

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați media aritmetică a numerelor reale $a = 2021 - \sqrt{2}$ și $b = 2021 + \sqrt{2}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(\sqrt{x} + 3) + \log_3(\sqrt{x} - 3) = 2$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 16 submulțimi.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3, 0)$, $N(8, 3)$ și $P(6, 3)$. Determinați coordonatele punctului Q , știind că $\overline{MN} + \overline{MP} = \overline{MQ}$.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Arătați că $A = \frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, +\infty)$, $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, unde $(A(a))^{-1}$ este inversa matricei $A(a)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, unde $m \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Pentru $m = 1$, arătați că $2 \circ 2 = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că, dacă $2 \circ 1 = 5$, atunci $2 \circ 5 = 1$.
- 5p** c) Determinați numărul real x , știind că $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are exact două soluții distincte în intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{11}{5}$.

5p b) Se consideră $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Știind că graficul funcției F are asimptotă oblică spre $+\infty$, determinați panta acestei asimptote.

5p c) Se consideră funcția $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $G(0) = 0$. Arătați că $\int_0^1 xG(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$.