Bacalaureat

Proba scrisa Bacalaureat olimpici 2012 M1

Subiecte rezolvate –Bacalaureat olimpici 2012, M1

Gasiti mai jos rezolvarea detaliata a subiectelor Bacalaureat olimpici 2012, M1

<u>Subiectul I</u>

1. Determinati numarul real m stiind ca multimile $A = \{2\}$ si $B = \{x \in R \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$ sunt egale.

Rezolvare:
$A = B \Rightarrow 2 \in B \Rightarrow 2^2 + 2m + 4 = 0 \Rightarrow 2m = -8 \Rightarrow m = -4$.
In acest caz ecuatia devine $x^2 - 4x + 4 = 0$. Verificam daca ecuatia mai are si alte solutii decat 2.
$x^2 - 4x + 4 = 0$, $\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$. Deci $B = \{2\}$ pentru $m = -4$.

2. Determinati coordonatele varfului parabolei asociate functiei $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Rezolvare:
Varfului parabolei asociate functiei f este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow x_V = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.

$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow y_V = -\frac{1}{4}$. Deci $\begin{cases} x_v = \frac{3}{2} \\ y_v = -\frac{1}{4} \end{cases}$.

3. Rezolvati, in multimea numerelor reale inecuatia $3^{\log_3 x} < 1$.

Rezolvare:
Conditia de existenta a logaritmului $x > 0$.
$3^{\log_3 x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$. Tinand cont de conditia de mai sus $\Rightarrow x \in (0, 1)$.

4. Calculati probabiltatea ca, alegand la intamplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta sa fie format doar din cifre impare.

Rezolvare:
$P = \frac{\text{nr. de cazuri favorabile}}{\text{nr. de cazuri posibile}} = \frac{\text{nr. numerelor formate doar din cifre impare}}{\text{nr. numerelor formate din 2 cifre}}$.
Cazurile posibile sunt: 10, 11, 12, ... , 99. in total 90 de cazuri.
Cifrele impare sunt {1, 3, 5, 7, 9}.

Cazurile favorabile sunt numerel de forma $\overline{1a}$, $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, deci 5 cazuri,

$\overline{3a}$, $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, deci 5 cazuri,

...

$\overline{9a}$, $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, deci 5 cazuri,

Deci in total sunt $5 \cdot 5 = 25$ cazuri favorabile.

Deci $P = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.

5. Determinati numarul real a pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ si $\vec{v} = a\vec{i} + (2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

Rezolvare:

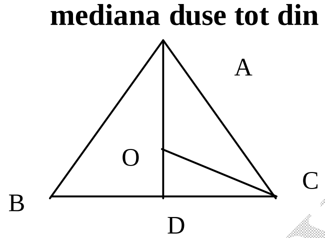
$\vec{u}$ si $\vec{v}$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{a}{2a-3} \Leftrightarrow 6a - 9 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3$

6. Calculati raza cercului circumscris triunghiului ABC, stiind ca AB = AC = 5 si BC = 6.

Rezolvare:

Solutia 1:

Centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC se afla la intersectia mediatoarelor laturilor. Deoarece triunghiul este isoscel mediatoarea laturii [BC] coincide cu bisectoarea, inaltimea si mediana duse tot din varful A si o notam cu [AD]. [AD] mediana $\Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2} = 3$



In triunghiului ADC, $m(\hat{D}) = 90^\circ \Rightarrow AD^2 = AC^2 - DC^2 \Rightarrow AD^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AD = 4$.

$OA = OB = OC = R \Rightarrow OD = AD - OA = 4 - R$.

In triunghiul ODC, $m(\hat{D}) = 90^\circ \Rightarrow OC^2 = OD^2 + DC^2 \Rightarrow R^2 = (4-R)^2 + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 16 - 8R + R^2 + 9 \Rightarrow 8R = 25 \Rightarrow R = \frac{25}{8}$.

Solutia 2

Se stie ca $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$.

Formula lui Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+6}{2} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 12 \Rightarrow R = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 12} = \frac{25}{8}$.

<u>Subiectul II</u>

1. In $\mathsf{M}_3(C)$ se considera matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$, unde $x \in R$.

a) Calculati $\det(A(\pi))$.

b) Aratati ca $A(x)\cdot A(y) = A(x + y)$ pentru orice $x, y \in R$.

c) Determinati numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012} = I_3$.

Rezolvare:

a) $A(\pi) = \begin{pmatrix} \cos\pi & 0 & i\sin\pi \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin\pi & 0 & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det(A(\pi)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$

b) Fie $x, y \in R$. $A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y & 0 & i\sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin y & 0 & \cos y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos x\cos y + i^2 \sin x \sin y & 0 & i\cos x \sin y + i\sin x\cos y \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x\cos y + i\cos x\sin y & 0 & i^2 \sin x\sin y + \cos x\cos y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos x\cos y - \sin x\sin y & 0 & i(\cos x\sin y + \sin x\cos y) \\ 0 & 1 & 0 \\ i(\sin x\cos y + \cos x\sin y) & 0 & -\sin x\sin y + \cos x\cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y) \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y) \end{pmatrix} = A(x + y)$

Deci $A(x)\cdot A(y) = A(x + y)$ pentru orice $x, y \in R$

c) $(A(x))^2 = A(x)\cdot A(x) = A(x + x) = A(2x)$. Presupunem ca $(A(x))^n = A(nx)$.

Sa demonstram ca $(A(x))^{n+1} = A((n+1)x)$.

$(A(x))^{n+1} = A(nx)\cdot A(x) = A(nx + x) = A((n+1)x)$. Deci $(A(x))^{n+1} = A((n+1)x)$ pentru orice $n \in N$.

Deci avem $(A(x))^{2012} = A(2012x)$

$(A(x))^{2012} = I_3 \Leftrightarrow A(2012x) = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos 2012x & 0 & i\sin 2012x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin 2012x & 0 & \cos 2012x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2012x = 1 \\ \sin 2012x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2012x = \pm\arccos 1 + 2k\pi \\ 2012x = (-1)^k \arcsin 0 + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2012x = 2k\pi \\ 2012x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{2012}, k \in Z.$

2. Pe multimea G = (0, 1) se defineste legea de compozitie asociativa $x \circ y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

a) Aratati ca $e = \dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compozitie „$\circ$”.

b) Aratati ca orice element din multimea G este simetrizabil in raport cu legea de compozitie „$\circ$”

c) Demonstrati ca $f: G \to R_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(R_+^*, \cdot)$.

Rezolvare:

e = $\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compozitie „$\circ$” daca $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \circ x = x$ pentru orice $x \in G$

$$x \circ \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{2x \cdot \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{x}{2}}{x - x + \frac{1}{2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{1} = x \quad \forall x \in G$$

$$\frac{1}{2} \circ x = \frac{\frac{1}{2} \cdot x}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} - x + 1} = \frac{\frac{x}{2}}{x - x + \frac{1}{2}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{1} = x \quad \forall x \in G$$

Deci e = $\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compozitie „$\circ$”.

b) Fie $x \in G$. x’ $x \in G$ este simetricul lui x in raport cu lege de compozitie „$\circ$” daca

$x \circ x' = x' \circ x = \frac{1}{2}$.

$$x \circ x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xx' = 2xx' - x - x' + 1 \Leftrightarrow x' = 1 - x \in G$$

Verificam ca x' = 1 – x este simetricul lui x la stanga:

$$(1 - x) \circ x = \frac{(1-x)x}{2(1-x)x - (1-x) - x + 1} = \frac{(1-x)x}{2(1-x)x} = \frac{1}{2}.$$

Deci orice element din multimea G este simetrizabil in raport cu legea de compozitie „$\circ$”.

c) Fie $x \in G \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow$ f este bine definita.

Fie $x_1, x_2 \in G$ astfel incat $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} - 1 = \frac{1}{x_2} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f este injectiva.

Fie y > 0 , $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y+1} \in (0, 1)$. Deci $\forall y \in R_+^*$, $\exists$ $x \in G$, $x = \frac{1}{y+1}$
astfel incat f(x) = y. Deci f este surjectiva.
f este injectiva si surjectiva $\Rightarrow$ f este bijectiva.
Aratam ca f este morfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(R_+^*, \cdot)$.

Fie x, $y \in G$ oarecare. $f(x \circ y) = f\left(\frac{xy}{2xy - x - y + 1}\right) = \frac{2xy - x - y + 1}{xy} - 1 = \frac{2xy - x - y + 1 - xy}{xy} =$

$$= \frac{xy - x - y + 1}{xy}.$$

$$f(x) \cdot f(y) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + 1 = \frac{1 - y - x + xy}{xy} = \frac{xy - x - y + 1}{xy}.$$

Deci $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$ oricare ar fi x, $y \in G$. Deci f este morfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(R_+^*, \cdot)$
f este bijectiva $\Rightarrow$ f este izomorfism de la grupul $(G, \circ)$ la grupul $(R_+^*, \cdot)$.

<u>**Subiectul III**</u>

1. Se considera functia f: R $\rightarrow$ R, f(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Calculati $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)}$.

b) Demonstrati ca functia f este convexa pe R.

c) Aratati ca functia g: (0, +∞) $\rightarrow$ R, g(x) = f ($\sqrt{x}$) este strict crescatoare pe (0, +∞).

Rezolvare:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}}$ **(cazul $\frac{\infty}{\infty}$). Aplicam regula lui l'Hospital $\Rightarrow$**

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 0.$

b) Studiem semnul lui f"(x) pe R.

f'(x) = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. f"(x) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0\ \forall x \in R \Rightarrow$ **f este convexa pe R.**

c) g(x) = f($\sqrt{x}$) = $\frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$. g'(x) = $\frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}\ \ \forall x \in (0, \infty).$

Daca x > 0 $\Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > -\sqrt{x} \Rightarrow e^{\sqrt{x}} > e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow$ g'(x) > 0 $\Rightarrow$ g este strict crescatoare pe (0, ∞).

2. Pentru fiecare numar natural nenul n se considera numerele $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}dx$ si

$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

a) Calculati J_1.

b) Calculati I_1.

c) Demonstrati $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$ pentru orice numar natural nenul n.

Rezolvare:

a) $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

b) $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2x)\sqrt{1-x^2}dx \overset{(i)}{=} -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\int_1^0 u^{\frac{1}{2}}du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 =$

$= -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$

(i) Notam u = 1 - $x^2 \Rightarrow$ du = - 2xdx, u(0) = 1 si u(1) = 0.

c) $J_{2n} - J_{2n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2n} x - \sin^{2n+2} x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x(1-\sin^2 x)dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx$$

Facem urmatoarea schimbare de variabila:

$\sin x = t \Rightarrow dt = \cos x\, dx$, $t(0) = \sin 0 = 0$ si $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx = \int_0^1 t^{2n}\sqrt{1-t^2}dt = I_{2n}.$$

Deci $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$ pentru orice numar natural nenul n.