

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică M\_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

✓ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

✓ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

✓ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n \in \mathbb{N} \mid A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Suma elementelor mulțimii $A$ este $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	3p 2p
2.	$\Delta = 4 - 4m$ $\frac{4m - 4}{4} = 2$ , de unde obținem $m = 3$	2p 3p
3.	$x + 3 = 9 - x \quad 2x = 6$ $x = 3$ , care convine	3p 2p
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente $C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 45 + 10 + 1 = 56$	3p 2p
5.	$D(2, 2)$ $CD = 10$	2p 3p
6.	$\cos 2k\pi = 1$ și $\cos(2k + 1)\pi = -1$ , unde $k \in \mathbb{Z}$ $1 + \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \dots + \cos 2019\pi = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots + (-1) + 1 + (-1) = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 4$	2p 3p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} ab + a + b + 1 & 0 & 0 \\ a + b + 1 & ab & a + b + 1 \\ 0 & 0 & ab + a + b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ a + b + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a + b + 1 & 0 & 0 \\ 0 & a + b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & a + b + 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ab & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (a + b + 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ab I_3 + (a + b + 1)A(0), \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b$	3p 2p
c)	$A(0)A(a) = (a + 1)A(0)$ , pentru orice număr real $a$ $A(0)A(1)A(2) \dots A(2019) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2020 = A(0)$ , de unde obținem $n = 2020$	2p 3p
2.a)	$f(1) = 6 - 2m$ $6 - 2m = 0 \quad m = 3$	3p 2p
b)	$f = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2)$ Rădăcinile sunt $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$	2p 3p

<b>c)</b>	$x_1 + x_2 + x_3 = m$ , $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$ , deci $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = m^3 - 3m - 9$ $m^3 - 3m - 9 = m^3 - 12$ , de unde obținem $m = 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
-----------	---	------------------------

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = -2 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$ $= \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{2x - (x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2}, x \in (0, 1]$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( 1 - \frac{2}{x+1} - \ln \frac{x}{x+1} \right) = 1 - 0 - 0 = 1$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = 1</math> este asimptot orizontal spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	<p><math>f'(x) &lt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (0, 1]</math>, deci <math>f</math> este descrescătoare pe <math>(0, 1]</math> și <math>f'(x) &gt; 0</math>, pentru orice <math>x \in [1, +\infty)</math>, deci <math>f</math> este crescătoare pe <math>[1, +\infty)</math>. <math>f(x) &gt; f(1)</math>, pentru orice <math>x \in (0, 1]</math>.</p> <p><math>f(1) = \ln 2 &gt; 0</math>, deci <math>f(x) &gt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (0, 1]</math> și, cum <math>g(x) = h(x) \cdot f(x) \neq 0</math>, ecuația <math>g(x) = h(x)</math> nu are soluții în <math>(0, 1]</math>, deci graficele funcțiilor <math>g</math> și <math>h</math> nu au niciun punct comun</p>	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 4) dx = \left. \frac{x^3}{3} + 4x \right _0^1 = \frac{1}{3} + 4 - 0 = \frac{13}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$g(x) = x\sqrt{x^2 + 4} \quad \int_{-1}^1 g(x) dx = - \int_{-1}^0 x\sqrt{x^2 + 4} dx + \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4} dx =$ $= - \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big _{-1}^0 + \frac{1}{3} (x^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big _0^1 = - \frac{1}{3} (8 - 5\sqrt{5}) + \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 8) = \frac{10\sqrt{5} - 16}{3}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	<p>Din teorema lui L'Hôpital: <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x)}{4x^3} =</math></p> $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4} = \frac{1}{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>