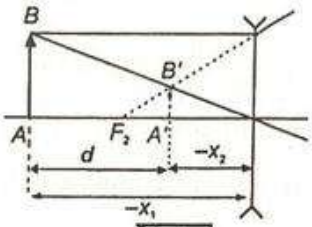
$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2'}=\frac{1}{f}-\frac{n-n_a}{f(n-1)\cdot n_a}=\frac{1}{f}\cdot\frac{n\cdot(n_a-1)}{(n-1)\cdot n_a}\Rightarrow f=\frac{(n_a-1)\cdot n}{(n-1)\cdot n_a}\cdot\frac{x_2x_2'}{x_2'-x_2}=9\text{ cm.}$$

b. $x_1=\dfrac{fx_2}{f-x_2}=-90$ cm

c. În apă distanța focală este $f'=\dfrac{(n-1)\cdot n_a f}{n-n_a}=36$ cm.

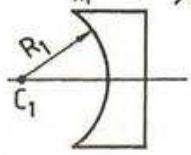
23.a. Distanța focală a lentilei este $f=1/C=-20$ cm

b. Din desen $-x_1=d-x_2\Rightarrow x_2=d+x_1$ și din formula lentilelor subțiri: $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0\Rightarrow$



$$x_1^2+x_1d+df=0\Rightarrow x_1=\frac{-d-\sqrt{d^2-4df}}{2}=-30\text{ cm}$$

c. Utilizăm formulele convergenței:

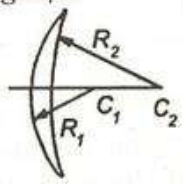


$$C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow\frac{1}{f}=-\frac{n-1}{|R|}\Rightarrow|R|=-f(n-1)$$

$\Rightarrow|R|=10$ cm, deoarece $R_1=-|R|$ și $R_2\to\infty$

24.a. Calculăm distanța focală a lentilei utilizând formulele convergenței:

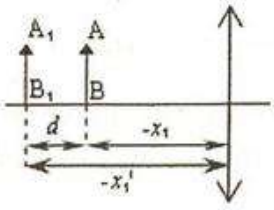
$$C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow f=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=40\text{ cm.}$$



b. Din $d=-x_1+x_2$ și din $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0$. Cum $\Delta=d^2-4df$ și din $\Delta=0$ obținem distanța minimă dintre obiect și ecran pentru ca pe acesta să se formeze imagini reale. Astfel $d_{min}=4f=160$ cm

c. Dacă distanța dintre obiect și ecran este inițial $d=4f$, obiectul se află la dublul distanței focale, astfel încât imaginea sa reală să se formeze pe ecran. În acest caz: $x_1=-2f=-80$ cm iar $x_2=2f=80$ cm

Deoarece ecranul se depărtează cu d=10 cm față de poziția anterioară a lui, atunci $x_2'=x_2+d=90$ cm. Aflăm pe baza formulei lentilelor subțiri $\dfrac{1}{x_2'}-\dfrac{1}{x_1'}=\dfrac{1}{f}$, unde trebuie poziționat obiectul $x_1'=\dfrac{fx_2'}{f-x_2'}=-72$ cm. Obiectul se deplasează spre dreapta apropiindu-se de lentilă cu $|\Delta x_1|=-x_1'+x_1=8$ cm $\Rightarrow$ distanța dintre obiect și ecran devine $d'=-x_1'+x_2'=162$ cm și deci $d'>d$, deoarece d este distanța minimă dintre obiect și ecran.



25.a. Deoarece măririle liniare transversale sunt negative, imaginile formate de lentilă sunt reale și prin urmare lentila este convergentă. Mărirea liniară

transversală este: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1}$. Conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow$

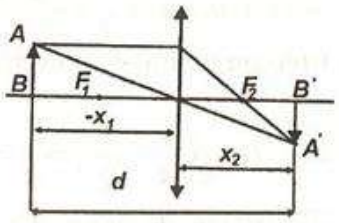
$x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1}$ și din $\beta = \frac{f}{f + x_1}$ obținem $x_1 = \frac{f(1-\beta)}{\beta}$. Conform datelor problemei:

$x_1 = \frac{f(1-\beta_1)}{\beta_1}$ și $x_1' = \frac{f(1-\beta_2)}{\beta_2}$. Conform relațiilor între segmente obținem:

$-x_1' = d - x_1 \Rightarrow -x_1' = d - x_1 \Rightarrow d = x_1 - x_1' = \frac{f(1-\beta_1)}{\beta_1} - \frac{f(1-\beta_2)}{\beta_2} \Rightarrow d = \frac{f(\beta_2 - \beta_1)}{\beta_1\beta_2} \Rightarrow$

$f = \frac{d\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = 40$cm. Deoarece $f > 0$ lentila este convergentă.

b. Din desen $d = -x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = d + x_1$.



Conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow$

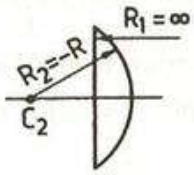
$\frac{1}{d + x_1} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow -df = x_1(d + x_1) \Rightarrow$

$x_1^2 + x_1 d + df = 0 \Rightarrow \Delta = d^2 - 4df = d(d - 4f)$.

Pentru a obține soluții reale pentru x_1, trebuie ca $\Delta \geq 0 \Rightarrow d - 4f \geq 0 \Rightarrow d \geq 4f \Rightarrow$ distanța minimă dintre obiect și imaginea sa reală este $d_{min} = 4f$ =160 cm. În acest caz ecuația de gradul doi admite o singură soluție $x_1 = -\frac{d}{2} = -2f$. Dacă obiectul se află în fața lentilei convergente, la dublul distanței focale, imaginea va fi reală, răsturnată la fel de mare ca obiectul și situată în spatele lentilei la dublul distanței focale. În acest caz se obține distanța minimă de la obiect la imaginea sa reală care este de patru ori mai mare decât distanța focală a lentilei convergente.

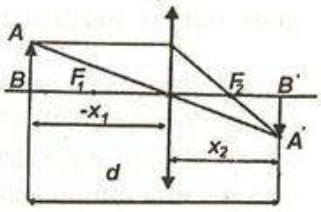
c. Deoarece x_2=$2f \Rightarrow \beta = \frac{x_2}{x_1} = -1$.

26.a. Din formula convergenței $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{n-1}{|R|}$,



deoarece $R_2 = -|R|$ și $R_1 \to \infty$ obținem $|R| = \frac{n-1}{C}$ =25 cm

b. Din C=$1/f \Rightarrow f$=$1/C$=50 cm. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ aflăm la ce distanță de lentilă se formeată imaginea: $x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1}$ =300 cm, astfel că distanța obiect-ecran este $d = -x_1 + x_2$=360 cm



c. Din $d = -x_1 + x_2$ și din $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ obținem $x_1^2 + x_1 d + df = 0$.

Soluțiile acestei ecuații sunt $x_1 = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow x_1 = -60$ cm și $x'_1 = -300$ cm. Lentila se deplasează spre dreapta cu $\Delta x_1 = x_1 - x'_1$=240 cm pentru a se obține o nouă imagine pe ecran

27.a. Deoarece distanța dintre obiect și ecran este mai mare decât 4*f*, există două poziții ale lentilei situate între obiect și ecran pentru care pe ecran se formează imagini clare ale obiectului (desen problema precedentă, punctul b)

Cum $d = -x_1 + x_2$ și $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1^2 + x_1 d + df = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt:

$x_1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2}$ și $x'_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2}$.

Când $x_1 = \frac{-d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow x_2 = d + x_1 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow \beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4df}}{-d - \sqrt{d^2 - 4df}}$.

Când $x'_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{-d + \sqrt{d^2 - 4df}} \Rightarrow \beta_1\beta_2 = 1$.

Dacă distanța dintre obiect și ecran este mai mare decât patru distanțe focale, produsul măririlor liniare transversale corespunzătoare celor două poziții distincte ale lentilei pentru care pe ecran se formează imagini clare este 1. Cum $\beta_1 = \frac{y_2}{y_1}$ și $\beta_2 = \frac{y'_2}{y_1} \Rightarrow \frac{y_2 y'_2}{y_1^2} = 1 \Rightarrow |y_1| = \sqrt{y_2 y'_2} = 6$ cm. În acest caz mărimea obiectului reprezintă media geometrică a mărimilor celor două imagini obținute în cele două situații distincte.

b. Măririle liniare transversale sunt $\beta_1 = y_2/y_1 = -0{,}66$ și $\beta_2 = y_2'/y_1 = -1{,}5$ deoarece imaginile obținute pe ecran în cele două cazuri sunt reale și răsturnate

c. Din $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{y'_2}{y_2} = \left(\frac{d + \sqrt{d^2 - 4df}}{d - \sqrt{d^2 - 4df}}\right)^2$ și din $-x_1 = -x'_1 + D \Rightarrow D = x'_1 - x_1 = \sqrt{d^2 - 4df}$.

Raportul dimensiunilor corespunzătoare a celor două imagini: $\frac{y'_2}{y_2} = \left(\frac{d + D}{d - D}\right)^2$

28.a. Pe baza demonstrației din problema precedentă înălțimea obiectului este $|y_1| = \sqrt{h_1 h_2} = 4$ cm

b. Măririle imaginilor în cele două situații sunt $\beta_1 = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{h_1}{y_1} = -2$ și

$\beta_2 = \frac{y'_2}{y_1} = -\frac{h_2}{y_1} = -\frac{1}{2}$, deoarece imaginile reale obținute pe ecran sunt răsturnate

c. Cum $D = -x_1 + x_2$ și $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1^2 + x_1 D + Df = 0 \Rightarrow x = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df}}{2}$

Mărirea $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{-D - \sqrt{D^2 - 4Df}} = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{-D - \sqrt{\Delta}} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{D(1 + \beta_1)}{1 - \beta_1}$=30 cm.

Cum $\sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4Df} \Rightarrow f = \frac{D^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4D}$=20 cm

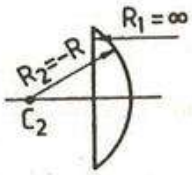
29.a. $D=-x_1+x_2$ şi $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1^2+x_1D+Df=0\Rightarrow x_1=\frac{-D-\sqrt{D^2-4Df}}{2}$ şi $x'_1=\frac{-D+\sqrt{D^2-4Df}}{2}$, astfel că $-x_1=-x'_1+d\Rightarrow d=\sqrt{D^2-4Df}\Rightarrow f=\frac{D^2-d^2}{4D}$

Distanţa focală a lentilei este f=18,75 cm

b. Când $x_1=\frac{-D-d}{2}\Rightarrow x_2=D+x_1=\frac{D-d}{2}$ şi mărirea liniră transversală este: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{D-d}{-D-d}=-\frac{1}{3}$ şi când $x'_1=\frac{-D+d}{2}\Rightarrow x_2=\frac{D+d}{2}\Rightarrow\beta_2=\frac{D+d}{-D+d}=-3$.

Astfel mărimile imaginilor sunt $y_2=\beta_1y_1=-1$ cm şi $y'_2=\beta_2y_1=-9$ cm

c. Din formula convergenţei $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{n-1}{|R|}$, deoarece $R_2=-|R|$ şi $R_1\to\infty$ obţinem $n=1+\frac{|R|}{f}\approx 1{,}533$

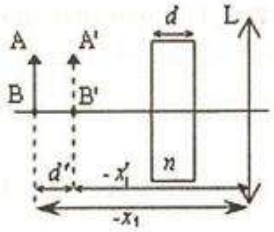


30.a. Utilizăm formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{x_2\cdot f}{f-x_2}=-66$ cm.

Obiectul se aşază la 66 cm în faţa lentilei.

b. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f-x_2}{f}\approx-0{,}833$

c. O lamă cu feţe plan-paralele apropie obiectul de lentilă cu $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)$, unde d este grosimea lamei, iar n este indicele de refracţie al lamei, astfel că imaginea virtuală a lamei joacă rol de obiect real pentru lentilă. Lentila formează pentru obiectul real o imagine reală, egală cu obiectul, astfel că mărirea liniară transversală este $\beta=-1$. Dar $\beta=\frac{x'_2}{x'_1}\Rightarrow x'_2=\beta\cdot x'_1=-x'_1$. Din formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x'_1}=\frac{1}{f}$ obţinem $x'_1=-2f=-60$ cm.

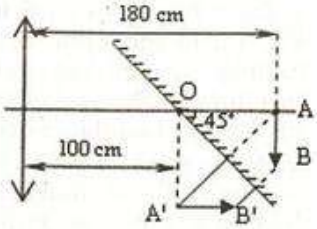


Obiectul virtual trebuie să se afle în faţa lentilei la dublul distanţei focale. Din desen $-x_1=d'-x'_1\Rightarrow d'=x'_1-x_1=6$ cm. Din $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)\Rightarrow$ $d=\frac{nd'}{n-1}=18$ cm. Grosimea lamei este de 18 cm.

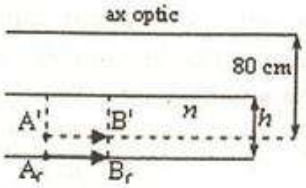
31.a. Deoarece imaginea prinsă pe ecran este o imagine reală şi de trei ori mai mare decât obiectul atunci $\beta=-3$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ şi pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-40$ cm, iar $x_2=f(1-\beta)=120$ cm. Ecranul se aşază la 120 cm în spatele lentilei.

b. Poziționând o lamă cu fețe plan-paralele între obiect și lentilă, lama formează pentru obiect, o imagine virtuală situată mai aproape de lamă cu $e\left(1-\frac{1}{n}\right)=4$ cm. Această imagine virtuală este situată în fața lentilei și joacă rol de obiect real pentru aceasta, astfel că $x_1'=-36$ cm. Lentila va forma imaginea noului obiect la: $x_2'=\frac{f\cdot x_1'}{f+x_1'}=180$ cm de lentilă. Ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu $x_2'-x_2=60$ cm.

c. Deoarece oglinda se așază în spatele lentilei la 1 m de aceasta, imaginea reală formată de lentilă va fi situată în spatele oglinzii jucând rol de obiect virtual pentru aceasta. Cum oglinda reflectă toate razele de lumină, pe baza legilor reflexiei, imaginea formată de oglindă va fi reală și situată simetric față de aceasta. Cum OA=80 cm, din geometrie $\Delta OAA'$ este dreptunghic și isoscel, astfel că: $OA=OA'=80$ cm. Imaginea formată de oglindă este reală și egală cu obiectul, dar este situată sub axul optic principal al lentilei la 80 cm de acesta, paralel cu acesta, ca în figură.

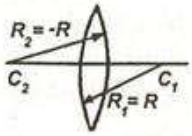


d. Deoarece imaginea finală este reală și situată pe fundul cuvei, înseamnă că imaginea formată de oglindă se află în apă și este obiect virtual pentru stratul de apă. Când razele de lumină pătrund din aer în apă, ele se refractă și se apropie de normală formând în final o imagine mai departe decât obiectul. Cum razele de lumină sunt reversibile putem considera A_fB_f obiect pe fundul apei și $A'B'$ imaginea virtuală a obiectului situată mai aproape de suprafața apei cu $A'A_f=h\left(1-\frac{1}{n}\right)$=5 cm. Fundul cuvei se va situa sub axul optic principal al lentilei la distanța $OA'+A'A_f=85$ cm de acesta.



32.a. Deoarece raza din figură este paralelă cu axul optic principal după refracția prin lentilă aceasta trece prin focarul imagine, astfel că f=20 cm.

b. $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}=\frac{1}{f}\Rightarrow|R|=2f(n-1)=20$ cm.



c. O placă transparentă cu fețe plane și paralele, apropie obiectul de lentilă și depărtează imaginea de lentilă cu $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)$=0,75 cm. Imaginea se depărtează de lentilă cu 0,75 cm.

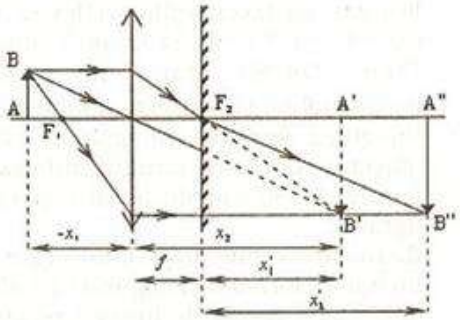
33.a. Aflăm distanța focală a lentilei utilizând formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow f=\frac{R_1\cdot R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=8$ cm, deoarece R_2=−20 cm și R_1=5 cm. Deoarece imaginea se obține pe ecran, ea este reală și răsturnată și din datele problemei $\beta=-4$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-10$ cm. Obiectul se așază la 10 cm în fața lentilei și

la $d=-x_1+x_2=(\beta-1)x_1=-\frac{f(1-\beta)^2}{\beta}$ =50 cm de ecran.

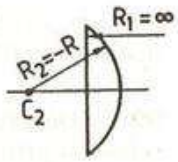
b. Lama cu fețe plan-paralele apropie obiectul de lentilă cu $d=e\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$ cm.

Această imagine virtuală, joacă rol de obiect real pentru lentilă, fiind situat în fața lentilei la $x_1'=-9$ cm. Astfel imaginea se formează la $x_2'=\frac{fx_1'}{f+x_1'}=72$ cm în spatele lentilei și este reală. Ecranul trebuie depărtat cu $x_2'-x_2=32$ cm de lentilă pentru a prinde imaginea pe acesta.

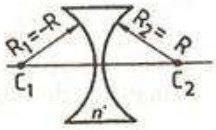
c. Dacă în planul focal imagine al lentilei se află un mediu optic transparent, razele de lumină se refractă prin acest mediu și imaginea reală se va forma mai departe ca în figură. Lentila convergentă formează o imagine reală $A'B'$ la x_2=40 cm față de ea în mediul cu indicele de refracție n. Imaginea finală se formează, pe baza legii refracției, în $A''B''$. Folosind principiul reversibilității razelor de lumină, putem considera $A''B''$ obiect real și $A'B'$ imaginea sa virtuală, fiind situată față de suprafața de separație a mediului la $x_1'=\frac{x_2'}{n}$. Cum $x_1'=x_2-f=32$ cm atunci $x_2'=n\cdot x_1'=51{,}2$ cm. Imaginea finală se formează față de lentilă în spatele acesteia la distanța $D=f+x_2'=59{,}2$ cm și este reală.



34.a. Aflăm raza feței convexe, utilizând formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. Conform convenției de semne, $R_1\to\infty$ și $R_2=-|R|\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{n-1}{|R|}\Rightarrow|R|=f(n-1)=30$ cm.



b. Lipind cele două lentile plan-convexe și umplând spațiul dintre cele două lentile cu un lichid cu indicele de refracție n' se formează o a treia lentilă biconcavă lipită de celelalte două. Cum $\frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n'-1)}{|R|}\Rightarrow\frac{1}{f'}=-\frac{2(n'-1)}{f(n-1)}$, deoarece conform convenției de semne $R_1=-|R|$ și $R_2=|R|$. Sistemul este format din trei lentile acolate. Pentru lentile alipite convergența este:



$$C=C_1+C_2+C_3\Rightarrow\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{f}+\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}-\frac{2}{f}=\frac{f-2F}{Ff}\Rightarrow$$

$$\frac{f-2F}{Ff}=-\frac{2(n'-1)}{f(n-1)}\Rightarrow n'=1-\frac{(n-1)(f-2F)}{2F}=1{,}4.$$

c. Deoarece imaginea obținută cu ajutorul lentilei echivalente este reală și de două ori mai mare decât obiectul, atunci β=−2. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și din formula

lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}\Rightarrow x_1=\frac{F(1-\beta)}{\beta}=-2{,}43$ m

35.a. Din datele problemei $x_1=-20$ cm și x_2=60 cm. Pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$, se obține distanța focală a sistemului echivalent format din cele trei lentile alipite: $F=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}$=15 cm

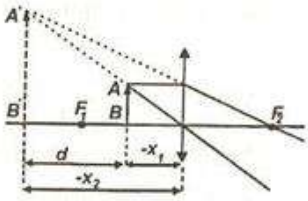
b. Din $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\frac{x_2y_1}{x_1}=-18$ cm

c. Convergența sistemului este $C=C_1+C_2+C_3=\frac{2}{f}+\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{f-2F}{Ff}$.

Dar pe baza formulelor convergenței: $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}$ și $\frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n'-1)}{|R|}$. Prin împărțirea relațiilor se obține:

$\frac{f'}{f}=-\frac{n-1}{n'-1}\Rightarrow n'=1-\frac{f(n-1)}{f'}\Rightarrow n'=1-\frac{(n-1)(f-2F)}{F}=1{,}33\Rightarrow$ lichidul este apă.

36.a. Deoarece imaginea este virtuală și mai mare decât obiectul înseamnă că lentila utilizată este convergentă. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{y_2}{y_1}=2$ și $\beta=\frac{x_2}{x_1}$. Din geometrie $d-x_1=-x_2\Rightarrow x_1=\frac{d}{1-\beta}=-50$ cm, iar $x_2=\frac{\beta d}{1-\beta}$. Utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$, aflăm distanța focală a lentilei $\frac{1}{f}=\frac{1-\beta}{\beta\cdot d}-\frac{1-\beta}{d}=\frac{(1-\beta)^2}{\beta\cdot d}\Rightarrow f=\frac{\beta\cdot d}{(1-\beta)^2}=100$ cm.



b. Utilizăm formulele convergenței $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$.

Introducând lentila într-un mediu optic cu indicele de refracție n' se modifică distanța focală a lentilei, astfel că:

$\frac{1}{f'}=(\frac{n}{n'}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow\frac{f'}{f}=\frac{n-1}{\frac{n}{n'}-1}\Rightarrow n'=\frac{n\cdot f'}{(n-1)f+f'}$. Cum $f'=2f\Rightarrow n'=1{,}2$

c. Deoarece imaginea devine virtuală și de două ori mai mică decât obiectul, $\beta'=\frac{1}{2}$ și lentila trebuie să fie divergentă. Din $\beta'=\frac{x_2'}{x_1}$ și utilizând formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$ aflăm distanța focală F a lentilei echivalente $F=\frac{\beta' x_1}{1-\beta'}=-50$ cm. Cum în cazul lentilelor alipite $C=C_1+C_2\Rightarrow\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$

obținem $f' = \frac{Ff}{f-F} = -33{,}33$ cm. Lentila lipită de lentila convergentă este divergentă, deoarece $f' < 0$.

37.a. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2}$ =30 cm. Convergența primei lentile este $C_1 = 1/f_1 \approx 3{,}33$ m^{-1}

b. Aflăm distanța focală a sistemului echivalent $F = \frac{x'_2 x_1}{x_1 - x'_2}$ =40 cm. Pentru un sistem format din două lentile lipite $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$, astfel distanța focală a celei de a doua lentile este $f_2 = \frac{Ff_1}{f_1 - F} = -120$ cm

c. Din $\beta = \frac{h'}{h} = \frac{x'_2}{x_1}$ obținem înălțimea imaginii formate de sistemul celor două lentile alipite $|h'| = \frac{\beta \cdot x_1}{x'_2} = 4{,}8$ cm

38.a. Deoarece imaginea este virtuală ea este și dreaptă, astfel că β=5. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ și din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ obținem distanța focală a lentilei $f = \frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta}$ =12,5 cm

b. Convergența lentilei este $C = 1/f$=8 dioptrii

c. Aflăm distanța focală a sistemului echivalent de lentile din $\frac{1}{F} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1}$, astfel că $F = \frac{x_1 x'_2}{x_1 - x'_2}$ =8 cm și convergența sistemului echivalent este $C_S = 1/F$=12,5 dioptrii. Deoarece în cazul lentilelor lipite $C_S = C + C'$ obținem convergența celei de-a doua lentile este $C' = C_S - C$ =4,5 dioptrii

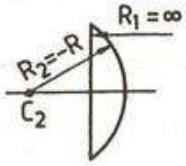
39.a. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a primei lentilei $f_1 = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2}$ =12 cm

b. Distanța focală a sistemului format din cele două lentile este $F = \frac{x_1 x'_2}{x_1 - x'_2} \Rightarrow$ F=−60 cm, deoarece $x'_2 = -30$ cm pentru că imaginea este virtuală

c. Deoarece în cazul lentilelor acolate $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ obținem distanța focală a lentilei a doua, astfel că $f_2 = \frac{Ff_1}{f_1 - F} = -10$ cm. Convergența celei de-a doua lentile este $C_2 = 1/f_2$=−10 m^{-1}.

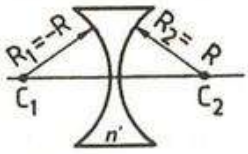
d. Din $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}$ şi $\beta_s = \frac{x'_2}{x_1} = \frac{y'_2}{y_1} \Rightarrow y'_2 = \frac{x'_2 y_1}{x_1}$ raportul dintre înălţimea imaginii formate de prima lentilă şi înălţimea imaginii formate de sistemul de lentile este $\frac{y_2}{y'_2} = \frac{x_2}{x'_2} = -0{,}5$

40.a. Se formează un sistem de 6 lentile acolate. Lentilele 1, 2, 3 şi 4 sunt plan-convexe şi identice, iar lentilele 5 şi 6 biconcave sunt şi ele identice. Convergenţa sistemului echivalent: $C_e = 4C_1 + 2C_5$. Dar



$C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{(n-1)}{|R|}$, deoarece $R_1 \to \infty$ şi $R_2 = -|R|$, conform convenţiei de semne pentru lentila plan-convexă.

şi $C_5 = (n'-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{-2(n'-1)}{|R|}$, deoarece $R_1 = -|R|$ şi $R_2 = |R|$, conform convenţiei de semne pentru lentila biconcavă.



Pentru sistemul echivalent: $C_e = \frac{4(n-1)}{|R|} - \frac{4(n'-1)}{|R|} = \frac{4(n-n')}{|R|}$.

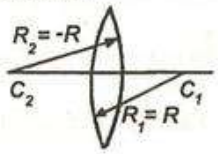
Cum $C_1 = \frac{1}{f} = \frac{n-1}{|R|} \Rightarrow |R| = f(n-1) \Rightarrow C_e = \frac{4(n-n')}{f(n-1)} = 1{,}6\ \text{m}^{-1}$

b. Deoarece raza de lumină cade pe sistem sub un unghi de incidenţă şi iese paralel cu ea însăşi, înseamnă că întreg sistemul reprezintă o lamă cu feţe plan – paralele. Din această cauză mediul optic trebuie să fie omogen şi deci lichidul care umple spaţiul dintre lentile trebuie să aibă acelaşi indice de refracţie cu cel al lentilei, astfel că $n' = n = 1{,}5$

c. În lipsa lichidului transparent sistemul este format din patru lentile lipite, astfel că $C'_e = 4C_1 = 4/f = 8$ dioptrii

41.a. Distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D=4f$, astfel că distanţa focală a lentilei este $f=D/4=10$ cm. Din formulele convergenţei:

$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f}$, deoarece $R_1 = -R_2 = |R|$



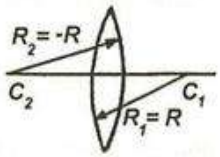
obţinem $|R| = 2f(n-1) = 10$ cm

b. Prin introducerea lentilei în apă se modifică distanţa focală a ei, astfel că $C' = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2}{|R|}\left(\frac{n}{n_a} - 1\right) = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{f n_a (n-1)}{n - n_a} = 40$ cm.

Distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D' = 4f' = 160$ cm

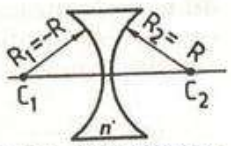
c. Prin alipirea lentilelor obţinem o lentilă cu distanţa focală F, astfel că $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 6$ cm. Imaginea se formează faţă de sistem la distanţa $x_2 = \frac{F x_1}{F + x_1} = 7{,}5$ cm, iar faţă de obiect la $d = -x_1 + x_2 = 37{,}5$ cm

42.a. Aflăm distanţa focală a lentilei biconvexe simetrice.



Deoarece $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f_1}$ pentru că $R_1 = |R|$

și $R_2 = -|R|$, obținem $f_1 = \frac{|R|}{2(n-1)}$=20 cm. Calculăm distanța focală a lentilei biconcave simetrice din apă formată între fețele convexe aflate în contact ale celor două lentile biconveve. Convergența acestei lentile este $C_2 = (n_a - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{2(n_a - 1)}{|R|} = \frac{1}{f_2}$, deoarece $R_2 = -R_1 = |R|$.



Obținem $f_2 = -\frac{|R|}{2(n_a - 1)} = -30$ cm.

Prin lipirea celor trei lentile se obține un sistem echivalent cu convergența $C_s = 2C_1 + C_2 \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow F = \frac{f_1 f_2}{2f_2 + f_1}$=15 cm

b. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{F}$ obținem distanța la care se formează imaginea față de lentilă $x_2 = \frac{Fx_1}{F + x_1}$=24 cm, astfel distanța dintre obiect și imaginea acestuia prin sistem este $d=-x_1+x_2$=64 cm

c. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = -6$ cm, deoarece imagimea formată de sistemul echivalent este reală și răsturnată

d. Dacă întregul sistem se introduce în apă se modifică distanța focală a acestuia, astfel că sistemul este echivalent cu cele două lentile biconvexe lipite. Distanța focală a unei lentile biconvexe introdusă în apă este $C_a = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n - n_a)}{n_a |R|} = \frac{1}{f_a} \Rightarrow f_a = \frac{n_a |R|}{2(n - n_a)}$=80 cm.

Convergența sistemului de lentile este $C' = 2C_a \Rightarrow F' = f_a/2$=40 cm.

Deoarece $x_1 = -40$ cm imaginea se formează la infinit deoarece $x_2 = \frac{F' x_1}{F' + x_1} \to \infty$

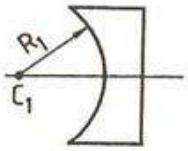
43.a. Deoarece imaginea este reală, de două ori mai mică decât obiectul atunci β=-1/2. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a primei lentile $f_1 = \frac{x_2}{1 - \beta}$=30 cm

b. Deoarece înălțimea imaginii obiectului este cu 20% mai mică decât înălțimea obiectului atunci β'=-0,8. Obiectul se află față de lentilă în punctul de coordonată $x_1 = x_2/\beta = -90$ cm. Convergența sistemului format din cele două lentile alipite este $C' = \frac{1}{f'} = \frac{1 - \beta'}{\beta' x_1}$=2,5 dioptrii

c. Convergența sistemului de lentile este $C' = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1 - \beta'}{\beta' x_1} - \frac{1 - \beta}{\beta x_1} \Rightarrow$ distanța focală a lentilei a doua este $f_2 = \frac{\beta\beta' x_1}{\beta - \beta'}$=120 cm

d. Înălțimea imaginii date de sistemul de lentile alipite este $h_i = |\beta| h = 8$ mm

44.a. Deoarece $R_1 = -|R|$ și $R_2 \to \infty$, distanța focală a lentilei este



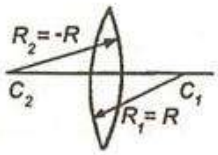
$$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{n-1}{|R|} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -\frac{|R|}{n-1} = -20 \text{ cm}.$$

Pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f'}$ imaginea se formează la $x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = -10$ cm, deci este o imagine virtuală. Mărimea imaginii este $y_2 = \beta y_1 = \frac{fy_1}{f + x_1} = 1$ cm.

b. Prin alăturarea celei de-a doua lentile cu fețele plane în contact se formează o lentilă echivalentă cu convergența $C' = 2C$, astfel că distanța focală a lentilei echivalente este $f' = f/2 = -10$ cm. Imaginea se formează la $x'_2 = \frac{f'x'_1}{f' + x'_1} = -\frac{20}{3}$ cm, deci este tot o imagine virtuală.

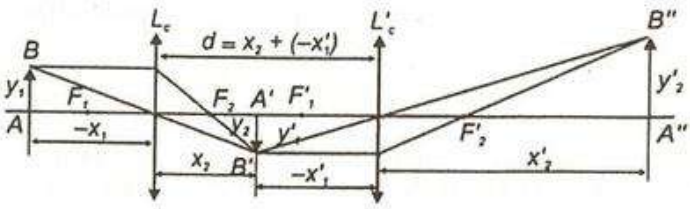
Mărimea imaginii este $y'_2 = \beta y_1 = \frac{f'y_1}{f' + x_1} \approx 0{,}666$ cm

c. Dacă între cele două lentile alipite cu fețele curbe în contact se umple spațiul dintre lentile cu apă se formează un sistem de trei lentile: două plan-concave și una biconvexă din apă. Convergența lentilei biconvexe este $C' = (n_a - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n_a - 1)}{|R|} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{|R|}{2(n_a - 1)} = 15$cm



Convergența sistemului de lentile este $C_S = 2C + C'$, iat distanța focală a sistemului echivalent devine $\frac{1}{F} = \frac{2}{f} + \frac{1}{f'} \Rightarrow F = \frac{f \cdot f'}{2f' + f} = -30$ cm

45.a. AB este obiect real pentru prima lentilă. Calculăm unde formează imaginea prima lentilă pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow$

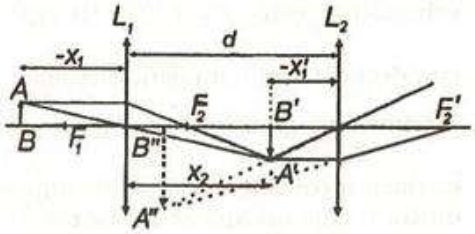


$x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 30$ cm. Cum mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} \Rightarrow$ $\beta = -0{,}5$, imaginea $A'B'$ este reală, răsturnată și de două ori mai mică decât obiectul. Această imagine reală este situată în fața lentilei a doua și prin urmare $A'B'$ joacă rol de obiect real pentru aceasta, astfel că a doua lentilă, va forma o imagine la $x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = 30$cm față de ea, deoarece din geometrie, $d = x_2 - x'_1$ și $x'_1 = x_2 - d = -10$ cm. Deoarece $x'_2 = 30$ cm, imaginea finală este reală și este situată în spatele lentilei a doua la 30 cm de aceasta.

b. Mărirea liniară transversală produsă de lentila a doua este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -3$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = 1{,}5$. Imaginea finală este dreaptă în raport cu obiectul inițial și de 1,5 ori mai mare decât acesta.

c. Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = 3$ cm, imaginea $A_f B_f$ are înălțimea de 3 cm.

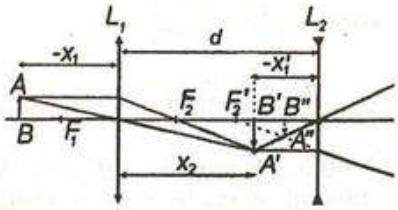
46.a. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ aflăm unde formează prima lentilă imaginea: $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 6{,}25$ cm. Deoarece prima lentilei formează imaginea obiectului la distanța de 6 cm în fața lentilei, atunci $d = x_2 - x_1' = 12{,}25$cm



b. Lentila a doua formează imaginea în punctul de coordonată $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = -15$ cm ca în figură.

c. Măririle liniare transversale produse de lentile sunt $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -\frac{1}{4}$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = 2{,}5$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -0{,}625$. Astfel înălțimea imaginii formate de sistemul de lentile este $y_f = |\beta|_s y_1 = 7{,}5$ cm

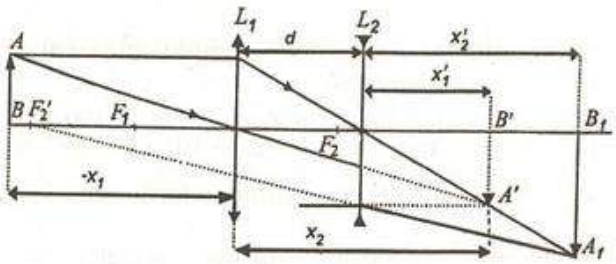
47.a. Deoarece imaginea formată de prima lentilă este reală, răsturnată și la fel de mare ca obiectul, atunci $\beta_1 = -1$. Astfel cum $\beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = -x_1 = 20$ cm și din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow -\frac{2}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = -\frac{x_1}{2} = 10$ cm



b. Imaginea formată de prima lentilă se află în fața celei de-a doua lentilă, astfel că $d = x_2 - x_1' \Rightarrow x_1' = x_2 - d = -10$ cm. Lentila a doua are distanța focală $f_2 = 1/C_2 = -10$ cm. Imaginea finală este virtuală și se formează în fața lentilei a doua în punctul de coordonată $x_2' = \frac{f_2 x_1'}{f_2 + x_1'} = -5$ cm

c. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2$. Măririle liniare transversale produse de lentile sunt $\beta_1 = -1$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = 0{,}5$, astfel că $\beta_s = -0{,}5$

48.a. Prima lentilă este convergentă şi are distanţa focală $f_1=1/C_1=25$ cm.
Pentru obiectul real aflat în faţa sa la $x_1=-30$ cm, lentila va forma o imagine reală la $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=150$ cm de ea.



b. Deoarece lentila a doua este divergentă şi are distanţa focală $f_2=1/C_2=-80$ cm, iar imaginea reală $A'B'$ a primei lentile se formează în spatele lentilei divergente la $x_1'=x_2-d=30$ cm. Această imagine $A'B'$ joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă. Lentila divergentă va forma în final o imagine la $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=48$ cm de ea, deoarece $x_2'>0$. Imaginea finală este reală şi se formează mai departe decât vechea imagine cu $x_2'-x_1'=18$ cm. Ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu 18 cm spre dreapta

c. Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-5$ şi $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=1{,}6$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-8$. Imaginea finală este răsturnată şi de opt ori mai mare decât obiectul Cum $\beta_s=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta_s\cdot y_1=1{,}6$ cm.
Înălţimea imaginii finale este 1,6 cm.

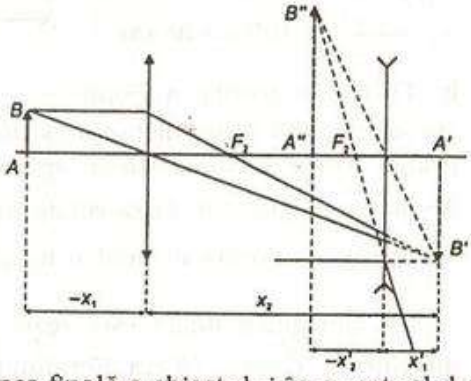
49.a. Prima lentilă este convergentă deoarece $C_1>0$, iar a doua este o lentilă divergentă, deoarece $C_2<0$. Pentru sistemul echivalent de lentile acolate obţinem $C=C_1+C_2=8$ m^{-1} iar $F=1/C=12{,}5$cm.

b. Utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$, aflăm unde formează lentila echivalentă imaginea obiectului, astfel că $x_2=\frac{F\cdot x_1}{F+x_1}=25$cm, deoarece $x_1=-25$ cm. Imaginea este reală deoarece se formează în spatele lentilei echivalente.

c. Calculăm unde formează lentila convergentă imaginea obiectului. Cum $f_1=1/C_1=10$ cm obţinem $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=\frac{50}{3}$cm, deoarece $x_1=-25$ cm. Această imagine este obiect pentru cea de-a doua lentilă. Cum $x_1'=x_2-d=10$ cm, $A'B'$ este obiect virtual pentru lentila divergentă, deoarece se află în spatele acestaia ca în figura de la problema precedentă. Lentila divergentă cu distanţa focală $f_2=1/C_2=-50$ cm, va forma o imagine finală la $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=12{,}5$ cm de ea.
Imaginea finală este reală, deoarece se formează în spatele lentilei divergente.

50.a. Alipind cele două lentile obținem o nouă lentilă cu convergența $C = C_1 + C_2 = 0$ dioptrii.

b. Deoarece C_1=10 m^{-1} și C_2=−10 m^{-1} distanțele focale ale celor două lentile sunt: f_1=1/C_1=10 cm și f_2=1/C_2=−10 cm. Pe baza formulelor lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ aflăm unde formează imaginea obiectului prima lentilă: $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 20$ cm, deoarece x_1=−20 cm.

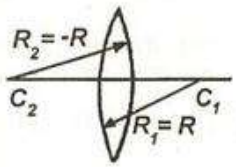


Lentila convergentă formează o imagine reală a obiectului, imagine care joacă rol de obiect pentru lentila divergentă. Cum $x_1' = x_2 - d = 15$ cm, înseamnă că $A'B'$ este obiect virtual pentru lentila divergentă, deoarece se află în spatele acesteia. Lentila divergentă formează imaginea finală a obiectului în punctual de coordonată $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = -30$ cm. Imaginea finală se formează în fața lentilei divergente la 30 cm de aceasta și este o imagine virtuală, conform figurii.

c. Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -1$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -2$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = 2$. Imaginea finală este dreaptă și de două ori mai mare decât obiectul. Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = 8$ cm, înălțimea imaginii finale este 8 cm.

51.a. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a lentilei L_1: $f_1 = \frac{x_1 x_2}{x_1 - x_2}$ =50 cm

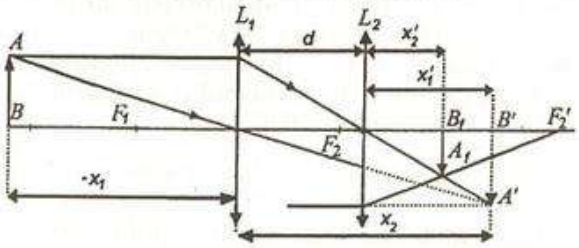
b. Deoarece $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f_1}$ pentru că $R_1 = |R|$ și $R_2 = -|R|$, obținem $|R| = 2(n-1)f_1$=45 cm



c. Imaginea reală formată de lentila convergentă este reală și situată în spatele lentilei divergente, astfel că joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă. Cum $x'_1 = x_2 - d = 25$ cm, din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_2}$ obținem coordonata imaginii dată de sistem, măsurată față de lentila L_2 $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} \approx -33{,}33$ cm (desen problema precedentă).

52.a. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului real pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=120$ cm. Imaginea reală formată de prima lentilă joacă rol de obiect pentru cea de-a doua lentilă.

Cum $x_1'=x_2-d=20$ cm, această imagine este obiect virtual pentru lentila a doua, deoarece $A'B'$ se formează în spatele lentilei a doua. Calculăm unde se formează imaginea finală cu ajutorul lentilei a doua:



$x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=15$ cm.

Imaginea finală este reală deoarece se formează în spatele lentilei L_2.

b. Calculăm măririle liniare transversale produse de cele două lentile: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-3$ și $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=0{,}75$ și prin urmare mărirea liniară transversală produsă de sistemul de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-2{,}25$. Imaginea finală este răsturnată față de obiectul inițial și de 2,25 ori mai mare decât obiectul.

c. Imaginea finală are mărimea $y_2=|\beta_s|y_1=13{,}5$ cm

53.a. Utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ și a măririi liniare transverale $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}$ obținem $x_1=\frac{f_1(1-\beta_1)}{\beta_1}$ și $x_2=f_1(1-\beta_1)$.

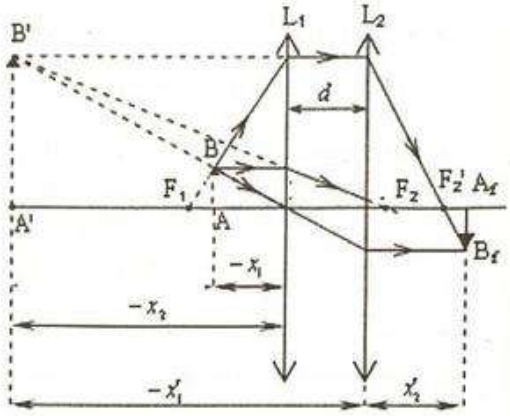
Cum $d=-x_1+x_2=\frac{f(1-\beta_1)^2}{\beta_1}\Rightarrow f_1=\frac{d\cdot\beta_1}{(1-\beta_1)^2}=36$ cm.

b. Imaginea formată de prima lentilă convergentă este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei și de aceea imaginea $A'B'$ este dreaptă și mai mare decât obiectul. Această imagine se formează față de a doua lentilă în fața acesteia și din această cauză joacă rol de obiect real pentru această lentilă.

Cum $x_2=f_1(1-\beta_1)=-72$ cm $\Rightarrow$

$x_1'=x_2-d=-96$ cm.

Aflăm unde se formează imaginea finală cu ajutorul celei de-a doua lentile: $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=32$ cm. Lentila a doua formează în final o imagine reală, situată în spatele ei la 32 cm de aceasta.



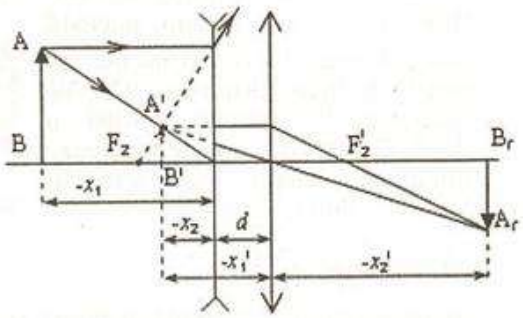
c. Mărirea produsă de a doua lentilă: $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=-\frac{1}{3}$, astfel că mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este: $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-1$. Imaginea finală

este la fel de mare ca obiectul, dar este răsturnată. Cum $y_2 - \beta_s \cdot y_1 = -10$ cm, imaginea finală are înălțimea de 10 cm.

54.a. Distanțele focale ale lentilelor sunt: $f_1 = 1/C_1 = -10$cm și $f_2 = 1/C_2 = 12{,}5$ cm

b. Aflăm unde formează lentila divergentă imaginea obiectului. Utilizăm formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = -7{,}5\,\text{cm}.$$



Imaginea formată de prima lentilă este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei ca în figură. Această imagine joacă rol de obiect real pentru lentila convergentă, deoarece $x_1' = x_2 - d = -15$ cm. Lentila convergentă formează imaginea finală la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 75$ cm de ea. Pelicula se așază la 75 cm de lentila convergentă.

c. Calculăm măririle liniare transversale ale celor două lentile: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = \frac{1}{4}$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -5$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1{,}25$. Imaginea finală este răsturnată și de 1,25 ori mai mare decât obiectul.

55.a. Aflăm coordonata punctului unde formează lentila divergentă imaginea obiectului utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$. Astfel că $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} \approx -26{,}66$ cm. Imaginea virtuală formată de lentila divergentă joacă rol de obiect real pentru lentila convergentă, astfel că $x_1' = x_2 - d = -66{,}66$ cm. Lentila convergentă formează imaginea la distanța $x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = 100$ cm de ea. Mersul razelor de lumină este redat în figura de la problema precedentă.

b. Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = \frac{1}{3}$ și $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = -\frac{3}{2}$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -0{,}5$.

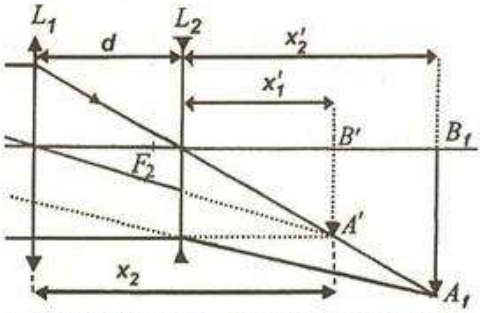
c. Convergența sistemului obținut prin alipirea lentilelor este $C_s = C_1 + C_2$, astfel că $C_S = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 0$

56.a. Deoarece imaginea se formează pe ecran, aceasta este reală și prin urmare $\beta_1 = -4$, deoarece imaginea este de patru ori mai mare decât obiectul. Utilizând

formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ și a măririi liniare transversale $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}$ aflăm distanța focală a primei lentile: $f_1=\frac{\beta_1\cdot x_1}{1-\beta_1}=\frac{x_2}{1-\beta}$.

Deoarece f_1=4 cm convergența lentilei este $C_1=1/f_1$=25 m^{-1}.

b. Din datele problemei $x_1'=\frac{x_2}{2}=10$ cm, astfel că imaginea reală formată de lentila convergentă se formează în spatele lentilei divergente jucând rolul de obiect virtual pentru aceasta. Deoarece ecranul trebuie depărtat pentru a se prinde imaginea de acesta, înseamnă că imaginea finală este reală. Din geometrie, $x_2'=d+\frac{x_2}{2}=30$ cm.



Distanța focală a lentilei a doua se află utilizând formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow f_2=\frac{x_1'\cdot x_2'}{x_1'-x_2'}=-15$ cm.

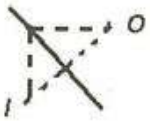
c. Mărirea liniară transversală formată de lentila divergentă este $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=3$.

Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-12$.

Cum $\beta_s=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta_s\cdot y_1=-12$ cm, imaginea finală este răsturnată și de 12 ori mai mare decât obiectul.

57.a. Distanța focală a primei lentile este $f_1=1/C_1$=20 cm. Această lentilă formează imaginea obiectului aflat în punctul de coordonată x_1=−25 cm la distanța $x_2=\frac{f_1x_1}{f_1+x_1}$=100 cm de ea

b. Această imagine se formează în spatele oglinzii plane la d=50 cm de aceasta și joacă rol de obiect virtual pentru oglindă. Datorită faptului că oglinda este înclinată cu unghiul α=45° față de axa optică principală a primei lentilei, aceasta va forma pentru obiectul virtual o imagine reală situată la 50 cm de oglindă sub axul optic ca în figură. Aceată imagine reală I se află în fața lentilei a doua. Această lentilă va forma în final o imagine reală situată la distanța $x'_2=\frac{f_2x'_1}{f_2+x'_1}$=150 cm de ea, deoarece $x'_1=-30$ cm



c. Datorită primei lentile $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-4$, iar datorită lentilei a doua $\beta_2=\frac{x'_2}{x'_1}=\frac{f_2}{f_2+x'_1}=-5$. Oglinda întoarce doar razele de lumină fără să modifice dimensiunile obiectului, astfel că mărirea liniară transversală a sistemului este $\beta_s=\beta_1\beta_2$=20.

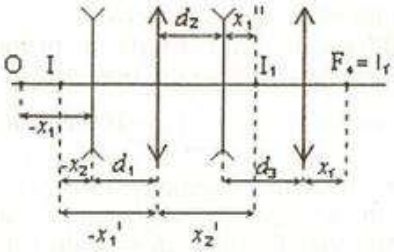
58.a. Deoarece imaginea obținută cu lentila convergentă este reală și de trei ori mai mare decât obiectul, atunci $\beta = -3$. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a lentilei convergente $f_1 = \frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta} = 3$ cm. Înlocuind lentila convergentă cu o lentilă divergentă obținem distanța focală a lentilei divergente $f_2 = \frac{\beta' \cdot x_1}{1-\beta'} = -2$ cm cu $\beta' = 1/3$.

b. Lentila convergentă formează imaginea obiectului la distanța $x_2 = \beta x_1 = 12$ cm de ea. Această imagine se formează în fața lentilei divergente, astfel că $x_1' = x_2 - d = -4$ cm. Lentila divergentă va forma imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -\frac{4}{3}$ cm

Mărirea liniară transversală formată de lentila divergentă este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{1}{3}$.

Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1$

c. Pentru ca lentila divergentă să formeze o imagine care se prinde pe un ecran, această imagine trebuie să fie reală. Acest lucru se întâmplă dacă obiectul este virtual și situat între lentilă și focarul obiect al acesteia, astfel că $x'_1 \in [0,2]$ cm. Pentru distanța $d = x_2 - x'_1$ dintre lentile obținem $d_{min} = x_2 + f_2 = 10$ cm și $d_{max} = x_2 = 12$ cm. Lentila divergentă de deplasează pe o distanță cuprinsă între 4 cm și 6 cm spre lentila convergentă.



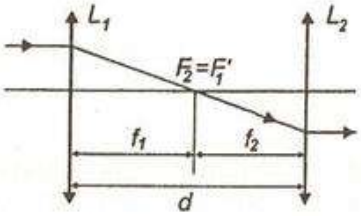
59.a. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului aflat în fața lentilei la $x_1 = -10$ cm de aceasta. Aplicăm formula lentilelor subțiri:

$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = -\frac{10}{3}$ cm. Imaginea este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei.

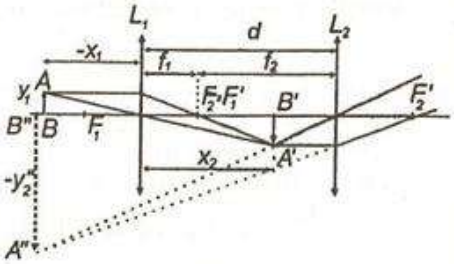
b. Această imagine I este obiect real pentru a doua lentilă convergentă, deoarece $x_1' = x_2 - d_1 = -10$ cm. A doua lentila convergentă va forma o imagine la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 10$ cm de ea, deci imaginea I_1 este reală, dar se formează în spatele lentilei a treia și deci joacă rol de obiect virtual pentru această lentilă.

c. Din geometrie, $x_1'' = x_2 - d_2 = 5$ cm și aflăm unde formează imaginea a treia lentila divergentă, pentru obiectul virtual I_1: $x_2'' = \frac{f_3 \cdot x_1''}{f_2 + x_1''} \to \infty$. Razele de lumină emerg paralel cu axul optic principal, după refracția prin lentila divergentă. Aceste raze cad pe a patra lentila convergentă și aceasta va forma imaginea finală reală în focarul ei principal imagine, adică la $x_f = f_4 = 5$ cm de ea și în spatele ei.

60.a. Un sistem afocal are proprietatea că o rază paralelă cu axul optic principal după refracția prin cele două lentile iese din sistem paralel cu axul optic principal ca în figură. Un astfel de sistem are proprietatea că distanța dintre lentile este suma distanțelor focale ale lentilelor componente: $d = f_1 + f_2$.



b. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2$. Aflăm măririle produse de fiecare din cele două lentile componente. Pentru prima lentilă: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1}$, deoarece conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1}$. Imaginea formată de prima lentilă este obiect pentru cea de-a doua lentilă. Din geometrie: $x_1' = x_2 - d$ și cum sistemul de lentile este afocal $d = f_1 + f_2 \Rightarrow x_1' = x_2 - f_1 - f_2$.

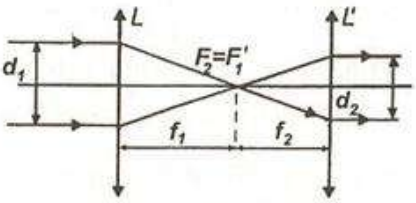


Lentila a doua formează în final o imagine la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'}$ față de ea și cu o mărire liniară transversală $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = \frac{f_2}{x_2 - f_1}$. Introducând x_2 în β_2, obținem $\beta_2 = -\frac{f_2(f_1 + x_1)}{f_1^2} \Rightarrow \beta_s = -\frac{f_2}{f_1}$. Observăm că mărirea sistemului afocal nu depinde de poziția obiectului în raport cu sistemul afocal, dar depinde de distanțele focale ale lentilelor componente ale acestuia.

c. Prin particulerizare obținem d=70 cm și β=−2,5.

61.a. Cum sistemul este afocal, pe baza proprietăților sistemului afocal: $d = f_1 + f_2$ și cum mărirea liniară transversală a sistemului afocal este: $\beta = -\frac{f_2}{f_1}$ obținem distanțele focale ale celor două lentile $f_1 = \frac{d}{1-\beta}$=30 cm și $f_2 = -\frac{\beta \cdot d}{1-\beta}$=10 cm

b. Pe baza mersului razelor de lumină, utilizând asemănarea triunghiurilor formate aflăm diametrul fasciculului de lumină emergent: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1} \Rightarrow d_2 = \frac{f_2}{f_1} d_1 = 1$ cm.



c. Când acolăm cele două lentile se obține o singură lentilă cu convergența: $C = C_1 + C_2 \Rightarrow C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = -\frac{(\beta-1)^2}{d \cdot \beta} \approx 13{,}33$ dioptrii

62.a Deoarece obiectul se află la o distanță infinit de mare în fața primei lentile imaginea lui se va forma pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ în focarul imagine al primei lentile, deoarece $x_1 \to -\infty$. Această imagine punctiformă se află în fața lentilei divergente în punctul de coordonată

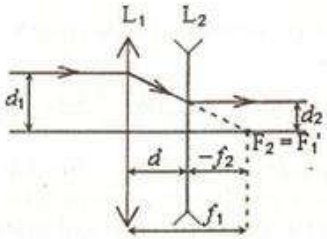
$x'_1 = f_1 - d = -3$ cm. Lentila convergentă va forma imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -12$ cm

b. Dacă din situația inițială lentila a doua se îndepărtează cu 1 cm de prima lentilă atunci distanța dintre ele devine d=24 cm. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$.

Obținem $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1}$=40 cm. Deoarece $x'_1 = x_2 - d = 16$ cm înseamnă că imaginea formată de prima lentilă se află în spatele celei de-a doua lentilă și joacă rol de obiect virtual pentru aceasta. Lentila a doua formează imaginea în punctul $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = 3{,}2$ cm. Imaginea finală este reală deoarece se formează în spatele lentilei a doua.

c. Deoarece observăm că $d = f_1 + f_2$ înseamnă că sistemul de lentile este afocal. Astfel mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta = -\frac{f_2}{f_1}$=-0,2.

63.a. Deoarece un fascicul paralel cu axul optic principal părăsește sistemul tot paralel cu axul optic principal, sistemul de lentile este afocal. Razele de lumină se propagă ca în figură. Astfel: $d = f_1 + f_2$=-10 cm



b. Deoarece mărirea liniară transversală a sistemului afocal este $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow$ $y_2 = -\frac{f_2 y_1}{f_1} = 3$ cm. Imaginea finală obținută se formează de aceeași parte cu obiectul și este de trei ori mai mică decât obiectul.

c. Când acolăm cele două lentile se obține o singură lentilă cu convergența: $C = C_1 + C_2 \Rightarrow C = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} \approx -13{,}33$ m^{-1}

64.a. Deoarece sistemul este afocal $d = f_1 + f_2 \Rightarrow f_2 = d - f_1 = -10$ cm.

b. Mărirea liniară transversală a sistemului afocal este $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{3}$.

c. Când sistemul de lentile se introduce în apă se schimbă distanțele focale ale lentilelor. Pe baza formulelor convergenței obținem convergențele lentilelor în apă și respectiv în aer:

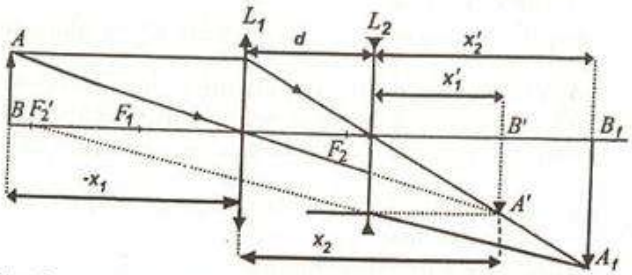
$$C_{apa} = \frac{1}{f_{apă}} = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \text{ și } C_{aer} = \frac{1}{f_{aer}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Prin împărțirea celor două relații, obținem distanța focală a primei lentile la introducerea în apă: $\frac{f_{1apă}}{f_{1aer}} = \frac{(n-1)n_a}{(n-n_a)} \Rightarrow f_{1apă} = \frac{f_{1aer}(n-1)n_a}{n-n_a}$. Analog distanța focală a celei de-a doua lentilă la introducerea în apă devine: $f_{2apă} = \frac{f_{2aer}(n-1)n_a}{n-n_a}$.

Cum sistemul de lentile trebuie să rămână afocal şi în apă, distanţa dintre lentile devine: $d_{apă} = f_{1apă} + f_{2apă} = \frac{(n-1)n_a}{n-n_a}(f_1 + f_2) = 80$ cm.

65.a. Aflăm unde formează lentila convergentă imaginea obiectului real pe baza formulei $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 120$ cm, deoarece $x_1 = -40$ cm $\Rightarrow$ ecranul se aşază în spatele lentilei convergente la 120 cm de aceasta.

b. Imaginea obţinută cu ajutorul lentilei convergente, se formează în spatele lentilei divergente şi joacă rol de obiect virtual pentru aceasta, deoarece $x_1' = x_2 - d_1 = 10$ cm ca în figură. Aflăm unde formează lentila divergentă imaginea obiectului virtual cu ajutorul formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 20$ cm.



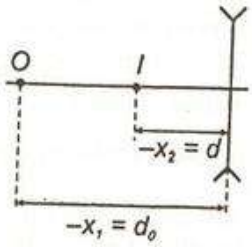
Deoarece $x_2' > 0$, înseamnă că lentila divergentă formează o imagine reală situată mai departe de ea. Prin urmare ecranul se va depărta de lentila divergentă cu $\Delta x = x_2' - x_1' = 10$ cm, pentu a se putea prinde imaginea finală formată de sistemul de lentile pe el.

c. Dacă se formează un sistem afocal cu cele două lentile, atunci $d = f_1 + f_2 = 10$ cm reprezintă distanţa dintre cele două lentile.

Mărirea sistemului afocal este $\beta_1 = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{3}$.

1.3. Instrumente optice

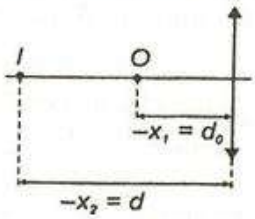
1. Ochiul uman se comportă ca o lentilă convergentă ce formează pentru obiecte reale imagini reale pe retină. Lentila aşezată în faţa ochiului şi lipită de acesta (lentilă de contact) formează pentru un obiect aşezat la distanţa optimă de citire o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul. Cum $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d = -20$ cm, utilizând formula lentilelor subţiri obţinem:



$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \Rightarrow f = \frac{d_0 d}{d - d_0} = -100$ cm.

Prin urmare vederea miopului se corectează cu o lentilă divergentă cu convergenţa $C = -1$ dioptrie.

2. Lentila aşezată în faţa ochiului şi lipită de acesta (lentilă de contact) formează pentru un obiect aşezat la distanţa optimă de citire o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul. Pentru hipermetrop $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d = -30$ cm şi din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}$ obţinem distanţa focală a lentilei:



$f = \frac{d_0 d}{d - d_0} = 150$ cm. Vederea la apropiere a hipermetropului se corectează cu o

lentilă convergentă cu convergența $C = 1/f = 0{,}66$ dioptrii.

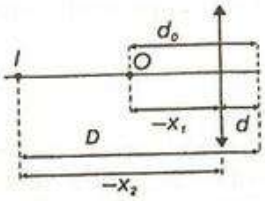
3. Punctul remotum reprezintă distanța cea mai mare la care vede ochiul. Pentru a putea distinge obiectele aflate la infinit se utilizează o lentilă de contact care să formeze pentru obiectele aflate la infinit o imagine virtuală situată în punctul remotum. Astfel $x_1 \to -\infty$ și $x_2 = -d$ și din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{d}$ obținem $f = -d = -1$ m. Corecția vederii la distanță se face cu o lentilă divergentă cu convergența $C=-1$ dioptrie.

4. Corecția vederii prezbitului la apropiere se face cu ajutorul unei lentile mici aflată în partea de jos a ochelarului. Calculăm convergența acestei lentile, ținând cont că $x_1 = -d_0 = -25$ cm și $x_2 = -d_1 = -40$ cm, astfel că

$C_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1} = \frac{d_1 - d_0}{d_0 d_1} = 1{,}5$ dioptrii. Lentila care corectează vederea la apropiere este convergentă.

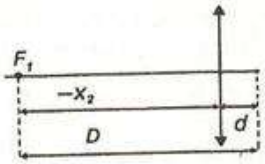
Corecția vederii prezbitului la distanță se face cu ajutorul unei lentile mari aflate în partea superioară a ochelarului. Ținând cont că $x_1 \to -\infty$ pentru că obiectul se află la infinit și $x_2 = -d_2 = -50$ cm pentru că imaginea virtuală se formează în punctul remotum, obținem $C_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_2} = -2$ dioptrii. Lentila care corectează vederea la depărtare este divergentă.

5. Persoana distinge obiectele aflate între 40 cm și punctul de infinit. Calculăm distanța minimă la care vede persoana când utilizează ochelari cu distanța focală $f=1/C=100$ cm.



Lentila convergentă formează pentru un obiect așezat la d_0 de ochi, o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul, astfel că $d_0 = -x_1 + d$. Dar cum $D = -x_2 + d \Rightarrow x_2 = d - D = -39$ cm, astfel că pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f \cdot x_2}{f - x_2} = -28{,}05$ cm. Obținem d_0=29,05 cm. Aflăm distanța maximă la care vede ochiul când se utilizează lentila. Pentru obiectele aflate la infinit, lentila formează o imagine virtuală în focarul ei obiect, astfel că din $x_1 \to -\infty \Rightarrow x_2 = -f = -100$ cm. Astfel $D = -x_2 + d = 101$ cm reprezintă distanța maximă la care se pot distinge obiectele cu ajutorul lentilei. Limitele vederii distincte sunt 29,05 cm și 101 cm.

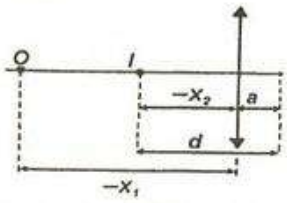
6. Calculăm distanța focală a lentilei ce corectează vederea la distanță a celui de-al doilea miop. Conform relației $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$, pentru obiectul aflat la infinit, imaginea se formează în fața lentilei la $x_2 = -d_2 \Rightarrow f = x_2 = -4$ m. Calculăm distanța până la care vede primul miop utilizând ochelarii celuilalt miop



pe baza formulei: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}$. Cum această lentilă formează pentru un obiect o imagine în punctul în care vede ochiul şi deci $x_2'=-d_1=-2$ m atunci $x_1'=\frac{f\cdot x_2'}{f-x_2'}=-4$ m. Distanţa până la care vede primul miop cu ochelarii celui de-al doilea miop este de 4 m, deci poate vedea la televizor!

7. Calculăm distanţa focală a lentilelor care permit omului să vadă la distanţă. Pentru obiectele aflate la infinit, lentila va forma o imagine virtuală în puntul remotum. Astfel $x_1\to-\infty$ şi $x_2=-D$ şi pr baza formulei lentilelor subţiri $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$ obţinem $f=x_2=-D=-3$ m. Aflăm distanţa minimă a vederii clare, când miopul utilizează lentilele de distanţă. Cum $x_2'=-d=-20$ cm obţinem $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}\Rightarrow-\frac{1}{D}=-\frac{1}{d}-\frac{1}{x_1'}\Rightarrow x_1'=\frac{D\cdot d}{d-D}\approx21{,}4$ cm. Distanţa minimă a vederii clare este 21,4 cm.

8. Lentila utilizată are distanţa focală $f=1/C=2$ cm. Aflăm limita minimă a vederii clare. Din desen $-x_2+a=d\Rightarrow x_2=a-d=-8$ cm, deoarece imaginea se formează în punctul proximum. Pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f\cdot x_2}{f-x_2}=-1{,}6$ cm. Obiectul se află faţă de ochi la distanţa $d_{min}=-x_1+a\Rightarrow d_{min}=3{,}6$ cm.

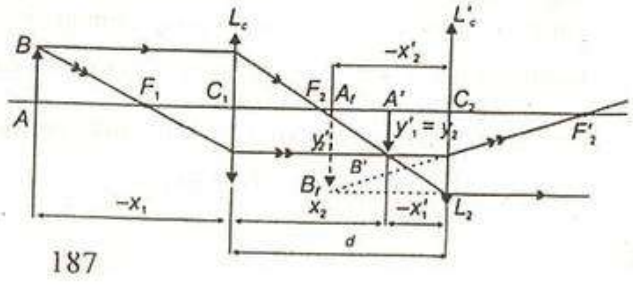


Aflăm limita maximă a vederii clare. Cum imaginea trebuie să se formeze în punctul remotum $-x_2'+a=D\Rightarrow x_2'=a-D=-198$ cm, obiectul se află faţă de lentilă la $x_1'=\frac{f\cdot x_2'}{f-x_2'}=-1{,}98$ cm, astfel că distanţa maximă la care se află obiectul faţă de ochi este $D_{max}=-x_1'+a=3{,}98$ cm. Prin urmare observatorul poate să deplaseze obiectul faţă de lentilă fără a înceta să vadă clar linia pe distanţa $D_{max}-d_{min}=3{,}8$ mm.

9. Deoarece razele de lumină care vin de la Soare şi care cad pe lentilă formează un fascicul paralel de lumină, după ce traversează lentila se strâng în focarul imagine. Pentru ca hârtia să se carbonizeze, aceasta trebuie aşezată în planul focal imagine al lentilei convergente.

Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=\beta\cdot x_1=-d_0\Rightarrow x_1=-\frac{d_0}{\beta}$. Din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$ obţinem $f=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}=\frac{d_0}{\beta-1}=5$ cm. Hârtia se aşază faţă de lentilă la 5 cm în spatele lentilei, în planul focal imagine al lentilei.

10. Aflăm unde formează obiectivul imaginea obiectului din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=6$m, deoarece $x_1=-3$ mm. Imaginea formată de obiectiv este reală.

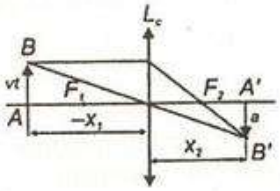


Această imagine joacă rol de obiect pentru lentila ocular, care formează o imagine virtuală la distanța optimă de citire. Această imagine virtuală este preluată de ochi.

Deoarece $x_2' = -25\,\text{cm}$, din $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_1' = \frac{x_2' \cdot f_2}{f_2 - x_2'} \approx -2{,}678$ cm. Distanța dintre cele două lentile este: $d = x_2 - x_1' \approx 32{,}78$ mm.

11. Aparatul de fotografiat este format din mai multe lentile, astfel că sistemul este echivalent cu o lentilă convergentă. Aflăm unde trebuie pusă pelicula fotografică în primul caz, pentru a se prinde imaginea pe peliculă. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1}$. Mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f}{f + x_1}$. Cum $\beta_1 = \frac{h_1}{o} \Rightarrow \frac{f}{f + x_1} = \frac{h_1}{o}$ (1), unde o este înălțimea obiectului și analog $\beta_2 = \frac{f}{f + x_1'} = \frac{h_2}{o}$ (2). Prin împărțirea relațiilor (1) la (2), obținem $\frac{f + x_1'}{f + x_1} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{f - d_2}{f - d_1} = \frac{h_1}{h_2}$ deoarece $x_1 = -d_1 = 20$ m și $x_1' = -d_2 = -15$ m.

Obținem distanța focală $f = \frac{d_2 h_2 - d_1 h_1}{h_2 - h_1} = 10$ m



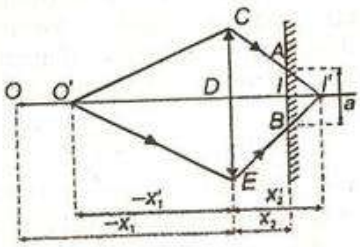
12. Deoarece $x_1 = -5$ m, imaginea pe peliculă a patinatorului dacă nu s-ar deplasa s-ar forma față de lentilă la distanța $x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1} = 10{,}2$ cm.

Pe baza asemănării triunghiurilor din figura alăturată obținem: $-\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{v \cdot t} \Rightarrow t = -\frac{a(f + x_1)}{v \cdot f} \approx 2$ ms.

13. Deoarece cunoaștem $x_1 = -15$ cm și $x_2 = 20$ cm aflăm distanța focală a sistemului de lentile: $\frac{1}{F} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \Rightarrow F = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2} = \frac{60}{7}$ cm. Când acolăm două lentile, convergența sistemului se calculează cu formula $C = C_1 + C_2 \Rightarrow$ $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_2 = \frac{F f_1}{f_1 - F} = 30$ cm. Astfel lentila alipită este convergentă.

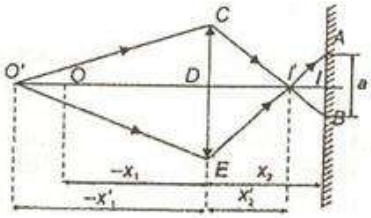
14.a. Aflăm unde trebuie să așezăm pelicula fotografică când obiectul O se află la $x_1 = -4$ m. Din formula lentilelor subțiri obținem $x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1} \approx 26{,}66$cm.

Dacă obiectul O' se află față de aparatul de fotografiat la $x_1' = -3$ m, atunci imaginea se formează în I' la $x_2' = \frac{f \cdot x_1'}{f + x_1'} \approx 27{,}27$ cm. Pe baza asemănării triunghiurilor CEI' cu ABI' obținem: $\frac{x'_2}{x_2' - x_2} = \frac{D}{d} \Rightarrow D = \frac{x'_2 d}{x_2' - x_2} \approx 4{,}47$ mm.



b. Dacă obiectul O' se află față de aparatul de fotografiat la $x_1' = -6$ m, atunci imaginea se formează în I' la $x_2' = \frac{f \cdot x_1'}{f + x_1'} \approx 26{,}09$ cm. Pe baza asemănării triunghiurilor CEI' cu ABI' obținem:

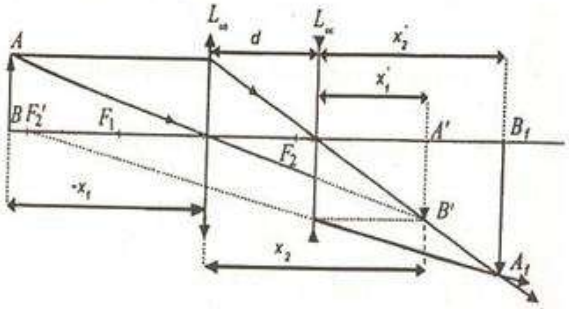
$$\frac{x_2'}{x_2 - x_2'} = \frac{D}{d} \Rightarrow D = \frac{x_2' d}{x_2 - x_2'} \approx 4{,}57 \text{ mm}$$



15. Aflăm unde trebuie așezat diapozitivul față de lentila de proiecție. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f \cdot x_2}{f - x_2} = -21$ cm. Cum mărirea aparatului de proiecție este $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f - x_2}{f} = -19$. Dimensiunile laturilor imaginii pe ecranul de proiecție sunt $y_2 = \beta \cdot y_1 = 57$ cm și $y_2' = \beta \cdot y_1' = 76$ cm.

16.a. Calculăm unde formează obiectivul imaginea obiectului real.

Cum $x_1 = -30\text{cm} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 7{,}5\text{cm}$.

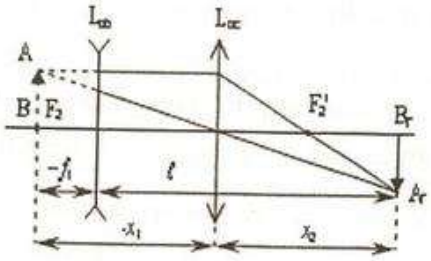


Imaginea obținută cu ajutorul lentilei obiectiv este reală. Această imagine joacă rol de obiect virtual pentru lentila ocular divergentă, deoarece $x_1' = d - x_2 = 6$ cm, imaginea formată de obiectiv aflându-se în spatele lentilei ocular. Aflăm unde formează ocularul imaginea finală, astfel că $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 15\text{cm}$. Imaginea finală este reală și se prinde pe pelicula fotografică.

b. Mărirea produsă de obiectiv este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -\frac{1}{4}$, iar cea produsă de ocular: $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = \frac{5}{2}$. Mărirea teleobiectivului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = -0{,}625$. Semnul minus arată că imaginea finală este răsturnată ca în figură.

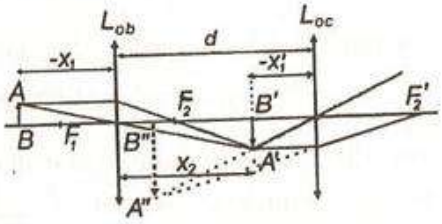
c. Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow |y_2| = |\beta_s| y_1 = 6{,}25$ cm

17. Deoarece obiectul se află la infinit $x_1 \to -\infty$ și prin urmare cum $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ obținem $x_2 = f_1 = -5$ cm, adică lentila obiectiv formează o imagine virtuală, în fața ei și în focarul principal imagine. Această imagine fiind situată în fața lentilei ocular, joacă rol de obiect real pentru aceasta. Pe baza relației între segmente: $-x_1 + x_2 = -f_1 + \ell \Rightarrow x_1 = f_1 - \ell + x_2$ și pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2}$ obținem $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2 - 50} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_2^2 - 50x_2 + 400 = 0$. Soluțiile ecuației sunt x_2=10 cm și x_2=40 cm. Pentru a putea forma imagini clare ale obiectului pe



peliculă, aceasta se poate aşeza faţă de lentila convergentă la 10 cm sau 40 cm. Soluţia practică este x_2=10 cm faţă de lentila convergentă.

18.a. Aflăm unde formează obiectivul imaginea obiectului. Utilizăm formula lentilelor subţiri cu $x_1 = -5/8$ cm, astfel că



$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 15\text{cm}.$$

Imaginea formată de obiectiv este reală.

b. Această imagine joacă rol de obiect real pentru lentila ocular, care va forma o imagine virtuală preluată direct de ochi şi aflată în faţa lentilei ocular la distanţa optimă de citire, astfel că $x_2' = -d_0 = -25$ cm.

Cum $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = -1{,}85$ cm.

Lungimea tubului microscopului este: $d = x_2 - x_1' = x_2 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 16{,}85$ cm.

c. Mărirea liniară transversală a obiectivului este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -24$ şi mărirea ocularului este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2 - x_2'}{f_2} = \frac{f_2 + d_0}{f_2} = 13{,}5$, astfel că mărirea microscopului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = -324$.

19.a. Obiectivul va forma o imagine reală la $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 15{,}12$ cm de el.

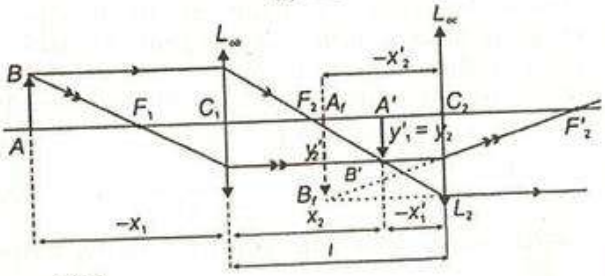
Calculăm lungimea tubului microscopului când omul priveşte imaginea finală la distanţa optimă de citire d_0=25 cm. Conform desenului de la problema precedentă $d = x_2 - x_1'$, aflăm la ce distanţă este obiectul faţă de ocular

$$x_1' = \frac{f_2 \cdot x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = -0{,}96 \text{ cm} \Rightarrow d = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} + \frac{f_2 \cdot d_0}{f_2 + d_0} = 16{,}08 \text{ cm}.$$

b. Aflăm lungimea tubului microscopului când omul priveşte imaginea finală neacomodat, adică când imaginea se formează la infinit $x_2' \to -\infty \Rightarrow x_1' = f_2 = 1$ cm. Astfel obţinem $d' = x_2 - x_1' = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} + f_2 = 16{,}12$ cm.

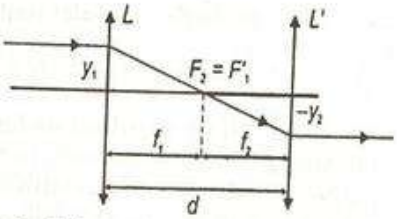
c. Pentru a putea privi imaginea, observatorul poate deplasa ocularul în raport cu obiectivul prin operaţia de punere la punct cu $\Delta d = d' - d = 0{,}4$ mm.

20.a. Imaginea reală va fi formată de obiectiv la $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 13$ cm în spatele lentilei şi va avea mărirea $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -25$. Această imagine este obiect real pentru lentila ocular care va forma o imagine virtuală la distanţa $-x_2' = 15$ cm de lentilă şi în faţa



ei la $x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -1{,}76$ cm. Lungimea tubului microscopului pentru miop este $\ell = x_2 - x_1' = 14{,}76$ cm şi aceasta este distanţa dintre lentile.

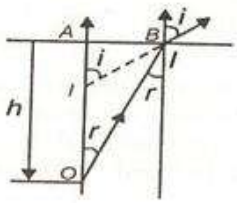
b. Mărirea ocularului este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2 - x_2'}{f_2} = 8{,}5$.



Mărirea microscopului este $\beta_s = \beta_1\beta_2 = 212{,}5$.

c. Deoarece un fascicul paralel incident pe ambele lentile părăseşte sistemul tot paralel, înseamnă că cele două lentile formează un sistem afocal, astfel că distanţa dintre cele două lentile este $d = f_1 + f_2 = 2{,}5$ cm. Deoarece fasciculul emergent va avea dimensiunile mai mari, atunci $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = -4$, astfel că faţă de prima lentilă cu distanţa focală f_1=0,5 cm se aşază a doua lentilă cu distanţa focală f_2=2 cm la d=2,5 cm de aceasta şi în spatele ei ca în figură.

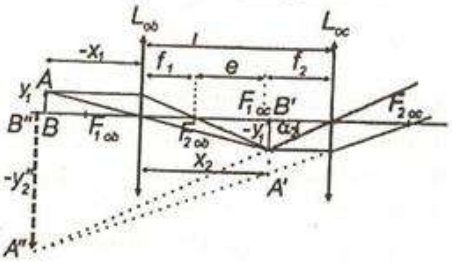
21. Dacă se pune la punct microscopul pentru observarea feţei superioare a lamei (punctul A), când observatorul priveşte faţa inferioară a lamei (punctul O), măsuţa trebuie deplasată în jos până în punctul unde se formează prin refracţie datorită lamei imaginea feţei inferioare. Aceată imagine virtuală I este preluată direct de ochi. Din desen: $AI = \frac{AB}{tg\, i} = h\frac{tg\, r}{tg\, i}$. Cum unghiurile sunt mici $tg i \approx \sin i$ şi



$tg r \approx \sin r$ atunci $AI = h\frac{\sin r}{\sin i}$ şi conform legii refracţiei $\sin i = n \sin r$ obţinem

$AI = \frac{h}{n}$. Indicele de refracţie al lamei este $n = \frac{h}{D} = 1{,}43$.

22.a. Deoarece punerea la punct se face pentru infinit, imaginea formată de obiectiv se află în focarul obiect al lentilei ocular. Prin definiţie grosismentul $G = \frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1}$ unde α_2 este unghiul sub care se vede observatorul prin instrument obiectul (de fapt imaginea) astfel că $tg\alpha_2 = -\frac{y_1'}{f_2}$, iar α_1 este unghiul sub care se vede observatorul obiectul cu ochiul liber, dacă obiectul se află la distanţa optimă de citire,



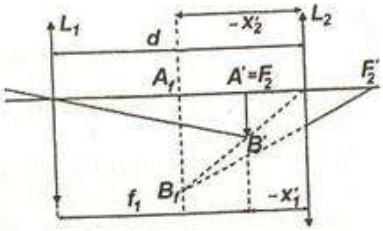
astfel că $tg\alpha_1 = \frac{y_1}{d_0}$, unde d_0=25 cm. Obţinem pentru grosisment: $G = -\frac{y_1'}{f_2}\frac{d_0}{y_1}$.

Lentila obiectiv formează pentru obiectul real o imagine reală ca în figură. Utilizând asemănarea triunghiurilor obţinem: $\frac{e}{f_1} = -\frac{y_1'}{y_1} \Rightarrow G = \frac{ed_0}{f_1 f_2} = 300$.

b. Prin definiţie puterea microscopului este $P = \frac{tg\alpha_2}{y_1} = -\frac{y_1'}{y_1 f_2} = \frac{e}{f_1 f_2} = 1200\ m^{-1}$

c. Din desen lungimea tubului microscopului este $\ell = f_1 + e + f_2 = 14{,}5$ cm.

23.a. O lunetă astronomică formează imagini virtuale ale obiectelor foarte îndepărtate, adică aflate din punct de vedere fizic la infinit. Cum $x_1 \to -\infty$, pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem $x_2 = f_1 = 80$ cm. Imaginea obiectelor aflate la infinit se formează în focarul imagine al lentilei obiectiv. Lentila ocular va forma pentru imaginea reală a lentilei obiectiv o imagine virtuală, care va fi preluată de ochi. Dacă imaginea virtuală se formează la distanța optimă de citire atunci $x_2' = -d_0 = -25$ cm astfel că $x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} - 7{,}14$ cm. Distanța dintre cele



două lentile este: $d = f_1 - x_1' = f_1 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 87{,}14$ cm. Dacă ochiul privește neacomodat înseamnă că imaginea virtuală formată de ocular se află la infinit. Cum $x_2' \to -\infty \Rightarrow x_1' = -f_2 = -10$ cm și distanța dintre cele două lentile este $d' = f_1 - x_1' = f_1 + f_2 = 90$ cm. Lungimea minimă a lunetei se obține când ochiul privește imaginea formată de lunetă la distanța optimă de citire, iar lungimea maximă a lunetei se obține când imaginea formată de lunetă este la infinit, deci când luneta este un sistem afocal. În ambele situații, ochiul se află lângă ocular.

b. În cazul miopului:

$d'_{min} = f_1 - \frac{x_2 f_2}{f_2 - x_2} = f_1 + \frac{d_1 f_2}{f_2 + d_1} = 86{,}15$ cm, deoarece $x_2 = -d_1 = -16$ cm și

$d'_{max} = f_1 - \frac{x_2' \cdot f_2}{f_2 - x'_2} = f_1 + \frac{d_2 f_2}{f_2 + d_2} = 89{,}52$ cm, deoarece $x_2' = -d_2 = -200$ cm.

c. În cazul unui ochi normal pentru a vedea imaginea formată de lunetă, ocularul trebuie să se deplaseze în raport cu obiectivul pe distanța:

$d = d_{max} - d_{min} = \frac{f_2^2}{f_2 + d_0} = 2{,}86$ cm, iar în cazul unui ochi miop cu distanța:

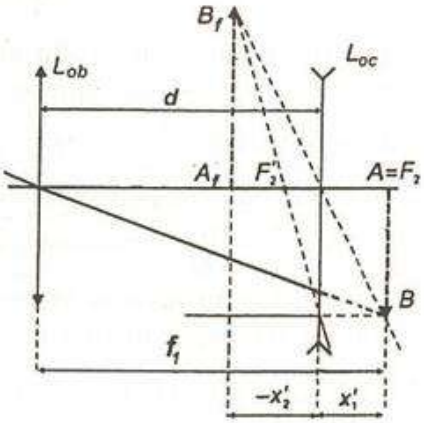
$d = d'_{max} - d'_{min} = 3{,}37$ cm.

24. Dacă cu luneta se observă Luna, imaginea acesteia se formează în planul focal imagine al lentilei obiectiv, deoarece $x_1 \to -\infty$ și $x_2 = f_1 = 80$ cm. Această imagine joacă rol de obiect pentru lentila ocular. Cum ochiul privește fără acomodare $x_2' \to -\infty$ și deci $x_1' = -f_2$. Prin urmare lungimea lunetei este $\ell = f_1 - x_1' = f_1 + f_2$, adică luneta este un sistem afocal.

Deoarece se observă cu luneta un obiect, obiectivul va forma imaginea acestuia la $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 86{,}95$ cm de lentilă. Deoarece ochiul privește neacomodat, lungimea lunetei este: $\ell' = x_2 + f_2$ Ocularul lunetei trebuie depărtat de obiectiv cu

$\Delta\ell = \ell' - \ell = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} - f_1 = -\frac{f_1^2}{f_1 + x_1} = 6{,}41$ mm.

25. Cu binoclul de teatru se observă imagini foarte îndepărtate, astfel că $x_1 \to -\infty$ şi lentila obiectiv va forma o imagine reală în planul ei focal imagine, deci la $x_2 = f_1 = 8$ cm. Această imagine este obiect virtual pentru lentila divergentă, ocular, iar lentila ocular va forma o imagine virtuală şi mărită a obiectului iniţial. Această imagine finală este observată cu ochiul liber lipit de ocular. Dacă imaginea se formează la distanţă optimă de citire $x_2=-d_0=-25$ cm atunci $x_1 = \frac{f_2 \cdot x_2}{f_2 - x_2} = -4{,}76$ cm.



Lungimea binoclului este: $d_{min} = f_1 - x_1 = f_1 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 3{,}24$ cm. Dacă imaginea se formează la infinit, adică ochiul priveşte neacomodat, $x_2 \to -\infty$ atunci $x_1 = -f_2 = -4$ cm, iar lungimea binoclului este $d_{max} = f_1 + f_2 = 4$ cm. Distanţa dintre obiectiv şi ocular este cuprinsă între 3,24 cm şi 4 cm.

2.1. Mişcarea mecanică

1.a. Din formula vectorului de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, prin identificare obţinem $x=4t-2$ şi $y=-3t+1$. Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând timpul t din cele două ecuaţii: $t = \frac{x+2}{4} \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ deoarece y este funcţie de gradul întâi de x, înseamnă că punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă.

b. Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx}=v_x=4$ m/s şi din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow v_{my}=v_y=-3$ m/s. Acestea reprezintă componentele vitezei pe axele de coordonate (coeficienţii din faţa lui t din ecuaţiile parametrice x şi y), astfel că $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

c. Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = 5$ m/s.

d. $a = 0$, deoarece vectorul viteză este constant ($\vec{v}$ =ct).

2.a. Ecuaţiile parametrice ale mişcării pe axele de coordonate sunt $x=t^2/2$ şi $y=t$, astfel că eliminând timpul din ecuaţii obţinem $y = \sqrt{2x}$

b. Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{2\Delta t} = t - \frac{\Delta t}{2}$. Viteza instantanee se obţine din $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_x=t$. Din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t) - t}{\Delta t} = 1$ m/s $\Rightarrow v_y=1$ m/s, astfel $v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = \sqrt{t^2+1}$. Când $t=2$ s obţinem $v=2{,}236$ m/s

c. Cum $a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Rightarrow a_{mx}=a_x=1$ m/s² iar $a_y=a_{my}=0$, deoarece v_y=ct, atunci punctul material are o mişcare uniform accelerată cu accelerаţia momentană $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ =1 m/s² indiferent de intervalul de timp

3.a. Din $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, prin identificare obţinem $x=1$ m/s, $y=2t$ şi $z=t^2$. Cum $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx}=v_x=0$ m/s, $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{2(t+\Delta t) - 2t}{\Delta t}$ =2 m/s şi din $v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$ când $\Delta t \to 0$ obţinem $v_z=2t$. Astfel vectorul viteză este $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = 2\vec{j} + 2t\vec{k}$

b. La momentul $t_1=2$ s, $v_z=4$ m/s, astfel $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \approx 4{,}47$ m/s

c. Deoarece $v_x=0 \Rightarrow a_x=0$, iar $a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \Rightarrow a_y=0$. Cum $a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = 2$ m/s² $\Rightarrow$ $a_{mz}=a_z=2$ m/s², obţinem $\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = 2\vec{k}$

4.a. Eliminăm timpul t din cele două ecuaţii pentru a determina ecuaţia traiectoriei. Astfel $t = \frac{x+4}{3} \Rightarrow y = \frac{20-x}{3} \Rightarrow$ punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă.

b. Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt coeficienții din fața lui t din ecuațiile parametrice x și y, astfel v_x=3 m/s și v_y=−1 m/s $\Rightarrow$ vectorul viteză al punctului material $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

c. Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ =3,16 m/s

5.a. În intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$=1 s variația coordonatei pe axa Ox este $\Delta x = x_2 - x_1$=2 m iar pe axa Oy variația coordonatei este $\Delta y = y_2 - y_1 = (2x_2+1) - (2x_1+1)$ astfel $\Delta y = 2\Delta x$=4 m $\Rightarrow$ deplasarea mobilului este $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ =4,47 m

b. Viteza medie a punctului material este $v_m = d/\Delta t$=4,47 m/s

c. Deoarece mobilul se mișcă uniform pe axele de coordonate componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$=2 m/s și $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$=4 m/s, astfel că vectorului viteză este $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

d. Deoarece $\vec{v}$ =ct vectorul accelerație este $\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$=0

6.a. Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ =5 m/s iar vectorul viteză este $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

b. Vectorul de poziție este $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t = 2\vec{i} - \vec{j} + \left(-4\vec{i} + 3\vec{j}\right)\cdot t = (2-4t)\vec{i} + (3t-1)\vec{j}$

c. Cum $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow x = 2-4t$ și $y = 3t-1$. Pentru t_1=2 s, x_1=−6 m și y_1=5 m, iar pentru t_2=4 s, x_2=−14 m și y_2=11 m astfel că $\Delta x = x_2 - x_1$=−8 m și $\Delta y = y_2 - y_1$=6 m. Deplasarea mobilului este $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 10$ m

d. Ecuația traiectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații parametrice x și $y \Rightarrow t = \frac{2-x}{4} \Rightarrow y = \frac{2-3x}{4}$.

7.a. Din grafic coordonatele mobilului atunci când acesta se află în punctul C sunt x_C=4 m și y_C=−2 m

b. $r_A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \approx 2{,}82$ m, deoarece x_A=−2 m și y_A=2 m

c. Vectorului viteză medie este $\vec{v}_{m\,AD} = \frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t}$.

Cum $\Delta r_{AD} = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$ deoarece x_D=8 m și y_D=−1 m $\Rightarrow$ $\Delta r_{AD} \approx 10{,}44$ m și v_{mAD}=0,174 m/s

8.a. Conform definiției vitezei medii: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$.

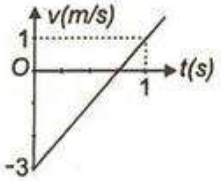
Cum $x(t+\Delta t) = 2(t+\Delta t)^2 - 3(t+\Delta t) + 5 \Rightarrow$

$\Delta x = 2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 3(t+\Delta t) + 5 - (2t^2 - 3t + 5) \Rightarrow$

$\Delta x = 4t\Delta t + 2\Delta t^2 - 3\Delta t \Rightarrow v_m = 4t + 2\Delta t - 3$

Viteza instantanee se obține când $\Delta t \to 0 \Rightarrow v = 4t - 3$

b. Pentru t_1=0 s, v_1=−3 m/s și pentru t_2=1 s, v_2=1 m/s. Reprezentarea grafică a legii vitezei este redată în figura alăturată.



c. Conform definiției accelerației medii:

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow$

$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) = 4(t+\Delta t) - 3 - (4t-3) = 4\Delta t \Rightarrow a_m = a = 4\text{m/s}^2 \Rightarrow$ mişcarea mobilului este uniform accelerată.

9.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow$ $v = 10 - 2t$ deoarece a=2 m/s², astfel că la t_1=3 s $\Rightarrow v_1$=4 m/s

b. Când mobilul de opreşte v=0 $\Rightarrow t_{op}$=5 s

c. Deoarece viteza depinde liniar de timp, valoarea medie a vitezei se calculează prin media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului studiat astfel că $v_m=(v_0+0)/2=v_0/2$=5 m/s

d. Distanţa parcursă până la oprire se calculează cu relaţia $d=v_m t_{op}$=25 m

10.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}$ =2,5 m/s², deoarece v=0 m/s şi $\Delta v=v$.

b. Viteza medie este $v_m=(v_i+v_f)/2$=12,5 m/s

c. Distanţa parcursă de mobil este $d=v_m\Delta t$=125 m

11.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v}{\Delta t} = -\frac{v}{\Delta t} = -1$ m/s².

Semnul "–" arată că mişcarea mişcarea maşinii este frânată.

b. Viteza medie este $v_m=(v_i+v_f)/2=v/2$=7,5 m/s

c. Distanţa parcursă până la oprire $d=v_m\Delta t$=125 m

12.a. Conform definiţiei accelerației medii şi cum $a_m = a$, deoarece viteza creşte uniform cu 1 m/s în fiecare secundă, atunci $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1$ m/s²

b. Deoarece depăşirea durează Δt, atunci din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \Rightarrow v_f = v_0 + a\Delta t$.

După Δt=20 s $\Rightarrow v_f$=40 m/s, astfel că viteza medie este $v_m=(v_0+v_f)/2$=30 m/s

c. Distanţa parcursă de mobil este $d=v_m\Delta t$=600 m

13.a. Conform definiţiei accelerației medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t}$ =–0.1 m/s²

b. Viteza medie este $v_m=(v+v_0)/2$=1,5 m/s

c. Distanţa parcursă până la oprire $d=v_m\Delta t$=15 m

d. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{0 - v_o}{\Delta t'} = -\frac{v_0}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v_0}{a}$ =20 s, deoarece v=0 m/s şi $\Delta v = -v_0 \Rightarrow$ distanţa totală parcursă de biciclist până la oprire este $d = v'_m \Delta t'$, unde $v'_m = v_0/2 \Rightarrow d = -v_0^2/2a$ =20 m.

14. a. Din definiţie viteza medie a celui mai rapid ciclist este $v_m = \frac{D}{\Delta t}$ =12,5 m/s, deoarece Δt=200 min

b. Din definiţia accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{v - v_0}{\Delta t'}$. Deoarece $d_2 = v'_m \Delta t' = \frac{v_0 + v}{2}\Delta t'$ obţinem $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d_2}$ =48·10⁻³ m/s²

c. Al doilea ciclist a mers distanța d_1-d_2 uniform cu viteza v_0, iar restul uniform accelerat, astfel că timpul total de mișcare este $\Delta t_t = \frac{d_1 - d_2}{v_0} + \frac{2d_2}{v + v_0}$=542 s. Ora la care ultimul ciclist a trecut linia de sosire este 12:29:02.

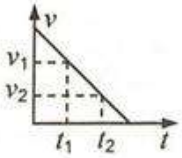
15.a. Momentul de timp la care corpul se oprește se obține din $v=0 \Rightarrow t_{op}=3$s

b. Din $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} \Rightarrow v = v_0 + at$, iar din identificarea coeficienților accelerația instantanee este $a=-4$ m/s² și viteza inițială este $v_0=12$ m/s

c. Distanța parcursă până la oprire $d=v_m t_{op}$, unde $v_m=(v_0+0)/2$, astfel că $d=v_0 t_{op}/2=18$ m

16.a. Conform definiției $a=\Delta v/\Delta t=-2$ m/s² $\Rightarrow$ mișcarea mobilului este uniform încetinită, deoarece $a<0$ și $v_0>0$.

b. Din $a = \Delta v/\Delta t = (v - v_0)/t \Rightarrow v = v_0 + at = 10 - 2t$. Când $t_1=2$ s $\Rightarrow v_1=6$ m/s, iar când $t_2=4$ s $\Rightarrow v_2=2$ m/s. Spațiul parcurs de mobil reprezintă fizic, aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și cele două ordonate duse prin punctele cu t_1 și t_2. Această figură geometrică este un trapez, astfel că: $d = A = \frac{(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)}{2}$=8 m.



c. Viteza medie este $v_m=(v_1+v_2)/2=4$ m/s

d. Din grafic, timpul până la oprire este $t_{op}=5$ s, deoarece $v=0$ și spațiul până la oprire reprezintă aria triunghiului $s_{op}=A_{triunghi}=25$ m

17.a. Când $t\in(0,2)$s $v=2$ m/s=ct, astfel accelerația este $a_1=0$. Când $t\in(2, 4)$s, accelerația este $a_2=\Delta v/\Delta t=1$ m/s², iar când $t\in(4,8)$s accelerația este $a_3=\Delta v/\Delta t=-0,75$ m/s². Modulului maxim al accelerației este $a=1$ m/s²

b. Distanța parcursă în intervalul $t\in(0, 4)$s reprezintă aria cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită la $t=4$ s $\Rightarrow d=10$ m

c. Distanța parcursă în intervalul $t\in(0, 8)$s este aria cuprinsă cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită la $t=4$ s $\Rightarrow d_t=20$ m, astfel că viteza medie a corpului este $v_m=d_t/\Delta t=2,5$ m/s

18.a. Calculăm spațiul parcurs de mobil în primele trei secunde de la începerea mișcării. Acest spațiu este aria de sub curba vitezei și axa timpului, astfel că $s_3=25$ m. Viteza medie este $v_m=s_3/\Delta t_3=8,33$ m/s, cu $\Delta t=$ s

b. Calculăm accelerațiile pe fiecare porțiune distinctă de mișcare. Deoarece $a_1=\Delta v_1/\Delta t_1=10$ m/s² $\Rightarrow$ în intervalul de timp $t\in(0, 1)$s mobilul are o mișcare uniform accelerată. În intervalul de timp $t\in(1, 3)$s, $a_2=\Delta v_2/\Delta t_2=0 \Rightarrow$ mobilul se mișcă uniform. În intervalul de timp $t\in(3, 7)$s, $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3=-4$ m/s² $\Rightarrow$ mobilul are o mișcare uniform încetinită. În intervalul de timp $t\in 7, 8)$s, $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4=4$ m/s² $\Rightarrow$ mobilul se mișcă uniform accelerat. Modulul maxim al accelerației se obține pe prima porțiune de mișcare când accelerația este $a_1=10$ m/s²

c. Prin definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$. Calculăm coordonata finală x_f, știind că cea inițială este nulă ($x_0=0$). Din graficul vitezei observăm că la un anumit moment $v=0$, iar apoi $v<0$, ceea ce înseamnă că mobilul se întoarce. Pe porțiunea când $t\in 3,7)$s, din $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3$, legea vitezei este $v=10-4(t-3)$ și când $v=0 \Rightarrow t_{op}=5,5$ s. Calculăm coordonata maximă când mobilul se oprește cu aria trapezului $x_{max}=37,5$ m. Calculăm spațiul parcurs de mobil în intervalul de timp de la 5,5 s până la 8 s, cu aria cuprinsă între curba vitezei și axa

timpului, astfel că s=8,5 m. După ce viteza devine nulă mobilul se întoarce pe distanța 8,5 m, astfel coordonata finală este $x_f=x_{max}$=29 m $\Rightarrow v_m$=3,625 m/s

d. Viteza în modul medie se calculează împărțind distanța totală parcursă de mobil în intervalul de timp $t\in(0,8)$s $d=x_{max}+s$=46 m la valoarea intervalului de timp Δt=8 s și obținem $|v_m|=d/\Delta t=5{,}75$ m/s. Observăm că există o diferență între viteza medie și viteza în modul medie, deoarece pe parcursul mișcării mobilul se oprește și se întoarce.

19.a. În intervalul $t\in(0,1)$s deoarece viteza crește liniar cu timpul, viteza medie este media aritmetică a valorilor de la extremitățile intervalului, astfel că $v_m=(v_0+v_1)/2$=1 m/s

b. Din definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$, unde $\Delta x=x_f-x_0$. Deoarece în intervalul de timp de la 0 la 6 s, $v>0$, mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei de coordonate $\Rightarrow x_f=s$, unde s este spațiul parcurs de mobil și reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și ordonata construită la t=6 s. Obținem x_f=12 m $\Rightarrow v_m$=2 m/s, deoarece Δt=6 s

c. Deoarece v_4=4 m/s când t_4=4 s și v_6=0 m/s când t_6=6 s, atunci $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$=-2m/s^2 $\Rightarrow$ mișcarea mobilului este uniform încetinită

d. Din $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$ obținem $v_4=v_{04}+a_4(t-t_4)$. Din v_{04}=4 m/s și t_4=4 s obținem v_4=12-2t. La momentul t_7=7 s, viteza mobilului va fi v_7=-2 m/s

20.a. Viteza maximă atinsă de metrou se obține la momentul t_a=18 s, astfel că din legea accelerației $a_1=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}\Rightarrow v_m=a_1t_a$=18 m/s, deoarece a_1=1 m/s^2

b. Durata totală a călătoriei este $t=t_a+t_u+t_i$, unde t_u reprezintă timpul cât metroul se mișcă uniform, iat t_i reprezintă timpul cât metroul se mișcă încetinit. Aflăm din legea vitezei $v=v_m+a_3(t-t_{03})=18-0{,}5(t-54)$ și din condiția de oprire v=0, timpul după care metroul se oprește. Astfel obținem t_i=36 s și t_t=90 s.

c. Distanța totală parcursă de metrou între cele două stații este $d_t=d_1+d_2+d_3$, unde $d_1=v_mt_a/2$=162 m reprezintă distanța parcursă de metrou la accelerare, $d_2=v_mt_u$=648 m reprezintă distanța parcursă de metrou când acesta se mișcă uniform și $d_3=v_mt_i/2$=324 m reprezintă distanța parcursă de metrou când frânează. Astfel obținem d_t=1134 m.

d. Viteza medie a metroului pe întreaga durată a călătoriei este $v=\frac{d}{t_1}$=12,6 m/s

2.1.1. Mișcarea rectilinie și uniformă a punctului material

1. Sonarul emite o undă sonoră care se propagă rectiliniu cu viteza v spre obiect, se lovește de acesta și se întoarce pe aceeași direcție. Intervalul de timp detectat între momentul emiterii și momentul recepției este Δt, iar distanța parcursă dus-întors este $2d$, astfel că $\Delta t=2d/v\Rightarrow d=v\Delta t/2$=7,5 km.

2. Undele radio se propagă de la emițător spre obiectul de detectat, se reflectă, se întorc pe aceeași direcție și apoi sunt recepționate. Distanța d de la sursa de unde la obiect este parcursă dus - întors cu viteza c astfel că $2d=c\cdot\Delta t\Rightarrow d=c\cdot\Delta t/2$ =18·10^6 km

3.a. Deoarece elevul aude tunetul după Δt, iar sunetul se propagă prin aer cu viteza v, locul unde a fulgerat este la distanța $d=v\Delta t$=1020 m.

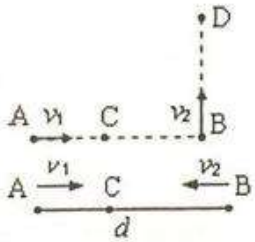
b. Dacă apoi elevul aude tunetul după $\Delta t'$, distanța la care a fulgerat este $d'=v\Delta t'$=680 m $\Rightarrow$ centrul furtunii se apropie de locul unde se află elevul.

4.a. Deoarece distanța d este parcursă în intervalul de timp t, atunci $d=vt$, obținem viteza autoturismului $v=d/t=30$ m/s=108 km/h. Cum în afara localităților viteza legală este 90 km/h, automobilul a depășit viteza legală maximă admisă.

b. Prin definiție viteza medie este $v_m = \frac{AB}{t} = \frac{AB}{t_{AC}+t_{CB}}$. Cum $t_{AC} = \frac{AC}{v_1} = \frac{AB}{2v_1}$ și $t_{CB} = \frac{CB}{v_2} = \frac{AB}{2v_2}$, deoarece $AC = CB = \frac{AB}{2}$. Obținem $v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \approx 22{,}22$ m/s.

c. Aplicăm definiția vitezei medii $v_m = \frac{d}{t} = \frac{d}{t_1+t_2+t_3}$ unde $t_1 = \frac{d}{8v}$, deoarece prima jumătate de drum $\frac{d}{2}$ a fost parcursă cu viteza $4v$; $t_2 = \frac{d}{8v}$, deoarece următorul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza $2v$ și $t_3 = \frac{d}{4v}$, deoarece ultimul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza v. Obținem $v_m = 2v$.

5.a. Aflăm distanțele parcurse de cele două mobile în timpul t: $AC = v_1t$ și $BD = v_2t$, astfel că din desen $CD = \sqrt{(AB-v_1t)^2+(v_2t)^2} \approx 94{,}25$ km.



b. Din desen $d = AC + CB$. Deoarece mișcările sunt rectilinii și uniforme $AC = v_1t$ și $CB = v_2t \Rightarrow d=(v_1+v_2)t \Rightarrow t=d/(v_1+v_2)$ reprezintă timpul după care se întâlnesc automobilele. Astfel $AC=v_1d/(v_1+v_2) \approx 44{,}44$ km

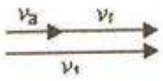
1. c. Alegem origine de timp momentul când pornește primul automobil. Astfel $d = v_1t \Rightarrow t = \frac{d}{v_1}$ reprezintă timpul parcurs de primul mobil din punctul de plecare A până în punctul de sosire B. Al doilea mobil pornește mai târziu cu Δt, astfel că el parcurge aceeași distanță d, în intervalul de timp $t-\Delta t$. Atunci: $d = v_2(t-\Delta t) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2t-d}{v_2} = t - \frac{d}{v_2} = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} = \frac{d(v_2-v_1)}{v_1v_2} = 1000$ s.

6.a. În cazul a, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul C și ajunge în punctul B, astfel că acesta ajunge din A în B în $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{2AC}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2+\frac{D^2}{4}}$. Sunetul se poate propaga direct de la A la B, astfel că $t = D/c$. Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către B este $\Delta t = t'-t = \frac{1}{c}\left(\sqrt{4d^2+D^2}-D\right) \approx 0{,}235$ s

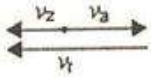
b. În cazul b, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul C și ajunge în punctul B, astfel că acesta ajunge din A în B în $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{D+2d}{c}$. Sunetul se poate propaga direct de la A la B, astfel că $t = D/c$. Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către B este $\Delta t = t'-t = \frac{2d}{c} \approx 0{,}47$ s.

c. Sunetul emis din A ajunge în B după $t = x/c$. Dar acest sunet se poate reflecta pe zid, astfel că ajunge în B după $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{2d-x}{c}$. Intervalul de timp care separă sosirea sunetelor în B reprezintă durata unui semnal lung emis de copilul din A, astfel că $\tau = t' - t = \frac{2(d-x)}{c} \approx 0{,}235$ s

7.a. Corpul de studiat este şalupa. Sistemul de referinţă mobil este apa, iar cel fix solul. Notăm cu: v_a–viteza apei faţă de sol (viteză de transport) şi cu v_r–viteza şalupei faţă de apă (viteză relativă).



Studiem mişcarea şalupei în sensul curgerii râului. v_1 este viteza absolută a şalupei faţă de sol. Cum $\vec{v}_1 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi din desen $v_1 = v_a + v_r$, iar cum $v_1 = \frac{d}{t_1}$ obţinem $v_a + v_r = \frac{d}{t_1}$.



Studiem mişcarea şalupei în sens contrar sensului de curgere al râului, v_2 fiind în acest caz viteza şalupei faţă de sol.

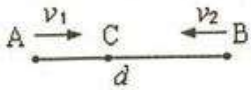
Cum $\vec{v}_2 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi din desen $v_2 = v_r - v_a$, iar cum $v_2 = \frac{d}{t_2}$ obţinem $v_r - v_a = \frac{d}{t_2}$. Prin scăderea relaţiilor obţinem: $v_a = \frac{d(t_2 - t_1)}{2t_2t_1}$ =5 km/h

b. Prin adunarea relaţiilor obţinem: $v_r = \frac{d(t_2 + t_1)}{2t_2t_1}$ =15 km/h

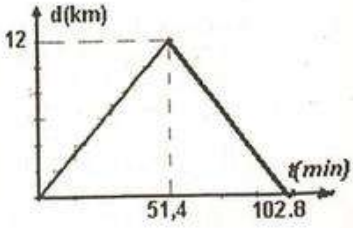
c. Dacă motorul şalupei nu funcţionează atunci aceasta se deplasează cu vitteza apei v_a, astel că $t = d/v_a$=16 h

8.a. Studiem mişcarea şalupei de la A la B, adică în sens contrar curgerii râului, astfel că din grafic $v_1 = d/t_1 = 10$ km/h. Cum $\vec{v}_1 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi scalar $v_1 = v_r - v_a$, unde v_r este viteza şalupei faţă de apă şi v_a este viteza apei faţă de sol, obţinem $v_r - v_a = v_1$. Studiem mişcarea şalupei de la B la A, adică în sensul curgerii râului, astfel că din grafic $v_2 = d/t_2 = 18$ km/h. Cum $\vec{v}_2 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi scalar $v_2 = v_r + v_a$, obţinem $v_r + v_a = v_2$. Prin adunarea relaţiilor obţinem: $v_r = (v_2 + v_1)/2$=14 km/h

b. Dacă şalupa nu ar staţiona în B atunci durata deplasării şalupei pe drumul A-B-A este Δt=112 min, deoarece şalupa staţioneată 28 min.



c. Pentru şalupa care porneşte din A: $AC = v_1t$ şi pentru cea care porneşte din B : $BC = v_2t$.
Deoarece $d = AC + BC = (v_1 + v_2)t = 2v_rt$ obţinem timpul după care şalupele se întâlnesc: $t = d/(2v_r)$. Astfel distanţa faţă de portul B la care se întâlnesc cele două şalupe este $BC = v_2d/(2v_r)$=7,71 km



d. Dacă apa ar fi stătătoare şi şalupa nu ar staţiona în B, atunci aceata s-ar deplasa cu viteza v_r astfel că timpul de dus este egal cu cel de întors şi este $t_{dus} = d/v_r$=51,428 s.
Reprezentarea grafică a dependenţei de timp a coordonatei d a şalupei de timp la deplasările $A \to B$ şi $B \to A$ este redată în figura alăturată.

9.a. Pe scara imobilă timpul de urcare al omului este $t_2=\ell/v_2$, unde v_2 este viteza omului față de scară, adică viteza relativă. Obținem $v_2=\ell/t_2=0{,}714$ m/s=2,57 km/h

b. Corpul de studiat este omul, sistemul mobil este scara iar sistemul fix este solul. Notăm cu v_1 viteza scării față de sol adică viteză de transport. Inițial față de un observator aflat pe sol omul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, iar scalar $v_{abs}=v_1+v_2$, astfel că $t_1=\ell/(v_1+v_2)$. Din cele $(v_1+v_2)=\dfrac{\ell}{t_1}$ și $v_2=\dfrac{\ell}{t_2}$ obținem $v_1=\dfrac{\ell}{t_1}-\dfrac{\ell}{t_2}=\dfrac{\ell(t_2-t_1)}{t_1t_2}\approx 0{,}286$ m/s $\approx 1{,}03$ km/h

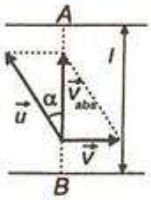
c. Aflăm timpul în care este urcat omul de scară, dacă acesta nu se deplasează pe scară: $t_3=\dfrac{\ell}{v_1}=\dfrac{t_1t_2}{t_2-t_1}=35$ s

10.a. Studiem mișcarea ceferistului în sensul mișcării platformei. Notăm cu v_1 viteza ceferistului față de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{v}$ și scalar $v_1=v_0+v=12$ m/s. Studiem mișcarea ceferistului în sensul contrar mișcării platformei. Notăm cu v_2 viteza ceferistului față de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_2=\vec{v}_0+\vec{v}$ și scalar $v_2=v_0-v=10$ m/s.

b. Timpul în care ceferistul revine la capătul platformei de unde a plecat este $t=t_{dus}+t_{intors}=\dfrac{2\ell}{v}=14$ s

c. Distanța parcursă de ceferist față de sol în situația de la punctul b. este $d=v_1t_{dus}+v_2t_{intors}=(v_1+v_2)\dfrac{\ell}{v}=\dfrac{2v_0\ell}{v}=168$ m

11.a. Corpul studiat este vâslașul, sistemul mobil este apa, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei v este viteza de transport, iar u este viteza relativă. Pentru a ajunge pe malul opus pe drumul cel mai scurt, vâslașul orientează barca ca în figură.

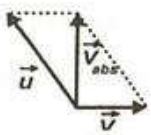


Cum $\vec{v}_{abs}=\vec{u}+\vec{v}$, din desen: $\sin\alpha=\dfrac{u}{v}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\alpha\cong 37°$

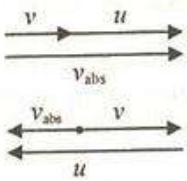
b. Deoarece viteza vâslașului față de sol este $v_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}=$ 0,4m/s, atunci timpul necesar pentru traversarea râului este $t_{AB}=\ell/v_{abs}=125$ s

c. Dacă viteza vâslașului se păstrează timpul necesar pentru traversarea unui lac cu aceeași lățime este $t=\ell/u=100$ s

12.a. Corpul studiat este avionul, sistemul mobil este vântul, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei v este viteza de transport iar u este viteza relativă. Studiem cazul în care vântul suflă perpendicular pe direcția parcursă de avion. Față de sol, avionul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs}$. Conform desenului $v_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}$, astfel că $t_{dus}=\dfrac{d}{v_{abs}}=\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$. La întors din desen $v'_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}$ și obținem $t'_{intors}=\dfrac{d}{v'_{abs}}=\dfrac{d}{\sqrt{u^2-v^2}}$. Timpul total de zbor este $t=t_{dus}+t_{intors}=\dfrac{2d}{\sqrt{u^2-v^2}}=2010$ s $\approx 33{,}5$ min.



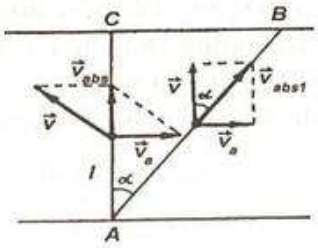
b. Studiem cazul în care vântul suflă pe direcția de zbor a avionului. Presupunem că la dus vântul suflă în sensul înaintării avionului. Cum $\vec{v}_{abs} = \vec{u} + \vec{v}$, din desen $v_{abs} = u + v$, este viteza cu care avionul se deplasează față de sol, astfel că timpul de dus este $t_{dus} = \dfrac{d}{u+v}$. La întors, vântul suflă în sens contrar sensului de zbor al avionului. În acest caz viteza cu care se deplasează avionul față de sol este $v'_{abs} = u - v$, iar timpul de întoarcere este $t_{\text{intors}} = \dfrac{d}{u-v}$.



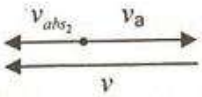
Obținem: $t_{zbor} = t_{dus} + t_{\text{intors}} = \dfrac{d}{u+v} + \dfrac{d}{u-v} = \dfrac{2du}{u^2 - v^2} \approx 33{,}67$ min.

c. Dacă vântul nu suflă viteza cu care se deplasează avionul față de sol este u, atât la dus cât și la întors, astfel că $t_{zbor} = \dfrac{2d}{u} = 2000$ s $\approx$ =33,33 min.

13.a. Studiem vâslașul care traversează râul perpendicular pe maluri. Viteza de transport este v_a, iar viteza relativă este v. Viteza absolută cu care se deplasează vâslașul față de mal este $\vec{v}_{abs} = \vec{v} + \vec{v}_a$. Iar scalar din desen: $v_{abs} = \sqrt{v^2 - v_a^{\,2}}$. Timpul necesar primului vâslaș să treacă râul este $t_1 = \dfrac{\ell}{\sqrt{v^2 - v_a^{\,2}}} \approx 11{,}56$ s



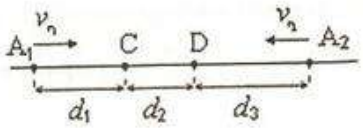
b. Studiem mișcarea celui de-al doilea vâslaș. Deoarece vâslașul orientează barca perpendicular pe maluri, el se va deplasa pe direcția AB și apoi el trebuie să se întoarcă de la B la C. Astfel timpul total de mișcare este $t_2 = t_{AB} + t_{BC}$. Dar $t_{AB} = \dfrac{AB}{v_{abs_1}} = \dfrac{AC}{v} = \dfrac{\ell}{v}$ (din asemănarea triunghiurilor vitezei și cel al distanțelor). La întoarcere $v_{abs_2} = v - v_a$, astfel că $t_{BC} = \dfrac{BC}{v_{abs_2}} = \dfrac{BC}{v - v_a}$. Cum $\dfrac{\ell}{v} = \dfrac{BC}{v_a} \Rightarrow$

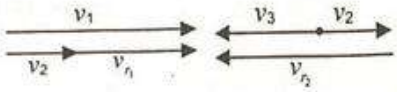


$BC = \dfrac{\ell v_a}{v} \Rightarrow t_{BC} = \dfrac{\ell v_a}{v(v - v_a)}$. Obținem $t_2 = \dfrac{\ell}{v} + \dfrac{\ell v_a}{v(v - v_a)} = \dfrac{\ell}{v - v_a} = 20$ s

c. Intervalul de timp care desparte sosirea vâslașilor în punctul de pe malul opus este $\Delta t = t_2 - t_1 = \dfrac{\ell}{v - v_a} - \dfrac{\ell}{\sqrt{v^2 - v_a^2}} \approx 8{,}44$ s

14.a. Considerăm că observatorul se află în autocamion. Față de acesta autoturismul și autobuzul se deplasează cu viteze relative. Viteza relativă a autoturismului este $\vec{v}_{r_1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, iar conform figurii alăturate obținem $v_{r_1} = v_1 - v_2$. Viteza relativă a autobuzului este $\vec{v}_{r_2} = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$ și conform figurii alăturate obținem $v_{r_2} = v_3 + v_2$.





Autoturismul după ce depăşeşte autocamionul trebuie să treacă pe banda lui în momentul în care în acel loc ajunge pe banda opusă autobuzul. Astfel autoturismul parcurge faţă de autocamion distanţa d_1+d_2, astfel că $d_1+d_2=v_{r_1}t=(v_1-v_2)t$, iar autobuzul parcurge faţă de autocamion distanţa $d_3=d_{min}-d_1-d_2=v_{r_2}t=(v_3+v_2)t$. Eliminând timpul t din cele două relaţii obţinem: $d_{min}=\frac{(v_3+v_1)(d_1+d_2)}{v_1-v_2}=225$ m.

b. Timpul necesar depăşirii este $t=\frac{d_1+d_2}{v_1-v_2}=5$ s

c. În timpul manevrei de depăşire distanţele parcurse faţă de sol de fiecare vehicul sunt: $d_1=v_1t=125$ m, $d_2=v_2t=75$ m şi $d_{31}=v_3t=100$ m

15.a. Fie v_a viteza apei şi v viteza pescarului faţă de apă. Pescarul se deplasează din dreptul podului din punctul A până în punctul B când pescarul îşi dă seama că a scăpat colacul. Deoarece pescarul se deplasează în sens contrar sensului de curgere al râului viteza acestuia faţă de sol este $\vec{v}_{abs}=\vec{v}+\vec{v}_a$, iar scalar $v_{abs}=v-v_a$, astfel că $AB=(v-v_a)\cdot\Delta t$ (1). La întoarcere pescarul se deplasează în sensul de curgere al râului cu viteza $v'_{abs}=v+v_a$. Distanţa parcursă de pescar la întoarcere este $d+AB=(v+v_a)\cdot t$ (2), unde t reprezintă timpul cât se întoarce pescarul după ce realizează că a pierdut colacul şi până când îl recuperează. Deoarece colacul se deplasează cu viteza apei un timp $t_c=\Delta t+t$, obţinem $d=v_at_c=v_a(\Delta t+t)$ (3). Din (3) obţinem $t=\frac{d}{v_a}-\Delta t$.

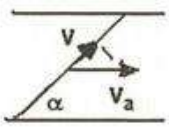
Introducând relaţia (1) şi t în relaţia (2) obţinem:

$$d+(v-v_a)\Delta t=(v+v_a)\left(\frac{d}{v_a}-\Delta t\right)\Rightarrow v\Delta t=\frac{vd}{v_a}-v\Delta t\Rightarrow d=2v_a\Delta t\Rightarrow\frac{d}{v_a}=2\Delta t\cdot$$

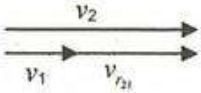
Timpul după care pescarul recuperează colacul din momentul pierderii acestuia este $t_c=\Delta t+t=3\Delta t=1{,}5$ h

b. Astfel din $d=2v_a\Delta t$ obţinem viteza apei $v_a=d/(2\Delta t)=5$ km/h

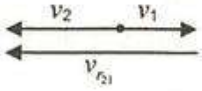
c. Deoarece colacul este barat de un cablu rigid AB legat între cele două maluri şi care formează cu un mal un unghi α ca în figură, colacul se va mişca de-a lungul cablului cu viteza $v=v_a\cos\alpha=2{,}5$ km



16.a. Considerăm că observatorul se află în trenul 1. Un observator din trenul 2 va înregistra o viteză relativă a trenului 2 faţă de trenul 1 $\vec{v}_{r_{21}}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Deoarece trenurile se deplasează în acelaşi sens, $v_{r_{21}}=v_2-v_1$. Pentru ca trenurile să se depăşească, distanţa parcursă de trenul 2 este $d=\ell_1+\ell_2$ şi deci timpul de depăşire este $t=\frac{\ell_1+\ell_2}{v_2-v_1}=15$ s.



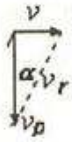
b. Dacă trenurile se deplasează în sens contrar, observatorul din trenul 2 va înregistra viteza relativă $\vec{v}_{r_{21}}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Conform figurii obţinem $v_{r_{21}}=v_1+v_2$ şi timpul de depăşire este



$t = \frac{\ell_1 + \ell_2}{v_1 + v_2} = 3{,}75$ s.

c. Observatorul din primul tren vede trecând prin fața lui trenul 2 cu viteza relativă $v_{r_{21}} = v_2 - v_1$ care are lungimea ℓ_2. Timpul cât vede trecând observatorul trenul 2 este $t = \frac{\ell_2}{v_2 - v_1} = 9$ s. Deoarece $v_2 > v_1$, omul din primul vede întâi locomotiva și apoi ultimul vagon al trenului 2.

17.a. Picăturile de ploaie cad față de tren cu viteza relativă $\vec{v}_r = \vec{v}_p - \vec{v}_1$. Din figura alăturată obținem: $tg\alpha = \frac{v_1}{v_p}$, astfel că viteza picăturilor de ploaie este $v_p = v_1 / tg\alpha \approx 86{,}5$ km/h



b. Deoarece trenurile se deplasează în același sens. viteza relativă a trenului 2 față de trenul 1 este $\vec{v}_{r_{21}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, iar scalar $v_{r21} = |v_2 - v_1|$. Timpul în care călătorul din primul tren vede trecând trenul al doilea cu lungimea ℓ este $t = \frac{\ell}{|v_2 - v_1|}$. Astfel viteza celui de-al doilea tren este $v_2 = v_1 \pm \frac{\ell}{t}$. Soluțiile sunt v_2=86 km/h când trenul al doilea prinde din urmă primul tren și îl depășește și respectiv v_2=14 km/h când trenul al doilea este prins din urmă de primul tren și depășit de acesta.

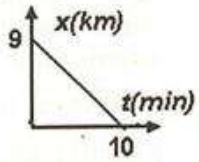
c. Timpul cât un om aflat în al doilea tren vede trecând prin fața lui trenul 1 cu lungimea ℓ_1 și cu viteza relativă $v_{r21} = v_2 + v_1$ este $t = \frac{\ell_1}{v_2 + v_1}$=90 s

18.a. Viteza v_1 cu care scade distanța dintre M și N este viteza relativă a automobilului M față de automobilul N, astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}_M - \vec{v}_N$, iar scalar $v_1 = v_M - v_N = 2v_M/3$=72 km/h

b. Deoarece $d/2 = v_1 t$, automobilul M va ajunge din urmă automobilul N după timpul $t = d/(2v_1)$=225 s=3min45s. Astfel ora la care se întâlnesc automobilele este 12:02:40

c. Fiecare automobilul parcurge în timpul t distanțele: $d_M = v_M t$=6750 m, $d_N = v_N t$=2250 m și $d_P = v_P t$=3375 m

d. Cum $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_P - x_o}{t}$ atunci coordonata punctului P este $x_P = x_0 + v_P t = 9 - 54t$, unde timpul este exprimat în în ore și coordonata în km. Automobilul P ajunge în originea O atunci când x_P=0, astfel că t=1/6 h=10 min. Reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei automobilului P este redată în figura alăturată.



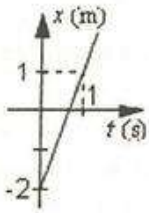
19.a. Înotătorii se întâlnesc prima oară când cel mai rapid întoarce iar cel lent încă nu a ajuns. Astfel primul sportiv a parcurs $AB+BC$, astfel că $AB + BC = v_1 \cdot t$ (C este punctul în care se întâlnesc sportivii). Al doilea sportiv parcurge doar AC, astfel că $AC = v_2 \cdot t$. În final obținem:

$$AB + BC + AC = (v_1 + v_2)t \Rightarrow 2\ell = (v_1 + v_2)t \Rightarrow t = \frac{2\ell}{v_1 + v_2} = 15{,}625 \text{ s.}$$

b. Distanța unde se vor întâlni prima dată față de punctul de plecare este $AC = v_2 \frac{2l}{v_1 + v_2} = 43{,}75$ m.

c. Primul sportiv parcurge de o distanță cu ℓ mai mare decât al doilea sportiv, astfel că $\ell = v_1 t - v_2 t$. Timpul după care primul înotător va parcurge mai mult decât al doilea o lungime de bazin este $t = \frac{\ell}{v_1 - v_2} = 62{,}5$ s.

20.a. Pentru a reprezenta grafic legea de mișcare trebuie să considerăm două valori pentru timpul t.
Pentru t_1=0 ⇒ x_1=−2 m. și pentru t_2=1 s ⇒ x_2=1 m.



b. Punctul de intersecție cu axa coordonatelor Ox, reprezintă coordonata inițială a mobilului x_0=−2 m. Punctul de intersecție cu axa timpului reprezintă momentul de timp când mobilul trece prin originea axei de coordonate, astfel că pentru x=0 obținem $t \approx 0{,}666$ s

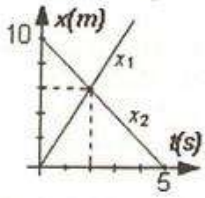
c. Viteza medie a mobilului coincide cu viteza instantanee în cazul mișcării rectilinii și uniforme, astfel că $v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 3$ m/s.

21.a. Cum $v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x = x_0 + v(t - t_0)$. Alegem originea de timp t_0=0 s. Din datele problemei x_0=4 m și v=−2 m/s obținem ecuația coordonatei a mobilului $x = -2t + 4$.

b. Momentul când trece prin originea axei de coordinate Ox se obține din condiția x=0. Obținem t=2 s.

c. Distanța parcursă în primele 10 s se află cu $d = |x_f - x_0|$, unde x_0=4 m reprezintă coordonata inițială iar x_f=−16 m este coordonata la momentul t=10 s. Obținem d=20 m.

22.a. Pentru a reprezenta grafic legile de mișcare trebuie sa alegem câte două valori distincte pentru timpul t pentru fiecare mobil și apoi trasăm dreptele. Astfel pentru primul mobil când t_0=0 ⇒ x_{01}=0 și când t_1=1s ⇒ x_1=3 m, iar pentru al doilea mobil când t_0=0 ⇒ x_{02}=10 m și când t_2=5s ⇒ x_2=0.

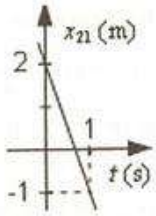


b. Pentru ca mobilele să se întâlnească trebuie ca cele două coordonate să fie egale, astfel că $x_1 = x_2 \Rightarrow 3 \cdot t = 10 - 2 \cdot t \Rightarrow t = 2$ s. Mobilele se întâlnesc după 2 s, când coordonata este x_i =6 m.

c. Cum legea de mișcare în mișcarea rectilinie uniformă este $x = x_0 + v \cdot t$ prin identificarea coeficienților în cele două ecuații obținem: v_1=3 m/s; v_2=−2 m/s și x_{02}=10 m. Deoarece v_1 și v_2 au semne contrare, cele două mobile se deplasează unul spre celălalt, astfel că viteza relativă a primului mobil față de cel de-al doilea este: $v_{r_{12}} = v_1 - v_2 = 5$ m/s. Viteza relativă a mobilului 2 față de primul este $v_{r21} = v_2 - v_1 = -5$ m/s. Observăm că în modul vitezele relative sunt egale, dar au sensuri contrare.

d. Calculăm coordonatele la momentul t=6 s. Obținem x_1=18 m și x_2=−2 m; distanța dintre mobile este: $d = |x_1 - x_2| = 20$ m.

23.a. Alegând sistemul de referință legat de mobilul 1, ecuația de mișcare a mobilului 2 față de acesta este: $x_{21} = x_2 - x_1 = -3 \cdot t + 2$. Pentru t_1=0 s$\Rightarrow x_{21}$=2 m și pentru t_2=1 s$\Rightarrow x_{21}$=−1 m. Reprezentarea grafică a legii de mișcare a mobilului (2) în raport cu un sistem de referință legat de mobilul (1) este redată în figura alăturată.



b. Pentru a determina momentul întâlnirii mobilelor impunem condiția ca x_{21}=0. Obținem momentul întâlnirii celor două mobile $t \approx 0{,}666$ s

c. Coeficientul din fața timpului t în ecuația coordonatei reprezintă viteza mobilului. Astfel v_1=2 m/s și v_2=−1 m/s, viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 este $v_{r_{12}} = v_1 - v_2 = 3$ m/s. Această viteză relativă are întotdeauna aceeași valoare, iar $v_{r_{21}} = -3$ m/s

24.a. Din reprezentarea grafică a legii coordonatei în funcție de timp, putem calcula viteza mobilului: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha = -2$ m/s, unde $tg\,\alpha$ se numește panta dreptei (α este unghiul făcut de dreaptă cu axa timpului și α >90°).

b. Cum din grafic la t=0$\Rightarrow x_0$=10m, iar ecuația coordonatei $x = x_0 + v \cdot t$ devine $x = 10 - 2t$ deoarece am considerat momentul inițial de timp momentul pornirii mobilului.

c. La momentul t=3 s coordonata mobilului este x=4 m.

25.a. Pe baza reprezentării grafice a legii coordonatei în funcție de timp, viteza mobilului în intervalul de timp (0,7)s este: $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} = \frac{-4-10}{7} = -2$ m/s. Prin urmare mobilul se mișcă rectiliniu și uniform în sens contrar axei Ox.

b. În intervalul de timp de la 7s la 10 s, deoarece x=−4 m, mobilul se află în repaus.

c. Viteza medie a mobilului pe parcursul întregii mișcări este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -1$m/s deoarece la t_0=0, x_0=10 m, iar la t_f=12 s, x_f=−2 m.

d. Mobilul trece prin originea axei de coordonate când x=0. Cum în intervalul $t \in (0,7)$ s legea de mișcare este $x = 10 - 2t$, atunci după t_1=5 s mobilul trece prin originea axei Ox.

e. Pentru $t \in (0,7)$ s mobilul are o mișcare rectilinie uniformă în sens contrar axei Ox și la t=5 s trece prin originea axei. Pentru $t \in (7,10)$ s mobilul se află în repaus. Pentru $t \in (10,12)$ s mobilul are o mișcare uniformă în sensul axei de coordonate Ox.

26.a. Mobilul are pe prima porțiune de mișcare când $t \in (0,4)$s viteza $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}$=0,5 m/s, pe a doua porțiune când $t \in (4,5)$s viteza $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = -4$ m/s, pe a treia porțiune când $t \in (5,6)$s mobilul se află în repaus, deoarece x=-2m și pe ultima porțiune când $t \in (6,8)$s mobilul are viteza $v_4 = \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4}$=2m/s

b. Distanța totală parcursă este $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$=10 m, deoarece pe prima porțiune d_1=2 m, pe a doua porțiune d_2=4 m, pe a treia d_3=0 și pe a patra d_4=4m

c. Viteza medie pe întregul interval de timp este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$=0,25 m/s, deoarece $\Delta x = x_f - x_0$=2 m și Δt=8 s.

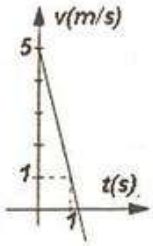
2.1.2. Mişcare rectilinie uniform variată a punctului material

1.a. Cum legea de mişcare a unui mobil care efectuează o mişcare rectilinie uniform variată este: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 4$ m, $v_0 = 3$ m/s şi $a = -2$ m/s².

b. Când $t = 1$ s coordonata mobilului este $x = 6$ m.

c. Când mobilul trece prin originea axelor de coordonate $x = 0 \Rightarrow 0 = -t^2 + 3t + 4$, iar soluţiile ecuaţiei sunt: t_1=−1 s şi t_2=4 s. Cum valoarea t_1=−1 s înseamnă în trecut, soluţia acceptabilă din punct de vedere fizic este t_2=4 s, ceea ce înseamnă că mobilul trece prin originea axei Ox după 4 secunde de la începerea mişcării.

2.a. Din legea de mişcare prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 3$ m, $v_0 = 5$ m/s, $a = -4$ m/s². Ecuaţia vitezei este $v = v_0 + at = 5 - 4t$. Pentru a reprezenta grafic ecuaţia vitezei vom atribui două valori timpului t.



Astfel pentru t_0=0 ⇒ v_0=5 m/s şi pentru $t_1 = 1$ s ⇒ $v_1 = 1$ m/s

b. Intersecţia graficului vitezei cu axa vitezei reprezintă fizic valoarea vitezei iniţiale v_0=5 m/s, iar intersecţia graficului vitezei cu axa timpului reprezintă fizic momentul de timp în care viteza mobilului se anulează şi acesta se opreşte, astfel că: $v = 0 \Rightarrow t_{op} = -\frac{v_0}{a} = 1{,}25$ s

c. Aria cuprinsă între curba vitezei, axa vitezei şi axa timpului este aria triunghiului $A = \frac{v_0 \cdot t_{op}}{2} = v_m \cdot t_{op} = 3{,}125$ m şi reprezintă fizic spaţiul parcurs de mobil până la oprire.

3.a. Din legea coordonatei prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 0$ m, $v_0 = 3$ m/s şi $a = 2$ m/s², astfel că legea vitezei este: $v = v_0 + at = 3 + 2t$. Când $t_1 = 3$ s obţinem v_1=9 m/s.

b. A cincea secundă de la lansare este cuprinsă între $t_2 = 4$ s şi $t_3 = 5$ s. Calculăm coordonatele corespunzătoare celor două momente de timp şi obţinem: $x_2 = 28$ m şi $x_3 = 40$ m. Distanţa parcursă în a cincea secundă de la lansare este: $d = x_3 - x_2 = 12$ m.

c. Conform principiului al doilea al dinamicii $F = ma = 0{,}4$ N

4.a. Utilizăm ecuaţia lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = -1$ m/s².

b. Calculăm momentul de timp la care mobilul trece prin punctul de coordonată x din legea vitezei $v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2x}{v + v_0} = 30$ s.

c. Viteza medie în acest timp interval de timp este $v_m = \frac{v + v_0}{2} = 5$ m/s.

d. Deoarece $v<0$ şi $v_0>0$ înseamnă că în acest interval de timp mobilul s-a oprit şi apoi s-a întors, astfel că distanţa parcursă este: $d = x_{op} + (x_{op} - x) = 2x_{op} - x$. Din ecuaţia lui Galilei aflăm coordonata în momentul opririi x_{op}. $0 = v_0^2 + 2ax_{op} \Rightarrow x_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 x}{v_0^2 - v^2} = x\frac{v_0^2 + v^2}{v_0^2 - v^2}$=250 m.

e. Viteza în modul medie este: $|v_m| = \frac{d}{t} = \frac{v_0^2 + v^2}{2(v_0 - v)}$ =8,33 m/s.

5.a. Pe baza legii lui Galilei $v_1^2 = 2ad_1 \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2d_1}$ = 1,25 m/s², iar din legea vitezei

$v_1 = at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{2d_1}{v_1} = 4$ s.

b. $v_2^2 = 2ad_2 \Rightarrow d_2 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{v_2^2}{v_1^2} d_1 = 160$ m.

c. Din legea coordonatei: $d_3 = \frac{at_3^2}{2} \Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2d_3}{a}} = \frac{2\sqrt{d_1 d_3}}{v_1}$ viteza medie este:

$v_m = \frac{d_3}{t_3} = \frac{v_1}{2}\sqrt{\frac{d_3}{d_1}} = 5$ m/s.

6.a. Din legea vitezei $v = v_0 + a\Delta t$, când $v = 0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{\Delta t} = -1$ m/s².

b. Din ecuaţia lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2as$, când $v = 0$, obţinem spaţiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0 \Delta t}{2} = 450$ m.

c. Viteza medie este: $v_m = \frac{v_0 + 0}{2} = 15$ m/s.

7.a. Din legea coordonatei: $\ell = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2\ell}{t^2} = 1{,}2$ m/s².

b. Din legea vitezei: $v = at = \frac{2\ell}{t} = 12$ m/s.

c. Pe planul orizontal sania are o mişcare uniform încetinită cu accelerația a_1 şi cu viteza iniţială υ cea de la baza dealului. Pe baza relaţiei lui Galilei şi din condiţia de oprire υ_f=0 $\Rightarrow 0 = v^2 + 2a_1 d \Rightarrow d = \frac{v^2}{2a_1}$ =8 m.

8.a. Utilizăm ecuaţia coordonatei: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ cu $x_0 = 0$, astfel obţinem:

$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2(x - v_0 t)}{t^2} = 0{,}3$ m/s².

b. Din legea vitezei: $v = v_0 + at$ obţinem viteza mobilului la momentul de timp t, υ=16 m/s.

c. Aflăm pe baza ecuației coordonatei la ce moment de timp se află mobilul în punctul de coordonată x_1, astfel că $x_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow \frac{at_1^2}{2} + v_0 t_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ax_1}}{a} = 15$ s, iar în acest moment viteza mobilului este:

$v_1 = v_0 + at_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ax_1} = 8{,}5$ m/s. Viteza medie este: $v_m = \frac{v_0 + v_1}{2} = 6{,}25$ m/s

9.a. Aplicăm legea lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d} = -4 \cdot 10^5$ m/s².

b. Din legea vitezei: $v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2d}{v + v_0} = 0{,}5$ ms.

c. Pentru a afla grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul impunem condiția de oprire a proiectilului, v=0, astfel că:

$0 = v_0^2 + 2ad_{max} \Rightarrow d_{max} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 d}{v_0^2 - v^2} = 31{,}25$ cm.

10.a. Aplicăm legea lui Galilei și punând condiția ca v=0 obținem spațiul până la oprire $0 = v_0^2 - 2as_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2a} = 100$ m și din legea vitezei cu v=0 obținem timpul până la oprire $0 = v_0 - at_{op} \Rightarrow t_{op} = \frac{v_0}{a} = 20$ s.

b. Pe baza legii coordonatei: $x = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ când $t = 5$ s obținem $x = 43{,}75$ m.

c. A patra secundă de la începerea mișcării este cuprinsă între secundele $t_3 = 3$ s și $t_4 = 4$ s, astfel coordonatele mobilului sunt: x_3=27,75 m și x_4=36 m. Distanța parcursă în a patra secundă de la începerea mișcării este: $d_{3\to4} = x_4 - x_3 = 8{,}25$ m.

11.a. Notăm cu v_0 valoarea inițială a mașinii și cu a, accelerația acesteia. Aplicăm ecuația lui Galilei: $v_1^2 = v_0^2 + 2ad_1$ și $v_2^2 = v_0^2 + 2ad_2$. Scădem cele 2 relații și obținem $a = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2(d_1 - d_2)} = -8$ m/s², iar $v_0 = \sqrt{\frac{v_2^2 d_1 - v_1^2 d_2}{d_1 - d_2}} \approx 17{,}43$ m/s.

b. Timpul necesar mașinii să parcurgă distanța dintre cele două puncte este $\Delta t = t_2 - t_1$, unde t_2 și t_1 reprezintă momentele de timp la care vitezele mobilului au valorile v_2 și v_1. Din legea vitezei: $v_2 = v_0 + at_2$ și $v_1 = v_0 + at_1$ obținem $v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{2(d_2 - d_1)}{v_1 + v_2} = 0{,}5$ s.

c. La oprire $v = 0$ și din ecuația lui Galilei: $0 = v_0^2 + 2as_{op}$ obținem spațiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2 d_2 - v_2^2 d_1}{v_1^2 - v_2^2} = 19$ m, iar din legea vitezei $0 = v_0 + at_{op}$ obținem valoarea timpului de oprire: $t_{op} = -\frac{v_0}{a} \approx 2{,}18$s

12.a. Notăm cu v_0 viteza inițială a mobilului și cu a, accelerația acestuia. Aplicăm ecuația coordonatei pentru fiecare jumătate de drum. Astfel: $AC = \frac{d}{2} = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$ (1)

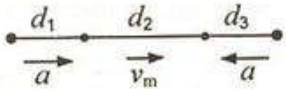
și $CB = \frac{d}{2} = v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$, unde $v_1 = v_0 + a t_1$. Obținem: $\frac{d}{2} = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$ (2).

Eliminând v_0 din ecuațiile (1) și (2) obținem: $a = \frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 0{,}1$ m/s².

b. Viteza inițială a mobilului este $v_0 = \frac{d - a t_1^2}{2 t_1} = 7{,}75$ m/s.

c. Viteza medie a mobilului este $v_m = \frac{d}{t_m} = \frac{d}{t_1 + t_2} = 10$ m/s.

13.a. Notăm cu d distanța dintre cele două stații. Din $v_m = a t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_m}{a} = 30$ s, iar distanța parcursă la accelerare este $d_1 = \frac{a t_1^2}{2} = 450$ m.

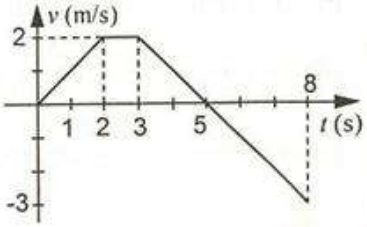


b. Deoarece accelerația la accelerare este egală în modul cu accelerația la frânare mișcarea este simetrică, astfel că distanța d_1 pe care accelerează metroul este egală cu distanța d_3 pe care frânează metroul, astfel că timpul de accelerare t_1 este egal cu cel de frânare t_3: $t_1 = t_3$. La frânare metroul parcurge aceeași distanță, astfel că $d_3 = d_1$. Cum metroul accelerează și frânează într-un timp $t = t_1 + t_3 = 1$ min, înseamnă că restul de timp t de un minut metroul se mișcă uniform cu viteza v_m, astfel că $d_2 = v_m \cdot t' = 1800$ m.

c. Distanța dintre stații este: $d = d_1 + d_2 + d_3 = 2700$ m.

14.a. Studiem mișcarea mobilului pe fiecare porțiune. În intervalul de timp $t \in (0,2)$s, $a_1 = 1$ m/s², $x_{01} = 0$ m și $v_0 = 0$ m/s astfel că legea vitezei este: $v = a_1 t = t$, iar legea coordonatei este: $x = \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$. Aflăm la finalul primei porțiuni de mișcare, când $t_1 = 2$ s, viteza mobilului este $v_1 = 2$ m/s și coordonata este $x_1 = 2$ m. Când $t \in (2,3)$s, $a_2 = 0$ și prin urmare pe a doua porțiune de mișcare mobilul are o mișcare rectilinie și uniformă iar viteza rămâne constantă la valoarea $v_1 = 2$ m/s, iar legea coordonatei este: $x_2 = x_1 + v_1(t - t_1) = 2t - 2$, iar după $t_2 = 3$ s coordonata este $x_{2f} = 4$ m

Studiem mișcarea mobilului pe porțiunea a treia, în care $a_3 = -1$ m/s². Mobilul are o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială $v_1 = 2$ m/s, $x_{03} = x_{2f} = 4$ m, $a_3 = -1$ m/s² când $t \in (3,8)$s. Legea vitezei este: $v_3 = v_1 + a_3(t - t_2) = 2 - (t - 3) = 5 - t$, iar cea a coordonatei este: $x_3 = x_{03} + v_1(t - t_2) + \frac{a_3}{2}(t - t_2)^2$



$\Rightarrow x_3 = 4 + 2(t-3) - \frac{(t-3)^2}{2}$, deoarece t_2=3 s.

Aflăm la ce moment de timp de la începerea mişcării mobilul se opreşte. Din $v = 0 \Rightarrow t_{op} = 5$ s. În final când $t_f = 8$ s $\Rightarrow v_f = -3$ m/s.

b. Pentru $t_f = 8$ s, aflăm din x_3, coordonata finală $x_{3f} = 1{,}5$ m.

c. Deoarece mobilul se opreşte şi apoi se întoarce, distanţa parcursă de mobil nu coincide cu valoarea coordonatei finale. Aflăm la ce distanţă de punctul de plecare se opreşte mobilul. Pentru $t_{op} = 5$ s se obţine $x_{3op} = 6$ m. Distanţa parcursă de mobil până la oprire este $d = x_{3op} + (x_{3op} - x_{3f}) = 10{,}5$ m

15.a. Pentru ca două mobile care se deplasează pe aceeaşi axă de coordonate, să se întâlnească, ele trebuie să se afle în acelaşi punct. Condiţia de întâlnire este: $x_1 = x_2$. Cum $x_1 = t^2 - 10t + 8$ şi $x_2 = -3t^2 + 4t + 2$ obţinem $t^2 - 10t + 8 = 2 + 4t - 3t^2 \Rightarrow 4t^2 - 14t + 6 = 0$. Soluţiile sunt $t_1 = 0{,}5$ s şi $t_2 = 3$ s, adică mobilele se întâlnesc de două ori, deoarece mobilul al doilea se opreşte. Din legea vitezei mobilului 2, $v_2 = 6 - 4t \Rightarrow t_{op_2} \approx 0{,}66$ s, iar apoi mobilul 2 se întoarce şi îl întâlneşte din nou pe primul mobil.

b. Coordonatele la care se întâlnesc mobilele sunt: $x = 3{,}25$ m, când primul mobil se deplasează în sens contrar axei Ox iar al doilea în acelaşi sens, respectiv $x' = -13$ m, când ambele mobile se deplasează în sens contrar axei Ox (după ce mobilul 2 s-a oprit şi s-a întors, dar înainte ca primul mobil să se oprească $t_{op_1} = 5$ s).

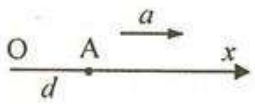
c. Legile vitezelor celor două mobile sunt:

$v_1 = v_{01} + a_1 t = -10 + 2t$, deoarece $v_{01} = 10$ m/s şi $a_1 = 2$ m/s².

$v_2 = v_{02} + a_2 t = 4 - 6t$, deoarece $v_{02} = 4$ m/s şi $a_2 = -6$ m/s².

Cum $v_1 = v_2 \Rightarrow t = 1{,}75$ s $\Rightarrow$ mobilele au viteze egale după ce mobilul 2 s-a oprit. Valoarea vitezei $v = v_1 = v_2 = -6{,}5$ m/s arată că ambele mobile se deplasează în sens contrar axei Ox.

16.a. Alegem origine a axei de coordonate Ox, punctul unde se află maşina care are o mişcare rectilinie şi uniformă. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile: $x_1 = d + \frac{at^2}{2} = 8 + \frac{t^2}{2}$, iar $x_2 = 5t$. Impunem



condiţia de întâlnire a mobilelor: $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 5t + 8 = 0$, iar soluţiile ecuaţiei sunt $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 8$ s, adică maşina ce are o mişcare uniformă o prinde din urmă pe cea care pleacă de la stop accelerat după $t_1 = 2$ s, pentru ca la $t_2 = 8$ s, maşina care se mişcă accelerat o prinde din urmă pe cea care se mişcă uniform şi o depăşeşte.

b. Calculăm distanţele la care se întâlnesc maşinile, atribuind pe rând valorile t_1 şi t_2 în ecuaţia coordonatei. Obţinem: x=10 m şi $x' = 40$ m.

c.. Aflăm vitezele maşinii care se mişcă accelerat la cele două momente de timp t_1 şi t_2. Obţinem: $v_1 = at_1 = 2$ m/s şi $v_2 = at_2 = 8$ m/s. Cum viteza relativă este $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, în primul moment t_1, $v_{r_1} = v_1 - v = -3$ m/s, deoarece maşina care

se mişcă accelerat este depăşită de maşina care se mişcă uniform, iar în momentul t_2, $v_{r_2} = v_2 - v = 3$ m/s, deoarece maşina care se mişcă accelerat depăşeşte maşina care se mişcă uniform.

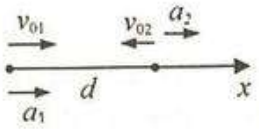
17.a. Alegem origine a axei de coordonate stopul şi origine a timpului, momentul când prima maşină trece prin dreptul stopului. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două maşini: $x_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 5t + t^2$, iar $x_2 = v(t - \Delta t) = 15(t-1)$, deoarece maşina a doua merge un timp mai mic cu Δt decât prima maşină întrucât porneşte mai târziu. Impunem condiţia de întâlnire: $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15t - 15 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0$, iar soluţiile sunt $t_1 = 1{,}838$ s şi $t_2 = 8{,}162$ s. Maşinile se întâlnesc de două ori, prima dată când maşina care se mişcă uniform o prinde din urmă pe cea care se mişcă accelerat şi a doua oară când maşina care se mişcă uniform este prinsă din urmă de maşina care se mişcă accelerat.

b. Distanţele măsurate de la stop la care se întâlnesc maşinile se află din ecuaţia coordonatelor în care introducem pe rând cele două valori ale timpului aflate t_1 şi t_2 şi obţinem: $x \approx 12{,}57$ m şi $x' \approx 107{,}43$ m.

c. Pentru a se întâlni o singură dată, ecuaţia de gradul doi trebuie să aibă o singură soluţie $\Delta = 0$, astfel că din $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15(t - \Delta t) \Rightarrow t^2 - 10t + 15\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 60\Delta t$. Se obţine $\Delta t \approx 1{,}666$ s.

Dacă $\Delta t < 5/3$ s, maşinile se întâlnesc de 2 ori, dacă $\Delta t = 5/3$ s, maşinile se întâlnesc o singură dată, iar dacă $\Delta t > 5/3$ s, maşinile nu se mai întâlnesc.

18.a. Alegem origine a axei de coordonate punctul de unde porneşte primul mobil într-o mişcare accelerată. Considerăm origine de timp, momentul în care porneşte primul mobil. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile. Pentru primul mobil ecuaţia coordonatei este: $x_1 = v_{01} t + \frac{a_1 t^2}{2} = 40t + t^2$.



Pentru mobilul al doilea ecuaţia coordonatei este: $x_2 = d - v_{01}(t - \Delta t) + \frac{a_2}{2}(t - \Delta t)^2$, deoarece acesta porneşte cu întârziere Δt faţă de primul mobil, din alt punct şi deci are coordonata iniţială $x_{02} = d$, se mişcă în sens contrar axei şi încetinit ceea ce înseamnă că viteza lui este negativă, iar accelerаţia este pozitivă (a_2 are sensul axei) Astfel $x_2 = 426 - 10(t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2 = 448 - 10t + \frac{t^2}{2}$.

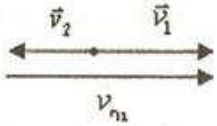
Impunem condiţia de întâlnire a mobilelor $x_1 = x_2$:

Obţinem: $40t + t^2 = 448 - 12t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} + 52t - 448 = 0$, iar soluţia acceptabilă din punct de vedere fizic este pozitivă şi este $t_i = 8$ s. Valoarea t_i reprezintă momentul de timp la care se întâlnesc mobilele.

b. Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii acestora utilizând ecuaţiile vitezelor: $v_1 = v_{01} + a_1 t_i = 56$ m/s şi $v_2 = -v_{02} + a_2(t_i - \Delta t) = -4$ m/s deoarece al doilea mobil se deplasează în sens contrar axei de coordonate.

c. Calculăm vitezele medii ale mobilelor utilizând definiția vitezei medii: $v_{m_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_i}{t_i}$, unde x_i reprezintă coordonata la care se întâlnesc mobilele. Coordonata la care se întâlnesc mobilele se obține introducând timpul de întâlnire în oricare din ecuațiile de coordonate. Prin urmare: $x_i = 384$ m. Obținem vitezele medii ale celor două mobile. Astfel:

$v_{m_1} = 48$ m/s, iar $v_{m_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x_i - d}{t_i - \Delta t} = -7$ m/s.

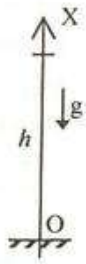


Calculăm viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 în momentul întâlnirii. Cum $\vec{v}_{r12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, scalar $v_{r12} = v_1 + |v_2| = 60$ m/s.

d. Calculăm după cât timp se oprește mobilul 2, din ecuația vitezei punând condiția ca $v_2 = 0$. Din $v_2 = -v_{02} + a_2(t - \Delta t) = -12 + t$ obținem: t_{op}=12 s. Calculăm la acest moment de timp valorile coordonatelor celor două mobile: $x_1' = 624$ m și $x_2' = 376$ m. Astfel distanța dintre cele două mobile la acel moment de timp este: $d = x_1' - x_2' = 248$ m.

2.1.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea greutății

1.a. Studiem căderea liberă a pietrei. Alegem originea axei Ox pe sol. Legea de mișcare a pietrei este: $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Când piatra ajunge la sol $x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4$ s.

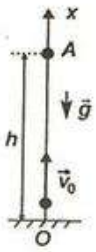


b. Utilizăm ecuația lui Galilei pentru a afla viteza cu care piatra lovește solul. Din $v^2 = v_0^2 + 2gh$ cu $v_0 = 0$ obținem $v = \sqrt{2gh} = 40$m/s

c. Calculăm valoarea coordonatei când $t_1 = t_c - 1 = 3$ s$\Rightarrow x = 35$ m $\Rightarrow$ în ultima secundă piatra a coborât pe distanța de 35 m.

2.a. Deoarece originea axei de coordonate este pe sol, legea de mișcare a corpului este $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm timpul de cădere punând condiția ca $x = 0$: $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20$ s. Aflăm după cât timp corpul ajunge în punctul în care $x = h_1 \Rightarrow h_1 = h - \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h - h_1)}{g}} = 16$ s$\Rightarrow \Delta t = t_c - t_1 = 4$ s.

b. Calculăm coordonatele la momentele de timp $t_2 = 1$ s și $t_3 = 2$ s, deoarece a doua secundă de mișcare este cuprinsă între t_2 și t_3. Cum $x_2 = 1995$ m și $x_3 = 1980$ m$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_3 = 15$ m reprezintă distanța parcursă de mobil în a doua secundă de la lansare.



3.a. Utilizăm ecuația lui Galilei, ținând cont că mobilul are o mișcare uniform încetinită cu accelerația a=g. În momentul atingerii înălțimii maxime, corpul se oprește, astfel că din $v = 0$

$\Rightarrow 0 = v_0^2 - 2gh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 61{,}25$ m.

b. Din legea coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, considerând originea axei pe sol, punând condiția ca mobilul să reajungă pe sol, x=0, determinăm timpul de mișcare al mobilului, astfel că $0 = v_0 t_m - \frac{gt_m^2}{2} \Rightarrow t_m = \frac{2v_0}{g} = 7$ s.

c. Calculăm timpul de urcare al mobilului până la înălțimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ punând condiția ca $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 3{,}5$ s.

Observăm că $t_c = t_m - t_u = \frac{v_0}{g} = t_u \Rightarrow$ timpul de urcare este egal cu timpul de coborâre. A patra secundă de mișcare este cuprinsă între secundele 3 și 4. Deoarece $t_u \in (3,4)$s înseamnă că în secunda a patra mobilul urcă, se oprește și apoi coboară. Aflăm valoarea coordonatelor la momentele $t_3 = 3$ s și t_4=4 s și observăm că $x_3 = x_4 = 60$ m. Astfel mobilul urcă pe distanța $h_{max} - x_3$=1,25 m și coboară pe distanța $h_{max} - x_4$=1,25 m.

Distanța parcursă este $d = 2(h_{max} - x_3)$=2,5m.

4.a. Corpul are o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială v_0 și accelerația g. Din grafic se determină timpul de urcare $t_u = 2$ s. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ și când $v = 0 \Rightarrow v_0 = gt_u = 20$ m/s. Viteza inițială a corpului este v_0=20 m/s.

b. Din legea lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pentru v=0 aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g \cdot t_u^2}{2}$=20 m.

c. Din punctul de înălțime maximă corpul coboară accelerat cu accelerația g. Timpul de coborâre se obține din ecuația coordonatei $x = h - \frac{gt^2}{2}$ cu $x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = \frac{v_0}{g} = t_u$. Timpul total de mișcare este $t_m = t_u + t_c = 2t_u = 4$s

Conform legii vitezei $v = -gt$, deoarece la coborâre corpul cade liber și cum v_0=0 atunci $v = -gt_c = -gt_u = -v_0 = -20$ m/s $\Rightarrow$ corpul revine în punctul de lansare cu viteza cu care a fost lansat.

5.a. Un corp aruncat vertical de la sol urcă și coboară astfel că $\Delta t = t_u + t_c = 2t_u$, deoarece $t_u = t_c$. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ și când $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_0 = \frac{g\Delta t}{2} = 30$ m/s.

b. Din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și pentru $v = 0$ aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul, astfel că $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g\Delta t^2}{8} = 45$ m.

6.a. Pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ si din condiția $v = 0$ în punctul de înălțime maximă obținem înălțimea maximă la care ajunge corpul $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 5\text{m}$.

Cum $h = \frac{h_{max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g}$, pe baza ecuației coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$ $\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} - v_0 t + \frac{v_0^2}{4g} = 0$, iar cele două soluții sunt: $t_{1,2} = \frac{v_0}{g}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ $\Rightarrow t_1$=0,29 s și t_2=1,71 s. Se obțin două valori care corespund momentelor când mingea trece prin punctul aflat la jumătate din înălțimea maximă la care ajunge corpul la urcare și respectiv la coborâre.

b. Pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $h=h_{max}/2$ obținem cele două valori ale vitezei mingii: $v^2 = v_0^2 - 2g\frac{h_{max}}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v = \pm\frac{v_0\sqrt{2}}{2} = \pm 7{,}05$ m/s, unde valoarea pozitivă se obține la urcarea mingii iar cea negativă la coborârea acesteia.

c. Cum definiția vitezei medii este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, iar $\Delta x = x_f - x_0 = \frac{h_{max}}{2}$ și $\Delta t = t_2 \Rightarrow v_m = \frac{v_0\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 1{,}463$ m/s.

Prin definiție viteza în modul medie este $|v|_m = \frac{d}{\Delta t}$, unde d reprezintă distanța parcursă de minge în intervalul de timp Δt. Dar $d = h_{max} + \frac{h_{max}}{2} = \frac{3h_{max}}{2} = \frac{3v_0^2}{4g}$, deoarece mingea urcă până la înălțimea maximă și apoi coboară pe distanța $\frac{h_{max}}{2} \Rightarrow |v|_m = \frac{3v_0\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 4{,}388$ m/s.

7.a. Conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ iar cum $v = \frac{v_0}{2}$ obținem $t = \frac{v_0}{2g} = 2$ s.

b. Utilizăm ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $v = \frac{v_0}{2}$ obținem $h = \frac{3v_0^2}{8g} = 60$ m

c. Observăm că $t_u = \frac{v_0}{g} = 4$ s și din această cauză cum a treia secundă de lansare este cuprinsă între secundele t_1=2 s și t_2=3 s înseamnă că în a treia secundă corpul se află în urcare. Calculăm din legea coordonatei valorile coordonatelor la momentele t_1 și t_2 si obținem: $x_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$=60 m și $x_2 = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 75$ m. Distanța parcursă de mobil eate $d = x_2 - x_1 = 15$ m.

8.a. Omul aflat pe platforma orizontală superioară vede coborând corpul după timpul Δt_1 măsurat din momentul urcării prin fața lui, astfel că $\Delta t_1 = t_{1u} + t_{1c} = 2t_{1u}$, deoarece $t_{1u} = t_{1c}$. Notăm cu v_{01} viteza cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma orizontală superioară. Din legea vitezei

$v = v_{01} - gt$ şi din condiţia de oprire $v = 0$ obţinem: $t_{1u} = \frac{v_{01}}{g} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2v_{01}}{g} \Rightarrow v_{01} = \frac{g\Delta t_1}{2} = 10$ m/s.

b. Notăm cu v_{02} viteza cu care trece corpul prin faţa omului aflat pe platforma orizontală inferioară. Analog $v_{02} = \frac{g\Delta t_2}{2} = 30$ m/s.

Aflăm distanţa dintre cele două platforme, pe baza ecuaţiei lui Galilei $v_{01}^2 = v_{02}^2 - 2gd \Rightarrow d = \frac{v_{02}^2 - v_{01}^2}{2g} = 40$ m.

9.a. Ambele picături cad liber, într-o mişcare uniform accelerată cu accelerația g. Alegem origine de timp, momentul când prima picătură se desprinde. Axa Ox este orientată în jos. Legile vitezelor celor două picături sunt $v_1 = gt$ şi respectiv $v_2 = g(t - \Delta t)$. Prin definiţie viteza relativă $v_r = v_1 - v_2 = g\Delta t \Rightarrow \Delta t = v_r / g = 1$ s reprezintă intervalul de timp care separă lansările celor două picături.

b. Cum $v_1 = 2v_2 \Rightarrow gt_1 = 2g(t_1 - \Delta t) \Rightarrow t_1 = 2\Delta t = 2$ s.

c. Distanţele parcurse de cele două picături în intervalul de timp t_1 sunt $d_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 2g\Delta t^2$ şi $d_2 = \frac{g}{2}(t_1 - \Delta t)^2 = \frac{g}{2}\Delta t^2$.

Distanţa care desparte picăturile este $d = d_1 - d_2 = \frac{3}{2}g\Delta t^2 = 15$ m.

10.a. Alegem originea axei de coordonate Ox, punctul de unde circarul lansează bilele. Alegem origine de timp momentul când este lansată prima bilă. Scriem legile de mişcare ale celor două bile: $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2$.

Condiţia ca cele două bile să se întâlnească este $x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2 \Rightarrow t_i = \frac{2v_{02} + g\Delta t^2}{2(v_{02} + g\Delta t - v_{01})} = 1{,}25$s reprezintă timpul după care bilele se întâlnesc.

b. Introducând valoarea timpul după care bilele se întâlnesc în oricare din ecuaţiile coordonatelor obţinem coordonata la care se întâlnesc bilele: x_i=4,6875m.

c. Calculăm după cât timp din momentul aruncării primei bile ajung corpurile pe sol. Pentru aceasta impunem condiţiile: $x_1 = 0$ şi $x_2 = 0$ şi obţinem $t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 2$ s şi $t_{m_2} = \frac{2v_{02}}{g} + \Delta t = 5$ s, iar intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este $\Delta t = t_{m_2} - t_{m_1} = 3$ s.

d. Cele două bile se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când prima bilă coboară după $t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 2$ s iar a doua bilă începe să urce. Dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t > t_{m_1}$ bilele nu se mai pot întâlni în aer şi prin urmare intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mare decât două secunde.

Cum $t_{m_2} = \frac{2v_{02}}{g} = 1$ s, bilele se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când ambele coboară iar intervalul de timp ce desparte

sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t_{min} = t_{m_1} - t_{m_2} = \frac{2(v_{01} - v_{02})}{g} \Rightarrow \Delta t_{min} = 1$s.

Dacă $\Delta t < \Delta t_{min}$, bila a doua ajunge în punctul de lansare mai repede decât prima bilă şi bilele nu se întâlnesc în aer. Prin urmare dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mic decât o secundă bilele nu se mai pot întâlni în aer. Deci intervalul de timp Δt ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este cuprins între (1s,2s) pentru ca bilele să se întâlnescă în aer.

11.a. Calculăm înălţimea maximă la care ajunge corpul lansat vertical de jos în sus din ecuaţia lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ punând condiţia ca în momentul opririi $v = 0$ şi obţinem $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 80$ m. Aflăm timpul de urcare al primului corp la înălţimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ cu $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 4$ s

b. Calculăm înălţimea de la care se lasă liber cel de-al doilea corp pe baza datelor problemei şi obţinem: $h = \frac{3}{4}h_{max} = \frac{3v_0^2}{8g}$. Alegem origine de timp momentul când se aruncă corpurile. Originea axei de coordonate Ox o alegem pe sol. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile considerând că primul mobil este cel aruncat de pe sol. Astfel $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = h - \frac{gt^2}{2} = \frac{3v_0^2}{8g} - \frac{gt^2}{2}$.

Impunem condiţia de întâlnire şi aflăm timpul după care corpurile se întâlnesc: $x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 t - \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{3v_0^2}{8g} - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{3v_0}{8g} = 1{,}5$ s şi înlocuind această valoare în oricare din ecuaţiile coordonatei obţinem: $x_1 = 48{,}75$ m.

c. Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii din ecuaţia vitezei prin introducerea timpului de întâlnire. Obţinem $v_1 = v_0 - gt_1 = 25$ m/s şi $v_2 = -gt_1 = -15$ m/s, deoarece în momentul întâlnirii primul mobil urcă, iar al doilea coboară. Viteza relativă cu care mobilul care urcă trece prin dreptul mobilului care coboară este $v_r = v_1 - v_2 = 40$ m/s.

12.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol şi origine de timp momentul când pornesc corpurile. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri, considerând primul corp cel care cade liber. Astfel: $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Aflăm timpul după care primul corp ajunge la sol din $x_1 = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \sqrt{2h/g} = 2$s.

Impunem condiţia de întâlnire $x_1 = x_2$ şi obţinem $h - \frac{g \cdot t^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_0 = \frac{h}{t_1}$.

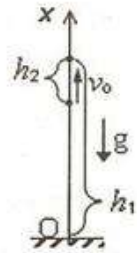
Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_1 = t_{c_1}$ viteza iniţială cu care se aruncă corpul al doilea este $v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 10$ m/s.

b. Din ecuaţia lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ calculăm înălţimea maximă la care ajunge corpul de pe sol, punând condiţia ca în momentul opririi $v = 0$.

Obținem: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{4} = 5$ m.

c. Calculăm pe baza ecuației lui Galilei vitezele cu care ajung corpurile pe sol, ambele având căderi libere de la înălțimile h și respectiv h_{max} după ce corpul al doilea s-a orpit. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh} = 20$ m/s și $v_2 = \sqrt{2gh_{max}} = v_1/2 = 10$ m/s.

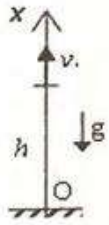
13.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp, cel care cade liber. Ecuația de mișcare a acestuia este $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și când ajunge la sol din $x_1 = 0$ aflăm timpul de coborâre al primului corp $t_{c_1} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 3{,}16$ s.



b. Ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp este $x_2 = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Impunem condiția de întâlnire a corpurilor $x_1 = x_2 \Rightarrow h_1 - \frac{g \cdot t^2}{2} = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ Viteza inițială cu care a fost lansat corpul al doilea este $v_0 = h_2/t_1$. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_1 = t_{c_1}$ atunci $v_0 \approx 3{,}16$ m/s.

c. Calculăm pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 + 2gh$ viteza cu care ajunge primul corp la sol din $v_0=0$ și $h=h_1$. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 31{,}62$ m/s.
Aplicăm ecuația lui Galilei pentru cel de-al doilea corp, ținând cont că $h = h_1 - h_2$ când corpul ajunge la sol. Obținem $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)} = 28{,}46$ m/s, deoarece la întoarcere corpul al doilea are o mișcare accelerată cu accelerația g și revine în punctul de lansare cu viteza v_0 cu care a fost aruncat, dar această viteză este orientată în jos.

14.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și originea de timp, momentul când se aruncă vertical în sus corpul aflat la înălțimea h. Scriem ecuația de mișcare a acestui corp: $x_1 = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ și aflăm după cât timp ajunge acest corp pe sol din condiția ca $x_1 = 0 \Rightarrow \frac{g \cdot t^2}{2} - v_0 t - h = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 4$ s.



b. Scriem ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp: $x_2 = h - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}$, deoarece acesta cade liber de la înălțimea h, dar mai târziu cu Δt. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol concomitet atunci $x_2 = 0$ când $t = t_{c_1} \Rightarrow 0 = h - \frac{g(t_{c_1} - \Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = t_{c_1} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1{,}18$ s.

c. Aflăm viteza cu care ajunge corpul al doilea la sol, aplicând ecuația lui Galilei și ținând cont că acesta cade liber de la înălțimea h. Obținem $v_2 = \sqrt{2gh} \approx 28{,}28$ m/s. Scriem ecuația vitezei pentru primul corp când acesta ajunge pe sol și $t = t_{c1}$. Obținem $v_1 = v_0 - gt_{c_1} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} = -30$ m/s, iar semnul minus apare deoarece corpul 1 se mișcă în sens contrar axei Ox.

15.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol şi origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp cel lansat de pe sol vertical în sus. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile: $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ şi $x_2 = h - v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$. Din condiţia de întâlnire $x_1=x_2$ obţinem $v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = h - v_{02}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{h}{v_{01} + v_{02}}$.

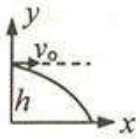
Ecuaţiile vitezelor celor două mobile sunt: $v_1 = v_{01} - gt$ şi $v_2 = -v_{02} - gt$. În momentul întâlnirii vitezele celor două corpuri sunt egale, dar opuse, deoarece mobilele se deplasează în sens contrar, astfel că $v_1 = -v_2 \Rightarrow v_{01} - gt_i = v_{02} + gt_i \Rightarrow t_i = \frac{v_{01} - v_{02}}{2g} \Rightarrow h = \frac{v_{01}^2 - v_{02}^2}{2g} = 100$ m.

b. Calculăm după cât timp din momentul lansării corpurile ajung pe sol, punând condiţia ca x=0. Pentru primul corp: $x_1 = 0 \Rightarrow t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 9$ s.

Pentru cel de-al doilea corp: $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{gt_{m_2}^2}{2} + v_{02}t_m - h \Rightarrow$ $t_{m_2} = \frac{-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{g} \Rightarrow t_{m_2} = \frac{v_{01} - v_{02}}{g} = 4$ s. Intervalul de timp care desparte sosirea corpurilor la sol este $\Delta t = t_{m_1} - t_{m_2} = 5$ s.

c. Utilizăm ecuaţia vitezei $v = v_0 - gt$ pentru a afla vitezele cu care cad corpurile pe sol. Pentru primul corp $v_1 = v_{01} - gt_{m_1} = -v_{01} = -45$ m/s, deoarece acesta se întoarce cu viteza cu care a plecat. Pentru corpul al doilea $v_2 = -v_{02} - gt_{m_2} = -v_{01} = -45$ m/s. Semnele „–" apar deoarece corpurile se deplasează în sens contrar axei Ox.

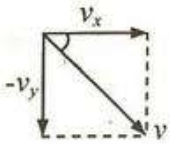
16.a. Studiem mişcarea cărţii pe două axe de coordonate Ox şi Oy, cu originea pe sol. Pe Ox cartea are o mişcare rectilinie uniformă cu viteza $v_x = v_0$, iar ecuaţia de mişcare este $x = v_0t$ iar pe Oy cartea are o mişcare uniform accelerată cu accelerаţia g şi fără viteză iniţială pe axa Oy $v_{0y} = 0$ (cădere liberă), astfel că ecuaţia de mişcare este $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând timpul din cele două ecuaţii. Obţinem $t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = h - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2}$. Traiectoria este o parabolă deoarece y este o funcţie de gradul doi de x.



b. Cartea ajunge la sol când $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}4$ s.

c. Cartea cade faţă de marginea masei la distanţa: $d = v_0t_c = v_0\sqrt{2h/g} = 40$ m

17.a. Studiem aruncarea pietrei pe orizontală pe axele de coordonate Ox şi Oy. Pe Ox mişcarea pietrei este rectilinie şi uniformă cu $v_x = v_0$, iar ecuaţia de mişcare este $x = v_0t$ iar pe Oy piatra cade liber de la înălţimea h, astfel că legea de mişcare este $y = h - \frac{gt^2}{2}$.



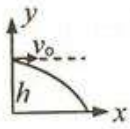
iar legea vitezei este $|v_y| = gt$. Cum vectorul viteză este tangent la traiectorie, îl descompunem în două componente v_x şi v_y astfel că $tg\,\alpha = \frac{|v_y|}{v_x} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{gt_m}{v_0} \Rightarrow t_m = \frac{v_0 tg\,\alpha}{g} \approx 2{,}595$ s.

Calculăm înălţimea casei din condiţia ca $y = 0 \Rightarrow h = \frac{gt_m^2}{2} = \frac{v_0^2 tg^2\alpha}{2g} = 33{,}75$ m.

b. Din desen $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\cos\alpha} = 30$ m/s.

c. Distanţa unde cade piatra se află din ecuaţia de mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza υ_0 pe axa *Ox*, astfel că $d = v_0 t_m = \frac{v_0^2}{g} tg\,\alpha \approx 38{,}9$ m.

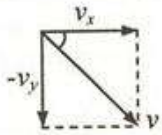
18.a. Studiem aruncarea pe orizontală a unui corp. Astfel pe axa *Ox* corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza v_0, astfel că $x = v_0 t$ iar pe axa *Oy* corpul are o cădere liberă, astfel că $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Timpul de cădere se obţine când corpul ajunge la sol astfel că $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.



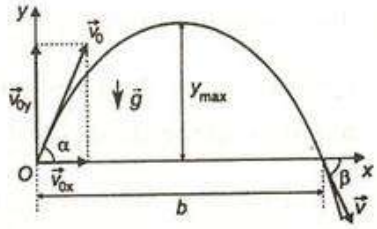
Deoarece corpurile cad de la aceeaşi înălţime $h_1 = h_2 = h \Rightarrow t_{c_1} = t_{c_2} = t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{t_{c_2}}{t_{c_1}} = 1$. Prin urmare corpurile cad în acelaşi interval de timp.

b. Deoarece $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_{02} t_{c_2}}{v_{01} t_{c_1}} = 4$ înseamnă că bătaia corpului al doilea este de patru ori mai mare decât bătaia primului corp.

c. Viteza la sol se calculează din geometrie ţinând cont că vectorul viteză este tangent la traiectorie, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, iar $v_x = v_0$ şi $v_y = -gt_c = -\sqrt{2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ Raportul vitezelor corpurilor când acestea ajung la sol este: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{\sqrt{v_{01}^2 + 2gh}} = 2$.



19.a. Studiem aruncarea pietrei sub un unghi pe cele două axe de coordonate cu originea pe sol *Ox* şi *Oy*. Astfel că pe *Ox* piatra are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, iar legea de mişcare este: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$ iar pe *Oy* piatra are o mişcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, iar legea de mişcare este $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Pentru a obţine ecuaţia traiectoriei, eliminăm timpul *t*, din cele două ecuaţii.

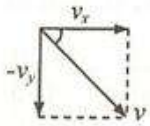


Astfel $t=\frac{x}{v_0\cos\alpha}\Rightarrow y=xtg\,\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ redă dependența coordonatei y în funcție de coordonata x. Cum funcția lui y de x este de gradul doi, traiectoria este o parabolă cu vârful în sus, deoarece coeficientul lui x^2 este negativ.

b. Pentru a determina unde lovește piatra solul punem condiția ca y=0 și obținem $x_m=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\approx 25{,}95$ m.

c. Aflăm timpul de urcare până la înălțimea maximă din legea vitezei pe axa Oy: $v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha-gt$ și din condiția de oprire $v_y=0\Rightarrow t_u=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$ Prin introducem timpului în ecuația coordonatei pe axa Oy obținem $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=11{,}25$ m.

d. Cum viteza corpului este tangentă la traiectorie o descompunem în două componente pe cele două axe, astfel că $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$. Cum $v_x=v_0\cos\alpha$, deoarece pe Ox corpul se mișcă rectiliniu uniform, iar $v_y=v_0\sin\alpha-gt$ obținem $v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}=10$ m/s.



20.a. Studiem aruncarea proiectilului pe axele de coordonate Ox și Oy cu originea pe sol. Astfel pe Ox $x=v_0\cos\alpha\cdot t$, deoarece pe această axă proiectilul are o mișcare rectilinie și uniformă iar pe Oy $y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}$, deoarece pe această axă proiectilul are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y}=v_0\sin\alpha$. Aflăm timpul de zbor al proiectilului din condiția ca acesta să ajungă la sol, astfel că $y=0\Rightarrow t_m=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\Rightarrow$ bătaia proiectilului se obține înlocuind timpul de mișcare în ecuația coordonatei pe axa Ox. Obținem $b=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ și înlocuind timpul de mișcare în ecuația coordonatei pe axa Oy, obținem înălțimea maximă a proiectilului $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

Cum $b=h_{max}\Rightarrow\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\Rightarrow 4\cos\alpha=\sin\alpha\Rightarrow 16\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$ și $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$.

b. Înălțimea maximă la care urcă proiectilul este $h_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=80$ m.

c. Timpul de zbor este $t_m=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=8$ s.

21.a. Mingea este aruncată de un copil sub un unghi α și cu viteza inițială v_0. Pe axa Oy, mingea are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y}=v_0\sin\alpha$, astfel că $v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha-gt$. În momentul opririi

$v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Timpul total de mişcare este $t = t_u + t_c = 2t_u = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, deoarece timpul de urcare este identic cu cel la coborâre. Aplicând ecuaţia lui Galilei la mişcarea pe verticală de jos în sus obţinem: $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh = v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh$.

În momentul opririi $\upsilon_y = 0 \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{gt^2}{8} = 5$ m şi înălţimea maximă faţă de sol până la care ridică mingea este $H_{max} = h_{max} + h = 6{,}2$ m.

b. Pe axa *Ox* mingea are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, astfel că distanţa la care se află copii pentru a prinde mingea este $d = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Deoarece această distanţă este maximă atunci $\sin 2\alpha = 1$, adică $\alpha = 45^0$ şi în acest caz $d = \frac{v_0^2}{g} = 10$ m.

c. Timpul de zbor al mingii când $\alpha = 45^0$ este $t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \approx 1{,}41$ s

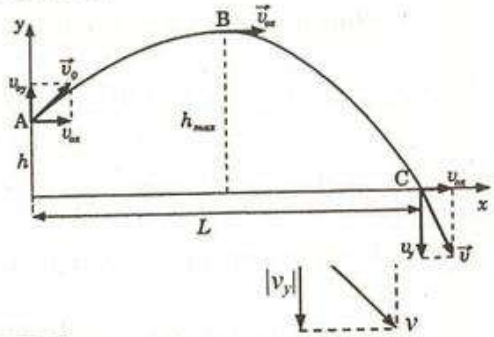
22.a. Studiem mişcarea corpului alegând originea axelor *Ox* şi *Oy* pe sol, la baza turnului. Pe axa *Ox*, corpul se mişcă rectiliniu şi uniform cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, astfel că legea de mişcare este $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$.

Pe axa *Oy*, corpul are o mişcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, astfel că legea de mişcare este $y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm din legea vitezei pe axa *Oy* $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$, timpul de urcare până la înălţimea maximă punând condiţia ca $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Astfel înălţimea maximă la care urcă corpul este $h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 15$ m

b. Aflăm timpul de zbor al corpului, punând condiţia ca:

$y = 0 \Rightarrow \frac{gt_m^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t_m - h = 0 \Rightarrow$

$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \approx 2{,}73$ s.



c. Distanţa la care cade corpul faţă de baza turnului este $d = v_0 \cos\alpha \cdot t_m \approx 47{,}23$m.

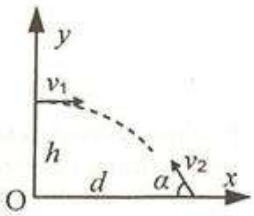
d. Din desen $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ unde $v_x = v_0 \cos\alpha$

iar $v_y = v_{0y} - gt_m \Rightarrow$

$v_y = v_{0y} \sin\alpha - gt_m = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 24{,}5$ m/s.

$tg\,\beta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_m}{v_0 \cos\alpha} = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ$.

23.a. Deoarece piatra loveşte pasărea, impunem condiţia de întâlnire faţă de cele două axe de coordonate Ox şi Oy, astfel că $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.



Originea axelor de coordonate se alege pe sol la baza stâlpului. Studiem mişcarea păsării pe cele două axe de coordonate: pe Ox: $x_1 = v_1 t$ şi pe Oy: $y_1 = h$.

Deoarece piatra este aruncată simultan cu zborul păsării, legile de mişcare ale pietrei pe cele două axe de coordinate sunt:

pe Ox: $x_2 = d - v_2 \cos\alpha \cdot t$ şi pe Oy: $y_2 = v_2 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$.

Din $y_1 = y_2 \Rightarrow h = v_2 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_2 \sin\alpha \pm \sqrt{v_2^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{g}$. Momentele de timp după care piatra loveşte pasărea sunt t_1=1 s, când piatra loveşte pasărea în urcare, şi t_2=2 s, când piatra loveşte pasărea în coborâre.

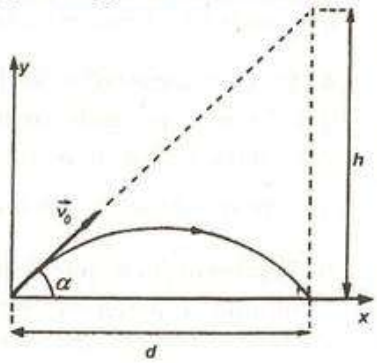
b. Din $x_1 = x_2 \Rightarrow v_1 t = d - v_2 \cos\alpha \cdot t \Rightarrow d = (v_2 \cos\alpha + v_1)t$. Obţinem valorile la care se poate afla pasărea de locul unde copilul lansează piatra: d_1=40 m şi d_2=80 m corespunzătoare valorilor t_1 şi t_2.

c. Descompunem viteza pietrei în cele două componente v_x şi v_y imediat înainte de ciocnire, astfel că în momentul lovirii păsării viteza pietrei este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Deoarece $v_x = v_2 \cos\alpha$ şi $v_y = v_2 \sin\alpha - gt$ obţinem $v = \sqrt{v_2^2 + g^2t^2 - 2gtv_2 \sin\alpha}$.

Pentru t_1 şi t_2 obţinem aceeaşi valoare a vitezei $v \approx 26{,}46$ m/s

24. Arătăm că glontele loveşte întotdeauna ţinta. Alegem originea axelor Ox şi Oy pe sol unde se află puşca. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiţia de întâlnire $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. Scriem legile de mişcare pentru glonte pe cele două axe: pe Ox: $x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t$ şi pe Oy: $y_1 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Ţinta se află la distanţa d de puşcă, astfel că $tg\,\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{tg\,\alpha}$ şi legile de mişcare pentru ţintă pe cele două axe sunt: pe Ox $x_2 = d = \frac{h}{tg\,\alpha}$ şi pe Oy: $y_2 = h - \frac{gt^2}{2}$.

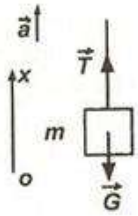


Cum $x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 \cos\alpha \cdot t_i = \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}$ obţinem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin\alpha}$=0,25s şi din $y_1 = y_2 \Rightarrow v_0 \sin\alpha \cdot t_i - \frac{gt_i^2}{2} = h - \frac{gt_i^2}{2}$ obţinem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin\alpha}$.

Deoarece se obţine aceeaşi formulă pentru timpul de întâlnire, înseamnă că glontele loveşte întotdeauna ţinta.

2.2. Principiile mecanicii

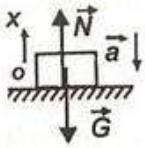
1.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului: greutatea G ca rezultat al interacțiunii corp–Pământ și tensiunea T ca rezultat al interacțiunii corp–fir. Se aplică principiul al II-lea al dinamicii: $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Se alege o axă Ox în sensul de mișcare și se proiectează relația vectorială. Scalar se obține: $T-mg=ma \Rightarrow T=m(g+a)=3mg$ =60 N



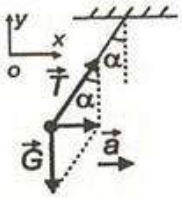
b. $a_{max}=T_{max}/m-g=30$ m/s²

2.a. Omul apasă asupra podelei liftului cu o forță egală cu reacțiunea normală, astfel că pe baza principiilor mecanicii $\vec{N}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Prin proiecție pe Ox se obține: $N-mg=-ma \Rightarrow N=m(g-a)=900$ N

b. Deoarece $N\geq 0 \Rightarrow m(g-a)\geq 0 \Rightarrow g\geq a \Rightarrow$ accelerația maximă cu care poate coborî liftul pentru ca omul să mai apese pe podea este accelerația gravitațională g=10 m/s².



3. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al II-lea al dinamicii. Vectorial se obține: $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Alegem un sistem de axe Ox și Oy și proiectăm pe aceste axe relația vectorială:
pe Ox: $T\sin\alpha=ma$ și pe Oy: $T\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow$
$T\cos\alpha=mg \Rightarrow tg\,\alpha=a/g \Rightarrow a=g\cdot tg\,\alpha=5{,}76$ m/s²
Din $\cos\alpha=G/T \Rightarrow T=mg/\cos\alpha=5{,}78$ N.

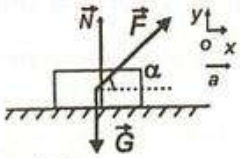


4. Pe baza desenului de la problema precedentă, proiectând relația vectorială $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$ pe axele Ox și Oy obținem: $T\sin\alpha=ma$ și $T\cos\alpha=mg$. Împărțim cele două relații și obținem: $tg\alpha=a/g \Rightarrow \alpha=30^0$, iar din teorema lui Pitagora $T^2=m^2a^2+m^2g^2 \Rightarrow T=m\sqrt{a^2+g^2}$ =2,31 N

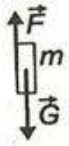
5. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{T}+\vec{G}+\vec{F}=m\cdot\vec{a}$. Scalar prin proiecția pe axele de coordonate se obține:

pe Ox: $F\cos\alpha=ma \Rightarrow F=\dfrac{ma}{\cos\alpha}=4$ N.

pe Oy: $N+F\sin\alpha=mg \Rightarrow N=mg-F\sin\alpha=16{,}54$ N.



6. Deoarece pisica rămâne în permanență la aceeași înălțime față de sol, ea se află în repaus, astfel că rezultanta forțelor este nulă. Asupra pisicii acționează atât greutatea G, ca rezultat al interacțiunii cu Pământul, cât și forța F, ca rezultat al interacțiunii pisicii cu lustra. Lustra împinge pisica în sus, iar pisica împinge lustra în jos, conform principiului acțiunii și reacțiunii. Studiem repausul pisicii, astfel că rezultanta forțelor care acționează asupra acesteia este nulă. Vectorial: $\vec{F}+\vec{G}=0$ și scalar: $F=mg=20$ N



Reprezentăm forțele ce acționează asupra lustrei și aplicăm

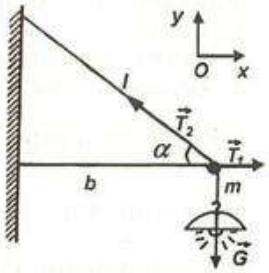
principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{G}' + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Scalar obținem: $G' + F = Ma \Rightarrow Mg + mg = Ma \Rightarrow a = \frac{(M+m)g}{M} = 15$ m/s².

7. Deoarece lampa se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă, conform principiului 1. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$ Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T_1 - T_2 \cos\alpha = 0$ și pe Oy:

$T_2 \sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$.

Din geometrie $\sin\alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\ell} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_2 = \frac{mg\ell}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 100$ N

și $T_1 = T_2 \cos\alpha = mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{mgb}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 80$ N.



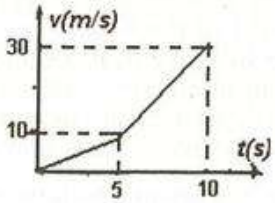
8.a. Pentru $t \in (0,5)$s, F_1=10 N $\Rightarrow$ accelerația este $a_1 = F_1/m$=2 m/s². Conform definiției accelerației: $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}$, deoarece la momentul inițial t_0=0, v_0=0 $\Rightarrow v = a_1 t = 2t$, astfel că atunci când t_1=5 s $v_1 = a_1 t_1 = 10$ m/s.

Pentru $t \in (5,10)$s $\Rightarrow F_1$=20N $\Rightarrow a_2 = F_2/m$=4 m/s²

Cum $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_{02}}{t - t_{02}} \Rightarrow v = v_{02} + a_2(t - t_{02})$, unde $v_{02} = v_{1max}$=10 m/s și t_{02}=5 s $\Rightarrow v$=4t−10.

Când t_f=10 s $\Rightarrow v_f$=30 m/s.

Reprezentarea grafică a dependenței vitezei în raport cu timpul este redată în figura alăturată.



b. Distanța parcursă de corp în timpul este $d = v_m t_1$,

deoarece $v_m = \frac{0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow d = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2}$=25 m

c. Prin definiție $v_m = \frac{D}{\Delta t}$, unde D reprezintă distanța totală parcursă. Pe baza interpretării grafice, deoarece viteza este reprezentată în funcție de timp, distanța parcursă se calculează prin aria de sub curba vitezei, astfel că:
$D = A_{triunghi} + A_{trapez}$=25 m+100 m=125 m $\Rightarrow v_m$=12,5 m/s.

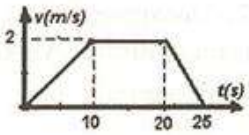
9.a. Când $t \in (0,10)$s, a_1=0,2 m/s², astfel că liftul are o mișcare uniform accelerată pornind din repaus. Pe baza reprezentării fortelor obținem $T_1 - mg = ma_1 \Rightarrow T_1 = m(g + a_1) = 5100$ N. Când $t \in (10,20)$s, a_2=0 m/s², astfel că liftul are o mișcare rectilinie și uniformă și T_2=mg=5000 N. Când $t \in (20,25)$s, a_3=−0,4 m/s², astfel că liftul are o mișcare uniform frânată $T_3 = m(g + a_3) \Rightarrow$ T_3=4800 N.

b. $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a_1 t$ =0,2t când, $t \in (0,10)$s $\Rightarrow v_1$=2 m/s când t_1=10 s

Când $t \in (10,20)$ s corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu v_1=2 m/s

Când $t\in(20,25)$s, $a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_{02}}{t-t_{02}}\Rightarrow v=v_{02}+a_2(t-t_{02})$ unde v_{02}=2 m/s şi t_{02}=20 s, astfel că v=10−0,4t.

Viteza finală se obţine când t=25 s$\Rightarrow v$=0 m/s, adică liftul se opreşte.



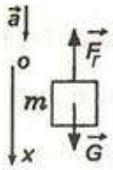
Reprezentarea grafică a vitezei liftului în funcţie de timp în intervalul de timp $t\in(0;25)$s este redată în figura alăturată.

c. Când t=15 s, liftul are o mişcare uniformă cu viteza v=2 m/s

d. Deoarece când $t\in(0,10)$s, v=0,2t, viteza medie reprezintă media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului, astfel că $v=\frac{0+v_1}{2}$=1 m/s

10. a. Din grafic pe baza definiţiei acceleraţiei se obţine $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}$=9 m/s²

b. Pe baza acţiunii forţelor şi a principiului II obţinem:



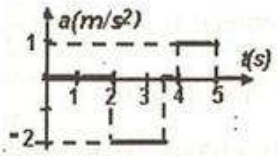
$mg-F_r=ma\Rightarrow F_r=m(g-a)$=0,1 N

c. Cum $d=v_m\Delta t$, iar cum $v=at$, viteza medie reprezintă media aritmetică a vitezelor $v_1=at_1$=4,5 m/s şi $v_2=at_2$=13,5 m/s, astfel că $v_m=\frac{v_1+v_2}{2}$=9 m/s$\Rightarrow d$=9 m

11.a. Deoarece viteza este reprezentată în funcţie de timp, distanţa parcursă de corp în primele t_1=3 s reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei şi axa timpului, astfel că $d_1=A_{trapez}$=5 m

b. În intervalul $t\in(3,5)$s corpul a parcurs distanţa d_2=1,25 m, adică aria trapezului de sub axa timpului. Distanţa totală parcursă de corp este $d=d_1+d_2$=6,25 m, astfel că modulul vitezei medii este $v_m=d/t$=1,25 m/s

c. Deoarece $F=ma$, atunci când $t\in(0;2)$s şi când $t\in(3,5;4)$s a=0 deoarece mobilul are o mişcare rectilinie şi uniformă. Când $t\in(2;3,5)$s acceleraţia este $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-2$ m/s² şi când $t\in(4;5)$s acceleraţia este $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=1$ m/s²

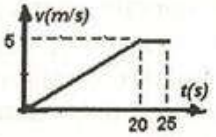


Reprezentarea grafică a forţei rezultante care se exercită asupra corpului este redată în figura alăturată.

12. a. Cum $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}\Rightarrow t=\frac{v}{a}$=20 s

b. Pe baza acţiunii forţelor şi a principiului II obţinem: $F-F_r=(M+m)a$. Cum $F_r=F/n\Rightarrow F=n(M+m)/(n-1)$=31,25 N

c. În primele t=20 s ciclistul are o mişcare accelerată şi porneşte din repaus, astfel că $v=at$=0,25t, iar după t=20 s, v=5 m/s. Apoi ciclistul are o mişcare uniformă. Reprezentarea grafică a vitezei ciclistului este redată în figura alăturată.



d. Considerăm biciclistul observator şi calculăm viteza relativă cu care se deplasează camionul faţă de el, $\vec{v}_r=\vec{v}_C-\vec{v}$. Scalar obţinem $v_r=v_C+v$ deoarece camionul se deplasează în sens contrar. Intervalul de timp Δt în care camionul depăşeşte ciclistul este $\Delta t=(\ell+\ell_1)/(v_C+v)$=0,6 s

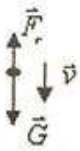
13. a. Din definiția accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -12$ m/s²

b. Cum $\Delta v = v - v_0$ obținem $v = v_0 + at$, astfel că atunci când t_1=0,5s viteza este v_1=18m/s, iar viteza medie este $v_m = \frac{v_1 + v_0}{2}$ =21 m/s

c. Pe baza principiului fundamental al dinamicii: $-mg - F_r = ma \Rightarrow F_r = -m(a+g)$=0,2N

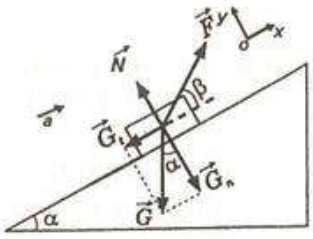
d. Distanța parcursă de corp la urcare reprezintă aria triunghiului asftfel că $d = \frac{v_0 t_m}{2}$ =24 m

14.a. În imediata vecinătate a Pământului, parasutistul are o mișcare uniformă astfel că: $\vec{G} + \vec{F}_r = 0 \Rightarrow mg = kv_0 \Rightarrow k = mg/v_0$=200 Ns/m



b. $\vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}$, iar scalar $mg - kv = ma \Rightarrow a = g\left(1 - \frac{v}{v_0}\right)$=5 m/s²

15.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $F\cos\beta - mg\sin\alpha = ma$ și pe *Oy*:



$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{m(a + g\sin\alpha)}{\cos\beta} \approx 9{,}92$N

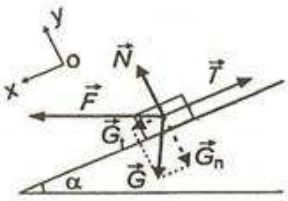
b. $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = mg\cos\alpha - \frac{m(a + g\sin\alpha)}{\cos\beta}\sin\beta$

$N = m\frac{g\cos(\alpha+\beta) - a\sin\beta}{\cos\beta}$ =1,65 N

c. Deoarece corpul nu mai apasă pe plan înseamnă că N=0$\Rightarrow$ $F = \frac{mg\cos\alpha}{\sin\beta} \approx 12{,}27$ N. Din $N = 0 \Rightarrow a = g\cos(\alpha+\beta)/\sin\beta = 3{,}65$ m/s²

16.a. Impunem condiția de echilibru corpului și proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = 0$. Obținem pe axa *Ox*: $F\cos\alpha + mg\sin\alpha - T = 0 \Rightarrow T = F\cos\alpha + mg\sin\alpha$ =35 N

b. Dacă se taie firul, corpul se mișcă accelerat, astfel că pe baza principiului al II-lea al dinamicii obținem $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = m\vec{a}$, iar prin proiecție pe axa *Ox* obținem:

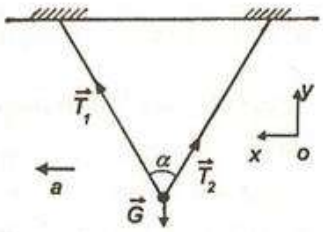


$F\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F\cos\alpha}{m} + g\sin\alpha \Rightarrow$

a=8,75 m/s²

c. Prin proiecția ecuației pe axa *Oy* obținem: $N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$. Deoarece corpul mai rămâne în contact cu planul înclinat, trebuie ca $N \geq 0$, astfel că $F \leq mgctg\alpha \Rightarrow$ $F_{max} = mgctg\alpha$=69,2 N

17.a. Reprezentăm forțele și studiem mișcarea corpului pe baza principiului II al dinamicii: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm relația pe axele de coordonate: pe *Ox*:



$$T_1\sin\frac{\alpha}{2}-T_2\sin\frac{\alpha}{2}=m\cdot a\Rightarrow T_1-T_2=\frac{m\cdot a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\ (1)$$ și pe*Oy*:

$$T_1\cos\frac{\alpha}{2}+T_2\cos\frac{\alpha}{2}-mg=0\Rightarrow T_1+T_2=\frac{mg}{\cos\frac{\alpha}{2}}\ (2)$$

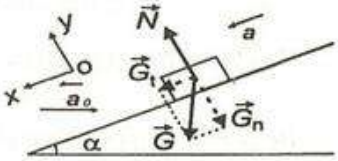
Adunăm cele două relații și apoi le scădem. Obținem:

$$T_1=\frac{m(a\cos\frac{\alpha}{2}+g\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\approx 20{,}34\text{ N și } T_2=\frac{m(g\sin\frac{\alpha}{2}-a\cos\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\approx 14{,}34\text{ N.}$$

b. Primul se va rupe firul în care tensiunea este mai mare, adică firul 1.

c. $T_1=F\Rightarrow F\sin\alpha-mg\sin\frac{\alpha}{2}=ma\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow a=\frac{2F}{m}\sin\frac{\alpha}{2}-g\cdot tg\frac{\alpha}{2}\approx 4{,}22\text{ m/s}^2$

18.a. Aplicăm principiul al doilea al mecanicii, după reprezentarea forțelor corpului și vectorial se obține $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$, deoarece corpul se deplasează față de un observator de pe sol cu o accelerație compusă din accelerația lui față de plan $\vec{a}$ și accelerația planului față de sol $\vec{a}_0$.

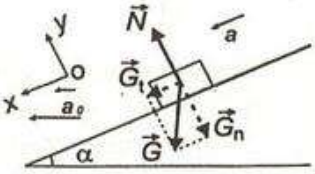


Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe *Ox*: $mg\sin\alpha=ma-ma_0\cos\alpha\Rightarrow a=g\sin\alpha+a_0\cos\alpha$=8,46 m/s²

pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=-ma_0\sin\alpha\Rightarrow N=m(g\cos\alpha-a_0\sin\alpha)$=5,64 N

b. Dacă planul este împins spre stânga, accelerația $\vec{a}_0$ are sens contrar. Relația vectorială se păstrează: $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$. Proiecția relației pe *Ox* devine:



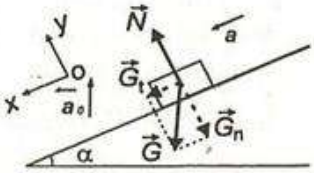
$mg\sin\alpha=ma+ma_0\cos\alpha\Rightarrow a=g\sin\alpha-a_0\cos\alpha$

a=5,64 m/s²

pe *Oy*: $N-mg\cos\alpha=ma_0\sin\alpha\Rightarrow N=m(g\cos\alpha+a_0\sin\alpha)$=8,46 N.

c. Pentru ca acest corp să nu apese pe planul înclinat, $N=0$, iar acest lucru se poate realiza doar în cazul în care planul se deplasează spre dreapta când $a_0=gctg\alpha$=10 m/s²

19.a. Aplicăm corpului principiul al doilea al mecanicii după reprezentarea forțelor: $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$, unde $\vec{a}+\vec{a}_0$ reprezintă accelerația corpului față de un observator aflat pe sol și este formată din accelerația corpului față de plan $\vec{a}$ și din accelerația $\vec{a}_0$ a planului față de sol. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.



Pe Ox: $mg\sin\alpha = ma - ma_0\sin\alpha \Rightarrow a = (g + a_0)\sin\alpha$ =7 m/s²

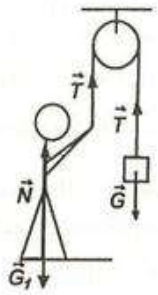
b. pe Oy: $N - mg\cos\alpha = ma_0\cos\alpha \Rightarrow N = m(g + a_0)\cos\alpha$ =24,22 N.

c. Proiectăm relația vectorială $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$ pe axele de coordonate când accelerația liftului este în jos:

pe Ox: $mg\sin\alpha = ma + ma_0\sin\alpha \Rightarrow a = (g - a_0)\sin\alpha$ =3 m/s²

pe Oy: $N - mg\cos\alpha = -ma_0\cos\alpha \Rightarrow N = m(g - a_0)\cos\alpha$ =10,38 N

20.a. Tensiunea în fir este forța F, astfel că T=F. Reprezentăm forțele care acționează asupra sacului și pe baza principiului II obținem: $T - mg = ma \Rightarrow a$=$F/m$−$g \Rightarrow a$=1,25 m/s²

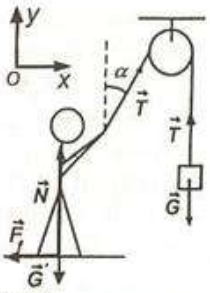


b. Reprezentăm forțele care acționează asupra omului și impunem condiția de echilibru $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = 0$. Scalar obținem: $T + N - G_1 = 0 \Rightarrow N = G_1 - F$ =100 N

c.Deoarece sacul este ridicat fără ca muncitorul să se ridice de pe sol atunci, N=0 $\Rightarrow F$=G_1, astfel ca a_{max}=G_1/m−g=2,5m/s²

d. T−$m'g$=$m'a \Rightarrow T$=$m'(g$+$a)$=450 N

21.a. Deoarece balotul m de află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă, astfel că: $\vec{T} + \vec{G} = 0 \Rightarrow T = mg$ =100 N



b. Impunem condiția de echilibru omului M și vectorial obținem: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar prin proiecție pe axele de coordonate se obține:

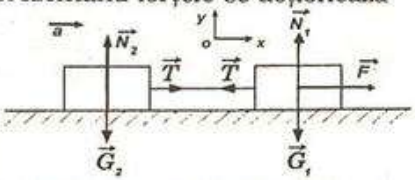
pe Ox: $T\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = T\sin\alpha = mg\sin\alpha$ =50 N

pe Oy: $T\cos\alpha + N = Mg \Rightarrow N = (M - m\cos\alpha)g$ =713,5 N

c. Asupra suprafeței omul exercită două forțe conform principiului acțiunii și reacțiunii: o forță normală și forța de frecare. Rezultanta acestor forțe este:

$R = \sqrt{N^2 + F_f^2} = g\sqrt{m^2 + M^2 - 2mM\cos\alpha} \approx 715{,}25$ N

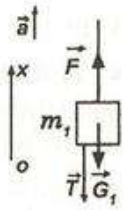
22. a. Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecăruia și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axele de coordonate. Pentru corpul M: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 = M\vec{a}$ și prin proiecție pe axa Ox: $F - T = Ma$ (1), iar pentru corpul m: $\vec{T} = m \cdot \vec{a}$ și scalar $T = ma$ (2). Adunăm relațiile (1) și (2) $\Rightarrow F = (M + m)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{M + m}$ =3 m/s²



b. $T = ma = \dfrac{mF}{M + m}$ =3 N.

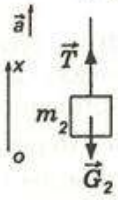
c. Dacă forța F formează cu orizontala un unghi α=30°, obținem prin proiecție pe axa Ox: $F\cos\alpha - T = Ma$ (3). Adunăm relațiile (2) și (3) și obținem $F\cos\alpha = (M + m)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha}{M + m}$ =1,5 m/s²

23.a. Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forţele ce acţionează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relaţiile vectoriale pe axa de coordonate *Ox*. Pentru corpul m_1: $F - m_1 g - T = m_1 a$ (1) şi pentru corpul m_2: $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem $F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a + g)$=48 N.



b. $T = m_2(a + g)$=36 N.

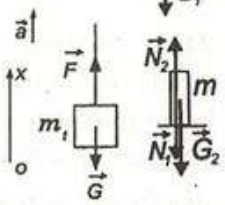
c. Dacă corpurile urcă rectiliniu şi uniform, accelerația corpului este a=0 $\Rightarrow F = (m_1 + m_2)g$ = 40 N.



d. Dacă tensiunea în fir atinge valoarea maximă, accelerația sistemului este $a' = \frac{T_{max}}{m_2} - g$ =5 m/s² $\Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a' + g)$ = 60 N.

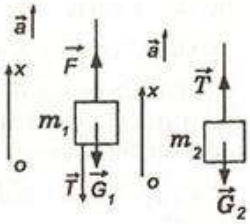
24. a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra primului corp şi impunem condiţia de echilibru. Obţinem: $N_1 + F - m_1 g = 0 \Rightarrow$ $N_1 = m_1 g - F$ =300 N

b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului aşezat pe suprafaţă şi impunem condiţia de repaus. Obţinem $N_2 - N_1 - m_2 g = F \Rightarrow N_2 = (m_1 + m_2)g - F$ =700 N



c. Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forţele ce acţionează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relaţiile vectoriale pe axa de coordonate *Ox*. Pentru corpul m_1: $F - m_1 g - T = m_1 a$ (1) şi pentru corpul m_2: $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Adunând relaţiile (1) şi (2) obţinem

$$F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow m_2 = \frac{F}{a + g} - m_1 = 40 \text{ kg}$$



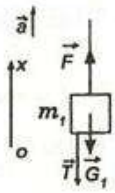
d. Tensiunea din fir este $T = F - m_1(g + a)$=480 N

25.a. Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m_t = m + m_0$ şi apoi reprezentăm forţele care acţionează asupra acestui corp. Reprezentăm forţele şi proiectăm pe axa *Ox*. Obţinem:

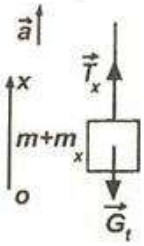
$$F - (m + m_0)g = (m + m_0)a \Rightarrow a = \frac{F}{m + m_0} - g = 2{,}5 \text{ m/s}^2$$

b. Împărţim firul în două porţiuni: porţiunea superioară de lungime $2\ell/3$ şi masă $m_1 = 2m_0/3$ şi o porţiune inferioară de lungime $\ell/3$ şi masă $m_2 = m_0/3$. Reprezentăm forţele şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa m_1: $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}$ şi scalar se obţine:

$$F - m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow F - \frac{2}{3} m_0 g - T = \frac{2}{3} m_0 a \quad (1)$$



Porțiunea inferioară de fir împreună cu masa m constituie un nou corp de studiu cu masa $M = m + m_2 = m + \frac{m_0}{3}$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa M: $\vec{T} + \vec{G}_t = M \cdot \vec{a}$ și scalar: $T - (m + \frac{m_0}{3})g = (m + \frac{m_0}{3})a$ (2).



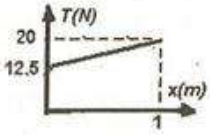
Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem $F - (m + m_0)g = (m + m_0)a$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m + m_0} - g \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})(g + a) \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})\frac{F}{m + m_0} = 15\text{N}$$

c. Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_x = m_0 x/\ell$ formează împreună cu corpul suspendat m un nou corp cu masa $m + m_0 x/\ell$, astfel că:

$$T - (m + \frac{m_0 x}{l})g = (m + \frac{m_0 x}{l})a \Rightarrow T = (m + \frac{m_0 x}{l})(g + a) = (m + \frac{m_0 x}{l})\frac{F}{m + m_0}$$

Când x=0 se obține valoarea minimă a tensiunii $T_{min} = \frac{mF}{m + m_0}$ =12,5 N, în partea inferioară a firului și când x=ℓ se obține valoarea maximă a tensiunii în fir T_{max}=F=20 N, în partea superioară a firului. Tensiunea în fir depinde liniar de x, iar reprezentarea grafică a lui T=$f(x)$ este o dreaptă.



26.a. Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m_t = m_1 + m_0 + m_2$ și apoi reprezentăm forțele care acționează asupra acestui corp. Reprezentăm forțele și proiectăm $\vec{F} + \vec{G}_t = m_t \vec{a}$ pe axa Ox (desen 23.a). Obținem:

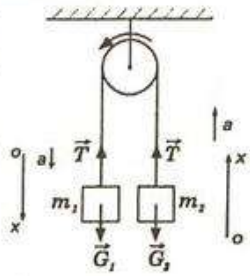
$$F - (m_1 + m_0 + m_2)g = (m_1 + m_0 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_0 + m_2} - g = 2 \text{ m/s}^2$$

b. Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_x = m_0 \cdot x/\ell = fm_0$ împreună cu corpul cu masa m_2 constituie un nou corp cu masa $M = fm_0 + m_2$. Pe baza proiecției relației vectoriale $\vec{T} + \vec{G} = M \cdot \vec{a}$ pe axa Ox: $T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(a + g) \Rightarrow$

$$T = \frac{(fm_0 + m_2)F}{m_1 + m_0 + m_2} = 50{,}4 \text{ N}$$

c. Dacă sistemul coboară cu accelerația a, proiectăm relația $\vec{T} + \vec{G}_t = M_t \cdot \vec{a}$ pe axa Ox: $(m_1 + m_0 + m_2)g - F = (m_1 + m_0 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_0 + m_2)(g - a) = 48$ N

27.a. Deoarece $m_1 > m_2$, maimuța coboară accelerat, iar ciorchinele urcă cu aceeași accelerație. Pentru maimuță $\vec{T} + \vec{G}_1 = m_1 \cdot \vec{a}$ și scalar $m_1 g - T = m_1 a$ (1).

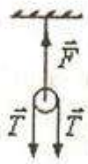


Pentru ciochinele de banane $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2 \cdot \vec{a}$ și scalar $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Din adunarea relațiilor (1)+(2) obținem:

$$g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = g\frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ și}$$

$$T = m_2(a + g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 480 \text{ N}.$$

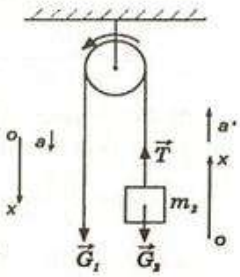
b. Impunem condiția de echilibru scripetului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0 \Rightarrow$ scalar $F=2T=\dfrac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$=960 N.



c. Din $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t} \Rightarrow v=at$ =2 m/s

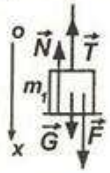
d. Deoarece de maimuța trage de fir cu o forță egală cu greutatea corpului ei, tensiunea în fir este egală cu G_1, astfel că $T=G_1$. Studiem mișcarea uniform accelerată a ciorchinelui de banane. Vectorial $\vec{T}+\vec{G}_2=m_2\vec{a}'$, iar scalar:

$T-m_2g=m_2a' \Rightarrow m_1g-m_2g=m_2a' \Rightarrow a'=g\dfrac{(m_1-m_2)}{m_2}$=5m/s²



28.a. Deoarece sistemul se află în repaus impunem condiția de echilibru corpurilor. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_2, astfel că $T=m_2g$. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0 \Rightarrow F=2T=2m_2g$=6 N

b. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masa m_1: $\vec{T}+\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{F}=0$, astfel că scalar $F+m_1g-T-N=0 \Rightarrow$ $N=F+(m_1-m_2)g$=3 N

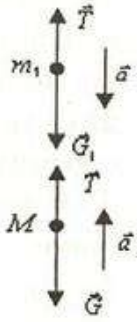


c. Lăsând liber sistemul de corpuri acesta se va mișca accelerat cu accelerația a. Deoarece corpul cu masă m_2 coboară și corpul m_1 urcă, pe baza demonstației de la 25.a din $T-m_1g=m_1a$ și din $m_2g-T=m_2a$ obținem $a=g\dfrac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}$=5 m/s². Cum $a=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at$, iar viteza medie este $v_m=v/2=at/2$, astfel că distanța parcursă de corpuri este $d=v_mt=at^2/2$=2,5 m

29.a. Deoarece corpul m se așază peste un corp M, noul corp cu masa $m_1=m+M$ va coborî accelerat cu accelerația a, iar M va urca accelerat cu aceeași accelerație. Reprezentăm forțele asupra corpurilor de mase m_1 și M apoi studiem mișcarea fiecărui corp. Aplicăm principiul al doilea al dinamicii și vectorial obținem pentru fiecare corp $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Scalar se obține:pentru corpul m_1:

$m_1g-T=m_1a \Rightarrow (m+M)g-T=(m+M)a \Rightarrow T=(m+M)(g-a)$ (1)

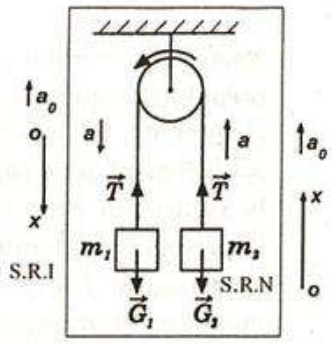
Pentru corpul M : $T-Mg=Ma \Rightarrow T=M(g+a)$=9,6 N (2)



b. Din (1) și (2) $\Rightarrow (m+M)(g-a)=M(g+a) \Rightarrow m=\dfrac{2Ma}{g-a}$=400 g

c. Studiem mișcarea corpului cu masa m: $\vec{G}+\vec{N}=m\cdot\vec{a}$, astfel că scalar $mg-N=ma \Rightarrow N=m(g-a) \Rightarrow N=2Ma$ =3,2 N

30.a.b. Pentru un observator aflat în lift corpurile se deplasează cu accelerația $\vec{a}$. Pentru un observator aflat pe sol, liftul se deplasează cu accelerația $\vec{a}_0$ în sus. Fiecare corp se va deplasa față de observatorul de pe sol cu accelerația formată din accelerația liftului față de sol și din accelerația corpului față de lift, adică cu accelerația $\vec{a}_0 + \vec{a}$. Studiem mișcarea fiecărui corp.



Pentru corpul m_1 vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = m_1(\vec{a} + \vec{a}_0)$ și scalar $m_1 g - T = m_1(a - a_0)$ (1)

Pentru corpul m_2: vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2(\vec{a} + \vec{a}_0)$ și scalar $T - m_2 g = m_2(a_0 + a)$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2) obținem $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a - (m_1 - m_2)a_0 \Rightarrow$

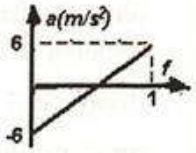
$a = \dfrac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2} = 3$ m/s² și $T = m_2 g + m_2(a_0 + a) = 2\dfrac{m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2} = 4{,}5$ N.

c. Impunem condiția de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{F} = \vec{T} + \vec{T}$ iar scalar: $F = 2T = \dfrac{4m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2} = 9$ N.

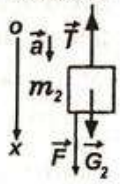
31. Calculăm masele porțiunilor de lanț care atârnă pe cele două părți. Astfel porțiunea de lanț cu lungimea ℓ_0, are masa $m_0 = m\ell_0/\ell = fm$, iar cealaltă porțiune are masa $m_1 = (1-f)m$. Din condițiile de mișcare ale celor două porțiuni de lanț obținem $m_0 g - T = m_0 a$ și $T - m_1 g = m_1 a$. Prin adunarea celor două relații obținem $a = g\dfrac{(m_0 - m_1)}{m_1 + m_0} = g(2f - 1) = 6$ m/s²

b. Considerăm jumătatea de lanț cu masa $m_2 = m/2$ și impunând condiția de mișcare acestei porțiuni de lanț obținem $m_2 g - T = m_2 a$, astfel că $T = m_2(g-a) \Rightarrow T = mg(1-f) = 12$ N

c. Reprezentarea grafică a accelerației lanțului în funcție de fracțiunea f este redată în figura alăturată.

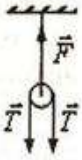


32.a. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_2, astfel că vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = 0$, deoarece $a = 0 \Rightarrow$ scalar $F + m_2 g = T$. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa m_1. Obținem vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$, iar scalar $N + T - m_1 g = 0 \Rightarrow N = (m_1 - m_2)g - F = 30$ N



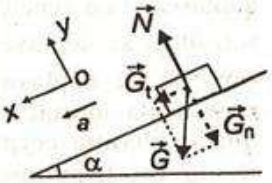
b. Dacă sistemul se mișcă accelerat, atunci pentru corpul m_2 vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a} \Rightarrow$ scalar $F + m_2 g - T = m_2 a$ (1).

Pentru corpul cu masă m_1 vectorial $\vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$, iar scalar $T - m_1 g = m_1 a$ (2). Din (1)+(2) obținem $F = (m_1 - m_2)g + (m_2 + m_1)a \Rightarrow F = 56$ N

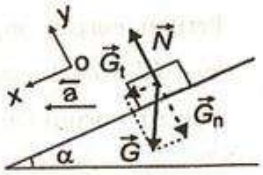


c. Impunem condiția de echilibru scripetului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow$ scalar $F = 2T = 2m_1(g + a) = 144$N

33.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului. Vectorial $\vec{N}+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox $mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g\sin\alpha$ $\Rightarrow a$=5 m/s² şi pe Oy $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$

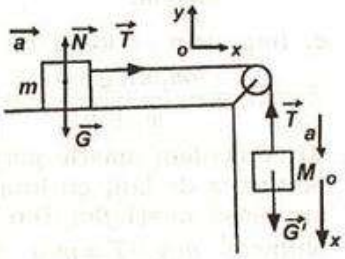


b. Pentru un observator de pe sol, corpul se deplasează împreună cu planul cu accelerația acestuia $\vec{a}$. Vectorial pentru corp: $\vec{N}+\vec{G}=m\vec{a}$ şi prin proiecţii obţinem:
Pe Ox: $mg\sin\alpha = ma\cos\alpha \Rightarrow a = g\,tg\,\alpha = 5{,}78$ m/s²



c. Pe Oy: $N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \Rightarrow N = mg/\cos\alpha$ =5,78 N

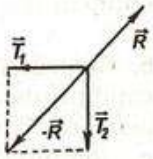
34.a Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forţele ce acţionează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare. Proiectăm relaţiile vectoriale pe axele de coordonate.
Pentru corpul m: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$, iar scalar pe Ox:
$T = m\cdot a$ (1)
Pentru corpul M: $\vec{G}'+\vec{T}=M\vec{a}$, iar scalar pe Ox:
$Mg - T = Ma$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$



$$Mg = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{Mg}{M+m} = 6{,}66 \text{ m/s}^2$$

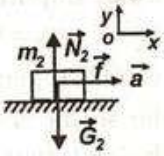
b. $T = ma = \dfrac{mMa}{m+M} = 6{,}66$ N.

c. Impunem condiţia de echilibru scripetului.
$\vec{R}$ este reacţiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni $\vec{T}_1$ şi $\vec{T}_2$ reprezintă forţele de interacţiune dintre scripete şi cele două părţi ale firului (cea orizontală şi cea verticală).

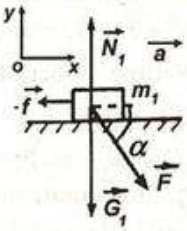


Astfel $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow R^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2T^2$,
deoarece $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} = \dfrac{mMa}{m+M}\sqrt{2} \approx 9{,}4$ N.

35.a. Studiem mişcarea fiecărui corp. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra fiecărui corp şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul cu masa m_2: vectorial $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{f}=m_2\vec{a}$ şi scalar $f = m_2 a$ (1), unde f este forţa cu care corpul 1 îl împinge pe al doilea.



Pentru corpul cu masa m_1: vectorial $\vec{F}+\vec{N}_1+\vec{G}_1-\vec{f}=m_1\vec{a}$ deoarece asupra corpului m_1 acţionează o forţă $(-\vec{f})$ cu care m_2 reacţionează asupra corpului m_1 conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Prin proiecţia pe axa de coordonate Ox obţinem $F\cos\alpha - f = m_1 a$ (2)

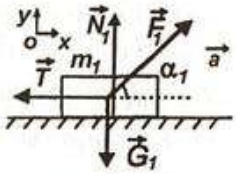


Din (1)+(2)$\Rightarrow$ $F\cos\alpha = (m_1+m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha}{m_1+m_2}$ =5 m/s²

b. Forţa cu care corpul 1 apasă asupra planului este reacţiunea normală. Din proiecţia pe axa Oy: $N_1 - m_1 g - F\sin\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = F\sin\alpha + m_1 g$ =64,6 N

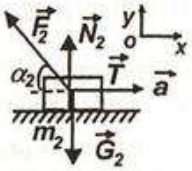
c. Forţa cu care primul corp impinge corpul al doilea este $f = m_2 a$ =5 N

36.a. Stabilim sensul în care se deplasează sistemul de corpuri comparând componentele celor două forţe pe orizontală. Cum $F_1 \cos\alpha_1 > F_2 \cos\alpha_2$ sistemul se deplasează spre dreapta accelerat. Pentru corpul m_1, vectorial $\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$, iar scalar pe Ox $F_1 \cos\alpha_1 - T = m_1 a$ (1)



Pentru corpul m_2, vectorial obţinem $\vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$, iar scalar pe Ox $T - F_2 \cos\alpha_2 = m_2 a$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$

$$F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2 = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F_1 \cos\alpha_1 - F_2 \cos\alpha_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

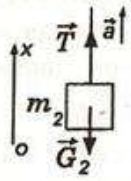


a=0,5 m/s²

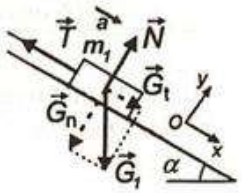
b. Din proiecţia pe axa Oy: $N_1 + F_1 \sin\alpha_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - F_1 \sin\alpha_1$. Deoarece apăsarea exercitată pe suprafaţa orizontală de către corpul de masă m_1 este nulă, atunci N_1=0$\Rightarrow F_1 = m_1 g / \sin\alpha_1$ =240 N

c. Deoarece sistemul de corpuri se deplasează orizontal cu viteză constantă, a=0$\Rightarrow F_1 \cos\alpha_1 = F_2 \cos\alpha_2 \Rightarrow F_2 / F_1 = \cos\alpha_1 / \cos\alpha_2 \approx 1{,}22$

37.a. Deoarece componenta tangenţială a greutăţii corpului 1 este mai mare decât greutatea corpului 2, corpul 2 urcă iar corpul 1 coboară de-a lungul planului înclinat. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra fiecărui corp şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul m_2: vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}$ şi scalar pe Ox $T - m_2 g = m_2 a$ (1), iar pentru corpul m_1: vectorial $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox obţinem $m_1 g \sin\alpha - T = m_1 a$ (2). Din(1)+(2)$\Rightarrow$



$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{g(m_1 \sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2} = 0{,}71 \text{ m/s}^2$$



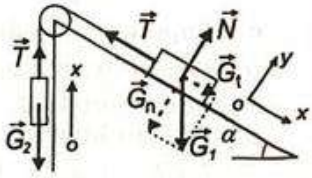
b. Dacă sistemul se deplasează în acelaşi sens atunci din

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{g \sin\alpha - a}{g + a} = 0{,}25 \text{ kg}$$

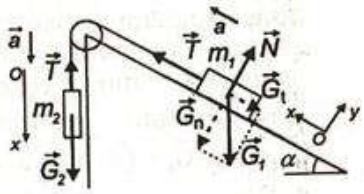
Dacă sistemul se deplasează în sens contrar atunci pentru corpul m_2: $m_2' g - T = m_2' a$ şi pentru corpul m_1: $T - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$. Prin adunarea celor două relaţii obţinem $m_2' g - m_1 g \sin\alpha = (m_1 + m_2')a \Rightarrow m_2' = m_1 \dfrac{g \sin\alpha + a}{g - a}$ =0,875kg

c. Dacă sistemul rămâne în repaus atunci a=0$\Rightarrow m_1 \sin\alpha = m_2 \Rightarrow$ m_1=m_2/sinα=0,8 kg

38.a. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$ şi scalar pe Ox: $m_1 g \sin\alpha - T = 0$ (1). Pentru corpul m_2 vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$ şi scalar pe Ox: $T - m_2 g = 0$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow m_1 \sin\alpha = m_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ =2



b. Deoarece $m_2=2m_1$ corpul cu masă m_2 coboară accelerat iar corpul m_1 urcă pe plan. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{T}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $T-m_1g\sin\alpha=m_1a$ (1). Pentru corpul m_2 vectorial $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $m_2g-T=m_2a$ (2). Din

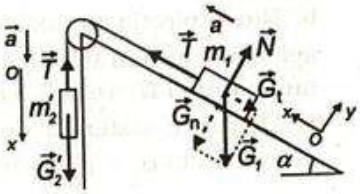


(1)+(2) $\Rightarrow g(m_2-m_1\sin\alpha)=a(m_1+m_2)\Rightarrow a=\dfrac{g(m_2-m_1\sin\alpha)}{m_1+m_2}$ =5/3 m/s²

Corpul m_2 coboară pe distanţa x, iar corpul m_1 urcă pe plan pe aceeaşi distanţă x. Din geometrie $h=x+x\sin\alpha\Rightarrow x=h/(1+\sin\alpha)$=1 m. Cum $x=v_mt$ şi $v_m=v/2\Rightarrow x=vt/2$. Din $a=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at\Rightarrow x=at^2/2\Rightarrow t=\sqrt{2x/a}\approx 1{,}09$ s

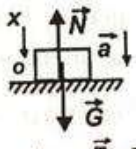
c. Viteza sistemului este $v=at$=1,81 m/s

39.a. Deoarece sistemul de corpuri este în echilibru atunci conform demonstraţiei de la problema precedentă de la punctul **a.**, obţinem $m_1\sin\alpha=m_2\Rightarrow m_2$=1 kg



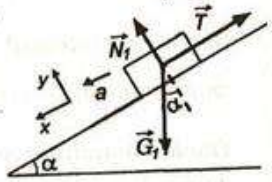
b. Dacă pe corpul 2 se adaugă o masă adiţională m, noua masă a corpului devine $m_2'=m_2+m$. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{T}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox $T-m_1g\sin\alpha=m_1a$ (1). Pentru corpul m_2' pe Ox: vectorial $\vec{G}_2'+\vec{T}=m_2'\vec{a}$ şi scalar pe Ox $m_2'g-T=m_2'a$ (2). Adunând (1)+(2) $\Rightarrow m_2'g-m_1g\sin\alpha=a(m_1+m_2')\Rightarrow m_2'(g-a)=m_1(g\sin\alpha+a)$

$\Rightarrow m_2'=\dfrac{m_1(g\sin\alpha+a)}{g-a}\Rightarrow m=\dfrac{m_1(g\sin\alpha+a)}{g-a}-m_2=0{,}75$ kg



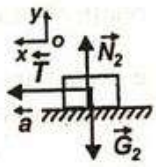
c. Studiem mişcarea corpului adiţional m. Vectorial $\vec{G}+\vec{N}=m\vec{a}$ şi scalar: $mg-N=ma\Rightarrow N=m(g-a)=6$ N.

40.a. Corpul cu masa m_1 va coborî şi va trage corpul cu masă m_2. Pentru m_1 vectorial: $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{T}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $m_1g\sin\alpha-T=m_1a$ (1).



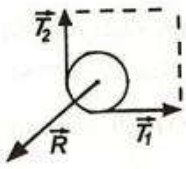
Pentru m_2 vectorial $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$, iar scalar $T=m_2a$ (2).

Din (1) şi (2) obţinem prin adunare $m_1g\sin\alpha=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\dfrac{m_1g\sin\alpha}{m_1+m_2}$ =3,75 m/s²



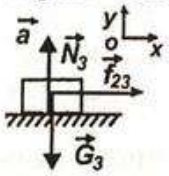
b. $T=\dfrac{m_1m_2g\sin\alpha}{m_1+m_2}$ =7,5 N

c. Impunem condiţia de echilibru scripetului. $\vec{R}$ este reacţiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni $\vec{T}_1$ şi $\vec{T}_2$ reprezintă forţele de interacţiune dintre scripete şi cele două părţi ale firului (cea orizontală şi cea verticală).

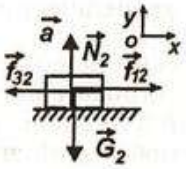


$\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)\Rightarrow R^2=T_1^2+T_2^2=2T^2$, deoarece $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2}\approx 10{,}575$ N.

41.a. Considerăm sistemul un corp cu masa $m=m_1+m_2+m_3$, astfel că asupra acestuia acționează forța F. Accelerația sistemului de corpuri este $a=F/(m_1+m_2+m_3)=1{,}5$ m/s²

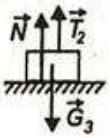


b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă m_3 și obținem vectorial $\vec{G}_3+\vec{N}_3+\vec{f}_{23}=m_3\vec{a}$. Scalar pe Ox: $f_{23}=m_3a=3$ N, unde f_{23} reprezintă forța cu care corpul cu masa m_2 împinge corpul cu masa m_3



c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă m_2 și obținem vectorial $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{f}_{32}+\vec{f}_{12}=m_2\vec{a}$. Scalar pe Ox: $f_{12}-f_{32}=m_3a$, unde f_{12} reprezintă forța cu care corpul cu masa m_1 împinge corpul cu masa m_2. $f_{12}=(m_3+m_2)a=7{,}5$ N

42.a. Impunem condiția de echilibru corpului m_3: $\vec{G}_3+\vec{N}+\vec{T}_2=0$ și scalar $N+T_2-m_3g=0 \Rightarrow T_2=m_3g-N=120$ N.



b. Din condiția de echilibru impusă scripetelui mobil obținem $2\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, astfel că $T_2=2T_1 \Rightarrow T_1=T_2/2=60$ N

c. Impunem condiția de echilibru corpurilor m_1 și m_2: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=0$. Scalar obținem $m_1g=T_1 \Rightarrow m_1=T_1/g=6$ kg

43. a. Deoarce ansamlul se mișcă uniform, atunci $F_t=F_R=F_r+3F_{rv}=11$ KN

b. Din principiul II pentru ansamblu obținem $F'_t-F_R=(M+3m)a$, astfel că a=0,35 m/s²

c. Din principiul II pentru ultimul vagon obținem $T-F_{rv}=ma$, astfel că T=9 kN

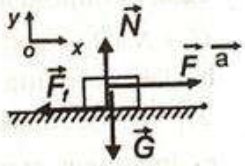
d. Cum $a'=\dfrac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -\dfrac{F_R}{M+3m}=\dfrac{0-v}{\Delta t} \Rightarrow v=\dfrac{F_R\Delta t}{M+3m}=11$ m/s

2.3. Forţa de frecare

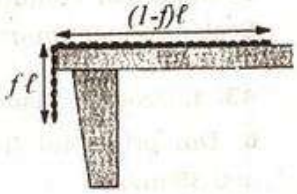
1. Metoda conform materiei obligatorii. Pe baza formulei vitezei medii: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{4-2(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-(4-2t+t^2)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = -2+2t+\Delta t.$

Viteza instantanee se obţine pentru $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_0 = 2t-2$. Pe baza formulei acceleraţiei medii $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{2(t+\Delta t)-2-(2t-2)}{\Delta t} = 2\ \text{m/s}^2 \Rightarrow$ acceleraţia medie coincide cu acceleraţia instantanee, deoarece $a = 2\ \text{m/s}^2$ este constantă şi atunci corpul are o mişcare rectilinie uniform accelerată.

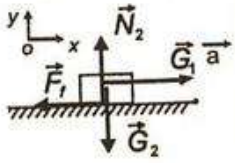
Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii şi obţinem vectorial:



$\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$. Proiectând pe axele de coordonate obţinem pe *Ox*: $F-F_f=ma$ şi pe *Oy*: $N-mg=0$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F=m(a+\mu g)=3$ N.



2. Împărţim lanţul omogen în două bucăţi: una de lungime $f\ell$ cu masa aferentă $m_1 = fm$, unde m reprezintă masa întregului lanţ şi alta de lungime $(1-f)\ell$ cu masa $m_2 = (1-f)m$. Forţa care trage bucata orizontală de lanţ cu masa m_2, este greutatea bucăţii verticale de lanţ cu masa m_1: $G_1 = m_1 g = fmg$. Considerăm că bucata orizontală m_2 începe să se mişte uniform, deci rezultanta forţelor este nulă. Vectorial $\vec{G}_1+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f = 0$ şi scalar prin proiecţia pe axele de coordonate obţinem: pe *Ox*: $G_1-F_f=0$ şi pe *Oy*:

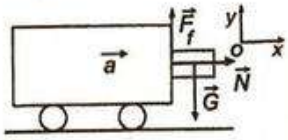


$N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = G_2 = m_2 g = (1-f)mg$

$F_f = \mu N_2 = \mu(1-f)mg \Rightarrow fmg = \mu(1-f)mg \Rightarrow$

$\mu = f/(1-f) = 0{,}25$

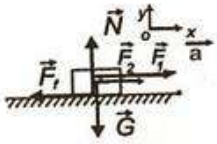
3. Deoarece corpul cu masa m nu cade, el se deplasează odată cu căruciorul, adică cu acceleraţia $\vec{a}$ pe care căruciorul o are faţă de un observator de pe sol. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului m şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate şi obţinem: pe *Ox*: $N = ma$ şi pe *Oy*:



$mg - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg$.

Dar conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu ma$. Din cele două relaţii obţinem $mg = \mu ma \Rightarrow \mu = g/a = 0{,}5$. Deoarece $\mu < 1$, problema este posibilă numai dacă $a > g \Rightarrow a > 10\ \text{m/s}^2$.

4.a. Pe baza relaţiei $a=\Delta v/\Delta t=v_1/t_1=0{,}3\ \text{m/s}^2$, deoarece din grafic $v_1=1{,}2$ m/s şi $t_1=4$ s



b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra maşinii şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

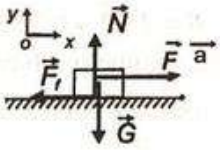
$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $F_1+F_2-F_f=m\cdot a \Rightarrow F_f=F_1+F_2-ma$ =500 N, astfel că $\mu=F_f/mg$=0,0625

c. Distanța parcursă de mașină este $d=v_m t=v_1 t/2$=2,4 m cu v_1=1,2 m/s

d. Din momentul încetării acțiunii celor doi oameni mașina va avea o mișcare uniform încetinită cu accelerația imprimată de forța de frecare, astfel că $a_1=-F_f/m=-\mu g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v_1/t_{op} \Rightarrow t_{op}=v_1/\mu g$=1,92 s

5.a. Accelerația corpului este $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v_1/t_1$=2 m/s², deoarece din grafic v_1=10 m/s și t_1=5 s

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $F-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg=0$, astfel că din $F_f=\mu N=\mu mg$, obținem $\mu=(F-ma)/mg$=0,3



c. Din momentul încetării acțiunii forței F, corpul va avea o mișcare uniform încetinită cu accelerația imprimată de forța de frecare, astfel că $a_1=-F_{f1}/m=-\mu_1 g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v_1/\Delta t$=-5 m/s², deoarece corpul se oprește în $\Delta t=t_2-t_1$=2 s, atunci $\mu_1=-a_1/g$=0,5

6.a. Cum $a=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t \Rightarrow v=v_0+at$, din identificarea coeficienților obținem v_0=8 m/s și a=-4 m/s²

b. Din $a=-F_f/m$ și $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow a=-\mu g$, obținem $\mu=-a/g$=0,4

c. Corpul are o mișcare rectilinie uniform încetinită, astfel că distanța parcursă de corp până la oprire este $d=v_m t_{op}=v_0\ t_{op}/2$. În momentul opririi $v=0 \Rightarrow t_{op}=-v_0/a \Rightarrow d=-v_0^2/2a$=8 m

7.a. Deoarece rezultanta celor două forțe este paralelă cu planul orizontal, asupra corpului acționează forțele ca în figura 5.b., astfel că $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Scalar obținem: pe Ox: $F-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg=0$ și cum din legea forței de frecare $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F=m(a+\mu g)$=300 N

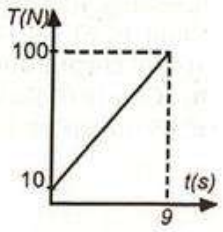
b. Din geometrie $\cos\alpha_1=F_1/F=0,5 \Rightarrow \alpha_1=60^0$ și cum $\alpha_1+\alpha_2=90^0 \Rightarrow \alpha_2=30^0$. Din $\mathrm{tg}\alpha_1=F_2/F_1 \Rightarrow F_2=F_1\mathrm{tg}\,\alpha_1$=259,5 N

c. Dacă acțiunea forțelor F_1 și F_2 încetează iar corpul va avea o mișcare rectilinie uniform încetinită, astfel că $a_1=-F_f/m$ și din $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow a_1=-\mu g$=-2 m/s²

8.a. Forța orizontală cu care trebuie să tragă omul de fir este $F=T$. Deoarece corpul se deplasează cu viteză constantă, rezultanta forțelor este nulă, astfel că $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Pe axa Ox: $T-F_f=0$ și pe Oy: $N-mg=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg$, obținem $T=\mu mg$=40 N

b. Impunem condiția de echilibru axului scripetelui și obținem: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0$, iar scalar $F=2T$=80 N

c. Pe baza relației vectoriale $\vec{T}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$ obținem scalar pe axa Ox: $T_1-F_f=ma$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem $a=(T_1-\mu mg)/m$=1 m/s²

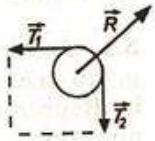


9.a. Firul se rupe când $F=T_{max}$, astfel că $10t+10=100 \Rightarrow t$=9 s

b. Cum $T=F=10t+10$, atunci când $t=0 \Rightarrow F$=10 N, iar când t=9 s $\Rightarrow F$=100 N. Dependența forței de tensiune din fir în funcție

de timp, în primele 9 s de la începutul acțiunii forței F este redată în graficul alăturat.

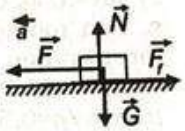
c. Pe baza relației vectoriale $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$ obținem scalar pe axa Ox: $F-F_f=ma$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem $a=(F-\mu mg)/m=0{,}2$ m/s², deoarece la $t=10$ s forța $F=110$ N



10.a. Forța care se exercită în fir este chiar $F=T$. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}=0$, scalar obținem $R=T\sqrt{2}\approx 0{,}282$ N, deoarece $T_1=T_2=T$

b. Studiem mișcarea accelerată a corpului, astfel că $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Pe axele de coordonate obținem pe Ox: $T-F_f=ma$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem

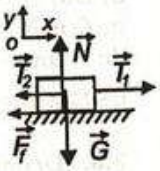
$a=\dfrac{T}{m}-\mu g=1$ m/s²



c. Din $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t_1}=\dfrac{v}{\Delta t_1}\Rightarrow v=a\Delta t_1=1$ m/s

d. Din momentul încetării acțiunii forței F corpul se va mișca frânat. Astfel $-F_f=ma'\Rightarrow -\mu mg=ma'\Rightarrow a'=-\mu g$.

Cum $a'=\dfrac{\Delta v_2}{\Delta t_2}=\dfrac{0-v}{\Delta t_2}\Rightarrow \Delta t_2=\dfrac{v}{\mu g}=1$ s $\Rightarrow \Delta t_1+\Delta t_2=2$ s

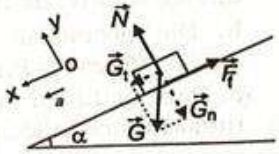


11.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T_1-T_2-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg=0$ și cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem

$\mu=\dfrac{T_1-T_2-ma}{mg}=0{,}04$

b. Cum $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t}\Rightarrow v=at=1$ m/s



c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=ma$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$.

Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$, astfel $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

Cum distanța coborâtă este $\ell=\dfrac{h}{\sin\alpha}=v_m t=\dfrac{vt}{2}=\dfrac{at^2}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{2h}{a\sin\alpha}}$, astfel că

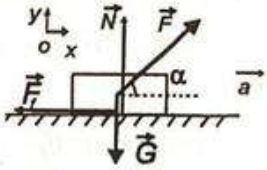
$v=\sqrt{2ah/\sin\alpha}=\sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)}\approx 23{,}6$ m/s

12.a. Asupra blocului de beton acționează forța de tracțiune F_t și o forță de frecare statică. Valoarea forței de frecare la alunecare este $F_{fa}=\mu mg=10$ N.
Când $t\in[0;1]$s $F_t<F_{fa}$, înseamnă că forța de tracțiune este insuficientă pentru a scoate corpul din repaus $\Rightarrow$ viteza blocului de beton este nulă.

b. Când $t\in[2;3]$s din grafic $F_t=20$ N. Obținem $F_t-F_{fa}=ma\Rightarrow F_t-\mu mg=ma\Rightarrow$ $a=(F_t-\mu mg)/m=1$ m/s²

c. În intervalul de timp $t\in[1;6]$s corpul se mişcă şi prin urmare forţa de frecare dintre blocul de beton şi suprafaţa orizontală este cea de alunecare $F_{fa}=\mu mg=10$ N. La momentul $t=0,3$ s corpul se află în repaus iar forţa de frecare statică este egală cu cea de tracţiune, astfel că $F_{fs}=F_{t1}$. Deoarece forţa de tracţiune în intervalul de timp $t\in[0;1]$s creşte direct proporţional cu timpul, după $t=0,3$ s va avea valoarea $F_{t1}=3$ N $\Rightarrow F_{fs}=3$ N

d. Asupra blocului în intervalul de timp $t\in[4;5]$s acţionează simultan forţa de tracţiune şi forţa de frecare la alunecare, astfel că forţa rezultantă este $F=F_t-F_{fa}=0$ N $\Rightarrow$ corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă



13.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$. Conform legii frecării $F_f=\mu N\Rightarrow$

$$F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=ma\Rightarrow F=\frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=15,35\text{N}$$

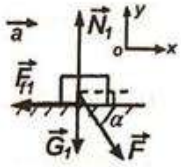
b. $N=mg-F\sin\alpha=10,28$ N

c. Deoarece corpul se mişcă uniform cu viteza, accelerația corpului este nulă $\Rightarrow a=0\Rightarrow F=\dfrac{\mu\cdot mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=5,11$ N

14.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$, iar prin proiecţia pe axele de coordonate (desen 13.a.) obţinem: pe Ox: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$. Din $F_f=\mu N\Rightarrow F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow$ $F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=ma\Rightarrow a=1$ m/s²

b. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at=15$ m/s

c. După încetarea acţiunii forţei F, asupra corpului acţionează numai forţa de frecare, astfel că că accelerația corpului este $a_1=-F_f/m$ şi din $F_f=\mu N=\mu mg$ $\Rightarrow a_1=-\mu g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v/\Delta t_{op}\Rightarrow\Delta t_{op}=v/\mu g=2,595$ s



15.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy:

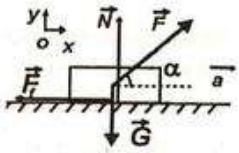
$N-mg-F\sin\alpha=0\Rightarrow N=mg+F\sin\alpha\Rightarrow F_f=\mu N\Rightarrow$

$$F_f=\mu(mg+F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg+F\sin\alpha)=ma\Rightarrow F=\frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 9,68\text{ N}$$

b. $N=mg+F\sin\alpha\approx 28,37$ Na

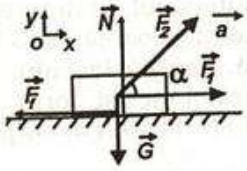
c. Dacă de corp se trage cu forţa F, pentru ca acest corp să nu apese asupra planului orizontal trebuie ca $N=0$. Cum pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow F=mg/\sin\alpha=23,12$ N şi în acest caz accelerația saniei este:

$a'=F\cos\alpha/m=g\cdot ctg\,\alpha\approx 5,78$ m/s²



16.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și deoarece acest corp se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.



Pe Oy: $N-mg+F_2\sin\alpha=0 \Rightarrow N=mg-F_2\sin\alpha\approx 51{,}35$ N

b. Pe Ox: $F_1+F_2\cos\alpha-F_f=0$ și cum $F_f=\mu N \Rightarrow$

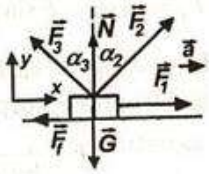
$F_f=\mu(mg-F_2\sin\alpha)$, astfel că

$$F_1+F_2\cos\alpha=\mu(mg-F_2\sin\alpha)\Rightarrow \mu=\frac{F_1+F_2\cos\alpha}{mg-F_2\sin\alpha}\approx 0{,}68$$

c. Deoarece valoarea coeficientului de frecare scade, corpul se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația pe axa Ox:

$F_1+F_2\cos\alpha-F_f=ma$ și $F_f=\mu(mg-F_2\sin\alpha)\Rightarrow a=\dfrac{F_1+F_2(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}-\mu g$

$a\approx 2{,}95$ m/s²



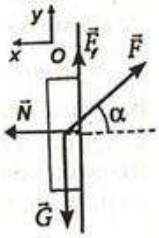
17.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox: $F_1+F_2\sin\alpha_2-F_3\sin\alpha_3-F_f=ma\Rightarrow F_f=F_1+F_2\sin\alpha_2-F_3\sin\alpha_3-ma$=3,46 N

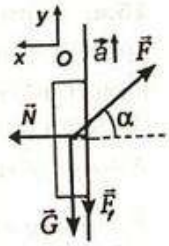
b. pe Oy: $N+F_2\cos\alpha_2+F_3\cos\alpha_3-mg=0\Rightarrow N=mg-F_2\cos\alpha_2-F_3\cos\alpha_3$=6 N.

c. Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu=F_f/N$=0,576



18.a. După reprezentarea forțelor, impunem condiția ca acest corp să se afle în repaus. În acest caz, rezultanta forțelor este nulă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_F+\vec{F}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $N-F\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\cos\alpha$ și pe Oy: $F_f+F\sin\alpha-mg=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu F\cos\alpha\Rightarrow$

$$mg=F(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\Rightarrow F=\frac{mg}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}=40\text{ N}$$

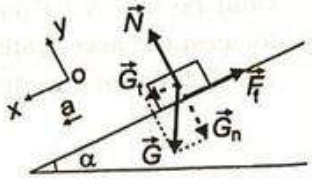


b. Forța de apăsare normală este: $N=\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}\approx 34{,}6$ N.

c. Deoarece corpul urcă accelerat, pe baza principiului al doilea al dinamicii $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_F+\vec{F}=m\vec{a}$ și prin proiecție pe axa Ox obținem: $F\sin\alpha-mg-F_f=ma$ și pe Oy $N-F\cos\alpha=0$, astfel că

$F_f=\mu N=\mu F\cos\alpha$. Astfel $F\sin\alpha-mg-\mu F\cos\alpha=ma\Rightarrow F=\dfrac{m(a+g)}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}$=132N

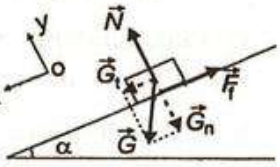
19.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra snowmobilului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$.



Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow$ $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$=const$\Rightarrow$ snowmobilul are o mişcare rectilinie uniform accelerată. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t \Rightarrow a=3$ m/s²

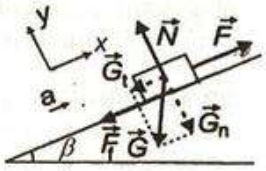
b. $F_f = m(g\sin\alpha - a)$=1600 N

c. Din $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \dfrac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \approx 0{,}231$



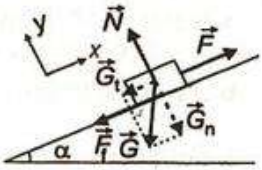
20.a. Deoarece corpul începe să alunece pe planul înclinat, mişcarea acestuia este uniformă şi rezultanta forţelor este nulă, conform principiului 1 al mecanicii. $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg\sin\alpha$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$ $\Rightarrow$ tgα=0,578. Unghiul α pentru care corpul lunecă uniform pe planul înclinat se numeşte unghi de frecare, astfel încât tangenta unghiului de frecare reprezintă fizic coeficientul de frecare la alunecare

b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$.

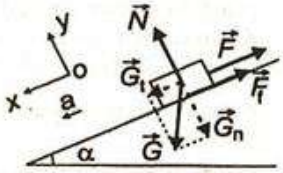


Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe *Ox*: $F - mg\sin\beta - F_f = ma$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\beta = 0$
$\Rightarrow N = mg\cos\beta$ Conform legii frecării:
$F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\beta \Rightarrow F - mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = ma$
$\Rightarrow F = m(g\sin\beta + \mu g\cos\beta + a)$=6,77 N

c. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/\Delta t \Rightarrow v=a\Delta t$. Deoarece viteza corpului creşte direct proporţional cu timpul, viteza medie este $v_m=v/2=a\Delta t/2$, astfel că distanţa parcursă de corp este $d=v_m\Delta t=a\Delta t^2/2$=4 m



21.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului ca în figură şi impunem condiţia ca acest corp să mişte uniform (a=0) astfel că: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia pe axele de coordonate. Obţinem pe *Ox*:

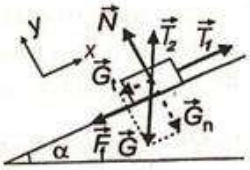


$F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$ şi din $F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$
$\mu = \dfrac{F - mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}$=0,2

b. Deoarece forţa cu care se trage de fir este mai mică decât cea iniţială corpul coboară, astfel că $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, iar scalar prin proiecţia pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F - F_f = ma$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$
$N = mg\cos\alpha$ şi din $F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$
$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - F/m$=0,4 m/s²

c. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/\Delta t \Rightarrow v=a\Delta t$=0,8 m/s

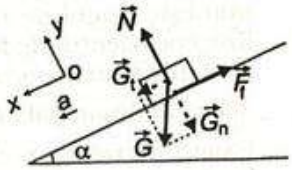
22.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului ca în figură și impunem condiția ca acest corp să miște uniform (a=0) astfel că: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate: Pe Ox: $T_1+T_2\sin\alpha-mg\sin\alpha-F_f=0 \Rightarrow F_f=T_1+(T_2-mg)\sin\alpha$



F_f=4 kN, ($\sin\alpha=h/\ell$=0,6 și $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$=0,8) și pe Oy: $N+T_2\cos\alpha-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=(mg-T_2)\cos\alpha$

b. Pe baza legii frecării obținem: $\mu=\dfrac{F_f}{N}=\dfrac{T_1+(T_2-mg)\sin\alpha}{(mg-T_2)\cos\alpha}$=0,25

c. Accelerația cu care coboară liber lada goală pe planul înclinat se află reprezentând forțele și scriind principiul fundamental al dinamicii, astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$. Pe baza legii frecării $F_f=\mu N$ $\Rightarrow$ $mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \Rightarrow a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$=4m/s² $\Rightarrow$ observăm că accelerația cu care coboară lada goală nu depinde de masa acesteia



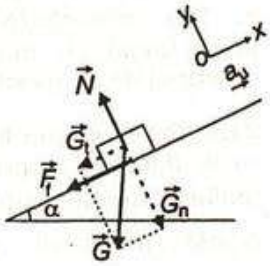
23.a. Calculăm accelerația cu care urcă corpul pe planul înclinat, după reprezentarea forțelor și aplicarea principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $-F_f-mg\sin\alpha=m\cdot a_u$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$

Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$-\mu mg\cos\alpha-mg\sin\alpha=ma_u \Rightarrow a_u=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) \Rightarrow$

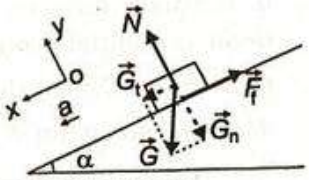
a_u=−9,9 m/s². Semnul "−" al accelerației ne arată că acest corp are o mișcare uniform frânată.



b. Pe baza formulei accelerației medii: $a_m=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v-v_0}{t-t_0}$ și ținând cont că $a_m=a$, iar $t_0=0 \Rightarrow v=v_0+at$. Calculăm timpul până la oprire din condiția $v=0 \Rightarrow 0=v_0+at_{op} \Rightarrow t_{op}=-v_0/a$=1 s.

c. Distanța pe care o parcurge corpul până la oprire este $s_{op}=v_m t_{op}$, unde viteza medie se obține ca fiind media aritmetică a valorilor inițială și finală deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel că $v_m=v_0/2 \Rightarrow s_{op}=-v_0^2/2a$=4,95 m.

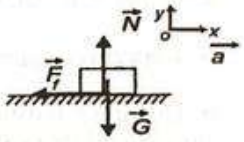
24.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=mg\cos\alpha$.



Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \Rightarrow$

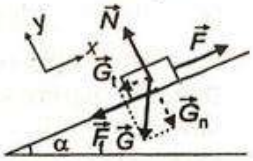
$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 2{,}84$ m/s².

b. La baza planului corpul are o viteză cu care se mişcă în continuare pe planul orizontal. Aflăm accelerația corpului pe planul orizontal. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:pe Ox: $-F_f=m\cdot a$ şi pe Oy: $N-G=0\Rightarrow N=mg$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\Rightarrow-\mu mg=ma\Rightarrow a=-\mu g=-2{,}5$ m/s², iar semnul minus ne arată că acest corp are o mişcare încetinită.



c. Pentru ca acest corp să urce uniform pe planul înclinat, trebuie ca $\vec{a}=0$, deci rezultanta forțelor care acționează asupra lui să fie nulă: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $F-mg\sin\alpha-F_f=0$ şi pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0\Rightarrow$

$F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow F=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$=14,325 N



25.a. Pe baza interpretării geometrice distanța parcursă de corp până la oprire este aria triunghiului, astfel că d=A=4 m

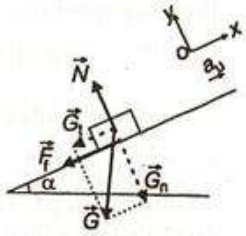
b. Studiem mişcarea corpului la urcarea pe plan înclinat. Astfel cum $a_u=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{0-v_0}{\Delta t}=-8$ m/s². Reprezentăm forțele şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $-F_f-mg\sin\alpha=m\cdot a_u$ şi pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$

Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow$

$-\mu mg\cos\alpha-mg\sin\alpha=ma_u\Rightarrow a_u=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\Rightarrow$

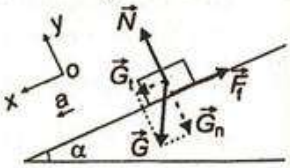
$\mu=-\left(tg\alpha+\dfrac{a_u}{g\cos\alpha}\right)$=0,25, deoarece $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$=0,8



c. Studiem mişcarea corpului la coborârea pe plan înclinat. Reprezentăm forțele şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ şi pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$.



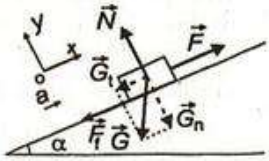
Pe baza legii frecării obținem:

$F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma\Rightarrow a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$.

Din definiția accelerației $a=\dfrac{\Delta v'}{\Delta t'}=\dfrac{v}{\Delta t'}\Rightarrow\Delta t'=\dfrac{v}{a}$=2 s, astfel că t_1=3 s

d. Distanța parcursă de corp la coborârea pe planul înclinat până când viteza revine la valoarea inițială este egală cu aria celui de-al doilea triunghi, astfel că d'=A'=8 m, iar d_{total}=d+d'=12 m.

26.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra saniei şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F-mg\sin\alpha-F_f=ma$ şi pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$. Conform legii frecării:

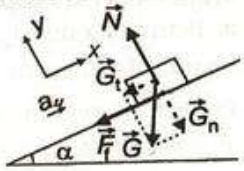


$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$

$F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0{,}5\ \text{m/s}^2$

b. Deoarece sania se mişcă accelerat distanţa parcursă de sanie este $d=v_m t$. Deoarece viteza corpului creşte direct proporţional cu timpul, viteza medie este $v_m=v/2$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at$, astfel că $v_m=at/2 \Rightarrow d=at^2/2=9$ m

c. După încetarea acţiunii forţei F, sania va avea o mişcare uniform încetinită, astfel că $\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}_u$.



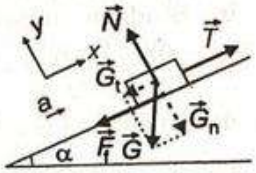
Pe Ox: $-mg\sin\alpha - F_f = m\cdot a$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$.

Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

Distanţa parcursă de corp până la oprire este $d_{op}=v_m t_{op}$, unde $v_m=v/2$, astfel că $d_{op}=vt_{op}/2$. Cum $a_u=\Delta v/\Delta t=-v/t_{op} \Rightarrow t_{op}=-v/a_u$ $\Rightarrow d_{op}=-v^2/2a_u=v^2/2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=0{,}45$ m, unde $v=at=3$ m/s

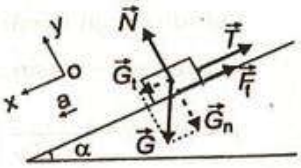
27.a. Deoarece $T > mg\sin\alpha$ corpul se va deplasa pe planul înclinat în sus. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\vec{a}$.



Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $T - mg\sin\alpha - F_f = ma$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$ şi c

$F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow a = \frac{T - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m} = 7{,}5\text{m/s}^2$



b. Deoarece $T < mg\sin\alpha$, corpul se va mişca în jos pe planul înclinat. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

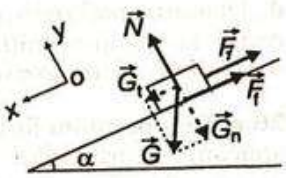
$\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $mg\sin\alpha - T - F_f = ma$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$.

Cum $F_f = \mu N = \mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow a = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - T}{m} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$

c. Dacă corpul urcă uniform în situaţia de la punctul **a.**, impunem condiţia ca $a=0 \Rightarrow T = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)=7{,}5$ N. Dacă corpul coboară uniform în situaţia de la **b.**, impunem condiţia ca $a=0 \Rightarrow T = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)=2{,}5$ N

28.a. Deoarece corpul este menţinut în repaus, rezultanta forţelor ce acţionează asupra corpului este nulă, iar forţa F_1 este aplicată de-a lungul planului în sus, la fel ca şi forţa de frecare. Utilizăm principiul al doilea al dinamicii, după reprezentarea forţelor care acţionează asupra corpului.

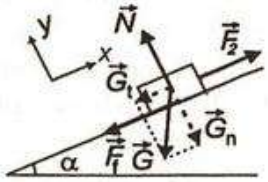


Obţinem: $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=0$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $mg\sin\alpha - F_1 - F_f = 0$ şi pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$.

Cum $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = F_1$ (1). Studiem mişcarea uniformă în sus pe planul înclinat a corpului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii, după reprezentarea forţelor care acţionează asupra corpului, obţinem vectorial: $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_2 - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$.

$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow F_2 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$ (2).



Adunăm relaţiile (1) şi (2): $F_1 + F_2 = 2mg\sin\alpha \Rightarrow$

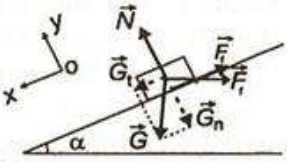
$$m = \frac{F_1 + F_2}{2g\sin\alpha} = 1{,}41 \text{ kg}$$

b. Împărţim relaţia (1) la relaţia (2) şi obţinem:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow \mu = \frac{(F_2 - F_1)}{(F_1 + F_2)} tg\alpha = 0{,}5.$$

c. Unghiul de frecare este unghiul planului înclinat pentru care un corp lăsat liber pe plan coboară uniform, astfel că $\vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Pe axe obţinem prin proiecţii: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$, astfel că din $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = \mu = 0{,}5$

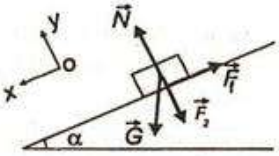
29.a. Studiem echilibrul corpului în situaţia în care asupra corpului se aplică o forţă orizontală. După reprezentarea forţelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii şi obţinem $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f - F_1\cos\alpha = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha - F_1\sin\alpha = 0$.



$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F_1\sin\alpha) \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_1\sin\alpha - F_1\cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

Studiem echilibrul corpului în situaţia în care asupra corpului se aplică o forţă normală. Reprezentăm forţele şi ţinem cont că în repaus, rezultanta forţelor este nulă $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_2 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm pe axele de coordonate ecuaţia vectorială şi obţinem pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha - F_2 = 0 \Rightarrow$

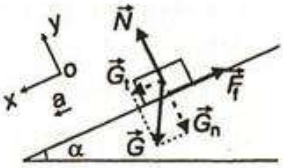


$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F_2) \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_2 = 0 \Rightarrow$

$$F_2 = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu}.$$

Cum $F_2 = nF_1 \Rightarrow \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu} = n\dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow \mu = \dfrac{\cos\alpha}{n - \sin\alpha} \approx 0{,}31$

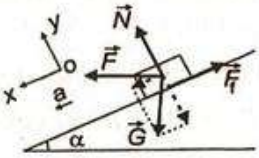
b. Dacă corpul este lăsat liber pe planul înclinat din condiţia vectorială $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$, prin proiecţia pe axele de coordonate, obţinem: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = m \cdot a$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$. Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$



$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 4{,}87 \text{ m/s}^2$

Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at=9{,}74$ m/s

c. Distanța parcursă de corp este $d=v_m t$, unde $v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2$ $\Rightarrow d=9{,}74$ m



30.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $F\cos\alpha+mg\sin\alpha-F_f=ma$ și pe Oy: $N+F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0$.

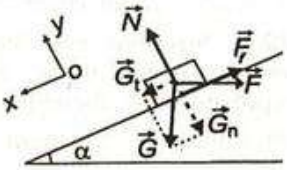
Din legea frecării:

$F_f=\mu N=\mu(mg\cos\alpha-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha+mg\sin\alpha-\mu(mg\cos\alpha-F\sin\alpha)=ma$

$\Rightarrow a=\dfrac{F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}+g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\approx 4{,}7$ m/s²

b. Apăsarea corpului pe planul înclinat este $N=mg\cos\alpha-F\sin\alpha\approx 16{,}3$ N

c. Pentru ca acest corp să nu mai apese pe planul înclinat, trebuie ca $N=0$ $\Rightarrow F=mgctg\,\alpha\approx 34{,}6$ N

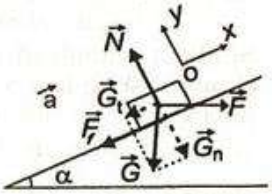


31.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Oy: $N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\sin\alpha+mg\cos\alpha=65$ N.

b. Proiectând pe axa Ox:

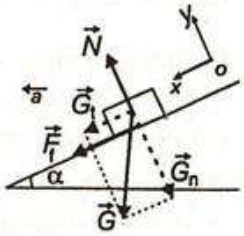
$mg\sin\alpha-F\cos\alpha-F_f=0\Rightarrow F_f=mg\sin\alpha-F\cos\alpha\approx 8{,}65$ N

c. Din legea frecării: $F_f=\mu N\Rightarrow\mu=\dfrac{F_f}{N}=\dfrac{mg\sin\alpha-F\cos\alpha}{mg\cos\alpha+F\sin\alpha}\approx 0{,}133$



32.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Deoarece $F\cos\alpha\geq mg\sin\alpha$, corpul va urca acclerat. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe Ox: $F\cos\alpha-F_f-mg\sin\alpha=ma$ și pe Oy: $N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\sin\alpha+mg\cos\alpha$. Din legea frecării $F_f=\mu N\Rightarrow a=\dfrac{F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{m}-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\approx 3{,}33$ m/s²

b. Deoarece corpul urcă uniform, $a=0\Rightarrow F=\dfrac{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 20{,}76$ N

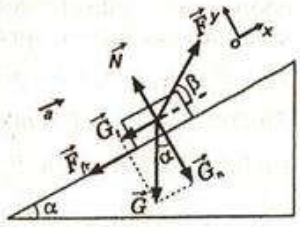


c. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului. Impunem condiția ca rezultanta forțelor să fie egală cu $m\cdot\vec{a}$, deoarece față de un observator aflat pe sol corpul se deplasează odată cu planul, adică cu accelerația orizontală $\vec{a}$ a planului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii se obține: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe axa Ox: $mg\sin\alpha+F_f=ma\cos\alpha$ și pe Oy: $N=mg\cos\alpha+ma\sin\alpha\Rightarrow N-mg\cos\alpha=ma\sin\alpha$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha) \Rightarrow$

$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + \mu ma\sin\alpha = ma\cos\alpha \Rightarrow a = \dfrac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \approx 10{,}38\ \text{m/s}^2$

33.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, deoarece $\vec{a} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.



Pe Ox: $F\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = 0$ și pe Oy:

$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Din legea forței de frecare:

$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta - mg\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 8{,}935\ \text{N}.$

b. Forța de apăsare normală este: $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = \dfrac{mg\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 2{,}35\ \text{N}$

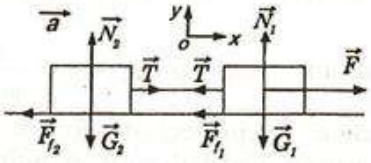
c. Dacă corpul se mișcă accelerat cu accelerația $\vec{a}$, atunci relația vectorială devine: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox: $F\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = ma$ și pe Oy: $N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Din $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

$F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta - mg\sin\alpha = ma \Rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + ma}{\cos\beta + \mu\sin\beta} = 9{,}83\text{N}$

Forța de apăsare normală este: $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = 1{,}72\ \text{N}$

d. Pentru ca acest corp să nu mai apese pe plan, trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă $\Rightarrow N = 0 \Rightarrow F = \dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\beta} \approx 12{,}2\ \text{N}$

34.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Pentru corpul m_1 vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1\vec{a}$. Pe Oy: $N_1 - G_1 = 0$ și



pe Ox: $F - F_{f1} - T = m_1 a$. Cum $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow F - \mu m_1 g - T = m_1 a$ (1)

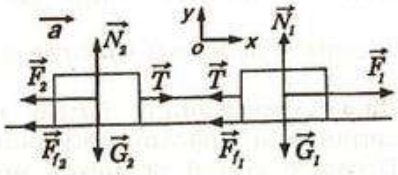
Pentru corpul m_2: $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Pe Ox: $T - F_{f_2} = m_2 a$ și pe Oy: $N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$. Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow F - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 2\ \text{m/s}^2$

b. $T = m_2(a + \mu g) = \dfrac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 2\ \text{N}$

c. Din $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v = at = 8$ m/s și distanța parcursă de corp $d = v_m t$, unde $v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 = 16$ m

35.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1>F_2$, sistemul se mișcă spre dreapta. Pentru corpul m_1: $\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}=m_1\vec{a}$.



Pe Ox: $F_1-F_{f1}-T=m_1a$ și pe Oy: $N_1-G_1=0$

Pe baza legii frecării $F_{f1}=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow F_1-\mu m_1g-T=m_1a$ (1)

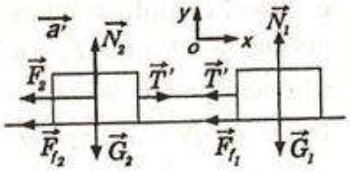
Pentru corpul m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}$. Pe Ox: $T-F_{f2}-F_2=m_2a$ (1)

Pe Oy: $N_2-G_2=0 \Rightarrow N_2=m_2g$. $F_{f2}=\mu N_2=\mu m_2g \Rightarrow T-\mu m_2g-F_2=m_2a$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow F_1-F_2-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\dfrac{F_1-F_2}{m_1+m_2}-\mu g=0{,}5$ m/s²

b. $T=m_2(a+\mu g)+F_2=\dfrac{m_1F_2+m_2F_1}{m_1+m_2}=50$ N

c. Imediat cum F_1 încetează să acționeze sistemul se va mișca ca și înainte spre dreapta, până ce sistemul de corpuri se va opri. Astfel, pentru corpul m_1: $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}'=m_1\vec{a}'$.



Pe Ox: $-F_{f1}-T'=m_1\vec{a}'$

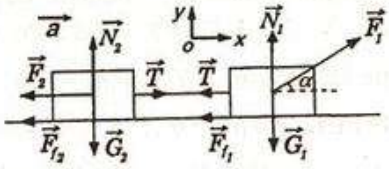
și pe Oy: $N_1-G_1=0$ $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow -\mu m_1g-T'=m_1a'$ (1)

Pentru corpul m_2: $\vec{T}'+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}'$. Pe Ox: $T'-F_{f_2}-F_2=m_2a'$ și pe Oy: $N_2-G_2=0 \Rightarrow N_2=m_2g$. Cum $F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2g \Rightarrow T'-\mu m_2g-F_2=m_2a'$ (2)

Din(1)+(2) $\Rightarrow -F_2-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a' \Rightarrow a'=-\dfrac{F_2}{m_1+m_2}-\mu g \Rightarrow$ tensiunea din fir

devine $T'=m_2(a'+\mu g)+F_2=\dfrac{m_1F_2}{m_1+m_2}=8$ N

36.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1\cos\alpha>F_2$, sistemul se mișcă spre dreapta.



Pentru corpul m_1: $\vec{F}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}+\vec{N}_1=m_1\vec{a}$.

Proiectăm pe Ox: $F_1\cos\alpha-F_{f1}-T=m_1a$ și pe Oy: $N_1+F_1\sin\alpha-m_1g=0$.

Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu(m_1g-F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1\cos\alpha-\mu m_1g+\mu F_1\sin\alpha-T=m_1a$ (1)

Pentru corpul m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}$.

Proiectăm pe Ox:: $T-F_{f2}-F_2=m_2a$ și pe Oy: $N_2-m_2g=0$.

Cum $F_{f2}=\mu N_2 \Rightarrow T-\mu m_2g-F_2=m_2a$ (2). Adunând relațiile (1) și (2) obținem:

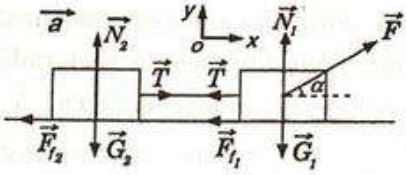
$$F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-\mu g(m_1+m_2)-F_2=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-F_2}{m_1+m_2}-\mu g$$

$\Rightarrow a=1$ m/s²

b. $T = m_2(a+\mu g)+F_2 = 16{,}95$ N

c. Deoarece sistemul se mişcă uniform spre dreapta, atunci $a=0$, astfel că forţa $F_1 = \dfrac{F_2+\mu g(m_1+m_2)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \approx 23{,}78$ N

37.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii şi apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul m_1: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f_1}+\vec{T}+\vec{N}_1 = m_1\vec{a}$.



Proiectăm pe Ox: $F\cos\alpha - F_{f1} - T = m_1 a$ şi pe Oy: $N_1 + F\sin\alpha - m_1 g = 0$

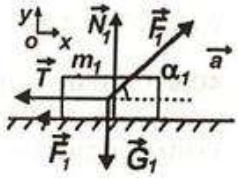
Pentru corpul m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm pe Ox: $T - F_{f2} = m_2 a$ şi pe Oy: $N_2 - m_2 g = 0$. Deoarece $N_1=N_2=0{,}5 \Rightarrow m_1 g - F\sin\alpha = m_2 g \Rightarrow \alpha=30^0$

b. Deoarece $N_1=N_2$, atunci $F_{f1}=F_{f2}=F_f=\mu m_2 g=6$ N

c. Din $F\cos\alpha - F_{f1} - T = m_1 a$ (1) şi $T - F_{f2} = m_2 a$ (2) prin adunarea relaţiilor (1) şi (2) obţinem: $F\cos\alpha - 2F_f = (m_1+m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha - 2F_f}{m_1+m_2} = 1{,}76$ m/s²

d. Din $T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow T = m_2 a + F_f = 7{,}76$ N

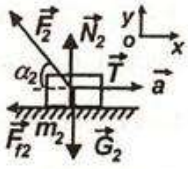
38.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii şi apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul m_1, vectorial $\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{T}+\vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$, iar scalar pe Ox $F_1\cos\alpha_1 - T - F_{f1} = m_1 a$ şi pe Oy:



$N_1 + F_1\sin\alpha_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - F_1\sin\alpha_1$

$\Rightarrow F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) \Rightarrow F_1\cos\alpha_1 - T - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) = m_1 a$ (1)

Pentru corpul m_2, vectorial $\vec{F}_2+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}+\vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$, iar scalar pe Ox $T - F_2\cos\alpha_2 - F_{f2} = m_2 a$ şi pe Oy:



$N_2 + F_2\sin\alpha_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu_2 N_2 = \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) \Rightarrow$

$T - F_2\cos\alpha_2 - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) = m_2 a$ (2). Din (1)+(2) $\Rightarrow$

$F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) = (m_1+m_2)a \Rightarrow$

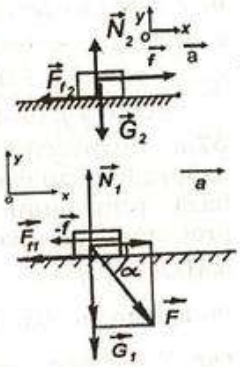
$a = \dfrac{F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2)}{m_1+m_2} \approx 1{,}07$ m/s²

b. Distanţa parcursă de corp $d=v_m t$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at \Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2=53{,}51$ m

c. Deoarece sistemul se mişcă uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**, atunci $F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - \mu_1(m_1 g - F_1\sin\alpha_1) - \mu_2(m_2 g - F_2\sin\alpha_2) = 0 \Rightarrow$

$F_1 = \dfrac{F_2(\cos\alpha_2 - \mu_2\sin\alpha_2) + g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos\alpha_1 + \mu_1\sin\alpha_1} \approx 31{,}35$ N

39.a. Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță orizontală. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii, ținând cont că $\vec{a}=0$. Pentru corpul m_2: $\vec{f}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$, unde $\vec{f}$ este forța cu care corpul de masă m_1 împinge corpul de masă m_2. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. pe Ox: $f-F_{f_2}=m_2a$ și pe Oy: $N_2-m_2g=0\Rightarrow$



$F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2g\Rightarrow f-\mu m_2g=m_2a$ (1)

Pentru corpul m_1: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f_1}+\vec{N}_1-\vec{f}=m_1\vec{a}$, unde $-\vec{f}$ este forța de reacțiune cu care corpul de masă m_2 împinge corpul de masă m_1, conform principiului acțiunii și reacțiunii. Prin proiecție pe axele de coordonate. obținem pe Ox: $F\cos\alpha-F_{f_1}-f=m_1a$ și pe Oy: $N_1-m_1g-F\sin\alpha=0\Rightarrow$

$F_{f_1}=\mu N_1=\mu(F\sin\alpha+m_1g)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu F\sin\alpha-\mu m_1g-f=m_1a$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)-\mu g(m_1+m_2)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

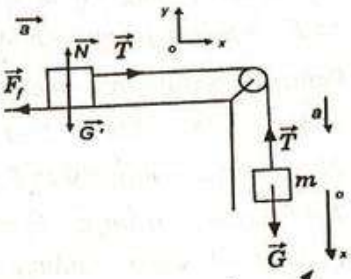
$$a=\frac{F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{m_1+m_2}-\mu g\approx 5{,}65\ \text{m/s}^2$$

b. Forța dintre cele două corpuri este $f=m_2(\mu g+a)\approx 1{,}524$ N.

c. Forța de apăsare normală exercitată de corpul 1, este $N_1=F\sin\alpha+m_1g=5{,}5$N.

40.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul m: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$ și pe axa Ox și obținem: $mg-T=ma$ (1)

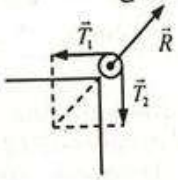
Pentru corpul M: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}'=M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T-F_f=Ma$ și pe Oy: $N-Mg=0$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow T-\mu Mg=Ma$ (2)



Din(1)+(2) $g(m-\mu M)=(m+M)a\Rightarrow a=\dfrac{g(m-\mu M)}{m+M}$

a=2,8 m/s².

b. $T=m(g-a)=\dfrac{mM(1+\mu)g}{M+m}=14{,}4$ N.



c. Impunem condiția de echilibru scripetelui: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Din geometrie scalar se obține: $R^2=T_1^2+T_2^2$. Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2}=20{,}3$ N, unde R este reacțiunea în axul scripetelui.

41.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii.

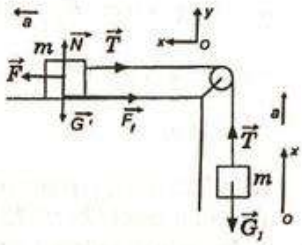
Studiem mișcarea corpului vertical: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$ și scalar Ox: $mg-T=ma$ (1)

Studiem mişcarea corpului aflat pe planul orizontal: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T-F_f=ma$ şi pe Oy: $N-mg=0 \Rightarrow N=mg$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow T-\mu mg=ma$ (2)

Din(1)+(2)$\Rightarrow mg-\mu mg=2ma \Rightarrow \mu=(g-2a)/g=0{,}6$.

b. Dacă sub acţiunea forţei *F*, corpurile se mişcă în sens contrar cu aceeaşi accelerație. Pentru corpul vertical vectorial: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$, iar scalar prin proiecţie pe axa verticală obţinem: $T-mg=ma$ (1).



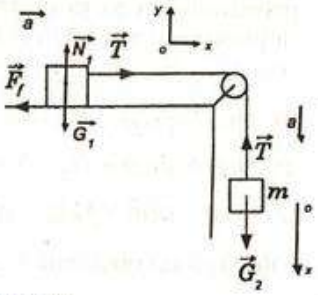
Pentru corpul care se deplasează pe orizontală: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F-F_f-T=ma$ şi pe *Oy*: $N-mg=0 \Rightarrow F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F-\mu mg-T=ma$ (2)

Din(1)+(2) obţinem: $F-\mu mg-mg=2ma \Rightarrow$

$F=m(2a+\mu g+g)=2mg=40$ N

c. Tensiunea în fir este $T=m(a+g)=24$ N

42.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Studiem mişcarea corpului cu masa m_2. Relaţia vectorială este: $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}_1$ şi scalar prin proiecţie pe axa de coordonate *Ox*: $m_2g-T=m_2a_1$ (1)



Studiem mişcarea corpului cu masa m_1. Relaţia vectorială este: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_f=m_1\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T-F_f=m_1a_1$ şi pe *Oy*: $N_1-m_1g=0 \Rightarrow F_f=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow T-\mu m_1g=m_1a_1$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a_1 \Rightarrow g(m_2-\mu m_1)=(m_1+m_2)a_1$.

Cum $m_2=4m_1 \Rightarrow a_1=g(4-\mu)/5$ (3). Schimbând corpurile între ele se obţine analog: $g(m_1-\mu m_2)=(m_1+m_2)a_2 \Rightarrow a_2=g(1-4\mu)/5$ (4)

Împărţind relaţia (3) la (4) se obţine: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{4-\mu}{1-4\mu}=6{,}5 \Rightarrow a_1=6{,}5a_2$

b. Pentru ca sistemul de corpuri să se deplaseze cu viteză constantă $a_1=0 \Rightarrow m_{1tot}=m_2/\mu=40$ kg$\Rightarrow m_{1x}=m_{1tot}-m_1=m_2/\mu-m_1=39$ kg

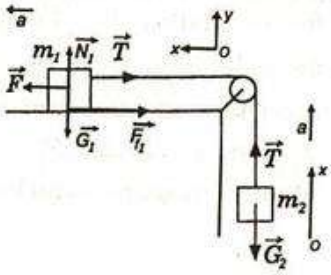
c. Pentru corpul m_2, $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar $T-m_2g=m_2a$ (1), iar pentru corpul m_1, $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$.

Pe *Ox* $F-T-F_{f1}=m_1a$ şi pe *Oy* $N_1-m_1g=0 \Rightarrow$

$F_{f1}=\mu N_1=\mu m_1g \Rightarrow F-T-\mu m_1g=m_1a$ (2).

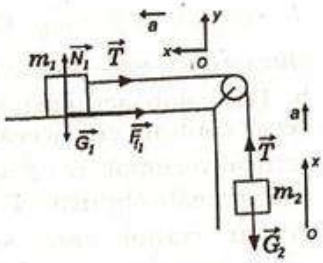
Adunăm (1)+(2): $F-m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a$

$F=(m_2+\mu m_1)g+(m_1+m_2)a=46$ N



d. Studiem mişcarea corpului cu masa m_2. $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar prin proiecţie pe axa de coordonate Ox: $T-m_2g=m_2a$ (1)

Studiem mişcarea corpului cu masa m_1:



$\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Pe Ox $-T-F_f=m_1a$ şi Oy

$N_1-m_1g=0\Rightarrow F_f=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow -T-\mu m_1g=m_1a$

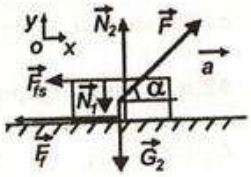
$-m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=-\dfrac{g(m_2+\mu m_1)}{m_1+m_2}\Rightarrow$

a=−8,2 m/s²

43.a. Distanţa parcursă de corp $d=v_mt$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at\Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2\Rightarrow a=2d/t^2=2$ m/s²

b. Deoarece coletul se află pe sanie se deplasează împreună cu sania, el va avea aceeaşi acceleraţie. Din reprezentarea forţelor $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{fs}=m\vec{a}$, scalar forţa de frecare statică dintre colet şi sanie este $F_{fs}=ma=10$ N (1)

c. Reprezentăm forţele saniei. Coletul acţionează asupra saniei pe verticală cu forţa de apăsare $N_1=mg$ în jos şi pe orizontală cu forţa de frecare F_{fs} în sens contrar sensului de deplasare al saniei. Vectorial obţinem:



$\vec{F}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f+\vec{F}_{fs}+\vec{N}_1=M\vec{a}$ şi scalar:

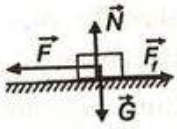
Pe Ox: $F\cos\alpha-F_f-F_{fs}=Ma\Rightarrow F\cos\alpha-F_f-ma=Ma$

Pe Oy: $F\sin\alpha+N_2-N_1-Mg=0\Rightarrow N_2=(m+M)g-F\sin\alpha$ şi din $F_f=\mu N_2\Rightarrow$

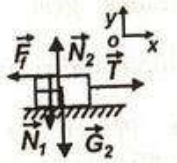
$F\cos\alpha-\mu(m+M)g+\mu F\sin\alpha-ma=Ma$ (2)

Din (1) şi (2) obţinem: $F=\dfrac{(m+M)(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 57{,}68$ N

44.a. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului 1 şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii, astfel că $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Scalar obţinem: $F=F_f=\mu N=\mu m_1g=75$ N

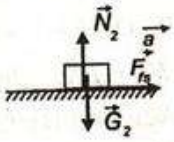


b. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului 2. Ţinând cont că asupra corpului 2 forta de frecare exercitată de primul corp este îndreptată spre stânga (conform principiului acţiunii şi reacţiunii) şi presupunând că firul nu se rupe, atunci $T=F_f=\mu m_1g=75$ N



c. Firul rezistă la solicitare deoarece $T<T_{max}$

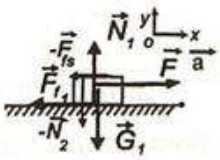
45.a. Studiem corpul cu masa m_2. Dacă corpul cu masă m_2 nu alunecă pe scândură, forţa de frecare ce apare la contactul corp-scândură este o forţă de frecare statică F_{f_s}. Conform principiului al doilea al dinamicii forţa de frecare statică F_{f_s} imprimă corpului cu masa m_2 o acceleraţie identică cu cea a scândurii şi în acelaşi sens. Vectorial



$\vec{F}_{f_s}=m_2\vec{a}\Rightarrow$ scalar $F_{f_s}=m_2a$ (1)

Studiem mişcarea scândurii. Vectorial:

$\vec{F}+\vec{N}_1-\vec{F}_{f2}-\vec{N}_2+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F-F_{f_s}-F_{f_1}=m_1a$ şi pe Oy: $N_1-N_2-G_1=0\Rightarrow N_1=m_1g+N_2=(m_1+m_2)g$, deoarece $N_2=G_2$.



Din $F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1(m_1+m_2)g\Rightarrow F-F_{f_s}-\mu_1(m_1+m_2)g=m_1a$ (2).

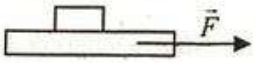
Din (1)+(2) obţinem $F-m_2a-\mu_1(m_1+m_2)g=m_2a\Rightarrow$

$a=\dfrac{F}{m_1+m_2}-\mu_1g\Rightarrow F_{f_s}=m_2\left(\dfrac{F}{m_1+m_2}-\mu_1g\right)$. Condiţia de nealunecare a corpului m_2 pe scândură este ca forţa de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forţa de frecare la alunecare este $F_{f_s}\le F_{f_1}\Rightarrow F_{f_s}\le\mu_2m_2g\Rightarrow$

$m_2\left(\dfrac{F}{m_1+m_2}-\mu_1g\right)\le\mu_2m_2g\Rightarrow F\le(m_1+m_2)(\mu_1+\mu_2)g\Rightarrow F\le 9$ N.

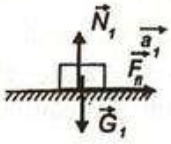
Dacă $F>9$ N, corpul m_2 începe să alunece pe scândură.

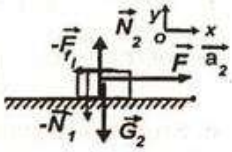
46.a. Iniţial forţa F este mică şi prin urmare corpurile se mişcă împreună formând un corp cu masa $m_t=m_1+m_2$. Cum



$F=c\cdot t=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\dfrac{F}{m_1+m_2}=\dfrac{c\cdot t}{m_1+m_2}=t$, adică accelerаţia sistemului de corpuri creşte direct proporţional cu timpul.

b. La un anumit moment de timp t_0, corpul începe să lunece pe scândură, iar forţa de frecare la alunecarea este cea care va imprima corpului o accelerаţie. Deoarece iniţial corpul se va mişca sub acţiunea forţei $\vec{F}$ într-un sens, forţa de frecare la alunecare va acţiona în acelaşi sens cu forţa $\vec{F}$. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului m_1. Conform principiului al doilea prin proiecţia pe axa Ox, scalar obţinem: $F_{f_1}=m_1a_1$. Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow a_1=\mu g=2$ m/s² şi din momentul t_0 când corpul alunecă pe scândură, accelerаţia acestuia rămâne constantă. Reprezentăm forţele care acţionează asupra scândurii: $F-F_{f_1}=m_2a_2\Rightarrow c\cdot t-\mu m_1g=m_2a_2\Rightarrow a_2=\dfrac{c\cdot t-\mu m_1g}{m_2}=\dfrac{5t-2}{4}$, deci accelerаţia scândurii continuă să crească liniar cu trecerea timpului.

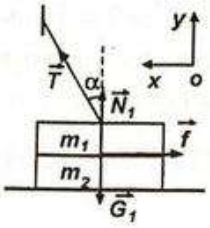




c. Momentul de timp t_0 la care corpurile încep să se mişte independent se poate afla din condiţia ca $a_1=a_2\Rightarrow\mu g=\dfrac{ct_0-\mu m_1g}{m_2}\Rightarrow t_0=\dfrac{\mu g(m_1+m_2)}{c}=2$ s

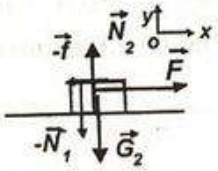
47.a. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra cărămidei superioare şi impunem condiţia ca aceasta să se afle în repaus: Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{f}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T\sin\alpha-f=0$ şi pe Oy: $T\cos\alpha+N_1-m_1g=0\Rightarrow N_1=m_1g-T\cos\alpha$.

$f=\mu N_1=\mu(m_1g-T\cos\alpha)\Rightarrow T\sin\alpha-\mu(m_1g-T\cos\alpha)=0$



$$\Rightarrow T = \frac{\mu m_1 g}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 2{,}35 \text{ N}$$

b. Obținem $f = T\sin\alpha = \dfrac{\mu m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1{,}67$ N

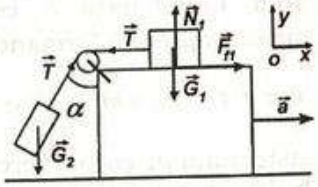


Reprezentăm forțele care acționează asupra cărămidei inferioare și impunem condiția ca aceasta să iasă uniform de sub cea superioară, adică rezultanta forțelor să fie nulă. Vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_2 - \vec{f} - \vec{N}_1 + \vec{G}_2 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $F - f = 0 \Rightarrow F = f = \dfrac{\mu m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1{,}67$ N.

c. Pe Oy: $N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + m_2 g$.

Cum $N_1 = \dfrac{f}{\mu} = \dfrac{m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow N_2 = \dfrac{m_1 g \sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + m_2 g \approx 28{,}35$ N, unde N_2 reprezintă forța cu care cărămida inferioară apasă asupra planului



48.a. Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus în raport cu platforma, ele se deplasează față de un observator de pe sol cu accelerația platformei $\vec{a}$.

Studiem mișcarea corpului de masă m_2. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T\sin\alpha = m_2 a$ (1) și pe Oy: $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = m_2 g$ (2). Ridicăm la pătrat cele două ecuații și apoi le adunăm. Obținem

$T^2 = m_2^2(a^2 + g^2) \Rightarrow T = m_2\sqrt{a^2 + g^2} \approx 1{,}077$ N

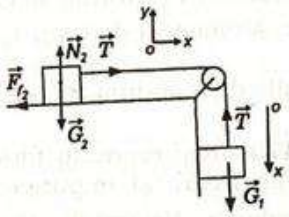
b. $\cos\alpha = \dfrac{m_2 g}{T} = \dfrac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \approx 0{,}928$

c. Studiem mișcarea corpului cu masa m_1. Vectorial: $\vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = m_1\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{f1} - T = m_1 a$ și pe

Oy: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g - m_2\sqrt{a^2 + g^2} = m_1 a \Rightarrow$

$$\mu = \frac{m_1 a + m_2\sqrt{a^2 + g^2}}{m_1 g} \approx 0{,}615$$



49.a. Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus pe căruciorul care se mișcă rectiliniu și uniform, înseamnă că și ele se vor mișca rectiliniu și uniform față de un observator aflat pe sol. Pentru corpu m_2:

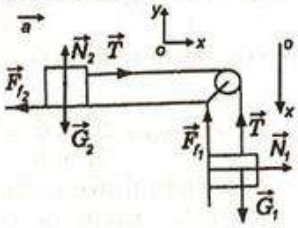
$\vec{T} + \vec{G}_2 = 0 \Rightarrow T = m_2 g = 25$ N

b. Pentru corpul m_1: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = 0$

Pe Ox: $T - F_f = 0 \Rightarrow T = F_f \Rightarrow F_f = m_2 g$

și pe Oy: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_f = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g = m_2 g \Rightarrow \mu = m_2 / m_1 = 0{,}25$

c. Schimbăm locul corpurilor pe cărucior şi imprimăm căruciorului o mişcare accelerată, astfel încât sistemul de corpuri să se afle în repaus faţă de cărucior şi să se deplaseze faţă de un observator de pe sol cu acceleraţia căruciorului $\vec{a}$.



Pentru corpul de masă m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}_2=m_2\vec{a}$. Pe Ox: $T-F_{f_2}=m_2a$ şi pe Oy: $N_2-m_2g=0 \Rightarrow F_{f_2}=\mu m_2 g$ $\Rightarrow T-\mu m_2 g=m_2a$ (1)

Pentru m_1 vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $N_1=m_1a$ şi pe Oy: $T+F_{f_1}-m_1g=0$.

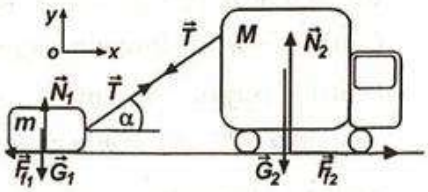
Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1 a \Rightarrow T+\mu m_1 g-m_1 g=0$ (2)

Introducem relaţia (2) în (1) şi obţinem:

$$T=m_1g-\mu m_1 a \Rightarrow m_1g-\mu m_1 a-\mu m_2 g=m_2 a \Rightarrow a=\frac{g(m_1-\mu m_2)}{m_2+\mu m_1}=\frac{g(m_1^2-m_2^2)}{2m_1m_2} \Rightarrow$$

a=18,75 m/s²

50.a. Studiem mişcarea lăzii. Deoarece lada se mişcă rectiliniu şi uniform, atunci vectorial $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=0$. Scalar pe Ox:



$T\cos\alpha-F_{f1}=0$ şi pe Oy: $T\sin\alpha+N_1-mg=0$

$F_{f1}=\mu_1N_1=\mu_1(mg-T\sin\alpha)\Rightarrow$

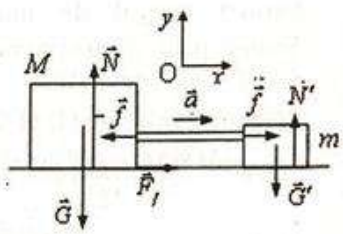
$$T=\frac{\mu_1 mg}{\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha}\approx 671{,}14\text{ N}$$

b. Studiem mişcarea maşinii. Astfel $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}_2=0$, forţa de frecare se pune în sensul de mers pentru că Pământul împinge maşina inainte. Pe Ox: $F_{f2}-T\cos\alpha=0 \Rightarrow F_{f2}=\dfrac{\mu_1 mg\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha}\approx 335{,}8$N şi pe Oy: $N_2-T\sin\alpha-Mg=0$

$$\Rightarrow N_2=g\frac{M\cos\alpha+\mu_1(M+m)\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu_1\sin\alpha} \Rightarrow \mu_2=\frac{F_{f2}}{N_2}=\frac{\mu_1 m\cos\alpha}{M\cos\alpha+\mu_1(M+m)\sin\alpha}\approx 0{,}021$$

c. Dacă se consideră că toate roţile sunt motoare şi toate apasă la fel asupra şoselei, atunci forţa de frecare care se exercită asupra fiecărei roţii este $F_f=F_{f2}/4\approx 83{,}9$ N

51.a. Deoarece frâna blochează numai roţile autocamionului, numai asupra acestuia se exercită o forţă de frecare. Bara rigidă împinge remorca cu forţa $\vec{f}$ astfel ca şi aceasta să frâneze cu acceleraţia autocamionului. Studiem mişcarea remorcii: $\vec{N}'+\vec{G}'+\vec{f}=m\vec{a}$, iar prin proiecţia pe axa Ox: $f=m\cdot a$ (1).



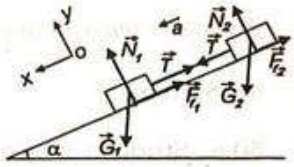
Studiem mişcarea autocamionului. Remorca împinge prin intermediul barei rigide autocamionul cu o forţă $(-\vec{f})$ pe aceeaşi direcţie, dar în sens contrar, conform principiului acţiunii şi reacţiunii astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f-\vec{f}=M\vec{a}$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_f - f = Ma$ şi pe Oy: $N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$, iar $F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow \mu Mg - f = Ma$ (2). Adunăm cele două relaţii (1) şi (2) $\Rightarrow \mu Mg - ma = Ma \Rightarrow a = \dfrac{\mu Mg}{M+m} = 6{,}4$ m/s²

b. $f = ma = \dfrac{\mu mMg}{M+m} = 6{,}4$ kN

c. Sistemul are o mişcare rectilinie uniform încetinită cu a=−6,4 m/s², astfel că $s_{op}=v_m t_{op}$, unde v_m reprezintă viteza medie şi t_{op} timpul până la oprire. Cum $a=a_m=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t$, în momentul opririi $v=0 \Rightarrow t_{op}=-v_0/a$. Deoarece viteza depinde liniar de timp $v_m=v_0/2 \Rightarrow s_{op} = -v_0^2/2a$ =20 m

52 a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă m_1: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.



Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $m_1 g\sin\alpha - T - F_{f1} = m_1 a$ şi pe Oy: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f1} = \mu_1 N_1$, obţinem: $m_1 g\sin\alpha - T - \mu_1 m_1 g\cos\alpha = m_1 a$ (1)

Pentru corpul de masă m_2: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f_2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm pe Ox: $m_2 g\sin\alpha + T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow m_2 g\sin\alpha + T - \mu_2 m_2 g\cos\alpha = m_2 a$ (2)

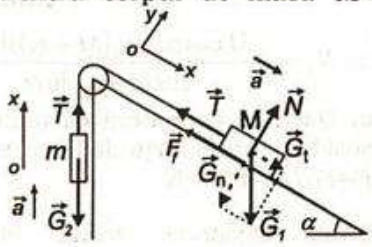
Adunăm (1) cu (2): $a = g\sin\alpha - g\dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\cos\alpha$ =3,5 m/s²

b. $T = m_1(g\sin\alpha - \mu_1 g\cos\alpha - a)$=−4 N $\Rightarrow$ sensul tensiunilor în tijă sunt invers

c. În absenţa frecării între corpuri şi suprafaţa planului înclinat μ_1=0 şi μ_2=0, astfel că sistemul de corpuri va coborî accelerat cu acceeraţia $a=g\sin\alpha \Rightarrow$ tensiunea din tijă este T=0.

53.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă M: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe Ox: $Mg\sin\alpha - T - F_f = Ma$ şi pe Oy: $N - Mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg\cos\alpha$

$\Rightarrow Mg\sin\alpha - T - \mu Mg\cos\alpha = Ma$ (1)



Pentru corpul de masă m: $\vec{G}_2 + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$. Scalar prin proiecţia relaţiei vectoriale pe axa Ox: $T - mg = ma$ (2)

Adunând relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow g(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha - m) = (m+M)a \Rightarrow$

$a = g\dfrac{(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha - m)}{M+m} = 0{,}5$ m/s²

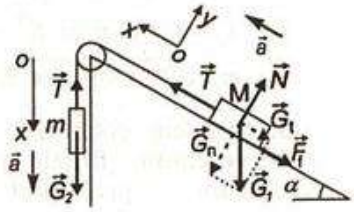
b. $T = m(a+g) = \dfrac{mMg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1)}{M+m} = 10{,}5$ N

c. Impunem condiţia de echilibru scripetelui: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow$ $\vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Pe baza teoremei Pitagora generalizată obţinem: $R^2 = T_1^2 + T_1^2 + 2T_1T_2\cos(90-\alpha)$.

Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2 \sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \approx 18.165$ N

54.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă m: $\vec{G}_2 + \vec{T} = m\vec{a}$ şi scalar prin proiecţia pe axa Ox: $mg - T = ma$ (1)

Pentru corpul de masă M, relaţia vectorială este: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe Ox: $T - F_f - Mg\sin\alpha = Ma$ şi pe Oy: $N - Mg\cos\alpha = 0$.



$F_f = \mu N = \mu Mg\cos\alpha \Rightarrow T - \mu Mg\cos\alpha - Mg\sin\alpha = Ma$ (2). Prin adunarea relaţiilor (1) cu (2) $\Rightarrow$

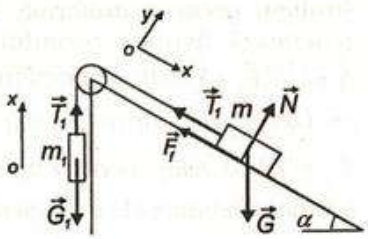
$g(m - \mu M\cos\alpha - M\sin\alpha) = (m+M)a \Rightarrow$

$$a = \frac{g(m - \mu M\cos\alpha - M\sin\alpha)}{m+M} \approx 6{,}725 \text{ m/s}^2$$

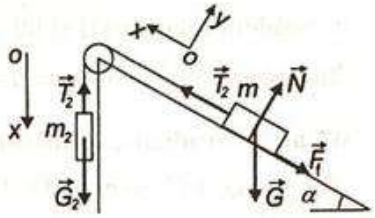
b. $T = m(g-a) = \dfrac{mMg(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m+M} \approx 16{,}375$ N.

c. Distanţa parcursă de corp $d = v_m t$. Din $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v = at \Rightarrow v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 = 13{,}45$ m

55.a. Când pe taler se aşază corpul cu masa m_1 corpul cu masa m are tendinţa să coboare. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul m_1: $T_1 = m_1 g$ şi pentru corpul m: $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar prin proiecţia pe axa Ox: $mg\sin\alpha - T_1 - F_f = 0$. Cum $N = mg\cos\alpha$ şi $F_f = \mu N \Rightarrow m_1 = m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (1)



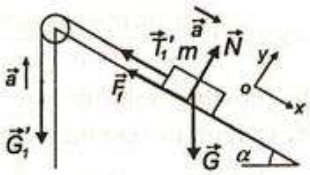
Când pe taler se aşază corpul cu masa m_2 corpul cu masa m are tendinţa să urce. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul m_2: $T_2 = m_2 g$ şi pentru corpul m: $\vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$ şi prin proiecţia pe axa Ox: $T_2 - mg\sin\alpha - F_f = 0$. $N = mg\cos\alpha$ şi $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 = m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$(2).



Din (1)+(2) obţinem: $m = \dfrac{m_1 + m_2}{2\sin\alpha} = 25$ kg, cu $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell} = 0{,}6$.

b. Din (2)-(1) obţinem: $\mu = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} tg\alpha = 0{,}25$, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0{,}8$

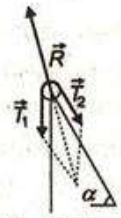
c. Deoarece se trage cu o forţă egală cu jumătate din greutatea corpului cu masa m_1 atunci $T_1' = m_1 g/2$. Corpul cu masă m coboară accelerat cu acceleraţia a, astfel că $\vec{T}'_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe Ox: $mg\sin\alpha - F_f - T'_1 = ma$.



Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, obţinem

$a = g[\sin\alpha - \mu\cos\alpha - m_1/(2m)] = 2$ m/s²

56.a. Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow$

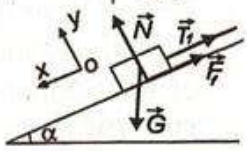


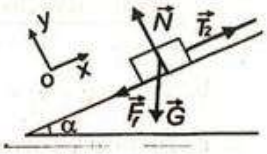
$R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos(90-\alpha)$.

$T_1=T_2=T=m_1g \Rightarrow R^2=2T^2+2T^2\sin\alpha \Rightarrow R=T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \Rightarrow$

$R=m_1g\sqrt{2(1+\sin\alpha)}\approx 6{,}06$ N

b. Studiem coborârea uniformă a corpului aflat pe plan. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{T}_1=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe Ox: $mg\sin\alpha-T_1-F_f=0$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$.





Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=m_1g$ (1).

Studiem urcarea uniformă a corpului aflat pe plan. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{T}_2=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe Ox: $T_2-mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$. Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha=m_2g$ (2)

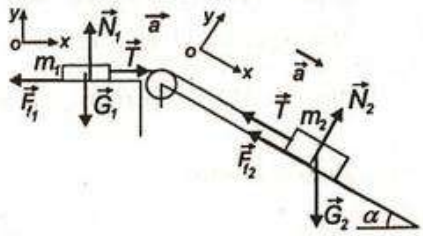
Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem:

$2mg\sin\alpha=(m_1+m_2)g \Rightarrow m=\dfrac{m_1+m_2}{2\sin\alpha}=1$ kg

c. Scădem relațiile (1) și (2) și obținem:

$2\mu mg\cos\alpha=(m_2-m_1)g \Rightarrow \mu=\dfrac{m_2-m_1}{m_2+m_1}tg\alpha\approx 0{,}173$

57.a. Studiem mișcarea corpului m_1: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Pe Ox: $T-F_{f_1}=m_1a$ și pe Oy: $N_1-m_1g=0 \Rightarrow F_{f_1}=\mu N_1$. Obținem:



$T-\mu m_1g=m_1a$ (1). Studiem mișcarea corpului m_2: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$.

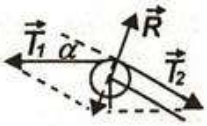
Pe Ox: $m_2g\sin\alpha-F_{f_2}-T=m_2a$ și pe Oy: $N_2-m_2g\cos\alpha=0 \Rightarrow F_{f_2}=\mu N_2 \Rightarrow m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha-T=m_2a$ (2).

Din (1)+(2) $\Rightarrow g(m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-\mu m_1)=(m_1+m_2)a$

$\Rightarrow a=g\dfrac{m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-\mu m_1}{m_1+m_2}=0{,}62$ m/s²

b. Tensiunea din fir este $T=m_1(a+\mu g)=0{,}262$ N.

c. Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow$

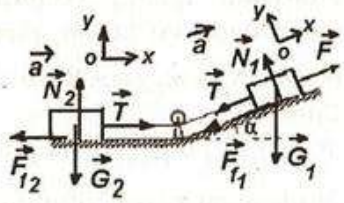


$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(180^0 - \alpha)$.

$T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 - 2T^2\sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1-\sin\alpha)} \approx 0{,}262$ N

d. Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform, atunci α=0, astfel că $m_1 = m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/\mu$=654 g

58.a. Studiem mişcarea corpului m_1:



$\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

Pe *Ox*: $T - F_{f_1} - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$ şi pe *Oy*: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{f_1} = \mu N_1$.

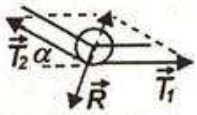
Obţinem: $F - T - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$ (1).

Studiem mişcarea corpului m_2: $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$.

Pe *Ox*: $T - F_{f_2} = m_2 a \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (2). Adunăm relaţiile (1) şi (2) şi obţinem: $F - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow$ a=2 m/s².

b. Tensiunea din fir este $T = m_2(a + \mu g)$=8 N

c. Calculăm reacţiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiţia de echilibru: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow$



$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(180^0 - \alpha)$.

$T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 - 2T^2\sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1-\sin\alpha)} \approx 7{,}155$ N

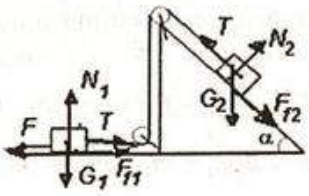
d. Din $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v = at$, deoarece v_0=0 şi t_0=0.

Cum $d = v_m t = \dfrac{v}{2}t = \dfrac{at^2}{2}$ obţinem: $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}}$=1,2s

59.a. Studiem mişcarea corpului m_1: $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

Pe *Ox*: $F - T - F_{f_1} = m_1 a$ şi pe *Oy*: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow$

$F_{f_1} = \mu N_1 \Rightarrow F - T - \mu m_1 g = m_1 a$ (1)



Studiem mişcarea corpului m_2:

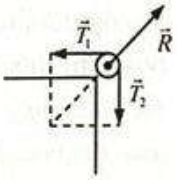
$\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe *Ox*: $T - F_{f2} - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ şi pe *Oy*: $N - m_2 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha \Rightarrow T - \mu m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2): $F - \mu m_1 g - m_2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a \approx 0{,}71$ m/s²

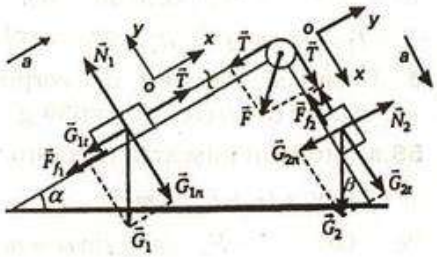
b. $T = F - m_1(\mu g + a) \approx 4{,}58$ N

c. Reprezentăm forţele care acţionează asupra scripetelui S_1 şi impunem condiţia de echilibru acestuia. $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Din geometrie se obţine scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} \approx 6{,}46$ N, unde R este reacţiunea în axul scripetelui.



d. Deoarece sistemul se deplasează uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**, atunci α=0 $\Rightarrow F = \mu m_1 g + m_2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \approx 8{,}23$ N

60.a. Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Studiem mişcarea corpului m_2.



Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox $m_2g\sin\beta-T-F_{f_2}=m_2a$

pe Oy: $N_2-m_2g\cos\beta=0\Rightarrow N_2=m_2g\cos\beta$.

Cum

$F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2m_2g\cos\beta\Rightarrow m_2g\sin\beta-T-\mu_2m_2g\cos\beta=m_2a$ (1)

Studiem mişcarea corpului m_1. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Obţinem:

Pe Ox: $T-F_{f_1}-m_1g\sin\alpha=m_1a$ şi pe Oy: $N_1-m_1g\cos\alpha=0$.

Cum $F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1m_1g\cos\alpha\Rightarrow T-\mu_1m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha=m_1a$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow m_2g(\sin\beta-\mu_2\cos\beta)-m_1g(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

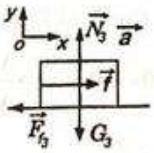
$$a=g\frac{m_2(\sin\beta-\mu_2\cos\beta)-m_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)}{m_1+m_2}\approx 1{,}72\ \text{m/s}^2$$

b. $T=m_1(a+g\sin\alpha+\mu_1g\cos\alpha)\approx 10{,}87$ N

c. Studiem echilibrul scripetelui. $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Deorece $\vec{T}_1$ şi $\vec{T}_2$ sunt perpendiculare, din geometrie se obţine scalar:

$R^2=T_1^2+T_2^2=2T^2\Rightarrow\ R=T\sqrt{2}\approx 15{,}32$ N

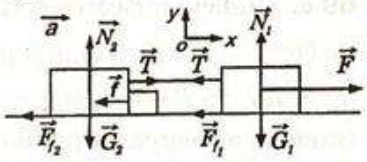
61.a. Corpurile se deplasează spre dreapta uniform accelerat. Studiem mişcarea corpului cu masa m_3:



$\vec{f}+\vec{G}_3+\vec{N}_3+\vec{F}_{f3}=m_3\vec{a}$. Scalar $f-\mu m_3g=m_3a$ (1).

Pentru corpul cu masa m_1: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}=m_1\vec{a}$, iar scalar:

$F-T-\mu m_1g=m_1a$ (2)



Pentru corpul cu masa m_2:

$\vec{T}+\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{f}=m_2\vec{a}$, scalar pe axa Ox:

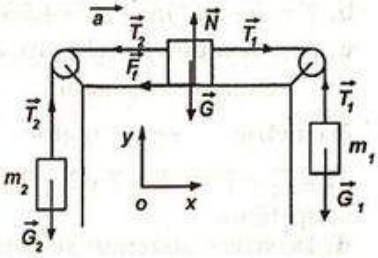
$T-\mu m_2g-f=m_2a$ (3). Din (1)+(2)+(3) obţinem:

$$F-\mu(m_1+m_2+m_3)=(m_1+m_2+m_3)a\Rightarrow a=\frac{F}{m_1+m_2+m_3}-\mu g=1\ \text{m/s}^2$$

b. Din (2) obţinem $T=F-m_1(a+\mu g)=\dfrac{F(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}=10{,}5$ N

c. Forţa cu care corpul m_2 împinge corpul cu masa m_3 este $f=m_3(a+\mu g)=7$N

62.a. Studiem mişcarea corpului cu masa m_1:



$\vec{G}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$. Scalar obţinem prin proiecţia pe axa de coordonate: $m_1g-T_1=m_1a$ (1)

Studiem mişcarea corpului cu masă m_2. Vectorial $\vec{G}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a}$ şi scalar obţinem prin proiecţia pe axa de coordonate: $T_2-m_2g=m_2a$ (2). Studiem mişcarea corpului cu masă M:

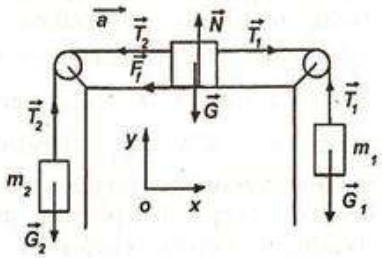
$\vec{T}_1+\vec{N}+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T_1-T_2-F_f=Ma$ și pe Oy: $N-Mg=0\Rightarrow$

$F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow T_1-T_2-\mu Mg=Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$g(m_1-\mu M-m_2)=(m_1+m_2+M)a\Rightarrow 3\ \text{m/s}^2$

b. $T_1=m_1(g-a)=35$ N și $T_2=m_2(a+g)=13$ N

c. Deoarece sistemul se mișcă uniform în același sens ca la punctul **a.**, atunci $a=0\Rightarrow m_1=m_2+\mu M=2$ kg



63.a. Pentru corpul cu masa m_1: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$, iar scalar obținem: $m_1g-T_1=m_1a$ (1)

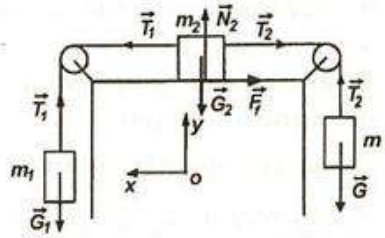
Pentru corpul cu masa m_2. $\vec{G}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a}$ și scalar obținem: $T_2-m_2g=m_2a$ (2). Pentru corpul cu masa M: $\vec{T}_1+\vec{N}+\vec{T}_2+\vec{G}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Pe Ox: $T_1-T_2-F_f=Ma$ și pe Oy: $N-Mg=0\Rightarrow$

$F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow T_1-T_2-\mu Mg=Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$$g(m_1-\mu M-m_2)=(m_1+m_2+M)a\Rightarrow m_1=\frac{(m_2+M)a+(\mu M+m_2)g}{g-a}=5{,}25\ \text{kg}$$

b. $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m_1(g-a)}{m_2(g+a)}=1{,}75$

c. $g(m_1-\mu M-m_2)=(m_1+m_2+M)a_1\Rightarrow \mu=\dfrac{g(m_1-m_2)-(m_1+m_2+M)a_1}{Mg}=0{,}2$



64.a. Dacă elevul pune un cubuleț pe taler corpul m_1 începe să coboare uniform, atunci pentru corpul cu masă m_1: $m_1g=T_1$, iar pentru corpul cu masă m: $mg=T_2$. Impunând condiția de mișcare uniformă corpului cu masă m_2: vectorial $\vec{T}_1+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f=0$, iar scalar

$T_1-T_2-\mu m_2g=0\Rightarrow m_1-m-\mu m_2=0$ (1)

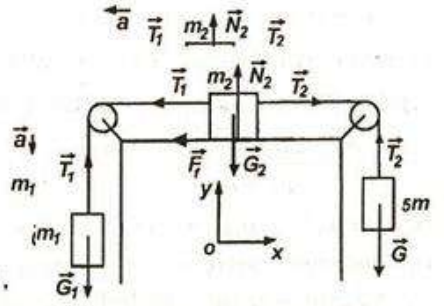
Dacă elevul pune cinci cubulețe pe taler corpul m_1 începe să urce uniform, astfel că pentru corpul cu masă m_1: $m_1g=T_1$, iar pentru corpul cu masă $5m$: $5mg=T_2$.

Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_2:

$\vec{T}_1+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f=0$. scalar

$T_2-T_1-\mu m_2g=0\Rightarrow 5m-m_1-\mu m_2=0$ (2)

Din (1) $m=m_1-\mu m_2$, astfel că introducând în (2) $\Rightarrow \mu=2m_1/(3m_2)=0{,}25$

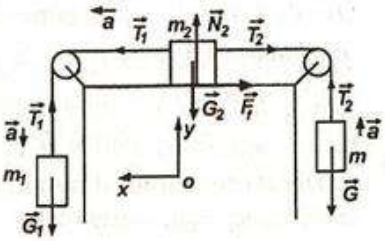


b. Masa unui cubuleț este $m=m_1-\mu m_2=1$kg

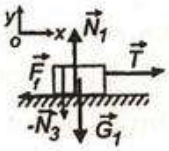
c. Sistemul se mișcă accelerat, astfel încât corpul cu masa m_1 coboară, iar corpul cu masă m_2 urcă. Pentru corpul m_1: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=m_1\vec{a}$, scalar $m_1g-T_1=m_1a$, iar pentru corpul m: $\vec{G}+\vec{T}_2=3m\vec{a}$, scalar $T_2-3mg=3ma$.

Pentru corpul cu masa m_2:

$\vec{T}_1+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f=m_2\vec{a}$, iar scalar obținem: pe Ox $T_1-T_2-\mu m_2 g=m_2 a$. Adunând cele trei relații obținem: $a=g\dfrac{m_1-\mu m_2-3m}{m_1+m_2+3m}\approx 0{,}345$ m/s²



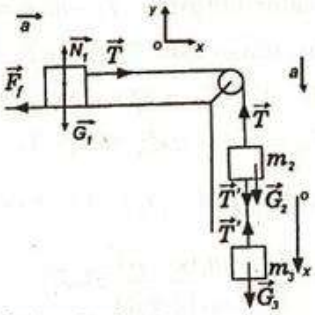
65.a. Impunem condiția ca fiecare corp să se mişte rectiliniu şi uniform. Astfel rezultanta forțelor care acționează fiecărui corp este nulă. Pentru corpul 3, $m_3 g=N_3$, pentru corpul 2, $T=m_2 g$, iar pentru corpul 1, pe Ox: $T=F_{f1}$ şi pe Oy: $N_1=N_3+m_1 g$. Obținem $m_2 g=\mu(m_1+m_3)g \Rightarrow \mu=0{,}2$.



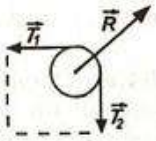
b. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul 3, $m_3 g-T'=m_3 a$, pentru corpul 2, $T'+m_2 g-T=m_2 a$, iar pentru corpul 1, $T-\mu m_1 g=m_1 a$. Adunăm cele trei ecuații şi obținem:

$m_3 g+m_2 g-\mu m_1 g=(m_1+m_2+m_3)a \Rightarrow$

$a=g\dfrac{m_3+m_2-\mu m_1}{m_1+m_2+m_2}=2$ m/s².

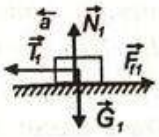


c. Forța de apăsare pe scripetele S în condițiile punctului anterior este $R=T\sqrt{2}\approx 4{,}5$ N, deoarece din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}=0$, unde $T_1=T_2=T=m_1(a+\mu g)$.



d. Tensiunea din firul care leagă corpurile 2 şi 3 este $T'=m_3(g-a)=1{,}6$ N

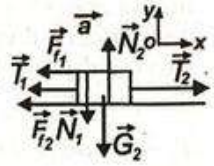
66.a. Sistemul de corpuri se deplasează accelerat cu accelerația a. Pentru corpul m_1. $\vec{G}_1+\vec{T}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{N}_1=m_1\vec{a}$, iar scalar $T_1-\mu_1 m_1 g=m_1 a$ (1), deoarece $F_{f1}=\mu N_1=\mu m_1 g$.



Pentru corpul m_2: $\vec{T}_1+\vec{N}_2+\vec{T}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f1}+\vec{N}_1+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$, scalar pe Ox $T_2-T_1-F_{f1}-F_{f_2}=m_2 a$ şi

pe Oy: $N_2-N_1-m_2 g=0 \Rightarrow F_{f2}=\mu_2(m_1+m_2)g \Rightarrow$

$T_2-T_1-\mu_1 m_1 g-\mu_2(m_1+m_2)g=m_2 a$ (2)



Pentru corpul m_3: $\vec{G}_3+\vec{T}_2=m_3\vec{a}$. Scalar $m_3 g-T_2=m_3 a$ (3)

(1)+(2)+(3) $m_2 g-2\mu_1 m_1 g-\mu_2(m_1+m_2)g=(m_1+m_2+m_3)a \Rightarrow$

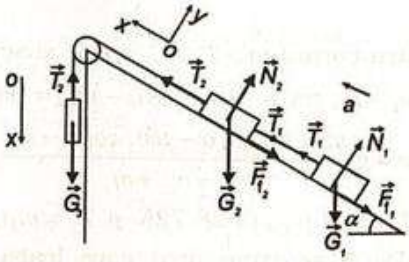
$a=g\dfrac{m_3-2\mu_1 m_1-\mu_2(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}=5{,}8$ m/s²

b. $T_1=m_1(a+\mu_1 g)=15{,}6$ N şi $T_2=m_3(g-a)=52$ N

c. Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform în acelaşi sens, $a=0 \Rightarrow$ $m_3=2\mu_1 m_1+\mu_2(m_1+m_2)=1{,}3$ kg

67.a. Studiem mişcarea corpului m_3.

$\vec{G}_3 + \vec{T}_2 = m_3\vec{a}$. Prin proiecţia pe axa de coordonate Ox: $m_3 g - T_2 = m_3 a$ (1)



Studiem mişcarea corpului m_2. Vectorial: $\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$.

Pe Ox: $T_2 - m_2 g\sin\alpha - F_{f_2} - T_1 = m_2 a$ şi pe Oy: $N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$F_{f_2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha \Rightarrow T_2 - m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha - T_1 = m_2 a$ (2)

Studiem mişcarea corpului m_1. Vectorial: $\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$

Proiectăm pe Ox: $T_1 - m_1 g\sin\alpha - F_{f_1} = m_1 a$ şi pe Oy: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f_1} = \mu N_1 = \mu m_1 g\cos\alpha \Rightarrow T_1 - m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha = m_1 a$ (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow g[m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)] = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow a = g\frac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} = 2{,}63 \text{ m/s}^2$$

b. $T_2 = m_3(g - a) = 36{,}85$ N

c. $T_1 = m_1(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a) = 12{,}28$ N

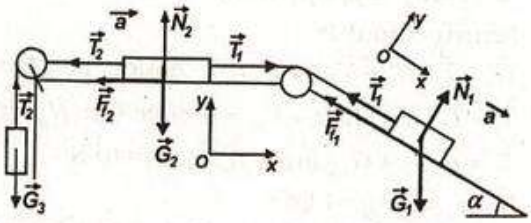
68.a. Studiem mişcarea corpului m_1. Vectorial: $\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

pe Ox: $m_1 g\sin\alpha - T_1 - F_{f_1} = m_1 a$

pe Oy: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$

Cum $F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \Rightarrow$

$m_1 g\sin\alpha - T_1 - \mu_1 m_1\cos\alpha = m_1 a$ (1)



Studiem mişcarea corpului m_2.

$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$

pe Ox: $T_1 - T_2 - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe Oy: $N_2 - m_2 g = 0$.

Cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2 \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu_2 m_2 g = m_2 a$ (2)

Studiem mişcarea corpului m_3: $\vec{T}_2 + \vec{G}_3 = m_3\vec{a}$ şi scalar $T_2 - m_3 g = m_3 a$ (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow g(m_1\sin\alpha - \mu_1 m_1\cos\alpha - \mu_2 m_2 - m_3) = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow a = g\frac{m_1\sin\alpha - \mu_1 m_1\cos\alpha - \mu_2 m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}834 \text{ m/s}^2$$

b. $T_1 = m_1(g\sin\alpha - \mu_1 g\cos\alpha - a) \approx 16{,}5$ N şi $T_2 = m_3(g + a) = 10{,}83$ N

69.a. Studiem mişcarea corpului m_1.

$\vec{T}_1 + \vec{G}_1 = m_1\vec{a}$ şi $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

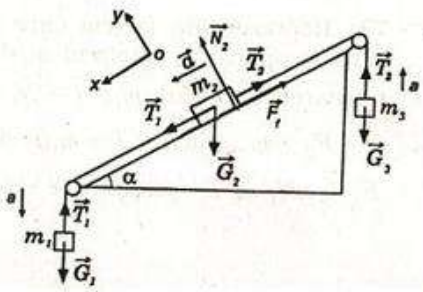
Studiem mişcarea corpului m_2:

$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm pe Ox:

$T_1 + m_2 g\sin\alpha - T_2 - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe Oy:

$N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{f_2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha$

$T_1 + m_2 g\sin\alpha - T_2 - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a$ (2)

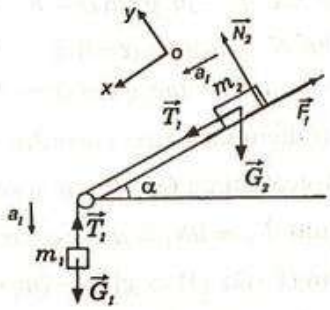


Pentru corpul m_3: $\vec{T}_2+\vec{G}_3=m_3\vec{a}$ şi scalar $T_2-m_3g=m_3a$ (3). Din(1)+(2)+(3)$\Rightarrow$

$g(m_1+m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-m_3)=(m_1+m_2+m_3)a$

$$\Rightarrow a=g\frac{m_1+m_2\sin\alpha-\mu m_2\cos\alpha-m_3}{m_1+m_2+m_3}\approx 3{,}32\ \text{m/s}^2$$

b. $T_1=m_1(g-a)=26{,}72\text{N}$ şi $T_2=m_3(g+a)=26{,}64\text{N}$



c. Dacă se rupe firul care leagă corpul m_3 de corpul m_2 sistemului de corpuri se mişcă accelerat cu accelerația a_1. Pentru corpul m_1:

$m_1g-T_1=m_1a_1$ (1), iar pentru corpul m_2:

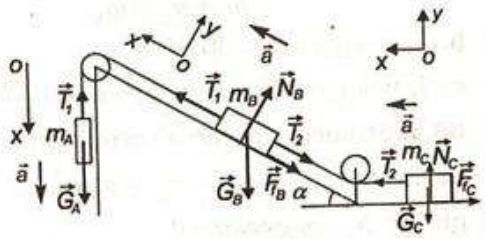
$T_1+m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha=m_2a_1$ (2).

Din (1)+(2) obținem:

$m_1g+m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha=(m_1+m_2)a_1\Rightarrow$

$$a_1=g\frac{m_1+m_2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}=7{,}76\ \text{m/s}^2$$

70.a. Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform a=0. Pentru corpul A:



$\vec{G}_A+\vec{T}_1=0\Rightarrow T_1=m_Ag$

Pentru corpul C: $\vec{G}_C+\vec{T}_2+\vec{N}_C+\vec{F}_{fC}=0$

$\Rightarrow T_2=F_{fC}=\mu_CG_C=10$ N

Pentru corpul B:

$\vec{G}_B+\vec{T}_2+\vec{T}_1+\vec{N}_B+\vec{F}_{fB}=0$. Astfel pe Ox:

$T_1-T_2-G_B\sin\alpha-F_{fB}=0$ şi pe Oy: $N_B=G_B\cos\alpha$ şi $F_{fB}=\mu_BN_B\Rightarrow$

$T_1=\mu_CG_C+G_B(\sin\alpha+\mu_B\cos\alpha)=40$ N

b. $m_A=T_1/g=4$ kg

c. Sistemul se mişcă accelerat în acelaşi sens ca la punctul **a.**, astfel că pentru m_A: $\vec{G}_A+\vec{T}_1=m_A\vec{a}$ şi scalar pe Ox: $m_Ag-T_1=m_Aa$ (1)

Pentru m_B: $\vec{G}_B+\vec{T}_2+\vec{T}_1+\vec{N}_B+\vec{F}_{fB}=m_B\vec{a}$. Pe Ox: $T_1-T_2-G_B\sin\alpha-F_{fC}=m_Ba$

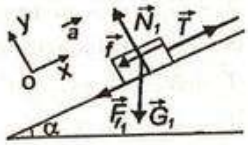
PeOy: $N_B-G_B\cos\alpha=0$ şi $F_{fB}=\mu_BN_B\Rightarrow T_1-T_2-G_B\sin\alpha-\mu_BG_B\cos\alpha=m_Ba$ (2)

Pentru m_C: $\vec{G}_C+\vec{T}_2+\vec{N}_C+\vec{F}_{fC}=m_Ca\Rightarrow$ pe Ox: $T_2-\mu_CG_C=m_Ca$ (3)

Din (1)+(2)+(3)$\Rightarrow G_A-G_B(\sin\alpha+\mu_B\cos\alpha)-\mu_CG_C=(m_A+m_B+m_C)a\Rightarrow$

$$G_A=\frac{[G_B(\sin\alpha+\mu_B\cos\alpha)+\mu_CG_C]g+(G_B+G_C)a}{g-a}=70\ \text{N}\Rightarrow m_A=\frac{G_A}{g}=7\ \text{kg}$$

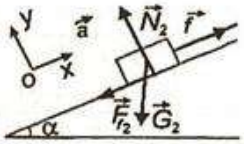
71. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: Studiem mişcarea corpului m_1: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{f}=m_1\vec{a}$. Pe Ox:



$T-F_{f_1}-m_1g\sin\alpha-f=m_1a$ şi pe Oy: $N_1-m_1g\cos\alpha=0\Rightarrow$

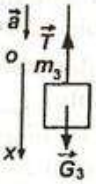
$F_{f_1}=\mu N_1\Rightarrow T-\mu m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha-f=m_1a$ (1)

Studiem mişcarea corpului m_2: $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{f}=m_2\vec{a}$, astfel că pe Ox: $f-F_{f2}-m_2g\sin\alpha=m_2a$ şi pe Oy: $N_2-m_2g\cos\alpha=0\Rightarrow F_{f2}=\mu N_2\Rightarrow$



$f-\mu m_2g\cos\alpha-m_2g\sin\alpha=m_2a$ (2)

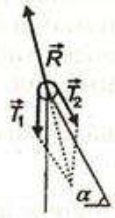
Studiem mişcarea corpului m_3: $\vec{T}+\vec{G}_3=m_3\vec{a}$, astfel că scalar $m_3g-T=m_3a$ (3). Adunând cele trei ecuaţii obţinem: $m_3g-(m_1+m_2)g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=(m_1+m_2+m_3)a$ =2 m/s².



b. Forţa cu care corpul de masă m_1 impinge corpul de masă m_2 este $f=m_2(\mu g\cos\alpha+g\sin\alpha+a)$=12 N

c. Tensiunea în firul de legătură este $T=m_3(g-a)$=24 N.

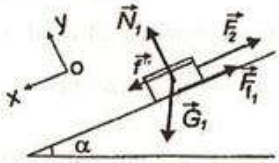
Calculăm reacţiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiţia de echilibru: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)\Rightarrow$



$R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos(90-\alpha)$. Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow$

$R^2=2T^2+2T^2\sin\alpha\Rightarrow R=T\sqrt{2(1+\sin\alpha)}\approx 42{,}93$ N

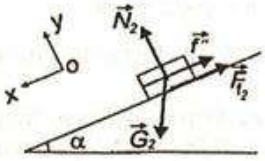
d. Impunem condiţia de mişcare uniformă pentru sistemul de corpuri m_1 şi m_2, dacă acestea se mişcă în acelaşi sens, astfel că acceleraţia este nulă. Cum $T=F_1$, obţinem pentru corpul m_1: $F_1-\mu m_1g\cos\alpha-m_1g\sin\alpha-f'=0$ şi pentru corpul m_2 obţinem: $f'-\mu m_2g\cos\alpha-m_2g\sin\alpha=0$.



Astfel prin adunare obţinem

$F_1=(m_1+m_2)g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$=20 N.

Dacă corpurile îşi schimbă sensul de mişcare, se schimbă sensul forţelor de frecare, astfel că pentru corpul m_1 obţinem: $m_1g\sin\alpha-\mu m_1g\cos\alpha+f''-F_2=0$ şi pentru corpul m_2 obţinem: $m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha-f''=0$. Astfel prin adunare obţinem $F_2=(m_1+m_2)g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$=4 N.

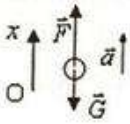


2.4. Legea lui Hooke. Forţa elastică.

1.a. Din legea lui Hooke $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow F=SE\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$. Cum forţa de întindere este greutatea corpului $F=mg\Rightarrow m=\frac{SE\Delta\ell}{g\ell_0}=\frac{\pi\cdot d^2E\Delta\ell}{4g\ell_0}\approx 1{,}5$ kg.

b. Efortul unitar din cablu este $\sigma=\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\approx 1{,}9\cdot10^7$ N/m²

c. Impunem condiţia de mişcare accelerată a corpului: $\vec{F}+\vec{G}=m\vec{a}$. Pe Ox: $F-mg=ma\Rightarrow F=m(a+g)$.



Cum $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell_1}{\ell_0}\Rightarrow\Delta\ell_1=\frac{m(a+g)\ell_0}{S\cdot E}$. Cum $S=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\Rightarrow$

$\Delta\ell_1 = \dfrac{4m(a+g)\ell_0}{\pi \cdot d^2 \cdot E} = \dfrac{(a+g)\Delta\ell}{g} = 2{,}124$mm. Efortul unitar din cablu este:

$\sigma_1 = \dfrac{F}{S} = \dfrac{4m(a+g)}{\pi \cdot d^2} = \dfrac{\sigma(a+g)}{g} = 2{,}27 \cdot 10^7$ N/m²

2.a. Aflăm masa cablului de susținere $m_c = m_0\ell = 48$ kg și masa totală ridicată de cablu este: $m_t = m + m_c = 1024$ kg. Conform principiului al doilea al dinamicii, scalar obținem tensiunea maximă care apare în cablu la pornirea accelerată a liftului: $T_{max} - m_t g = m_t a \Rightarrow T_{max} = m_t(a+g) = 11{,}776$ kN

b. În momentul pornirii cablul este alungit atât de greutatea lui cât și de a liftului suspendat. Datorită distribuției uniforme a masei cablului de-a lungul acestuia forța de întindere datorită numai greutății acestuia este 1/2 din greutatea cablului. Astfel cablul poate fi considerat un punct material cu masa concentrată în centrul de greutate. Deoarece liftul și cablul pornesc accelerat, atunci forța maximă de întindere a firului se obține când liftul se

află la parter: $F - \left(\dfrac{m_c}{2} + m\right)g = \left(\dfrac{m_c}{2} + m\right)a \Rightarrow F = \left(\dfrac{m_c}{2} + m\right)(g+a) = 11{,}5$ kN

Conform legii lui Hooke $\dfrac{F}{S} = E\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{F \cdot \ell_0}{S \cdot E} = 5{,}75$ mm.

c. Deoarece efortul unitar nu depășește pe cel maxim admisibil σ_a, atunci

$S_{min} = \dfrac{F}{\sigma_a} = 0{,}2$ cm²

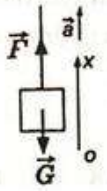
3.a. Conform compunerii vectorilor, forța rezultantă este $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow$

$R = F\sqrt{2} = 4$ N

b. Cum forța de întindere a firului este R, din $\dfrac{R}{S} = E\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow E = \dfrac{R\ell_0}{S\Delta\ell} = 10^{11}$ N/m²

c. După tăierea firului, corpul se va mișca uniform accelerat cu accelerația $a = R/m$, astfel că $v = at = 4$ m/s

4.a. Considerăm sistemul un corp cu masa $m_t = M + m$. Acest corp se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F} + \vec{G} = (M+m)\vec{a}$, iar scalar

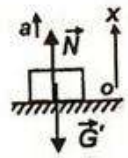


$F - (M+m)g = (M+m)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{M+m} - g = 2$ m/s².

Impunem condiția de mișcare manșonului: $\vec{N} + \vec{G}' = m\vec{a}$ și scalar

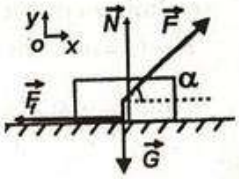
$N - mg = ma \Rightarrow N = m(a+g) = 36$ N

b. Cum $a = \Delta v/\Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta v/a = 3$ s



c. Prin definiție efortul unitar este $\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{4F}{\pi \cdot d^2} \approx 1{,}2\ 10^9$ N/m²

5.a. Impunem condiția de mișcare rectilinie uniformă corpului, astfel



$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = 0$ iar pe Oy:

$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$

$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0 \Rightarrow F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 80$ N

b. Conform legii lui Hooke: $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$ şi $\varepsilon=\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow E=\frac{4F}{\pi\cdot d^2\varepsilon}$=8 10^9 N/m²

c. Reacţiune normală la suprafaţă este $N=\frac{mg\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$=160 N

6.a. Deoarece distanţa dintre cele două ziduri este mai mare decât suma lungimilor cablurilor nedeformate, ambele cabluri sunt întinse, iar forţele de întindere sunt egale. Pe baza principiului acţiunii şi reacţiunii, tensiunile din cele două cabluri sunt egale, astfel că $F_1=F_2=F$. Conform legii lui Hooke

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell_1}{\ell_1}\Rightarrow\Delta\ell_1=\frac{F\ell_1}{SE},\Delta\ell_2=\frac{F\ell_2}{SE}\Rightarrow\ell=\ell_1+\Delta\ell_1+\ell_2+\Delta\ell_2=\ell_1+\frac{F\ell_1}{SE}+\ell_2+\frac{F\ell_2}{SE}$$

$$\Rightarrow\frac{F(\ell_1+\ell_2)}{SE}=\ell-\ell_1-\ell_2\Rightarrow F=\frac{SE(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}=270\text{ kN}$$

b. Alungirile absolute ale cablurilor sunt:

$$\Delta\ell_1=\frac{F\ell_1}{SE}=\frac{\ell_1(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}\approx 9{,}8\text{ cm şi }\Delta\ell_2=\frac{F\ell_2}{SE}=\frac{\ell_2(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}\approx 10{,}2\text{ cm}$$

c. Eforturile unitare la care sunt supuse cablurile sunt egale cu $\sigma_1=\sigma_2=\sigma=\frac{F}{S}=2{,}7\cdot10^9$ N/m²

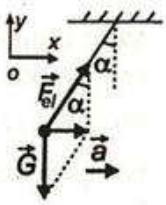
7.a. Legea lui Hooke este valabilă atât timp cât alungirea este direct proporţională cu forţa de întindere. Observăm că o creştere a alungirii cu $\Delta\ell$=6 mm se obţine atunci când forţa de întindere creşte cu ΔF=5 N. Acest lucru este valabil până ce resortul se alungeşte cu $\Delta\ell$=2,4 mm, deci până când forţa de întindere devine F=20 N. După ce forţa de întindere depăseşte valoarea de 20 N, când aceasta creşte alungirea coardei creşte mai mult ca înainte, astfel nu se mai respectă legea $F=k\Delta\ell$. Domeniul de valori ale forţelor de întindere pentru care este valabilă legea lui Hooke este $F\in[0,20]$N.

b. Din $F=k\Delta\ell\Rightarrow k=F/\Delta\ell$=833,33 N/m, deoarece F=5 N şi $\Delta\ell$=6 mm

c. Studiem mişcarea uniformă a coardei, astfel că $F-F_f=0\Rightarrow F=\mu N=\mu mg=k\Delta\ell\Rightarrow$ $\Delta\ell=\mu mg/k$=6 mm

8.a. Din grafic se observă că atunci când x=8 cm, forţa elastică corespunzătoare este F =64 N. Atunci constanta elastică a resortului este $k=F/x$=800 N/m

b. Din condiţia de echilibru impusă corpului $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, scalar obţinem $G=F_{el}\Rightarrow mg=kx\Rightarrow x=mg/k$ =2,5 mm

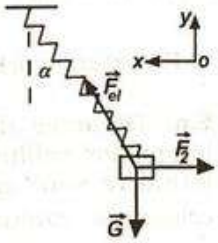


c. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului. Vectorial $\vec{F}_{el}+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm pe axa Ox: $F_{el}\sin\alpha=ma$ şi pe Oy: $F_{el}\cos\alpha-mg=0\Rightarrow F_{el}=m\sqrt{a^2+g^2}=kx_1\Rightarrow x_1$=2,75 mm

9.a. Impunem condiţia de echilibru corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar $G=F_{el}\Rightarrow$ $mg=k\Delta l=k(\ell-\ell_0)=k\ell_0 f$, deoarece lungimea resortului devine $\ell=\ell_0(1+f)$. Dacă se acţionează asupra bilei prinse de resort cu o forţă verticală, atunci $\vec{G}+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_1=0$, iar scalar $G+F_1=F_{el}'\Rightarrow mg+F_1=k2\Delta\ell\Rightarrow mg+F_1=2mg\Rightarrow m=F_1/g$ $\Rightarrow m$=0,5 kg

b. Din $mg=k\ell_0 f\Rightarrow k=\frac{mg}{f\cdot\ell_0}=\frac{F_1}{f\cdot\ell_0}$=500 N/m

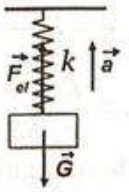
c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}+\vec{F}_2=0$. Scalar pe Ox. $F_{el}\sin\alpha-F_2=0$ și pe Oy:



$F_{el}\cos\alpha-mg=0\Rightarrow F_{el}=\sqrt{F_2^2+(mg)^2}=kx\Rightarrow$

$x=\dfrac{\sqrt{F_2^2+(mg)^2}}{k}$=1,2 cm

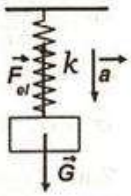
10.a. Studiem mișcarea accelerată a liftului în sus: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}$. Scalar $F_{el}-mg=ma\Rightarrow F_{el}=m(a+g)=10{,}8$ N



Deformația resortului este $x_1=\dfrac{F_{el}}{k}=5{,}4$ cm

b. Studiem coborârea accelerată a liftului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}$

Scalar $mg-F_{el}=ma\Rightarrow F_{el}=m(g-a)=9{,}2$ N, iar deformația resortului este $x_2=\dfrac{F_{el}}{k}=\dfrac{m(g-a)}{k}=4{,}6$ cm



c. În cazul mișcării uniforme a liftului, accelerația acestuia este zero. $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0\Rightarrow F_{el}=G=mg=10$ N, iar $x_3=\dfrac{F_{el}}{k}=\dfrac{mg}{k}=5$ cm.

11.a. Studiem echilibrul corpului aflat pe cântar $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar $G=F_{el}\Rightarrow mg=kx\Rightarrow k=\dfrac{mg}{x}=1{,}5\cdot10^4$ N/m

b. Dacă în locul copilului pe cântar se urcă adultul, atunci $G_a=F'_{el}\Rightarrow Mg=kx'\Rightarrow x'=\dfrac{Mg}{k}=\dfrac{M}{m}x=6$ cm

c. Pentru adultul aflat pe cântarul din liftul care coboară frânat $\vec{G}+\vec{F}_{el}=M\vec{a}$. Viteza liftului este orientată în jos, iar accelerația acestuia este orientată în sus, astfel că $F_{el}-Mg=Ma\Rightarrow F_{el}=M(a+g)$.

Forța elastică determină acul cântarului să arate eronat mai mult, astfel că masa indicată este $M_1=\dfrac{F_{el}}{g}=95{,}4$ kg

12.a. În intervalul de timp $t\in(1,9)$s, a=0 m/s și prin urmare corpul de iluminat se mișcă rectiliniu și uniform, astfel că $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0\Rightarrow G=F_{el}\Rightarrow$ $mg=k\Delta\ell\Rightarrow k=mg/\Delta\ell$=500 N/m

b. În cea de-a treia etapă a mișcării accelerația corpului este $a_3=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=-6$ m/s².

Studiem mișcarea corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}_3$, iar scalar obținem:

$mg-k\Delta\ell_3=m|a_3|\Rightarrow\Delta\ell_3=m(g-|a_3|)/k=4$ mm$\Rightarrow\ell=\ell_0+\Delta\ell_3$=20,4 cm

c. Calculăm distanța parcursă de ascensor cu ajutorul ariei cuprinse între curba vitezei și axa timpului. Astfel d=54 m. Numărul de etaje ale clădirii este $N=\dfrac{d}{h_0}+1$=19, deoarece la numărul de nivele ale clădirii se obține adunând parterul la numărul de etaje parcurse de lift.

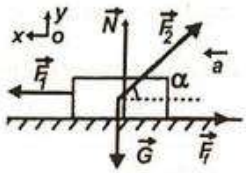
13.a. Din grafic se observă că $\Delta\ell = kt$, astfel că $\frac{\Delta\ell}{\Delta\ell_m} = \frac{t}{t_m} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\Delta\ell_m t}{t_m}$=3 cm, astfel că forța elastică este $F_{el} = k\Delta\ell$=6 N, deoarece la momentul t_m=5 s, deformația maximă a resortului este $\Delta\ell_m$=5 cm

b. Când $\Delta\ell$=2 cm, corpul se află în repaus, deoarece până când deformația resortului devine $\Delta\ell_m$=5 cm alungirea și forța elastică cresc. Astfel vectorial $\vec{G} + \vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Scalar $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_f = k\Delta\ell$=4 N

b. Corpul începe să alunece când forța de frecare devine maximă și egală cu forța elastică maximă. Astfel $F_{el}' = F_f' \Rightarrow k\Delta\ell_m = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{k\Delta\ell_m}{mg}$=0,2

14.a. Din $F_1 = k\Delta\ell \Rightarrow k = F_1/\Delta\ell$=7 cm

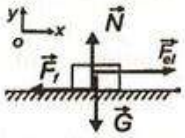
b. Impunem condiția de echilibru corpului cu masă m. Vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Deoarece $F_1 > F_2\cos\alpha$, corpul se va deplasa spre stânga accelerat. Proiectăm pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_1 - F_2\cos\alpha - F_f = ma$ și pe Oy: $F_2\sin\alpha + N - mg = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu(mg - F_2\sin\alpha) \Rightarrow$ $F_1 - F_2(coa\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a$=1,94 m/s²



c. Pentru ca acest corp să nu apese pe planul orizontal trebuie ca $N = 0 \Rightarrow$ $F_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$=20 N

15.a. Studiem mișcarea rectilinie uniformă a corpului: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_{el} = F_f$ și pe Oy:

$F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow kx_0 = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{kx_0}{mg}$=0,1

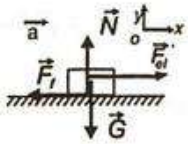


b. Studiem mișcarea accelerată a corpului când alungirea resortului este de trei ori mai mare decât în cazul mișcării uniforme. În acest caz:

$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe Ox: $F_{el}' - F_f = ma$ și pe Oy:

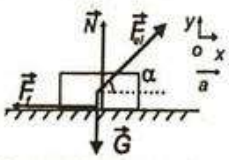
$N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow 3kx_0 - \mu mg = ma$

Cum $kx_0 = \mu mg \Rightarrow 2kx_0 = ma \Rightarrow a = \frac{2kx_0}{m}$ = 2 m/s²



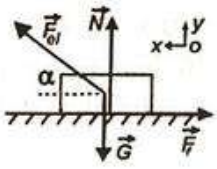
c. Reprezentăm forțele asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{el}\cos\alpha - F_f = ma$ și pe Oy: $N + F_{el}\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el}\sin\alpha \Rightarrow F_f = \mu N \Rightarrow$

$F_f = \mu(mg - F_{el}\sin\alpha) \Rightarrow F_{el}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow x = \frac{m(a + \mu g)}{k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$=2 cm



16.a. Impunem condiția de echilibru corpului suspendat m_1: $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow G_1 = F_{el} \Rightarrow m_1 g = kx \Rightarrow x = m_1 g/k$=6 cm

b. Impunem condiția de echilibru cubului cu masa $m_2 = \rho V = \rho(\ell^3 - \ell_1^3)$=7,488 kg. Vectorial $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.



Proiectăm pe axa Oy: $N + F_{el}\sin\alpha - m_2 g = 0 \Rightarrow N = g(m_2 - m_1\sin\alpha) \approx 59{,}88$ N

c. Pe Ox: $F_{el}\cos\alpha - F_f = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \dfrac{m_1\cos\alpha}{m_2 - m_1\sin\alpha} \approx 0{,}43$

17.a. Deoarece corpul se află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă. Scalar $G = F_{el} \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k} = 5$ mm

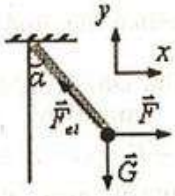
b. Studiem echilibrul corpului, după reprezentarea forțelor: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $F - F_{el}\sin\alpha = 0$ și

pe Oy: $F_{el}\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow kx\cos\alpha = mg \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k\cos\alpha} = 1$cm

$\Rightarrow F = kx\sin\alpha = m\cdot g\cdot tg\,\alpha = 0{,}865$ N

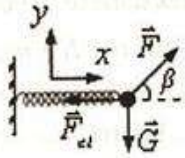


c. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G} = 0$.

pe Ox: $F\cos\beta - F_{el} = 0 \Rightarrow F\cos\beta = kx$ și

pe Oy: $F\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{mg}{F} = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{F\cos\beta}{k} = 7{,}06$ mm



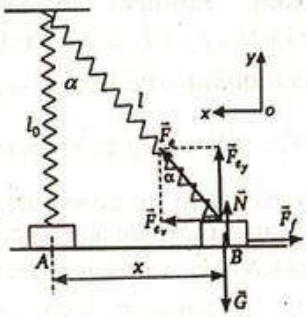
18.a. Studiem mișcarea corpului. Deoarece corpul începe să se deplaseze, considerăm că în acel moment mișcarea corpului este uniformă, iar rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $F_{el}\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F_{el}\sin\alpha$;

pe Oy: $F_{el}\cos\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el}\cos\alpha$.

$F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \dfrac{F_{el}\sin\alpha}{mg - F_{el}\cos\alpha}$.



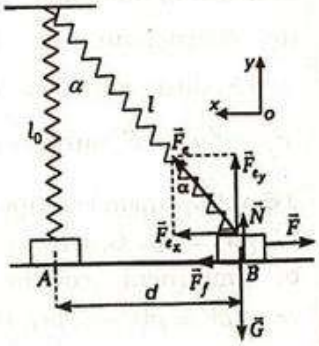
Dar $F_{el} = k\Delta l = k(\ell - \ell_0)$ și cum $\cos\alpha = \dfrac{\ell_0}{\ell} \Rightarrow \ell = \dfrac{\ell_0}{\cos\alpha} \Rightarrow F_{el} = \dfrac{k\ell_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \mu = \dfrac{k\ell_0(1-\cos\alpha)tg\alpha}{mg - k\ell_0(1-\cos\alpha)} = 0{,}5$

b. $N = mg - F_{el}\cos\alpha = mg - k\ell_0(1-\cos\alpha) = 8{,}65$ N

c. Când trece prin poziția verticală $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, deoarece forța elastică este nulă pentru că resortul este nedeformat.

Scalar $-\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu\cdot g \Rightarrow a = -5$ m/s²

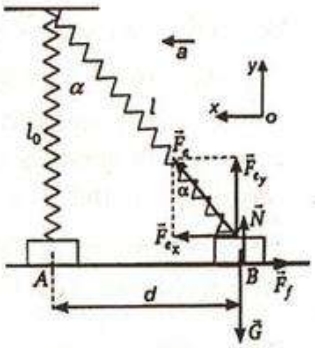


19.a. $F_{el} = k(\ell - \ell_0) = k\left(\sqrt{\ell_0^2 + d^2} - \ell_0\right) = 7{,}8$ N

b. Impunem condiția de echilibru corpului în poziția B. Vectorial $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox:

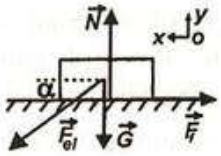
$F_{el}\sin\alpha - F + F_f = 0$ şi pe Oy: $F_{el}\cos\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\cos\alpha)$
$\Rightarrow F = F_{el}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \mu mg \approx 5{,}056\text{N}$,

$\sin\alpha = \dfrac{d}{\sqrt{d^2+\ell_0^2}} = 0{,}6$ şi $\cos\alpha = \dfrac{\ell_0}{\sqrt{d^2+\ell_0^2}} = 0{,}8$



c. În momentul în care este eliberat în poziţia B corpul se va mişca accelerat, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.
Vectorial obţinem pe Ox:
$F_{el}\sin\alpha - F_f = ma \Rightarrow F_{el}\sin\alpha - \mu(mg - F_{el}\cos\alpha) = ma \Rightarrow$
$a = \dfrac{F_{el}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m} - \mu\cdot g \approx 4{,}304\ \text{m/s}^2$

20.a. Considerăm că acest corp porneşte într-o mişcare uniformă şi prin urmare rezultanta forţelor care acţionează asupra corpului este nulă. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{el}\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow kx\cos\alpha = F_f$ şi pe Oy:
$N - mg - F_{el}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = mg + kx\sin\alpha$.



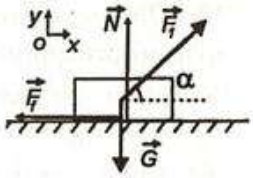
Cum $F_f = \mu N \Rightarrow kx\cos\alpha = \mu mg + \mu kx\sin\alpha \Rightarrow x = \dfrac{\mu mg}{k(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = 3{,}525$ cm.

b. $F_{el}' = kx' = kx\sqrt{2} = 1{,}5$ N

c. Impunem condiţia de mişcare corpului $\vec{F}_{el}' + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Scalar pe Ox: $F_{el}'\cos\alpha - F_f = ma \Rightarrow kx\sqrt{2}\cos\alpha - F_f = ma$. Înlocuind x şi forţa de frecare $F_f = \mu N = \mu(mg + kx\sqrt{2}\sin\alpha)$, obţinem $a = \mu g(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}82\ \text{m/s}^2$

21. a. Deoarece $F = k\Delta\ell$, atunci $\dfrac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} = \dfrac{F_2}{F_1} = 1{,}2$

b. Impunem condiţia de echilibru corpului: $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Pe Ox: $F_1\cos\alpha - F_f = 0$ iar pe Oy: $N + F_1\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_1\sin\alpha) \Rightarrow$
$\mu = \dfrac{F_1\cos\alpha}{mg - F_1\sin\alpha} = 0{,}25$



c. Sub acţiunea forţei F_2, vectorial obţinem $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.
Pe Ox: $F_2\cos\alpha - F_f = ma$ şi pe Oy: $N + F_1\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow$
$F_f = \mu N = \mu(mg - F_2\sin\alpha) \Rightarrow a = \dfrac{F_2(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m} - \mu g = 0{,}5\ \text{m/s}^2$

d. Deoarece corpul nu mai apasă pe suprafaţă $N=0 \Rightarrow F_3 = \dfrac{mg}{\sin\alpha} \approx 7{,}05$ N

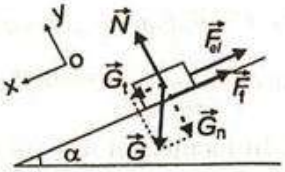
22.a. Deoarece corpul este în repaus, atunci $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} = 0$, iar scalar pe Ox: $mg\sin\alpha = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow \ell = \ell_0 + mg\sin\alpha / k = 90$ cm

b. În prezența forțelor de frecare $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$

Pe Ox: $mg\sin\alpha - F_f - k(\ell'-\ell)=0$ și pe Oy:

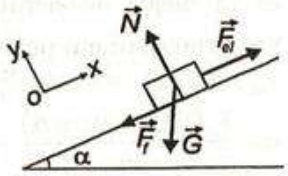
$N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_f = \mu mg\cos\alpha$.

Astfel $\ell' = \ell_0 + mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k = 84$ cm



c. Impunem condiția de mișcare rectilinie și uniformă corpului, astfel că $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Pe Ox: $k\Delta\ell = mg\sin\alpha + F_f$. Cum $F_f = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

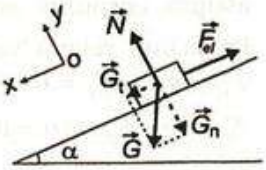
$\Delta\ell = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/k = 16$ cm



23.a. Din condiția de echilibru impusă corpului suspendat obținem: $\vec{F}_{el}+\vec{G}=0 \Rightarrow mg = k(\ell-\ell_0) \Rightarrow k = mg/(\ell-\ell_0) = 100$ N/m

b. Resortul este comprimat, iar corpul se află în echilibru, astfel că $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}=0$.

Forța elastică este $F_{el} = k(\ell_0-\ell_1) = 0{,}5$ N



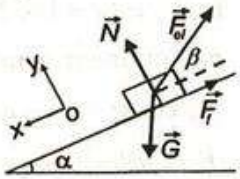
c. Proiectăm pe Ox relația vectorială:și obținem:

$mg\sin\alpha - k(\ell_0-\ell_1) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = F_{el}/mg = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 30^0$

24.a. Impunem condiția de echilibru corpului. $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe Ox: $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - F_f = 0$ și pe Oy:

$$F_f = \mu(mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta) \Rightarrow F_{el} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} \approx 2{,}3 \text{ N}$$



b. Alungirea resortului este $\Delta\ell = F_{el}/k = 2{,}28$ cm

c. Forța de apăsare normală este:

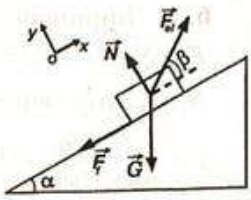
$N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 0{,}126$ N

25.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra schiorului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $F_{el}\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe Oy: $N + F_{el}\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$

Obținem $F_{el}\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F_{el}\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$$F_{el} = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 697{,}3 \text{ N și obținem } \Delta\ell = \frac{F_{el}}{k} \approx 10 \text{ cm}$$



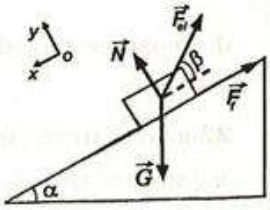
b. Apăsarea schiorului asupra pârtiei este $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 148{,}4$ N

c. Timpul necesar urcării pârtiei este $\Delta t = \dfrac{D}{v} = 20{,}8$ m/s

d. Reprezentăm forțele care acționează asupra achiorului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $mg\sin\alpha - F_f - F_{el}\cos\beta = 0$ și pe Oy:

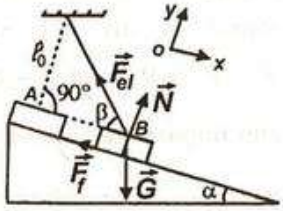
$N + F_{el}\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$



Obținem $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F_{el}\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$\Delta\ell' = \frac{F_{el}}{k} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{k(\cos\beta - \mu\sin\beta)} \approx 9{,}35$ cm

26. a. Alungirea firului în poziția de echilibru B este $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, unde $\ell = \ell_0 / \sin\beta$, astfel că $\Delta\ell = \ell_0(1/\sin\beta - 1) \approx 16{,}4$ cm



b. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

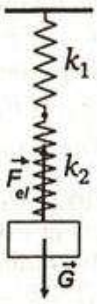
Proiectând pe Oy: $F_{el}\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$ $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta$ și proiectând pe Ox obținem: $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - F_f = 0$.

Cum $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta)$ obținem: $F_{el} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} \approx 3{,}1$ N

c. Din $F_{el} = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{F_{el}}{\Delta\ell} \approx 18{,}9$ N/m

d. $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 1$ N

27.a. Legăm cele două resorturi în serie. Suspendăm de resortul de jos un corp cu masa m, astfel ca forța de întindere este $F = mg = k_2x_2$, deoarece corpul se află în echilibru. Cum resorturile sunt alungite cu x_1 și respectiv x_2, forțele de întindere în cele două resorturi sunt egale (conform principiului acțiunii și reacțiunii), astfel că $F = k_1x_1 = k_2x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{k_1}$ și $x_2 = \frac{F}{k_2}$. Înlocuind cele două resorturi trebuie să obținem un singur resort cu constanta elastică k_s, astfel ca la aceeași forță de întindere alungirea finală să fie $x_s = x_1 + x_2$.

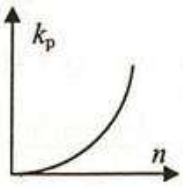


Cum $F = k_sx_s \Rightarrow x_s = \frac{F}{k_s} \Rightarrow \frac{F}{k_s} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow k_s = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} = 7{,}5$ N/m

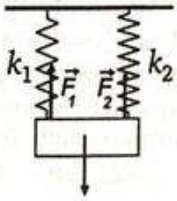
b. Legăm cele două resorturi în paralel și suspendăm un corp cu masa m, astfel că cele două resorturi se vor întinde identic deformându-se la fel cu x, astfel că $F = F_1 + F_2 = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$.

Înlocuim cele două resorturi cu un singur resort, acesta se va alungi identic sub acțiunea aceleiași forțe de întindere F.

$F = k_px \Rightarrow k_p = k_1 + k_2 = 40$ N/m



c. Putem considera resortul inițial ca o legare în serie a "n" resorturi identice, cu constanta elastică k. Cum $\frac{1}{k_1} = \sum\frac{1}{k} = \frac{n}{k} \Rightarrow k = nk_1$. Legăm apoi cele "$n$" resorturi identice în paralel și se va obține un resort cu constanta elastică: $k_p = \sum k = nk = n^2k_1$. Reprezentarea grafică a lui k_p în funcție de "n" este o parabolă.



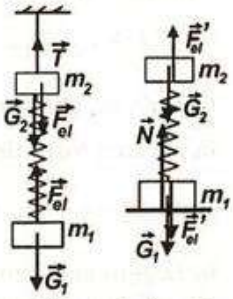
28.a. Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta face n_1 pași din momentul în care ineluşul începe să opună

rezistenţă. Astfel $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe Ox: $F_{el}-F_f=0 \Rightarrow kn_1p=\mu mg$ (1), unde p reprezintă lungimea unui pas, iar m este masa gândăcelului.
Impunem condiţia de echilibru gândăcelului când acesta trage din nou dar având şi un bob de orez în braţe: $\vec{F}_{el}'+\vec{G}'+\vec{N}'+\vec{F}_f'=0$. Scalar pe Ox: $F_{el}'-F_f'=0 \Rightarrow kn_2p=\mu(m+m_0)g$ (2).

Din împărţirea relaţiei (2) la (1) obţinem: $m=\dfrac{n_1m_0}{n_2-n_1}$ =0,125 g

b. Impunem condiţia de echilibru gândăcelului când acesta atârnă la marginea mesei suspendat de cui prin intermediul ineluşului. Astfel $\vec{F}_{el0}+\vec{G}=0$, iar scalar $mg=kn_0p$ (3). Din (1) şi (3) obţinem: $\mu=n_1/n_0$=0,25

c. Dacă ineluşul se taie şi rămâne fixat de cui atunci cele două jumătăţi ale ineluşului vor fi legate în serie. Constanta elastică a firului este k', astfel că $\dfrac{1}{k'}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{2}{k_1} \Rightarrow k'=\dfrac{k_1}{2}$, unde k_1 reprezintă constanta elastică a unei jumătăţi de ineluş. Cum iniţial cele două jumătăţi de ineluş erau legate în paralel, atunci $k=k_1+k_1=2k_1 \Rightarrow k_1=k/2 \Rightarrow k'=k/4$.
Impunem condiţia de echilibru gândăcelului când începe să alunece. $F_{3/3}-F_f=0 \Rightarrow k'n_3p=\mu mg \Rightarrow kn_3p/4=\mu mg$ (4).
Din (1) şi (4) obţinem: $n_3=4n_0$=40 paşi



29.a. Considerăm cazul în care corpul m_2 este suspendat şi de el este prins corpul m_1. În acest caz resortul este alungit. Impunem condiţia de echilibru corpului cu masa m_1. $\vec{G}_1+\vec{F}_{el}=0$. Scalar $m_1g=k(\ell_1-\ell_0)$ (1). Din condiţia de echilibru pentru corpul m_2 $\vec{T}+\vec{F}_{el}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T=m_2g+k(\ell_1-\ell_0)=(m_1+m_2)g$ =4 N

b. Considerăm cazul în care corpul cu masa m_1 este aşezat pe masă iar corpul m_2 comprimă resortul. Din condiţia de echilibru pentru corpul cu masa m_2: $\vec{F}_{el}'+\vec{G}_2=0 \Rightarrow m_2g=k(\ell_0-\ell_2)$ (2).

Împărţind relaţia (1) la (2) obţinem: $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\ell_1-\ell_0}{\ell_0-\ell_2} \Rightarrow \ell_0=\dfrac{m_1\ell_2+m_2\ell_1}{m_1+m_2}$ =35 cm

c. Din $m_1g=k(\ell_1-\ell_0)$ şi $\ell_0=\dfrac{m_1\ell_2+m_2\ell_1}{m_1+m_2}$ obţinem valoarea constantei elastice

$k=\dfrac{(m_1+m_2)g}{\ell_1-\ell_2}$ =20 N/m

30.a. Impunem condiţia de echilibru corpului cu masa m_1: $\vec{G}_1+\vec{F}_{el}=0$ şi scalar $m_1g=kx \Rightarrow k=m_1g/x$=250 N/m

b. Pentru ca m_2 să se desprindă de suprafaţă trebuie ca forţa de apăsare normală să fie nulă N=0. Acest lucru se poate întâmpla numai dacă resortul este alungit. Astfel pentru corpul cu masa m_2 $\vec{F}_{el}+\vec{G}_2=0 \Rightarrow kx'=m_2g \Rightarrow x'=m_2g/k$. Corpul cu masa m_1 se

deplasează pe verticală pe distanța $d = x + x' = (m_1 + m_2)g / k$. Deoarece corpul cu masă m_1 se deplasează uniform intervalul de timp după care corpul m_2 se desprinde de suprafață este $\Delta t = \frac{(m_1 + m_2)g}{vk}$ =15 s

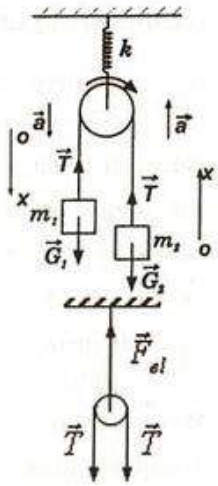
c. La momentul t=10 s sistemul de corpuri se află așezat pe suprafață. Deplasarea resortului este $d_1 = vt$=2 cm. Resortul se deplasează în sus pe distanța x pentru a se decomprima, iar apoi se alungește cu $x_1 = d_1 - x$=1 cm.

Impunem condiția de echilibru corpului m_1, astfel că $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0$.

Scalar $F = m_1 g + kx_1$ =5 N

31.a. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_1 obținem $T' = m_1 g$, iar din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_2 obținem $T' = F_{el2} + m_2 g$, deoarece resortul k_2 este inițial alungit.

Astfel cum $k_2(\ell - \ell_0) = (m_1 - m_2)g \Rightarrow \ell = \ell_0 + \frac{(m_1 - m_2)g}{k_2}$ =27 cm



b. Studiem mișcarea fiecărui corp.

Pentru m_1 pe axa Ox obținem: $m_1 g - T = m_1 a$ (1)

Pentru m_2 pe axa Ox obținem: $T - m_2 g = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2): $g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$ =5 m/s²

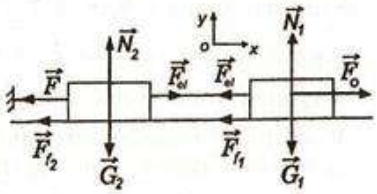
c. Tensiunea din fir este $T = m_2(a + g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$ =1,5 N

d. Impunem condiția de echilibru scripetelui.

$\vec{F}_{el1} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow F_{el1} = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

Cum $F_{el1} = k_1 x \Rightarrow x = \frac{4m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)k_1}$ =6 cm

32.a. Studiem echilibrul corpurilor. Pentru corpul 1 $\vec{F}_o + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe Ox: $F_0 - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1).



Pentru corpul 2: $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe Ox: $F_{el} - F - \mu m_2 g = 0$ (2).

Din (1)+(2) obținem: $F_o = F + \mu(m_1 + m_2)g$ =4,4 N

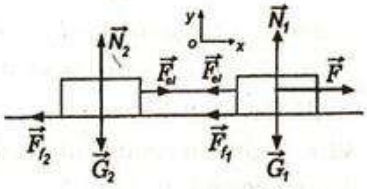
b. Studiem mișcarea rectilie uniformă a sistemului de corpuri. Pentru corpul 1:

$\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe Ox:

$F - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1). Pentru corpul 2:

$\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe Ox:

$F_{el} - \mu m_2 g = 0$ (2).

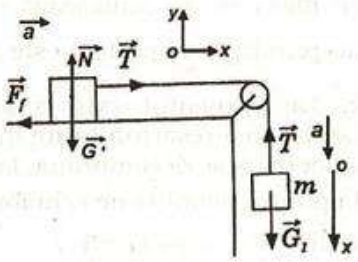


Din (1)+(2) obținem: $F = \mu(m_1 + m_2)g$ =2,4 N

c. Din $F_{el} = F_{f_2} = \mu m_2 g$ și $F_{el} = kx \Rightarrow \mu m_2 g = kx \Rightarrow x = \frac{\mu m_2 g}{k}$ = 1,6 cm

33.a. Studiem mişcarea corpului cu masa m:

$\vec{G}+\vec{T}=m\cdot\vec{a}$, iar scalar: $mg-T=ma$ (1)



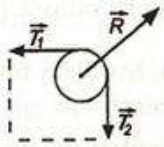
Studiem mişcarea corpului cu masa M: $\vec{T}+\vec{G}'+\vec{N}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Proiectăm pe Ox: $T-F_f=Ma$ şi pe Oy: $N-Mg=0$.

Cum $F_f=\mu N=\mu Mg \Rightarrow T-\mu Mg=Ma$ (2).

$(1)+(2)\Rightarrow g(m-\mu M)=(m+M)a \Rightarrow a=\dfrac{g(m-\mu M)}{m+M}\Rightarrow$

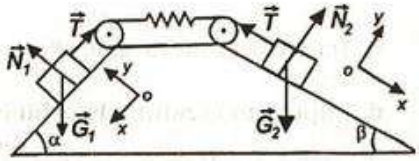
a=6 m/s²

b. $T=m(g-a)=\dfrac{mM(1+\mu)g}{M+m}=16$ N. Deoarece resortul este întins chiar de tensiunea din fir, atunci $T=kx\Rightarrow x=\dfrac{mM(1+\mu)g}{(M+m)k}=3{,}2$ cm.



c. Impunem condiţia de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, iar scalar $R=T\sqrt{2}\approx 22{,}56$ N, deoarece $T_1=T_2=T$

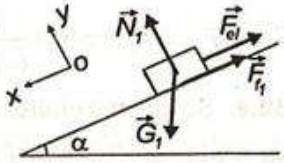
34.a. Studiem echilibrul sistemului de corpuri. Pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar pe axa Ox: $m_1g\sin\alpha=F_{el}$ (1). Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar pe axa Ox: $m_2g\sin\beta=F_{el}$ (2). Din (1) şi (2) obţinem:



$m_2=\dfrac{m_1\sin\alpha}{\sin\beta}=1{,}41$ kg

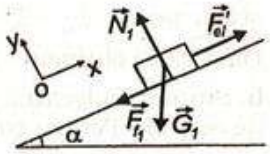
b. Cum $m_1g\sin\alpha=F_{el}=kx\Rightarrow x=m_1g\sin\alpha/k$

lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x=87{,}05$ cm



c. Studiem situaţia în care sistemul de corpuri are tendinţa ca m_1 să coboare şi m_2 să urce. Din condiţia de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_{f1}=0$ pe Ox:

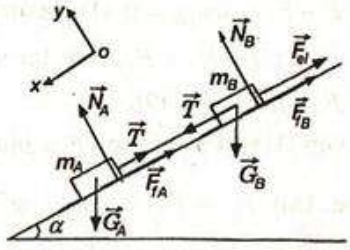
$m_1g\sin\alpha-\mu m_1g\cos\alpha=F_{el}'=kx'\Rightarrow x'=m_1g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)/k\Rightarrow x'=5{,}64$ cm iar lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x'=85{,}64$ cm



Studiem situaţia în care sistemul de corpuri are tendinţa ca m_2 să coboare şi m_1 să urce. Din condiţia de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_{f1}=0$ iar scalar pe Ox:

$m_1g\sin\alpha+\mu m_1g\cos\alpha=F_{el}'=kx'\Rightarrow$

$x'=m_1g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)/k=8{,}46$ cm, iar lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x'=88{,}46$ cm



35.a. Studiem echilibrul fiecărui corp.

Pentru corpul m_A $\vec{G}_A+\vec{N}_A+\vec{F}_{fA}+\vec{T}=0$.

Prin proiecţia pe axele de coordonate obţinem pe Ox: $m_Ag\sin\alpha-F_{fA}-T=0$, iar pe Oy:

$N_A-m_Ag\cos\alpha=0$. Cum $F_{fA}=\mu N_A\Rightarrow$

$m_A g\sin\alpha - \mu \cdot m_A g\cos\alpha - T = 0 \Rightarrow T = m_A g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$=7 N

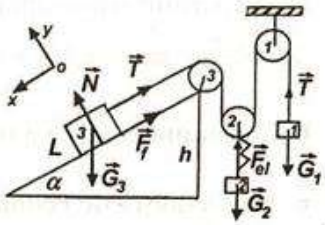
b. Pentru corpul m_B $\vec{G}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{fB} + \vec{T} + \vec{F}_{el} = 0$. Prin proiecția pe axele de coordonate obținem pe *Ox*: $m_B g\sin\alpha - F_{fB} + T - F_{el} = 0$, iar pe *Oy*:

$N_B - m_B g\cos\alpha = 0$. Cum $F_{BA} = \mu N_B \Rightarrow m_B g\sin\alpha - \mu m_B\cos\alpha + T - F_{el} = 0$ (2)

$F_{el} = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = kx \Rightarrow x = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k$ =7cm

c. Dacă se schimbă între ele pozițiile celor două corpuri alungirea resortului nu se modifică, deoarece pe baza calculului de la punctul **b.** alungirea resortului este $x = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k$, independentă de poziția corpurilor pe plan

36.a. Valorile minime ale maselor m_1 și m_2 pentru care sistemul se află în echilibru se obțin pentru situația în care corpul cu masa m_3 are tendința să coboare. Din condiția de echilibru pentru m_3 $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe axa *Ox* obținem: $m_3 g\sin\alpha - T - F_f = 0$, unde sinα=*h*/*L*=0,5 Din condiția de echilibru pentru m_1: $T = m_1 g \Rightarrow m_1 = m_3\sin\alpha - F_f/g$=1,3 kg, iar din condiția de echilibru pentru m_2: $m_2 g = F_{el}$.



Cum scripetele mobil 2 este în echilibru $F_{el} = 2T \Rightarrow m_2 = 2(m_3\sin\alpha - F_f/g)$=2,6 kg

b. $F_{el} = 2T = kx \Rightarrow 2(m_3 g\sin\alpha - F_f) = k\Delta\ell \Rightarrow k = 2(m_3 g\sin\alpha - F_f)/\Delta\ell$=2000 N/m

c. Deorece corpul m_3 urcă uniform pe plan forța de frecare are sens contrar astfel că vectorial $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe *Ox*: $T - F_f - m_3 g\sin\alpha = 0$

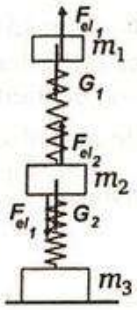
Din condiția de echilibru pentru corpul m_1: $m_1 g = T \Rightarrow m_1 = m_3\sin\alpha + F_f/g$ =1,7kg

Din condiția de echilibru pentru corpul m_2

$m_2 g = F_{el} = 2T = 2(m_3 g\sin\alpha + F_f) \Rightarrow m_2 = 2(m_3 g\sin\alpha + F_f)/g$ =3,4 kg

37.a. Studiem echilibrul corpului 1 $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0$, iar scalar

$m_1 g = k_1\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g}{k_1}$ (1)

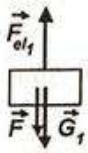


Studiem echilibrul corpului 2. Asupra corpului 2, forța elastică exercitată de primul resort este orientată în jos conform principiului acțiunii și reacțiunii, deoarece corpul 2 îl împinge pe primul corp prin intermediul resortului 1 în sus: $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$, iar scalar

$m_2 g + k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{k_2}$ (2)

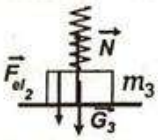
Prin împărțirea relației (1) la (2) obținem: $\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\cdot\dfrac{k_2}{k_1}$ = 1,2.

b. Studiem echilibrul corpului 1 după aplicarea forței *F*. Vectorial: $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0$, iar scalar $k_1\Delta\ell_1 = F + m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{F + m_1 g}{k_1}$



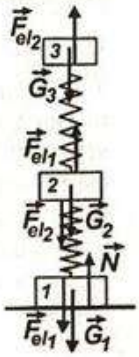
Studiem echilibrul corpului 2. Vectorial: $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$,

iar scalar $m_2 g + k_1\Delta\ell_1 = k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)g + F}{k_2}$.



$\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \dfrac{F + m_1 g}{F + (m_1 + m_2)g}\cdot\dfrac{k_2}{k_1}$. Cum $\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = 2 \Rightarrow F = 4$ N.

c. Studiem echilibrul corpului 3. Vectorial: $\vec{N}+\vec{F}_{el2}+\vec{G}_3=0$, iar scalar $N=m_3g+k_2\Delta\ell_2=m_3g+m_2g+k_1\Delta\ell_1 \Rightarrow N=(m_1+m_2+m_3)g+F=14$ N.



38.a. Studiem echilibrul corpurilor. Notăm cu ℓ_0 lungimea inițială a resorturilor. Resorturile sunt comprimate, cel inferior 1 este mai comprimat decât cel superior 2.

Pentru corpul 3 $\vec{G}_3+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar $mg=k(\ell_0-\ell_2)$ (1)

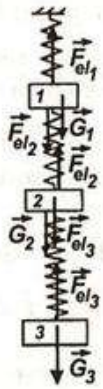
Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar $mg+F_{el2}+F_{el1}=0$

$mg+k(\ell_0-\ell_2)=k(\ell_0-\ell_1)$ (2). Din (1) și (2) obținem $2mg=k(\ell_0-\ell_1)$ (3). Împărțind relația (3) la relația (1) obținem

$2=\dfrac{\ell_0-\ell_1}{\ell_0-\ell_2} \Rightarrow \ell_0=2\ell_2-\ell_1$=24 cm

b. Constanta elastică a unui resort este $k=\dfrac{mg}{\ell_2-\ell_1}$=500 N/m

c. Din condiția de echilibru impusă corpului 1 așezat pe masă, $\vec{N}+\vec{F}_{el1}+\vec{G}_1=0$, scalar obținem $N=mg+k(\ell_0-\ell_1)$. Utilizând relația (3) obținem $N=3mg$=90 N



39.a. Resorturile se alungesc cu $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ și $\Delta\ell_3$. Alungirea totală este $\Delta\ell=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\Delta\ell_3$. Studiem echilibru corpurilor 1, 2 și 3.

Pentru corpul 3: $\vec{G}_3+\vec{F}_{el3}=0$, iar scalar $mg=k\Delta\ell_3$ (1). Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{F}_{el3}+\vec{F}_{el2}=0 \Rightarrow mg+k\Delta\ell_3=k\Delta\ell_2 \Rightarrow k\Delta\ell_2=2mg$ (2), iar pentru corpul 1: $\vec{G}_1+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0 \Rightarrow mg+k\Delta\ell_2=k\Delta\ell_1 \Rightarrow k\Delta\ell_1=3mg$ (3)

Din (1), (2) și (3) obținem $\Delta\ell=6mg/k \Rightarrow \Delta\ell_3=\Delta\ell/6$=2 cm

b. $F_{el2}=k\Delta\ell_2=2mg=k\Delta\ell/3$=8 N

c. Dacă două resorturi se leagă în paralel, se formează un nou resort cu constanta elastică $k_p=2k$. Acest nou resort se leagă în serie cu cel de-ai treilea resort, se formează un resort cu constanta echivalentă k_e, astfel că $\dfrac{1}{k_e}=\dfrac{1}{k_p}+\dfrac{1}{k} \Rightarrow k_e=\dfrac{kk_p}{k+k_p} \Rightarrow k_e=2k/3$=133,33 N/m

2.5. Legea atracției universale

1. Conform legii atracției universale: $F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}\approx 4{,}27\cdot 10^{-7}$ kg.

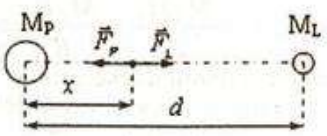
2. Aplicăm legea atracției universale $F=k\dfrac{mM}{R_{PS}^2}=3{,}557\cdot 10^{22}$ N.

3. Pe baza legii atracției universale $F=k\dfrac{m_lm_p}{r^2}=\dfrac{1840k\cdot m_l^2}{r^2}=3{,}618\cdot 10^{-49}$ N.

4. Conform datelor problemei $M=\dfrac{M_P}{9}$, iar $R=\dfrac{R_P}{4}$. Forța de atracție exercitată de planetă asupra cosmonautului este $F=k\dfrac{Mm}{R^2}=16\dfrac{kM_Pm}{9R_P^2}=\dfrac{16}{9}\cdot G$,

unde G reprezintă greutatea corpului pe Pământ. Deoarece G este forța cu care Pământul atrage corpul aflat pe suprafața sa, atunci $G = k\frac{M_P m}{R_P^2} = mg_0 \Rightarrow F = \frac{16}{9}mg_0 \Rightarrow F$=1393,77 N.

5. Deoarece cosmonautul este în imponderabilitate înseamnă că rezultanta forțelor care se exercită asupra acestuia este nulă. Asupra cosmonautului se exercită forțe de atracție atât de către Pământ, cât și de către Lună, astfel că cele două forțe sunt opuse: $\vec{F}_P + \vec{F}_L = 0 \Rightarrow F_P = F_L \Rightarrow k\frac{mM_P}{x^2} = k\frac{mM_L}{(d-x)^2}$, unde



cu m am notat masa corpului. Astfel $81M_L(d-x)^2 = M_L x^2 \Rightarrow 9(d-x) = x \Rightarrow$ x=9d/10=3,42·10⁵ km

6. Prin definiție accelerația gravitațională este $g = \frac{F}{m} = k\frac{M_P}{r^2} = k\frac{M_P}{(R_P+h)^2}$.

La suprafața Pământului $h = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{kM_P}{R_P^2}$. Cum $g = \frac{g_0}{2} \Rightarrow k\frac{M_P}{(R_P+h)^2} = \frac{kM_P}{2R_P^2}$ $\Rightarrow h = R_P(\sqrt{2}-1) = 2611$ km

7. Pe baza definiției accelerației gravitaționale: $g_L = k\frac{M_L}{R_L^2} = \frac{kM_P}{81R_L^2}$.

Cum $d_L = \frac{3}{11}d_P \Rightarrow R_L = \frac{3}{11}R_P \Rightarrow g_L = \frac{121kM_P}{729R_P^2} = \frac{121}{729}g_0 \approx 1{,}63$ m/s²

8. Conform definiției: $g_1 = \frac{kM_1}{R_1^2}$ și $g_2 = \frac{kM_2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

9. Prin definiție densitatea unui corp este $\rho = \frac{m}{V}$. Conform definiției accelerația gravitațională la suprafața Pământului este $g_0 = k\frac{M_P}{R_P^2} \Rightarrow M_P = \frac{g_0 R_P^2}{k}$. Considerând Pământul o sferă, volumul acestuia este $V = \frac{4\pi R_P^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3g_0}{4\pi \cdot kR_P} = 5483$ kg/m³

10. Conform problemei precedente $\rho = \frac{3g}{4\pi \cdot kR}$ la suprafața planetei, iar pe Pământ $\rho_P = \frac{3g_0}{4\pi \cdot kR_P} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_P} = \frac{gR_P}{g_0 R}$. Cum $g = 2{,}5 \cdot g_0$ și $R = 3R_P \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_P} = 0{,}833$

11. Dacă un om sare pe verticală cu viteza inițială v_0, mișcarea corpului este uniform frânată cu accelerația gravitațională a planetei. Înălțimea maximă la care se ridică corpul se obține din ecuația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și din v=0 $\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$. Pe planetă $h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{15v_0^2}{2g} = 15h \Rightarrow \frac{h'}{h} = 15 \Rightarrow$ detenta omului pe

planetă în condițiile în care viteza inițială este tot v_0, este de 15 ori mai mare decât detenta aceluiaşi om pe Pământ.

12. În timpul mişcării Pământului în jurul Soarelui, forța de atracție exercitată de Soare joacă rol de forță centripetă, astfel că

$$F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_S M_P}{R^2} = \frac{M_P v^2}{R} \Rightarrow M_S = \frac{v^2 R}{k} = 2\cdot 10^{30}\ \text{kg}$$

13. Nava cosmică execută o mişcare de rotație în jurul Pământului, deoarece forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă.

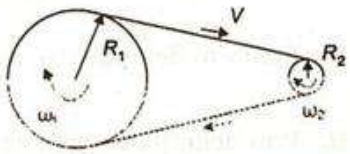
$$F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_P \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k\cdot M_P}{r}} = \sqrt{\frac{k\cdot M_P}{2R_P}}$$, deoarece $r = 2R_p$.

Cum $g_0 = \frac{kM_P}{R_P^{\ 2}} \Rightarrow kM_P = g_0 R_P^{\ 2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_P}{2}} = 5{,}6$ km/s

14. Satelitul geostaționar execută o mişcare de rotație cu perioada de rotație egală cu cea proprie a Pământului. Forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă. Astfel $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_P \cdot m}{r^2} = m\omega^2 r$. Cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$ iar

$$g_0 = \frac{kM_P}{R_P^{\ 2}} \Rightarrow kM_P = g_0 R_P^{\ 2} \Rightarrow \frac{g_0 R_P^{\ 2}}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow r = \left(\frac{g_0 R_P^{\ 2} T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 42222\ \text{km}$$

2.6. Mişcarea circular uniformă



1. Deoarece lanțul leagă cele două roți, roata mare aflată în mişcare de rotație va antrena şi roata mică tot în mişcare de rotație. Viteza liniară a lanțului este aceeaşi, astfel că: $\upsilon_1 = \upsilon_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 R_2 / R_1 = 5$ rad/s.

2. Pe baza relației dintre perioada de rotație T şi viteza unghiulară ω, obținem: $\omega = 2\pi/T = 72{,}68\cdot 10^{-6}$ rad/s. Pe baza relației dintre viteza liniară v şi viteza unghiulară ω: $\upsilon = \omega R = 2\pi R/T = 465{,}18$ m/s.

3. Pe baza relației dintre viteza liniară υ şi viteza unghiulară ω: $\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \upsilon/R = 0{,}8$ rad/s. La efectuarea unui cerc întreg, distanța parcursă de avion este $s = 2\pi R = 6{,}28$ km.

4. Aflăm viteza unghiulară cu care se roteşte polizorul: $\omega = \upsilon/R$. Cum relația dintre viteza unghiulară şi frecvență este $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\nu}{2\pi R} = 5$ rot/s.

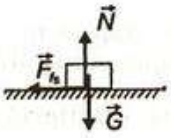
5. Aflăm perioada de rotație împărțind timpul t la numărul de rotații N astfel că: $T = t/N = 0{,}5$ s. Cum $T = 2\pi/\omega \Rightarrow \omega = 2\pi/T = 12{,}56$ rad/s.

6. Minutarul efectuează o rotație completă într-un interval de timp $T = 1$h$=60$min. Dacă într-o perioadă T, vârful minutarului descrie un cerc cu lungimea $L = 2\pi\ell$, atunci în intervalul de timp Δt, vârful minutarului descrie un arc de cerc cu lungimea: $s = (2\pi\ell\cdot\Delta t)/T = 1{,}046$ mm.

7. Deoarece avionul se deplasează spre vest şi Soarele rămâne staționar față de avion, înseamnă că avionul se roteşte odată cu Pământul cu viteza unghiulară a acestuia $\omega = 2\pi/T$, unde T este perioada proprie de rotație a Pământului. Viteza avionului se calculează cu ajutorul relației: $v = \omega\cdot R$, unde $R = R_P + h$, reprezintă

distanța de la centrul Pământului până la punctul unde se află avionul, astfel că $v=\frac{2\pi}{T}(R_P+h)$=465,18 m/s.

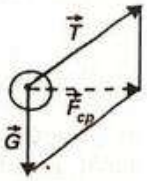
8. Reprezentăm forțele care acționează asupra mașinii și ținem cont că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{fs}=\vec{F}_{cp}$. Cum $\vec{N}+\vec{G}=0 \Rightarrow F_{fs}=F_{cp}$, adică forța de frecare statică joacă rol de forță centripetă, astfel că:



$F_{fs}=\frac{mv^2}{R}$. Condiția ca mașina să nu derapeze este ca forța de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare:

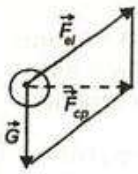
$F_{fs}\le F_{fl} \Rightarrow \frac{mv^2}{R}\le \mu mg \Rightarrow v\le\sqrt{\mu gR}$=15,81m/s=56,92 km/h.

9. Asupra motociclistului acționează normala și greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, deoarece motociclistul execută un viraj. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$



Din figura alăturată: $tg\alpha=\frac{F_{cp}}{G}=\frac{mv^2}{Rmg}=\frac{v^2}{Rg}$=0,578 ⇒ α=30°.

10. Dacă corpul este suspendat în vagon prin intermediul unui dinamometru, corpul se va roti odată cu vagonul descriind un cerc în plan orizontal, astfel că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{F}_{el}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$. Greutatea aparentă este forța indicată de dinamometru, adică forța elastică.



$$F_{el}=G_a=\sqrt{F_{cp}^2+G^2}=\sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2+(mg)^2}=m\sqrt{g^2+\frac{v^4}{R^2}}$$

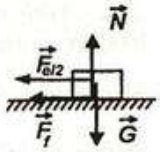
Calculăm cu cât la sută este mai mare greutatea aparentă decât greutatea reală:

$$\frac{G_a-G}{G}=\sqrt{1+\frac{v^4}{g^2R^2}}-1=96{,}6\cdot10^{-3}\approx0{,}1=10\%$$

11. Neglijăm căderea pe verticală a glontelui. Pe orizontală între cele două discuri acesta are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza v, astfel că distanța parcursă este $d=vt$, unde t este timpul de mișcare al glontelui între cele două discuri. După ce glontele produce primul orificiu prin pătrunderea prin primul disc, până la pătrunderea prin discul al doilea, discul al doilea se rotește cu unghiul α, astfel că $\alpha=\omega t=2\pi nt$. Cum $t=d/v \Rightarrow \alpha=2\pi nd/v \Rightarrow v=2\pi nd/\alpha$=300 m/s

12. Considerăm cazul în care nu există frecare. În acest caz rezultanta forțelor este forța centripetă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{el1}=\vec{F}_{cp1}$, iar scalar forța elastică joacă rol de forță centripetă, astfel că: $k\Delta\ell_1=m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k(\ell_1-\ell_0)=m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k\ell_0=\ell_1(k-m\omega^2) \Rightarrow$

$\ell_1=\frac{k\ell_0}{k-m\omega^2}$, iar $\Delta\ell_1=\ell_1-\ell_0=\frac{m\omega^2\ell_0}{k-m\omega^2}$ (1).



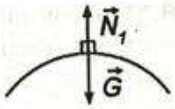
În cazul existenței forței de frecare, vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{el2}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp2}$,

iar scalar: $k\Delta\ell_2+F_f=m\omega^2\ell_2$, unde $F_f=\mu mg \Rightarrow$

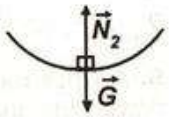
$k(\ell_2-\ell_0)+\mu mg=m\omega^2\ell_2 \Rightarrow \ell_2=\frac{k\ell_0-\mu mg}{k-m\omega^2} \Rightarrow \Delta\ell_2=\ell_2-\ell_0=\frac{m(\omega^2\ell_0-\mu g)}{k-m\omega^2}$ (2).

Împărţind cele două relaţii obţinem: $\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}=\frac{\omega^2\ell_0}{\omega^2\ell_0-\mu g}$ =1,33.

13. Impunem condiţia ca rezultanta forţelor ce acţionează asupra camionului în punctul superior al podului să joace rol de forţă centripetă: $\vec{N}_1+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $mg-N_1=\frac{mv^2}{R}$, dacă corpul se deplasează pe podul convex, astfel $N_1=m\left(g-\frac{v^2}{R}\right)$=38,75 kN.

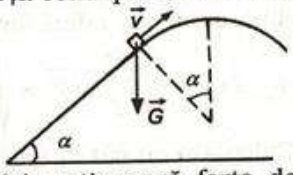


În cazul deplasării pe un pod concav, în punctul inferior al podului vectorial: $\vec{N}_2+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $N_2-mg=\frac{mv^2}{R}$, astfel că $N_2=m\left(g+\frac{v^2}{R}\right)$=61,25 kN.

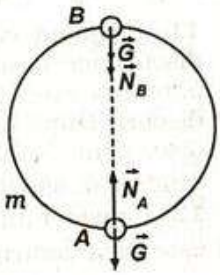


În punctul inferior al podului concav forţa de apăsare normală este mai mare decât greutatea corpului, iar în punctul superior al podului convex forţa de apăsare normală este mai mică decât greutatea corpului.

14. Asupra seminţei când intră pe tambur acţionează greutatea şi normala. Dacă sămânţa se desprinde de bandă, forţa de apăsare normală este nulă, iar componenta greutăţii de-a lungul normalei joacă rol de forţă centripetă, astfel că: $mg\cos\alpha=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{gR\cos\alpha}$=1m/s⇒dacă viteza maximă nu depăşeşte valoarea de 1 m/s, atunci sămânţa rămâne pe bandă.



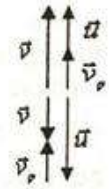
15. În punctele inferior (*A*) şi superior (*B*) ale traiectoriei, acţionează forţa de apăsare normală asupra scaunului şi greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forţă centripetă, astfel că vectorial: $\vec{N}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$. În punctul inferior al traiectoriei scalar obţinem: $N_A-mg=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow N_A=m\left(g+\frac{v^2}{R}\right)$=4800 N, iar în punctul superior al traiectoriei proiectând relaţia vectorială obţinem: $N_B+mg=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow N_B=m\left(\frac{v^2}{R}-g\right)$=3200 N.



16. Asupra motociclistului aflat la periferia platformei acţionează forţa de frecare care joacă rol de forţă centripetă. Deoarece motociclistul nu derapează forţa de frecare este statică şi este mai mică sau cel mult egală cu forţa de frecare la alunecare, astfel că: $F_{fs}=F_{cp}\Rightarrow F_{cp}\le F_{fl}\Rightarrow\frac{mv^2}{R}\le\mu\cdot mg$, unde v reprezintă viteza cu care se mişcă motociclistul faţă de sol şi se obţine prin adunarea vectorială a vitezei platformei la periferie $v_p=\omega R=2\pi\cdot nR$ şi a vitezei motociclistului faţă de platformă u, astfel că: $\vec{v}=\vec{v}_p+\vec{u}$.

Dacă motociclistul se deplasează în același sens cu platforma, atunci:

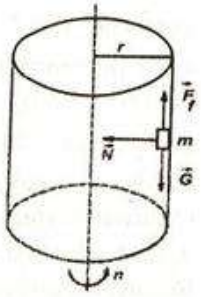
$$v = v_p + u = 2\pi \cdot nR + u \Rightarrow \mu \geq \frac{(2\pi \cdot nR + u)^2}{gR} = 0{,}777.$$



Dacă motociclistul se deplasează în sens contrar cu platforma, atunci:

$$v = v_p - u = 2\pi \cdot nR - u \Rightarrow \mu \geq \frac{(2\pi \cdot nR - u)^2}{gR} = 0{,}358.$$

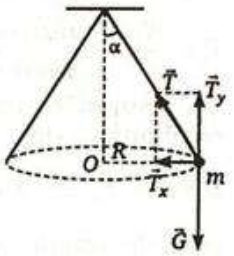
17. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, iar rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $N = F_{cp} \Rightarrow N = m\omega^2 R$ și pe Oy: $F_f - G = 0 \Rightarrow mg = F_f$. Conform legii frecării:



$$F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow mg = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}.$$

Cum $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\mu R}} \approx 1$ rot/s.

18.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: greutatea și tensiunea din fir, astfel că rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

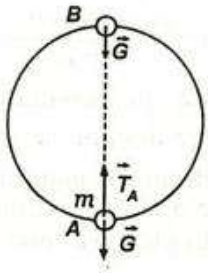
Pe Ox: $T\sin\alpha = F_{cp} = m\omega^2 R$ (1) și pe Oy: $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg$ (2)

Împărțind cele două relații obținem: $tg\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{\omega^2 R}{g}$.

Din geometrie raza de rotație R este: $R = \ell\sin\alpha$, astfel că $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}$, iar perioada de rotație este: $T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} \approx 0{,}77$ s.

b. Tensiunea în fir este: $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 2$ N.

19.a. Deoarece apa nu curge din găleată în niciun punct al traiectoriei, înseamnă că nu curge nici când găleata se află în punctul superior al traiectoriei cu gura în jos. În acest caz, considerăm că greutatea apei joacă rol de forță centripetă, deoarece considerăm că. $G = F_{cp} \Rightarrow m_a g = m_a\omega^2\ell$, iar cum $\omega = 2\pi\upsilon$ obținem $g = 4\pi^2\upsilon^2\ell \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 0{,}712$ rot/s

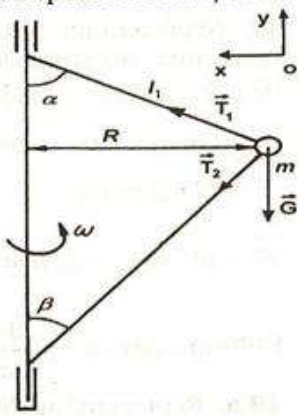


b. Datorită condiției de la punctul precedent obținem că în punctul superior al traiectoriei tensiunea în fir este nulă. În punctul inferior al traiectoriei rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T - mg = m\omega^2\ell \Rightarrow T = 2mg = 80$ N. Deci în punctul inferior al traiectoriei tensiunea în sfoară are valoarea maximă.

c. Dacă frecvența se dublează $\nu' = 2\nu \Rightarrow \omega' = 2\pi\nu' = 2\omega$. În punctul superior asupra găleții acționează și tensiunea T', alături de greutate,astfel că rezultanta acestora este forța centripetă: $\vec{G} + \vec{T}' = \vec{F}'_{cp}$. Scalar obținem:

$G + T' = F'_{cp} \Rightarrow mg + T' = m\omega'^2\ell = 4m\omega^2\ell \Rightarrow mg + T' = 4mg \Rightarrow T' = 3mg = 120$ N.

20. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:



pe Ox: $T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 R$, unde R este raza de rotație și din geometrie $R = \ell_1 \sin\alpha$ și pe Oy: $T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta - mg = 0$.

Obținem sistemul de ecuații:

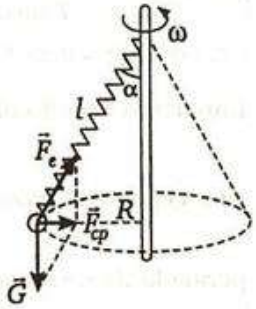
$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 \ell_1 \sin\alpha$ și $T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = mg$.

Rezolvând sistemul de ecuații obținem:

$$T_2 = \frac{m(\omega^2 \ell_1 \cos\alpha - g)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 0{,}865 \text{ N și}$$

$$T_1 = \frac{m(\omega^2 \ell_1 \sin\alpha\cos\beta + g\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 5{,}5 \text{ N.}$$

21. Asupra corpului acționează atât greutatea cât și forța elastică, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă:

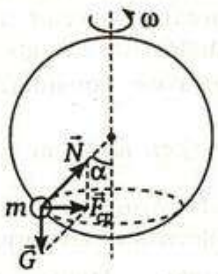


$\vec{G} + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg}$, iar $R = \ell\sin\alpha$ reprezintă raza de rotație în plan orizontal, iar ℓ reprezintă noua lungime a resortului, astfel că $\ell = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \frac{F_{el}}{k}$.

Deoarece $\cos\alpha = \frac{mg}{F_{el}} \Rightarrow F_{el} = \frac{mg}{\cos\alpha} \Rightarrow \ell = \ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha}$. Din geometrie: $tg\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2}{g}(\ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha})\sin\alpha \Rightarrow$

$$1 = \frac{\omega^2(k\ell_0\cos\alpha + mg)}{kg} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{kg}{k\ell_0\cos\alpha + mg}} \approx 6{,}32 \text{ rad/s}$$

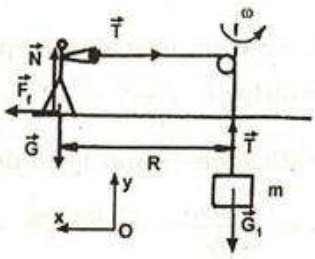
22. Reprezentăm forțele care acționează asupra bilei, iar rezultanta lor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, deoarece asupra bilei acționează atât greutatea ei cât și reacțiunea normală exercitată de inel. Bila execută un cerc în plan orizontal cu raza R_1.



Din desen $tg\,\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R_1}{mg}$, unde $R_1 = R\sin\alpha \Rightarrow$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 R\sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$

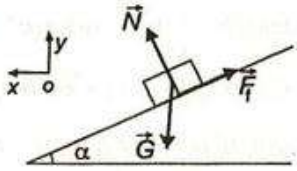
23. Studiem mişcarea accelerată în sus a corpului cu masa m: $\vec{T}+\vec{G}_1=m\cdot\vec{a}$, iar scalar $T-mg=ma$. Studiem mişcarea de rotaţie a omului aflat pe platformă. Reprezentăm forţele care acţionează asupra lui şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă. Vectorial se obţine $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$ şi prin proiecţia relaţiei vectoriale pe axele de coodonate obţinem: pe Ox: $T-F_f=F_{cp}=M\omega^2R$ şi pe Oy: $N-Mg=0\Rightarrow N=Mg\Rightarrow F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow$



$T=M(\omega^2R+\mu g)\Rightarrow a_{max}=\frac{M}{m}(\omega^2R+\mu g)-g=50$ m/s². Studiem celălalt caz, când asupa omului forţa de frecare îşi schimbă sensul, astfel că $T+F_f=F_{cp}=M\omega^2R\Rightarrow T=M(\omega^2R-\mu g)\Rightarrow a_{min}=\frac{M}{m}(\omega^2R-\mu g)-g=10$m/s².

Dacă acceleraţia cu care omul ridică masa m este cuprinsă între $a\in(10,50)$m/s² atunci omul rămâne în repaus faţă de platformă.

24. Reprezentăm forţele care acţionează asupra motociclistului şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$.

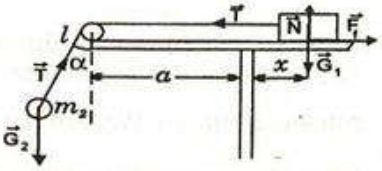


Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe Ox: $N\sin\alpha-F_f\cos\alpha=m\omega^2R$ şi pe Oy:
$N\cos\alpha+F_f\sin\alpha-mg=0$.

Conform legii frecării: $F_f=\mu N\Rightarrow N(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=mg\Rightarrow N=\frac{mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\Rightarrow$

$N(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=m\omega^2R\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{R(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}\approx1{,}825$ rad/s, iar acceleraţia centripetă este $a_{cp}=\omega^2R\approx6{,}66$ m/s².

25. Studiem mişcarea de rotaţie în plan orizontal a corpului cu masa m_2. Rezultanta tensiunii şi a greutăţii joacă rol de forţă centripetă, astfel că: $\vec{T}+\vec{G}_2=\vec{F}_{cp}$.



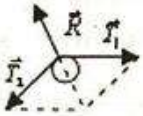
Din geometrie: $\cos\alpha=\frac{m_2g}{T}\Rightarrow T=\frac{m_2g}{\cos\alpha}=2$ N.

Reprezentăm forţele care acţionează asupra axului scripetelui şi deoarece acesta este ideal şi nu are masă rezultanta acestora este nulă:

Astfel: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Scalar: $R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos(90+\alpha)$.

Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\approx1{,}04$ N.

b. Dar pentru corpul m_2 $T\sin\alpha=F_{cp}\Rightarrow m_2g\,tg\,\alpha=m_2\omega^2R$, unde R este raza de rotaţie a corpului cu masa m_2.



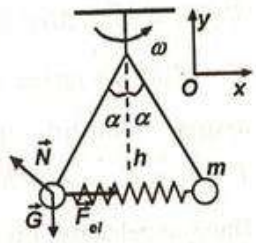
Din geometrie $R=a+\ell\sin\alpha\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g\cdot tg\,\alpha}{a+\ell\sin\alpha}}\approx5{,}63$ rad/s

c. Studiem mişcarea corpului cu masa m_1. Rezultanta forţelor joacă rol de forţă centripetă: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$, iar scalar: $T-F_f=m_1\omega^2x \Rightarrow x=\dfrac{T-\mu m_1 g}{m_1\omega^2} \Rightarrow$

x=25,25cm. Când forţa de frecare acţionează în sens contrar, $T+F_f=m_1\omega^2x \Rightarrow$

$x=\dfrac{T+\mu m_1 g}{m_1\omega^2}\approx 37{,}88$ cm.

26. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărei bile şi impunem condiţia ca rezultanta lor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_{el}=\vec{F}_{cp}$.



Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox: $F_{el}-N\cos\alpha=F_{cp}=m\omega^2R$ şi

pe Oy: $N\sin\alpha-mg=0 \Rightarrow N=\dfrac{mg}{\sin\alpha}$.

Cum $F_{el}=kx \Rightarrow kx-mg\cdot ctg\,\alpha=m\omega^2R$, unde R este raza cercului orizontal descris de fiecare bilă. Din geometrie $tg\,\alpha=\dfrac{R}{h} \Rightarrow R=h\cdot tg\,\alpha$, iar

$F_{el}=k(2R-\ell_0)=k(2h\cdot tg\,\alpha-\ell_0) \Rightarrow k(2h\cdot tg\,\alpha-\ell_0)-mg\cdot ctg\,\alpha=m\omega^2h\cdot tg\,\alpha \Rightarrow$

$2kh\cdot tg\,\alpha-m\omega^2h\cdot tg\,\alpha=k\ell_0+mg\cdot ctg\,\alpha \Rightarrow h=\dfrac{k\ell_0+mg\cdot ctg\,\alpha}{(2k-m\omega^2)\cdot tg\,\alpha}\approx 65{,}63$ cm.

27. Greutatea unui corp se determină prin suspendarea acestuia de un dinamometru şi forţa indicată de dinamometru este greutatea măsurată a corpului. Dacă suspendăm corpul de dinamometru la pol, în imediata vecinătate a Pământului, greutatea corpului este egală cu forţa elastică, astfel că la pol dinamometrul indică greutatea reală $G=mg_0$, unde g_0 reprezintă accelerаţia gravitaţională în imediata vecinătate a Pământului.

La pol la altitudinea h, greutatea este $G_p=F_{el}$ şi din legea atracţiei universale forţa de atracţie este: $F_a=G_p=\dfrac{kmM}{(R_p+h)^2}$, astfel că $F_{el}=\dfrac{kmM}{(R_p+h)^2}$.

La ecuator asupra corpului acţionează atât forţa de atracţie a Pământului cât şi forţa elastică, iar rezultanta lor joacă rol de forţă centripetă, deoarece corpul se roteşte odată cu Pământul cu viteza unghiulară $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ a Pământului. T este perioada proprie de rotaţie a Pământului.

Astfel: $F_{a_E}-F_{el}=F_{cp} \Rightarrow F_{el}=F_{a_E}-m\omega^2R_p$. La ecuator forţa de atracţie în imediata vecinătate a Pământului este: $F_{a_E}=\dfrac{kmM}{R_p^2}$, deoarece se consideră Pământul sferic cu raza R_p.

Deoarece greutatea unui corp este aceeaşi ca la ecuator, atunci

$$\frac{kmM}{(R_p+h)^2}=\frac{kmM}{R_p^2}-m\omega^2R_p \Rightarrow R_p+h=\sqrt{\frac{kMR_p^2}{kM-\omega^2R_p^3}} \Rightarrow h=R_p\left(\sqrt{\frac{kM}{kM-\omega^2R_p^3}}-1\right)$$

Cum $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho \frac{4\pi R_p^3}{3} \Rightarrow h = R_p\left(\sqrt{\frac{k\rho T^2}{k\rho T^2 - 3\pi}} - 1\right) \approx 11$ km

28. La ecuatorul asteroidului forța de atracție compusă cu forța indicată de dinamometru (greutatea măsurată) joacă rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o mișcare de rotație împreună cu asteroidul și cu perioada de rotație a acestuia. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{F}_a = \vec{F}_{cp}$. Deoarece corpul pare fără greutate resortul dinamometrului nu este întins și prin urmare $F_{el} = 0$, iar $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow \frac{kM}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}R$, unde M reprezintă masa asteroidului. Obținem $M = \rho\frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3\pi}{kT^2} = 1210$ kg/m³.

29. Asupra satelitului acționează forța de atracție care joacă rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R_p} = mg_0 \Rightarrow v = \sqrt{g_0 R_p} \approx 7{,}9$ km/s.

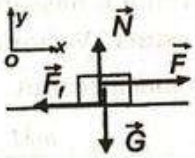
Valoarea υ=7,9 km/s reprezintă prima viteză cosmică, adică viteza unui satelit care se rotește chiar la suprafața Pământului.

30. Impunem condiția ca forța de atracție exercitată de planetă asupra navei cosmice să joace rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h} \Rightarrow kM = v^2(R+h)$, unde M este masa planetei si R raza ei. Din definiția accelerației gravitaționale: $g = \frac{F_a}{m} = \frac{kM}{R^2} = \frac{v^2(R+h)}{R^2} \approx 1{,}4$ m/s².

3.1. Lucrul mecanic. Puterea mecanică

1.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a mașinii este $L_G = 0$, deoarece greutatea este perpendiculară pe direcția de mișcare.

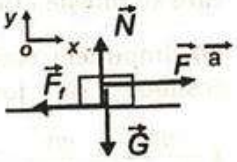
b. Studiem mișcarea uniformă a mașinii de spălat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Scalar pe *Ox*: $F - F_f = 0 \Rightarrow F = F_f$ și pe *Oy*: $N - G = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de forța de împingere este $L_F = Fd = \mu mgd = 2400$ J



c. În cazul forței de frecare $L_{F_f} = F_f d \cos 180^0$, deoarece forța de frecare își deplasează punctul de aplicație pe direcția de deplasare pe distanța *d*, dar are sens opus. Astfel $L_{F_f} = -\mu mgd = -2400$ J. Deoarece mașina de spălat se mișcă uniform, lucrul mecanic al forței de împingere este compensat de lucrul mecanic al forței de frecare.

2.a. Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $F - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N - mg = 0$.



Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a = \dfrac{F - \mu mg}{m} = \dfrac{F}{m} - \mu g = 4$ m/s².

Aflăm distanța pe care se deplasează corpul în timpul *t* din relația: $d = v_m \cdot t = \dfrac{v}{2} \cdot t = \dfrac{at^2}{2}$, deoarece mișcarea corpului este rectilinie uniform accelerată și din definiție: $a_m = a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v}{t} \Rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow L_F = F \cdot d = \dfrac{Fat^2}{2}$ =20 J

b. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mgd = -\dfrac{\mu \cdot mgat^2}{2} = -4$ J.

c. Prin definiție puterea mecanică instantanee este $P = \dfrac{L}{\Delta t} = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, deoarece pentru un interval de timp foarte scurt $\Delta t \to 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{d} / \Delta t$.

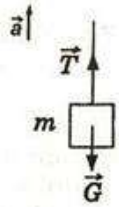
Din $v = at \Rightarrow P = Fat_1$ =20 W, deoarece vectorul fortă și vectorul viteză au aceeași direcție și sens

3.a. Conform definiției lucrului mecanic efectuat de greutatea unui corp: $L_G = mgh$, unde *h* este înălțimea pe care coboară corpul. Cum corpurile cad liber sub acțiunea greutății cu accelerația *g*, după timpul *t*, $h = v_m t = \dfrac{gt^2}{2}$, deooarece $v_m = \dfrac{v}{2} = \dfrac{gt}{2}$, astfel că $L_G = \dfrac{mg^2t^2}{2} \Rightarrow \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{m_1 t_1^2}{m_2 t_2^2} = \dfrac{1}{8}$ =0,125.

b. Prin definiție puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t}$, iar în cazul greutății este

$$P_m = \frac{mgh}{t} = \frac{mg^2t}{2} \Rightarrow \frac{P_{m1}}{P_{m2}} = \frac{m_1t_1}{m_2t_2} = 0{,}25$$

c. Lucrul mecanic total al greutății care acționează asupra corpului 1 este $L_G = L_c + L_u$, unde L_c reprezintă lucrul mecanic efectuat de greutate la coborârea corpului 1 și L_u reprezintă lucrul mecanic efectuat de greutate la urcarea corpului 1. Astfel $L_c = mgh$, deoarece la coborâre greutatea ajută la mișcare și este o forță motoare, iar $L_h = -mgh$, deoarece la urcare greutatea nu ajută la mișcare și este o forță rezistivă. Astfel $L_G = 0$, deoarece greutatea este o forță de tip conservativ iar lucrul ei mecanic pe un drum închis este zero.

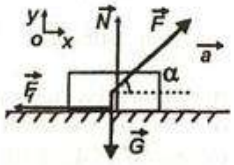


4.a. Conform definiției lucrului mecanic efectuat de tensiunea din cablu: $L = TH$, cu $H = 5h$, unde h este înălțimea medie a unui etaj, iar T este tensiunea în cablul de susținere al liftului. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = m\vec{a}$, iar scalar $T - mg = ma \Rightarrow T = m(a+g) \Rightarrow L = 5m(a+g)h = 44$ kJ

b. $L_G = -mgH = -5mgh = -40$ kJ

c. Prin definiție puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{TH}{\Delta t} = Tv_m$, unde v_m reprezintă viteza medie a liftului. Cum $H = v_m t = at^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/a}$, deoarece

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2} = \frac{\sqrt{2aH}}{2} \Rightarrow P_m = m(g+a)\frac{\sqrt{2aH}}{2} = 8{,}8 \text{ kW}$$



5.a. Studiem mișcarea corpului. Vectorial: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem:pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = ma$ și pe Oy: $F\sin\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha) \Rightarrow$

$$F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = ma \Rightarrow F = \frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$L_F = Fd_1\cos\alpha = \frac{m(a+\mu g)d_1}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\cos\alpha = \frac{m(a+\mu g)d_1}{1+\mu tg\alpha} \approx 9{,}45 \text{ J}$$

b. Lucrul mecanic al normalei este $L_N = 0$, deoarece forța normală este în permanență perpendiculară pe direcția de mișcare

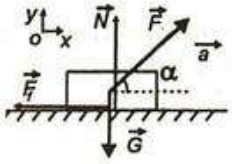
c. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = F_f d_3 \cos 180^0 = -\mu N d_3$

$$N = mg - F\sin\alpha = mg - \frac{m(a+\mu g)\sin\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$L_{F_f} = -\frac{\mu m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)d_3}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = -2{,}67 \text{ J}$$

6.a. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L = Fd\cos\alpha = 207{,}6$ J

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$.



Cum $F_f = \mu N \Rightarrow L_{Ff} = -\mu N d$. Din proiecția pe axa Oy: $F\sin\alpha + N = mg \Rightarrow L_{Ff} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d = -8$ J

c. Utilizăm formula puterii medii: $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{Fd\cos\alpha}{\Delta t} = Fv_m\cos\alpha = \frac{Fv}{2}\cos\alpha$, unde $v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2}$. Studiem mişcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.

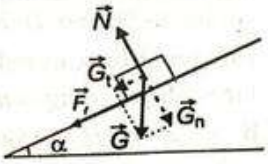
Din proiecţia pe axa *Ox* obţinem:

$F\cos\alpha - F_f = ma \Rightarrow F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/m - \mu g$

$\Rightarrow a \approx 12{,}475$ m/s².

Cum $d = v_m t = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \Rightarrow v_m = \frac{\sqrt{2ad}}{2} \approx 5$m/s, astfel că $P_m \approx 259{,}5$W

7.a. Conform definiţiei lucrului mecanic al forţei de frecare este: $L_{F_f} = F_f d\cos 180 = -F_{f_m} d$. Conform legii frecării: $F_f = \mu_m N = \mu_m mg\cos\alpha$, unde coeficientul de frecare mediu μ_m se calculează prin media aritmetică a valorilor coeficienţilor de frecare din punctul de lansare şi punctul de oprire. Deoarece coeficientul de frecare descreşte uniform, valoarea medie este:



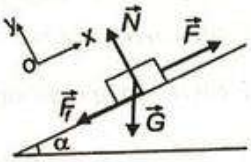
$\mu_m = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \Rightarrow L_{F_f} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd\cos\alpha = -8{,}65$ J

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_G = -mgd\sin\alpha = -25$ J, deoarece greutatea este o forţă rezistivă şi nu ajută la mişcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forţa de apăsare este $L_N = 0$, deoarece forţa de apăsare normală $\vec{N}$ este perpendiculară pe traiectorie

8.a. Puterea furnizată de motor este $P = F\upsilon = 20$ kW

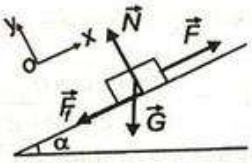
b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare în timpul deplasării blocului de piatră este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$. Deoarece blocul de piatră este tras uniform: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar pe *Ox*:



$F - F_f - G\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_f = F - G\sin\alpha \Rightarrow L_{Ff} = -(F - G\sin\alpha)d = -20$ kJ

c. Lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra blocului pe distanţa *OA* este nulă, deoarece blocul este ridicat uniform, astfel că rezultanta forţelor care acţionează asupra blocului este nulă.

9.a. Deoarece corpul este ridicat uniform pe planul înclinat,atunci rezulanta forţelor este nulă, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, unde *F* reprezintă o forţă de tracţiune paralelă cu planul. Proiectăm pe *Ox*: $F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$.

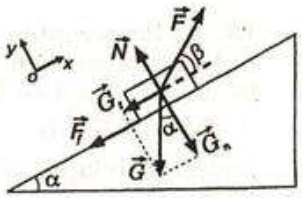


Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Astfel puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă este $P = Fv \Rightarrow$ $P = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$=3,75 W

b. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea acestuia până în vârful planului înclinat este $L_G = -mgh = -5$ J, deoarece greutatea este o forță rezistivă neajutând la urcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -\mu Nd \Rightarrow$ $L_{Ff} = -\mu mghctg\alpha = -2{,}5$ J, deoarece între distanța parcursă de corp pe plan și înălțimea planului există relația $h = d\sin\alpha$

10.a. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L_F = Fd\cos\beta$. Impunem condiția de mișcare uniformă a corpului $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$.



Proiectăm pe axa Ox: $F\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe axa Oy: $F\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0$.

Din $F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = 0 \Rightarrow$

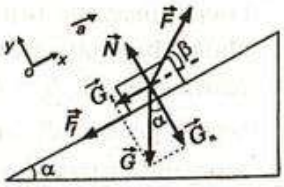
$$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \Rightarrow$$

$$L_F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} d\cos\beta \approx 2{,}57 \text{ J}$$

b. $L_G = -G_t d = -mgd\sin\alpha = -2$ J, deoarece greutatea corpului nu ajută la mișcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$. Deoarece forța de tracțiune este paralelă cu planul, atunci β=0, astfel că $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow L_{Ff} = -\mu mgd\cos\alpha = -1$ J

11.a. Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem pe Ox: $F\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = ma$ și pe Oy: $F\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

Cum $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

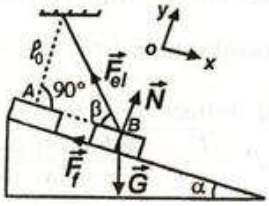
$$F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \Rightarrow$$

$F \approx 20{,}163$ N $\Rightarrow L = Fd\cos\beta \approx 71{,}07$ J.

b. $L_N = 0$, deoarece normala este perpendiculară pe direcția de deplasare.

c. $L_{F_f} = F_f \cdot d \cdot \cos 180^0 = -\mu Nd = -\mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta)d \approx -3{,}61$ J.

12.a. Alungirea firului în poziția de echilibru este $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, unde $\ell = \ell_0 / \sin\beta$, astfel că $\Delta\ell = \ell_0(1/\sin\beta - 1)$=20,5 cm

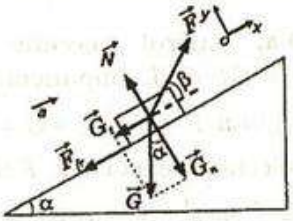


b. Lucrul mecanic al greutății corpului este $L_G = mgh = mgAB\sin\alpha$, unde $AB = \ell_0 ctg\beta$, astfel că $L_G = mg\ell_0 ctg\beta\sin\alpha$=2,5 J

c. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm pe Oy: $F_{el}\sin\beta+N-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=mg\cos\alpha-k\Delta\ell\sin\beta\approx 5{,}76$ N

d. Proiectând ecuația vectorială pe Ox obținem: $mg\sin\alpha-F_{el}\cos\beta-F_f=0$.

Cum $F_f=\mu N\Rightarrow\mu=\dfrac{mg\sin\alpha-k\Delta\ell\cos\beta}{mg\cos\alpha-k\Delta\ell\sin\beta}\approx 0{,}366$



13. a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe axa Oy:

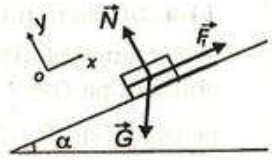
$N+F\sin\beta-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=mg\cos\alpha-F\sin\beta=900$ N.

b. Pe axa Ox: $F\cos\beta-F_f-mg\sin\alpha=0\Rightarrow F_f=F\cos\beta-mg\sin\alpha=200$ N, astfel că din legea a doua a forței de frecare $F_f=\mu N$ obținem $\mu=\dfrac{F_f}{N}\approx 0{,}22$

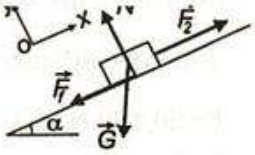
c. Puterea dezvoltată de motor este $P=Fv\cos\beta=800$ W

14.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{ff}=F_f\ell\cos 180=-\mu N\ell=-\mu mg\ell\cos\alpha=-1{,}25$ kJ

b. Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat: $\eta=\dfrac{L_u}{L_c}$.



Lucrul mecanic util este efectuat de o forță $\vec{F}_1$ paralelă cu planul înclinat, care ridică unifom și fără frecare corpul pe plan, astfel că $L_u=F_1\ell$. Cum $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{G}=0$, scalar pe Ox: $F_1=mg\sin\alpha\Rightarrow L_u=mg\ell\sin\alpha=mgh$, unde h reprezintă înălțimea la care urcă corpul.



Dacă corpul se deplasează uniform cu frecare pe aceeași distanță ℓ sub acțiunea forței $\vec{F}_2$ paralelă cu planul înclinat, lucrul mecanic consumat este $L_c=F_2\ell$. Cum $\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, scalar prin proiecția relației pe axele de coordonate obținem pe Ox: $F_2-mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha\Rightarrow F_2=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.

Lucrul mecanic consumat este $L_c=mg\ell(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=mgh(1+\mu ctg\alpha)\Rightarrow$

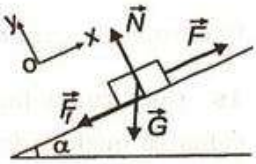
randamentul rampei este: $\eta=\dfrac{1}{1+\mu\cdot ctg\,\alpha}\approx 66{,}66\%$

c. Puterea medie necesară ridicării lăzii pe rampă este:

$P_m=\dfrac{L_c}{\Delta t}=\dfrac{mg\ell(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\Delta t}=187{,}5$ W

15.a. Lucrul mecanic util pentru urcarea uniformă a unui corp se efectuează împotriva greutății corpului, astfel că $L_u = -L_G = mgh = mg\ell\sin\alpha$, unde ℓ reprezintă distanța urcată de corp pe planul înclinat.

Lucrul mecanic consumat este lucrul mecanic efectuat de o forță constantă paralelă cu planul care determină urcarea uniformă cu frecare a corpului pe planul înclinat.



Astfel $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectând pe Ox obținem: $F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$.

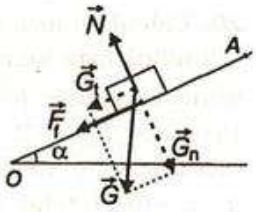
Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

$L_c = mg\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg\ell\sin\alpha + \mu mg\ell\cos\alpha = L_u - L_f$=2500 J

b. Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat: $\eta = \frac{L_u}{L_c}$=80%

c. Din $L_u = -L_G = mgh \Rightarrow h = \frac{L_u}{mg}$=20 m

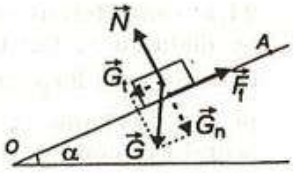
16.a. Studiem mișcarea corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar scalar pe direcția de mișcare



$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ (1)

Din grafic determinăm accelerația corpului la urcare $a_u = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v_0}{t_u} = -3$ m/s², deoarece v_0=9 m/s și t_u=3 s

Studiem coborârea corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mișcare



$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (2).

Din grafic determinăm accelerația corpului la coborâre $a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t_c} = 1{,}2$ m/s², deoarece v=6 m/s și t_c=5 s

Din (1)+(2) obținem $\sin\alpha = \frac{|a_u| + a_c}{2g}$=0,21

b. Din (1)-(2) obținem $\mu = \frac{|a_u| - a_c}{2g\cos\alpha} \approx 0{,}092$, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \approx 0{,}978$

c. Calculăm distanța parcursă de corp la urcare cu ajutorul ariei triunghiului delimitat de axa vitezei, axa timpului și graficul vitezei. Astfel d_u=13,5 m, iar la coborâre distanța parcursă este d_c=15 m, adică aria dintre graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită în punctul t=8 s. Astfel

lucrul mecanic total efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f(d_u + d_c)\cos 180$

$L_{Ff} = -\mu mg(d_u + d_c)\cos\alpha = -2{,}56$ J

17. Deoarece forța nu este constantă, dar este reprezentată în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței, axa de coordonate Ox și ordonatele duse prin extremitățile x_1 și x_2 reprezintă fizic lucrul mecanic, În cazul nostru

figura geometrică este un trapez, astfel că aria acestuia este: $L=\frac{(F_1+F_2)(x_2-x_1)}{2}$.

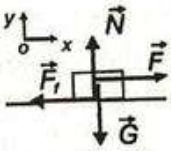
Deoarece $F_1=ax_1 \Rightarrow a=\frac{F_1}{x_1}$, iar $F_2=ax_2=\frac{F_1x_2}{x_1} \Rightarrow L=\frac{F_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{2x_1}=1{,}2$ J.

18. Conform definiţiei lucrului mecanic: $L=F_m(x_2-x_1)$, unde F_m reprezintă valoarea medie a forţei. Deoarece forţa F depinde liniar de coordonată, valoarea medie a forţei F se calculează cu ajutorul mediei aritmetice a valorilor de la capetele intervalului, astfel că: $F_m=\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}=5$N, deoarece pentru x_1=1m$\Rightarrow F_1$=8 N şi pentru x_2=4 m$\Rightarrow F_2$=2 N. Prin urmare obţinem L=15 J.

19. Conform interpretării geometrice a lucrului mecanic, dacă forţa F este reprezentată grafic în funcţie de coordonată, aria cuprinsă între curba forţei şi axa coordonatelor reprezintă fizic lucrul mecanic. Obţinem: $L_F=14$ J.

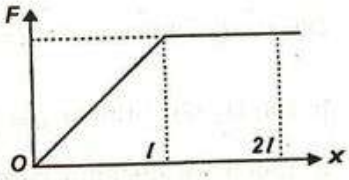
20. Calculăm aria cuprinsă între curba forţei şi axa coordonatelor. Această arie semnifică fizic lucrul mecanic, astfel că: $L_F=L_1+L_2+L_3$. Astfel $L_1=8$ J $\Rightarrow$ pe prima porţiune forţa este motoare, deoarece lucrul ei mecanic este pozitiv. Deoarece $L_2=-2$ J$\Rightarrow$ pe a doua porţiune forţa este rezistivă, deoarece lucrul ei mecanic este negativ şi pe treia porţiune forţa este tot rezistivă, astfel că $L_3=-1$J. În total $L_F=5$ J.

21.a. Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe asfalt pe distanţa x. Deoarece scândura se deplasează uniform cu ajutorul unei forţe orizontale, atunci $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Scalar pe Ox: $F=F_f=\mu N$, iar pe Oy: $N=G_x$, unde m_x reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porţiunii cu lungimea ℓ este



$m_x=\frac{mx}{\ell} \Rightarrow F=F_f=\frac{\mu mgx}{\ell}$.

Deoarece forţa depinde direct proporţional de x reprezentarea ei grafică este redată în figura alăturată.



Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, acesta este egal cu aria cuprinsă între curba forţei, axa Ox şi ordonatele construite prin extremităţi. Când $x_1=\ell/3 \Rightarrow F=\mu mg/3$, iar aria este un triunghi dreptunghic, astfel că $L=Fx_1/2=\mu mg\ell/18$=30 mJ

b. Când scândura pătrunde în întregime pe asfalt forţa cu care trage elevul scândura atinge valoarea maximă $F_{max}=\mu mg$, astfel lucrul ei mecanic total este $L_t=\mu mg\ell/2$=0,27 J

c. După ce pătrunde pe lungimea ℓ pe asfalt, forţa cu care trage elevul scândura pentru ca aceasta să se mişte uniform este $F=F_{max}=\mu mg$=const, astfel că lucrul mecanic suplimentar efectuat de elev astfel ca scândura să mai pătrundă pe distanţa $x=\ell$ este $L_s=\mu mg\ell$. Lucrul mecanic total este $L=L_t+L_s=3\mu mg\ell/2$=0,81 J

22.a. Deoarece forţa de tracţiune este egală cu forţa de deformare elastică, atunci $F=kx \Rightarrow k=F/x=100$ N/m

b. În timpul deplasării uniforme a corpului $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, astfel că scalar

$F=F_{el}=F_f \Rightarrow kx_m=\mu mg \Rightarrow x_m=\dfrac{\mu mg}{k}$=4 cm.

c. Pe baza interpretării grafice a lucrului mecanic lucrul mecanic efectuat de forţa F care trage de resort, în timpul deformării resortului de la x_1 la x_2 reprezintă aria trapezului cuprins între forţă, axa Ox şi cele două ordonate construite prin x_1 şi x_2, astfel că $L=\dfrac{(F_1+F_2)(x_2-x_1)}{2}$=60 mJ

23. Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă $\Delta\ell$ este $L_1=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{\Delta\ell}{3}\right)^2=\dfrac{k\Delta\ell^2}{18}$.

Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi este $L_2=\dfrac{k\Delta\ell^2}{2}-\dfrac{k\Delta\ell^2}{18}=\dfrac{4}{9}k\Delta\ell^2$. Împărţim cele două lucruri mecanice şi obţinem: $\dfrac{L_1}{L_1}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow L_1=\dfrac{L_2}{8}\Rightarrow$lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă este de opt ori mai mic decât lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi.

24. Pentru a alungi un resort cu $\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L=\dfrac{k\Delta\ell^2}{2}$.

Pentru a alungi resortul cu $3\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L'=\dfrac{9k\Delta\ell^2}{2}$ şi deci lucrul mecanic suplimentar este $L_s=L'-L=4k\Delta\ell^2$.

Cum $F=k\Delta\ell \Rightarrow k=\dfrac{F}{\Delta\ell}\Rightarrow L_s=4F\Delta\ell=0{,}08$ J.

25.a. Deoarece puterea dezvoltată de forţa de tracţiune este constantă, din $P=F_{t1}v_1 \Rightarrow F_{t1}=\dfrac{P}{v_1}$=4 kN. Studiem mişcarea corpului când asupra acestuia acţionează R_1. Deoarece Vectorial $\vec{F}_{t1}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}_1=m\vec{a}_1$ şi scalar

$F_{t1}-R_1=ma_1 \Rightarrow a_1=\left(\dfrac{P}{v_1}-R_1\right)/m$=5 m/s²

b. Când autoturismul are viteza v_2, $F_{t2}-R_2=ma_2 \Rightarrow R_2=F_{t2}-ma_2 \Rightarrow$

$R_2=P/v_2-ma_2$=2 kN

c. Când autoturismului atinge valoarea maximă v_3, rezultanta forţelor care se opun mişcării devine R_3. În acest caz forţa de tracţiune este egală cu R_3, asftel că $F_{t3}=R_3$. Din expresia puterii $P=F_{t3}v_3=R_3v_3 \Rightarrow v_3=\dfrac{P}{R_3}$=20 m/s

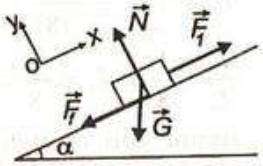
26.a. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care drumul este orizontal. Vectorial $\vec{F}_{t0}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, astfel că scalar pe direcţia mişcării se obţine $F_{t0}=R$. Cum $P_0=F_{t0}v_0$, relaţia cerută este $P_0=Rv_0$ (1).

b. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta urcă drumul de pantă p. Vectorial $\vec{F}_{t1}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, iar scalar în sensul mişcării se obţine: $F_{t1}-G\sin\alpha-R=0$, unde sinα=p. Din $P_1=F_{t1}v_0$ obţinem relaţia cerut $P_1=(Gp+R)\cdot v_0$ (2).

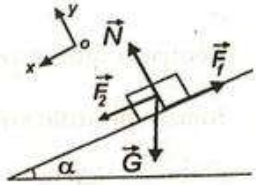
c. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta coboară drumul de pantă p. Vectorial $\vec{F}_{t2}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, iar scalar în sensul mişcării se obţine: $F_{t1}+G\sin\alpha-R=0$, unde sinα=p. Din $P_2=F_{t2}v_0$ obţinem relaţia cerută $P_2=(R-Gp)\cdot v_0$ (3).

d. Adunând relaţiile (2) cu (3) obţinem $R=\dfrac{P_1+P_2}{2v_0}$ astfel că introducând în relaţia (1) obţinem $P_0=\dfrac{P_1+P_2}{2}$=118 kW

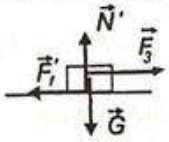
27.a. Studiem mişcarea maşinii de urcare a pantei. Deoarece maşina urcă uniform panta: $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe Ox: $F_1-F_f-mg\sin\alpha=0$ şi pe Oy: $N-mg\cos\alpha=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$, atunci $F_1=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$. Puterea maşinii la urcarea pantei este: $P=F_1\cdot v_1=mgv_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (1)



b. Studiem cazul când maşina coboară uniform aceeaşi pantă. Vectorial $\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe Ox: $F_2+mg\sin\alpha-F_f=0\Rightarrow F_2=mg(-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.
Puterea maşinii la coborârea pantei este: $P=F_2v_2=mgv_2(-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (2)



c. În cazul în care maşina se deplasează pe orizontală uniform vectorial obţinem $\vec{F}_3+\vec{N}'+\vec{G}+\vec{F}_f'=0$.
Scalar $F_3=F_f'=\mu N'=\mu mg$, iar puterea dezvoltată de motorul maşinii este $P=F_3v_3=\mu mgv_3\Rightarrow v_3=\dfrac{P}{\mu mg}$



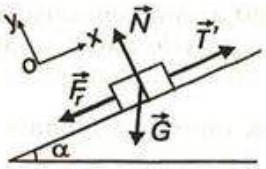
Din (1) şi (2)$\Rightarrow \mu mg=\dfrac{P(v_2+v_1)}{2v_1v_2\cos\alpha}\Rightarrow v_3=\dfrac{2v_1v_2\cos\alpha}{v_2+v_1}$.

Cum α este foarte mic, $\cos\alpha\approx 1\Rightarrow v_3=\dfrac{2v_1v_2}{v_2+v_1}=12$ m/s.

28.a. Puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal este: $P=Tv$=6 kW

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de rezistenţă pe drum orizontal este $L=F_rd\cos180=-F_rd$. Deoarece remorca este tractată cu viteză constantă, atunci rezultanta forţelor vcare acţionează asupra ei este nulă, astfel că $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_r=0$. Scalar pe direcţia de mişcare $T=F_r$, astfel că $L=-Td$=−6 kJ

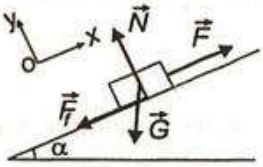
c. Puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă este $P' = T'v$, unde noua valoare a forței de tracțiune a remorcii este T'. Deoarece remorca urcă uniform pe pantă, atunci $\vec{T}' + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$.



Scalar pe Ox: $T' = F_r + mg\sin\alpha = T + mg\sin\alpha$, astfel că

$P' = (T + mg\sin\alpha)v = 16$ kW

29.a. Studiem mișcarea uniformă a saniei pe planul înclinat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox:



$F = mg\sin\alpha + F_f$.

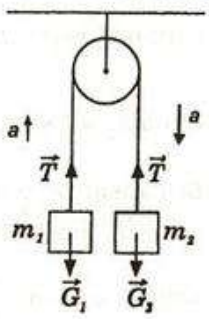
Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ reprezintă forța de tracțiune dezvoltată de cal.

Puterea activă dezvoltată de cal este $P_{activă} = F \cdot v = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 338{,}4$ W

b. Alte puteri care intervin sunt puterea forței de frecare: $P_{F_f} = -F_f \cdot v = -\mu mgv\cos\alpha$ și puterea greutății $P_G = -mgv\sin\alpha$. Bilanțul puterilor este $P_{activă} = |P_{F_f}| + |P_G|$, deoarece puterea activă dezvoltată de forța de tracțiune a calului se consumă atât sub formă de putere pentru învingerea forțelor de frecare cât și pentru învingerea greutății saniei.

c. $\dfrac{|P_{F_f}|}{P_{activă}} = \dfrac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \dfrac{\mu}{tg\alpha + \mu} \approx 16{,}66\ \%$

30.a. Deoarece corpul cu masa m_2 are masa mai mare comparativ cu corpul cu masa m_1, corpul m_1 urcă, iar corpul cu masa m_2 coboară, deci tensiunea care acționează asupra corpului 2 ajută la mișcare, astfel că lucrul ei mecanic este $L_T = Th$.



Studiem mișcarea fiecărui corp. Pentru corpul cu masa m_2: $m_2g - T = m_2a$, iar pentru corpul cu masa m_1:

$T - m_1g = m_1a \Rightarrow a = \dfrac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow T = m_1(a + g) = \dfrac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$L_T = \dfrac{2m_1m_2gh}{m_1 + m_2} = 8$ J

b. $L_{Gtotal} = L_{G_2} + L_{G_1} = m_2gH - m_1gH = (m_2 - m_1)gH = 12$J,

deoarece corpul 2 coboară și $\vec{G}_2$ este forță motoare, iar corpul 1 urcă și $\vec{G}_1$ este forță rezistivă.

c. Prin definiție $P_m = \dfrac{L_t}{\Delta t}$, unde L_t reprezintă lucrul mecanic al tuturor forțelor și Δt reprezintă intervalul de timp după care corpul m_2 ajunge pr sol.

Deoarece lucrul mecanic total al celor două tensiuni este nul, deoarece o tensiune este forță motoare iar cealaltă tensiune este forță rezistivă, atunci $L_t = L_{Gtotal}$. Dar $H = v_m\Delta t = \dfrac{v\Delta t}{2}$, unde $v = a\Delta t$, astfel că $H = \dfrac{a(\Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\dfrac{2H}{a}} \Rightarrow$

$\Delta t = 0{,}6$ s $\Rightarrow P_m = \dfrac{(m_2 - m_1)gH}{\Delta t} = 20$ W

30.a. Studiem mişcarea uniformă a corpului 2, astfel că $T_2=m_2g$. Din condiţia ca scripetele mobil să aibă o mişcare uniformă obţinem $T_2=2T_1$, iar din condiţia de mişcare uniformă a corpului 1: $F+m_1g=T_1 \Rightarrow F=(m_2/2-m_1)g=200$ N.

b. Puterea dezvoltată de forţa F este $P=\frac{L}{t}=\frac{Fh}{t}=20$ W

c. Cum $P=Fv \Rightarrow v=P/F=0{,}1$ m/s

3.2. Energia cinetică şi potenţială*

1. Prin definiţie energia cinetică: $E_c=\frac{mv^2}{2}$. Cum $E_{c_1}=E_{c_2} \Rightarrow \frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_2v_2^2}{2}$, şi cum $v_2=2v_1$ deoarece al doilea sportiv aleargă de două ori mai repede, obţinem că: $m_1=4m_2$.

2. Cum $E_c=\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow m=\frac{2E_c}{v_0^2}=4$ kg

3. Pe verticală săgeata are o mişcare uniform încetinită datorită acţiunii greutăţii cu viteza iniţială v_0, astfel că $v=v_0-gt \Rightarrow$ la o secundă de la lansare viteza este $v=10$ m/s $\Rightarrow E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(v_0-gt)^2=2$ J

4. Deoarece corpul se mişcă uniform accelerat din repaus, accelerația medie coincide cu cea instantanee, astfel că $a_m=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t} \Rightarrow v=at$, iar distanţa parcursă este: $d=v_mt=\frac{v}{2}t=\frac{at^2}{2} \Rightarrow a=\frac{2d_1}{t_1^2}=2$ m/s².

Când $t_2=2$ s, $v_2=at_2=\frac{2d_1}{t_1^2}t_2=4$ m/s $\Rightarrow E_c=\frac{mv_2^2}{2}=8$ J

5. Lansat pe o suprafaţă orizontală cu o viteză iniţială v_0, corpul are o mişcare uniform încetinită, astfel $F_f=-ma \Rightarrow \mu N=-ma \Rightarrow \mu mg=-ma \Rightarrow a=-\mu g$.

Cum $a_m=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_0}{t} \Rightarrow v=v_0+at \Rightarrow v=v_0-\mu gt \Rightarrow$ energia cinetică este $E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(v_0-\mu gt)^2=81$ J

6. Conform definiţiei energia potenţială gravitaţională este: $E_p=mgd=mg\frac{h}{4}=5$J

7. Cum energia potenţială gravitaţională este: $E_p=mgh \Rightarrow \frac{E_{p_2}}{E_{p_1}}=\frac{m_2gh}{m_1gh}=4$.

8. Corpul aruncat pe verticală de jos în sus are o mişcare uniform încetinită cu accelerația g, astfel că $v=v_0-gt$, iar la înălţimea maximă $v=0$, astfel că timpul de oprire este $t_{op}=\frac{v_0}{g}$. Înălţimea maximă la care ajunge corpul este

$h_{max} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2} t_{op} = \frac{v_0^2}{2g}$. La jumătate din înălțimea maximă, energia potențială gravitațională este: $E_p = mg\frac{h_{max}}{2} = \frac{mv_0^2}{4} = 20$ J.

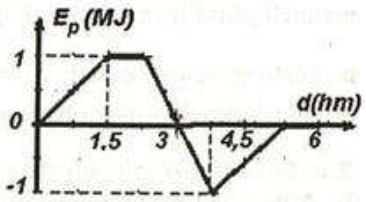
9. Din grafic $h = 2$ m și $E_p = 30$ J, iar conform definiției energiei potențiale gravitaționale: $E_p = mgh \Rightarrow m = \frac{E_p}{gh} = 1{,}5$ kg.

10.a. Când drumul este orizontal energia potențială gravitațională este constantă. Prin urmare cum E_p=*const* obținem intervalele de timp în care drumul este orizontal $\Delta t \in [0{,}2;0{,}3]$ min când E_p=1 MJ și $\Delta t \in [0{,}7;0{,}8]$ min când E_p=0 MJ.

b. Camionul începe să coboare când energia potențială a lui începe să scadă, adică după t=0,3 min. Cum $\Delta E_p = mg\Delta h$, atunci diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul și punctul din care acesta începe să coboare este $\Delta h = \Delta E_p/(mg)$=10 m.

c. Calculăm distanța parcursă de camion într-un interval de timp Δt=0,1 min. Astfel $d_1 = v\Delta t$=75 m.

Reprezentarea grafică a energiei potențiale E_p a camionului, în funcție de distanța parcursă d este redată în figura alăturată.



d. Din grafic observăm că după ce camionul parcurge o distanță egală cu 375 m față de punctul de pornire, energia potențială este E_{pf}=−1MJ. Astfel variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării până ajunge la 375 m este $\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi}$=−1 MJ, deoarece E_{pi}=0

11. Conform definiției energia potența lă elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

Cum $F_{el} = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} \Rightarrow E_p = \frac{Fx}{2} = 0{,}5$ J.

12. Din definiția energiei potențiale elastice: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_p}{x^2} = \frac{k}{2}$, deci panta dreptei este $\frac{k}{2}$, adică jumătate din valoarea constantei elastice a resortului.

13. Pe baza definiției energiei potențiale elastice $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$.

Când cele două resorturi sunt legate în serie forțele elastice cu care acționează unul asupra celuilalt sunt egale, conform principiului acțiunii și reacțiunii, astfel că $F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_2}{k_1} = 2$

14. Energie potențială elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2}$.

Deoarece resorturile sunt legate în paralel, sub acțiunea unei forțe deformatoare ele se vor deforma la fel, astfel că $x_1 = x_2 = x \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \approx 0{,}333$.

15.a. Din grafic determinăm constantele elastice pentru fiecare resort. Pentru primul resort când $x_1^2 = 8$ cm², $E_{p_1} = 16$ J $\Rightarrow k_1 = \frac{2E_{p_1}}{x_1^2} = 4 \cdot 10^4$ N/m.

Pentru al doilea resort când $x_2^2 = 4$ cm², $E_{p_2} = 32$ J $\Rightarrow k_2 = \frac{2E_{p_2}}{x_2^2} = 16 \cdot 10^4$ N/m.

b. Când se leagă în serie resorturile se alungesc cu x_1 şi respectiv x_2, astfel că alungirea totală este $x = x_1 + x_2$. La legarea în serie forţele elastice are apar în cele două resorturi sunt egale, astfel că:

$$F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{k_2 x_2}{k_1} \Rightarrow x = x_2\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2} = 4 \text{ cm}.$$

3.3. Teorema de variaţie a energiei cinetice

1.a. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru maşină din momentul frânării până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -\frac{mv^2}{2} \Rightarrow L_{Ff} = -10^5$ J

b. Forţa de frânare este $F_f = ma = m\Delta v / \Delta t = mv / \Delta t = 500$ N

c. Distanţa parcursă de maşină până la oprire este $d = v_m \Delta t = v\Delta t/2 = 200$ m

2.a. Lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanţa d este $L = Fd = 180$ J

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul format din barcă, prieten, fetiţă şi soţie din momentul pornirii până în momentul când acesta parcurge distanţa d: $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_{Ff}$, unde $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 250$kg

$$\frac{mv^2}{2} = (F - F_r)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(F - F_r)d}{m}} = 0{,}894 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru barcă din momentul încetării acţiunii forţei F până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{Fr} \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2} = -F_r s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv^2}{2F_r} = \frac{(F - F_r)d}{F_r} = 1{,}25 \text{ m}$$

3.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corp din momentul pornirii până în momentul t, $\Delta E_c = L \Rightarrow E_C = Fd \Rightarrow d = \frac{E_C}{F} = 2$ m

b. Cum $E_C = \frac{mv^2}{2}$ şi din $F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{v}{\Delta t}$ prin împărţirea relaţiilor obţinem

$$\frac{E_C}{F} = \frac{v\Delta t}{2} \Rightarrow v = \frac{2E_C}{F\Delta t} = 2 \text{ m/s}$$

c. Din $E_C = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_C}{v^2} = \frac{F^2\Delta t^2}{2E_C} = 4$ kg

d. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corp din momentul aplicării forţei suplimentare până în momentul opririi $\Delta E_c = L = L_F + L_{Fs}' \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2} = FD - F_s D \Rightarrow F_s = F + \frac{mv^2}{2D} = 20 \text{ N}$$

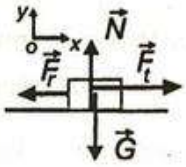
4.a Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp Δt, astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{Ft} + L_{Fr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L_{Ft} - F_f d \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat forța de tracțiune este $L_{tr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + F_f d$=72 J

b. Din definiție $L_{Ft} = F_t d \Rightarrow F_t = \frac{L_{Ft}}{d}$. Deoarece puterea medie dezvoltată de forța de tracțiune este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F_t d}{\Delta t} = F_t v_m = \frac{(v_1 + v_2)L_{Ff}}{2d}$=14,4 W.

Din $P_m = \frac{L_{Ft}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L_{ft}}{P_m}$=5 s.

c. Din expresia forței de frecare $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow \mu = F_f/(mg)$=0,1

5.a. Deoarece inițial autoturismul se deplasa cu viteza constantă înseamnă că rezultanta forțelor care acționau asupra automobilului este nulă. Astfel vectorial $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar F_t=F_r. Cum P=$F_t v$ $\Rightarrow F_t$=P/v. După ce motorul se oprește datorită forțelor de rezistență autoturismul se oprește. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow L = -\frac{mv^2}{2}$=-90 kJ



b. Cum $L = F_r d\cos 180 = -F_r d = -Pd/v \Rightarrow d = -Lv/P$=90 m

c. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v}{t} \Rightarrow t = -\frac{v}{a}$. Studiind mișcarea autoturismului obținem: $-F_r = ma \Rightarrow a = -F_r/m = -P/(mv) \Rightarrow t = mv^2/P$=12 s

6.a. Lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență este $L = F_r d\cos 180 = -F_r d = -fmgd$=-24 MJ

b. Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este P=$F_t v$. Deoarece trenul se deplasează cu viteză constantă, atunci $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar F_t=F_r=$fmg \Rightarrow v$=$P/((fmg)$=20 m/s. Lucrul mecanic efectuat de locomotivă este L=$P\Delta t$=48 MJ

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru ultimul vagon. $\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{mv^2}{2} - F_r d_1 = -fmgd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v^2}{2fg}$=2 km

7.a. Din formula puterii $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$= 5 kN.

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$ și prin proiecție pe axa Ox obținem: $F - fmg = ma \Rightarrow$ $a = \frac{F}{m} - fg$ =4 m/s².

c. Viteza maximă pe care o poate atinge automobilul se obține când acesta se mișcă rectiliniu și uniform, astfel că forța de tracțiune devine $F' = fmg$, astfel că din $P = F' \cdot v_{max} \Rightarrow v_{max} = \frac{P}{F'} = \frac{P}{fmg}$ =35 m/s

d. Variația energiei cinetice a automobilului, de la plecare până la atingerea vitezei maxime este:

$$\Delta E_c = \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 58{,}8 \text{ kJ}$$

8. a. Puterea mecanică dezvoltată de tren în timpul mișcării sale uniforme este $P = Fv = 1{,}26$ MW

b. Energia cinetică a trenului înainte de decuplarea vagonului este:

$$E_c = \frac{Mv^2}{2} = 94{,}5 \text{ MJ}$$

c. Deoarece inițial trenul se deplasa uniform, atunci forța de tracțiune era egală cu cea de rezistență, astfel că: $F = F_r = kMg \Rightarrow k = \frac{F}{Mg}$. După desprinderea ultimului vagon trenul se va mișca accelerat, astfel că:

$$F - k(M-m)g = (M-m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M-m} - kg = \frac{Fm}{M(M-m)} = 0{,}01 \text{ m/s}^2$$

d. Vagonul desprins va avea o mișcare uniform încetinită astfel că pe baza teoremei de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{Fr} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -kmgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2kg} = \frac{Mv^2}{2F} = 2{,}25 \text{ km.}$$

9.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp Δt, astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{Ft} + L_{Fr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L + L_{Fr} \Rightarrow$

$$L_{Fr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - L = -75 \text{ kJ}$$

b. Din formula puterii medii $P = F_t v_m = \frac{F_t(v_1 + v_2)}{2}$ obținem forța de tracțiune dezvoltată de motor $F_t = \frac{2P}{v_1 + v_2}$ =6 kN. Studiem mișcarea corpului, astfel că $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}$. Scalar $F_t - F_r = ma \Rightarrow F_r = F_t - ma$.

Din $L = P\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P}$ =5 s și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ =3 m/s² $\Rightarrow F_t$=1,2 kN

c. Distanța parcursă de camionetă în intervalul de timp Δt este $d = v_m \Delta t = (v_1 + v_2)\Delta t/2$=62,5 m

10.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul oprește alimentarea cu energia electrică și punctul de oprire:

$\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{mv_0^2}{2}$, deoarece în final trenul se opreşte şi viteza finală este nulă, $L_{F_r} = -F_r d = -f_1 mgd$, deoarece forţa de rezistenţă apare pe tot parcursul mişcării pe distanţa d de la întreruperea alimentării cu energie electrică şi este o forţă cu caracter rezistiv, iar $L_{F_f} = -F_f s = -f_2 mgs$, deoarece forţa de frânare apare din momentul punerii în acţiune a sistemului de frânare şi acţionează pe distanţa s având caracter rezistiv. Înlocuind formulele în teorema de variaţie a energiei cinetice obţinem:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd - f_2 mgs \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2f_2 g} - \frac{f_1 d}{f_2} = 288 \text{ m}.$$

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frânare este $L_{Ff} = -F_f s = -f_2 mgs \Rightarrow$

$$L_{ff} = -\frac{mv_0^2}{2} + f_1 mgd = -36 \text{ MJ}$$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul opreşte alimentarea cu energia electrică şi punctul aflat la distanţa d_1: $\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Lucrul mecanic al forţei de rezistemţă este $L_{F_r} = -F_r d_1 = -f_1 mgd_1$, iar al forţei de frânare $L_{F_f} = -F_f(s - d + d_1) = -f_2 mg(s - d + d_1)$, deoarece trenul frânează pe distanţa s-d+d_1. Astfel se obţine $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd_1 - f_2 mg(s - d + d_1) \Rightarrow$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2f_1 d_1 g - 2f_2 g(s - d + d_1)} \approx 16{,}43 \text{ m/s}$$

11.a. Energia cinetică a corpului în momentul lansării este $E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2}$ =0,04 J

b. Pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 şi L_N=0, atunci $L_{Ff} = E_{cf} - E_{c0} = -\frac{mv_0^2}{2} = -0{,}04$ J

c. Deoarece sub acţiunea forţei de frecare corpul are o mişcare uniform încetinită, atunci distanţa parcursă de corp până la oprire este $d = v_m t_{op} = \frac{v}{2} t_{op}$ =10 m

d. Pe baza definiţiei lucrului mecanic al forţei de frecare $L_{Ff} = -F_f d \Rightarrow F_f = -\frac{L_{Ff}}{d}$ =4 mN

12. a. Pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 şi L_N=0, atunci $L_{Ff} = E_{cf} - E_{c0} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{-\frac{2L}{m}}$ =20 m/s

b. Din principiul al doilea al dinamicii $-F_f = ma \Rightarrow -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g$, astfel că din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 - \mu g t$ şi din condiţia de oprire v=0, obţinem $\mu = \frac{v_0}{g t_{op}}$ =0,2

c. Spaţiul parcurs de corp până la oprire este $s_{op} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2} t_{op}$ =100 m

d. După t_1=3 s din momentul lansării viteza corpului este $v_1 = v_0 - \mu g t_1$=14 m/s, astfel că energia cinetică a corpului este $E_c = \frac{m v_1^2}{2}$ =196 J

13. a. Energia mecanică a copilului la ieşirea de pe tobogan este $E_m = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh$ =342 J

b. Lucrul mecanic efectuat de copil pentru a urca până în vârful toboganului este efectuat împotriva greutăţii, astfel că $L = -L_G = mgH$ =900 J

c. Puterea medie dezvoltată de copil în timpul urcării toboganului este $P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{mgH}{\Delta t}$ =90 W

d. Conform teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_{Ff}$ şi cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, $L_G = mg(H - h)$ obţinem $L_{Ff} = \frac{mv^2}{2} - mg(H - h) = -558$ J

14. a. Energia mecanică a schiorului aflat în vârful *A* al trambulinei este $E_{mA} = E_{pA} = mgh$ =37,6 kJ

b. Energia cinetică a schiorului în punctul *B* este $E_{cB} = \frac{mv^2}{2}$ =36 kJ

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele *A* şi *B*: $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh$ iar $\Delta E_{c,AB} = \frac{mv^2}{2}$ obţinem: $\frac{mv^2}{2} = mgh + L_{Ff,AB} \Rightarrow L_{Ff,AB} = m\left(\frac{v^2}{2} - gh\right) = -1{,}6$ kJ

d. Din definiţia lucrului mecanic al forţei de frecare $L_{Ff,AB} = -F_f AB = -\mu mgAB\cos\alpha$ obţinem $\mu = \frac{2gh - v^2}{2g\ell}$ =0,04, deoarece $\ell = AB\cos\alpha$, α fiind unghiul planului înclinat

15.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion între punctele A și B: $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_G$. Deoarece avionul planează cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c=0$, astfel că $L_{Fr}=-L_G=-mg(h_1-h_2)=-25$ MJ

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion la întoarcerea acestuia, astfel că $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_G + L_F$. Deoarece avionul se întoarce cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c=0$, astfel că lucrul mecanic dezvoltat de motor este $L_F = -L_G - L_{Fr} = 2mgh$=50 MJ, deoarece greutatea este o forță rezistivă

c. Deoarece $d=v\Delta t \Rightarrow \Delta t=d/v$, astfel că puterea dezvoltată de motor este $P=L/\Delta t=Lv/d=2\cdot 10^5$ W

16.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate este $L_G = MgH$ =13,5 J, deoarece greutatea este forță de tip conservativ și lucrul ei mecanic depinde doar de poziția inițială și de cea finală

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra sistemului format din elicopter și jucărie, astfel că $\vec{F}+\vec{G}=(m+M)\vec{a}$. Doarece sistemul de corpuri va coborî, aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii și până ce este scăpată jucăria, astfel că

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow \frac{(m+M)v^2}{2} = (m+M)gh - Fh \Rightarrow v = \sqrt{2\left(g - \frac{F}{m+M}\right)h} \approx 6{,}32\text{m/s}$$

c. Din momentul în care scapă jucăria elicopterul se va mai mișca în jos pe distanța x după care se oprește. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care scapă jucăria și punctul unde elicopterul se oprește. Astfel:

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = mgx - Fx \Rightarrow x = \frac{mv^2}{2(mg-F)} = 2 \text{ m}$$

Energia potențială minimă a elicopterului este $E_{Pmin}=mg(H-h-x)$=1,5 J

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

$\Delta E_c = L = L_G + L_F$, unde $L_G = -mg\ell$, deoarece când glontele se deplasează de jos în sus greutatea glontelui nu ajută la mișcarea acestuia și prin urmare greutatea este o forță rezistivă, iar $L_{F_f} = -F_f\ell$, deoarece și forța de frecare este o forță rezistivă.

$$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell - F_f\ell \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\ell}{m}(mg + F_f)} = 400 \text{ m/s}.$$

b. Dacă glontele este tras de sus în jos, pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell - F_f\ell$, deoarece în acest caz greutatea ajută la mișcarea glontelui și este o forță motoare $\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\ell}{m}(mg - F_f)} = 400{,}1$ m/s.

c. Dacă glontele este tras pe orizontală, pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -F_f\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2F_f\ell}{m}} \approx 400$ m/s

18.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul acţiunii forţei F până în momentul în care acţiunea forţei încetează.

$$\Delta E_c = L = L + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + mg(h - h_0) \Rightarrow h = h_0 + \frac{2L - mv^2}{2mg} = 4{,}2 \text{ m}$$

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care acţiunea forţei încetează până în momentul în care bila atinge înălţimea maximă. Astfel $\Delta E_c = L_G \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -mg(H - h) \Rightarrow H = h + \frac{v^2}{2g} = 5$ m

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care bila atinge înălţimea maximă până în momentul în care trece prin punctul iniţial $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mg(H - h_0) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - h_0)} \approx 8{,}94$ m/s

19.a. Din definiţie $\Delta E_{p2} = -L_{G2} = -m_2 g h_2 = -200$ J

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru un corp care cade liber de la înălţimea h, între punctul de plecare şi punctul în care corpul atinge solul. Astfel obţinem $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \approx 1{,}41$

c. Cum $v = g\Delta t \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \approx 1{,}41$

20.a. Energia mecanică iniţială este $E_{mi} = mgH$. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul care cade liber de la înălţimea H, între punctul de plecare şi punctul impactului cu solul. Astfel obţinem:

$\Delta E_c = L = L_G + L_{Fr} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgH + L_{Fr} \Rightarrow L_{Fr} = \frac{mv^2}{2} - mgH$. Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul este

$$E_{mf} = \frac{mv^2}{2} = fE_{mi} = fmgH \Rightarrow L_{Fr} = -(1 - f)mgH = -300 \text{ J}$$

b. Din relaţia precedentă obţinem viteza corpului la atingerea solului $v = \sqrt{2fgH} \approx 42{,}42$ m/s

c. Cum $L_{Fr} = -F_r H \Rightarrow F_r = -L_{Fr} / H = 3$ N

21. a. Din grafic viteza maximă atinsă de corpul A în timpul căderii este: $v_{Amax} = 4$ m/s

b. Deoarece când se atinge viteza maximă se obţine când corpul cade uniform, atunci rezultanta forţelor care acţionează asupra acestuia este nulă. Astfel

$$G_A = F_{rA} \Rightarrow m_A g = kv_{A\max} \Rightarrow k = \frac{m_A g}{v_{A\max}} = 0{,}125 \text{ Ns/m}$$

c. Din condiţia de mişcare rectilinie şi uniformă a corpului B, obţinem

$G_B = F_{rB} \Rightarrow m_B g = kv_{B\max} \Rightarrow m_B = \frac{kv_{B\max}}{g} = m_A \frac{v_{B\max}}{v_{A\max}} = 25$ g, deoarece $v_{Bmax} = 2$ m/s

d. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul A din momentul lansării până la momentul $t = 1{,}4$ s când corpul a ajuns la mişcare rectilinie şi uniformă. Astfel:

$$\Delta E_c = L_G + L_{Fr} \Rightarrow \frac{m_A v_{A\max}^2}{2} = m_A gd + L_{Fr} \Rightarrow L_{Fr} = m_A\left(\frac{v_{A\max}^2}{2} - gd\right) = -1{,}6\ \text{J}$$

22.a. Lucrul mecanic al forței de frecare este:

$$L_{Ff} = -F_f d = -\mu_m mgd = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd = -80\ \text{J}$$

b. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 și L_N=0, atunci $0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd \Rightarrow v = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)gd}$ =4 m/s

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cum L_G=0 și L_N=0, $L_{Ff} = -F_f' d = -\mu_m' mgd = -\frac{\mu_1 + \mu_2'}{2} mgd$, unde coeficientul de frecare la distanța d_1 se află ținând cont că scade liniar cu distanța.

Astfel cum $\mu = ax + b$, iar pentru $x = 0 \Rightarrow b = \mu_1$ și pentru $x = d \Rightarrow \mu_2 = ad + \mu_1$, obținem $a = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{d} \Rightarrow \mu = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{d} x + \mu_1$. Pentru x=d_1 se obține μ_2'=0,05.

Din $\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd_1 \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 - (\mu_1 + \mu_2)gd_1} \approx 3{,}24$ m/s

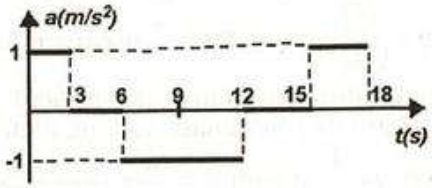
23.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L$.

Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, deoarece $v_0 = 0 \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2}$. Deoarece din grafic când t=40 s viteza corpului este v=30 m/s obținem L=4500 J

b. Deoarece lucrul mecanic este: $L = F_m d$, forța medie este $F_m = L/d$, unde d reprezintă distanța parcursă de mobil în primele 40 s de la începerea mișcării. Din grafic distanța parcursă se calculează cu aria cuprinsă între curba vitezei și axa timpului până ce $t = 40\ \text{s} \Rightarrow d = 600\ \text{m} \Rightarrow F_m = 7{,}5$ N.

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = 0$, deoarece vitezele inițială și finală sunt nule la momentele $t_1 = 0$ s și $t_2 = 90$ s

24.a. Se utilizează definiția accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ pe diferitele porțiuni.



Reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mișcări este redată în figura alăturată.

b. Distanța parcursă de corp este modulul ariei cuprinse între graficul vitezei și axa timpului. Obținem d_{dus}=18 m, $d_{întors}$=18 m $\Rightarrow d = d_{dus} + d_{întors}$=36 m.

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$ L=−0,45 J, deoarece la momentul t_2, v_2=0 m/s și la momentul t_1, v_1=3 m/s

25.a. Din grafic valoarea vitezei iniţiale a corpului este v_0=4,8 m/s,astfel că energia cinetică iniţială a corpului este $E_{c0}=\frac{mv_0^2}{2}$=11,52 J

b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare şi cel de revenire, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum L_N=0, L_G=0, deoarece corpul revine în acelaşi punct obţinem $L_{Ff}=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=-8{,}64$ J

c. Distanţa parcursă de corp pe planul înclinat este una din ariile triunghiurilor, conform interpretării geometrice al spaţiului parcurs de un corp, astfel că d=A=7,2 m. Din definiţia lucrului mecanic al forţelor de frecare $L_{Ff}=-2F_f d \Rightarrow F_f=-\frac{L_{Ff}}{2d}$=0,6 N

d. La momentul t=3 s corpul se află în repaus şi are doar energie potenţială. Astfel $E_m = E_c + E_p = E_p = mgh$. Aflăm înălţimea la care urcă corpul pe planul înclinat din teorema de variaţie a energiei cinetice scrisă pentru punctual de plecare şi cel de oprire: $\Delta E_c = L_G + L'_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_c = -\frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = -mgh$, $L_N = 0$ şi $L'_{F_f}=\frac{L_{Ff}}{2}$, obţinem $-\frac{mv_0^2}{2}=-mgh+\frac{L_{Ff}}{2} \Rightarrow E_m=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{L_{Ff}}{2}$=7,2 J

26.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic obţinem lucrul mecanic efectuat de forţa F ca fiind aria trapezului L=140 J

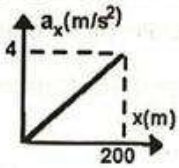
b. Forţa medie este F_m=L/d=14 N

c. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_1 \Rightarrow L_1=\frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$ $v_1=\sqrt{\frac{2L_1}{m}} \approx 6{,}32$ m/s, deoarece lucrul mecanic pe primii 4 m reprezintă aria triunghiului determinat de graficul forţei, axa Ox şi ordonata construită prin punctual de coordonată x_1=4 m, astfel că L_1=40 J

d. Aflăm viteza corpului în punctul de coordonată x_2=6 m, astfel că $v_2=\sqrt{\frac{2L_2}{m}} \approx 10{,}95$ m/s, deoarece lucrul mecanic pe primii 6 m reprezintă aria trapezului determinat de graficul forţei, axa Ox şi ordonata construită prin punctul de coordonată x_2=8 m, astfel că L_2=120 J.

Din $a=\frac{F}{m}$ şi cum $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{v_2-v_1}{a}=\frac{m(v_2-v_1)}{F} \approx 0{,}463$ s

27.a. Din grafic pe primii 200 m forţa F_x depinde direct proporţional de coordonata x, astfel că F_x=bx, unde b=20 N/m. Cum F_s=$ma_x \Rightarrow a_x$=$bx/m \Rightarrow a_x$=0,02x. Reprezentarea grafică a proiecţiei acceleraţiei a_x pe direcţia mişcării automobilului, în funcţie de coordonata x, este redată în figura alăturată.



b. Viteza devine maximă în momentul în care automobilul nu mai accelerează. Astfel pe primii 200 m automobilul are o mişcare accelerată cu acceleraţia crescătoare, pe următorii 100 m are o mişcare

uniform accelerată, iar pe următorii 100 m are o mişcare accelerată cu accelerație descrescătoare. Astfel la 400 m, $F_x=0 \Rightarrow a_x=0$. La coordonata $x_m=400$m viteza automobilului devine maximă.

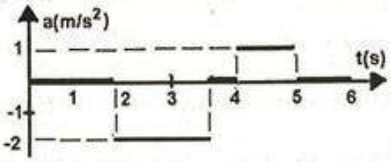
c. Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă reprezintă aria cuprinsă între graficul forței, axa coordonatei şi ordonata construită în punctul de coordonată $x=300$ m, astfel că $L=8\cdot10^5$ J

d. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 40 \text{ m/s}$$

28.a. În primele 3 s viteza corpului este pozitivă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox. Distanța parcursă în primele 3 s este $d=5$ m, astfel că dacă presupunem că mobilul porneşte din originea axei Ox, după 3 s acesta ajunge în punctul de coordonată $x_1=d=5$ m (aria trapez). În următoarele 2 s viteza corpului este negativă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul negativ al axei Ox, parcurgând distanța $d_2=1{,}25$ m (aria trapez de sub axa timpului). Astfel după 5s, coordonata finală este $x_f=3{,}75$m. Viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t=x_f/\Delta t=0{,}75$ m/s

b. Deoarece accelerația este $a=\Delta v/\Delta t$, reprezentarea grafică a accelerației în funcție de timp în intervalul $t\in(0,6)$s în figura alăturată.



c. Lucrul mecanic al rezultantei forțelor se află pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, astfel că $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -15$ J, deoarece la momentul $t_1=2$s, viteza este $v_1=2$ m/s şi la momentul $t_1=3{,}5$ s, viteza este $v_2=-1$ m/s.

29.a. Inițial corpul se mişcă aceelerat, iar după ce acțiunea forței de tracțiune încetează asupra corpului se va exercita numai forța de frecare. Astfel forța de frecare este $F_f=20$ N. Cum pentru $x\in[100,500]$m $R_x=F_t-F_f$, obținem valoarea forței de tracțiune $F_t=R_x+F_f=60$ N.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de coordonată $x_0=100$ m şi punctul de coordonată $x_1=500$ m: $\Delta E_c = L_{Ft} + L_{Ff}$.

Din interpretarea geometrică a lucrului mecanic $L=L_{Ft}+L_{Ff}=16$ kJ, astfel că

$$\frac{mv_1^2}{2} = L \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 80 \text{ m/s}$$

c. Puterea medie dezvoltată de motor este $P_m=F_tv_m=F_tv_1/2=2400$ W

d. Din $P_m = \frac{L}{\Delta t}$ obținem $\Delta t = \frac{L}{P_m} = \frac{F_t(x_1 - x_o)}{P_m} = 10$ s

e. Analog $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -F_f(x_2 - x_1) \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2F_f(x_2 - x_1)}{m}} = 60$ m/s

30.a. Lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului este $L_1=F_1y_1=60$ kJ

b. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_1 + L_G \Rightarrow$

$$\frac{mv_1^2}{2} = L_1 - mgy_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}(L_1 - mgy_1)} \approx 6{,}32 \text{ m/s}$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_2 + L_G \Rightarrow$ $\frac{mv_2^2}{2} = L_2 - mgy_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}(L_2 - mgy_2)}$=8m/s, deoarece lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului reprezintă aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când y_2=22 m, astfel că L_2=126 kJ.
Puterea instantanee a motorului în punctul de coordonată y_2=22 m este $P=F_2v_2$=40 kW

31.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucrul mecanic total efectuat de forță este egal cu aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când x=25 m. Se obține: L=112,5 J.
b. Observăm că pentru $x \in (10,25)$ m forța scade liniar cu x, astfel că $F=ax+b$. Cum pentru x_1=10 m, F_1=10 N, iar pentru x_2=25 m, F_2=−5 N obținem valorile a=−1 N/m și b=20 m. Pentru x_3=12 m obținem F_3=8 N
c. Cu ajutorul teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L_1$, unde L_1=93 J reprezintă aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când x_3=12 m. Cum $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2L_1}{m}}$=10 m/s
Puterea instantanee este $P=F_3v_1$=80 W

32.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucrul mecanic efectuat de forță este egal cu aria de sub graficul forței și axa coordonatei Ox. Se obține: L=100 J.
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L + L_{Ff}$ și cum $L_{Ff} = -\mu Nx = -\mu mgx$ obținem $\frac{mv^2}{2} = L - \mu mgx \Rightarrow v = \sqrt{2\left(\frac{L}{m} - \mu gx\right)}$=4 m/s
c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care încetează acțiunea forței F și punctul în care corpul se oprește, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g}$=4 m

33.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -\frac{mv_0^2}{2} = -1$J
b. Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe astfalt pe distanța x.. Din legea frecării $F_f=\mu N=\mu m_x g$, unde m_x reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porțiunii cu lungimea ℓ este $m_x = \frac{mx}{\ell} \Rightarrow F_f = \frac{\mu mgx}{\ell}$.
Deoarece forța de frecare depinde direct proporțional de x lucrul ei mecanic este $L_{Ff} = -F_{fm}d = -\frac{\mu mgd^2}{2\ell}$, deoarece forța de frecare medie reprezintă media aritmetică a valorilor pentru x=0 și pentru x=d, d fiind distanța pe care pătrunde scândura pe asfalt. Din cele două relații pentru lucrul mecanic al forțelor de frecare obținem: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu mgd^2}{2\ell}$ (1). Obținem $d = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$=0,5 m

c. Dacă scândura este de două ori mai lungă pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeaşi distanţă ca şi prima trebuie îndeplinită relaţia $\frac{m'v_{01}^2}{2} = \frac{\mu m' g d^2}{2\ell'}$ (2).

Prin împărţirea relaţiei (2) la (1) obţinem $\frac{v_{01}^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{01} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ m/s

34.a. Energia cinetică a corpului în momentul iniţial este $E_c = \frac{mv_0^2}{2}$ =72 J

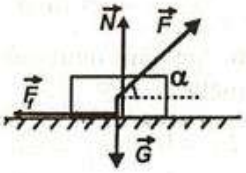
b. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare şi punctul de la capătul liber al platformei, astfel că $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff}$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, iar lucrurile mecanice sunt $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu mg\ell$, L_G=0, L_N=0.

Obţinem $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell}$ =5 m/s

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de la capătul liber al platformei şi punctul în care corpul loveşte solul, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow$

$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gh}$ =7 m/s

35.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G$.



$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, deoarece iniţial corpul se află în repaus.

Din definiţia lucrului mecanic $L_F = Fd\cos\alpha$, $L_N = 0$ şi $L_G = 0$, deoarece aceste două forţe sunt perpendiculare pe direcţia de mişcare. Lucrul mecanic al forţei de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu Nd$.

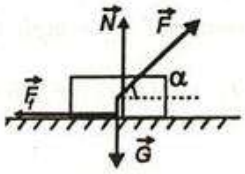
Din proiecţia relaţiei vectoriale pe verticală obţinem: $N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d$

$\frac{mv^2}{2} = Fd\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2d}{m}[F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu\cdot g]} \approx 4{,}57$m/s

b. $E_c = \frac{mv^2}{2} = Fd(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg \approx 20{,}95$ J.

c. Prin definiţie puterea medie este: $P_m = \frac{L_F}{\Delta t} = \frac{Fd\cos\alpha}{\Delta t}$ şi cum $d = v_m\Delta t \Rightarrow P_m = Fv_m\cos\alpha$. Deoarece sub acţiunea forţei F, corpul va avea o mişcare uniform accelerată, viteza medie se calculează prin media artimetică a valorilor de la capetele intervalului $v_m = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2} \Rightarrow P_m = \frac{Fv\cos\alpha}{2} \approx 29{,}69$W.

36.a. Din $L = Fd\cos\alpha \Rightarrow d = L/(F\cos\alpha)$=2 m



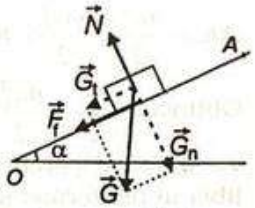
b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu Nd$. Proiectând forţele pe verticală:

$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d = -4$ J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + L_{Ff} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L + L_{Ff})}{m}}$ =4 m/s. Viteza medie $v_m = v/2$, astfel că puterea medie dezvoltată de forța F este $P_m = Fv_m \cos\alpha = \frac{Fv\cos\alpha}{2}$ =20 W. Obținem $P_m = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P_m}$ =1 s

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pemtru corp între marginea masei și sol, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow E_{Cf} = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow E_{Cf}$=36 J.

37.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

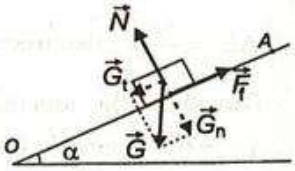


Cum $\Delta E_{c_{OA}} = E_{c_A} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2}$, unde v_0 este viteza cu care este lansat corpul de jos din O în sus spre A.

$L_G = -mgh = -mg\ell\sin\alpha$, $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$ obținem

$-\frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 14{,}14$ m/s.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. $L_G = mgh = mg\ell\sin\alpha$.

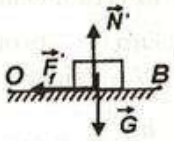


$L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha$.

Cum $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv^2}{2}$ obținem:

$\frac{mv^2}{2} = mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 10$ m/s.

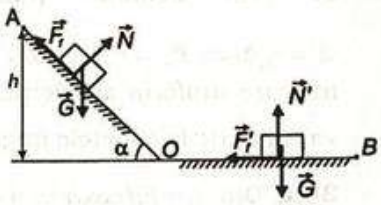
c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice în cazul mișcării corpului pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{OB}} = L_{F'_f} + L_{N'} + L_G$.



$\Delta E_{c_{OB}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv^2}{2}$; $L_{N'} = 0$; $L_G = 0$; $L_{F'_f} = -F'_f d = -\mu' N'\ell = -\mu' mgd \Rightarrow$

$-\frac{mv^2}{2} = -\mu' mgd \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu' g} = \frac{\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu'} = 50$ m.

38.a. Aplicăm între punctele A și B teorema de variație a energiei cinetice:



$\Delta E_{c_{AB}} = L = L_G + L_{F_f} + L_N$.

Deoarece corpul pornește din repaus și în final se oprește $\Delta E_{c_{AB}} = 0$. Deoarece greutatea este o forță motoare $L_G = mgh$, L_N=0 și

$L_{F_f} = -F_f AO - F'_f OB = -\mu N\frac{h}{\sin\alpha} - \mu N'\left(d - \frac{h}{tg\,\alpha}\right)$, deoarece $AO = \frac{h}{\sin\alpha}$ și cum

$OB = d - \frac{h}{tg\,\alpha} \Rightarrow L_{F_f} = -\mu mgh\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu mg\left(d - \frac{h}{tg\,\alpha}\right) = -\mu mgd$.

Obținem: $0 = mgh - \mu mgd \Rightarrow \mu = \frac{h}{d} = 0{,}2$.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} = \frac{mv^2}{2}$; $L_G = mgh$, $L_N=0$, $L_{F_f} = -\mu mghctg\alpha$

obținem $\frac{mv^2}{2} = mgh - mghctg\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)} \approx 6{,}32$ m/s

c. Puterea medie a forței de frecare la coborârea saniei pe pârtie este $P_m = F_f v_m \cos 180 = -\frac{\mu mgv\cos\alpha}{2} \approx -24{,}54$ W, deoarece $v_m = \frac{v}{2}$ și din $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obținem $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \approx 0{,}97$

39.a. Studiem urcarea cărămizii pe scândură. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar pe direcția de mișcare $-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ (1)

Studiem coborârea cărămizii pe scândură. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mișcare $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (2).

Deoarece $|a_u| = 2a_c \Rightarrow g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \mu = tg\alpha/3 \approx 0{,}33$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea cărămizii pe scândură: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$

$L_G = -mgh = -mgs_{op}\sin\alpha$ și $L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mgs_{op}\cos\alpha$.

Obținem: $-\frac{mv_o^2}{2} = -mgs_{op}\sin\alpha - \mu mgs_{op}\cos\alpha \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 0{,}85$ m

c. Randamentul scândurii înclinate este $\eta = \frac{1}{1+\mu ctg\alpha}$ =75%

40.a. Din definiția lucrului mecanic al forței de frecare obținem $L_{Ff,AB} = -F_f AB = -\mu NAB = -\mu mg\cos\alpha\frac{h_1}{\sin\alpha} = -\mu mgh_1 ctg\alpha = -2$ J

b. Aplicăm între punctele A și B teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh_1$ iar $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$

obținem: $\frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 - \mu mgh_1 ctg\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_1(1-\mu ctg\alpha)}$ =6 m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și baza planului: $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$.

Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$ $L_N = 0$, $L_G = mgh_2$, $L_{Ff} = -\mu mgh_2 ctg\alpha$ obținem:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_2 - \mu mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow h_2 = \frac{v^2}{2g(1-\mu ctg\alpha)} = 3{,}125 \text{ m}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul C de pe planul orizontal unde se oprește corpul: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_N = 0$, $L_{G,AC} = L_{G1} + L_{G2} = mgh_2$ și

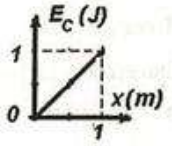
$L_{Ffiotal} = L_{Ff} + L'_{Ff} = -\mu mgh_2 ctg\alpha - \mu_1 mgd$ obținem:

$0 = mgh_2 - \mu mgh_2 ctg\alpha - \mu_1 mgd \Rightarrow d = \frac{h_2(1-\mu ctg\alpha)}{\mu_1} = 11{,}25$ m, astfel că distanța totală parcursă de corp este $D = d + \frac{h_2}{\sin\alpha} \approx 15{,}65$ m

41.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și un punct aflat pe plan la coordonata x, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_c = E_c$, $L_N = 0$, $L_G = mgh = mgx\sin\alpha$ și $L_{F_f} = -F_f x = -\mu Nx = -\mu mgx\cos\alpha$ obținem $E_c = mgx\sin\alpha - \mu mgx\cos\alpha = mgx(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

b. Pe baza tabelului de valori reprezentăm grafic dependența energiei cinetice E_c de coordonata x la care se găsește corpul.

x(m)	0	0,25	0,5	0,75	1
E_C(J)	0	0,25	0,5	0,75	1



c. Alegem o valoare a lui x=1 m și valoarea corespunzătoare a energiei cinetice E_C=1 J. Astfel $\mu = tg\alpha - \frac{E_C}{mgx\cos\alpha} \approx 0{,}346$

42.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare este 0, deoarece greutatea este o forță conservativă astfel că lucrul ei mecanic pe o traiectorie închisă este nul.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$; $L_G = -mgh$, unde h reprezintă înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat, $L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mgs_{op}\cos\alpha = -\mu mghctg\alpha$ cu $\sin\alpha = h/s_{op}$.

$$-\frac{mv_o^2}{2} = -mgh - \mu mghctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1+\mu ctg\alpha)} \Rightarrow E_p = \frac{mv_0^2}{2(1+\mu ctg\alpha)} = \frac{E_{co}}{1+\mu ctg\alpha} \Rightarrow$$

E_p=312,5 J, deoarece $ctg\alpha$=4

c. $L_{F_f} = -\mu mghctg\alpha = -\frac{\mu E_{co}}{\mu + tg\alpha} = -187{,}5$ J

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare O și punctul de coborâre O. $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{OO}} = E'_{co} - E_{co}$; $L_N = 0$; $L_G = 0$ și $L_{F_f} = -2\mu mghctg\alpha = -\frac{2\mu E_{co}}{\mu + tg\alpha}$, astfel că: $E'_{co} = E_{co}\frac{tg\alpha - \mu}{tg\alpha + \mu} = 125$ J.

43.a. Conform definiției energia mecanică a schiorului în vârful A al pantei este $E_{mA} = E_{pA} = mgh_{AB} = mg\ell\sin\alpha$ =42 kJ

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul de oprire C, aftel că $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{N,AC} + L_{Ff,AC}$.

Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_{N,AC} = 0$, $L_{G,AC} = mg\ell\sin\alpha$ și

$L_{Ff,AC} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = -\mu mg\ell\cos\alpha - \mu mgd = -\mu mg(\ell\cos\alpha + d)$ obținem:

$0 = mg\ell\sin\alpha - \mu mg(\ell\cos\alpha + d) \Rightarrow \mu = \dfrac{\ell\sin\alpha}{\ell\cos\alpha + d}$ =0,375, cu cosα=0,8

c. Din $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{N,AB} + L_{Ff,AB}$, cum $\Delta E_{c,AB} = \dfrac{mv_B^2}{2}$, $L_{G,AB} = mg\ell\sin\alpha$ și

$L_{Ff,AB} = -\mu mg\ell\cos\alpha$ obținem $v_B = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \approx 24{,}5$ m/s

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul C și punctul A, astfel că: $\Delta E_{c,CA} = L_{F,CA} + L_{G,CA} + L_{Ff,CA} + L_{N,CA}$.

Cum $\Delta E_{c,CA} = 0$, $L_{G,CA} = -mg\ell\sin\alpha$, $L_{N,CA} = 0$ și

$L_{Ff,CA} = L_{Ff,CB} + L_{Ff,BC} = -\mu mgd - \mu mg\ell\cos\alpha = -\mu mg(\ell\cos\alpha + d) = -mg\ell\sin\alpha$

obținem: $0 = L_{F,CA} - 2mg\ell\sin\alpha$. Puterea dezvoltată de motorul teleschiului este

$P = \dfrac{L_F}{\Delta t} = \dfrac{2mg\ell\sin\alpha}{\Delta t}$ =350 W

44.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare O și punctul A, astfel că $\Delta E_{c_{OA}} = L_G \Rightarrow E_{cA} = mg(H-h)$=160 J.

b. După ciocnirea cu planul energia cinetică a corpului este $E'_{cA} = E_{cA}(1-f)$, astfel energia mecanică totală a corpului imediat după ciocnirea cu planul este $E'_{mA} = E'_{cA} + E_{pA} = mg(H-h)(1-f) + mgh$=80 J.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B, astfel că $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_c'$, L_N=0, $L_G = mgh$ și $L_{Ff} = -F_f\ell$ obținem $E_{cB} = mg(H-h)(1-f) + mgh - F_f\ell$=64 J$\Rightarrow$ $v = \sqrt{2E_{cB}/m}$ =8 m/s.

d. Din $F_f = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \mu = \dfrac{F_f}{mg\cos\alpha} \approx 0{,}23$, deoarece $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell}$=0,5$\Rightarrow \alpha$=30°

45.a. $L_{fAB} = F_f d\cos 180 = -\mu_1 Nd = -\mu_1 mgd$ =−125 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum L_G=0; L_N=0; $L_{fAB} = -\mu_1 mgd$ și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA}$ obținem $E_{cB} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \mu_1 mgd$ =125 J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = -E_{cB}$; $L_G = -mgh$; L_N=0 și $L_{Ff} = -F_f BC = -\mu_2 mgBC\cos\alpha = -\mu_2 mghctg\alpha$ obținem: $E_{cB} = mgh + \mu_2 mghctg\alpha$

$\Rightarrow h = \dfrac{E_{cB}}{mg(1+\mu_2 ctg\alpha)}$ =1,25 m

d. Randamentul planului înclinat este $\eta = \dfrac{1}{1+\mu_2 ctg\alpha}$ =50%.

46.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = 0$; $L_G = mgh$ și L_N=0. Astfel $L_{Ff} = -mgh = -mg\ell \sin\alpha = -360$ J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_G = mgh$; L_N=0; $L_{Ff} = -F_f \ell = -\mu mg\ell\cos\alpha$ și

$\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{8} = \dfrac{3mv_0^2}{8} \Rightarrow \dfrac{3mv_0^2}{8} = mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$

$\mu = tg\alpha - \dfrac{3v_0^2}{8g\ell\cos\alpha}$ =0,125, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ =0,8

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice între punctele A și B $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = \dfrac{mv_0^2}{8} - \dfrac{mv_0^2}{2} = -\dfrac{3mv_0^2}{8}$; L_G=0; L_N=0 și

$L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu mgAB$. Astfel $\dfrac{3mv_0^2}{8} = \mu mgAB \Rightarrow AB = \dfrac{3v_0^2}{8\mu g}$ =120 m

d. Considerăm că E_{pC}=0, astfel că variația energiei mecanice totale a corpului între punctele B și C este $\Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB}$, unde $E_{mC} = E_{cC} = \dfrac{mv_0^2}{2}$ și

$E_{mB} = E_{cC} + E_{pC} = \dfrac{mv_0^2}{8} + mgh \Rightarrow \Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB} = \dfrac{3mv_0^2}{8} - mg\ell\sin\alpha = -60$ J.

Calculăm lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea BC, $L_{FfBC} = -\mu mg\ell\cos\alpha = -60$ J. Observăm că $\Delta E_{mBC} = -L_{FfBC}$.

47.a. Lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din C în A este $L_{Ff} = F_f(CB+BA)\cos 180 = -2\mu mgCB\cos\alpha = -2\mu mghctg\alpha = -48$ J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și A $\Delta E_{cCA} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece L_N=0 și L_G=0, pentru că acest corp urcă până la aceeași înălțime și din $\Delta E_{cCA} = E_{cA} - E_{cC} = -E_{cC} = -\dfrac{mv_C^2}{2} \Rightarrow \dfrac{mv_C^2}{2} = 2\mu mghctg\alpha$

$\Rightarrow v_C = 2\sqrt{\mu ghctg\alpha} \approx 6{,}92$ m/s

c. Variația energiei mecanice a corpului între punctele A și D este $\Delta E_{mAD} = E_{mD} - E_{mA} = E_{cD} + E_{pD} - E_{pA} = \dfrac{mv_D^2}{2} + \dfrac{mgh}{4} - mgh$, deoarece E_{pB}=0

Aflăm viteza corpului în punctul D pe seama teoremei de variație a energiei cinetice între punctele A și D, astfel că: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Din

$L_G = mg(h_A - h_D) = \dfrac{3mgh}{4}$; L_N=0; $L_{Ff} = -F_f AD = -\mu mgAD\cos\alpha = -\dfrac{3\mu mghctg\alpha}{4}$ și

$\Delta E_{cAD} = E_{cD} = \frac{mv_D^2}{2}$ obținem $\frac{mv_D^2}{2} = \frac{3mgh}{4}(1-\mu ctg\alpha) \Rightarrow \Delta E_{mAD} = -\frac{3\mu mghctg\alpha}{4} = -18J$

48.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B de pe primul derdeluș $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_1}$ $\Rightarrow v_B = 12$ m/s

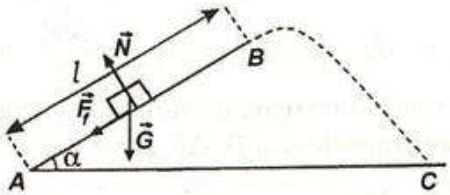
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B și punctul C de pe suprafață orizontală, astfel că $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_N=0$ și $L_G=0$, obținem $\frac{mv_c^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g\ell} = 11$ m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D de pe al doilea derdeluș $\Delta E_{cCD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_G = -mgh_2$, $L_N=0$, $L_{Ff} = -F_f CD = -\mu' mgCD\cos\alpha = -\mu' mgh_2 ctg\alpha$ și $\Delta E_{cCD} = -E_{cC} = -\frac{mv_C^2}{2}$, astfel că $\frac{mv_C^2}{2} = mgh_2 + \mu' mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow \mu' = \left(\frac{v_C^2}{2gh_2} - 1\right) tg\alpha = 0{,}21$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B și același punct când corpul se întoarce. Astfel $\Delta E_{cBB} = L_G + L_{F_f} + L_N$, unde $L_G=0$, $L_N=0$ și $L_{Ff} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg\alpha$, iar $\Delta E_{cBB} = \frac{mv'^2_B}{2} - \frac{mv_B^2}{2}$. Obținem:

$\frac{mv'^2_B}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow v'_B = \sqrt{v_B^2 - 4g(\mu\ell + \mu' h_2 ctg\alpha)} \approx 7{,}48$ m/s

49.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.



$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$,

$L_G = -mgh = -mg\ell\sin\alpha$; $L_N = 0$ și

$L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$

$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 8$ m/s.

b. $L_{F_f} = -\mu mg\ell\cos\alpha = -6$ J.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B unde corpul părăsește planul și punctul C unde corpul lovește solul: $\Delta E_{c_{BC}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh = mg\ell\sin\alpha$, deoarece numai greutatea efectuează lucru mecanic. Obținem: $v_C = \sqrt{v^2 + 2g\ell\sin\alpha} \approx 9{,}7$ m/s

d. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului între punctele A și C este $L_{G,AC} = -mgh_{max} + mgh_{max} = 0$.

50.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_N \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 4{,}47$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C de pe porțiunea orizontală: $\Delta E_{c_{BC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{BC}} = E_{c_C} - E_{c_B} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2}$, L_G=0, L_N=0 și $L_{Ff} = -F_f d = -\mu mgd$ obținem $\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow$

$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu gd} = \sqrt{2g(h - \mu d)} \approx 2{,}82$ m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D: $\Delta E_{c_{CD}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_{CD} \Rightarrow h_{CD} = \frac{v_C^2}{2g} = h - \mu d = 0{,}4$ m

d. Corpul se oprește pe porțiunea orizontală în punctul F. Aflăm distanța parcursă de corp pe planul orizontal, astfel că aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul F: $\Delta E_{c_{AF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.

Cum $\Delta E_{c_{AF}} = 0$, L_N=0, L_G=mgh și $L_{Ff} = -F_f d_t = -\mu mgd_t$ obținem: $0 = mgh - \mu mgd_t \Rightarrow d_t = h/\mu \approx 3{,}33$ m. Astfel porțiunea BC este parcursă integral o singură dată iar corpul se oprește în F, $CF \approx 1{,}33$ m $\Rightarrow BF \approx 0{,}67$ m

51.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{Mv_A^2}{2} = -MgH \Rightarrow v_A = \sqrt{2gH}$ =8 m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele A și C: $\Delta E_{c,AC} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_{Ff} = fL_G = -fMgh_C$, L_N=0, $L_G = -Mgh_C$ și $\Delta E_{c,AC} = -E_{cA} = -\frac{Mv_A^2}{2}$, obținem $h_c = \frac{v_A^2}{2g(1+f)} \approx 2{,}91$ m

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele A și D: $\Delta E_{cAD} = L_{F_f} + L_G + L_N \Rightarrow$

$$\frac{Mv_D^2}{2} - \frac{Mv_A^2}{2} = L_{Ff} - Mgh_D \Rightarrow L_{Ff} = M\left(gh_D + \frac{v_D^2 - v_A^2}{2}\right) = -360 \text{ J}$$

52. a. Din definiție $L_{G,AD} = mg(h - h_1)$=400 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul D: $\Delta E_{c,AD} = L_{G,AD} + L_{F_f,AD} + L_{N,AD}$. Cum $\Delta E_{c,AD} = E_{c,D} - E_{c,A} = 0$, $L_{N,AD} = 0$ obținem: $0 = mg(h - h_1) + L_{Ff,AD} \Rightarrow L_{Ff,AD} = -mg(h - h_1) = -400$ J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C, astfel că: $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_f,AC} + L_{N,AC}$. Cum $\Delta E_{c,AC} = E_{c,C} - E_{c,A} = -\frac{mv_A^2}{2}$, $L_{N,AC} = 0$, $L_{G,AC} = mg(h_C - h_A) = 0$ și $L_{F_f,AC} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = 2L_{Ff,AB}$ obținem: $-\frac{mv_A^2}{2} = 2L_{Ff,AB}$.

Aflăm lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea AB din teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea AB, astfel că:

$$\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh + L_{Ff,AB} \Rightarrow L_{Ff,AB} = \frac{mv_B^2}{2} - mgh \approx -320\text{J},$$

astfel că $v_A = 2\sqrt{-\frac{L_{Ff,AB}}{m}}$ =4 m/s

d. Din definiție $P_m = \frac{L_{G,AB}}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t}$ =3,2 kW

53.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare A și punctul D: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_N$. Deoarece L_N=0, $L_G = mg(h_A - h_D)$ și $\Delta E_{cAD} = E_{cD} - E_{cA} = -\frac{mv_A^2}{2}$ obținem $v_A = \sqrt{2g(h_D - h_A)}$. Cum arcul AB este egal cu 1/3 dintr-un cerc, atunci unghiul AOB=120°, astfel că $h_A = R(1-\cos 60) = R/2$ =2 m. Obținem $v_A \approx 4{,}47$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele A și B: $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Deoarece L_G=0, L_N=0 și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_A^2}{2}$ obținem $-\frac{(M+m)v_A^2}{2} = L_{Ff} \Rightarrow v_A = \sqrt{-\frac{2L_{Ff}}{M+m}}$ =8m/s

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele A și C: $\Delta E_{cAC} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum $L_G = (M+m)g(h-h')$, L_N=0 și

$$\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{(M+m)v_0^2}{2} = (M+m)g(h-h') + L_{Ff} \Rightarrow$$

$$L_{Ff} = (M+m)\left[-\frac{v_0^2}{2} + g(h'-h)\right] = -2025 \text{ J}$$

54.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele M și C: $\Delta E_{c_{MC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_G = mgh_1$, L_N=0, $L_{Ff} = -\mu mgd$ și $\Delta E_{c_{MC}} = E_{cC} = \frac{mv_C^2}{2}$ obținem $\frac{mv_C^2}{2} = mgh_1 - \mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h_1 - \mu d)}$ =5 m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele C și N: $\Delta E_{c_{CN}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_C^2}{2g} = h_1 - \mu d$ =1,25 m

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare M și punctul de oprire F: $\Delta E_{c_{MF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum L_N=0, $L_G = mgh_1$ și $\Delta E_{c_{MF}} = 0$ obținem $0 = mgh_1 + L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -mgh_1 = -1715$ J

d. Din $L_{Ff} = -\mu mgD$ calculăm distanța totală parcursă de sportiv pe porțiunea orizontală, astfel că $D = -\frac{L_{Ff}}{\mu mg} = \frac{h_1}{\mu}$ =24,5 m. Astfel corpul parcurge porțiunea BC de $N = \left[\frac{D}{d}\right]$ =2 ori, astfel că sportivul se oprește definitiv la 0,5 m de punctul B.

55. a. Energia mecanică a corpului în momentul în care este lăsat liber este $E_{mi} = E_{Ci} + E_{pi} = E_{pi} = m_2 g\ell$ =0,64 J

b. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și punctul A, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell}$ =4 m/s

c. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctele *A* și *C*, astfel că $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_f,AC} + L_{N,AC}$.

$\Delta E_{c,AC} = E_{c,C} - E_{c,A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$, $L_{N,AC} = 0$, $L_{G,AC} = 0$ și $L_{Ff,AC} = -\mu_1 mgd_1$,

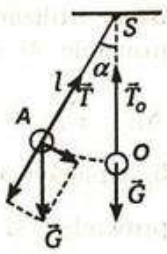
obținem $\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -\mu_1 mgd_1 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_1 gd_1} \Rightarrow v_C \approx 3{,}16$ m/s

d. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctele *C* și *E*, astfel că $\Delta E_{c,CE} = L_{G,CE} + L_{F_f,CE} + L_{N,CE}$, iar $\Delta E_{c,CE} = E_{c,E} - E_{c,C} = 0 - \frac{mv_C^2}{2}$, $L_{N,CE} = 0$, $L_{G,CE} = 0$ și $L_{Ff,CE} = -\mu_m mgCE$. Deoarece coeficientul de frecare crește liniar atunci coeficientul de frecare mediu este $\mu_m = \frac{\mu + \mu'}{2}$, unde μ' este coeficientul de frecare după parcugerea distanței *CE*.

Cum $\mu = ax$, iar când $x = d_2 \Rightarrow \mu_2 = ad_2$ obținem constanta $a = \frac{\mu_2}{d_2}$, astfel că

$\mu' = \frac{\mu_2 CE}{d_2} \Rightarrow \mu_m = \frac{\mu_2 CE}{2d_2}$. Obținem $-\frac{mv_C^2}{2} = -\frac{\mu_2 mgCE^2}{2d_2} \Rightarrow CE = v_C\sqrt{\frac{d_2}{\mu_2 g}}$ =2,5 m.

56.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare *A* și poziția verticală *O*: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_T$. Dar:



$\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = mgh = mg\ell(1-\cos\alpha)$ și $L_T = 0$, deoarece tensiunea este în permanență perpendiculară pe traiectorie. Obținem: $\frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \Rightarrow$

v_0=2 m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul *A* și punctul *B* în care firul formează un unghi β=30° cu verticala, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_T$.

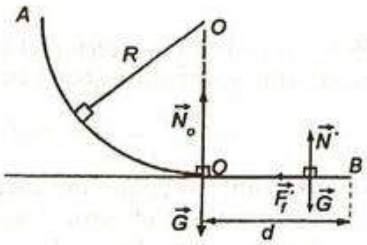
Cum $L_G = mg(h_A - h_B) = mg[\ell(1-\cos\alpha) - \ell(1-\cos\beta)] = mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha)$, L_T=0 și $E_{cAB} = E_{cB}$ obținem $E_{cB} = mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha)$=0,292 J

c.* Deoarece corpul are o traiectorie circulară, impunem condiția ca în punctul inferior al traiectoriei, rezultanta forțelor să joace un rol de forță centripetă:

$\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{\ell}\right) \Rightarrow T_0 = mg(3 - 2\cos\alpha) \Rightarrow$

T_0=4 N $\Rightarrow$ Dacă tensiunea este cel mult egală cu 4 N, firul nu se rupe când corpul trece prin poziția verticală.

57.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea de jgheab:



$\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$.

$\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$; $L_G = mgR$, iar $L_N = 0$.

$\frac{mv_0^2}{2} = mgR + L_{F_f} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgR + L_{F_f}\right)} = 2\text{m/s}$

b.* Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în poziția verticală O și impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o traiectorie circulară. Vectorial: $\vec{N}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.

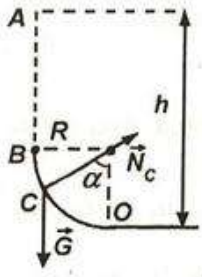
Scalar: $N_0 - mg = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow N_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{R}\right) \approx 2{,}33$ N.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la mișcarea pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{OB}} = L_{N'} + L_G + L_{F_f'}$. Deoarece $L_{F_f'} = -F_f' d = -\mu N' d = -\mu mgd$, $L_{N'} = 0$; $L_G = 0$

și $\Delta E_{c_{OB}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 2$ m.

58.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul în care corpul ajunge pe jgheab B: $\Delta E_{c_{AB}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mg(h - R) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h-R)}$

$\Rightarrow v_B \approx 4{,}47$m/s.



b.* Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca pe direcția formată de corp și centrul jgheabului, rezultanta forțelor pe această direcție să joace rol de forță centripetă. Scalar se obține:

$N_C - mg\cos\alpha = \frac{mv_C^2}{R} \Rightarrow N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} + g\cos\alpha\right)$.

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C:

$\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2}$; $L_G = mg(h - R + R\cos\alpha)$; $L_N = 0$

obținem: $\frac{mv_C^2}{2} = mg(h - R + R\cos\alpha) \Rightarrow v_C^2 = 2g(h - R + R\cos\alpha) \Rightarrow$

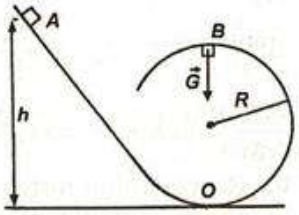
$N_C = mg\left(\frac{2h}{R} + 3\cos\alpha - 2\right) = 25$ N.

Valoarea maximă a forței de apăsare pe jgheab se obține când corpul se află în poziția O, astfel că α=0. Obținem $N_O = mg\left(\frac{2h}{R} - 1\right) = 55$ N

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul O, unde corpul se oprește, deoarece pe jgheab mișcarea se face cu frecare: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$. Dar $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = 0$; $L_G = mgh$ și $L_N = 0$

obținem: $0 = mgh + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = -mgh = -15$ J, deoarece forța de frecare este o forță cu caracter rezistiv.

59.a. În punctul superior al buclei, corpul nu mai apasă asupra acesteia, astfel că greutatea corpului joacă rol de forță centripetă. Astfel obținem:



$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B = \sqrt{gR} \approx 2{,}236 \text{ m/s}$$

b.* Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul cel mai de sus al buclei circulare B: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G$. Cum

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2}$; $L_N = 0$ și $L_G = mg(h-2R)$

obținem: $\frac{mgR}{2} = mg(h-2R) \Rightarrow h = \frac{5R}{2} = 1{,}25$ m.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și punctul superior al buclei circulare: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mgR}{2}$, deoarece în punctul superior al buclei circulare corpul nu apasă asupra jgheabului și $v_B^2 = gR$.

Cum $L_N = 0$ și $L_G = mg(H-2R)$ obținem:

$$\frac{mgR}{2} = mg(H-2R) + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = mg\left(\frac{5R}{2} - H\right) = -2{,}5 \text{ J}.$$

60.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt$

Cum $v = nv_0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}(n^2-1) = Pt \Rightarrow t = \frac{mv_0^2(n^2-1)}{2P} = 150$ s.

b. $P = Fv = Fnv_0 \Rightarrow F = \frac{P}{nv_0} = 100$ N.

c. Cum $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$, adică forța depinde invers proporțional de viteză, astfel că pentru $v_0 = 10$ m/s $\Rightarrow F_0 = 400$ N.

Reprezentarea grafică a forței în funcție de viteză este fig 1

Din teorema de variație a energiei cinetice: $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Pt}{m}}$.

Cum $t = 0 \Rightarrow v = v_0 = 10$ m/s, atunci reprezentarea grafică a vitezei în funcție de timp este fig 2.

Fig. 1

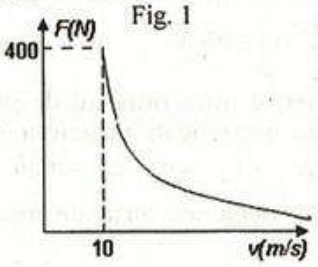
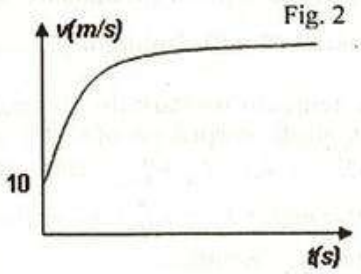


Fig. 2



61.a. Aplicăm pentru sistemul de corpuri teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_{G_1} + L_{G_2} + L_{T_1} + L_{T_2}$. Lucrurile mecanice ale celor două tensiuni se compensează întrucât tensiunea care acționează asupra corpului m_1 este motoare, deoarece corpul 1 se ridică, iar tensiunea care acționează asupra corpului m_2 este rezistivă, deoarece corpul 2 coboară.

Astfel: $L_{T_1} + L_{T_2} = -Th + Th = 0 \Rightarrow \Delta E_c = L_{G_1} + L_{G_2} \Rightarrow E_c = L_{G_1} + L_{G_2}$.

Deoarece $L_{G_1} = -m_1 gh_1$ și $L_{G_2} = m_2 gh_1$ obținem: $E_c = (m_2 - m_1)gh_1$=0,8 J

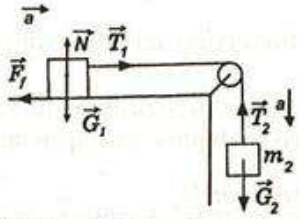
b. $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_2 - m_1)gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2}}$

$\Rightarrow v$=2 m/s.

c. Când corpul cu masa m_2 ajunge pe sol, corpul cu masa m_1 se află la înălțimea $2h$=2 m față de sol. Cum corpul 1 are viteza orientată în sus, iar firul se slăbește, aplicând teorema de variație a energiei cinetice, aflăm înălțimea pe care mai urcă corpul 1, ținând cont că asupra acestuia acționează numai greutatea. Din $\Delta E_c = L_G \Rightarrow E_{c_f} - E_{c_i} = -m_1 gh_1 \Rightarrow 0 - \frac{m_1 v^2}{2} = -m_1 gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v^2}{2g} = 0{,}2$ m

Înălțimea maximă măsurată față de sol la care se oprește corpul 1 este: $h_{max} = 2h + h_1 = 2{,}2$ m.

62.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii până în momentul ruperii firului, astfel că: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$.



$L_{T1} + L_{T2} = Td - Td = 0$, deoarece tensiunea care acționează asupra corpului m_1 este forță motoare, iar tensiunea care acționează asupra corpului m_2 este forță rezistivă. Cum L_{G1}=0, L_N=0, $L_{Ff} = -\mu m_1 gd$ și $L_{G_2} = m_2 gd$ obținem:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_2 gd - \mu m_1 gd \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gd(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1{,}58 \text{ m/s}$$

b. După ce firul se rupe corpul m_1 are o mișcare uniform încetinită, astfel că aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru acest corp obținem:

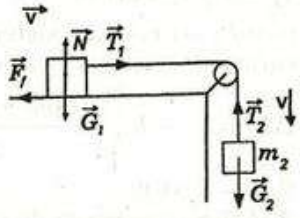
$$\Delta E_{c1} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_N + L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_1 v^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{d(m_2 - \mu m_1)}{\mu(m_1 + m_2)} = 0{,}625 \text{ m}$$

Distanța parcursă până la oprire de corpul m_1 măsurată din momentul pornirii este $d_f = d + s_{op}$=1,125 m

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_2 din momentul ruperii firului până în momentul ajungerii acestuia la sol, astfel că:

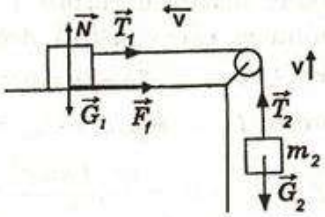
$$\Delta E_{c2} = L_{total2} = L_{G_2} \Rightarrow \frac{m_2 v'^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} = m_2 gh \Rightarrow$$

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 5{,}15 \text{ m/s}$$



63.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când m_2 coboară pe distanţa h_1, iar m_1 se deplasează spre dreapta: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$. Din

$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $L_{G_1} = 0$, $L_N = 0$,



$L_{T_2} + L_{T_1} = 0$, $L_{G_2} = m_2gh_1$ şi $L_{Ff} = -\mu m_1gh_1$.

Obţinem: $-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_2gh_1 - \mu m_1gh_1$ (1)

Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când corpul m_1 se deplasează spre stânga pe distanţa h_2: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f}$.

Deoarece $\Delta E_c = -\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $L_{G_2} = -m_2gh_2$; $L_N = 0$; $L_{G_1} = 0$; $L'_{F_f} = -\mu m_1gh_2$,

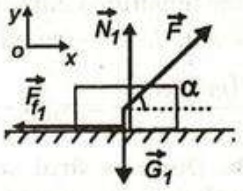
iar $L_{T_1} + L_{T_2} = 0$ obţinem: $-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = -m_2gh_2 - \mu m_1gh_2$ (2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $m_2gh_1 - \mu m_1gh_1 = -m_2gh_2 - \mu m_1gh_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_2(h_1+h_2)}{m_1(h_1-h_2)} = 0{,}3.$

b. Raportul lucrurilor mecanice ale forţelor de frecare este $\frac{L_{Ff}}{L'_{Ff}} = \frac{h_1}{h_2} = 5$

c. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri care se deplasează spre stânga: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f} \Rightarrow$

$-\frac{(m_1+m_2)v_0^2}{2} = -m_2gs_{op} - \mu m_1gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{(m_1+m_2)v_0^2}{2g(m_2+\mu m_1)} = 3$ m



64.a. Din formula lucrului mecanic obţinem: $L_F = Fd\cos\alpha \Rightarrow F = \frac{L_F}{d\cos\alpha} = 20$ N

b. Lucrul mecanic total al forţelor de frecare este $L_{Ff} = L_{Ff1} + L_{Ff2}$, cu $L_{Ff2} = -\mu N_2 d = -\mu m_2 gd$.

Proiectând forţele care acţionează asupra corpului m_1 pe verticală: $N_1 - m_1g + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow L_{Ff1} = -\mu N_1 d = -\mu(m_1g - F\sin\alpha)d$.

Obţinem: $L_{Ff} = -\mu[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]d \Rightarrow \mu = -\frac{L_{Ff}}{[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]d} = 0{,}1$

c. Puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa m_2 este $P_m = F_{f2}v_m\cos 180 = -\mu \cdot m_2gv_m$, unde v_m este viteza medie a sistemului şi este $v_m = v/2$ cu v viteza sistemului după parcurgerea distanţei d. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$\Delta E_c = L_F + L_{Ff} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = L_F + L_{Ff} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L_F + L_{Ff})}{m_1+m_2}} \approx 11{,}24$ m/s $\Rightarrow$

$P_m \approx -2{,}81$ W

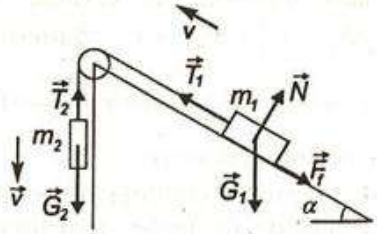
d. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$$\Delta E_c = L_F + L_{Ff} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v'^2}{2} = FD\cos\alpha - \mu[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]D \Rightarrow$$

$$v' = \sqrt{\frac{2D[F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-\mu(m_1+m_2)g]}{m_1+m_2}} \approx 15{,}9 \text{ m/s}$$

65.a. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri, astfel că: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G2} + L_{F_f} + L_N$, unde

$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $L_{G2} = m_2gh$,



deoarece corpul m_2 coboară, iar greutatea lui este o forţă motoare; $L_{T_1} + L_{T2} = 0$, deoarece $T_1 = T_2 = T$. T_1 este forţă motoare, T_2 este o forţă rezistivă şi ambele îşi deplasează punctele de aplicaţie pe aceeaşi distanţă h, $L_N = 0$, $L_{G_1} = -m_1gh\sin\alpha$ şi $L_{F_f} = -\mu m_1gh\cos\alpha$. Obţinem: $\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_2gh - m_1gh\sin\alpha - \mu m_1gh\cos\alpha \Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha)}{m_1+m_2}} \approx 2{,}31 \text{ m/s}.$$

b. Aflăm distanţa parcursă de corpul m_1, aflat pe planul înclinat, până la oprire, după ce corpul m_2 ajunge pe sol şi tensiunea nu mai acţionează. Corpul se mişcă pe distanţa d. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{G_1} + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{m_1v^2}{2} = -m_1gd\sin\alpha - \mu m_1gd\cos\alpha \Rightarrow d = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$$

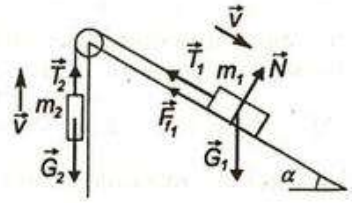
$\Rightarrow d$=40 cm. Distanţa totală parcursă până la oprire este $D=d+h$=1 m

c. $L_{F_f} = -F_f(h+d) = -\mu m_1g(h+d)\cos\alpha = -3{,}33$ J

66.a. Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{F_f} = -\mu m_1g\ell\cos\alpha = -8$J

b. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_{G2} = -m_2g\ell = -40$ J.

c. Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G2} + L_{F_f} + L_N$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, T_2 este o forţă motoare iar T_1 o forţă rezistivă şi ambele îşi deplasează punctele de aplicaţie pe aceeaşi distanţă h, astfel că $L_{T_1} + L_{T2} = 0$, $L_N = 0$, $L_{G_1} = m_1g\ell\sin\alpha$. Obţinem:



$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_1g\ell\sin\alpha - \mu m_1g\ell\cos\alpha - m_2g\ell \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\ell(m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha - m_2)}{m_1+m_2}} \approx 2{,}658 \text{ m/s}.$$

67. a. Variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului ladă-Pământ este $\Delta E_p = -L_G = mgh$=100 J.

b. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică este $L_{F_{el}} = -\frac{kh^2}{2} = -25$ J.

c. Deoarece lada este ridicată cu viteză constantă atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru sistemul ladă-resort $\Delta E_c = L_G + L_{Fel} + L_F \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada este $L_F = -L_G - L_{Fel} = mgh + \frac{kh^2}{2}$ =125 J, deoarece și greutatea lăzii și forța elastică sunt forțe rezistive

d. Impunem condiția de echilibru omului: $\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Deoarece omul nu se desprinde de podea înseamnă că $N \geq 0$. Considerăm cazul cel mai defavorabil când N=0, astfel că forța cu care trage omul de fir este F=Mg. Din condiția de echilibru impusă lăzii $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G}' = 0$ obținem $F = kx' + mg \Rightarrow x' = \frac{(M-m)g}{k}$ =3m, practic este imposibil să deformăm resortul atât pentru ca omul să se ridice de pe podea

68. a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B aflat la baza planului înclinat. $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = E_{cB}$, $L_G = mgh = mgd\sin\alpha$ și L_N=0 obținem $E_{cB} = mgd\sin\alpha$ =50 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între B aflat la baza planului înclinat și punctul C imediat înainte ca obiectul să atingă resortul, astfel

$\Delta E_{cBC} = L_G + L_N + L_{Ff} \Rightarrow E_{cC} - E_{cB} = -\mu mg\ell \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - mgd\sin\alpha = -\mu mg\ell \Rightarrow$

$v_C = \sqrt{2g(d\sin\alpha - \mu\ell)} \approx 7{,}07$ m/s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D în care corpul se oprește: $\Delta E_{c_{CD}} = L_G + L_N + L_{Fel} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = v\sqrt{\frac{m}{k}}$ =10 cm.

69.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru a afla viteza cu care este lansat corpul prin destinderea resortului:

$\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v = x\sqrt{\frac{k}{m}} = 10$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp imediat după lansare în punctul A și până când ajunge la înălțimea maximă în punctul B:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv^2}{2}$, $L_N = 0$, $L_G = -mgh$ și lucrul mecanic total al forței de frecare este $L_{Ff} = L_{Ff_{AO}} + L_{Ff_{OC}} \Rightarrow$

$L_{F_f} = -\mu mg\ell - \mu mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mg\ell - \mu mghctg\alpha$ obținem:

$\frac{mv^2}{2} = -mgh - \mu mg\ell - \mu mghctg\,\alpha \Rightarrow h = \frac{v^2 - 2\mu g\ell}{2g(1+\mu\cdot ctg\,\alpha)} \approx 1{,}57$ m

c. Lucrul mecanic total al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mg(\ell + hctg\alpha) = -3{,}43$J

70.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare al corpului A și punctul de la baza planului B, astfel că: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$. Cum

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_G = mgh$, $L_{F_f} = -\mu mg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha = -\mu mgh \cdot ctg\,\alpha$, și $L_N = 0$

obținem $\frac{mv_B^2}{2} = mgh - \mu mghctg\,\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)} \approx 4{,}47$ m/s

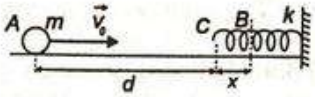
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A al corpului și punctul C în care comprimarea resortului este maximă și corpul se oprește: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}}$. Cum $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = 0$, $L_N = 0$; $L_G = mgh$,

$L_{F_f} = -\mu mg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha = -\mu mghctg\,\alpha$ și $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$ obținem:

$0 = mgh - \mu mghctg\,\alpha - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}(1-\mu ctg\,\alpha)} = 10$ cm

c. Lucrul mecanic al forței elastice este $L_{Fel} = -\frac{kx^2}{2} = -2$ J

71.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul inițial A când vagonul se desprinde de tren și punctul B când resortul este comprimat la maxim și vagonul se oprește: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}}$.



Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ și lucrurile mecanice sunt $L_G = 0$ și $L_N = 0$,

$L_{F_f} = -\mu mg(d+x) = -\mu mgs_{op}$ unde $s_{op} = d + x$ și $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$, obținem:

$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs_{op} - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv_0^2 - kx^2}{2\mu mg} = 60$ m.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de desprindere A și punctul C imediat înaintea ciocnirii resortului, astfel că: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

Dearece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -\mu mgd$ obținem

$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \approx 2$m/s, deoarece: $d = s_{op} - x = 59{,}9$ m.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}} \Rightarrow \frac{mv'^2_C}{2} = -\mu mgx + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v'_C = \sqrt{\frac{kx^2 - 2\mu mgx}{m}} \approx 1{,}95$m/s

72.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A în care resortul este comprimat și punctul B unde comprimarea dispare, astfel că

$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_{el}}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{F_{el}} = \frac{kx^2}{2}$ obținem:

$$\frac{mv_B^2}{2}=\frac{kx^2}{2}\Rightarrow v_B=x\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 1{,}41\ \text{m/s}$$

b. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B în care resortul este decomprimat și punctul C unde se oprește corpul pe suprafața sferică, astfel că $\Delta E_{cBC}=L_N+L_G$. Cum $\Delta E_{cBC}=-\frac{mv_B^2}{2}$, $L_N=0$ și $L_G=-mgh\Rightarrow$

$$-\frac{mv_B^2}{2}=-mgh\Rightarrow h=\frac{v_B^2}{2g}=\frac{kx^2}{2mg}=10\ \text{cm}.$$

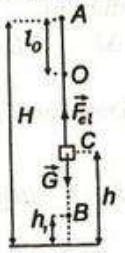
Dar $h=R(1-\cos\alpha)\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{h}{R}=\frac{1}{2}$. Obținem $\alpha=60^0$.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și D unde se va opri corpul: $\Delta E_{c_{AD}}=L_N+L_G+L_{F_f}+L_{F_{el}}$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AD}}=0$, $L_N=0$, $L_G=-mgh$ și $L_{Ff}=-\mu mgx$ și $L_{F_{el}}=\frac{kx^2}{2}$ obținem:

$$0=\frac{kx^2}{2}-\mu mgx-mgh\Rightarrow\mu=\frac{kx^2-2mgh}{2mgx}=0{,}25$$

73.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B: $\Delta E_{c_{AB}}=L_G+L_{F_{el}}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}}=E_{c_B}-E_{c_A}=0$ iar lucrurile mecanice ale forțelor sunt $L_G=mg(H-h_1)$ și



$L_{F_{el}}=-\frac{k\Delta\ell^2}{2}=-\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}$ obținem:

$0=mg(H-h_1)-\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}\Rightarrow mg(H-h_1)=\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}$ (1), unde cu ℓ_0 am notat lungimea nealungită a corzii elastice.

Impunem condiția de echilibru corpului $\vec{F}_{el}+\vec{G}=0\Rightarrow k(H-h-\ell_0)=mg$ (2)

Din (1) și (2) obținem: $2(H-h_1)(H-h-\ell_0)=(H-\ell_0-h_1)^2$. Înlocuind valorile obținem: $56(20-\ell_0)=(28-\ell_0)^2$. Rezolvând obținem: $\ell_0\approx 18{,}33$ m

b. Sportivul atinge viteza maximă atât timp cât cade sub acțiunea greutății până ce coarda elastică începe să se alungească, iar forța elastică frânează sportivul. Astfel aplicând teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O obținem $\Delta E_{c_{AO}}=L_G\Rightarrow\frac{mv_O^2}{2}=mg\ell_0\Rightarrow v_O=\sqrt{2g\ell_0}\approx 19{,}15$ m/s

c. Din $k(H-h-\ell_0)=mg\Rightarrow k=\frac{mg}{H-h-\ell_0}\approx 35{,}928$ kN/m

74.a. Din condiția de echilibru impusă corpului: $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{F}=0$, scalar obținem $F_{el}=F+mg=40$ N

b. Comprimarea resortului este $\Delta\ell=F_{el}/k=8$ cm, astfel că lungimea resortului este $\ell=\ell_0-\Delta\ell=92$ cm

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece greutatea este forță rezistivă lucrul ei mecanic este $L_G = mgh$ și forța elastică este o forță motoare $L_{F_{el}} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow h = \frac{k\Delta\ell^2}{2mg}$ =16 cm. Înălțimea maximă față de sol la care va urca corpul dacă acțiunea forței F încetează este $h_{sol}=\ell+h$=108 cm

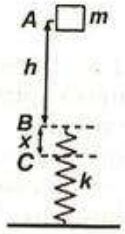
75.a. Din condiția de echilibru impusă corpului $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow kx = mg$ obținem constanta elastică a resortului $k=mg/x$=100 N/m

b. Din condiția de echilibru impusă corpului după ce resortul se apasă $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$ obținem $F + mg = kx' = 2kx \Rightarrow F = mg$ =2 N

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A după încetarea acțiunii forței F și punctul B de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_{el}} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{kx'^2}{2} \Rightarrow h = \frac{kx'^2}{2mg} = \frac{2kx^2}{mg} = 2x = 4$ cm.

76.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B în care corpul lovește resortul, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 2{,}83$ m/s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul C unde comprimarea resortului x este maximă. Obținem: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece corpul pornește din repaus și în ajunge în final în repaus $\Delta E_{c,AB} = E_{c_B} - E_{c_A} = 0$ iar lucrurile mecanice sunt $L_G = mg(h+x)$, deoarece greutatea ajută la mișcare și $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$, deoarece forța elastică se opune mișcării, obținem:



$$0 = mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0 \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} = 20 \text{ cm.}$$

c. Lucrul mecanic al forței elastice este $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2} = -0{,}6$ J

77.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice din momentul lăsării libere a corpului și până în momentul alungirii firului elastic. Astfel $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB}$.

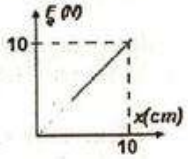
Cum $\Delta E_{c,AB} = E_{c,B} - E_{c,A} = \frac{mv_B^2}{2}$ și $L_{G,AB} = mg\ell_0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell_0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2g\ell_0}$. Cum $g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_B}{g} = \sqrt{\frac{2\ell_0}{g}} \approx 0{,}28$ s

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice din momentul lăsării libere a corpului din punctul A și până în momentul în care corpul se oprește. Astfel

$\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{Fe,AC}$. Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_{G,AC} = mg(\ell_0 + x)$ şi

$$L_{Fe,AC} = -\frac{kx^2}{2} \Rightarrow 0 = mg(\ell_0 + x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmg\ell_0}}{k} = 10 \text{ cm}$$

c. Cum forţa elastică este $|F_{el}| = kx$, reprezentarea grafică a dependenţa modulului forţei elastice din fir de alungirea acestuia până când firul se alungeşte la maximum este redată grafic în figura alăturată. Când x=10 cm forţa elastică maximă este $F_{el,max}$=10 N.



78.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului este $L_G = -mgh = -20$ J.

b. Din $h=v_m t$ cu viteza medie $v_m=(v+v_0)/2$ şi cum $v=v_0-gt$ obţinem

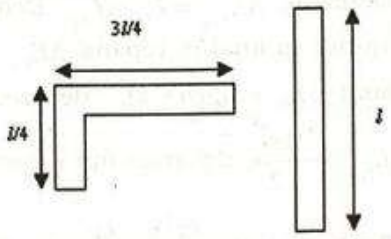
$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 0{,}4 \text{ s}$$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul A şi punctul C în care corpul se opreşte. Astfel: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece $L_G = -mg(h+x)$,

$L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$ şi $\Delta E_{c_{AC}} = -E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ obţinem: $-\frac{mv_0^2}{2} = -mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow$

$$x = \frac{-mg + \sqrt{m^2g^2 + mk(v_0^2 - 2gh)}}{k} \approx 16{,}8 \text{ cm}$$

3.4. Conservarea energiei mecanice



1.a. Deoarece nu există frecări între lanţ şi masă putem aplica legea de conservare a energiei mecanice. Alegem valoarea zero pentru energia potenţială la nivelul mesei. m este masa întregului lanţ. Iniţial porţiunea de lanţ cu lungime $\ell/4$ care atârnă poate fi considerată un punct material cu masa $m/4$ şi cu întreaga masă concentrată în centrul de greutate, deci la $\ell/8$ de suprafaţa mesei. Energia potenţială iniţială a lanţului este $E_{p_i} = -\frac{m}{4}g\frac{\ell}{8} = -\frac{mg\ell}{32}$. Când lanţul alunecă de pe masă şi devine vertical, el are energia potenţială $E_{p_f} = -mg\frac{\ell}{2}$, deoarece centrul de greutate al lanţului în care considerăm concentrată întreaga masă a lanţului se află la distanţa $\ell/2$ faţă de masă. Energia cinetică a lanţului când acesta părăseşte masa este

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow -\frac{mg\ell}{32} = -\frac{mg\ell}{2} + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{15g\ell}}{4} = 3 \text{ m/s}.$$

b. Lucrul mecanic necesar urcării porţiunii de lanţ care atârnă se efectuează pentru a urca centrul de greutate al lanţului care atârnă la nivelul mesei, astfel că $L_{ef} = -\Delta E_{p,grav} = \frac{mg\ell}{32} = 0{,}6$ J

2.a. Deoarece asupra corpului se exercită numai forţa de greutate, care este forţă de tip conservativ pentru sistemul corp-Pământ, putem aplica legea de

conservare a energiei mecanice între punctele A şi B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$, unde $E_{c_A} = 0$, deoarece corpul porneşte din repaus. Alegem nivel de referinţă pentru energia potenţială punctul O, aflat pe sol, astfel că $E_{p_O} = 0$.

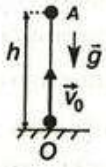
Cum $E_{c_B} = \frac{E_{p_B}}{4} \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{p_B}}{4} + E_{p_B} = \frac{5}{4}E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{5}{4}mgh' \Rightarrow h' = \frac{4h}{5} = 80$ m

b. Utilizăm legea conservării energiei între punctele A şi C, astfel că $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow mgh = \frac{mv_C^2}{2} + mgh_C \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h - h_C)}$ =40 m/s

c. Pe baza conservării energiei mecanice $E_{p_A} = E_{c_O} \Rightarrow E_{c_O} = mgh$ şi deoarece imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracţiune f din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire atunci $E'_{c_O} = fE_{c_O} = fmgh$ şi din legea conservării energiei obţinem înălţimea la care se ridică din nou corpul: $E'_{c_O} = E_{p_D} \Rightarrow fmgh = mgh_D \Rightarrow h_D = fh$ =40 m

3.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice în cazul aruncării mingii pe verticală de jos în sus. La sol mingea are doar energie cinetică (E_{Psol}=0) iar la înălţimea maximă doar energie potenţială, astfel că:

$E_{csol} = E_{p\max} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_{\max}} \approx 4{,}47$ m/s



b. Prin definiţie $E_m = E_c + E_p$. Pe baza legii de conservare a energiei mecanice $E_m = E_{m_{sol}} = E_{c_{sol}} = mgh_{\max}$ =5 J

c. Din $E_{csol} = E_{p\max} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ Dacă viteza mingii se dublează $v = 2v_0 \Rightarrow h'_{\max} = \frac{v^2}{2g} = 4\frac{v_0^2}{2g} = 4h_{\max}$ =4 m, astfel că mingea se va ridica mai mult cu $\Delta h = h'_{\max} - h_{\max} = 3h$ =3 m

4.a. Aflăm înălţimea maximă la care urcă corpul, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctele O şi A: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece $E_{p_O} = mgh$ şi în punctul de înălţime maximă $E_{c_A} = 0$, astfel că $E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = h + \frac{v_0^2}{2g}$ =5,8 m

b. În punctul B aflat la o pătrime din înălţimea maximă la care se ridică corpul, $h_B = \frac{h_{\max}}{4}$, aflăm energia cinetică pe baza conservării energiei mecanice între punctele A şi B astfel că: $E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_A} - E_{p_B} \Rightarrow$

$E_{c_B} = mgh_{\max} - mgh_B = \frac{3mgh_{\max}}{4}$ =4,35 J

c. Conservând energia mecanică între punctul de înălţime maximă A şi punctul de pe sol C, obţinem: $E_{p_A} = E_{c_C} \Rightarrow mgh_{\max} = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2gh_{\max}} \approx 10{,}77$ m/s

5.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele O şi M:

$$E_{c_O} = E_{p_M} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH} = 20 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele M şi P:

$$E_{p_M} = E_{c_P} + E_{p_P} \Rightarrow mgH = \frac{mv_P^2}{2} - mgh \Rightarrow v_P = \sqrt{2g(H+h)} \approx 24{,}49 \text{ m/s}$$

c. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate pe toată durata deplasării pietrei este $L_G = L_{G_{OM}} + L_{G_{MP}} = -mgH + mg(H+h) = mgh = 20$ J

6.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare O şi punctul A în care corpul ajunge la înălţimea maximă, astfel

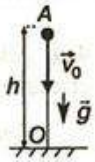
$$E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 3{,}2 \text{ m}$$

b. Pe baza legii conservării energiei mecanice $E_{c_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$ şi cum $E_{c_B} = E_{p_B}/3$ obţinem $E_{c_O} = 4E_{c_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{4mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{2} = 4$ m/s

c. Dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare aflat pe sol O şi acelaşi punct la revenirea corpului, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{Ef}$. Deoarece $\Delta E_c = E'_{co} - E_{co}$, lucrul mecanic al greutăţii este nul $L_G = 0$ şi $L_{Ef} < 0$ pentru că forţa de frecare este rezistivă obţinem $E'_{co} < E_{co} \Rightarrow v'_0 < v_0$. Viteza cu care corpul atinge solul la coborâre este mai mică decât viteza iniţială v_0, dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă.

7.a. Energia mecanică a ghiozdanului este:

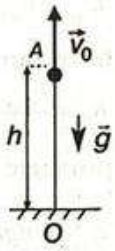
$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 288 \text{ J}$$



b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A şi O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 12$ m/s

c. Pe baza conservării energiei dacă ghiojdanul este lăsat liber din punctul B de la înălţimea h' obţinem:

$$E_{p_B} = E_{c_O} \Rightarrow mgh' = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh' \Rightarrow h' = h + \frac{v_0^2}{2g} = 7{,}2 \text{ m}$$



8.a. Energia potenţială corespunţătoare înălţimii maxime este

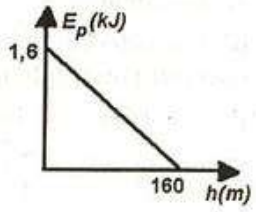
$$E_{p_{max}} = E_p + E_c = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 1{,}6 \text{ kJ}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistem între punctul de plecare A şi punctul B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece $E_{c_B} = 3E_{p_B}$ obţinem: $\frac{mv_0^2}{2} + mgh = 4mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{h}{4} + \frac{v_0^2}{8g} = 20$ m.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între vârful turnului *A* aflat la înălțimea *h* de sol și punctul *O* de pe sol. Alegem pe sol $E_{p_0} = 0$. Obținem:

$$E_{c_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 40 \text{ m/s}.$$

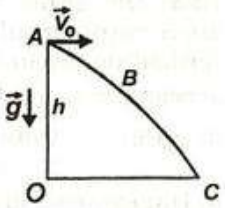
9.a. Deoarece la sol energia potențială este nulă $E_{p_0} = 0$, atunci dependenței energiei potențiale gravitaționale a pachetului în funcție de înălțimea *h* este $E_p = E_{p0} - mgh = 1600 - 10h$. Reprezentarea grafică a funcției este redată în figura alăturată.



b. Pentru sistemul pachet-sol aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *A* și *O*. Obținem:

$$E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_O} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60 \text{ m/s}.$$

c. Dacă pachetul se aruncă oblic în jos aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de aruncare și punctul în care corpul lovește solul, astfel că:



$$E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_O} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60\text{m/s}$$

Pachetul ajunge la sol cu aceeași viteză fie că este lăsat să cadă pe verticală în jos sau este aruncat oblic în jos, numai că ajunge la sol cu viteze orientate pe direcții diferite, vertical când pachetul cade vertical și oblic când este aruncat sub un unghi.

10.a. Timpul în care este ridicat coletul cu materiale este $t = \frac{h}{v} = 50$ s

b. Puterea dezvoltată de macara este $P = Fv = mgv = 2$ kW

c. Pe baza legii conservării energiei între punctul de plecare și sol, considerând că la sol energia potențială este nulă, obținem

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgh = \frac{mv'^2}{2} \Rightarrow v' = \sqrt{2gh} \approx 14{,}1 \text{ m/s}$$

d. După desprindere din colet piesa are o mișcare uniform accelerată, astfel că viteza medie de deplasare este $v_m = \frac{v'}{2}$. Din $h = v_m t' = \frac{v't'}{2} \Rightarrow t' = \frac{2h}{v'} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1{,}41\text{s}$

11.a. Din grafic când corpul se află la sol $h = 0$ și $E_{c\,max} = 24$ J. Lansat pe verticală de jos în sus corpul este supus acțiunii greutății, care este forță de tip conservativ. Aplicând legea conservării energiei mecanice, energia cinetică a corpului se transformă la înălțimea maximă în energia potențială, astfel că $E_{p_{max}} = E_{c\,max} = 24$ J.

b. Din grafic $h_{max} = 6$ m. Cum $E_{p_{max}} = mgh_{max} \Rightarrow m = \frac{E_{p_{max}}}{gh_{max}} = 400$ g.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice și obținem:

$$E_{c\max} = E_{c_1} + E_{p_1} \Rightarrow E_{c\max} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(E_{c\max} - mgh_1)}{m}} = \sqrt{2g(h_{max} - h)} \Rightarrow$$

$v_1 = 4$ m/s.

12.a. Din grafic la înălțimea maximă h_{max} =6 m, energia potențială are valoarea $E_{p_{max}}$ = 18 J. Considerând că pe sol, energia potențială este nulă, pe baza conservării energiei mecanice $E_{c_{max}} = E_{p_{max}} \Rightarrow$ energia cinetică maximă este la sol și are valoarea $E_{c_{max}}$ =18 J

b. Considerăm punctul în care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potențiale în acel punct, astfel că $E_c = E_p/3$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice:

$$E_{c_{max}} = E_c + E_p = \frac{4}{3}E_p \Rightarrow E_{p_{max}} = \frac{4}{3}E_p \Rightarrow mgh_{max} = \frac{4}{3}mgh \Rightarrow h = \frac{3}{4}h_{max} = 4{,}5 \text{ m}$$

c. $E_c = \frac{E_p}{3} = \frac{E_{p_{max}}}{4} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mgh_{max}}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gh_{max}}{2}} \approx 5{,}48 \text{ m/s}$

13.a. Din grafic aflăm valoarea inițială a energiei cinetice E_c=400 J și timpul după care corpul ajunge la înălțimea maximă t_u=2 s. Deoarece corpul lansat vertical de jos în sus în câmp gravitațional are o mișcare uniform încetinită cu accelerația g și cu viteza inițială v_0, conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ și din condiția de oprire $v = 0$ obținem viteza inițială a corpului $v_0 = gt_u$ =20 m/s

b. Din expresia energiei cinetice $E_c = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_c}{v_0^2} = \frac{2E_c}{g^2t_u^2}$ =2 kg

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că $E_{csol} = E_{pmax} \Rightarrow$

$E_c = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = E_c/(mg)$ =20 m

d. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de pe sol O și punctul cerut A, astfel că: $E_{c_O} = E_{p_A} + E_{c_A}$. Deoarece $E_{c_A} = fE_{p_A}$ obținem:

$$E_{c_O} = E_{p_A}(1+f) \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{c_O}}{1+f} \Rightarrow E_{c_A} = \frac{fE_{c_O}}{1+f} = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2fE_{c_O}}{m(1+f)}} \approx 8{,}16 \text{ m/s}$$

14.a. Energia mecanică a bilei este $E_m = E_p = mgh_0$. Deoarece neglijăm frecările cu aerul energia mecanică a bilei se conservă în procesul căderii acesteia, astfel că la sol energia are aceeași valoare. În urma ciocnirii cu suprafața plană bila pierde f=10% din energia mecanică, astfel că energia mecanică imediat după ciocnire devine $E_{m1} = (1-f)E_m = (1-f)mgh_0$. Pe baza legii conservării energiei mecanice după ciocnire obținem

$E_{m1} = E_{pmax_1} \Rightarrow (1-f)mgh_0 = mgh_1 \Rightarrow h_1 = (1-f)h_0$ =90 cm

b. După cea de-a doua ciocnire cu suprafața plană noua valoare a energiei mecanice este $E_{m2} = (1-f)E_{m1} = (1-f)^2E_m = (1-f)^2mgh_0$. Imediat după cea de-a doua ciocnire viteza v_2 a bilei se obține din $\frac{mv_2^2}{2} = (1-f)^2mgh_0 \Rightarrow$

$v_0 = (1-f)\sqrt{2gh_0} \approx 4{,}02$ m/s

c. După cea de-a treia ciocnire cu suprafața plană energia mecanică a bilei este $E_{m3} = (1-f)E_{m2} = (1-f)^3E_m = (1-f)^3mgh_0$ =2,916 J

15.a. Deoarece corpul este aruncat vertical de jos în sus pe baza conservării energiei mecanice, considerând că la nivelul solului $E_{psol}=0$, atunci

$$E_{c_{sol}} = E_{p_{max}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 20 \text{ m}$$

b. După prima ciocnire viteza corpului devine $v'_0=10$ m/s, astfel că energia mecanică este $E_{m2} = E'_{csol} = \frac{mv'^2_0}{2}$, astfel că fracțiunea pierdută din energia mecanică este $f = \frac{E_{csol} - E'_{csol}}{E_{csol}} = 1 - \frac{v'^2_0}{v_0^2} = 75\%$

c. Variația energiei mecanice după cea de-a de-a doua ciocnire este

$$\Delta E_{m2} = E_{m_2} - E_{m_1} = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{mv''^2_0}{2} - \frac{mv'^2_0}{2} = -7{,}5 \text{ J, deoarece } v''_0 = 5 \text{ m/s}$$

16.a. Deoarece jgheabul este lucios neglijăm frecările și utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *A* și punctul *B* unde corpul părăsește jgheabul. Considerăm nulă energia potențială la nivelul solului.

Obținem: $E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} + mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \Rightarrow$

v_B=10 m/s

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul *A* și punctul unde corpul lovește solul *C*:

$$E_{mA} = E_{m_C} \Rightarrow E_{pA} = E_{c_C} \Rightarrow mgH = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2gH} \approx 12{,}65 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de conservare a energiei mecanice între punctul *A* și punctul *D* aflat la înălțimea $h_D=fH$,astfel că: $E_{m_A} = E_{mD} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$$mgH = \frac{mv_D^2}{2} + mgh_D \Rightarrow v_D = \sqrt{2g(H-h_D)} = \sqrt{2gH(1-f)} \approx 11{,}31 \text{ m/s}$$

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *A* și *B*, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_N + L_G$. Deoarece $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu mg\ell$, $L_G=0$, $L_N=0$ și

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ obținem $\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell} \Rightarrow$

$v_B \approx 5{,}47$ m/s

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele aflate pe jgheab *B* și *C*. Considerăm nulă energia potențială în punctul *B*. Astfel:

$$E_{m_B} = E_{m_C} \Rightarrow E_{c_B} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + mgR \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gR} \approx 4{,}47 \text{ m/s}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul *B* și punctul *D* până la care urcă bila: $E_{m_B} = E_{m_D} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_D} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_D$ $h_D = \frac{v_B^2}{2g} = 1{,}5$ m

18.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru punctele aflate pe suprafață curbă *A* și *B* considerând că în *B* energia potențială este nulă.

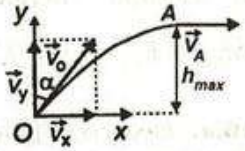
$$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH} = 10 \text{ m/s}$$

b. Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului între punctele A şi B este $L_G=mgH=50$ J

c. Energia mecanică totală iniţială este $E_{m_A} = E_{p_A} = mgH$. În punctul C energia mecanică este $E_{m_C} = E_{m_A}/4 = mgH/4$. Cum $E_{m_C} = E_{c_C}$ putem aplica între punctele A şi C teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N + L_{Ff}$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} = \frac{mgH}{4}$, $L_G=mgH$, $L_N=0$ şi $L_{Ff} = -F_f BC = -\mu mgBC$ obţinem:

$$\frac{mgH}{4} = mgH - \mu mgBC \Rightarrow BC = \frac{3H}{4\mu} = 18{,}75 \text{ m}$$



19.a. Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate Ox şi Oy sunt $v_{0x} = v_0 \cos\alpha \approx 8{,}65$ m/s şi $v_{oy} = v_0 \sin\alpha = 5$ m/s

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pe axa verticală între punctul de plecare O şi punctul în care corpul se opreşte. Se consideră nulă energia potenţială gravitaţională în punctul de pe sol. Astfel că

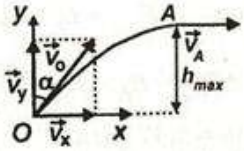
$$E_{mO} = E'_m \Rightarrow E_{c,Oy} = E_p \Rightarrow \frac{mv_{oy}^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 1{,}25 \text{ m}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de plecare O şi punctul A în care corpul ajunge la înălţimea maximă. Astfel că:

$$E_{mO} = E_{mA} \Rightarrow E_{c,O} = E_{cA} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh_{max} \Rightarrow \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{mv_{0y}^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_A = v_0 \cos\alpha \approx 8{,}65 \text{ m/s}$$

d. Lucrul mecanic al forţei de greutate din momentul lansării şi până când corpul atinge solul este $L_{G,total} = L_{G,urcare} + L_{G,coborâre} = -mgh_{max} + mgh_{max} = 0$



20.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul minge-Pământ între punctul O aflat pe sol şi punctul A aflat la înălţimea maximă: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$, cu $E_{p_O} = 0$, deoarece alegem pe sol valoarea zero pentru energia potenţială

În punctul de înălţime maximă, vectorul viteză este orizontal. Pe orizontală mingea are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_0 \cos\alpha$, astfel că $v_A = v_0 \cos\alpha \Rightarrow v_0 = \frac{v_A}{\cos\alpha} \Rightarrow E_{c_O} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2\cos^2\alpha} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\alpha} = 90$ J

b. Când mingea formează cu orizontala un unghi β, astfel că $v_B \cos\beta = v_A$, deoarece pe orizontală mişcarea mingii este rectilinie şi uniformă $v_B = \frac{v_A}{\cos\beta}$ şi

$$E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2\cos^2\beta} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\beta} = 60 \text{ J}.$$

c. Aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare de pe sol O şi punctul B, unde mingea formează cu orizontala un unghi β.

Considerând că pe sol energia potențială este nulă, aflăm energia potențială în B.

Din $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$ și cum $E_{p_O} = 0 \Rightarrow E_{p_B} = E_{c_O} - E_{c_B} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\alpha} - \frac{E_{c_A}}{\cos^2\beta} = 30\text{J}$

21.a. Aplicăm între punctul de plecare O și punctul în care energia cinetică este o fracțiune f din energia cinetică inițială, legea de conservare a energiei mecanice, astfel că: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p$. Considerăm că în punctul de lansare O, energia potențială este nulă. Astfel obținem: $E_{c_O} = E_c + E_p \Rightarrow$

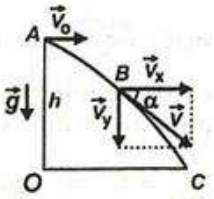
$$E_p = E_{c_O} - E_c = E_{c_O} - fE_{c_O} = E_{c_O}(1-f) \Rightarrow mgh = \frac{mv_0^2}{2}(1-f) \Rightarrow h = \frac{v_0^2(1-f)}{2g} \approx 0{,}65 \text{ m}$$

b. Deoarece pe orizontală mișcarea corpului este rectilinie și uniformă $v_0\cos\alpha = v\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{v_0\cos\alpha}{v}$.

Cum $E_c = fE_{c_0} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = f\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = fv_0^2 \Rightarrow v = v_0\sqrt{f} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{f}} = 0{,}625.$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul O și punctul A în care corpul ajunge la înălțimea maximă: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece pe orizontală corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v_A = v_0\cos\alpha$ energia potențială maximă este $E_{p_A} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} = 6{,}75$ J

22.a. Considerăm că pe sol, în punctul O, energia potențială este nulă. Energia mecanică totală a corpului este formată din energia cinetică și energia potențială, astfel:



$$E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 70 \text{ J}$$

b. Deoarece pe orizontală corpul se mișcă uniform, întrucât asupra corpului acționează numai greutatea care este verticală, atunci

$$v_0 = v_B\cos\alpha \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{\cos\alpha} \Rightarrow E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2\cos^2\alpha} = 40 \text{ J}$$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice între punctele A și B obținem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{p_B} = E_m - E_{c_B} = mgh - \frac{mv_0^2}{2}tg^2\alpha = 30 \text{ J}$$

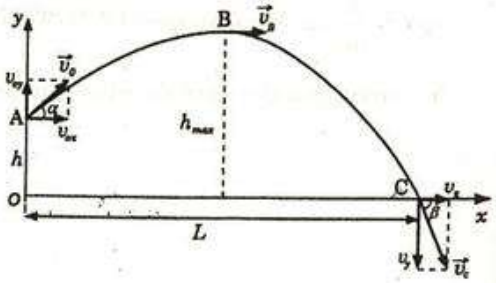
c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul de sosire de pe sol C: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$

Cum

$$E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 26{,}46 \text{ m/s}$$

23.a. Pe baza definiției energiei mecanice totale: $E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 100$ J



b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A și punctul cel

mai înalt al traiectoriei B, astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Pe orizontală mişcarea corpului este rectilinie şi uniformă, astfel că:

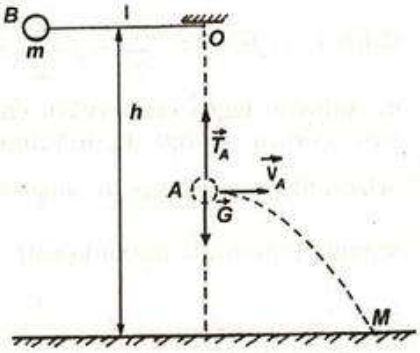
$$v_0 \cos\alpha = v_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{max} + \frac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2} \Rightarrow h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 16{,}25 \text{ m}$$

c. Aplicăm între punctul de plecare A şi punctul de sosire la sol C, legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$.

Cum $E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 20$ m/s.

d. Pe orizontală, corpul se mişcă uniform astfel că $v_0 \cos\alpha = v_C \cos\beta \Rightarrow$

$$\cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_C} \approx 0{,}4325.$$



24.a. $E_m = E_c + E_p = mgh = 18$ J, deoarece în poziţia iniţială corpul nu are energie cinetică şi are doar energie potenţială, iar pe sol alegem valoarea zero pentru energia potenţială gravitaţională.

b. Aplicăm între punctul de plecare B şi punctul când corpul se află în poziţia verticală A legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow$

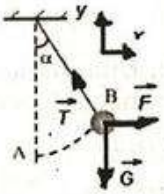
$$mgh = \frac{mv_A^2}{2} + mg(h - \ell) \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell} = 4 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare B şi punctul C unde corpul ajunge pe sol.

$$E_{p_B} = E_{c_{sol}} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s}.$$

d*. Impunem condiţia ca în poziţia verticală A rezultanta tensiunii şi a greutăţii să joace un rol de forţă centripetă, deoarece corpul are o traiectorie circulară.

Scalar: $T_A - mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m\left(g + \frac{v_A^2}{\ell}\right) = 3mg = 30$ N $\Rightarrow$ firul se rupe pe verticală când tensiunea ajunge la valoarea 30 N.



25.a. Impunem condiţia de echilibru bilei în poziţia B, astfel că $\vec{T} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate Ox: $F - T\sin\alpha = 0$ şi pe Oy: $T\cos\alpha - mg = 0$. Împărţind cele două relaţii obţinem:

$$tg\alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mgtg\alpha \Rightarrow F \approx 0{,}865 \text{ N}$$

b. Tensiunea din firul de care este legată bila în poziţia B este $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 1$ N

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A şi B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Considerăm nulă energia potenţială în punctul cel mai de jos al traiectoriei, adică punctul A. Astfel $E_{p_B} = E_{c_A} \Rightarrow mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \approx 1{,}41$ m/s

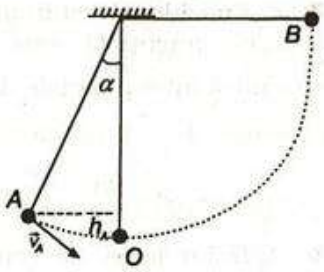
26.a. Aplicăm între punctul O în care se află corpul iniţial şi punctul A când firul devine orizontal, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul O energia potenţială este nulă, astfel că $E_{p_O} = 0$.

Astfel: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell} = 4$ m/s.

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A şi punctul unde se opreşte corpul B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece $E_{c_B} = 0$ obţinem:

$E_{c_B} = 0 \Rightarrow mg\ell + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}25$ m.

c. $L_T = 0$, deoarece forţa de tensiune este orientată perpendicular pe traiectorie şi $L_G = -mgh_B = -2{,}5$ J, deoarece greutatea nu ajută la mişcare şi prin urmare este o forţă cu caracter rezistiv.



27.a. Aplicăm între punctul de plecare A şi punctul B, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei energia potenţială este nulă $E_{p_O} = 0$.

Obţinem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$.

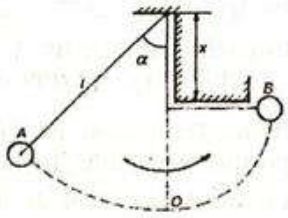
Cum $E_{p_A} = mg\ell(1-\cos\alpha)$ şi $E_{c_B} = 0$, deoarece în punctul B corpul se opreşte, se obţine:

$\frac{mv_A^2}{2} + mg\ell(1-\cos\alpha) = mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell\cos\alpha} \Rightarrow v_A = 2$ m/s.

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul O şi punctul B: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{p_O} = 0$ şi $E_{c_B} = 0$ obţinem:

$E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} \approx 2{,}83$ m/s.

c. Energia iniţială a corpului este $E_m = E_c + E_p = \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell = 0{,}4$ J.



28.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei energia potenţială este nulă. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A şi punctul B, când firul devine orizontal: $E_{p_A} + E_{c_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$. Deoarece corpul porneşte din repaus şi ajunge în final în repaus $E_{c_A} = 0$ şi $E_{c_B} = 0$, astfel $E_{p_A} = E_{p_B} \Rightarrow mgh_A = mgh_B \Rightarrow h_B = h_A = \ell(1-\cos\alpha)$

$\Rightarrow h_B = 20$ cm $\Rightarrow$ corpul urcă până la înălţimea de la care a plecat.

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A şi poziţia verticală O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Cum $E_{c_A} = 0$ şi $E_{p_O} = 0$ obţinem:

$$mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 2 \text{ m/s}.$$

c. $L_G = L_{G_{AO}} + L_{G_{OB}} = mgh_A - mgh_B = mg(h_A - h_B) = 0$, deoarece punctul A şi punctul B se află pe aceeaşi orizontală, astfel că $h_A = h_B$.

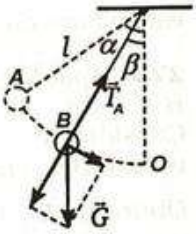
29.a. Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_G = mg\ell(1-\cos\alpha)$=5J

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A şi poziţia de echilibru O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Deoarece $E_{c_A} = 0$ şi $E_{p_A} = 0$ obţinem $mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \approx 3{,}16$ m/s

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între poziţia de echilibru O şi punctul în care E_c=E_p, astfel că $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p \Rightarrow E_{c_O} = 2E_p \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{\ell(1-\cos\alpha)}{2} = 25 \text{ cm}$$

30.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei O, energia potenţială este nulă $E_{p_O} = 0$. Conservăn energia mecanică între punctele A şi O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$.



Deoarece $E_{c_A} = 0$ obţinem:

$$mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 3 \text{ m/s}.$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A şi B:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_B^2}{2} + mg\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2g\ell(\cos\beta - \cos\alpha)} \approx 2{,}56 \text{ m/s}.$$

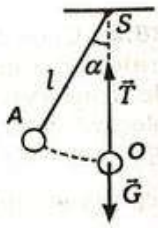
c*. În punctul B impunem condiţia ca rezultanta forţelor pe direcţia firului să joace rol de forţă centripetă. Scalar obţinem:

$$T_B - mg\cos\beta = \frac{mv_B^2}{\ell} \Rightarrow T_B = m\left(\frac{v_B^2}{\ell} + g\cos\beta\right) \Rightarrow T_B = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha).$$

Particularizăm pentru: $\beta = \alpha = 60^0 \Rightarrow T_A = mg\cos\alpha = 0{,}5$ N.

Pentru $\beta = 30^0 \Rightarrow T_B = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha) = 1{,}595$ N.

Pentru $\beta = 0^0 \Rightarrow T_O = mg(3 - 2\cos\alpha) = 2$ N.



În poziţia de plecare A, tensiunea în fir este minimă, iar în poziţia de echilibru O (poziţia verticală), tensiunea în fir este maximă.

31.a. Tensiunea în cablu este maximă când cablul se află în poziţie verticală. În această poziţie, rezultanta tensiunii şi a greutăţii joacă rol de forţă centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar

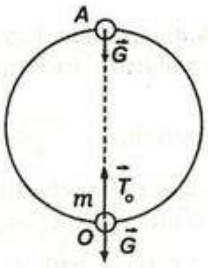
scalar: $T - mg = \frac{mv_0^2}{\ell}$, unde ℓ este lungimea firului.

Cum $T = 2mg \Rightarrow mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow v_0 = \sqrt{g\ell}$ =10 m/s

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *O* şi *A*, unde se opreşte corpul. Considerăm că $E_{p_O} = 0$ şi deoarece $E_{c_A} = 0$, obţinem

$$E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

c. Pentru ca acest corp să poată să descrie cercul în plan vertical, trebuie ca în *A*, tensiunea în cablu să fie mai mare sau cel puţin egală cu zero. Considerăm cazul cel mai defavorabil când tensiunea din cablu în *A* este nulă. În acest caz în punctul *A*, greutatea joacă rol de forţă centripetă, astfel că:



$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow v_A^2 = g\ell$. Aplicăm între punctele *A* şi *O* legea de conservare a energiei mecanice. $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$ şi deoarece $E_{p_O} = 0$ obţinem

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg2\ell \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + 4g\ell = 5g\ell.$$

Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului în punctul *O* şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar obţinem

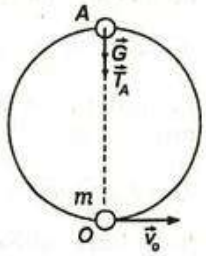
$T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = mg + \frac{mv_0^2}{\ell} = 6mg = 1{,}2$ kN $\Rightarrow$ pentru ca acesst corp să poată să descrie un cerc în plan vertical trebuie ca firul să suporte o forţă de rupere minimă de cel puţin şase ori mai mare decât greutatea corpului susţinut.

32.a. Deoarece E_{P_0}=0 energia iniţială a corpului este $E_{m_0} = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{mv_0^2}{2} = 10$ J

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *O* şi punctul cel mai de sus al traiectoriei *A*. Obţinem: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + 2mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 4g\ell} \approx 8{,}944 \text{ m/s}.$$

c*. Reprezentăm forţele care se exercită aupra corpului în punctul superior al traiectoriei şi impunem condiţia ca rezultanta lor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{T}_A + \vec{G} = \vec{F}_{cpA}$, iar scalar obţinem:



$$T_A + mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m\left(\frac{v_A^2}{\ell} - g\right) = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 5g\right) = 30 \text{ N}.$$

33*.a. Alegem $E_{p_0} = 0$ şi aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *A* şi *O*: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$.

Cum $E_{c_A} = 0 \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_0} \Rightarrow mg\ell = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} = 3$ m/s.

b. Pentru a putea descrie cercul cu raza $\ell - x$, corpul trebuie să ajungă în punctul superior al cercului. Considerăm că în punctul B tensiunea în fir este nulă, iar greutatea joacă rol de forță centripetă, astfel că: $G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{\ell - x} \Rightarrow v_B^2 = g(\ell - x)$. Aplicăm între punctele A și B legea de conservare a energiei mecanice astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow$

$mg\ell = \frac{mv_B^2}{2} + 2mg(\ell - x) \Rightarrow x = \frac{3\ell}{5} = 27$ cm, deoarece raza cercului este ℓ-x.

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este: $L_G = mg(\ell - OB) = mg(2x - \ell) = \frac{mg\ell}{5} = 0{,}9$ J.

34.a. Aplicăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele A și B aflate pe planul înclinat: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{c_A} = 0$ și $E_{p_B} = 0$ obținem:

$mgAB\sin\alpha = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha} \approx 8{,}94$ m/s

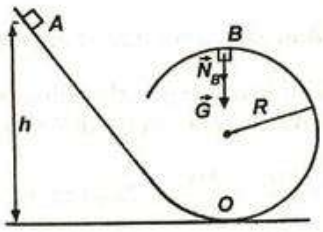
b. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele A și C este: $L_{G_{AC}} = mg(h - R) = mg(AB\sin\alpha - R) = 15$ J

c. Pe baza legii de conservare a energiei cinetice între punctele A și C obținem: $E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow E_{c_C} = mg(AB\sin\alpha - R) = 15$ J

d. Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele A și punctul D în care energia cinetică este egală cu energia potențială: $E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$E_{p_A} = 2E_{p_D} \Rightarrow mgAB\sin\alpha = 2mgh_D \Rightarrow h_D = \frac{AB\sin\alpha}{2} = 2$ m

35*.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al buclei energia potențială este nulă, astfel că $E_{p_0} = 0$. Deoarece mișcarea montagne rousse-ului decurge fără frecare, aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B, unde B este punctul cel mai sus al buclei, iar punctul A este cel de plecare. Obținem:



$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR$ (1)

În punctul B, greutatea joacă rol de forță centripetă deoarece presupunem că forța de apăsare asupra șinei este nulă. Scalar obținem:

$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR$ (2). Din (1) și (2) obținem: $h = \frac{5R}{2} = 10$ m.

b. Pe baza conservării energiei mecanice între punctele A și B obținem:

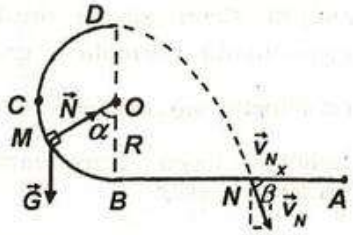
$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR \Rightarrow v_B = \sqrt{v^2 + 2g(h - 2R)} \Rightarrow$

$v_B = \sqrt{v^2 + gR} = 7$ m/s.

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul B și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{G}+\vec{N}_B=\vec{F}_{cp}$, iar scalar:

$$G+N_B=F_{cp}\Rightarrow mg+N_B=\frac{mv_B^2}{R}\Rightarrow N_B=m\left(\frac{v_B^2}{R}-g\right)=\frac{mv^2}{R}=1845\text{ N}$$

36*.a. Alegem valoarea zero a energiei potențiale pentru toate punctele planului orizontal. Pentru ca acest corp să poată să descrie jgheabul semicircular BCD, în punctul D, greutatea corpului trebuie să joace rol de forță centripetă, deoarece presupunem că acest corp nu apasă asupra jgheabului. Scalar obținem:



$$G=F_{cp}\Rightarrow mg=\frac{mv_D^2}{R}\Rightarrow v_D^2=gR$$

Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A și D. Obținem:

$$E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_D}+E_{p_D}\Rightarrow\frac{mv_A^2}{2}=\frac{mv_D^2}{2}+2mgR\Rightarrow v_A=\sqrt{5gR}=5\text{ m/s}.$$

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul M și impunem condiția ca rezultanta forțelor pe direcția normalei să joace rol de forță centripetă. Obținem: $N_M-mg\cos\alpha=\frac{m{v_M}^2}{R}\Rightarrow N_M=m\left(\frac{{v_M}^2}{R}+g\cos\alpha\right)$.

Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctele A și M:

$$E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_M}+E_{p_M}\Rightarrow\frac{mv_A^2}{2}=\frac{mv_M^2}{2}+mgR(1-\cos\alpha)\Rightarrow {v_M}^2=v_A^2-2gR(1-\cos\alpha)\Rightarrow$$

$${v_M}^2=gR(3+2\cos\alpha)\Rightarrow N_M=3mg(1+\cos\alpha)=9\text{ N}.$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul N unde corpul lovește solul: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_N}+E_{p_N}$.

Cum $E_{p_A}=E_{p_N}=0\Rightarrow E_{c_A}=E_{c_N}\Rightarrow v_N=v_A=5$ m/s $\Rightarrow$ corpul lovește solul cu aceeași viteză cu care a plecat, dar direcția vectorului viteză este diferită.

d. Din desen $\cos\beta=\frac{v_{N_x}}{v_N}$. Cum pe orizontală, după ce părăsește jgheabul semicircular, corpul are o mișcare rectilinie și uniform cu viteza $v_{N_x}=v_D=\sqrt{gR}\Rightarrow\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0{,}447$

37.a. Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din A în B este $L_G=mgh_{AB}=mg(h_A-h_B)=mg(2R-h)$=32 mJ

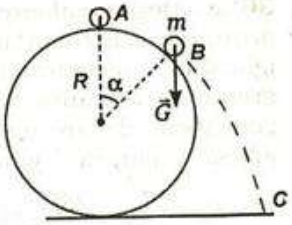
b. Utilizăm legea de legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B. $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}\Rightarrow mg2R=\frac{mv_B^2}{2}+mgh\Rightarrow v_B=\sqrt{2g(2R-h)}\approx 1{,}79$ m/s

c. Utilizăm legea de legea de conservare a energiei mecanice între punctul A și punctul C aflat pe sol. Obținem: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_C}+E_{pC}\Rightarrow mg2R=\frac{mv_C^2}{2}\Rightarrow$

$v_B = 2\sqrt{gR} \approx 4{,}38$ m/s

d. Pe baza legii conservării energiei mecanice, energia totală a corpului când acesta se află față de sol la o înălțime egală cu raza sferei este $E_m = E_{p_A} = 2mgR = 192$ mJ

38*.a. Pentru ca să se poată desprinde de sferă în punctul *B*, trebuie ca forța de apăsare exercitată de corp asupra sferei să se anuleze, astfel că $N_B = 0$, iar componenta normală a greutății să joace rol de forță centripetă: $mg\cos\alpha = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR\cos\alpha$ (1)



Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele *A* și *B*:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_B^2}{2} + mg(R + R\cos\alpha) \quad (2)$$

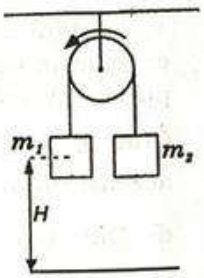
Din (1) și (2) $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \approx 2{,}83$ m/s.

b. $h_B = R(1+\cos\alpha) = 2$ m, reprezintă înălțimea față de sol la care se desprinde corpul de sferă.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare *A* și punctul în care corpul ajunge la sol *C*, deoarece mișcarea se face fără frecare:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow 2mgR = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{4gR} \approx 6{,}93 \text{ m/s}.$$

39.a. Energia totală a sistemului de corpuri, considerând că la sol energia potențială este nulă este: $E_t = (m_1 + m_2)gH = 100$ J, deoarece corpurile se află în repaus și au doar energie potențială.



b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul de corpuri. La sol energia totală a sistemului de corpuri este $E_t = E_c + E_p = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + m_1 g2H$, deoarece când ajunge la sol corpul al doilea, ambele corpuri au aceeași viteză, iar corpul m_1 se află la înălțimea $2H$ față de sol. Obținem:

$$(m_1+m_2)gH = \frac{(m_1+m_2)}{2}v^2 + 2m_1gH \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2-m_1)gH}{m_1+m_2}} = 2 \text{ m/s}.$$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul 1, care se află la înălțimea $2H$ și se mișcă vertical în sus. Astfel $E_i = E_f \Rightarrow E_c + E_p = E_{p_f} \Rightarrow$

$$\frac{m_1v^2}{2} + 2m_1gH = m_1gh \Rightarrow h = 2H + \frac{v^2}{2g} = H\left(2 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right) = \frac{H(3m_2+m_1)}{m_1+m_2} = 2{,}2 \text{ m}.$$

40.a. Cum $F_1 = kx_1$ constanta elastică a resortului este $k = F_1 / x_1 = 500$ N/m

b. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică în procesul comprimării cu x_1 este

$$L = -F_{el_m}x_1 = -\frac{kx_1^2}{2} = -\frac{F_1x_1}{2} = -2{,}5 \text{ J}$$

c. Deoarece forța elastică este o forță de tip conservativ, pentru sistemul corp-resort se aplică legea conservării energiei mecanice, astfel că energiea potențială de deformare a resortului se transformă în energia cinetică a corpului. Astfel

$$E_p = E_c \Rightarrow \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = x_1\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F_1 x_1}{m}} = 10 \text{ m/s}$$

41.a. Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctul O de pe sol și punctul A, astfel că $E_{mO} = E_{mA} \Rightarrow E_{cO} = E_{cA} + E_{pA} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh \Rightarrow$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \approx 6{,}32 \text{ m/s}$$

b. Distanța parcursă de corp pe planul înclinat este $AB = \frac{h}{\sin\alpha} - \ell_0 = 4{,}8$ m

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$, $L_{N,AB} = 0$,

$L_{G,AB} = mgh_{AB} = mgAB\sin\alpha$ și $L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu NAB = -\mu mgAB\cos\alpha$, obținem

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mgAB\sin\alpha - \mu mgAB\cos\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gAB(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 8\text{m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între capătul resortului B și punctul C în care resortul este comprimat la maxim, astfel că:

$$\Delta E_{c,BC} = L_{G,BC} + L_{F_{el},BC} + L_{N,BC}.$$

$\Delta E_{c,BC} = -\frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,BC} = 0$, $L_{G,BC} = mgx\sin\alpha$, $L_{F_{el},BC} = -F_{el,BCm}x = -\frac{F_{elC}}{2}x = -\frac{kx^2}{2}$

obținem: $-\frac{mv_B^2}{2} = mgx\sin\alpha - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \frac{mg\sin\alpha + \sqrt{m^2g^2\sin^2\alpha + kmv_B^2}}{k} \approx 8$ cm.

Lungimea resortului comprimat este $\ell = \ell_0 - x \approx 1{,}12$ m

d. Deoarece după ce lovește resortul mișcarea corpului se efectuează fără frecare, corpul revine după destinderea resortului în punctul B cu aceeași viteză v_B=8 m/s, conform legii conservării energiei. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între capătul resortului B și punctul D unde se oprește corpul:

$\Delta E_{c,BD} = L_{G,BD} + L_{F_f,BD} + L_{N,BD}$. Cum $\Delta E_{c,BD} = -\frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,BD} = 0$,

$L_{G,BD} = -mgBD\sin\alpha$ și $L_{F_f,BD} = -F_f BD = -\mu mgBD\cos\alpha$ obținem:

$$-\frac{mv_B^2}{2} = -mgBD\sin\alpha - \mu mgBD\cos\alpha \Rightarrow BD = \frac{v_B^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 4{,}26 \text{ m}$$

3.5. Impulsul punctului material. Teorema de variaţie a impulsului punctului material.

1. Conform definiţiei $E_c = \frac{mv^2}{2}$ şi $p = mv \Rightarrow m = \frac{p}{v} \Rightarrow E_c = \frac{pv}{2} \Rightarrow$

$v = \frac{2E_c}{p} = 10$ m/s şi $m = \frac{p^2}{2E_c} = 160$ g.

2. Cum $E_c = \frac{mv^2}{2}$ şi $p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m} \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$. Dacă $p' = 3p$

$\Rightarrow E_c' = \frac{p'^2}{2m} = \frac{9p^2}{2m} = 9E_c \Rightarrow$ energia cinetică creşte de 9 ori.

3. După $t_1 = 2$ s, viteza corpului este $v = 10$ m/s şi impulsul corpului este $p = mv = 5$ Ns. $\Delta p = p - p_0$, unde p_0 reprezintă impulsul iniţial al corpului $p_0 = mv_0 = 10$ Ns, deoarece viteza iniţială la $t = 0$ este $v_0 = 20$ m/s $\Rightarrow \Delta p = -5$Ns, deoarece impulsul corpului scade în primele două secunde de la începerea mişcării

4. Conform legii cordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin metoda identificării coeficienţilor obţinem: $x_0 = 4$ m, $v_0 = -8$ m/s şi $a = 12$ m/s², astfel că la momentul iniţial de timp $t = 0$, impulsul corpului este $p_0 = mv_0 = -8$ Ns.
Legea vitezei este $v = v_0 + at = -8 + 12t$ şi prin urmare la momentul $t = 2$ s$\Rightarrow v = 16$ m/s, iar $p = mv = 16\ N \cdot s \Rightarrow \Delta p = p - p_0 = 24$ Ns.

5. Deoarece corpul are o mişcare uniform accelerată cu viteza iniţială v_0, legea vitezei este de forma $v = v_0 + at = 2 + 2t$, iar după $t = 4$ s de la începerea mişcării corpul are viteza $v = 10$ m/s$\Rightarrow p = mv = 2$ Ns.

6. Aplicăm pentru sistemul minge - sol legea conservării energiei mecanice, astfel că energia potenţială a mingii se transformă în energie cinetică la sol: $E_p = E_c \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 10$ m/s $\Rightarrow p = mv = 4$ Ns este impulsul corpului la sol.

7. Aflăm înălţimea maximă la care poate ajunge mingea aplicând legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică la sol a mingii de pinpong se transformă în energie potenţială gravitaţională: $E_{c_{sol}} = E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

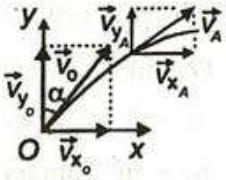
Aflăm viteza la înălțimea $h = \frac{h_{max}}{3} = \frac{v_0^2}{6g}$, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul aflat la sol și cel aflat la înălțimea h.

$$E_{c_{tot}} = E_c + E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \pm v_0\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow p = \pm mv_0\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0{,}2 \text{ kg·m/s}.$$

Se obțin două valori ale impulsului corespunzătoare cazului de urcare și respectiv de coborâre prin punctul aflat la o treime din înălțimea maximă la care poate ajunge corpul.

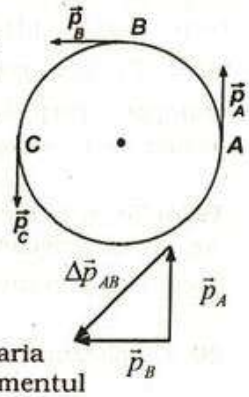
8. Mișcarea paharului corespunde aruncării pe orizontală a unui corp. Cum vectorul viteză este întotdeauna tangent la traiectorie, îl vom descompune în cele două componente v_x și v_y, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Pe orizontală paharul se mișcă uniform cu viteza v_0, astfel că $v_x = v_0$, iar pe verticală cade liber cu accelerația gravitațională, astfel încât $v_y = gt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \Rightarrow p = mv = m\sqrt{v_0^2 + g^2t^2} \Rightarrow$ p=0,447 N·s.

9. Mișcarea ventuzei este o aruncare sub un unghi, iar vectorul viteză tangent în permanență la traiectorie se descompune în două componente, una orizontală și una verticală. Pe orizontală ventuza are o mișcare rectilinie și uniformă astfel că $v_x = v_0 \cos\alpha$, iar pe verticală are o aruncare de jos în sus, astfel că $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$.



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt\sin\alpha} \approx 5{,}2 \text{ m/s și } p = mv = 0{,}26 \text{ kg·m/s}.$$

10. Între punctele diametral opuse A și C, variația impulsului este $\Delta\vec{p}_{AC} = \vec{p}_C - \vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AC}| = mv + mv = 2mv = 1280$ Ns, deoarece impulsurile sunt egale în modul ($p_C = p_A = mv$) și au sensuri contrare.



După ce atletul parcurge un sfert de pistă, între punctele A și B, $\Delta\vec{p}_{AB} = \vec{p}_B - \vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AB}| = mv\sqrt{2} \approx 902{,}4$ Ns, deoarece impulsul în punctul B este perpendicular pe impulsul din punctul A, iar scalar $p_A = p_B = mv$.

11. Deoarece forța este reprezentată în funcție de timp, aria cuprinsă între curba forței, axa timpului și ordonata la momentul $t = 4$ s reprezintă fizic variația impulsului forței, astfel că: ΔH=21 Ns.
Pe baza teoremei de variație a impulsului: $\Delta p = \Delta H \Rightarrow p = \Delta H \Rightarrow mv = \Delta H$

deoarece inițial corpul se află în repaus și $p_0 = 0 \Rightarrow v = \frac{\Delta H}{m} = 21$ m/s.

12. Deoarece forța este reprezentată în funcție de timp, aria cuprinsă între curba forței și axa timpului semnifică fizic impulsul forței, astfel că: $\Delta H = \frac{F_0 \cdot t}{2}$.

Pe baza teoremei de variație a impulsului unui punct material:

$$\Delta H = \Delta p \Rightarrow p_f - p_i = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow mv - mv_0 = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow v = v_0 + \frac{F_0 \cdot t}{2m} = 15 \text{ m/s}.$$

13. Utilizând teorema de variație a impulsului unui punct material: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = 16$ s.

14. Aplicăm teorema de variație a impulsului unui punct material: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv}{\Delta t} = 100$ N, deoarece inițial υ_0=0m/s și p_0=0Ns

15. Aplicăm pentru glonte teorema de variație a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -750$ N. Semnul minus arată că această forță se opune mișcării glontelui și astfel îi micșorează acestuia impulsul.

16. Se utilizează teorema de variație a impulsului pentru tren: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow -mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = -\frac{mv_0}{\Delta t} = -200$ kN, deoarece în final trenul se oprește și υ=0 m/s. Semnul "–" ne arată că forța determinată frânează trenul.

17. Utilizăm teorema de variație a impulsului în cazul frânării mașinii: $\Delta p = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow F_f = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -800$ N. Semnul "–" arată că forța de frânare micșorează impulsul mașinii, deoarece se opune mișcării acesteia.

18. Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul lansării cu frecare a unui corp pe plan orizontal. Vectorial: $\Delta\vec{p} = \vec{F}_f \cdot \Delta t$, iar scalar: $\Delta p = -F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = -\mu mgt$, deoarece $F_f = \mu N = \mu mg$ și ea micșorează impulsul corpului pentru că se opune mișcării acestuia, astfel că $p = mv = mv_0 - \mu mgt = m(v_0 - \mu gt) = 1{,}6$ kg·m/s.

19. Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul căderii libere a corpului: $\Delta p = G \cdot \Delta t$, deoarece singura forță care acționează asupra corpului în cădere liberă este greutatea și $\Delta t = t \Rightarrow \Delta p = mgt = 15$ kg·m/s.

20. a. Aplicăm teorema de variație a impulsului $\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow m(v - v_0) = F\Delta t$ (1) și cum $\Delta E_c = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2)$ (2) prin împărțirea relațiilor obținem:

$$\frac{\Delta E_c}{F\Delta t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow v = \frac{2\Delta E_c}{F\Delta t} - v_0 = 3 \text{ m/s}$$

b. Masa corpului este $m = \frac{F\Delta t}{v - v_0} = 1$ kg

c. Variația impulsului corpului este $\Delta p = F \cdot \Delta t = 2$ Ns

22.a. Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctul A şi punctul B pentru corpul m. Alegem nulă energia potenţială gravitaţională în punctul B, astfel că

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 20 \text{ m/s}$$

b. Din definiţie lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{Ff} = -F_f d = -\mu Mgd \Rightarrow L_{Ff} = -8 \text{ J}$

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul C şi punctul B pentru corpul M, astfel că: $\Delta E_{c,CB} = L_{G,CB} + L_{Ff,CB} + L_{N,CB}$.

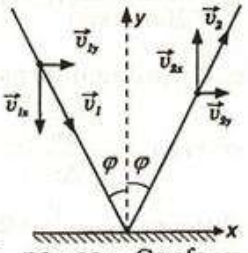
Cum $\Delta E_{c,CB} = -\frac{Mv_0^2}{2}$, $L_{G,CB} = 0$, $L_{N,CB} = 0$ şi $L_{Ff,CB} = -\mu Mgd$ obţinem

$$-\frac{Mv_0^2}{2} = -\mu Mgd \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\mu gd} = 4 \text{ m/s}$$

d. Pe baza teoremei de variaţie a impulsului pentru corpul m, obţinem

$$F\Delta t = \Delta p = -mv \Rightarrow |F| = \frac{mv}{\Delta t} = 4 \text{ kN}$$

23.a. Variaţia impulsului mingii la ciocnirea normală cu podeaua este: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -2m\vec{v}_0 \Rightarrow |\Delta p| = 2mv_0$. Conform teoremei de variaţie a impulsului vectorial: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, iar scalar: $|\Delta p| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\Delta t} = 40$ kN, unde F este forţa pe care podeaua o exercită asupra mingii. Conform principiului al acţiunii şi reacţiunii al dinamicii mingea loveşte podeaua cu o forţă egală orientată perpendicular pe aceasta.



b. Ciocnirea mingii cu podeaua este perfect elastică şi mingea ricoşează cu o viteză egală şi sub un unghi egal faţă de normală. Observăm că în urma ciocnirii cu podeaua proiecţia vectorului viteză de-a lungul podelei, pe axa Ox, nu se modifică în timp ce proiecţia vectorului viteză pe o direcţie perpendiculară pe perete îşi schimbă sensul. Prin urmare impulsul mingii se modifică numai pe direcţia perpendiculară pe podea (axa Oy), ceea ce înseamnă că podeaua exercită asupra mingii o forţă perpendiculară pe ea. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii mingea acţionează asupra podelei cu o forţă egală şi de sens contrar. Cum $\Delta p_y = -mv'_y - mv_y = -2mv_0\cos\varphi$ prin aplicarea teoremei de variaţie a impulsului obţinem:

$$|\Delta p_y| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p_y|}{\Delta t} = \frac{2mv_0\cos\varphi}{\Delta t} = 20 \text{ kN, deoarece } \varphi = 90^0 - \alpha = 60^0$$

3.6 Ciocniri plastice şi elastice

1.a. Energia cinetică iniţială a sistemului este $E_{ci} = \frac{mv^2}{2} = 112{,}5$ J

b. În urma procesului de ciocnire are loc un transfer de impuls de la corpul cu masa m spre corpul cu masa M. Din reprezentarea grafică a forţei în funcţie de

timp, se calculează impulsul transferat cu ajutorul ariei cuprinse între curba forței și axa timpului, astfel că $\Delta p = \frac{F_0 \cdot t}{2} = 10$ N·s.

Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru fiecare corp. Pentru corpul cu masa m: $-\Delta p = mv'_1 - mv \Rightarrow v'_1 = v - \frac{\Delta p}{m} = 5$ m/s, deoarece acest corp transferă impulsul Δp corpului aflat în repaus și prin urmare viteza acestui corp scade.

Pentru corpul cu masa M: $-\Delta p = Mv'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\Delta p}{M} = 2$ m/s.

b. Variația energiei cinetice a sistemului este: $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} \Rightarrow$

$\Delta E_c = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{Mv_2'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -90$ J $\Rightarrow$ pierderea energiei cinetice este de 90 J.

2.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$, iar scalar obținem:

$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = 2$ m/s

b. Căldura degajată în acest proces provine din scăderea energiei cinetice a sistemului, astfel că: $Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} \Rightarrow$

$Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 + v_2)^2 = 24$ J

c. Corpul nou format are o mișcare uniform încetinită cu accelerația $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$ și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_c}{t} \Rightarrow v = v_c - \mu gt$. Când corpul se oprește $v=0$, astfel că obținem $t_{op} = \frac{v_c}{\mu g} = 2$ s

3.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru corpul nou format $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$. Deoarece corpurile se mișcă în sens contrar astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}$ și $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ atunci $\vec{v}_c = 0$. Corpul nou format se oprește imediat după ciocnirea plastică a celor două corpuri.

b. Energia cinetică relativă totală este $E_{Crel} = \frac{2mv_{rel}^2}{2} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = 4mv^2$. Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $|v| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_{Crel}}{m}} = 2{,}5$ m/s

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii este:

$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = mv^2 = \frac{E_{Crel}}{4} = 25$ J

4.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din glonte şi blocul de lemn: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v}_c$, iar scalar: $mv_0 = (m+M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv_0}{m+M}$=2 m/s

b. Căldura degajată în urma ciocnirii este $Q = \frac{mM}{2(m+M)}v_0^2 = 198$ J

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctul de formare şi cel de oprire. $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow$ $-\frac{m_t v_c^2}{2} = -\mu m_t g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g}$=2 m

5.a. Când proiectilul străbate blocul de lemn forţele care apar sunt de natură internă pentru sistem şi ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Deoarece în timpul interacţiunii cu proiectilului cu blocul neglijăm forţele de natură externă, conservăm impulsul sistemului. Astfel $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}_2$ şi scalar $m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1(v_1 - v'_1)}{m_2}$=0,8 m/s.

Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetrice pentru bloc între punctul de pornire şi cel de oprire $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2v_2^2}{2} = -\mu m_2 g d \Rightarrow \mu = \frac{v_c^2}{2gd}$=0,16

b. Energia cinetică pierdută de proiectil este: $\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1}{2}(v'^2_1 - v_1^2) = -240$ J

c. $E_{C_{bloc}} = \frac{m_2v_2^2}{2}$=0,32 J

6.a. Deoarece mişcarea vagonului se efectuează cu frecare, accelerația acestuia este $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$. Utilizăm legea vitezei: $v = v_0 - a\Delta t = v_0 - \mu g t = 6$m/s

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului la cuplarea vagoanelor şi aflăm viteza corpului nou format. Obţinem: $m_1v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v}{m_1 + m_2} = 2$ m/s, iar căldura degajată prin ciocnire este:

$Q = |-\Delta E_c| = \frac{m_1v^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = \frac{m_1m_2v^2}{2(m_1+m_2)} = 1{,}2\ 10^5$ J.

c. Aplicăm pentru corpul nou format teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = -\mu(m_1+m_2)g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 20$ m.

7.a. Pentru a afla timpul după care corpurile se ciocnesc, scriem ecuaţiile coordonatelor şi impunem condiţia de întâlnire: $x_1 = x_2$. Alegem originea axelor de coordonate în punctul de unde porneşte corpul m_1.

Astfel: $x_1 = v_{01}t + \frac{a_1t^2}{2} = v_{01}t - \mu g\frac{t^2}{2}$, deoarece $a_1 = -\frac{F_{f_1}}{m_1} = -\mu g$ şi

$$x_2 = d - v_{02}t + \frac{a_2t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2} \Rightarrow v_{01}t - \mu g\frac{t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Din $x_1 = x_2 \Rightarrow \mu g t^2 - (v_{01} + v_{02})t + d = 0 \Rightarrow 2t^2 - 50t + 112{,}5 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $t_1 = 2{,}5$ s și $t_2 = 22{,}5$ s. Soluția acceptată fizic este $t_1 = 2{,}5$ s, deoarece corpul 1 se oprește după $t_{op_1} = \frac{v_{01}}{\mu g} = 10$ s.

b. Aflăm vitezele corpurilor înainte de ciocnire, utilizând legile vitezei: $v_1 = v_{01} - \mu g t_1 = 15$ m/s și $v_2 = -v_{02} + \mu g t_1 = -25$ m/s

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea conservării impulsului:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = 7 \text{ m/s}$$

Pentru a afla distanța parcursă până la oprire de corpul nou format se aplică teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2)gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = 12{,}25 \text{ m}$$

c. Variația energiei cinetice produsă la ciocnirea plastică este:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{m_2v_2^2}{2} = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 = -1280 \text{ J},$$ unde semnul "–" arată că în procesul ciocnirii plastice energia cinetică a sistemului scade și se transformă în căldură

8.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1

$$\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \frac{m_1v^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2} = -\mu m_1 g\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell} = 5 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului, astfel că $m_1v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow$

$$v = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare și sol: $E_c + E_p = E'_{c_{sol}} \Rightarrow \frac{m_tv^2}{2} + m_tg\ell = \frac{m_tv_{sol}^2}{2}$

$\Rightarrow v_{sol} = \sqrt{v^2 + 2g\ell}$. Impulsul noului corpul în momentul în care acesta atinge suprafața pământului este $p_{sol} = (m_1 + m_2)v_{sol} = (m_1 + m_2)\sqrt{v^2 + 2g\ell} = 10$ Ns

9.a. Corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel că la un anumit moment se oprește. Cum $-g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_o}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{g} = 1$ s

b. Din teorema de variație a energiei cinetice între punctul A de pornire și punctul B unde se oprește corpul obținem lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului din momentul aruncării acestuia și până la anularea impulsului. Astfel:

$$\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} \Rightarrow L_{G,AB} = -\frac{mv_0^2}{2} = -10 \text{ J}$$

c. Aplicăm legea conservării energiei între punctul de plecare A şi punctul C unde corpul are viteza v_1. Astfel: $E_{mA} = E_{mC} \Rightarrow E_{cA} + E_{pA} = E_{cC} + E_{pC} \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + E_{pC} \Rightarrow \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + E_{pC} \Rightarrow E_{pC} = m\left(\frac{v_0^2 - v_1^2}{2}\right) + mgh = 10\text{J}$$

d. Deoarece $v_1 > v_0$ înseamnă că corpul se întoarce şi se deplasează spre Pământ, iar cele doi vectori viteză au sensuri diferite. Pe baza teoremei de variaţie a impulsului obţinem: $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$, iar scalar $\Delta p = m(v_0 + |v_1|)$=6 Ns

10.a. În procesul în care sare de pe scândură, broasca apasă scândura cu o forţă orientată vertical în jos, iar scândura acţionează vertical asupra broaştei cu o forţă orientată în sus şi egală conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Aplicăm teorema de variaţie a impulsului broaştei pe verticală în momentul săriturii acesteia, pentru a determina forţa dezvoltată de scândură. Obţinem: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv_0 \sin\alpha = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv_0 \sin\alpha}{\Delta t} = 1$ kN, deoarece pe verticală impulsul iniţial al broaştei este zero (p_i=0).

b. Aplicăm conservarea impulsului pe direcţia orizontală pentru sistemul format din scândură şi broască, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$.

Scalar: $0 = mv_0 \cos\alpha - Mv \Rightarrow v = \frac{mv_0 \cos\alpha}{M} \approx 2{,}16$ m/s

c. Energia cinetică a sistemului imediat după ce sare broasca este: $E_c = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$=11,875 J.

11.a. Conform legilor de coordonate, corpurile au o mişcare rectilinie şi uniformă. Cum $x = x_0 + v_0 t \Rightarrow v_1 = 1$ m/s şi $v_2 = -3$ m/s reprezintă vitezele corpurilor în momentul întâlnirii.

b. Aplicăm legea conservării impulsului şi aflăm viteza corpului format după ciocnirea plastică: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -2$ m/s. Semnul - al vitezei comune arată că noul corp are viteza în sensul de mişcare al corpului 2.

Energia cinetică a sistemului imediat după ciocnire este $E_c = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = 8$ J.

c. Legea de mişcare a corpului nou format este: $x = x_i + v(t - t_i)$, unde x_i reprezintă coordonata la momentul întâlnirii t_i. Aflăm valoarea timpului de întâlnire din condiţia $x_1 = x_2 \Rightarrow 2 + t_i = 4 - 3t_i \Rightarrow t_i = 0{,}5$ s, iar $x_i = 2{,}5$ m. Obţinem legea de mişcare a corpului nou format $x = 2{,}5 - 2t$.

12.a. Primul corp are o mişcare rectilinie uniformă şi pe baza legii de mişcare $x_1 = x_{01} + v_1 t$ prin identificarea coeficienţilor obţinem viteza primului corp v_1=2 m/s. Al doilea corp are o mişcare uniform accelerată şi din legea coordonatei $x_2 = x_{02} + v_{02}t + a_2 t^2/2$ obţinem v_{02}=2 m/s şi a=10 m/s², astfel că viteza corpului

2 este $v_2 = v_{02} + at = 2 + 10t$. Aflăm momentul la care se ciocnesc corpurile din $x_1 = x_2 \Rightarrow t_f = 2$ s, astfel că v_2 =22 m/s

b. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ =12 m/s

c. Căldura degajată în ciocnire este $Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_2 - v_1)^2 = \frac{m}{4}(v_2 - v_1)^2$ =50 J

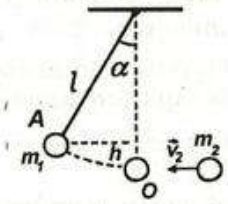
13.a. Deoarece ciocnirea dintre proiectil şi pendulul balistic este plastică, aplicăm legea conservării impulsului pentru sistem, astfel că $mv_0 = (M + m)v$, unde v_0 este viteza proiectilului. Datorită vitezei v, corpul nou format cu masa $M+m$ se ridică la înălţimea h. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul format din corpul cu masa $M + m$ şi Pământ. Astfel energia cinetică a sistemului se transformă în energie potenţială:

$E_c = E_p \Rightarrow \frac{(M + m)v^2}{2} = (M + m)gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ =2 m/s.

b. Din cele două legi de conservare obţinem viteza iniţială a proiectilului $v_0 = \frac{(M + m)}{m}\sqrt{2gh} = 402$ m/s

c. Căldura care se degajă în procesul ciocnirii este

$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(m + M)v^2}{2}$ =804 J



14.a. Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerând că E_{p0}=0, atunci $E_{p_A} = E_{c_O}$. Obţinem:

$m_1g\ell(1 - \cos\alpha) = \frac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} = 2$ m/s.

b. Utilizăm în cazul ciocnirii plastice conservarea impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Scalar: $m_1v_1 - m_2v_2 = 0$, deoarece în momentul ciocnirii corpul al doilea se deplasează în sens opus, iar după ciocnire sistemul de corpuri se opreşte. Obţinem $v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2}$ =4 m/s.

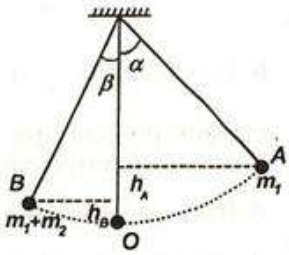
c. Căldura degajată în cursul ciocnirii plastice provine din scăderea energiei cinetice a sistemului de corpuri:

$Q = -\Delta E_c = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = 6$ J, deoarece $E_{cf} = 0$.

15.a. Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că $E_{p_0} = 0 \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_O}$. Obţinem:

$m_1g\ell(1 - \cos\alpha) = \frac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} = 4$ m/s.

b. Aflăm viteza v a corpului nou format dacă după ciocnirea plastică acesta se ridică astfel că firul formează cu verticala unghiul β. Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice, astfel că



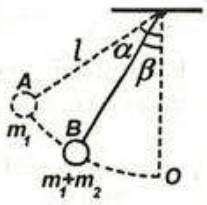
$E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = (m_1+m_2)g\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow$

$v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\beta)} \approx 2{,}07$ m/s.

Aflăm viteza corpului al doilea, dacă ciocnirea corpurilor este plastică. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}$. Considerăm primul caz în care după ciocnirea plastică firul deviază ca în figură.

Obținem scalar $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1+m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1-(m_1+m_2)v}{m_2} \approx 36{,}53$ m/s

Considerăm cazul în care după ciocnirea plastică firul deviază de aceeași parte a verticalei ca în figură.



$m_1v_1 - m_2v_2 = -(m_1+m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1+(m_1+m_2)v}{m_2} \approx 123{,}47$ m/s.

c. Calculăm căldura degajată în cele două cazuri:

$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2 \Rightarrow$

$Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1+v_2)^2$, deoarece corpurile 1 și 2 se deplasează în sens opus.

Obținem: $Q_1 \approx 78{,}22$ J și $Q_2 \approx 773{,}74$ J.

16.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul m_1 între punctul de plecare și punctul inferior al traiectoriei astfel că: $E_c + E_p = E'_c \Rightarrow$

$\frac{m_1v_0^2}{2} + m_1g\ell = \frac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2+2g\ell}$ =6 m/s

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_1 = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2}$ =4 m/s. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare și cel de oprire. Astfel $E'_c = E'_p \Rightarrow \frac{m_tv_c^2}{2} = m_tg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha$ =60°

c. $\frac{E_{mi}}{E_{mf}} = \frac{m_1(v_0^2+2g\ell)}{(m_1+m_2)v_c^2}$ =1,5, deoarece prin ciocnire sistemul pierde energie care se degajă sub formă de căldură

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul și baza jgheabului. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, L_N=0 și $L_G = mg(h-h_0)$

obținem lucrul mecanic al forței de frecare $L_{Ff} = \frac{mv^2}{2} - mg(h-h_0) = -1$ kJ

b. Din definiție $L_{Ff} = -F_f d = -F_f \frac{h-h_0}{\sin\alpha} \Rightarrow F_f = -\frac{L_{Ff}\sin\alpha}{h-h_0} \approx 33{,}33$ N

c. Aplicăm teorema de conservare a impulsului numai pe direcția orizontală pentru sistemul format din sac și vagonet.

Astfel $mv\cos\alpha = (m+M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv\cos\alpha}{m+M} \approx 1{,}44$m/s

d. Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru sac pe direcția verticală. Astfel $\Delta p_y = F\Delta t \Rightarrow |F| = \frac{mv\sin\alpha}{\Delta t}$ =25kN, deoarece $\Delta p_y = p_{yf} - p_{yi} = 0 - mv\sin\alpha$

18.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele *A* și *C*:

$E_{mA} = E_{mC} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$ =4 m/s

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}_c$. iar scalar: $m_1 v_1 = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow$

$v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$ =1,6 m/s

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele *C* și *D* pentru sistemul nou format cu masa m_1+m_2.

Astfel $E_{cC} = E_{pD} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = (m_1+m_2)g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell}$ =0,744

19.a. Energia mecanică a corpului în vârful planului înclinat este

$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{m_1 v_0^2}{2} + m_1 gh$ =80 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele *A* și *B* pentru corpul m_1: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{m_1 v_B^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2}$,

$L_{G,AB} = mgh = mg\ell\sin\alpha$ $L_{N,AB} = 0$. $L_{F_f,AB} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu m_1 g\ell\cos\alpha$ $\Rightarrow$

$\frac{m_1 v_B^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = m_1 g\ell\sin\alpha - \mu m_1 g\ell\cos\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$ =8m/s,

cu sinα=0,6 și cosα=0,8.

Energia mecanică la baza planului înclinat este $E_{mB} = E_{cB} = \frac{m_1 v_B^2}{2}$ =64 J.

Diferența dintre E_{mB} și E_{mA} se explică prin existența forței de frecare care este o forță disipativă, astfel că o parte din energie se pierde. Se poate observa că $E_{mB} - E_{mA} = L_{Ff,AB}$.

c. Aplicăm conservarea impulsului în procesul de ciocnire perfect plastică, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar $m_1 v_B = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v_B}{m_1+m_2}$ =1,6 m/s

d. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de jos şi punctul în care se opreşte sistemul de corpuri. Astfel $E_{mB} = E_{mC} \Rightarrow E_{cB} = E_{pC} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = (m_1+m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{v_c^2}{2g}$ =12,8 cm.

S-a considerat nulă energia potenţială gravitaţională în punctul *B*.

20.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele *A* şi *C*, astfel că $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, iar $L_N = 0$, $L_G = m_1 gh$ şi $L_{Ff} = L_{Ff_{AB}} + L_{Ff_{BC}} = -\mu_1 m_1 ghctg\alpha - \mu_2 m_1 gBC$, astfel că:

$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 gh - \mu_1 m_1 ghctg\alpha - \mu_2 m_1 gBC \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(h - \mu_1 hctg\alpha - \mu_2 BC)}$ =4 m/s

b. Căldura degajată la ciocnirea celor două corpuri este $Q = -\Delta E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1+m_2)}$ =9,6 J

c. Din legea conservării impulsului în procesul ciocnirii aflăm viteza comună a corpurilor: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = (m_1+m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_1 = (m_1+m_2)v_c \Rightarrow$ $v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2}$ =1,6 m/s.

Aplicăm legea conservării energiei între punctul *C* şi punctul de pe jgheab în care corpul se opreşte. Astfel $E_{m_C} = E_{m_D} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = (m_1+m_2)gh \Rightarrow h = \frac{v_c^2}{2g} \Rightarrow$

h=12,8 cm

21.a. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele *A* şi *B*: $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh$ iar $L_{F_f,AB} = -F_f AB \Rightarrow L_{F_f,AB} = -\mu N \frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mg\cos\alpha \frac{h}{\sin\alpha} = -\mu mghctg\alpha$ obţinem:

$\frac{mv_B^2}{2} = mgh - \mu mghctg\alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)}$ =4 m/s

b. Aplicăm conservarea impulsului la cuplarea corpurilor, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar: $mv_B = (m+m')v \Rightarrow mv_B = \left(m + \frac{m}{3}\right)v \Rightarrow v = \frac{3v}{4}$ =3 m/s

c. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctele *B* şi *E*: $\Delta E_{c,BE} = L_{G,BE} + L_{F_f,BE} + L_{N,BE}$.

Cum $\Delta E_{c,BE} = \frac{m_t v^2}{2}$, $L_{N,BE} = 0$, $L_{G,BE} = -m_t gh_{BE} = -m_t gBE\sin\alpha$ şi

$L_{Ffiotal} = L_{Ff,AC} + L_{Ff,CE} = -\mu m_t gd - \mu' m_t gCE\cos\alpha$, obţinem:

$\frac{m_t v^2}{2} = m_t gBE\sin\alpha - \mu m_t gd - \mu' m_t gCE\cos\alpha \Rightarrow CE = \frac{v^2 - 2\mu' gd}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$ =0,5m

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și D:

$\Delta E_{c,AD} = L_{G,AD} + L_{F_f,AD} + L_{N,AD}$, cu $\Delta E_{c,AD} = -\frac{mv_0^2}{2}$, $L_{G,AD} = mg(h_D - h_A) = 0$,

$L_{Ff,total} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} + L_{Ff,CD} = 2L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = -2\mu mghctg\alpha - \mu' mgd \Rightarrow$

$-\frac{mv_0^2}{2} = -2\mu mghctg\alpha - \mu' mgd \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g(2\mu hctg\alpha + \mu' d)} \approx 3{,}16\text{m/s}$

22.a. Energia mecanică a corpului de masă m_1 este $E_m = E_c + E_p = E_p = m_1gh = m_1g\ell\sin\alpha \Rightarrow E_m$=1,2 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1 între punctul de plecare și baza planului înclinat, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum

$\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2}$, L_N=0, $L_G = m_1gh = m_1g\ell\sin\alpha$ și $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu_1 N\ell = -\mu_1 m_1 g\ell\cos\alpha$,

obținem: $\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1g\ell\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\ell\cos\alpha \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)}$=2 m/s.

Deoarece corpul are o mișcare uniform accelerată, atunci

$\ell = v_m t = \frac{v_1}{2}t \Rightarrow t = \frac{2\ell}{v_1}$=0,8 s

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format din momentul formării și până în momentul opririi. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cu

$\Delta E_c = 0 - E_{ci} = -\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{Ff} = -\mu_2(m_1+m_2)gd_2$. Obținem:

$-\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2} = -\mu_2(m_1+m_2)gd_2 \Rightarrow v_c = \sqrt{2\mu_2 gd_2}$ =0,6 m/s

d. Aflăm viteza corpului m_1 imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de conservare a impulsului pentru sistemul de corpuri format prin ciconire. Astfel $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar, $m_1v_2 = (m_1+m_2)v_c = 3m_1v_c \Rightarrow v_2 = 3v_c$=1,8 m/s

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1 între baza planului înclinat și punctul de ciocnire. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{Ff}$, cu

$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \frac{m_1v_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{Ff} = -\mu_2 m_1 gd_1$. Obținem:

$\frac{m_1v_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} = -\mu_2 m_1 gd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\mu_2 g}$=38 cm

23.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul C_1 între punctel A și B, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = 0$,

$L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu m_1 gd$ iar $\Delta E_{c_{AB}} = E_{cB} - E_{cA} = \frac{m_1v_B^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2}$ obținem:

$\frac{m_1v_B^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \Rightarrow v_B$=3 m/s

b. Energia mecanică inițială a corpului C_2 este:

$E_{mi} = E_{Ci} + E_{pi} = E_{pi} = m_2 g\ell$ =0,48 J

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul C_2 între punctul de plecare și punctul C, astfel că:

$E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow E_{pi} = E_{cf} \Rightarrow m_2 g\ell = \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g\ell}$. Impulsul corpului C_2, imediat înainte de impact este $p_2 = m_2 v_2 = m_2\sqrt{2g\ell}$ =0,24 NS

d. Aplicăm conservarea impulsului în momentul ciocnirii dintre corpurile C_1 și C_2 în punctul C, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_B + m_2\vec{v}_2 = 0$, iar scalar

$m_1 v_B - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 v_B}{v_2}$ =80 g

24.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic pe primii 7 m, lucrul mecanic este: $L_F = A_{trapez} - A_{triunghi} = \frac{(2+5)40}{2} - \frac{2\cdot 40}{2}$ =80 J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice, astfel că: $\Delta E_c = L_F + L_{Ff}$.

Cum $\Delta E_c = E_{cf} = \frac{mv^2}{2}$, iar $L_{Ff} = -F_f x = -\mu mgx$, obținem:

$v = \sqrt{\frac{2}{m}(L_F - \mu mgx)} \approx 19{,}1$ m/s.

c. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru a afla viteza comună a corpului nou format: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, astfel că scalar obținem $mv = (m+m_1)v_c \Rightarrow$ v_c=10m/s.

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_c v_c^2}{2} = -\mu m_c g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g}$ =20 m.

25.a. Aflăm viteza corpului lansat pe suprafața orizontală imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

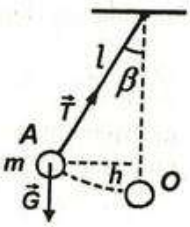
$\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu Mgd \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd}$.

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea de conservare a impulsului:

$Mv = (M+m)v_c \Rightarrow v_c = \frac{Mv}{M+m} = 5$ m/s.

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul nou format, astfel că energia cinetică se transformă în energie potențială. Din $E_c = E_p \Rightarrow$

$\frac{(M+m)v_c^2}{2} = (M+m)g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$.



c. Impunem condiția ca pe direcția firului rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă: $T - m_t g\cos\beta = \frac{m_t v_A^2}{\ell} \Rightarrow T = m_t\left(\frac{v_A^2}{\ell} + g\cos\beta\right)$. Aplicăm

pentru corpul cu masa $m_t = M + m$, legea conservării energiei mecanice: $E_{c_0} = E_{p_A} + E_{c_A} \Rightarrow \frac{m_t v_c^2}{2} = m_t g\ell(1-\cos\beta) + \frac{m_t v_A^2}{2}$

$\Rightarrow v_A^2 = v_c^2 - 2g\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow T = (M+m)\left(\frac{v_c^2}{\ell} + 3g\cos\beta - 2g\right)$=4,785 N.

26.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corp între punctul de plecare şi punctul A. $E_p = E_c \Rightarrow mgR(1-\cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} \approx 2{,}86$ m/s, deoarece $\alpha=45^0$

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_A = 2m\vec{v}_c$, astfel că $v_c=v_A/2$. Aplicăm pentru corpul nou format legea conserevării energiei mecanice între punctul A şi punctual de oprire: $E_{cA} = E_p \Rightarrow \frac{m_t v_c^2}{2} = m_t gh \Rightarrow h = \frac{v_A^2}{8g} = \frac{R(1-\cos\alpha)}{4} \approx 10{,}25$ cm

c. Căldura degajată în urma ciocnirii corpurilor este:

$Q = \frac{nv_A^2}{4} = \frac{mgR(1-\cos\alpha)}{2} \approx 41$mJ

27.a. Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul care coboară din A în B, astfel că $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgR = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR} \approx 4{,}47$ m/s

b. Pe baza conservării impulsului obţinem $mv_0 = 2mv \Rightarrow v = v_0/2 \approx 2{,}235$ m/s

c. Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul nou format între punctul B şi punctul E: $E_{cB} = E_{pE} \Rightarrow \frac{m_t v^2}{2} = m_t gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0}{8g} = \frac{R}{4}$=25 cm

28.a. Aflăm viteza bilei lansată vertical de jos în sus imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variaţie a impulsului:

$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1 v_1 - m_1 v_0 = -m_1 gt \Rightarrow v_1 = v_0 - gt = 40$ m/s. Aflăm viteza comună a corpului nou format în urma ciocnirii plastice utilizând legea de conservare a impulsului: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 10$ m/s.

b. Căldura degajată la ciocnirea plastică este:

$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} v_1^2 = 600$ J

c. Aplicăm pentru corpul nou format prin ciocnirea plastică legea conservării energiei mecanice, considerând pe sol E_p=0 şi obţinem: $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{p_f} \Rightarrow$

$\frac{m_1v^2}{2}+m_1gh=m_1gh_1 \Rightarrow h_1=h+\frac{v^2}{2g}$. Din legea coordonatei aflăm la ce înălțime urcă bila inainte de ciocnire: $h=v_0t-\frac{gt^2}{2}$=100 m. Obținem h_1=105 m.

29.a. Impunem condiția de intâlnire corpurilor: $x_1=x_2$ alegând originea axelor de coordonate pe sol. Cum $x_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ și $x_2=h_{max1}-\frac{gt^2}{2}$, unde h_{max1} reprezintă înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp. Din legea conservării energiei mecanice aflăm h_{max1}, astfel că

$E_c=E_p \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2}=m_1gh_{max1} \Rightarrow h_{max1}=\frac{v_0^2}{2g}$. Obținem $v_0t-\frac{gt^2}{2}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_i=\frac{v_0}{2g}$=2s

b. Aflăm vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire. Astfel $v_1=v_0-gt_i=\frac{v_0}{2}$ și $v_2=-gt_i=-\frac{v_0}{2}$.

Din legea conservării impulsului: $\vec{p}_i=\vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_c \Rightarrow v_c=\frac{(m_1-m_2)v_0}{2(m_1+m_2)}$=5 m/s

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii este:

$Q=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2=\frac{m_1m_2v_0^2}{2(m_1+m_2)}$=20 J

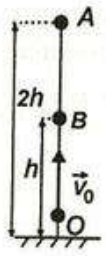
30.a. Alegând axa Ox cu originea pe sol și considerând origine de timp momentul pornirii primului corp atunci $x_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ și $x_2=v_0(t-\Delta t)-\frac{g(t-\Delta t)^2}{2}$. Obținem condiția de intâlnire $x_1=x_2 \Rightarrow t_i=\frac{\Delta t}{2}+\frac{v_0}{2}$=3 s

b. Viteza corpului 1 imediat înainte de ciocnire este $v_1=v_0-gt_i=-10$ m/s. Pe baza teoremei de variație a impulsului obținem: $\Delta\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1-m_1\vec{v}_0$, iar scalar $\Delta p_1=m_1(v_0+|v_1|)$=3 Ns

c. Viteza corpului 2 imediat înainte de ciocnire este $v_2=v_0-g(t_i-\Delta t)$=10 m/s. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_i=\vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_c \Rightarrow$ viteza corpului nou format dacă corpurile se ciocnesc plastic este v_c=0 m/s, deoarece $m_1=m_2=m$

d. Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este:

$Q=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_2-v_1)^2=\frac{m}{4}(v_2-v_1)^2$=10 J



31.a. Din legea conservării energiei aflăm înălțimea la care se ridică corpul lansat de la sol $E_{cO}=E_{pB} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}=mgh \Rightarrow h=\frac{v_0^2}{2g}$. Din legea

conservării energiei mecanice pentru corpul lăsat liber aflăm viteza acestuia înainte de ciocnire, astfel că:

$E_{pA} = E_{pB} + E_{cB} \Rightarrow mg2h = mgh + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = gh = v_0^2 \Rightarrow v_2 = v_0$ =4 m/s

b. Din legea conservării impulsului obținem $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}_c$, iar scalar $v_c = v_0/2 = 2$ m/s

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul format prin ciocnire între punctul de formare și sol: $E_{pB} + E_{cB} = E_{csol} \Rightarrow E_{csol} = \frac{m_t v_c^2}{2} + m_t gh = \frac{5mv_0^2}{4} \Rightarrow$

E_{csol}=40 J

32.a. Impunem condiția de întâlnire: $x_1 = x_2$, astfel că deoarece $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$ obținem $t_i = \frac{h}{v_{02}}$. Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $v_1 = -gt_i = -\frac{gh}{v_{02}}$ și $v_2 = v_{02} - gt_i = v_{02} - g\frac{h}{v_{02}}$. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ iar scalar $m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \Rightarrow$

$-m_1\frac{gh}{v_{02}} + m_2\left(v_{02} - \frac{gh}{v_{02}}\right) = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)gh}{m_2}} \approx 46{,}24$ m/s

b. $\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2} = \frac{m_1g^2h^2}{m_2\left(v_{02}^2 - gh\right)^2} = \frac{m_2}{m_1}$=0,6

c. Înălțimea la care s-a produs ciocnirea este $h_i = h - \frac{gt_i^2}{2} = \frac{m_1m_2h}{m_1+m_2}$=65 m

33.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică în momentul lansării se transformă în energie potențială la înălțimea maximă: $E_c = E_p \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} = m_1gh_{max}$, astfel că înălțimea maximă la care ajunge primul corp este $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Aflăm viteza primului corp la înălțimea $h = \frac{3}{4}h_{max} = \frac{v_0^2}{8g}$, imediat înainte de ciocnire. Aplicăm legea conservării energiei mecanice:

$E_{c_i} = E_{c_f} + E_{p_f} \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + m_1gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \frac{v_0}{2} = 15$ m/s.

b. Aflăm timpul de mișcare al primului corp până momentul ciocnirii, aplicând teorema de variație a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1v_1 - m_1v_0 = -m_1g\Delta t \Rightarrow$

$-\frac{m_1v_0}{2} = -m_1g\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{2g} = 1{,}5$ s.

c. Aflăm viteza corpului al doilea imediat înainte de ciocnirea plastică, dacă se cunoaşte că după ciocnire corpul nou format se opreşte. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $p_i = p_f = 0 \Rightarrow m_1v_1 - m_2v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} = 45$ m/s

34.a. Când omul urcă pe scară, forţele care apar sunt de natură internă pentru sistem, astfel că ele nu modifică impulsul total al sistemului. Prin urmare impulsul sistemului aerostat-om se conservă, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Cum $\vec{p}_i = 0$, deoarece sistemul se află în repaus atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0$, deoarece cu $\vec{v}_1$ am notat viteza omului faţă de sol şi cu $\vec{v}_2$ viteza aerostatului faţă de sol. Cum $\vec{u}$ este viteza relativă a omului în raport cu aerostatul, atunci $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + M(\vec{v}_1 - \vec{u}) = 0 \Rightarrow mv_1 + Mv_1 - Mu = 0$. Obţinem viteza omului faţă de sol $v_1 = \frac{Mu}{M+m}$ =0,36 m/s

b. Viteza aerostatului faţă de sol este $v_2 = -\frac{mu}{M+m} = -0{,}04$ m/s. Semnul minus apare deoarece aerostatul se deplasează în sens contrar sensului de deplasare al omului.

c. Lucrul mecanic dezvoltat de om prin punerea sistemului în mişcare este:

$L = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{Mm \cdot u^2}{2(M+m)}$ =5,76 J.

35.a. Când patinatorul aruncă rucsacul acţionează asupra acestuia cu o forţă, ar rucsacul reacţionează asupra patinatorului cu o forţă egală şi de sens contrar conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Cum cele două forţe sunt de natură nternă pentru sistem ele nu modifică impulsul total al acestuia. Astfel conservăm impulsul pentru sistem: $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$.

Cum $\vec{p}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_f = 0 \Rightarrow M\vec{v}_1 + m\vec{v} = 0$, iar scalar $v_1 = -0{,}5$ m/s este viteza patinatorului după ce acesta aruncă bila. Semnul minus al vitezei arată că patinatorul se deplasează în sens opus sensului în care se mişcă rucsacul.

b. Lucrul mecanic efectuat de patinator pune în mişcare atât rucsacul cât şi pe l este: $L = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m(M+m)v^2}{2M} = 210$ J.

. Din momentul punerii în mişcare, patinatorul are o mişcare uniform frânată u acceleraţia $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$, astfel că utilizând teorema de variaţie a energiei inetice obţinem distanţa parcursă de patinator până la oprire. Astfel: $\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow 0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 12{,}5$ m.

6.a. Din condiţia de echilibru impusă corpului suspendat de resortul vertical obţinem $mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$ =500 N/m

b. Energia potențială a resortului comprimat este $W = \frac{k(\ell - \ell_1)^2}{2} = 1{,}6$ J

c. Forțele elastice care acționează asupra corpurilor sunt forțe de natură internă pentru sistem și ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Cum $\vec{p}_i = 0$ atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$. Scalar $m_1v_1 = m_2v_2$ (1). Energia eliberată la destinderea resortului este preluată de cele două corpuri, astfel că $W = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$ (2). Din (1) și (2) obținem: $v_1 = \sqrt{\frac{2m_2W}{m_1(m_1+m_2)}} \approx 1{,}46$ m/s și $v_2 = \sqrt{\frac{2m_1W}{m_2(m_1+m_2)}} \approx 0{,}73$ m/s

37.a. Filmată în sens invers explozia unui obuz, poate fi considerată o ciocnire plastică și prin urmare se poate aplica și exploziilor legea de conservare a impulsului: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Scalar: $Mv = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow$ $v_2 = \frac{Mv - m_1v_1}{m_2} = \frac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 375$ m/s. Deoarece viteza v_2 este pozitivă, fragmentul al doilea se deplasează în același sens cu obuzul.

b. Energia degajată în urma exploziei provine din scăderea energiei cinetice:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1M}{2(M-m_1)}(v - v_1)^2 = 125 \text{ kJ}.$$

c. Fracțiunea din energia inițială degajată prin explozie este $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} \approx 1{,}56\%$.

deoarece $E_{Ci} = \frac{Mv^2}{2} = 8$ MJ

34.a. Din legea coordonatei: $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$, pe baza identificării coeficienților, obținem: $x_0 = 10$ m, $v_0 = 20$ m/s și $a = -5$ m/s². Deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, $a = -\frac{F_f}{m} = -\mu g \Rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = 0{,}5$.

b. Aflăm viteza corpului imediat înainte de explozie utilizând legea vitezei: $v = v_0 + at_1 = 15$ m/s, deoarece $t_1 = 1$ s. Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul exploziei: $mv = m_2v_2 - m_1v_1$, unde v_1 și v_2 reprezintă vitezele celor două fragmente imediat după explozie.

Cum vectorial $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, scalar $v_r = v_1 + v_2$. Cum $m_1 = \frac{m}{4}$ și $m_2 = \frac{3m}{4}$ atunci $mv = \frac{3m}{4}v_2 - \frac{m}{4}(v_r - v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{4v + v_r}{4} = 21$ m/s și $v_1 = \frac{3v_r - 4v}{4} = 3$ m/s.

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare fragment, pentru a afla distanța parcursă de fiecare fragment până la oprire. Pentru primul fragment: $\Delta E_{c_1} = L_{F_{fr}} \Rightarrow -\frac{m_1 v_1^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op_1} \Rightarrow s_{op_1} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 0{,}9$ m.

Analog pentru fragmentul al doilea obținem: $s_{op_2} = \frac{v_2^2}{2\mu g} = 44{,}1$ m. Distanța dintre cele două fragmente după ce acesta se opresc este: $d = s_{op_1} + s_{op_2} = 45$ m

39.a. Energia cinetică inițială a sistemului de vagoane este:

$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = 887{,}5$ kJ

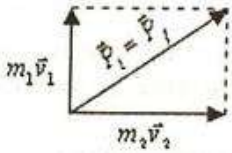
b. Primele se ciocnesc vagoanele 1 cu 2 și pe baza conservării impulsului obținem $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{12} \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3$ m/s

c. Consevăm impulsul pentru întreg sistemul:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3) v \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 4$ m/s

40.a. Energia cinetică a sistemului imediat înainte de ciocnire este

$E_{Ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 8{,}75$ J



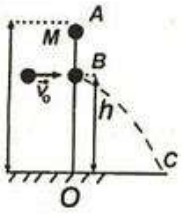
b. Aplicăm legea de conservare a impulsului:

$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1'$ și scalar

$v_1' = \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} \approx 18{,}03$ m/s.

c. $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 (m_2 - m_1) v_2^2}{2 m_1} = 7{,}5$J

41.a. Aflăm viteza cu care ajunge sfera la înălțimea h, utilizând legea de conservare a energiei mecanice: $E_{p_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$, deoarece pe sol $E_{p_O} = 0$.



Astfel $MgH = Mgh + \frac{Mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \approx 8{,}94$ m/s.

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul ciocnirii elastice: $M\vec{v}_B + m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}$. Scalar obținem:

$M^2 v_B^2 + m^2 v_0^2 = (M+m)^2 v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{M^2 v_B^2 + m^2 v_0^2}}{M+m} = \frac{\sqrt{2M^2 g(H-h) + m^2 v_0^2}}{M+m} \approx 8{,}11$m/s

c. Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice:

$E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_c} \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} + (M+m)gh = \frac{(M+m)v_c^2}{2} \Rightarrow v_c = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 13{,}63$m/s

42.a. Din legea coordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ prin identificare găsim v_0=10 m/s şi a=−2 m/s², astfel legea vitezei este $v = v_0 + at = 10 - 2t$. La momentul t_1 viteza este v_1=4 m/s iar impulsul corpului $p_1 = m_1 v_1$=10 Ns

b. În ciocnirea perfect elastică se aplică legea de conservare a impulsului şi legea de conservare a energiei cinetice:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ (1) şi $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$ (2).

Din (1) şi (2) obţinem $v_1' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$ şi $v_2' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2$.

Ţinând cont că $v_1 = v$ şi v_2=0 aflăm pe baza formulelor anterioare vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică.

$v_1' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2}$=1 m/s şi $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$=5 m/s. Deoarece $m_1 > m_2$, după ciocnire corpurile se mişcă în sensul în care s-a mişcat primul corp înainte de ciocnire

c. Energia cinetică a celui de-al doilea corp imediat după ciocnire este

$E'_{c2} = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m_1^2 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)^2}$=18,75 J

43.a. Din legile de conservare aplicate în cazul ciocnirii perfect elastice: legea de conservare a impulsului $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ şi legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$ obţinem vitezele particulelor imediat după ciocnire $v_1' = \frac{2(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 = -\frac{3v_2 + v_1}{2} = -16$ m/s şi

$v_2' = \frac{2(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{m_1 + m_2} + v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$=8 m/s.

b. Dacă prima particulă se opreşte imediat după ciocnire atunci $v_1' = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{3} \approx -6{,}66$ m/s.

c. Din legea de conservare a impulsului $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow$ $v'_2 = \frac{v_1 - 3v_2 - v'_1}{3}$=1 m/s. Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire

$E_{ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v_1^2 + 3v_2^2\right)$ iar energia cinetică a sistemului după ciocnire

$E_{cf} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v_1'^2 + 3v_2'^2\right)$.

Astfel $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} = \frac{E_{cf} - E_{ci}}{E_{ci}} = \frac{E_{cf}}{E_{ci}} - 1 \Rightarrow f = -93{,}75\%$

d. Fracțiunea din energia cinetică inițială a primei particule care este transferată particulei a doua este $f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v'^2_2}{m_1 v_1^2}$.

Cum $v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ deoarece v_2=0 obținem $f = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ =75%

44.a. Pe baza legii de conservare a impulsului $mv_0 = mv'_1 + mv'_2$ și din legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{mv'^2_2}{2}$ obținem vitezele particulelor imediat după ciocnire $v'_1 = 0$ și $v'_2 = v_0$ =5 m/s. Deoarece corpurile au masele egale după ciocnirea perfect elastică ele schimbă vitezele între ele.

b. Datorită forței de frecare care acționează asupra corpului al doilea energia cinetică a acestui corp se degajă sub formă de căldură, astfel că $Q = \frac{mv'^2_2}{2}$ =6,25 J

c. Imediat după ciocnire primul corp se oprește. Din teorema de variație a energiei cinetice aflăm distanța parcursă se al doilea corp după ciocnire. Astfel

$$\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{mv'^2_2}{2} = -\mu mgs_2 \Rightarrow s_s = \frac{v'^2_2}{2\mu g} = 12{,}5 \text{ m}$$

45.a. Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 3$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 8$ m/s pentru că v_2=0

Deoarece ambele viteze sunt pozitive înseamnă că după ciocnire corpurile se deplasează în același sens.

b. Energia cinetică a sistemului de corpuri imediat după ciocnire este $E'_c = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2}$ =5 J

c. Aflăm distanțele pe care le parcurg cele două corpuri după ciocnire până la oprire, aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare corp.

Pentru corpul cu masa m_1: $\Delta E_{c_1} = L_{F_{f_1}} \Rightarrow -\frac{m_1 v'^2_1}{2} = -\mu m_1 g s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v'^2_1}{2\mu g}$.

Pentru corpul cu masa m_2: $\Delta E_{c_2} = L_{F_{f_2}} \Rightarrow -\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v'^2_2}{2\mu g}$.

Distanța dintre corpuri când s-au oprit este: $d = s_2 - s_1 = \frac{v'^2_2 - v'^2_1}{2\mu g} = 27{,}5$ m.

46.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctele A și B: $E_{pA} = E_{cA} \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell}$ =4 m/s

b. Aflăm vitezele corpurilor imediat după ciocnirea perfect elastică: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 2{,}4$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 6{,}4$ m/s pentru că v_2=0

Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul al doilea între punctul B și punctul unde se oprește D. Astfel: $\Delta E_{cBD} = L_N + L_G + L_{Ff}$.

Deoarece L_N=0 și $L_G = -m_2gh$ și $L_{Ff} = -\mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 gh ctg\alpha$ obținem:

$$-\frac{m_2 v_2'^2}{2} = -m_2gh - \mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 gh ctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v_2'^2 - 2\mu_1 gBC}{2g(1+\mu_2 ctg\alpha)} = 1 \text{ m}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_1'^2}{2g\ell} = 0{,}64$

47.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B pentru corpul m_1: $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} = 1$ m/s

b. Imediat după ciocnirea elastică, deoarece inițial bila se afla în repaus, aceasta va avea viteza: $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 0{,}5$ m/s

c. Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de lovire și punctul în care bila se oprește. Astfel $E_{cB} = E_{pC'} \Rightarrow \frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 gh \Rightarrow h = \frac{v_2'^2}{2g} = 1{,}25$ cm

48.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctele A și B: $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow m_1 gR = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} \approx 6{,}32$ m/s. După ciocnirea perfect elastică a corpurilor obținem: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \Rightarrow$

$v'_1 \approx -2{,}1$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \approx 4{,}2$ m/s pentru că v_2=0

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 gh \Rightarrow h = \frac{v_1'^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R \Rightarrow$

$h \approx 22{,}22$ cm

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul al doilea imediat după ciocnire $\Delta E_{cBC'} = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2 v_2'^2}{2} = -\mu m_2 gBC \Rightarrow BC = \frac{v_2'^2}{2\mu g} \Rightarrow$

$$BC = \frac{4m_1^2 R}{\mu(m_1 + m_2)^2} \approx 4{,}44 \text{ m}$$

49.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctul de plecare și punctul înainte de ciocnire:

$$E_p = E \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell} \approx 4{,}47 \text{ m/s}$$

b. Vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică sunt $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \approx -1{,}5$ m/s şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \approx 3$ m/s deoarece $v_2=0$.
Utilizăm legile de conservare a energiei mecanice pentre cele două corpuri imediat după ciocnire. Pentru primul corp: $\frac{m_1 v'^2_1}{2} = m_1 g h_1 \Rightarrow$

$h_1 = \frac{v'^2_1}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \ell \approx 11{,}11$ cm şi pentru corpul al doilea $\frac{m_2 v'^2_2}{2} = m_2 g h_2 \Rightarrow$

$h_2 = \frac{v'^2_2}{2g} = \frac{4m_1^2 \ell}{(m_1 + m_2)^2} \approx 44{,}44$ cm

c. Deoarece după ciocnire bilele se ridică la aceeaşi înălţime, atunci $h_1=h_2 \Rightarrow$
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

50.a. Aflăm viteza bilei m_1 imediat înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice: $E_c = E_p \Rightarrow m_1 g \ell = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell}$. Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnire şi obţinem:

$v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{2g\ell}}{m_1 + m_2} = -2$ m/s şi

$v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{2g\ell}}{m_1 + m_2} = 2$ m/s.

Deoarece ecele două viteze au semne opuse, bila 1 se întoarce iar bila 2 se va deplasa în sensul în care a fost ciocnită.

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul format din bila m_1 şi Pământ. Astfel: $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v'^2_1}{2} = m_1 g \ell (1 - \cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v'^2_1}{2g\ell} \Rightarrow$

$\cos\alpha = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0{,}75$

c. Aplicăm pentru corpul cu masă m_2 teorema de variaţie a energiei cinetice:

$\Delta E_{c_2} = L = L_{F_f} + L_{F_{el}} \Rightarrow -\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -\mu m_2 g \ell' - \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow k = \frac{m_2\left(v'^2_2 - 2\mu g \ell'\right)}{\Delta\ell^2} = 10{,}2$ kN/m

51.a. Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică:

$v_A = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} - v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{v_0}{3}$ şi $v_B = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{2v_0}{3}$, astfel că raportul vitezelor corpurilor imediat după ciocnire este $\frac{v_B}{v_A} = -2$

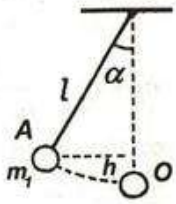
b. Raportul energiilor cinetice ale celor două corpuri, imediat după ciocnire este
$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = \frac{mv_A^2}{2mv_B^2} = \frac{1}{8}$.

c. Aplicăm pentru sistemul corp B şi resort legea conservării energiei mecanice:

$$E_{c_B} = E_{p_{el}} \Rightarrow \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow \Delta\ell = \sqrt{\frac{8mv_0^2}{9k}}.$$

Cum $E_{c_0} = \frac{mv_0^2}{2}$ obţinem $\Delta\ell = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E_{c_0}}{k}} = 4$ cm.

52.a. Aflăm viteza bilei cu masa m_1 înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice:



$E_{pA} = E_{cO} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnire: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{v}{2}$ şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3}{2} v$. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru fiecare bilă: $E_c = E_p$. Pentru bila cu masa m_1: $\frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g h_1 \Rightarrow$ $h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{v^2}{8g} = \frac{h}{4} = 5$ cm şi pentru bila cu masa m_2: $\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 g h_2 \Rightarrow$ $h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{9v^2}{8g} = \frac{9h}{4} = 45$ cm. Astfel raportul înălţimilor este $\frac{h_2}{h_1} = 9$.

b. Deoarece bila m_1 ciocneşte perfect plastic o a doua bilă m_2, aflăm viteza corpului nou format după ciocnire utilizând legea de conservare a impulsului: $m_1 v = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3v}{4}$. Utilizând legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format, astfel că:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = (m_1 + m_2) g h' \Rightarrow h' = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{9v^2}{32g} = \frac{9h}{16} = 11{,}25 \text{ cm}.$$

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este:

$$Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{3m_2 gh}{4} = 1{,}5 \text{ J}$$

53.a. Viteza particulei a doua după ciocnirea perfect elastică este $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$, unde v este viteza inainte de ciocnire a primei bile. Fracţiune din energia cinetică iniţială a primei particulei transferată particulei a doua este:

$$f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v_2'^2}{m_1 v^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 75\%$$

b. Dacă ciocnirea este plastică viteza comună a particulelor este $v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$

Fracţiune din energia cinetică iniţială a primei particulei transferată particulei a doua este: $f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v'^2_c}{m_1 v^2} = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} = 18{,}75\%$

c. Căldura degajată în ciocnirea plastică este $Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1+m_2)}$. Astfel fracţiunea din energia cinetică iniţială a primei particulei care se transformă în căldură în cazul ciocnirii plastice este $f = \frac{Q}{E_{c1}} = \frac{m_2}{m_1+m_2} = 75\%$

54.a. Ciocnirea moleculei cu pistonul este o ciocnire perfect elastică cu un corp cu masa foarte mare (cu un perete). Aflăm viteza moleculei după ciocnirea perfect elastică, ţinând cont că $m_1 = m$ şi $m_2 \to \infty$. Obţinem viteza moleculei

mediat după ciocnire: $v_1' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1+m_2} - v_1 \Rightarrow v_1' = \frac{2\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2}+1} - v_1$

$v_1' = 2v_2 - v_1 = -498$ m/s. Deoarece molecula are după ciocnirea cu pistonul viteza cu minus înseamnă că se întoarce după ciocnire.

b. Variaţia impulsului moleculei este:

$\Delta p = mv_1' - mv_1 = m(v_1' - v_1) = 2m(v_2 - v_1) = -5\cdot 10^{-23}$ Ns

c. Variaţia energiei cinetice a moleculei este:

$\Delta E_c = \frac{mv_1'^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_1'^2 - v_1^2\right) = 2mv_2(v_2 - v_1) = 10^{-22}$ J.

55.a. Deoarece corpul ciocneşte perfect elastic un alt corp vitezele după ciocnire sunt: $v_1' = \frac{2(mv_1 + Mv_2)}{m+M} - v_1$ şi $v_2' = \frac{2(mv_1 + Mv_2)}{m+M} - v_2$. Deoarece peretele are masă foarte mare astfel că $M \to \infty$ obţinem viteza corpului imediat după ciocnirea cu peretele $v'_1 = 2v_2 - v_1 = -1$ m/s².

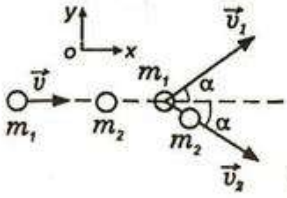
b. Pe baza principiului acţiunii şi reacţiunii forţa cu care peretele acţionează asupra corpului este egală cu forţa cu care corpul acţionează asupra peretelui. Conform teoremei de variaţie a impulsului vectorial: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, iar scalar: $|\Delta p| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{|p_f - p_i|}{\Delta t} = \frac{|mv'_1 - mv_1|}{\Delta t} = \frac{2m(v_1 - v_2)}{\Delta t} = 8$ kN

c. Deoarece corpul cu masă m_1 se opreşte atunci $v'_1 = 0$ obţinem $v_1/v_2 = 1/2$

56.a. Utilizăm formulele vitezelor pentru ciocnirea perfect elastică:

$v_1' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2} - v = \frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2}$ şi $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}$.

$v_1' = -v_2' \Rightarrow \frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2} = -\frac{2m_1 v}{m_1+m_2} \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$.



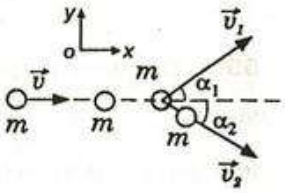
b. Deoarece ciocnirea particulelor este perfect elastică utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, unde $\vec{v}$ este viteza primei

particule înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:
pe Ox: $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\alpha$ (1) şi pe Oy: $0 = m_1 v_1 \sin\alpha - m_2 v_2 \sin\alpha \Rightarrow$ $m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$ (2). Din (1) şi (2) obţinem $m_1 v = 2 m_1 v_1 \cos\alpha \Rightarrow$ $v = 2v_1 \cos\alpha$. Aplicăm legea conservării energiei cinetice şi obţinem:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow 4 m_1 v_1^2 \cos^2\alpha = m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4\cos^2\alpha - 1 = 2$$

57.a. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow$ $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (1), iar din legea de conservare a energiei cinetice $E_c = E_{c_1} + E_{c_2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$ (2), unde cu v am notat viteza neutronului înainte de ciocnire iar cu v_1 şi v_2 vitezele neutronilor imediat după ciocnire. Ridicăm relaţia (1) la pătrat şi obţinem $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha$ şi pe baza relaţiei (2) obţinem $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$, unde α reprezintă unghiul dintre direcţiile de mişcare ale neutronilor după ciocnire. Direcţiile de mişcare ale celor doi neutroni după ciocnire sunt perpendiculare.

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$.
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe Ox: $v = v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2$ (1) şi pe Oy: $0 = v_1 \sin\alpha_1 - v_2 \sin\alpha_2$ (2)
Din legea de conservare a energiei cinetice obţinem:



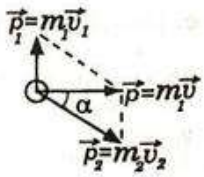
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \text{ (3)}$$

Cum $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ (4).
Din relaţiile (3) şi (4) obţinem:
$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 90 \Rightarrow \alpha_2 = 90 - \alpha_1$.

Din (2) $\Rightarrow v_2 = \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = v_1 tg\alpha_1$ şi din (1) $\Rightarrow v = v_1 \cos\alpha_1 + \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} \sin\alpha_1$.

Obţinem $v_1 = v\cos\alpha_1 = 3 \cdot 10^4$ m/s $\Rightarrow v_2 = v\sin\alpha_1 \approx 1{,}73 \cdot 10^4$ m/s.

58.a. Aplicăm în cazul ciocnirii perfect elastice legea conservării impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, unde $\vec{v}$ reprezintă viteza primei particulei înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vitezele particulelor 1 şi 2 după ciocnirea perfect elastică. Din teorema lui Pitagora obţinem $m_2^2 v_2^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v^2$ (1).



Pe baza conservării energiei cinetice:

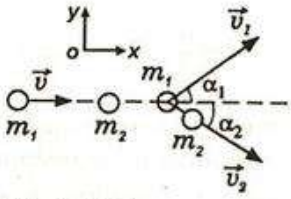
$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \text{ (2).}$$

Din (1) şi (2) obţinem $v_1^2 = \frac{v^2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$. Viteza primei particule imediat după ciocnire este $v_1 = v\sqrt{\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1{,}55$ m/s şi viteza particulei a doua imediat după ciocnire este $v_2 = v\sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 6{,}32$ m/s

b. Fracţiunea cerută este: $f = \frac{E_{c_{pierdut}}}{E_{c_i}} = \frac{E_{c_i} - E_{c_f}}{E_{c_i}} = 1 - \frac{E_{c_f}}{E_{c_i}} \Rightarrow$

$f = 1 - \frac{m_1 v_1^2}{m_1 v^2} = 1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}4.$

59.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ şi proiectăm pe axele de coordonate.



Pe Ox: $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha_1 + m_2 v_2 \cos\alpha_2$ (1) şi pe Oy: $0 = m_1 v_1 \sin\alpha_1 - m_2 v_2 \sin\alpha_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha_1}{m_2 \sin\alpha_2}$.

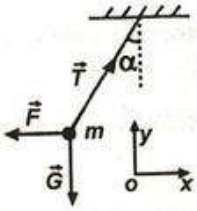
Introducem în relaţia (1) şi obţinem $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha_1 + \frac{m_1 v_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} \Rightarrow$ vitezele corpurilor după ciocnire sunt $v_1 = \frac{v \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 7.326$ m/s şi $v_2 = \frac{m_1 v \sin\alpha_1}{m_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 2{,}6$ m/s.

b. Raportul energiilor cinetice ale corpurilor după ciocnire este $\frac{E_{c_1}}{E_{c_2}} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{\sin^2\alpha_2}{\sin^2\alpha_1} = 4$.

c. Căldura degajată provine pe seama scăderii energiei cinetice:

$Q = \frac{m_1 v^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) \approx 16{,}45$ J.

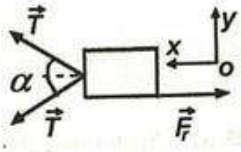
4.1. Echilibrul de translație



1.a. Impunem condiția de echilibru corpului: $\vec{T}+\vec{F}+\vec{G}=0$.
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.
Obținem pe *Ox*: $T\sin\alpha - F = 0$ și pe *Oy*:

$T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 10$ N.

b. $F = T\sin\alpha = m\cdot g\cdot tg\,\alpha = 8{,}65$ N.

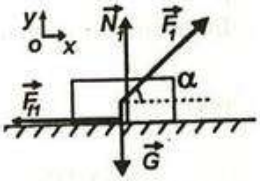


2. Studiem echilibrul plugului: $\vec{T_1}+\vec{T_2}+\vec{F_r}=0$.
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe *Oy*: $T_2\sin\dfrac{\alpha}{2} - T_1\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T$ și pe axa *Ox*:

$2T\cos\dfrac{\alpha}{2} - F_r = 0 \Rightarrow F_r = 2T\cos\dfrac{\alpha}{2} = 25{,}95$ N.

3.a. Deoarece sania are viteza constantă, rezultanta forțelor este nulă, iar echilibrul de translație este dinamic. Studiem sania când asupra ei se exercită forța $\vec{F_1}$. Vectorial: $\vec{F_1}+\vec{G}+\vec{N_1}+\vec{F_{f1}}=0$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:
pe *Ox*: $F_1\cos\alpha - F_{f_1} = 0$ și pe *Oy*: $F_1\sin\alpha + N_1 - mg = 0$.

$F_{f_1} = \mu N_1 = \mu(mg - F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1\cos\alpha - \mu mg + \mu F_1\sin\alpha = 0$

$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg$ (1).

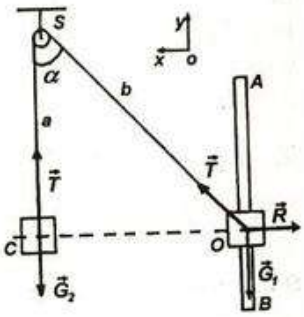
Studiem sania când asupra ei se exercită forța $\vec{F_2}$.

Analog obținem: $F_2(\cos\beta + \mu\sin\beta) = \mu mg$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$

$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = F_2(\cos\beta + \mu\sin\beta) \Rightarrow \mu = \dfrac{F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha}{F_1\sin\alpha - F_2\sin\beta} \approx 0{,}247$.

b. Introducând formula lui μ, obținem: $m = \dfrac{F_1F_2\sin(\alpha-\beta)}{g(F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha)} \approx 34{,}6$ kg.

4. Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{T}+\vec{G_2}=0$, iar scalar $T = m_2 g$.



Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T}+\vec{G_1}+\vec{R}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe *Ox*: $T\sin\alpha - R = 0$ și pe *Oy*: $T\cos\alpha - m_1 g = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = m_1 g \Rightarrow m_2\cos\alpha = m$

În triunghiul *OCS*: $a + b = 2\ell \Rightarrow a = 2\ell - b$, unde $OC = \ell$.

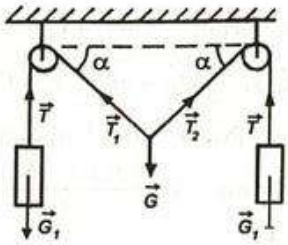
Pe baza teoremei lui Pitagora $a^2 + \ell^2 = b^2$ obținem

$4\ell^2 - 4\ell b + b^2 + \ell^2 = b^2 \Rightarrow 5\ell^2 - 4\ell b = 0 \Rightarrow \quad b = \dfrac{5\ell}{4}$ iar

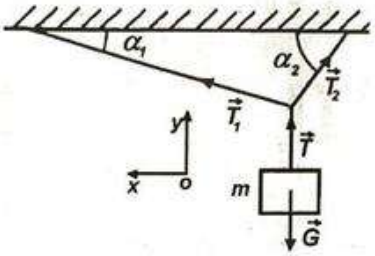
$a = \dfrac{3\ell}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \cos\alpha = 0{,}6$.

5. Studiem echilibrul corpului cu greutatea G_1. $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T=G_1$. Studiem echilibrul corpului cu greutatea G: Vectorial $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Scalar: $T_1=T_2=T=G_1$. Proiectăm relația vectorială pe verticală: $2T\cos\alpha=G\Rightarrow G=2G_1\cos\alpha\Rightarrow$

$$G_1=\frac{G}{2\cos\alpha}=\frac{G\sqrt{2}}{2}=100\text{ N}.$$



6. Studiem echilibrul corpului cu masa m. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=0$, iar scalar: $T=mg=40$ N. Din echilibrul punctului de prindere $\vec{T}_1+\vec{T}_2=\vec{T}$. Cum $\alpha_1+\alpha_2=90^0$, tensiunile T_1 şi T_2 sunt perpendiculare, astfel că prin proiecție pe axele de coordonate obținem:



pe Ox: $T_1\cos\alpha_1-T_2\cos\alpha_2\Rightarrow T_2=\dfrac{T_1\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$ şi

Oy: $T_1\sin\alpha_1+T_2\sin\alpha_2-T=0$. Din cele două ecuații obținem:

$$T_1=\frac{mg\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=20\text{ N, iar }T_2=\frac{mg\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=34{,}6\text{ N}.$$

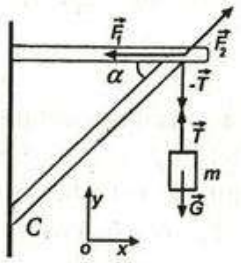
7. Impunem condiția de echilibru pentru corp: Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=0$ şi scalar: $T=mg$.

Notăm cu $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ tensiunile din grinzi şi prin proiecția relației vectoriale $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}=0$ obținem pe axele de coordonate:

pe Ox: $F_2\cos\alpha-F_1=0\Rightarrow F_1=F_2\cos\alpha$ şi pe Oy:

$$F_2\sin\alpha-T=0\Rightarrow F_2=\frac{T}{\sin\alpha}=\frac{mg}{\sin\alpha}=240\text{ N}.$$

$F_1=m\cdot g\cdot ctg\,\alpha\approx 207{,}6$ N.

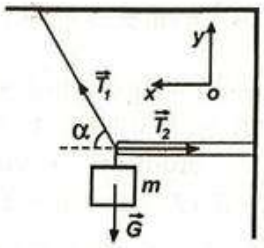


8. Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate şi obținem:

pe Ox: $T_1\cos\alpha-T_2=0\Rightarrow T_2=T_1\cos\alpha$ şi pe Oy:

$$T_1\sin\alpha-mg=0\Rightarrow T_1=\frac{mg}{\sin\alpha}=40\text{ N}.$$

$T_2=m\cdot g\cdot ctg\,\alpha\approx 34{,}6$ N.



9.a. Studiem echilibrul omului: $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}=0$, iar scalar $T+N-mg=0$ $\Rightarrow N=mg-T$. (fig.1.)

Studiem echilibrul scripetelui peste care este trecut firul de care trage omul. (fig 2) $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}=0$, iar scalar $T_1=2T$. Studiem echilibrul platformei. (fig 3)

Vectorial: $\vec{T}+\vec{T}_1+\vec{G}'-\vec{N}=0$ şi scalar: $T+T_1-Mg-N=0 \Rightarrow 3T-Mg-N=0$

$\Rightarrow 3T-Mg-mg+T=0 \Rightarrow 4T=g(m+M) \Rightarrow T=\dfrac{g(m+M)}{4}$=300 N.

b. Forţa de apăsare exercitată de om asupra platformei este $N=mg-T=\dfrac{g(3m-M)}{4}=500$ N.

Fig. 1.

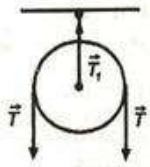


Fig. 2

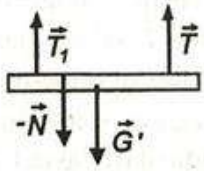
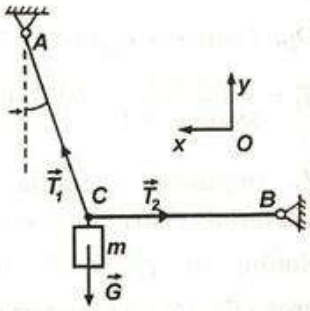


Fig. 3

10.a. Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T_1\sin\alpha-T_2=0 \Rightarrow T_2=T_1\sin\alpha$ şi pe Oy:

$T_1\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow T_1=\dfrac{mg}{\cos\alpha}\approx 184{,}97$N.

$T_2=mgtg\,\alpha\approx 92{,}49$ N.



11.a. Studiem echilibrul corpului cu greutate G, astfel că $\vec{T}_1+\vec{G}=0$, iar scalar $T_1=G=mg$.

Studiem echilibrul corpului cu greutatea G_1: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm pe Ox:

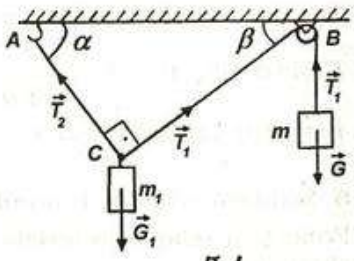
$T_2\cos\alpha-T_1\cos\beta=0$ Oy: $T_2\sin\alpha+T_1\sin\beta-G_1=0$

Din datele problemei: $T_2=2T_1 \Rightarrow 2\cos\alpha=\cos\beta$.

Cum $\alpha+\beta=90^0 \Rightarrow \beta=90^0-\alpha \Rightarrow \cos\beta=\sin\alpha \Rightarrow$

$2\cos\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ şi $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$G_1=2T_1\sin\alpha+T_1\sin\beta=mg(2\sin\alpha+\sin\beta)\approx 44{,}7$N.

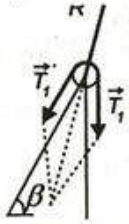


b. $T_2=2T_1=2mg=40$ N.

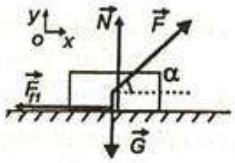
c. Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R}_1+\vec{T}_1+\vec{T}'_1=0 \Rightarrow \vec{R}_1=-\vec{T}_1-\vec{T}'_1$ cu $T_1=T_1'$ şi scalar:

$R_1^2=T_1^2+T_1'^2+2T_1T_1'\cos(90-\beta)=2T_1^2(1+\sin\beta)$

Cum $R=T_1\sqrt{2(1+\sin\beta)}=mg\sqrt{2(1+\sin\beta)}\approx 34$ N.



12. Deoarece corpul se mişcă uniform înseamnă că se află în echilibru dinamic de translaţie, astfel că rezultanta forţelor care se exercită asupra corpului este nulă. Obţinem: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

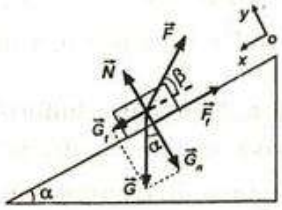


pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F\cos\alpha$ şi pe Oy: $F\sin\alpha + N - mg = 0$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu(mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha \Rightarrow F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 3{,}25$ N.

13.a. Studiem echilibrul corpului aflat pe planul înclinat. Rezultanta forţelor ce acţionează asupra corpului este nulă.

Obţinem: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

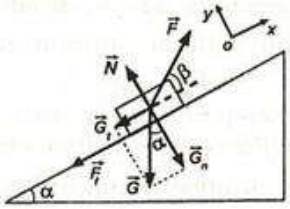


Proiectăm pe Ox: $mg\sin\alpha - F\cos\beta - F_f = 0$ şi pe Oy: $N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Deoarece $F_f = \mu N$

$mg\sin\alpha - F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$F = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} = 3{,}36$ N.

b. Forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului este $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta \approx 6{,}97$ N.



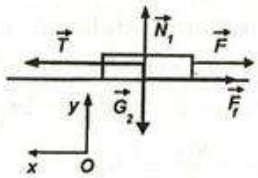
c. Studiem urcarea uniformă a corpului pe planul înclinat: $\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe Ox: $F_1\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = 0$ şi pe Oy: $F_1\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow$

$F_1\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F_1\sin\beta - mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 7{,}48$ N.

d. $N = mg\cos\alpha - F_1\sin\beta \approx 4{,}91$ N.

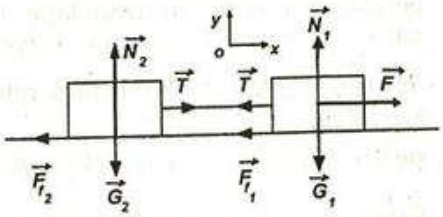
14. Împărţim lanţul în două părţi: o porţiune verticală cea care atârnă şi o porţiune orizontală aflată pe masă. Studiem echilibrul porţiunii de lanţ care atârnă. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $m_1g - T = 0$ $\Rightarrow T = m_1g$, unde $m_1 = \dfrac{m\ell_1}{\ell}$ reprezintă masa porţiunii de lanţ care atârnă. Studiem echilibrul porţiunii de lanţ aflată pe masă cu masa $m_2 = \dfrac{m(\ell-\ell_1)}{\ell}$.



Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_2+\vec{F}_f+\vec{F}=0$ şi proiectăm relaţia pe Ox: $T - F_f - F = 0$ şi pe Oy: $N_1 - G_2 = 0$. Deoarecce $F_f = \mu N_1 = \mu m_2 g \Rightarrow F = \dfrac{m}{\ell}\ell_1 g - \mu\dfrac{m(\ell-\ell_1)}{\ell}g \Rightarrow$

$F = \dfrac{mg}{\ell}(\ell_1 - \mu\ell + \mu\ell_1) = 5{,}2$ N.

15. Studiem mişcarea rectilinie şi uniformă a corpului cu masa m_2. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=0$ şi proiectând pe axele de coordonate obţinem pe Ox: $T-F_{f_2}=0$ şi pe Oy: $N_2-m_2g=0 \Rightarrow$



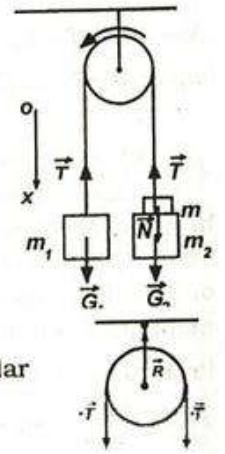
$F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2m_2g \Rightarrow T=\mu_2m_2g$.

Studiem mişcarea rectilinie şi uniformă a corpului cu masa m_1: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=0$.

Scalar pe Ox: $F-T-F_{f_1}=0$ şi pe Oy: $N_1-m_1g=0 \Rightarrow F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1m_1g \Rightarrow$

$F=T+F_{f_1}=\mu_2m_2g+\mu_1m_1g=g(\mu_2m_2+\mu_1m_1)=1{,}6$ N.

16.a. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului cu masă m_1 $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T=m_1g$. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului cu masă m_2: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T=N+m_2g$, unde N este apăsarea normală exercitată de corpul adiţional. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului adiţional cu masa m. Astfel $\vec{N}+\vec{G}=0$, iar scalar $mg=N \Rightarrow$ $m_1g=mg+m_2g \Rightarrow m=m_1-m_2=2$ kg. Corpul adiţional se aşază pe corpul cu masă mai mică.



b. Forţa de apăsare a corpului adiţional este N=20 N

c. Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R}-2\vec{T}=0$, iar scalar $R=2T=2m_1g=100$ N.

17. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T}_1+\vec{G}_1=0$, iar scalar obţinem $m_1g=T_1$. (fig 4)

Studiem echilibrul scripetelui de care este prins corpul de masă m_2: $2\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, iar scalar $T_2=2T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{T}_2+\vec{G}_2=0$, iar scalar obţinem:

$m_2g=T_2 \Rightarrow m_2g=2m_1g \Rightarrow m_2=2m_1 \Rightarrow$

$m_1=\dfrac{m_2}{2}=5$ kg.

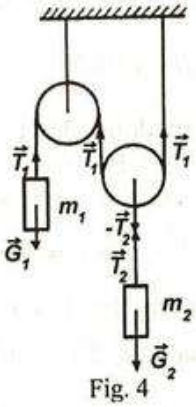


Fig. 4

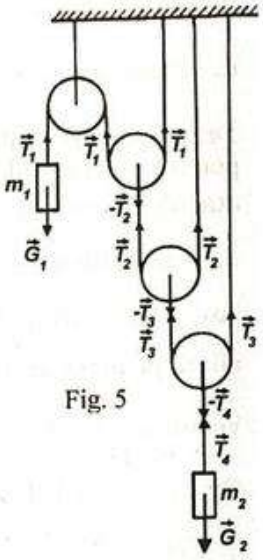


Fig. 5

18. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T}_1+\vec{G}_1=0$, iar scalar obţinem $T_1=m_1g$. (fig 5)

Studiem echilibrul scripeţilor.

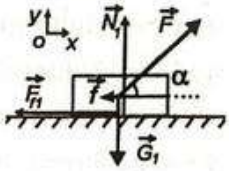
Scalar obţinem: $T_2=2T_1$; $T_3=2T_2=4T_1$ şi $T_4=2T_3=8T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{T}_4 + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar obținem $T_4 = m_2 g \Rightarrow m_2 g = 8m_1 g \Rightarrow m_2 = 8m_1 = 64$ kg.

19.a. Deoarece sistemul de corpuri este ridicat uniform de forța F, considerăm că întreg sistemul este un punct material cu masa totală $m_t = m_1 + m_0 + m_2$, astfel că: $F = G_t = m_t g = (m_1 + m_0 + m_2)g = 32$ N.

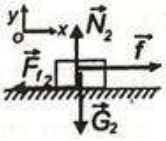
b. Studiem mișcarea rectilinie uniformă, a corpului cu masa m_2 și a porțiunii inferioare de lanț cu lungimea ℓ_0. Această porțiune de lanț are masa $m = \frac{m_0 \ell_0}{\ell}$, astfel că: $T - G = 0 \Rightarrow T = G = (m + m_2)g = \left(\frac{m_0 \ell_0}{\ell} + m_2\right)g = 20{,}8$ N

20.a. Studiem echilibrul corpului cu masă m_1: $\vec{F} + \vec{f} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate pe Ox: $F\cos\alpha - f - F_{f_1} = 0$ și pe Oy: $F\sin\alpha + N_1 - m_1 g = 0$.



Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1$ obținem $F\cos\alpha - f - \mu_1 m_1 g + \mu_1 F\sin\alpha = 0$ (1)

Studiem echilibrul corpului cu masă m_2. Vectorial: $\vec{f} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe Ox: $f - F_{f_2} = 0$; pe Oy: $N_2 - m_2 g = 0$ și cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2$ obținem $f = \mu_2 m_2 g$ (2). Adunând (1) cu (2) obținem:

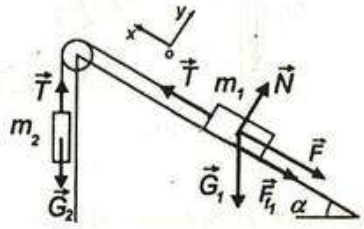


$$F\cos\alpha - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g + \mu_1 F\sin\alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} \approx 14{,}2 \text{ N}.$$

b. Forțele de apăsare sunt reacțiunile normale: $N_1 = m_1 g - F\sin\alpha \approx 22{,}9$ N și $N_2 = m_2 g = 50$ N.

c. Forțele de frecare sunt $F_{f1} = \mu_1 N_1 \approx 2{,}29$ N și $F_{f2} = \mu_2 N_2 = 10$ N

21.a. Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar obținem $m_2 g = T$. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1. Deoarece lăsat liber sistemul de corpuri, corpul m_1 urcă, $\vec{F}_f$ acționează de-a lungul planului înclinat în jos. Vectorial: $\vec{T} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T - F_{f1} - m_1 g\sin\alpha - F = 0$ și pe Oy: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha - F = 0 \Rightarrow$ $F = g(m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha) = 20{,}7$ N.



b. Tensiunea din fir este $T = m_2 g = 40$ N.

c. Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$

Scalar $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90 - \alpha)$. Deoarece $T_1 = T_2 = T \Rightarrow$

$R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = m_2 g\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \approx 77{,}25$ N.

22.a. Caz 1 Sistemul se află în repaus, iar F_{f_1} are sensul din figura 6.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T - F_{f1} - m_1 g\sin\alpha = 0$ și pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0 \Rightarrow$

$m_2 = m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 586{,}5$ g.

Caz 2: Sistemul se află în repaus, iar F_{f_1} are sensul din figura 7.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T + F_f - m_1 g\sin\alpha = 0$ și pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g + \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0 \Rightarrow$

$m_2 = m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 413{,}5$ g. Deci sistemul se află în echilibru dacă corpul al doilea are masa $m_2 \in [413{,}5\,g;\ 586{,}5\,g]$.

b. $T_{min} = m_{2min} g \approx 4{,}135$ N și $T_{max} = m_{2max} g \approx 5{,}865$ N.

c. Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2$. Scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2\cos(90-\alpha)$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2\sin\alpha \Rightarrow$ $R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = T\sqrt{3}$. Pentru T_{min} obținem $R_{min} \approx 7{,}15$ N și pentru T_{max} obținem $R_{max} \approx 10{,}15$ N.

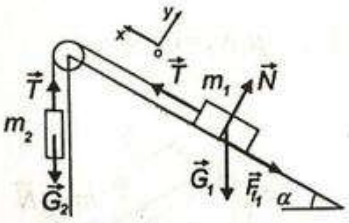


Fig. 6

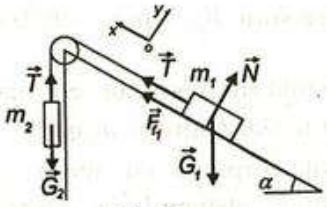


Fig. 7

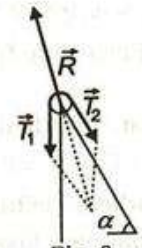


Fig. 8

23. Caz 1: Studiem situația în care corpul m_1 ar începe să alunece uniform în jos (fig 9.) Pentru corpul m_1: $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem:

Pe *Ox*: $m_1 g\sin\alpha - F_{f_1} - T = 0$ și pe *Oy*: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g\cos\alpha$.

Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \Rightarrow m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - T = 0$ (1).

Pentru corpul m_2: $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T - m_2 g\sin\beta - F_{f_2} = 0$ și pe *Oy*: $N_2 - m_2 g\cos\beta = 0$.

Cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos\beta \Rightarrow T - m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta = 0$ (2).

Din (1)+(2) $\Rightarrow m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta = 0 \Rightarrow$

$$m_2 = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)}{\sin\beta + \mu_2 \cos\beta} = 2{,}44 \text{ kg}.$$

Caz 2: Studiem situația în care corpul m_2 ar începe să alunece uniform în jos (fig 10). Pentru corpul m_1: $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox $T - m_1 g \sin\alpha - F_{f_1} = 0$ și pe Oy: $N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 \Rightarrow T - m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha = 0$ (1)

Pentru corpul m_2: $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $m_2 g \sin\beta - F_{f_2} - T = 0$ și pe Oy: $N_2 - m_2 g \cos\beta = 0$.

Cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 \cdot m_2 g \cos\beta \Rightarrow m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta - T = 0$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow m_2 g \sin\beta - \mu_2 m_2 g \cos\beta - m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha = 0 \Rightarrow$

$$m_2 = \frac{m_1(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha)}{\sin\beta - \mu_2 \cos\beta} = 5{,}2 \text{ kg}.$$

Sistemul se află în echilibru, dacă corpul al doilea are masa $m_2 \in [2{,}44 \text{ kg};\ 5{,}2 \text{ kg}]$.

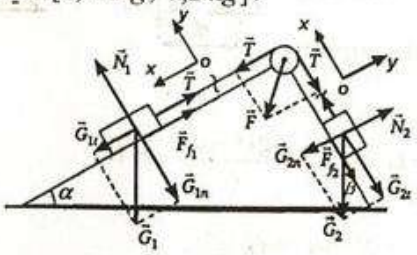


Fig. 9

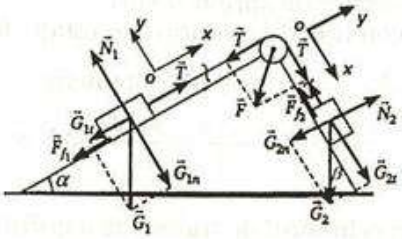


Fig. 10

b. Tensiunilor în fire în cele două cazuri sunt $T = m_1 g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) \Rightarrow$ $T \approx 20{,}675$ N și $T' = m_1 g(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha) \approx 29{,}325$ N

c. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$.

Scalar, pe baza teoremei cosinusului obținem $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos\gamma$, unde $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 105^\circ$, astfel că $\cos\gamma \approx -0{,}26$.

Deoarece $T_1 = T_2 = T$ obținem: $R = T\sqrt{2(1+\cos\gamma)}$.

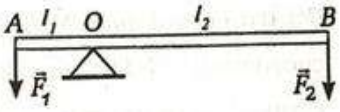
Pentru T obținem $R \approx 25{,}15$ N și pentru T' obținem $R' \approx 35{,}68$ N.

4.2. Echilibrul de rotaţie

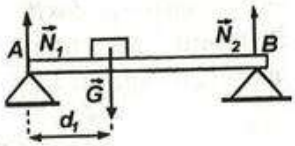
1. Momentul forţei faţă de axa de rotaţie este $M_F = Fd\sin\alpha$, unde α este unghiul format de direcţia forţei F şi bară. Deoarece bara rămâne în echilibru de rotaţie şi sub acţiunea forţei F_1 aplicată la distanţa d_1 faţă de axa de rotaţie înseamnă că momentul acestei forţe este egal cu momentul forţei F, astfel că

$$M_F = F_1 d_1 \sin\alpha \Rightarrow Fd = F_1 d_1 \Rightarrow F_1 = \frac{Fd}{d_1} = 100 \text{ N}.$$

2. Deoarece scândura este în echilibru de rotaţie înseamnă că suma momentelor forţelor faţă de punctul O este zero. Astfel $\vec{M}_{F_1,O} + \vec{M}_{F_2,O} = 0$, iar scalar obţinem $F_1\ell_1 - F_2\ell_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{F_1\ell_1}{\ell_2} = 20$ N.



3. Impunem condiţia de echilibru de translaţie $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar: $N_1 + N_2 = G_1$, unde N_1 şi N_2 sunt forţele de apăsare exercitate de scândură asupra punctelor de sprijin A şi B.



Impunem condiţia de echilibru de rotaţie faţă de punctul A: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{N_2,A} = 0$, iar scalar obţinem:

$$-G_1 d + N_2\ell = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{G_1 d}{\ell} = \frac{mgd}{\ell} = 2 \text{ N şi } N_1 = G - N_2 = \frac{mg(\ell - d)}{\ell} = 8 \text{ N}.$$

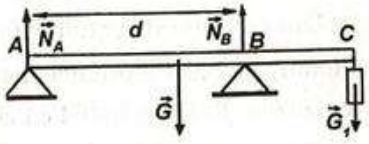
4. Studiem echilibrul de translaţie a grinzii: $\vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{G} + \vec{G}_1 = 0$.

Scalar: $N_A + N_B - mg - m_1 g = 0$.

Studiem echilibrul de rotaţie faţă de punctul A Suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul A este nulă: $\vec{M}_{N_B,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{G_1,A} = 0$.

$$N_B d - mg\frac{\ell}{2} - m_1 g\ell = 0 \Rightarrow N_B = \frac{g\ell(m + 2m_1)}{2d} = 112{,}5\text{N}$$

şi $N_A = (m + m_1)g - N_B = 27{,}5$ N.

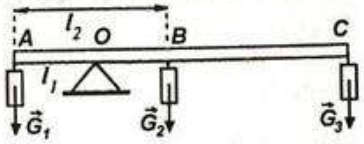


5. Studiem echilibrul de rotaţie a scândurii, astfel că suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul O este nulă.

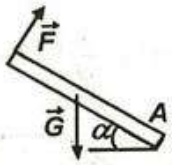
Vectorial: $\vec{M}_{G_1,O} + \vec{M}_{G_2,O} + \vec{M}_{G_3,O} = 0$.

Scalar: $m_1 g\ell_1 - m_2 g(\ell_2 - \ell_1) - m_3 g(\ell - \ell_1) = 0 \Rightarrow$

$$m_3 = \frac{m_1\ell_1 - m_2(\ell_2 - \ell_1)}{\ell - \ell_1} = 320 \text{ g}.$$

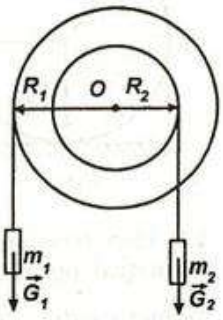


6. Deoarece scândura se poate roti în jurul punctului A, când scândura formează cu orizontala unghiul α ea se află în echilibru de rotație. Impunem condiția ca suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul A să fie zero:

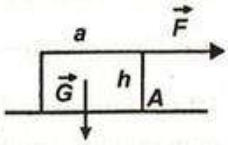


$$\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{F,A}=0 \Rightarrow -mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha+F\ell=0 \Rightarrow F=\frac{mg\cos\alpha}{2}\approx 21{,}63\text{N}$$

7. Studiem echilibrul de rotație al scripetelui. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul O este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{G_1,O}+\vec{M}_{G_2,O}=0$, iar scalar: $m_1gR_1-m_2gR_2=0$ obținem $m_2=\frac{m_1R_1}{R_2}=10$ kg.



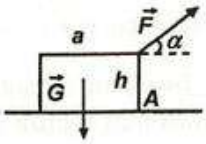
8.a. Pentru ca acest corp prismatic să se răstoarne, trebuie ca momentul forței $\vec{F}$ față de axa AA' (muchia corpului de pe plan perpendiculară pe forța $\vec{F}$) să fie cel puțin egal cu momentul greutății corpului calculat față de aceeași axă.



$$M_{F,AA'}\geq M_{G,AA'} \Rightarrow Fh\geq mg\frac{a}{2} \Rightarrow F\geq\frac{mga}{2h} \Rightarrow F\geq 1 \text{ N} \Rightarrow \text{dacă}$$

forța F este mai mare decât 1 N, corpul se răstoarnă.

b. Dacă forța F, formează cu orizontala unghiul α, pentru ca să se răstoarne corpul, trebuie ca:



$$M_{F,AA'}\geq M_{G,AA'} \Rightarrow Fh\cos\alpha\geq mg\frac{a}{2} \Rightarrow F\geq\frac{mga}{2h\cos\alpha} \Rightarrow F\geq 2$$

N. Pentru a răsturna corpul trebuie ca forța F să fie mai mare decât 2 N

9. Pentru ca roata să urce treapta, trebuie ca momentul forței $\vec{F}$ față de punctul A să fie cel puțin egal cu momentul greutății roții față de același punct A. (fig 1) $M_{F,A}\geq M_{G,A} \Rightarrow F(R-h)\geq mgb$, unde b este brațul greutății față de punctul A (lungimea perpendicularei constuită din A pe dreapta suport a greutății $\vec{G}$). Din geometrie: $b=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{h(2R-h)}$ $\Rightarrow F\geq\frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}\geq 55{,}9$ N. Dacă forța este cel puțin egală cu 55,9 N, roata poate urca treapta.

10. Împărțim bara în două regiuni: una din oțel cu lungimea $\ell/4$ și masa $m_1=\rho_1S\frac{\ell}{4}$, iar cealaltă din aluminiu cu lungimea $3\ell/4$ și masa $m_2=\rho_2S\frac{3\ell}{4}$ (fig 2). Notăm cu x distanța de la punctul în care suspendăm bara pentru ca aceasta să rămână în echilibru și capătul din oțel al barei. Studiem echilibrul de rotație al greutăților față de punctul de suspensie O: $\vec{M}_{G_1,O}+\vec{M}_{G_2,O}=0$, iar scalar: $G_1\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=G_2\left(\ell-x-\frac{3\ell}{8}\right) \Rightarrow \rho_1S\frac{\ell}{4}g\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=\rho_2S\frac{3\ell}{4}g\left(\frac{5\ell}{8}-x\right) \Rightarrow$

$$\rho_1\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=3\rho_2\left(\frac{5\ell}{8}-x\right)\Rightarrow x=\frac{\ell(\rho_1+15\rho_2)}{8(\rho_1+3\rho_2)}\approx 38\text{ cm}$$

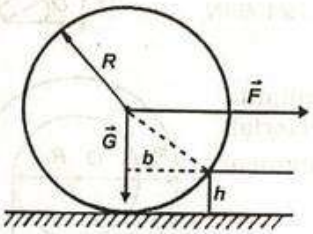


Fig. 1

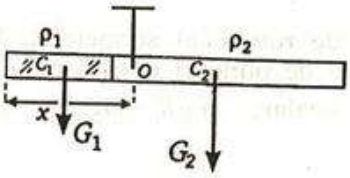


Fig. 2

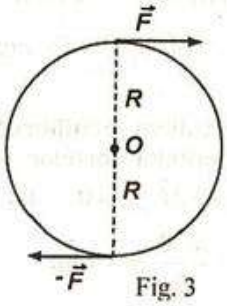
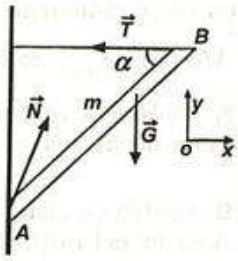


Fig. 3

11. Deoarece asupra volanului se acționează cu două forțe tangente și egale, diametral opuse, ca în figura 3, acestea formează un cuplu de forțe al cărui moment este: $\vec{M}=\vec{M}_{F,0}+\vec{M}_{-F,0}$, iar scalar $M=2FR\Rightarrow F=\frac{M}{2R}=15$ N, unde F este forța cu care șoferul trage cu o mână de volan.

12.a. Studiem echilibrul de rotație a barei față de punctul A. Rezultanta momentelor forțelor față de A este nulă: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{T_B,A}=0$, iar scalar:

$$-mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha+T_B\ell\sin\alpha=0\Rightarrow T_B=\frac{mg}{2}ctg\,\alpha=1730\text{ N}.$$



b. Studiem echilibrul de translație a barei: $\vec{N}_A+\vec{G}+\vec{T}_B=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox: $N_{A_x}-T_B=0\Rightarrow N_{A_x}=T_B=\frac{mg}{2}ctg\,\alpha$ și pe Oy:

$N_{A_y}-G=0\Rightarrow N_{A_y}=mg$.

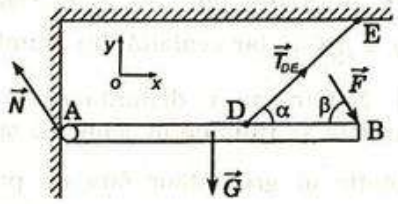
Din geometrie: $N_A=\sqrt{N_{A_x}^2+N_{A_y}^2}=2645$ N.

c. $tg\,\beta=\frac{N_{A_y}}{N_{A_x}}=2tg\alpha=1,156$

13.a. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația A este nulă: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{T_{DE},A}+\vec{M}_{F,A}=0$, iar scalar:

$$-\frac{mg\ell}{2}+T_{DE}(\ell-d)\sin\alpha-F\ell\sin\beta=0\Rightarrow$$

$$T_{DE}=\frac{\ell(mg+2F\sin\beta)}{2(\ell-d)\sin\alpha}=996{,}8\text{ N}.$$



b. Studiem echilibrul de translație a scândurii: $\vec{N}_A+\vec{G}+\vec{T}_{DE}+\vec{F}=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

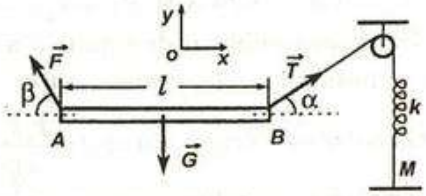
pe Ox: $-N_{A_x}+T_{DE}\cos\alpha+F\cos\beta=0\Rightarrow N_{A_x}=T_{DE}\cos\alpha+F\cos\beta=1073{,}73$ N.

pe Oy: $N_{A_y}+T_{DE}\sin\alpha-mg-F\sin\beta=0\Rightarrow N_{A_y}=mg+F\sin\beta-T_{DE}\sin\alpha\Rightarrow$

N_{Ay} = -86,9 N iar semnul "-" arată că $\vec{N}_{Ay}$ are sens contrar celui presupus.

$N_A = \sqrt{N_{A_x}^2 + N_{A_y}^2} \approx 1077{,}24$ N.

14.a. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația *A* este nulă.) Vectorial: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar obținem:



$$-\frac{mg\ell}{2} + T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2\sin\alpha} = 115{,}6\text{N}.$$

Cum $F_{el} = T = kx \Rightarrow x = \frac{T}{k} = 5{,}78$ cm.

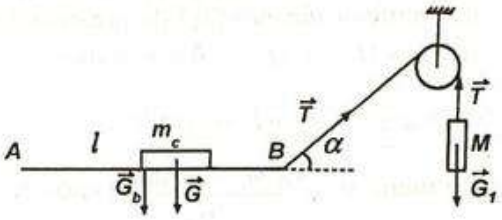
b. Studiem echilibrul de translație a scândurii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{T} = 0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T\cos\alpha - F_x = 0 \Rightarrow F_x = T\cos\alpha = 57{,}8$ N și pe *Oy*:

$$T\sin\alpha + F_y - mg = 0 \Rightarrow F_y = mg - T\sin\alpha = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} = 100 \text{ N}.$$

Obținem $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 115{,}5$ N.

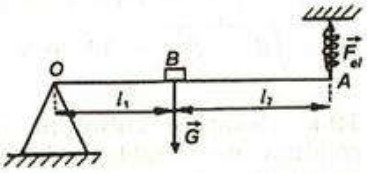
c. $tg\,\beta = \frac{F_y}{F_x} = 1{,}73 \approx \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60^0$.

15. Studiem echilibrul corpului cu masă *M*. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar obținem $T = Mg$.



Studiem echilibrul de rotație a barei în raport cu punctul *A*. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul *A* este zero: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar obținem: $-mg\frac{\ell}{2} - m_c gx + T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell(2M\sin\alpha - m)}{2m_c} = 4$ cm.

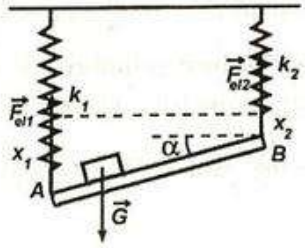
16. Studiem echilibrul de rotație a barei în raport cu punctul *O*. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul *O* este zero: $\vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{F_{el},0} = 0$, iar scalar obținem:



$-mg\ell_1 + F_{el}(\ell_1 + \ell_2) = 0$. Cum $F_{el} = kx \Rightarrow$

$$mg\ell_1 = kx(\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow k = \frac{mg\ell_1}{x\cdot(\ell_1 + \ell_2)} = 1250\text{N/m}.$$

17.a. Studiem echilibrul de translație a scândurii *AB*. Rezulatanta forțelor este nulă: $\vec{F}_{el_1} + \vec{F}_{el_2} + \vec{G} = 0$, iar scalar: $F_{el_1} + F_{el_2} = mg \Rightarrow k_1x_1 + k_2x_2 = mg$ (1).



$$\sin\alpha = \frac{x_1 - x_2}{\ell} \Rightarrow x_1 - x_2 = \ell\sin\alpha \quad (2)$$

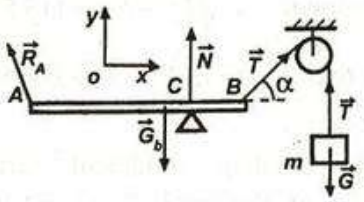
Din (1) şi (2) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{mg + k_2\ell\sin\alpha}{k_1 + k_2} = 12{,}5$ cm, iar $x_2 = \dfrac{mg - k_1\ell\sin\alpha}{k_1 + k_2} = 2{,}5$ cm.

b. $F_{el_1} = k_1x_1 = 6{,}25$ N şi $F_{el_2} = k_2x_2 = 3{,}75$ N.

c. Studiem echilibrul de rotaţie a scândurii. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul A este nulă. Astfel $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{F_{el},A} = 0$, iar scalar $-Gd\cos\alpha + F_{el_2}\ell\cos\alpha = 0 \Rightarrow d = \dfrac{k_2x_2\ell}{mg} = 75$ cm.

d. Deoarece scândura rămâne orizontală după aşezarea corpului m, înseamnă că $x_1 = x_2 = x$. Din condiţia de echilibru de translaţie obţinem: $k_1x + k_2x = mg \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k_1 + k_2} = 5$ cm, iar din condiţia de echilibru de rotaţie $d' = \dfrac{k_2x\cdot\ell}{mg} = 150$ cm.

18.a. Studiem echilibrul corpului m suspendat de fir. Scalar: $T = mg$.



Studiem echilibrul de rotaţie a barei. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul A este nulă: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{N,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$ iar scalar:

$$-m_bg\frac{\ell}{2} + N\frac{3\ell}{4} + T\ell\sin\alpha = 0$$

Obţinem $N = \dfrac{4g(m_b - 2m\sin\alpha)}{6} = 200$ N.

b. Studiem echilibrul de translaţie a barei: $\vec{R} + \vec{G}_b + \vec{N} + \vec{T} = 0$.

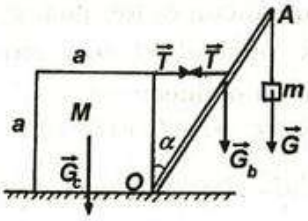
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate obţinem:

pe Ox: $-R_{A_x} + T\cos\alpha = 0 \Rightarrow R_{A_x} = T\cos\alpha = mg\cos\alpha = 17{,}3$ N şi

pe Oy: $R_{A_y} + N + T\sin\alpha - m_bg = 0 \Rightarrow R_{A_y} = m_bg - N - mg\sin\alpha = 110$ N.

$R_A = \sqrt{R_{A_x}^2 + R_{A_y}^2} \approx 111{,}36$ N.

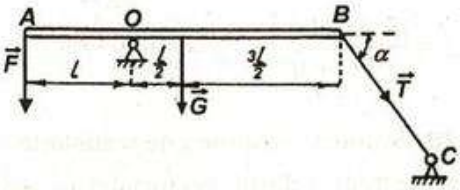
19.a. Deoarece cubul nu se răstoarnă, impunem condiţia de echilibru de rotaţie faţă de muchia orizontală OA ce trece prin punctul O şi este perpendiculară pe forţa $\vec{T}$: $\vec{M}_{T,OA} + \vec{M}_{G_c,OA} = 0$, iar scalar $Ta = Mg\dfrac{a}{2} \Rightarrow T = \dfrac{Mg}{2} = 25$ N.



b. Studiem echilibrul de rotaţie a barei. Rezultanta momentelor forţelor în raport cu punctul O este nulă. $\vec{M}_{G_b,0} + \vec{M}_{T,0} + \vec{M}_{G,0} = 0$, iar scalar obţinem

$$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + Ta - G\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2Ta}{\ell(mg + 2G)} = \frac{Mga}{\ell(mg + 2G)} = 0{,}25.$$

20.a. Studiem echilibrul de rotație a barei. Suma vectorială a momentelor forțelor, calculate în raport cu punctul O este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{F,0}+\vec{M}_{G,0}+\vec{M}_{T,0}=0$ și scalar obținem

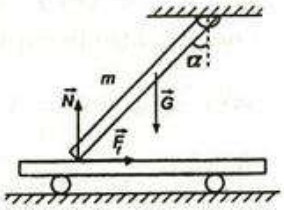


$$F\ell-mg\frac{\ell}{2}-2T\ell\sin\alpha=0\Rightarrow T=\frac{2F-mg}{4\sin\alpha}$$

$\Rightarrow T$=5 kg

b. Pentru ca tensiunea în cablul BC să fie nulă T=0$\Rightarrow F=\frac{mg}{2}\Rightarrow m=\frac{2F}{g}$=2 kg.

21. Studiem echilibrul căruciorului. Scalar pe Ox: $F=F_f$. Dacă bara se deplasează spre stânga ca în figură, studiem echilibrul de rotație a barei față de punctul de prindere O. Asupra barei se exercită o forță de frecare în sens opus celei care se exercită asupra căruciorului (conform principiului acțiunii și reacțiunii). Rezultanta momentelor forțelor este nulă: $\vec{M}_{G,0}+\vec{M}_{F_f,0}+\vec{M}_{N,0}=0$, iar

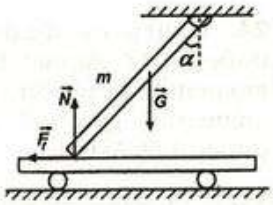


scalar: $mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha-F_f\ell\cos\alpha-N\ell\sin\alpha=0$, unde ℓ este lungimea barei.

Conform legii frecării $F_f=\mu N\Rightarrow\frac{mg}{2}\sin\alpha=F_f\cos\alpha+\frac{F_f}{\mu}\sin\alpha\Rightarrow$

$$F_f=F=\frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\approx 2{,}36\text{ N}.$$

Dacă bara se deplasează în sens opus, echilibrul de rotație a barei față de punctul O devine:

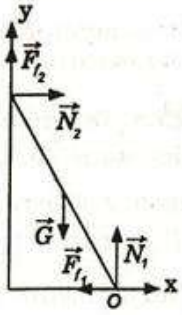


$$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha-F_f\ell\cos\alpha+N\ell\sin\alpha=0\Rightarrow$$

$$\frac{mg\sin\alpha}{2}=F_f\cos\alpha-\frac{F_f}{\mu}\sin\alpha\Rightarrow F=F_f=\frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}\Rightarrow$$

$F\approx$ 13 N.

22. Studiem echilibrul de translație a scării: $\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}_1=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem:



Pe Ox: $N_2-F_{f_1}=0\Rightarrow N_2=F_{f_1}$ și pe Oy: $F_{f_2}+N_1-mg=0$.

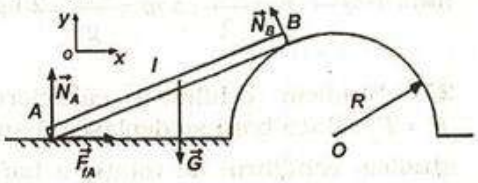
Conform legilor frecării $F_{f_1}=\mu N_1$ și $F_{f_2}=\mu N_2$ obținem

$N_2=\mu N_1\Rightarrow F_{f_2}=\mu^2N_1\Rightarrow N_1=\frac{mg}{1+\mu^2}$ și $N_2=\frac{\mu mg}{1+\mu^2}$. Studiem echilibrul de rotație a scării. Notăm cu h înălțimea la care se află centrul de greutate al scării și impunem condiția ca rezultanta momentelor forțelor față de punctul de sprijin al scării pe podea (O), să fie nulă: $\vec{M}_{F_{f_2},0}+\vec{M}_{N_2,0}+\vec{M}_{G,0}=0$, iar scalar obținem:

$$-F_{f_2}\ell\cos\alpha - N_2\ell\sin\alpha + mg\frac{h}{tg\,\alpha} = 0 \Rightarrow mg\frac{h}{tg\,\alpha} = N_2\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$h = \frac{\mu\ell\sin\alpha(tg\alpha + \mu)}{1+\mu^2} = 16{,}86 \text{ cm.}$$

23. Studiem echilibru de translație a barei $\vec{N}_A + \vec{F}_{f_A} + \vec{G} + \vec{N}_B = 0$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $F_{f_A} - N_B\sin\alpha = 0$ și pe Oy: $N_A + N_B\cos\alpha - mg = 0$.

Conform legii frecării $F_{f_A} = \mu N_A \Rightarrow$

$$\mu N_A = N_B\sin\alpha \Rightarrow N_A = \frac{N_B\sin\alpha}{\mu}$$

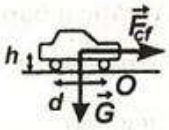
$$\frac{N_B\sin\alpha}{\mu} + N_B\cos\alpha = mg \Rightarrow N_B = \frac{\mu mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

Studiem echilibrul de rotație a barei. Suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul de sprijin de pe planul orizontal A este nulă: $\vec{M}_{N_B,A} + \vec{M}_{G,A} = 0$ Scalar:

$$N_B\ell - \frac{mg\ell}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg\cos\alpha}{2} \Rightarrow \frac{mg\cos\alpha}{2} = \frac{\mu mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha}. \text{ Dar } \sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2+R^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mu \approx 0{,}333.$$

24. Pentru ca mașina să nu se răstoarne în curbă, față de punctul de contact O dintre roata exterioară și sol, trebuie ca momentul forței centrifuge să fie mai mic sau cel puțin egal cu momentul greutății autoturismului, ambele calculate față de punctul O. Astfel:

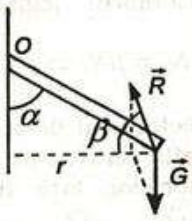


$$|M|_{F_{cf},O} \le |M|_{G,O} \Rightarrow F_{cp}h \le G\frac{d}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{R}h \le mg\frac{d}{2} \Rightarrow v \le \sqrt{\frac{Rgd}{2h}} \Rightarrow v \le 31{,}62 \text{ m/s}$$

Dacă autoturismul intră în curbă cu o viteză mai mică decât 113,84 km/h, el nu se răstoarnă.

25.a. Deoarece bila execută o mișcare circular uniformă, ea se află în echilibru de rotație. Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă, astfel că $F_{cp} = m\omega^2 r$, unde r este raza de rotație și este $r = \ell\sin\alpha \Rightarrow$

$F_{cp} = m4\pi^2n^2\ell\sin\alpha$.



Din geometrie $R = \sqrt{F_{cp}^2 + G^2} = m\sqrt{(4\pi^2n^2l\sin\alpha)^2 + g^2} \approx 16{,}12$ N.

b. $F_{cp} = R\sin\beta \Rightarrow m\omega^2 r = R\sin\beta$.

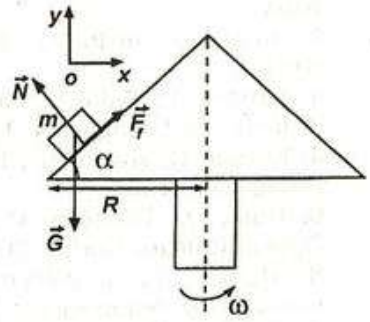
$$G = R\cos\beta \Rightarrow mg = R\cos\beta \Rightarrow tg\,\beta = \frac{4\pi^2n^2\ell\sin\alpha}{g} = 8.$$

c. Calculăm momentul reacțiunii $\vec{R}$ față de punctul de fixare de ax. Cum $\vec{R}+\vec{G}=\vec{F}_{cp} \Rightarrow \vec{R}=\vec{F}_{cp}-\vec{G}$. Astfel $\vec{M}_{\vec{R},0}=\vec{M}_{F_{cp},0}-\vec{M}_{G,0}$, iar scalar obținem

$M_{R,0}=F_{cp}\ell\cos\alpha-mg\ell\sin\alpha=m\ell\sin\alpha(4\pi^2n^2\ell\cos\alpha-g)=12{,}84$ Nm.

d. Cum $M_{R,0}=0 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2}\ell\cos\alpha-g=0$, deoarece $n=\frac{1}{T} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}\approx 1{,}85$ s

26. Studiem echilibru de rotație al corpului. Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox: $F_f\cos\alpha-N\sin\alpha=F_{cp}$ și pe Oy:

$F_f\sin\alpha+N\cos\alpha-G=0$. Cum $F_f=\mu N \Rightarrow$

$\mu N\cos\alpha-N\sin\alpha=m\omega^2R$ (1) și

$\mu N\sin\alpha+N\cos\alpha=mg$ (2)

Împărțim relațiile (1) la (2) obținem:

$$\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}{\mu\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\omega^2R}{g} \Rightarrow \mu=\frac{g\sin\alpha+\omega^2R\cos\alpha}{g\cos\alpha-\omega^2R\sin\alpha}\approx 0{,}8.$$

Bibliografie:

1. Chiriță M., Davidescu D., Şoltuianu M., Bacalaureat la fizică, Editura Tamar, 2003
2. Rusu O., Chiriță M., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Niculescu, 2004
3. Hristev A., Fălie V., Manda D., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1996
4. Enescu G. şi colectiv, Fizică manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1995
5. Rusu O., Trăistaru C., Galbură A., Dinică L., Chiriță M., Fizică Mecanică, Optică, Editura Corint, 2006
6. Hristev A., şi colectiv, Probleme de fizică pentru clasele IX-X. Editura Didactică şi Pedagogică, 1983
7. Cone G., Stanciu Gh., Tudorache Ş., Probleme de fizică pentru liceu (vol I şi II), Editura All, 1996
8. Vlăducă Gh. Şi colectiv, Probleme de fizică pentru clasele XI-XII, Editura Didactică şi Pedagogică, 1993
9. Hristev A., Probleme de fizică. Optică. Fizică atomică şi nucleară, Editura ARH, 1992
10. Toader E., Spulber V., 555 Teste de optică, Editura Didactică şi Pedagogică, 1989
11. Rusu O., Galbură A., Probleme de mecanică, Editura Niculescu,1994
12. Ionescu R., Onea C., Toma I., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Teora, 2000
13. Druică Z., Popescu A., Probleme de mecanică şi acustică, Editura tehnică, 1974
14. Colectiv, Culegere de probleme pentru admiterea în învăţământul superior, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1989
15. Colectiv, Teste de fizică, Editura Politehnica Press, 2002
16. Colectiv, Societatea de Ştiinţe Fizice şi Chimice, 1986
17. Hristev A., Probleme de fizică pentru învăţământul mediu, Editura Icar, 1991
18. Probleme date la examenul de bacalaureat
19. Variantele propuse la examenul de bacalaureat 2007, 2008 şi 2009
20. Subiecte de bacalaureat date în diverşi ani

ISBN: 978-606-8010-52-6

Preț: 30 lei