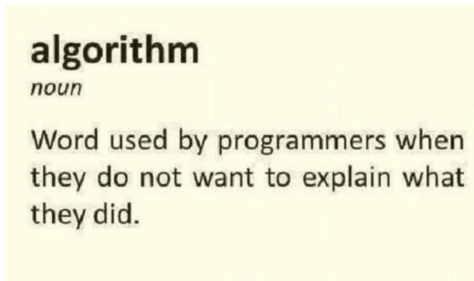
CP 1 - Introducción
Curso 2024-2025



1. 12 monedas

Se tienen 12 monedas y una balanza. Una de las monedas es falsa. Las 11 monedas reales tienen igual peso, mientras que la falsa tiene un peso distinto al resto (se desconoce si es mayor o menor). Encuentre la moneda falsa utilizando la balanza tres veces.

Respuesta:

Procedemos haciendo tres montones de cuatro monedas cada uno y comparamos los montones $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{5, 6, 7, 8\}$, colocando cada uno en un plato de la balanza. El resultado puede ser:

- **Los platos están en equilibrio:** Entonces la moneda falsa está entre las cuatro monedas $\{9, 10, 11, 12\}$ que no fueron pesadas y nos quedan dos oportunidades para descubrirla. Vamos a utilizar una de las monedas buenas (la 1), de las ocho ya utilizadas para proceder con la siguiente pesada, poniendo en un platillo las monedas $\{1, 9\}$ y en el otro las monedas $\{10, 11\}$.
  - Si hay equilibrio significa que la moneda 12 es la defectuosa y nos queda una pesada para determinar si pesa más o pesa menos, lo cual se logra comparándola con la moneda 1, por ejemplo.
  - Si $\{1, 9\}$ pesa menos que $\{10, 11\}$ significa que o bien 9 es la falsa y pesa menos o bien 10 o 11 es falsa y pesa más. Comparamos ahora en la última pesada $\{10\}$ con $\{11\}$. Si hay equilibrio la falsa es 9 y pesa menos, en caso contrario, la que más pese es la falsa y tiene un mayor peso que las auténticas.

    - Si $\{1, 9\}$ pesa más que $\{10, 11\}$ es análogo al caso anterior.

- **Los platos están desequilibrados.** En este caso tenemos ocho monedas candidatas a falsas y cuatro buenas. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el platillo con $\{1, 2, 3, 4\}$ es el más alto, es decir con menor peso. Vamos a proceder agregando una moneda buena, la 9, al grupo de las ocho y formamos tres montones de tres monedas cada uno así: $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 3, 7\}$ y $\{4, 6, 8\}$. El siguiente paso es usar ahora la segunda pesada para comparar estos dos primeros montones. Hay tres posibilidades:

    - Hay equilibrio. Significa que la falsa está en el grupo $\{4, 6, 8\}$. Entonces en la última pesada comparamos $\{6\}$ y $\{8\}$. Si hay equilibrio entre ellas, la falsa es 4 y pesa menos; si no es así, la más pesada es la falsa y pesa más que las auténticas.
    - $\{1, 5, 9\}$ pesa más que $\{2, 3, 7\}$. Significa que o bien la 5 es falsa y pesa más o bien 2 o 3 es falsa y pesa menos. Comparamos estas últimas para saber cuál pesa menos y esa será la defectuosa, pero si hay equilibrio entre ellas, la falsa es la 5.
    - $\{1, 5, 9\}$ pesa menos que $\{2, 3, 7\}$. Significa que o bien 1 pesa menos o bien 7 pesa más. Comparamos cualquiera de ellas, en la última pesada, con una cualquiera de las auténticas ya determinadas y así sabemos cuál es la falsa y si pesa más o menos que una buena.

Hemos considerado ya todos los posibles casos y con tres pesadas hemos podido determinar la moneda falsa y saber si pesa más o pesa menos. Cabe mencionar que existen varias soluciones al problema, y esta es solo una de las posibles estrategias.

2. Torres de Hanoi

Según una antigua leyenda, en un templo en la ciudad de Benarés, India, hay una gran torre con tres varillas de diamante. En una de estas varillas, los monjes han colocado 64 discos de oro, apilados en orden creciente de tamaño desde la base hasta la cima. Los monjes tienen la tarea sagrada de mover todos los discos de la primera varilla a la tercera, siguiendo las reglas del rompecabezas de las Torres de Hanoi:

1. Se puede mover solo un disco a la vez.
2. Un disco de mayor tamaño no puede estar sobre uno de menor tamaño.
3. Solo se puede desplazar el disco que esté más arriba de cada varilla.

La leyenda dice que cuando los monjes completen esta tarea, el mundo llegará a su fin. ¿Deberíamos preocuparnos por esto?

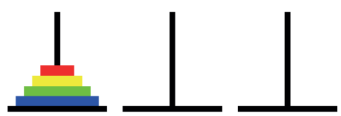


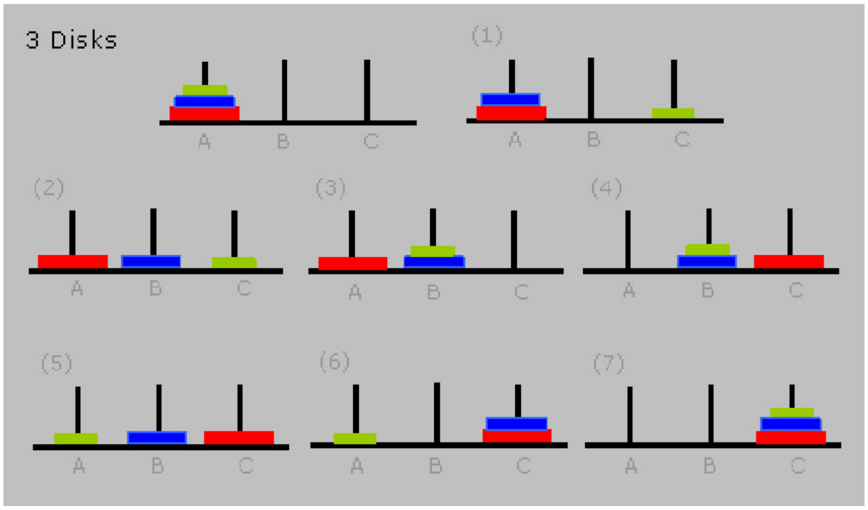
Figura 1: Ejemplo de Torres de Hanoi con 4 discos

Pista: Intenta calcular la cantidad de movimientos que los monjes necesitarán para completar su tarea.

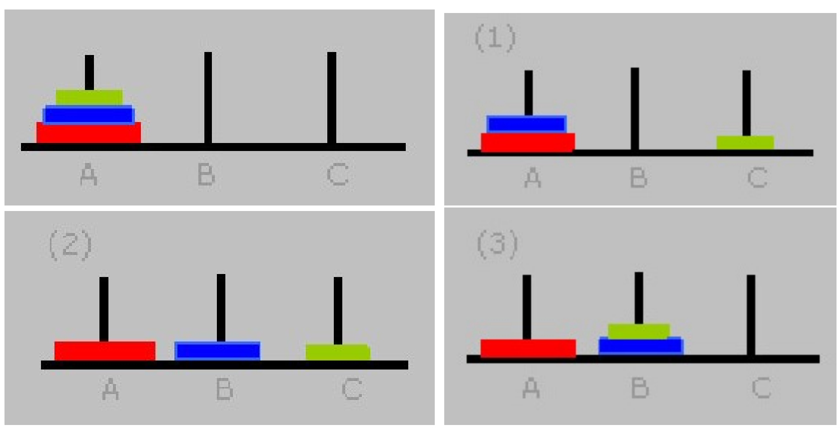
En esta página (si Etecsa te lo permite) puedes intentar resolverlo con diferentes cantidades de discos: Torres de Hanoi

Respuesta:

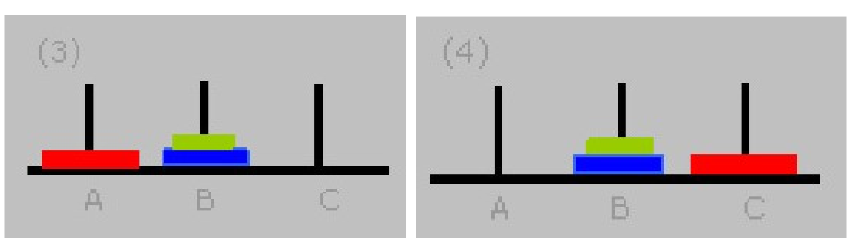
Analicemos un ejemplo, moviendo 3 discos de la varilla A a la varilla C.



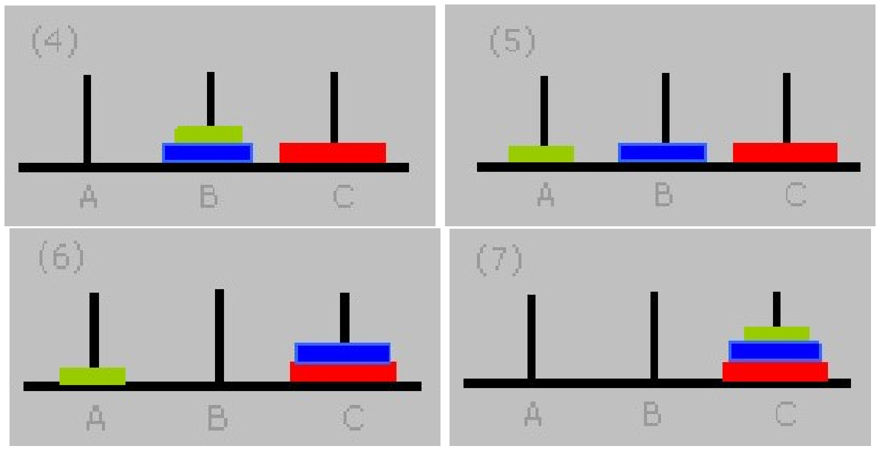
Agrupemos estos pasos de manera conveniente:



Notemos que en este bloque de pasos (1 - 3) lo que hicimos fue mover los 2 discos más pequeños desde la varilla A hasta la varilla B usando la varilla C como auxiliar.



Nos damos cuenta que en este bloque de pasos (4) lo que hicimos fue mover el disco más grande desde la varilla A hasta la varilla C.



Notemos que en este bloque de pasos (5 - 7) lo que hicimos fue mover los 2 discos más pequeños que estaban en la varilla B hasta la varilla C usando la varilla A como auxiliar.

Generalizando este algoritmo, para mover n discos de un poste inicial a un poste de destino, nos quedaría:

1. Mueve los $n-1$ discos más pequeños a un poste auxiliar para liberar el disco más grande.

2. Mueve el disco más grande al poste de destino.

3. Mueve los $n-1$ discos más pequeños del poste auxiliar al poste de destino, encima del disco más grande.

Este proceso se repite para cualquier número de discos. La clave es entender que siempre estás moviendo una “torre” de discos más pequeños para liberar el disco más grande y luego reconstruir la torre en el poste de destino.

Llamemos a_n al número de movimientos necesarios para mover n discos de una varilla a otra, luego el procedimiento descrito nos daría la siguiente fórmula:

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$

Donde:

- a_{n-1} representa mover los $n-1$ discos más pequeños al poste auxiliar.
- 1 representa mover el disco más grande al poste de destino.
- a_{n-1} representa mover los $n-1$ discos más pequeños del poste auxiliar al poste de destino, encima del disco más grande.

Por lo tanto, la fórmula general para el número mínimo de movimientos necesarios para resolver el problema de los n discos es:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$$

Sabemos que para un disco la cantidad de movimientos necesarios es 1, o sea $a_1 = 1$.

Analicemos la secuencia que resulta:

- Para 2 discos: $a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
- Para 3 discos: $a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- Para 4 discos: $a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

En general, para n discos, el número de movimientos necesarios es:

$$a_n = 2^n - 1$$

Esto se puede demostrar por inducción matemática, pero lo importante ahora es entender que cada vez que agregamos un disco, duplicamos el número de movimientos necesarios y sumamos uno más.

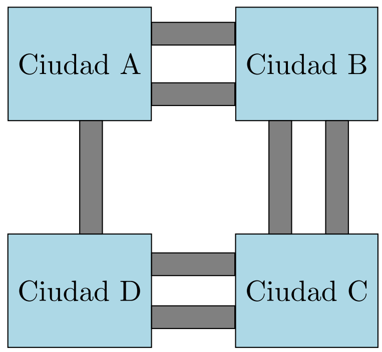
Para dar respuesta a la pregunta inicial, dado que el número mínimo de movimientos necesarios para completar la tarea es:

$$2^{64} - 1 > 18 \cdot 10^{18}$$

Si los monjes pudieran mover un disco por segundo sin parar, les tomaría más de 584 mil millones de años completar la tarea. Así que no debemos preocuparnos más de lo que normalmente lo hacemos por este posible fin del mundo.

3. El problema de los puentes

Se tienen 4 ciudades unidas por 7 puentes. Encuentre una forma de dar un paseo, pasando por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno y regresando a la misma ciudad desde donde partiste.



Respuesta:

No es posible realizar este recorrido porque existe una ciudad que tiene un número impar de puentes, esto significa que, la segunda vez que entremos a esa ciudad, no podremos salir de ella sin repetir un puente.

4. El problema de los jarrones

Tienes dos jarrones, uno con capacidad de 5 litros y otro con capacidad de 3 litros. ¿Cómo puedes medir exactamente 4 litros de agua usando solo estos dos jarrones y una fuente de agua ilimitada?

Respuesta 1:

1. Llena el jarrón de 5 litros.
   - Jarrón de 5 litros: 5 litros
   - Jarrón de 3 litros: 0 litros
2. Vierte agua del jarrón de 5 litros al jarrón de 3 litros hasta que el jarrón de 3 litros esté lleno.
   - Jarrón de 5 litros: 2 litros
   - Jarrón de 3 litros: 3 litros
3. Vacía el jarrón de 3 litros.
   - Jarrón de 5 litros: 2 litros
   - Jarrón de 3 litros: 0 litros
4. Vierte el agua restante del jarrón de 5 litros al jarrón de 3 litros.
   - Jarrón de 5 litros: 0 litros
   - Jarrón de 3 litros: 2 litros
5. Llena nuevamente el jarrón de 5 litros.
   - Jarrón de 5 litros: 5 litros
   - Jarrón de 3 litros: 2 litros
6. Vierte agua del jarrón de 5 litros al jarrón de 3 litros hasta que el jarrón de 3 litros esté lleno.
   - Jarrón de 5 litros: 4 litros
   - Jarrón de 3 litros: 3 litros

Respuesta 2:

1. Llena el jarrón de 3 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 3 litros
    - Jarrón de 5 litros: 0 litros
2. Vierte el agua del jarrón de 3 litros al jarrón de 5 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 0 litros
    - Jarrón de 5 litros: 3 litros
3. Llena nuevamente el jarrón de 3 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 3 litros
    - Jarrón de 5 litros: 3 litros
4. Vierte el agua del jarrón de 3 litros al jarrón de 5 litros hasta que el jarrón de 5 litros esté lleno.
    - Jarrón de 3 litros: 1 litro
    - Jarrón de 5 litros: 5 litros
5. Vacía el jarrón de 5 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 1 litro
    - Jarrón de 5 litros: 0 litros
6. Vierte el 1 litro del jarrón de 3 litros al jarrón de 5 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 0 litros
    - Jarrón de 5 litros: 1 litro
7. Llena nuevamente el jarrón de 3 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 3 litros
    - Jarrón de 5 litros: 1 litro
8. Vierte el agua del jarrón de 3 litros al jarrón de 5 litros.
    - Jarrón de 3 litros: 0 litros
    - Jarrón de 5 litros: 4 litros

5. Los prisioneros y los sombreros

Hay n prisioneros alineados en fila, uno detrás del otro. Cada prisionero puede ver a los que están delante de él, pero no a los que están detrás. A cada prisionero se le coloca un sombrero que puede ser negro o blanco. Los prisioneros no pueden ver el color de su propio sombrero. El prisionero más atrás puede ver los sombreros de los $n-1$ prisioneros delante de él, el segundo prisionero puede ver los sombreros de los $n-2$ prisioneros delante de él, y así sucesivamente.

El prisionero más adelante no puede ver ningún sombrero. Los prisioneros deben adivinar el color de su propio sombrero, comenzando por el prisionero más atrás. Si adivinan correctamente, serán liberados. Si adivinan incorrectamente, serán ejecutados. Los prisioneros pueden escuchar las respuestas de los demás, pero no pueden comunicarse de otra manera.

Todos los prisioneros antes de ser colocados en fila (sin saber qué sombrero le pondrían a cada uno), se reunieron en la misma habitación y se pusieron de acuerdo para seguir una estrategia que lograra que la mayor cantidad de prisioneros posible fueran liberados. ¿Cuál crees que fue la estrategia elegida?

Respuesta:

Analicemos una estrategia con la que siempre al menos $n-1$ prisioneros son liberados. En esta estrategia, el último, el prisionero n, tiene una tarea crucial, este prisionero cuenta el número de sombreros negros que puede ver delante de él. Si el número de sombreros negros es par, dirá "blanco". Si el número de sombreros negros es impar, dirá "negro".

Los demás prisioneros, desde el prisionero $n-1$ hasta el prisionero 1, siguen una estrategia basada en la respuesta del prisionero anterior. Cada prisionero escucha la respuesta del prisionero anterior y cuenta el número de sombreros negros que puede ver delante de él. Luego, compara este número con la paridad anunciada por el prisionero anterior, quedándole estas cuatro opciones:

- Si el prisionero anterior dijo "blanco" y el número de sombreros negros que ve es par, entonces su propio sombrero debe ser blanco para mantener la paridad.

- Si el prisionero anterior dijo "blanco" y el número de sombreros negros que ve es impar, entonces su propio sombrero debe ser negro para cambiar la paridad.

- Si el prisionero anterior dijo "negro" y el número de sombreros negros que ve es par, entonces su propio sombrero debe ser negro para cambiar la paridad.

- Si el prisionero anterior dijo "negro" y el número de sombreros negros que ve es impar, entonces su propio sombrero debe ser blanco para mantener la paridad.

Es importante destacar que el prisionero n tiene un 50 % de probabilidad de salvarse. Esto se debe a que su respuesta inicial (blanco o negro) se basa únicamente en la paridad del número de sombreros negros que puede ver, sin información sobre el color de su propio sombrero. Por lo tanto, tiene una probabilidad del 50 % de adivinar correctamente el color de su sombrero.

Sin embargo, su respuesta es crucial para que los demás prisioneros puedan deducir el color de sus propios sombreros. Los prisioneros restantes (del prisionero $n-1$ al prisionero 1) pueden utilizar la información proporcionada por el prisionero n y la paridad de los sombreros que ven para determinar con certeza el color de sus propios sombreros. De esta manera, al menos $n-1$ prisioneros serán liberados con seguridad.