Recherche de fonctions par types

Un peu de théorie

1 Signature

Définition 1.1 (signature)
Une signature est un ensemble de symboles de fonctions d'arité finie.
On signifie par $(f : n) \in \Sigma$ le fait que le symbole f de fonction d'arité n appartienne à la signature Σ.

Dans toute la suite, on se donne un ensemble dénombrable $\mathscr{V}$ de symboles de variables ainsi qu'une signature Σ telle que $\mathscr{V} \cap \Sigma = \emptyset$, $(\mathit{unit} : 0) \in \Sigma$, $(\cdot * \cdot : 2) \in \Sigma$ et $(\cdot \to \cdot : 2) \in \Sigma$.

2 Types

Définition 2.1 (type)
L'ensemble des types, noté T, est défini inductivement par :

$$\frac{}{\mathscr{V} \subseteq T} \qquad \frac{(f : n) \in \Sigma \qquad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \tau_i \in T}{f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T}$$

Définition 2.2 (type-flèche)
Un type-flèche (ou une flèche) est un type de la forme : $\tau_1 \to \tau_2$.

Définition 2.3 (mot sur $\mathbb{N}$)
L'ensemble des mots sur $\mathbb{N}$ est défini inductivement par :

$$\frac{}{\Lambda \text{ mot vide sur } \mathbb{N}} \qquad \frac{i \in \mathbb{N} \qquad p \text{ mot sur } \mathbb{N}}{i.p \text{ mot sur } \mathbb{N}}$$

Définition 2.4 (positions d'un type)
L'ensemble des positions d'un type τ, noté $Pos(\tau)$, est l'ensemble des mots sur $\mathbb{N}$ défini inductivement par :

$$\frac{}{\Lambda \in Pos(\tau)} \qquad \frac{i \in [\![1\,;n]\!] \quad p \in Pos(\tau_i)}{i.p \in Pos(f(\tau_1, \ldots, \tau_n))}$$

Définition 2.5 (sous-type)
Le sous-type d'un type τ à la position p, noté $\tau[p]$, est défini par induction sur p par :

$$\tau[\Lambda] = \tau$$
$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)[i.q] = \tau_i[q]$$

Définition 2.6 (affectation de types)
Une affectation de types est une fonction de $\mathscr{V}$ dans T.

Définition 2.7 (substitution de types)
Une substitution de type est un endomorphisme de T.

Définition 2.8 (substitution de types induite)
Soit α une affectation de types.
La substitution de types induite par α, notée $\hat{\alpha}$, est la substitution de types dont la restriction à $\mathscr{V}$ est α.
Autrement dit, $\hat{\alpha}$ est définie inductivement par :

$$\hat{\alpha}(v) = \alpha(v)$$
$$\hat{\alpha}(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = f(\hat{\alpha}(\tau_1), \ldots, \hat{\alpha}(\tau_n))$$

Définition 2.9 (instance de type)
Un type τ_1 est une instance d'un type τ_2, noté $\tau_2 \leqslant_T \tau_1$, s'il existe une substitution de types σ telle que $\tau_1 = \sigma(\tau_2)$.

3 Théorie équationnelle

Définition 3.1 (axiome équationnel)
Un axiome équationnel est un couple de types de la forme $\tau_1 \doteq \tau_2$.

Définition 3.2 (instance d'axiome équationnel)
Une instance d'un axiome équationnel $\tau_1 \doteq \tau_2$ est un couple de types (τ_1', τ_2') tels que τ_1' soit une instance de τ_1 et τ_2' une instance de τ_2.

Définition 3.3 (théorie équationnelle)
Soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'axiomes équationnels.
La théorie équationnelle induite par $\mathscr{E}$, notée $\cdot \overset{\mathscr{E}}{=} \cdot$, est la plus petite congruence sur Σ contenant toutes les instances des axiomes équationnels de $\mathscr{E}$.
Autrement dit, c'est la plus petite relation binaire satisfaisant les règles d'inférence :

$$\frac{\tau_1 \doteq \tau_2 \in \mathscr{E}}{\hat{\alpha}(\tau_1) \overset{\mathscr{E}}{=} \hat{\alpha}(\tau_2)}\ (\overset{\mathscr{E}}{=}\text{-ax})$$

$$\frac{}{\tau \overset{\mathscr{E}}{=} \tau}\ (\overset{\mathscr{E}}{=}\text{-refl})$$

$$\frac{\tau_1 \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_2 \qquad \tau_2 \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_3}{\tau_1 \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_3}\ (\overset{\mathscr{E}}{=}\text{-trans})$$

$$\frac{\tau_1 \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_2}{\tau_2 \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_1}\ (\overset{\mathscr{E}}{=}\text{-sym})$$

$$\frac{(f : n) \in \Sigma \qquad \tau_i \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_i'}{f(\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_n) \overset{\mathscr{E}}{=} f(\tau_1, \ldots, \tau_i', \ldots, \tau_n)}\ (\overset{\mathscr{E}}{=}\text{-congr})$$

Définition 3.4 ($\mathscr{E}$-équivalence)
Soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'axiomes équationnels.
Deux types τ_1 et τ_2 sont $\mathscr{E}$-équivalents *ssi* $\tau_1 \overset{\mathscr{E}}{=} \tau_2$.

Définition 3.5 ($\mathscr{E}$-unifiabilité)
Soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'axiomes équationnels.
Deux types τ_1 et τ_2 sont $\mathscr{E}$-unifiables, noté $\tau_1 \bowtie_{\mathscr{E}} \tau_2$, *ssi* :

$$\exists \alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{V}, T),\ \hat{\alpha}(\tau_1) \overset{\mathscr{E}}{=} \hat{\alpha}(\tau_2)$$

Dans toute la suite, on s'intéressa à l'ensemble $\mathscr{E}$ des axiomes équationnels (où x, y et z sont des variables) :

$$\begin{array}{cl}
x * (y * z) \doteq (x * y) * z & \qquad (*\text{-assoc}) \\
x * y \doteq y * x & \qquad (*\text{-comm}) \\
x * y \to z \doteq x \to y \to z & \qquad (\text{curry})
\end{array}$$

On considérera également la théorie équationnelle $\cdot \overset{\mathscr{E}}{=} \cdot$ induite par $\mathscr{E}$; on parlera d'équivalence pour l'$\mathscr{E}$-équivalence et d'unifiabilité pour l'$\mathscr{E}$-unifiabilité (notée $\cdot \bowtie \cdot$).

4 Premier critère

Définition 4.1 (tête d'un type)
La tête d'un type, notée $\uparrow \cdot$, est définie inductivement par :

$$\begin{aligned} \uparrow (\tau_1 \rightarrow \tau_2) &= \uparrow \tau_2 \\ \uparrow \tau &= \tau \end{aligned}$$

Lemme 4.1
Si deux types sont équivalents, leurs têtes le sont aussi.

Lemme 4.2
$\forall \tau \in T,\ \forall \alpha \in \mathscr{F}(\mathscr{V}, T),\ \uparrow \hat{\alpha}(\tau) = \uparrow \hat{\alpha}(\uparrow \tau)$

Lemme 4.3
La tête d'un type n'est pas une flèche.

Lemme 4.4
$\forall (f_1 : n_1) \in \Sigma,\ \forall (f_1 : n_2) \in \Sigma,$
$\forall (\tau_i^1)_{i \in [\![1\,;n_1]\!]} \in T^{n_1},\ \forall (\tau_i^2)_{i \in [\![1\,;n_2]\!]} \in T^{n_2},$
$f_1(\tau_1^1, \ldots, \tau_{n_1}^1) = f_2(\tau_1^2, \ldots, \tau_{n_2}^2) \implies f_1 = f_2$

Théorème 4.1
$\forall \tau_1 \in T,\ \forall \tau_2 \in T,$
$\tau_1 \bowtie \tau_2 \wedge (\uparrow \tau_1)\,[\Lambda] = f_1 \notin \mathscr{V} \wedge (\uparrow \tau_2)\,[\Lambda] = f_2 \notin \mathscr{V} \implies f_1 = f_2$

Démonstration.
Par hypothèse, il existe une affectation de types α telle que :

$$\hat{\alpha}(\tau_1) \stackrel{\mathscr{E}}{=} \hat{\alpha}(\tau_2)$$

Par le lemme 4.1, les têtes sont équivalentes :

$$\uparrow \hat{\alpha}(\tau_1) \stackrel{\mathscr{E}}{=} \uparrow \hat{\alpha}(\tau_2)$$

Par le lemme 4.2, on a donc :

$$\uparrow \hat{\alpha}(\uparrow \tau_1) \stackrel{\mathscr{E}}{=} \uparrow \hat{\alpha}(\uparrow \tau_2)$$

Par hypothèse, il existe $(f_1 : n_1)$ et $(f_2 : n_2)$ dans Σ ainsi que $(\tau_i^1)_{i \in [\![1\,;n_1]\!]}$ dans T^{n_1} et $(\tau_i^2)_{i \in [\![1\,;n_2]\!]}$ dans T^{n_2} tels que :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= f_1(\tau_1^1, \ldots \tau_{n_1}^1) \\ \tau_2 &= f_2(\tau_1^2, \ldots \tau_{n_2}^2) \end{aligned}$$

Par le lemme 4.3, f_1 et f_2 sont différents de $\cdot \to \cdot$.
Par définition de $\uparrow \cdot$ et $\hat{\alpha}$, il vient alors :

$$f_1(\hat{\alpha}(\tau_1^1), \ldots, \hat{\alpha}(\tau_{n_1}^1)) \stackrel{\mathscr{E}}{=} f_2(\hat{\alpha}(\tau_1^2), \ldots, \hat{\alpha}(\tau_{n_2}^2))$$

Enfin, le lemme 4.4 donne :

$$f_1 = f_2$$

□

5 Deuxième critère

Définition 5.1 (multiplicité de symbole de fonctions)
La multiplicité d'un symbole de fonction f, notée μ_f, est définie inductivement par :

$$\begin{aligned}
\mu_f(\tau_1 \to \tau_2) &= \mu'_f(\tau_1) + \mu_f(\tau_2) \\
\mu_f(\tau) &= 0 \\
\mu'_f(\tau_1 * \tau_2) &= \mu'_f(\tau_1) + \mu'_f(\tau_2) \\
\mu'_f(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) &= 1 \\
\mu'_f(\tau) &= 0
\end{aligned}$$

Définition 5.2 ($\mathscr{V}$-multiplicité)
La $\mathscr{V}$-multiplicité est définie inductivement par :

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathscr{V}}(\tau_1 \to \tau_2) &= \mu'_{\mathscr{V}}(\tau_1) + \mu_{\mathscr{V}}(\tau_2) \\
\mu_{\mathscr{V}}(\tau) &= 0 \\
\mu'_{\mathscr{V}}(v) &= 1 \\
\mu'_{\mathscr{V}}(\tau_1 * \tau_2) &= \mu'_{\mathscr{V}}(\tau_1) + \mu'_{\mathscr{V}}(\tau_2) \\
\mu'_{\mathscr{V}}(\tau) &= 0
\end{aligned}$$

Définition 5.3 (type simpe)
Un type τ est simple si sa $\mathscr{V}$-multiplicité est nulle.

Lemme 5.1
Si deux type τ_1 et τ_2 sont équivalents, alors, pour tout symbole de fonction f, on a : $\mu_f(\tau_1) = \mu_f(\tau_2)$.

Lemme 5.2
Si un type τ est simple, alors, pour tout symbole de fonction f et toute affectation de types α, on a : $\mu_f(\hat{\alpha}(\tau)) = \mu_f(\tau)$.

Lemme 5.3
La multiplicité de tout symbole de fonction f dans un type est inférieure à celle de toute instance de ce type.

Théorème 5.1
Soit deux types τ_1 et τ_2.
Si τ_1 et τ_2 sont unifiables et τ_1 simple, alors la multiplicité de tout symbole de fonction dans τ_1 est supérieure à celle dans τ_2.

Démonstration.
Par hypothèse, il existe une affectation α telle que :

$$\hat{\alpha}(\tau_1) \overset{\mathscr{E}}{=} \hat{\alpha}(\tau_2)$$

Soit f un symbole de fonction.
Par le lemme 5.1, les multiplicités sont égales :

$$\mu_f(\hat{\alpha}(\tau_1)) = \mu_f(\hat{\alpha}(\tau_2))$$

Par le lemme 5.2, la simplicité de τ_1 apporte :

$$\mu_f(\hat{\alpha}(\tau_1)) = \mu_f(\tau_1)$$

Par le lemme 5.3, on a par ailleurs :

$$\mu_f(\hat{\alpha}(\tau_2)) \geqslant \mu_f(\tau_2)$$

Il vient donc le résultat attendu :

$$\mu_f(\tau_1) \geqslant \mu_f(\tau_2)$$

□

6 Normalisation

Définition 6.1 (multi-ensemble)
Un multi-ensemble sur un ensemble X est une fonction de X dans $\mathbb{N}$.
L'ensemble des multi-ensembles sur X est noté $X^\sharp$.

Définition 6.2 (domaine de multi-ensemble)
Le domaine d'un multi-ensemble sur X est l'ensemble des éléments de X dont l'image est non-nulle.
Si le domaine d'un multi-ensemble m est fini, on note ce dernier $\{x_1 : m(x_1); \ldots ; x_n : m(x_n)\}$ où $(x_i)_{i \in [\![1\,;n]\!]}$ est le domaine de m.

Définition 6.3 (somme de multi-ensembles)
La somme de deux multi-ensemble sur X m_1 et m_2, notée $m_1 +_m m_2$, est le multi-ensemble $x \mapsto m_1(x) + m_2(x)$.

Définition 6.4 (type normalisé)
L'ensemble des types normalisés (ou ν-types), noté N, est défini inductivement par :

$$\frac{}{\mathscr{V} \subseteq N}$$

$$\frac{(f : n) \in \Sigma \qquad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \nu_i \in N}{f(\nu_1, \ldots, \nu_n) \in N}$$

$$\frac{m \in N^\sharp \qquad \nu \in N}{m \rightarrow_\nu \nu \in N}$$