

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

✓ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

✓ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

✓ Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = (2 + 3i)(2 - 3i) - (9 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 - 9 + 3i = 4 + 3i$ $ z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$	3p 2p
2.	$f(2) = 0$ $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = 5$	2p 3p
3.	$4^{x-5} = 4^{-2}$ $x = 3$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 8 este $\{118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222\}$, deci sunt 10 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{10}{900} = \frac{1}{90}$	2p 2p 1p
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $AM = \frac{1}{2}AC$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC) = 76$ $AC = 2\sqrt{19}$ $ AM = AM = \sqrt{19}$	2p 3p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\triangle ABC$ este dreptunghic în A $R = \frac{BC}{2} = 10$ $P_{\triangle ABC} = 48$ și $\Delta_{ABC} = \frac{12 \cdot BC }{2} = 96$ $r = \frac{96}{24} = 4$, de unde obținem $\frac{r}{R} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A(4)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 21 + (-8) - (-14) - 2 - 24 = 5$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = 5a - 15$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ nu este inversabilă ✓ $\det(A(a)) \neq 0$, deci $a = 3$	2p 3p
c)	Pentru $a = 3$ soluțiile sistemului de ecuații sunt de forma $(1 + 5\alpha, -1 - 13\alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ $z_0^2 = x_0 + y_0$ ✓ $\alpha^2 = 8\alpha - 8$ sau $\alpha = 0$, deci $(x_0, y_0, z_0) = (-39, 103, -8)$ sau $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$	3p 2p

2.a)	$4 * 3 = \sqrt{4^{\log_3 3}} =$ $= \sqrt{4} = 2$	3p 2p
b)	$x * 9 = \sqrt{x^{\log_3 9}} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $9 * x = \sqrt{9^{\log_3 x}} = \sqrt{3^{2 \log_3 x}} = \sqrt{(3^{\log_3 x})^2} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $e = 9$ este elementul neutru al legii de compoziție în $(\mathbb{R}, *)$	2p 3p
c)	$x * x = e \Rightarrow \sqrt{x^{\log_3 x}} = 9 \Rightarrow x^{\log_3 x} = 81 \Rightarrow \log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$, deci $\log_3^2 x = 4$ $\log_3 x = -2$ sau $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$, care nu convine; $x = 9$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right) - (x^2 - 9) \cdot 2x \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right)$ $= 2x \left(\frac{1}{x^2 - 4} - (x^2 - 9) \right) = 2x \left(\frac{1 - (x^2 - 9)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} \right)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{f(x)-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{(x^2-9)(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x+3)(x^2-4)} \cdot \frac{1}{(x+3)(x^2-4)}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(x^2-4)} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{30}$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}}{2}$ sau $x = -\frac{\sqrt{13}}{2}$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}$ $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in \left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2} \right)$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{13}}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{13}}{2}^+} \frac{1}{(x+3)(x^2-4)} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{13}}{2}^-} f(x) = -\infty$, $f\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = -\frac{13}{4}$, $f(0) = 39$, f continuă pe \mathbb{R} , f strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ și pe $\left(\frac{\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$ și f strict crescătoare pe $\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$, încă pe $\left(\frac{\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$, deci ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale dacă $m \in \left(-\frac{13}{4}, 39\right)$	3p 2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\arctg x} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{2x} dx = \int_1^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right _1^2 =$ $= 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$	3p 2p
b)	$\int_0^{\sqrt{3}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left((x^2+1)' \arctg x \right) dx = \left((x^2+1) \arctg x \right) \Big _0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \arctg x dx$ $= \left(4 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \right) - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \arctg x dx$ $= \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{3} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \arctg x dx$ de unde obținem $a = \frac{3}{4}$	3p 2p
c)	$\int_{-1}^1 x f(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 \arctg x dx = 2 \int_0^1 (-x)^2 \arctg(-x) (-1) dx = -2 \int_0^1 x^2 \arctg x dx = -\int_{-1}^1 x f(x) dx$ $2 \int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$, deci $\int_{-1}^1 x f(x) dx = 0$	3p 2p