## [20,]  20.00    175.22  171.00     0.40
## [21,]  21.00    180.56  180.00     0.47
## [22,]  22.00    187.40  189.00     0.52
## [23,]  23.00    193.78  198.00     0.57
## [24,]  24.00    204.65  207.00     0.53
```




```
## Hit Enter to obtain residual plots:
```



从残差的 CCM 和多元混成检验结果来看，约束的模型是充分的。

注：蔡教授的多元金融时间序列专著中，残差混成检验时调整的自由度是 $k^2 p$ 还是 $k^2 p + k$，没有讲得很清楚。在 §2.7.2（P.52）说明要调整的自由度是 $k^2 p$，但是在 §2.7.3（P.57）的例子中，调整后的自由度为 $9m - 12$，这里扣除的 12 个自由度加上约束的 9 个零参数，是 21 个参数，包括了 ϕ_0 部分。

从简化模型可以得到三国的 GDP 季度对数增长率服从如下的模型：

$$
\begin{aligned}
\text{英国:} r_{1t} &= 0.16 + 0.47 r_{1,t-1} + 0.21 r_{2,t-1} + a_{1t} \\
\text{加拿大:} r_{2t} &= 0.33 r_{1,t-1} + 0.27 r_{2,t-1} + 0.50 r_{3,t-1} - 0.20 r_{1,t-2} + a_{2t} \\
\text{美国:} r_{3t} &= 0.28 + 0.47 r_{1,t-1} + 0.23 r_{2,t-1} + 0.23 r_{3,t-1} - 0.30 r_{1,t-2} + a_{3t}
\end{aligned}
$$

残差的相关阵为：

$$
\hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.06 & 0.22 \\ 0.06 & 1.00 & 0.44 \\ 0.22 & 0.44 & 1.00 \end{pmatrix}
$$

残差的相关阵计算程序：

```r
cor(mods2.gdp3r$residuals)
```

```
##             [,1]       [,2]      [,3]
## [1,] 1.00000000 0.06054285 0.2175489
## [2,] 0.06054285 1.00000000 0.4382489
## [3,] 0.21754885 0.43824891 1.0000000
```

24.10 基于 VAR 模型的格兰杰因果性检验

如果模型可以简化为某些代表格兰杰因果性的系数等于零，则可以据此进行格兰杰因果性的检验。在二元的 VAR(1) 模型中，如果约束 $\phi_{12}(1) = 0$ 后的模型与无约束模型没有显著差异，则 r_{2t} 不是 r_{1t} 的格兰杰原因。p 阶以及 k 元的情形类似。

为了比较无约束与约束的模型，使用对数似然比检验，得到的统计量在约束参数等于零的零假设下渐近服从卡方分布。

MTS 包中 `GrangerTest()` 函数执行格兰杰因果性检验，默认第一个分量为单向的格兰杰原因，可以用 `locInput=` 序号指定哪一个或者哪几个分量作为原因。用基于 VAR 的方法检验格兰杰因果性，局限是各分量也必须平稳，不支持协整模型。

例 3.4

检验美国的 GDP 季度增长率是不是英国和加拿大的增长率的单向格兰杰原因。

```
library(MTS, quietly = TRUE, warn.conflicts=FALSE)
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
GrangerTest(Z, p=2, locInput=3)
```

```
## Number of targeted zero parameters:  4
## Chi-square test for Granger Causality and p-value:  27.2262 1.789152e-05
```

美国是第 3 个分量，零假设为

$$H_0 : \phi_{31}(1) = \phi_{32}(1) = \phi_{31}(2) = \phi_{32}(2) = 0,$$

即预报 x_{3t} 时不需要用到 $x_{1,t-1}$, $x_{2,t-1}$, $x_{1,t-2}$, $x_{2,t-2}$。结果 p 值小于 0.05，拒绝 H_0，说明美国的 GDP 季度增长率不是英国和加拿大的增长率的单向格兰杰原因，即英国和加拿大也是美国的格兰杰原因。

对加拿大进行检验：

```
GrangerTest(Z, p=2, locInput=2)
```

```
## Number of targeted zero parameters:  4
## Chi-square test for Granger Causality and p-value:  48.83871 6.309173e-10
```

检验结果显著，加拿大不是美国、英国的单向格兰格原因，即美国和英国是加拿大的格兰杰原因。

对英国进行检验：

```
GrangerTest(Z, p=2, locInput=1)
```

```
## Number of targeted zero parameters:  4
## Chi-square test for Granger Causality and p-value:  8.948851 0.06239076
## Constant term:
## Estimates:  0.2104448 0.1231581 0.2895581
## Std.Error:  0.06685632 0.07382941 0.0816888
```

```
## AR coefficient matrix
## AR( 1 )-matrix
##       [,1]  [,2]  [,3]
## [1,] 0.473 0.000 0.000
## [2,] 0.351 0.338 0.469
## [3,] 0.491 0.240 0.236
## standard error
##        [,1]  [,2]   [,3]
## [1,] 0.0899 0.000 0.0000
## [2,] 0.0949 0.100 0.0926
## [3,] 0.1050 0.111 0.1024
## AR( 2 )-matrix
##        [,1]   [,2]     [,3]
## [1,]  0.151  0.000  0.00000
## [2,] -0.191 -0.175 -0.00868
## [3,] -0.312 -0.131  0.08531
## standard error
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.0859 0.0000 0.0000
## [2,] 0.0939 0.0890 0.0953
## [3,] 0.1038 0.0984 0.1055
##
## Residuals cov-mtx:
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.30423344 0.02654091 0.07435286
## [2,] 0.02654091 0.29158166 0.13948786
## [3,] 0.07435286 0.13948786 0.35696571
##
## det(SSE) =  0.02443371
## AIC =  -3.487791
## BIC =  -3.17102
## HQ  =  -3.359104
```

综合以上三个结果，第三个检验说明在 0.05 水平下加拿大和美国不是英国的格兰杰原因，而前两个检验说明英国是美国和加拿大的格兰杰原因，所以可以认为英国是美国和加拿大单向的格兰杰原因。第三个检验结果中还给出了约束系数等于零的模型估计结果。

24.11 预测

若 VAR(p) 模型已知，满足平稳性条件，设 $\{a_t\}$ 是独立的弱平稳时间序列。用 F_t 表示截止到 t 时刻为止的 $r_s, s \leq t$ 所包含的信息，则 $E(a_t|F_{t-1}) = 0$。基于 t 时刻的信息进行超前 l 步预测，预测为

$$r_t(l) = E(r_{t+l}|F_t)$$

当 $l=1$ 时

$$r_t(1)=\phi_0+\Phi_1 r_t+\cdots+\Phi_p r_{t+1-p}$$

当 $l=2$ 时

$$\begin{aligned}r_t(2)=&E(r_{t+2}|F_t)\\=&\phi_0+\Phi_1 E(r_{t+1}|F_t)+\Phi_2 r_t+\cdots+\Phi_p r_{t+2-p}\end{aligned}$$

若记

$$r_t(l)=\begin{cases}E(r_{t+l}|F_t), & l>0\\ r_{t+l}, & l\le 0\end{cases}$$

则超前 l 步预报可以写成

$$r_t(l)=E(r_{t+l}|F_t)=\phi_0+\sum_{j=1}^{p}\Phi_j r_t(l-j)$$

可见超前多步预测可以递推地计算。

对于满足平稳性条件的 VAR(p) 模型，可以证明

$$\lim_{l\to\infty} r_t(l)=\mu=Er_t$$

即 VAR(p) 的预测具有均值回归性。均值回归速度由特征多项式 $|P(z)|$ 的最接近单位圆的根的模与 1 的接近程度决定，根越接近单位圆，均值回归越慢。

l 步超前预测误差为

$$e_t(l)=r_{t+l}-r_t(l)=r_{t+l}-E(r_{t+l}|F_t)$$

为了研究预测误差方差阵，最好利用 VAR 的无穷阶 MA 表示。

类似一元情形，VAR(p) 模型可以写成一个无穷阶 MA 形式

$$r_t=\mu+\sum_{l=0}^{\infty}\Psi_l a_{t-l} \tag{24.20}$$

其中 $\Psi_0=I$, $\mu=[P(1)]^{-1}$（假定 $[P(1)]^{-1}$ 存在），系数矩阵 Ψ_l 可以通过下式使得方程两边 z 的同次项相等求解：

$$(I-\Phi_1 z-\cdots-\Phi_p z^p)(I+\Psi_1 z+\Psi z^2+\dots)=I$$

易见

$$e_t(l)=a_{t+l}+\Psi_1 a_{t+l-1}+\cdots+\Psi_{l-1}a_{t+1}$$

从而

$$\begin{aligned}\text{Var}(e_t(1))=&\Sigma\\ \text{Var}(e_t(l))=&\Sigma+\sum_{j=1}^{l-1}\Psi_j\Sigma\Psi_j^T\\ =&\text{Var}(e_t(l-1))+\Psi_{l-1}\Sigma\Psi_{l-1}^T,\ l=2,3,\dots\end{aligned}$$

当 $l\to\infty$ 时

$$\text{Var}(e_t(l))\to\sum_{j=0}^{\infty}\Psi_j\Sigma\Psi_j^T=\text{Var}(r_t)$$

这一点与均值回归性质吻合。

如果模型是从数据中估计得到的，则点预测仍利用相同的公式，将估计参数代入即可：

$$
\begin{aligned}
r_t(1) =& \hat{\phi}_0 + \hat{\Phi}_1 r_t + \cdots + \hat{\Phi}_p r_{t+1-p} \\
r_t(l) =& \hat{\phi}_0 + \hat{\Phi}_1 r_t(l-1) + \cdots + \hat{\Phi}_p r_t(l-p)
\end{aligned}
$$

预测误差的估计还要考虑到参数估计带来的误差，比较复杂，参见 (R. S. Tsay, 2014) §2.9.2。

MTS 包的 `VARpred()` 函数可以从 VAR 的建模结果计算点预测值，不考虑参数估计误差的预测标准误差（Standard errors of predictions），考虑参数估计误差的预测标准误差（Root mean squared errors of predictions）。

例 3.5

例 3.1 中建立的三个国家的 GDP 增速的 VAR(2) 模型是基于 1980 年第二季度到 2011 年第二季度的数据，用建立的模型进行超前 1 到 8 步预测。第一个预测对应 2011 年第三季度，最后一个预测对应 2013 年第二季度。

```r
library(MTS, quietly = TRUE)
VARpred(m2.gdp3r, 8)
```

```
## orig  125
## Forecasts at origin:  125
##          uk      ca     us
## [1,] 0.3129 0.05166 0.1660
## [2,] 0.2647 0.31687 0.4889
## [3,] 0.3143 0.48231 0.5205
## [4,] 0.3839 0.53053 0.5998
## [5,] 0.4412 0.56978 0.6297
## [6,] 0.4799 0.59478 0.6530
## [7,] 0.5068 0.60967 0.6630
## [8,] 0.5247 0.61689 0.6688
## Standard Errors of predictions:
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.5315 0.5400 0.5975
## [2,] 0.5804 0.7165 0.7077
## [3,] 0.6202 0.7672 0.7345
## [4,] 0.6484 0.7785 0.7442
## [5,] 0.6629 0.7824 0.7475
## [6,] 0.6692 0.7838 0.7484
## [7,] 0.6719 0.7842 0.7486
## [8,] 0.6729 0.7843 0.7487
## Root mean square errors of predictions:
##        [,1]   [,2]   [,3]
## [1,] 0.5461 0.5549 0.6140
## [2,] 0.6001 0.7799 0.7499
## [3,] 0.6365 0.7879 0.7456
## [4,] 0.6601 0.7832 0.7484
## [5,] 0.6689 0.7841 0.7488
```

```
## [6,] 0.6719 0.7844 0.7488
## [7,] 0.6730 0.7844 0.7487
## [8,] 0.6734 0.7844 0.7487
```

多步预测会趋近到序列均值，计算序列均值：

```
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
colMeans(Z)
```

```
##        uk        ca        us
## 0.5223092 0.6153672 0.6473996
```

可以看出在超前 8 步时的点预测值很接近于序列的均值。

不管是不考虑参数估计误差的标准误差 (Standard errors of predictions) 还是考虑参数估计误差的标准误差 (Root mean squared errors of predictions)，超前 l 步预报当 $l \to \infty$ 时都应该趋于序列的标准差。计算序列的样本标准差：

```
Z <- coredata(as.xts(ts.gdp3r))
apply(Z, 2, sd)
```

```
##        uk        ca        us
## 0.7086442 0.7851955 0.7872912
```

输出中的标准误差或者根均方误差可以用来计算预测区间。比如，计算美国 GDP 季度对数增长率超前 2 步预测区间，即 2011 年第四季度的预测区间，在 95% 置信度下可计算为 $0.4889 \pm 1.96 \times 0.7077$ 或 $0.4889 \pm 1.96 \times 0.7499$，后一个区间用到的标准误差包含了参数估计误差带来的额外误差估计。

24.12 脉冲响应函数

前面给出了 VAR 模型的无穷阶 MA 表示(24.20)。Ψ_l 是过去的信息对 r_t 的影响的系数，称 Ψ_l 的元素为时间序列 r_t 的**脉冲响应函数**（Pulse Response Function）的系数。等价地，Ψ_l 的元素也是 a_t 对未来的 r_{t+l} 的线性影响的系数。

以 $k = 2$ 的序列 $r_t = (r_{1t}, r_{2t})^T$ 为例，记 $\Psi_l = (\psi_{ij}(l))_{k \times k}$，考虑 r_{1t} 的一个变化对 $r_{2,t+j}$ 的影响。为此，设 $\mu = 0$，设 $r_t = 0(t \leq 0$ 时)，设 $a_0 = (1, 0)^T$，$a_t = 0(t \neq 0$ 时)，这样来考虑 r_{10} 处的一个变化引起的后续变化。这时

$$
\begin{aligned}
r_0 =& a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
r_1 =& \Psi_1 a_0 = \begin{pmatrix} \psi_{11}(1) \\ \psi_{21}(1) \end{pmatrix} \\
r_2 =& \Psi_2 a_0 = \begin{pmatrix} \psi_{11}(2) \\ \psi_{21}(2) \end{pmatrix} \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

所以 Ψ_l 的 (i,j) 元可以看成是 r_{jt} 的一个变动对 $r_{i,t+l}$ 造成的影响。

记

$$\underline{\Psi}_n = \sum_{l=0}^{n} \Psi_l$$

$\underline{\Psi}_n$ 表示对 r_t 的单位冲击的**累积响应**，称 $\underline{\Psi}_n$ 的元素为第 n 个短期乘数，全部的响应的累积值

$$\underline{\Psi}_\infty = \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l$$

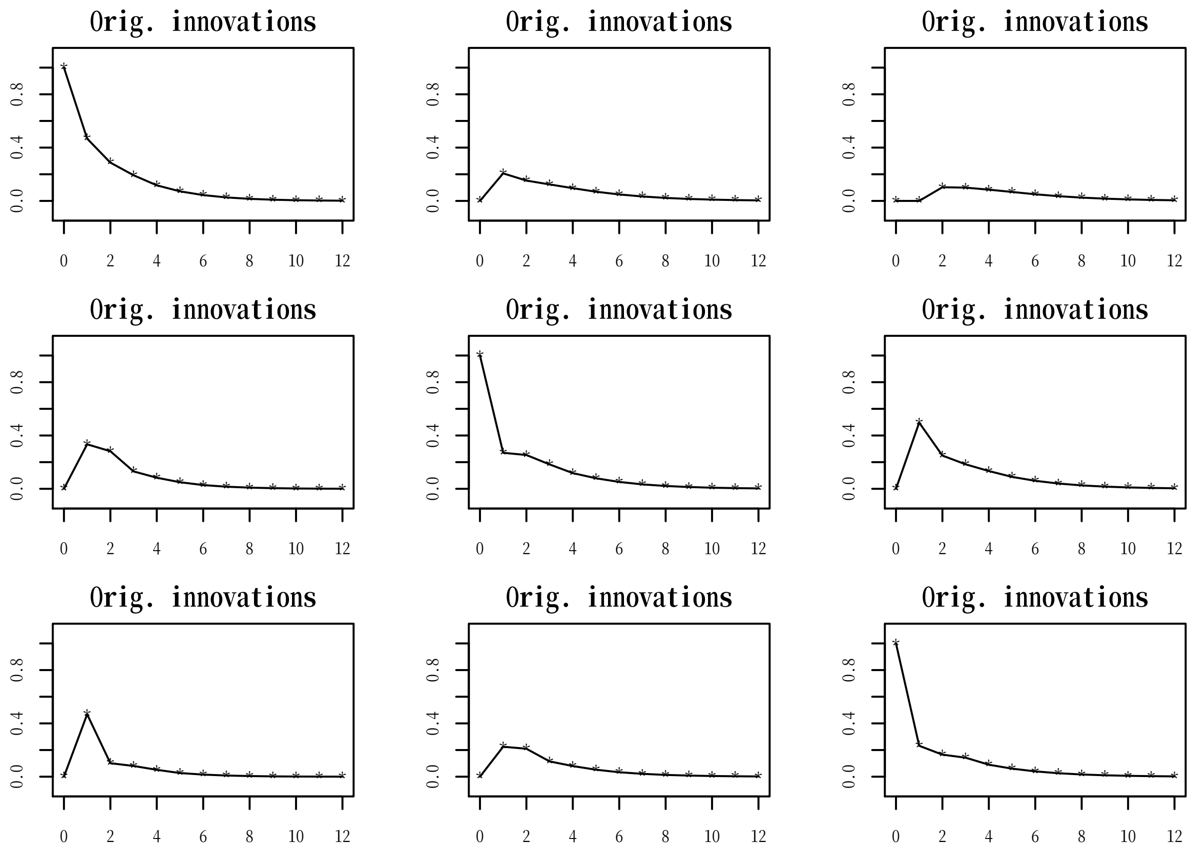
称为总乘数或长期效应。

可以作 $\psi_{ij}(l)$ 沿 $l = 0, 1, 2, ...$ 变化的折线图，称为脉冲响应函数图；以及 $\sum_{l=0}^{n} \psi_{ij}(l)$ 沿 $n = 0, 1, 2, ...$ 变化的折线图，称为累积响应函数图。

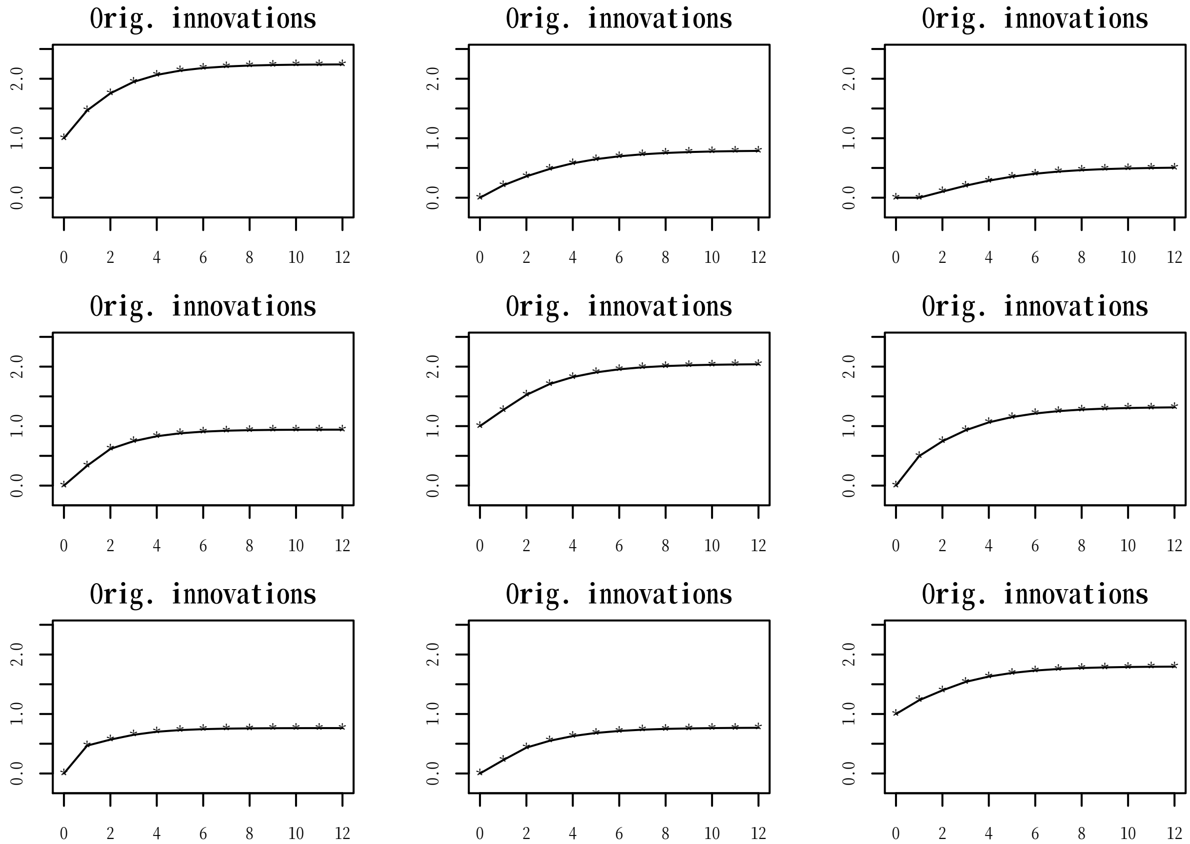
例 3.6

对例 3.2 中建立的简化的 VAR(2) 模型作脉冲响应函数图和累积响应图。三个分量两两的图形共 $3 \times 3 \times 2$ 幅。

```r
library(MTS, quietly = TRUE)
VARirf(mods2.gdp3r$Phi, mods2.gdp3r$Sig, orth=FALSE)
```




```
## Press return to continue
```



在脉冲响应的 9 幅图中，右上角的图是 $\psi_{13}(l)$ 的图形，代表美国（分量 3）的数据的一个冲击对英国（分量 1）的延迟的影响。

这样的脉冲响应有一些问题。由于新息 a_t 存在分量间的同步相关性，改变 a_{1t} 的值不可能不同时影响到 a_{2t} 的值。所以原始的脉冲响应 Ψ_l 不够实际。用数学解释，改变 a_{1t} 后对 r_{t+l} 的影响，可以看成是求 $\frac{\partial r_{t+l}}{\partial a_{1t}}$，利用无穷阶 MA 表示(24.20)，因为 $\{a_t\}$ 序列不相关，所以 (以 $k=2$ 为例)

$$\frac{\partial r_{t+l}}{\partial a_{1t}} =\Psi_l \frac{\partial a_t}{\partial a_{1t}} = \Psi_l \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial a_{2t}}{\partial a_{1t}} \end{pmatrix}$$

其中 a_{2t} 不是 a_{1t} 的函数，其关系可以用线性回归

$$a_{2t} = \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} a_{1t} + e$$

表示，因此 $\frac{\partial a_{2t}}{\partial a_{1t}}$ 可估计为 $\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}}$，有

$$\frac{\partial r_{t+l}}{\partial a_{1t}} =\Psi_l \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_{11}} \end{pmatrix}$$

所以 a_{1t} 对 r_{t+l} 的影响不仅涉及 Ψ_l 的第一列元素的影响，还涉及 Σ 的第一列元素的影响以及 Ψ_l 的第二列元素的影响。

可以利用 Cholesky 分解使得新息正交化（分量间不相关）。对 a_t 的方差阵 Σ 有 Cholesky 分解 $\Sigma = LL^T$，其中 L 是对角线元素都为正数的下三角阵。定义正交化的新息 $b_t = L^{-1} a_t$，则 $\text{Var}(b_t) = I$ 是单位阵，从而 b_t 各分量不相

关。令 $\Psi_l^* = \Psi_l L = (\psi_{ij}^*(l))_{k\times k}$，(24.20)可以用正交化的新息 b_t 表示为

$$\begin{aligned} r_t =& \mu + \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l L \cdot L^{-1} a_t \\ =& \mu + \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l^* b_t \end{aligned}$$

因为 b_t 的分量不相关，可得

$$\frac{\partial r_{i,t+l}}{\partial b_{jt}} = \psi_{ij}^*(l)$$

$\psi_{ij}^*(l)$ 是 b_{jt} 对未来的观测 $r_{i,t+l}$ 的影响，称系数矩阵 Ψ_l^* 为 r_t 的带正交新息 b_t 的脉冲响应系数，称沿 $l = 0, 1, 2, \dots$ 变化的 $\psi_{ij}^*(l)$ 为 r_t 的带正交新息 b_t 的脉冲响应函数。

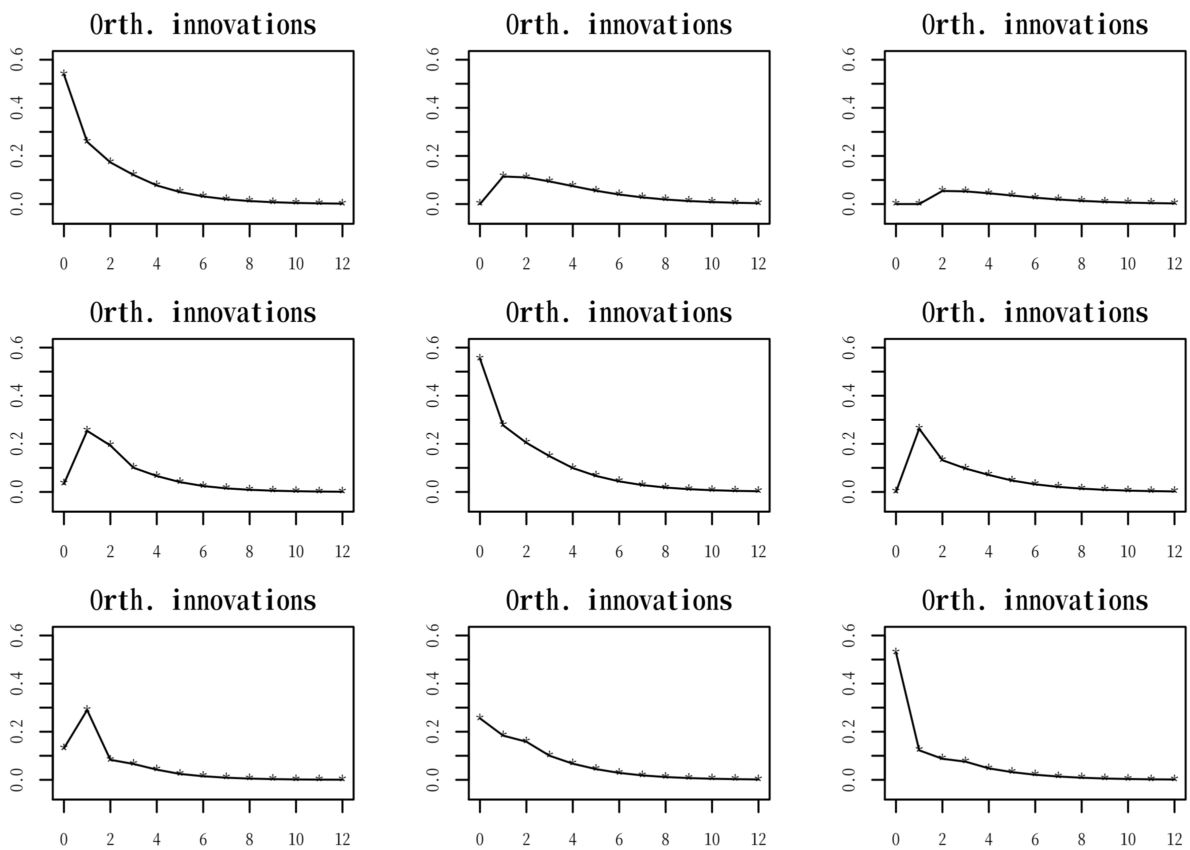
正交化以后，$\psi_{ij}^*(0)$ 是 L^{-1} 的第 (i,j) 元素，可以表示 r_{jt} 的一个冲击对 r_{it} 的即期影响。

这样的三角分解的缺点是结果依赖于 r_t 的分量次序，对脉冲函数的理解与 r_t 的分量次序有关。特别地，$a_{1t} = \sqrt{\sigma_{11}} b_{1t}$，$a_{1t}$ 仅做了方差标准化。

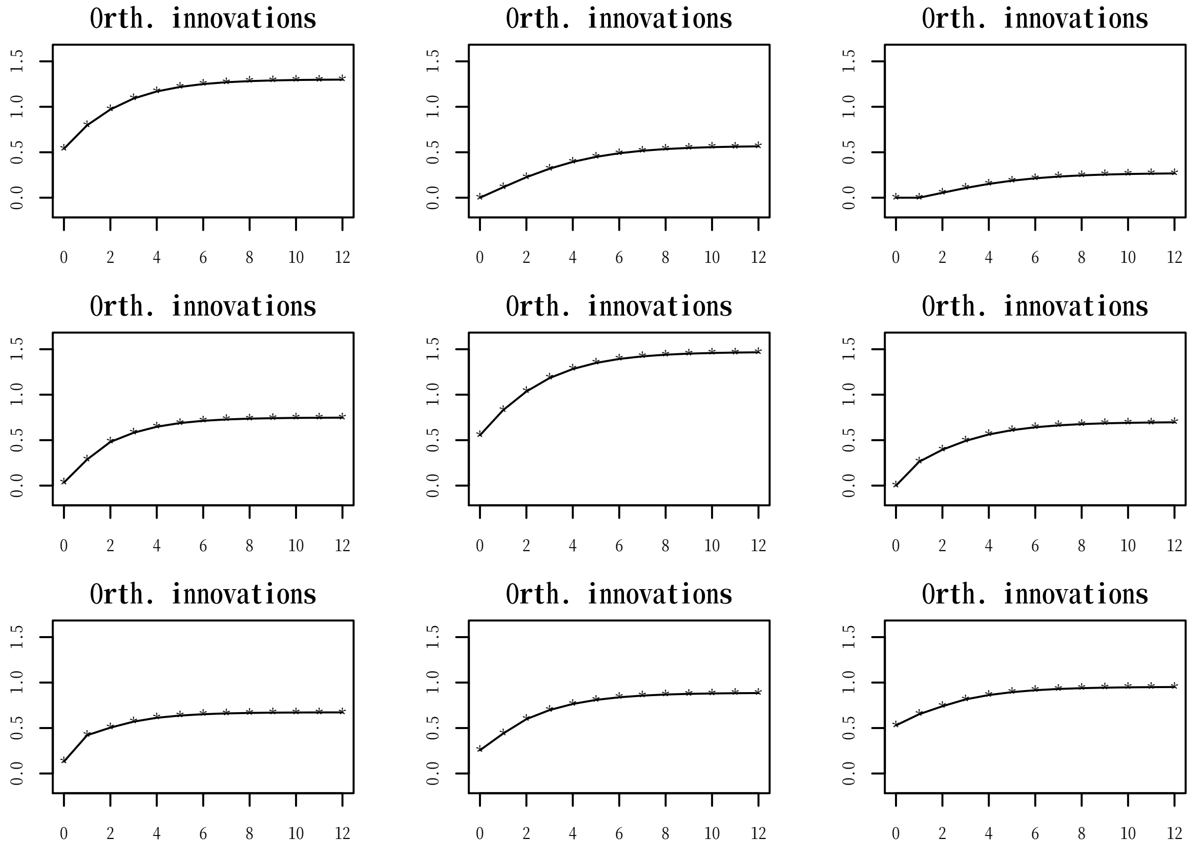
例 3.7

对例 3.2 中建立的简化的 VAR(2) 模型作正交化的脉冲响应函数图和累积响应图。

```
library(MTS, quietly = TRUE)
VARirf(mods2.gdp3r$Phi, mods2.gdp3r$Sig, orth=TRUE)
```




```
## Press return to continue
```



这三个分量的新息的即期相关不大，所以正交化的脉冲响应与原始的表现相近。