

# LMSR

LMSR(logarithmic market scoring rule)即对数市场评价法则,由 Hanson 提出。它是一种自动化市场庄家机制,总是保持一致的概率分布来反映市场对每个结果的可能性的估计。LMSR 正成为预测市场(prediction markets)事实上的标准,它有许多优良的特性,如预测结果对数增长带来的有界损失、无限的流动性和独立关系的模块化等。LMSR 被很多公司或项目使用,如 inkling-markets.com、Microsoft、yoonew.com、Augur 以及 Gnosis。

在一个预测市场中,庄家(市场创建者)建立一个事件 $\Phi$ , $\Phi$ 的结果可以有如下类型:

布尔类型,如“德国队在 2018 年的世界杯能夺冠吗?”,结果只有 yes 或 no;

列表类型,如“2018 年世界杯哪个队能夺冠?”,结果是一个 32 维列表;

范围类型,如“2018 年 1 月 1 日苹果的股价是多少美元?”,结果将是一个较大的范围。

在某个时刻,参与者如何下注、如何确定购买或卖出某结果股份的价格和市场对获胜概率的评估都由 LMSR 完成。

## 1. 定义

对于有 $n$ 个结果的事件 $\Phi$ , $q_i$ 表示第 $i$ 个结果的当前的股份(share)数量。

**定义 1** 亏损界 $\ell$ ,由庄家自行确定的整数。它是庄家有界损失的重要参数。 $\ell$ 越大表示庄家有可能会亏损越大,但是 $\ell$ 越大,表示市场的流动性也越大,参与者购买较多股份时对价格的影响越小。

**定义 2** 成本函数 $C$ 定义为

$$C(q_1, q_2, \dots, q_n) = \ell \cdot \ln(e^{\frac{q_1}{\ell}} + e^{\frac{q_2}{\ell}} + \dots + e^{\frac{q_n}{\ell}}),$$

$\ell$ 是亏损界,ln是自然对数。成本函数 $C$ 是 LMSR 的核心函数,它反应了市场的当前的资本总额,购买和卖出股份的具体价格将有成本函数的状态差给出。

**定义 3** 准备金 $\mathcal{F}$ ，表示庄家有界亏损的上界，即最大可能亏损值，也是庄家建立事件时必须提供的准备金。 $\mathcal{F}$ 由 $\ell$ 和 $n$ 共同决定。

$$\mathcal{F} = \ell \cdot \ln(n) = C(0,0,\dots,0)。$$

**定义 4** 瞬时价格函数 $p(q_i)$ ，表示当前购买或卖出微量第 $i$ 个结果股份的价格。它是成本函数的偏导数：

$$p(q_i) = \frac{dC}{dq_i} = \frac{e^{\frac{q_i}{\ell}}}{e^{\frac{q_1}{\ell}} + e^{\frac{q_2}{\ell}} + \dots + e^{\frac{q_n}{\ell}}}$$

**定义 5** 概率函数 $P(q_i)$ ，表示当前市场预测事件第 $i$ 个结果获胜的概率。这里我们给出一个已证明的定理， $p(q_i) = P(q_i)$ 。这个结论揭示了在 LMSR 中，参与者购买某结果的股份价格跟市场预测对该结果获胜的概率是相等的。

## 2. 购买和卖出流程

基于以上定义，下面描述预测市场根据 LMSR 买卖股份的流程。

庄家建立 $n$ 个结果的预测事件，确定亏损界 $\ell$ ，并向市场提供准备金 $\mathcal{F} = \ell \cdot \ln(n)$ 。市场建立初始，没有参与者买卖股份， $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ 。此时各结果概率均等为 $1/n$ ，每个股份的瞬时价格 $p(q_i) = 1/n$ 。

第一个参与者 Alice 看好结果1获胜，够买 $a$ 份，则 $q_1 = a$ 。则 Alice 支付的金额由成本函数状态差确定，即 $C(a, 0, \dots, 0) - C(0, 0, \dots, 0)$ ，这里需要说明是在 Alice 购买前，结果 1 的瞬时价格 $p(q_1) = 1/n$ ，而 Alice 够买 $a$ 份所支付的金额并不是 $ap(q_1)$ 。这是因为瞬时价格 $p(q_1)$ 只是当前购买足够小（无穷小）份数的价格，Alice 购买的份数 $a$ 越大，付出的成本也越大。Alice 购买后瞬时价格 $p(q_1)$ 会立刻增加，其它结果 $j \neq 1$ 得瞬时价格会减少。可以通俗理解为对于结果 $i$ 的股份购买越多，价格越高，市场就预测结果 $i$ 获胜概率越高。

对某个时刻，市场成本为 $C(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)$ ，

若 Bob 购买 $b$ 份结果 $i$ ，则需要支付

$$C(q_1, q_2, \dots, q_i + b, \dots, q_n) - C(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)。$$

此后，Alice 卖掉结果 1 的 $a$ 份，则需支付

$$C(q_1 - a, q_2, \dots, q_i + b, \dots, q_n) - C(q_1, q_2, \dots, q_i + b, \dots, q_n)$$

这里需要注意若卖股份的时候，成本状态差为负数，则表示 Alice 赢利，可从市场获得成本状态差的资金，而不是支付给市场。

当预测结束，事件确定后，如结果*i*获胜，持有结果*i*股份的参与者将以单价 1 赎回所有股份，而持有其它结果*j* ≠ *i*股份的参与者将全部损失。如果结果*j* ≠ *i*股份的总资金都不足以支付获胜结果*i*的总资金，则不足部分从庄家的准备金 $\mathcal{F}$ 中扣除。这意味着市场预测越准，庄家亏损越严重，市场预测越差，庄家盈利越多。

LMSR 良好的模型使得庄家最多损失准备金 $\mathcal{F}$ 。

市场在极端情况下庄家将损失全部准备金 $\mathcal{F}$ ，这种情况发生在结果*i*获胜，且所有参与者都够买了结果*i*的股份，没有人购买结果*j* ≠ *i*的股份。即 $q_i$ 足够大， $q_{j \neq i} = 0$ 。于是，庄家需支付的赎回资金为 $q_i$ ，此时的市场纯盈利（所有参与者投入的字节）为

$$T = C(0, 0, \dots, q_i, \dots, 0) - \mathcal{F} = \ell \cdot \ln \left( n - 1 + e^{\frac{q_i}{\ell}} \right) - \mathcal{F} \cong q_i - \mathcal{F},$$

即庄家的亏损为 $q_i - T \cong \mathcal{F}$ 。

### 3. 实例

庄家于 2017 年 4 月建立布尔事件“2017 年 5 月 27 日，柯洁对战 alpha-go 无法获胜一局”，它在 2017 年 5 月 27 日之前是一个预测事件，结果只有 yes 或 no。庄家定义 $\ell = 100$ ，则需要支付给市场的准备金 $\mathcal{F} = 100 \ln 2 = 69.31$ 。

投注前市场总资本为 $C(0, 0) = \mathcal{F} = 69.3$ 。

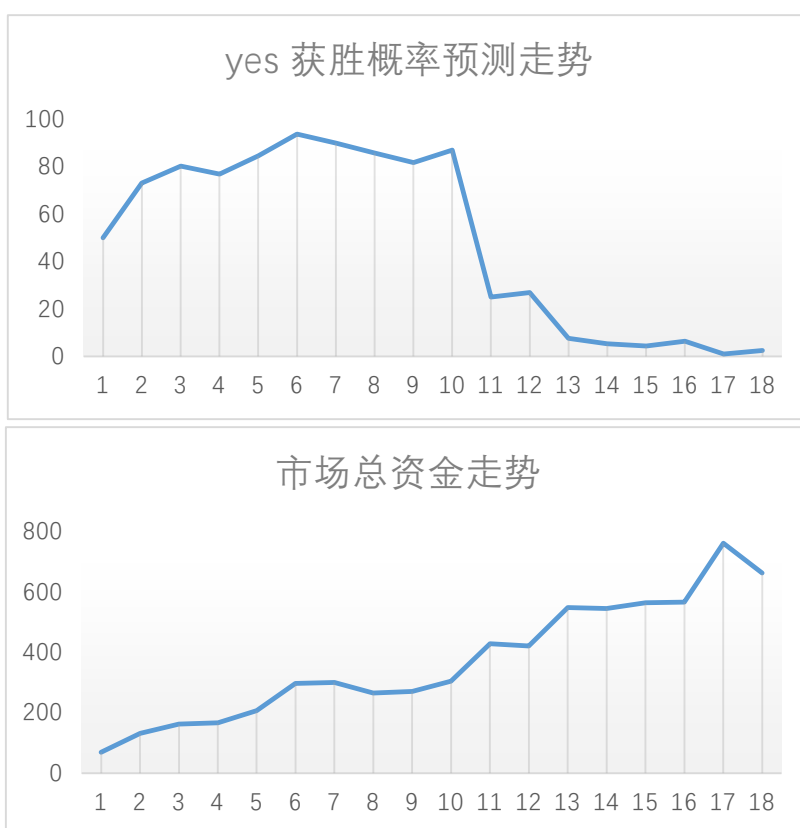
操作如下（百分比为 yes 的概率）：如第一笔交易，购买 yes 100 份，则支出

委 $C(100, 0) - C(0, 0) = 62.01$ ，交易后 yes 的概率为 $\frac{e^{\frac{100}{100}}}{e^{\frac{100}{100}} + 1} = 0.731$ 。以后的交易

按上述流程计算。

			50.000%,	yes=	0, no=	0, 市场总额: 69.315= $\mathcal{F}$
购买 yes:	100 份,	支出金额:	62.01,	73.106%,	yes= 100, no=	0, 市场总额: 131.326
购买 yes:	40 份,	支出金额:	30.72,	80.218%,	yes= 140, no=	0, 市场总额: 162.042
购买 no :	20 份,	支出金额:	4.29,	76.852%,	yes= 140, no=	20, 市场总额: 166.328
购买 yes:	50 份,	支出金额:	40.45,	84.553%,	yes= 190, no=	20, 市场总额: 206.779
购买 yes:	100 份,	支出金额:	89.73,	93.703%,	yes= 290, no=	20, 市场总额: 296.504
购买 no :	50 份,	支出金额:	4.00,	90.025%,	yes= 290, no=	70, 市场总额: 300.508

卖出 yes:	40 份, 收到金额: 35.21, 85.815%,	yes= 250,no= 70, 市场总额: 265.298
购买 no :	30 份, 支出金额: 4.84, 81.757%,	yes= 250,no= 100, 市场总额: 270.141
购买 yes:	40 份, 支出金额: 33.80, 86.989%,	yes= 290,no= 100, 市场总额: 303.939
购买 no :	300 份, 支出金额: 124.79, 24.974%,	yes= 290,no= 400, 市场总额: 428.734
卖出 no :	10 份, 收到金额: 7.41, 26.894%,	yes= 290,no= 390, 市场总额: 421.326
购买 no :	150 份, 支出金额: 126.56, 7.586%,	yes= 290,no= 540, 市场总额: 547.889
卖出 yes:	40 份, 收到金额: 2.53, 5.215%,	yes= 250,no= 540, 市场总额: 545.356
购买 no :	20 份, 支出金额: 19.05, 4.311%,	yes= 250,no= 560, 市场总额: 564.406
购买 yes:	40 份, 支出金额: 2.10, 6.297%,	yes= 290,no= 560, 市场总额: 566.504
购买 no :	200 份, 支出金额: 194.40, 0.901%,	yes= 290,no= 760, 市场总额: 760.905
卖出 no :	100 份, 收到金额: 98.46, 2.413%,	yes= 290,no= 660, 市场总额: 662.442



若此时预测结束，从市场预测情况看，no 的概率较高达到 97.6%，表示市场预测柯洁能够至少获胜 1 场。但从比赛结果看，这个预测与真实结果相反，柯洁 0: 3 输。所以预测结果很差，则庄家获利。此时需要支付 yes 的 290，市场总金额为  $C(290, 660) = 662.44$ ，于是庄家盈利为  $662.44 - 290 - 69.31 = 303.13$ 。