

2.1. Mișcarea mecanică

1.a. Din formula vectorului de poziție $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, prin identificare obținem $x=4t-2$ și $y=-3t+1$. Ecuatia traectoriei se obține eliminând timpul t din cele două ecuații: $t = \frac{x+2}{4} \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ deoarece y este funcție de gradul întâi de x , înseamnă că punctul material are o mișcare rectilinie și uniformă.

- b.** Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx} = v_x = 4$ m/s și din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow v_{my} = v_y = -3$ m/s. Acestea reprezintă componentele vitezei pe axe de coordonate (coeficienții din fața lui t din ecuațiile parametrice x și y), astfel că $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$
- c.** Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5$ m/s.
- d.** $a = 0$, deoarece vectorul viteza este constant ($\vec{v} = ct$).

2.a. Ecuatiile parametrice ale mișcării pe axe de coordonate sunt $x=t^2/2$ și $y=t$, astfel că eliminând timpul din ecuații obținem $y=\sqrt{2x}$

- b.** Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{2\Delta t} = t - \frac{\Delta t}{2}$. Viteza instantanee se obține din $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow v_x = t$. Din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t) - t}{\Delta t} = 1$ m/s $\Rightarrow v_y = 1$ m/s, astfel $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{t^2 + 1}$. Când $t=2$ s obținem $v=2,236$ m/s

- c.** Cum $a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Rightarrow a_{mx} = a_x = 1$ m/s² iar $a_y = a_{my} = 0$, deoarece $v_y = ct$, atunci punctul material are o mișcare uniform accelerată cu accelerația momentană $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1$ m/s² indiferent de intervalul de timp

3.a. Din $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, prin identificare obținem $x=1$ m/s, $y=2t$ și $z=t^2$. Cum $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx} = v_x = 0$ m/s, $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{2(t+\Delta t) - 2t}{\Delta t} = 2$ m/s și din $v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$ când $\Delta t \rightarrow 0$ obținem $v_z = 2t$. Astfel vectorul viteza este $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = 2\vec{j} + 2t\vec{k}$

- b.** La momentul $t_1=2$ s, $v_x=4$ m/s, astfel $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \approx 4,47$ m/s

- c.** Deoarece $v_x = 0 \Rightarrow a_x = 0$, iar $a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \Rightarrow a_y = 0$. Cum $a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = 2$ m/s² $\Rightarrow a_{mx} = a_z = 2$ m/s², obținem $\ddot{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = 2\vec{k}$

4.a. Eliminăm timpul t din cele două ecuații pentru a determina ecuația traectoriei. Astfel $t = \frac{x+4}{3} \Rightarrow y = \frac{20-x}{3} \Rightarrow$ punctul material are o mișcare rectilinie și uniformă.

b. Componentele vectorului viteza pe axe de coordonate sunt coeficienții din fața lui t din ecuațiile parametrice x și y , astfel $v_x=3$ m/s și $v_y=-1$ m/s \Rightarrow vectorul viteza al punctului material $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=3\vec{i}-\vec{j}$.

c. Modulul vitezei punctului material este $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=3,16$ m/s

5.a. În intervalul de timp $\Delta t=t_2-t_1=1$ s variația coordonatei pe axa Ox este $\Delta x=x_2-x_1=2$ m iar pe axa Oy variația coordonatei este $\Delta y=y_2-y_1=(2x_2+1)-(2x_1+1)$ astfel $\Delta y=2\Delta x=4$ m \Rightarrow deplasarea mobilului este $d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=4,47$ m

b. Viteza medie a punctului material este $v_m=d/\Delta t=4,47$ m/s

c. Deoarece mobilul se mișcă uniform pe axe de coordonate componentele vectorului viteza pe axe de coordonate sunt $v_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}=2$ m/s și $v_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}=4$ m/s, astfel că vectorul viteza este $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=2\vec{i}+4\vec{j}$

d. Deoarece $\vec{v}=\text{ct}$ vectorul acceleratie este $\vec{a}=\Delta\vec{v}/\Delta t=0$

6.a. Modulul vitezelor punctului material este $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=5$ m/s iar vectorul viteza este $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=-4\vec{i}+3\vec{j}$

b. Vectorul de poziție este $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}t=2\vec{i}-\vec{j}+(-4\vec{i}+3\vec{j})\cdot t=(2-4t)\vec{i}+(3t-1)\vec{j}$

c. Cum $\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j}\Rightarrow x=2-4t$ și $y=3t-1$. Pentru $t_1=2$ s, $x_1=-6$ m și $y_1=5$ m, iar pentru $t_2=4$ s, $x_2=-14$ m și $y_2=11$ m astfel că $\Delta x=x_2-x_1=-8$ m și $\Delta y=y_2-y_1=6$ m. Deplasarea mobilului este $d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=10$ m

d. Ecuația traectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații parametrice x și $y\Rightarrow t=\frac{2-x}{4}\Rightarrow y=\frac{2-3x}{4}$.

7.a. Din grafic coordonatele mobilului atunci când acesta se află în punctul C sunt $x_C=4$ m și $y_C=-2$ m

b. $r_A=\sqrt{x_A^2+y_A^2}\approx 2,82$ m, deoarece $x_A=-2$ m și $y_A=2$ m

c. Vectorului viteza medie este $\vec{v}_{mAD}=\frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t}$.

Cum $\Delta r_{AD}=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}$ deoarece $x_D=8$ m și $y_D=-1$ m $\Rightarrow \Delta r_{AD}\approx 10,44$ m și $v_{mAD}=0,174$ m/s

8.a. Conform definiției vitezei medii: $v_m=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$.

Cum $x(t+\Delta t)=2(t+\Delta t)^2-3(t+\Delta t)+5\Rightarrow$

$\Delta x=2(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-3(t+\Delta t)+5-(2t^2-3t+5)\Rightarrow$

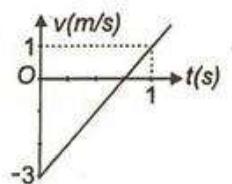
$\Delta x=4t\Delta t+2\Delta t^2-3\Delta t\Rightarrow v_m=4t+2\Delta t-3$

Viteza instantanee se obține când $\Delta t\rightarrow 0\Rightarrow v=4t-3$

b. Pentru $t_1=0$ s, $v_1=-3$ m/s și pentru $t_2=1$ s, $v_2=1$ m/s. Reprezentarea grafică a legii vitezei este redată în figura alăturată.

c. Conform definiției acceleratiei medii:

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}\Rightarrow$$



$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = 4(t + \Delta t) - 3 - (4t - 3) = 4\Delta t \Rightarrow a_m = a = 4 \text{ m/s}^2 \Rightarrow$ mișcarea mobilului este uniform accelerată.

9.a. Conform definiției accelerării medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow v = 10 - 2t$ deoarece $a = 2 \text{ m/s}^2$, astfel că la $t_1 = 3 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$

b. Când mobilul de oprește $v = 0 \Rightarrow t_{top} = 5 \text{ s}$

c. Deoarece viteza depinde liniar de timp, valoarea medie a vitezei se calculează prin media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului studiat astfel că $v_m = (v_0 + 0)/2 = v_0/2 = 5 \text{ m/s}$

d. Distanța parcursă până la oprire se calculează cu relația $d = v_m t_{top} = 25 \text{ m}$

10.a. Conform definiției accelerării medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = 2.5 \text{ m/s}^2$, deoarece $v = 0 \text{ m/s}$ și $\Delta v = v$.

b. Viteza medie este $v_m = (v_i + v_f)/2 = 12.5 \text{ m/s}$

c. Distanța parcursă de mobil este $d = v_m \Delta t = 125 \text{ m}$

11.a. Conform definiției accelerării medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v}{\Delta t} = -\frac{v}{\Delta t} = -1 \text{ m/s}^2$. Semnul “-” arată că mișcarea mișcarea mașinii este frânătă.

b. Viteza medie este $v_m = (v_i + v_f)/2 = v/2 = 7.5 \text{ m/s}$

c. Distanța parcursă până la oprire $d = v_m \Delta t = 125 \text{ m}$

12.a. Conform definiției accelerării medii și cum $a_m = a$, deoarece viteza crește uniform cu 1 m/s în fiecare secundă, atunci $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1 \text{ m/s}^2$

b. Deoarece depășirea durează Δt , atunci din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \Rightarrow v_f = v_0 + a\Delta t$.

După $\Delta t = 20 \text{ s} \Rightarrow v_f = 40 \text{ m/s}$, astfel că viteza medie este $v_m = (v_0 + v_f)/2 = 30 \text{ m/s}$

c. Distanța parcursă de mobil este $d = v_m \Delta t = 600 \text{ m}$

13.a. Conform definiției accelerării medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = -0.1 \text{ m/s}^2$

b. Viteza medie este $v_m = (v + v_0)/2 = 1.5 \text{ m/s}$

c. Distanța parcursă până la oprire $d = v_m \Delta t = 15 \text{ m}$

d. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{0 - v_0}{\Delta t'} = -\frac{v_0}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v_0}{a} = 20 \text{ s}$, deoarece $v = 0 \text{ m/s}$ și $\Delta v = -v_0 \Rightarrow$ distanța totală parcursă de biciclist până la oprire este $d = v'_m \Delta t'$, unde $v'_m = v_0/2 \Rightarrow d = -v_0^2/2a = 20 \text{ m}$.

14. a. Din definiție viteza medie a celui mai rapid ciclist este $v_m = \frac{D}{\Delta t} = 12.5 \text{ m/s}$, deoarece $\Delta t = 200 \text{ min}$

b. Din definiția accelerării $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{v - v_0}{\Delta t'}$. Deoarece $d_2 = v_m \Delta t' = \frac{v_0 + v}{2} \Delta t'$

$$\text{obținem } a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d_2} = 48 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

c. Al doilea ciclist a mers distanța d_1-d_2 uniform cu viteza v_0 , iar restul uniform accelerat, astfel că timpul total de mișcare este $\Delta t = \frac{d_1-d_2}{v_0} + \frac{2d_2}{v+v_0} = 542$ s. Ora la care ultimul ciclist a trecut linia de sosire este 12:29:02.

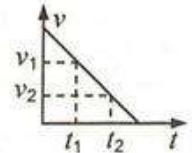
15.a. Momentul de timp la care corpul se oprește se obține din $v=0 \Rightarrow t_{top}=3$ s

b. Din $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v-v_0}{\Delta t} \Rightarrow v = v_0 + at$, iar din identificarea coeficienților accelerării instantanee este $a=-4$ m/s² și viteza inițială este $v_0=12$ m/s

c. Distanța parcursă până la oprire $d=v_{m top}$, unde $v_m=(v_0+0)/2$, astfel că $d=v_{m top}/2=18$ m

16.a. Conform definiției $a=\Delta v/\Delta t=-2$ m/s² ⇒ mișcarea mobilului este uniform încetinită, deoarece $a < 0$ și $v_0 > 0$.

b. Din $a=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t \Rightarrow v=v_0+at=10-2t$. Când $t_1=2$ s ⇒ $v_1=6$ m/s, iar când $t_2=4$ s ⇒ $v_2=2$ m/s. Spațiul parcurs de mobil reprezintă fizic, aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și cele două ordonate duse prin punctele cu t_1 și t_2 . Această figură geometrică este un trapez, astfel că: $d=A=\frac{(v_1+v_2)(t_2-t_1)}{2}=8$ m.



c. Viteza medie este $v_m=(v_1+v_2)/2=4$ m/s

d. Din grafic, timpul până la oprire este $t_{top}=5$ s, deoarece $v=0$ și spațiul până la oprire reprezintă aria triunghiului $s_{top}=A_{triunghi}=25$ m

17.a. Când $t \in (0, 2)$ s $v=2$ m/s=ct, astfel accelerarea este $a_1=0$. Când $t \in (2, 4)$ s, accelerarea este $a_2=\Delta v/\Delta t=1$ m/s², iar când $t \in (4, 8)$ s accelerarea este $a_3=\Delta v/\Delta t=-0,75$ m/s². Modulul maxim al accelerării este $a=1$ m/s²

b. Distanța parcursă în intervalul $t \in (0, 4)$ s reprezintă aria cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită la $t=4$ s ⇒ $d=10$ m

c. Distanța parcursă în intervalul $t \in (0, 8)$ s este aria cuprinsă cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită la $t=4$ s ⇒ $d=20$ m, astfel că viteza medie a corpului este $v_m=d_t/4=2,5$ m/s

18.a. Calculăm spațiul parcurs de mobil în primele trei secunde de la începerea mișcării. Acest spațiu este aria de sub curba vitezei și axa timpului, astfel că $s_3=25$ m. Viteza medie este $v_m=s_3/\Delta t_3=8,33$ m/s, cu $\Delta t=3$ s

b. Calculăm accelerările pe fiecare porțiune distinctă de mișcare. Deoarece $a_1=\Delta v_1/\Delta t_1=10$ m/s² ⇒ în intervalul de timp $t \in (0, 1)$ s mobilul are o mișcare uniform accelerată. În intervalul de timp $t \in (1, 3)$ s, $a_2=\Delta v_2/\Delta t_2=0$ ⇒ mobilul se mișcă uniform. În intervalul de timp $t \in (3, 7)$ s, $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3=-4$ m/s² ⇒ mobilul are o mișcare uniform încetinită. În intervalul de timp $t \in (7, 8)$ s, $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4=4$ m/s² ⇒ mobilul se mișcă uniform accelerat. Modulul maxim al accelerării se obține pe prima porțiune de mișcare când accelerarea este $a_1=10$ m/s²

c. Prin definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$. Calculăm coordonata finală x_f , știind că cea inițială este nulă ($x_0=0$). Din graficul vitezei observăm că la un anumit moment $v=0$, iar apoi $v < 0$, ceea ce înseamnă că mobilul se întoarce. Pe porțiunea când $t \in [3, 7]$ s, din $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3$, legea vitezei este $v=10-4(t-3)$ și când $v=0 \Rightarrow t_{top}=5,5$ s. Calculăm coordonata maximă când mobilul se oprește cu aria trapezului $x_{max}=37,5$ m. Calculăm spațiul parcurs de mobil în intervalul de timp de la 5,5 s până la 8 s, cu aria cuprinsă între curba vitezei și axa

timpului, astfel că $s=8,5$ m. După ce viteza devine nulă mobilul se întoarce pe distanță 8,5 m, astfel coordonata finală este $x_f=x_{max}=29$ m $\Rightarrow v_m=3,625$ m/s

d. Viteza în modul medie se calculează împărțind distanța totală parcursă de mobil în intervalul de timp $t \in (0,8)$ s $d=x_{max}+s=46$ m la valoarea intervalului de timp $\Delta t=8$ s și obținem $|v_m|=d/\Delta t=5,75$ m/s. Observăm că există o diferență între viteza medie și viteza în modul medie, deoarece pe parcursul mișcării mobilul se oprește și se întoarce.

19.a. În intervalul $t \in (0,1)$ s deoarece viteza crește liniar cu timpul, viteza medie este media aritmetică a valorilor de la extremitățile intervalului, astfel că $v_m=(v_0+v_1)/2=1$ m/s

b. Din definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$, unde $\Delta x=x_f-x_0$. Deoarece în intervalul de timp de la 0 la 6 s, $v > 0$, mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei de coordonate $\Rightarrow x_f=s$, unde s este spațiul parcurs de mobil și reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și ordinata construită la $t=6$ s. Obținem $x_f=12$ m $\Rightarrow v_m=2$ m/s, deoarece $\Delta t=6$ s

c. Deoarece $v_4=4$ m/s când $t_4=4$ s și $v_6=0$ m/s când $t_6=6$ s, atunci $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4=-2$ m/s² \Rightarrow mișcarea mobilului este uniform încetinită

d. Din $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$ obținem $v_4=v_{04}+a_4(t-t_4)$. Din $v_{04}=4$ m/s și $t_4=4$ s obținem $v_4=12-2t$. La momentul $t_7=7$ s, viteza mobilului va fi $v_7=-2$ m/s

20.a. Viteza maximă atinsă de metrou se obține la momentul $t_a=18$ s, astfel că

$$\text{din legea accelerării } a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v_m = a_1 t_a = 18 \text{ m/s, deoarece } a_1 = 1 \text{ m/s}^2$$

b. Durata totală a călătoriei este $t=t_a+t_u+t_i$, unde t_u reprezintă timpul cât metroul se mișcă uniform, iar t_i reprezintă timpul cât metroul se mișcă încetinit. Aflăm din legea vitezei $v = v_m + a_3(t - t_{03}) = 18 - 0,5(t - 54)$ și din condiția de oprire $v=0$, timpul după care metroul se oprește. Astfel obținem $t=36$ s și $t_i=90$ s.

c. Distanța totală parcursă de metrou între cele două stații este $d_1=d_1+d_2+d_3$, unde $d_1=v_m t_a/2=162$ m reprezintă distanța parcursă de metrou la accelerare, $d_2=v_m t_u=648$ m reprezintă distanța parcursă de metrou când acesta se mișcă uniform și $d_3=v_m t_i/2=324$ m reprezintă distanța parcursă de metrou când frânează. Astfel obținem $d=1134$ m.

d. Viteza medie a metroului pe întreaga durată a călătoriei este $v = \frac{d}{t_1} = 12,6$ m/s

2.1.1. Mișcarea rectilinie și uniformă a punctului material

1. Sonarul emite o undă sonoră care se propagă rectiliniu cu viteza v spre obiect, se loveste de acesta și se întoarce pe aceeași direcție. Intervalul de timp detectat între momentul emiterii și momentul recepției este Δt , iar distanța parcursă dus-intors este $2d$, astfel că $\Delta t=2d/v \Rightarrow d=v\Delta t/2=7,5$ km.

2. Undele radio se propagă de la emițător spre obiectul de detectat, se reflectă, se întorc pe aceeași direcție și apoi sunt recepționate. Distanța d de la sursa de unde la obiect este parcursă dus - intors cu viteza c astfel că $2d=c\Delta t \Rightarrow d=c\Delta t/2=18 \cdot 10^6$ km

3.a. Deoarece elevul aude tunetul după Δt , iar sunetul se propagă prin aer cu viteza v , locul unde a fulgerat este la distanța $d=v\Delta t=1020$ m.

b. Dacă apoi elevul aude tunetul după $\Delta t'$, distanța la care a fulgerat este $d'=v\Delta t'=680$ m \Rightarrow centrul furtunii se apropie de locul unde se află elevul.

4.a. Deoarece distanța d este parcursă în intervalul de timp t , atunci $d=vt$, obținem viteza autoturismului $v=d/t=30$ m/s=108 km/h. Cum în afara localităților viteza legală este 90 km/h, automobilul a depășit viteza legală maximă admisă.

b. Prin definiție viteza medie este $v_m = \frac{AB}{t} = \frac{AB}{t_{AC} + t_{CB}}$. Cum $t_{AC} = \frac{AC}{v_1} = \frac{AB}{2v_1}$ și

$$t_{CB} = \frac{CB}{v_2} = \frac{AB}{2v_2}, \text{ deoarece } AC = CB = \frac{AB}{2}. \text{ Obținem } v_m = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \approx 22,22 \text{ m/s.}$$

c. Aplicăm definiția vitezei medii $v_m = \frac{d}{t} = \frac{d}{t_1 + t_2 + t_3}$ unde $t_1 = \frac{d}{8v}$, deoarece

prima jumătate de drum $\frac{d}{2}$ a fost parcursă cu viteza $4v$; $t_2 = \frac{d}{8v}$, deoarece

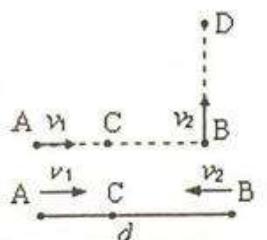
următorul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza $2v$ și $t_3 = \frac{d}{4v}$, deoarece

ultimul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza v . Obținem $v_m = 2v$.

5.a. Aflăm distanțele parcuse de cele două mobile în timpul t : $AC = v_1 t$ și $BD = v_2 t$, astfel că din desen

$$CD = \sqrt{(AB - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2} \approx 94,25 \text{ km.}$$

b. Din desen $d = AC + CB$. Deoarece mișcările sunt rectilinii și uniforme $AC = v_1 t$ și $CB = v_2 t \Rightarrow d = (v_1 + v_2)t \Rightarrow t = d/(v_1 + v_2)$ reprezintă timpul după care se întâlnesc automobilele. Astfel $AC = v_1 t = v_1 d/(v_1 + v_2) \approx 44,44 \text{ km}$



1. c. Alegem origine de timp momentul când pornește primul automobil. Astfel $d = v_1 t \Rightarrow t = \frac{d}{v_1}$ reprezintă timpul parcurs de primul mobil din punctul de

plecare A până în punctul de sosire B. Al doilea mobil pornește mai târziu cu Δt , astfel că el parurge aceeași distanță d , în intervalul de timp $t - \Delta t$.

$$\text{Atunci: } d = v_2(t - \Delta t) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 t - d}{v_2} = t - \frac{d}{v_2} = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} = \frac{d(v_2 - v_1)}{v_1 v_2} = 1000 \text{ s.}$$

6.a. În cazul a, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul C și ajunge în punctul B, astfel că acesta ajunge din A în B în

$$t' = \frac{AC + CB}{c} = \frac{2AC}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \frac{D^2}{4}}. \text{ Sunetul se poate propaga direct de la A la B, astfel că } t = D/c.$$

Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către B este $\Delta t = t' - t = \frac{1}{c} \left(\sqrt{4d^2 + D^2} - D \right) \approx 0,235 \text{ s}$

b. În cazul b, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul C și ajunge în punctul B, astfel că acesta ajunge din A în B în

$$t' = \frac{AC + CB}{c} = \frac{D + 2d}{c}. \text{ Sunetul se poate propaga direct de la A la B, astfel că } t = D/c.$$

Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către B este $\Delta t = t' - t = \frac{2d}{c} \approx 0,47 \text{ s.}$

c. Sunetul emis din A ajunge în B după $t = x/c$. Dar acest sunet se poate reflecta pe zid, astfel că ajunge în B după $t' = \frac{AC+CB}{c} = \frac{2d-x}{c}$. Intervalul de timp care separă sosirea sunetelor în B reprezintă durata unui semnal lung emis de copilul din A, astfel că $\tau = t' - t = \frac{2(d-x)}{c} \approx 0,235$ s

7.a. Corpul de studiat este şalupe. Sistemul de referință mobil este apă, iar cel fix solul. Notăm cu: v_a -viteza apei față de sol (viteză de transport) și cu v_r -viteza şalupei față de apă (viteză relativă).

Studiem mișcarea şalupei în sensul curgerii râului. v_1 este viteza absolută a şalupei față de sol. Cum $v_1 = v_a + v_r$, și din desen $v_1 = v_a + v_r$, iar cum $v_1 = \frac{d}{t_1}$ obținem $v_a + v_r = \frac{d}{t_1}$.

Studiem mișcarea şalupei în sens contrar sensului de curgere al râului, v_2 fiind în acest caz viteza şalupei față de sol.

Cum $v_2 = v_a + v_r$ și din desen $v_2 = v_r - v_a$, iar cum $v_2 = \frac{d}{t_2}$ obținem $v_r - v_a = \frac{d}{t_2}$. Prin scăderea relațiilor obținem: $v_a = \frac{d(t_2 - t_1)}{2t_2 t_1} = 5$ km/h

b. Prin adunarea relațiilor obținem: $v_r = \frac{d(t_2 + t_1)}{2t_2 t_1} = 15$ km/h

c. Dacă motorul şalupei nu funcționează atunci aceasta se deplasează cu viteza apei v_a , astfel că $t = d/v_a = 16$ h

8.a. Studiem mișcarea şalupei de la A la B, adică în sens contrar curgerii râului, astfel că din grafic $v_1 = d/t_1 = 10$ km/h. Cum $v_1 = v_a + v_r$, și scalar $v_1 = v_r - v_a$, unde v_r este viteza şalupei față de apă și v_a este viteza apei față de sol, obținem $v_r - v_a = v_1$. Studiem mișcarea şalupei de la B la A, adică în sensul curgerii râului, astfel că din grafic $v_2 = d/t_2 = 18$ km/h. Cum $v_2 = v_a + v_r$, și scalar $v_2 = v_r + v_a$, obținem $v_r + v_a = v_2$. Prin adunarea relațiilor obținem: $v_r = (v_2 + v_1)/2 = 14$ km/h

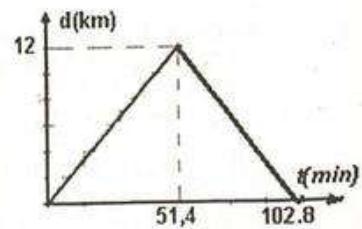
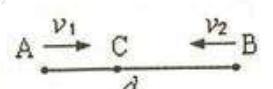
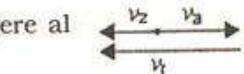
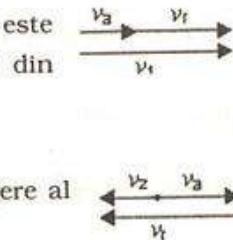
b. Dacă şalupe nu ar staționa în B atunci durata deplasării şalupei pe drumul A-B-A este $\Delta t = 112$ min, deoarece şalupe staționează 28 min.

c. Pentru şalupe care pornește din A: $AC = v_1 t$ și pentru cea care pornește din B: $BC = v_2 t$.

Deoarece $d = AC + BC = (v_1 + v_2)t = 2v_r t$ obținem timpul după care şalupele se întâlnesc: $t = d/(2v_r)$. Astfel distanța față de portul B la care se întâlnesc cele două şalupe este $BC = v_2 d/(2v_r) = 7,71$ km

d. Dacă apa ar fi stătătoare și şalupe nu ar staționa în B, atunci aceasta s-ar deplasa cu viteza v_r astfel că timpul de dus este egal cu cel de întors și este $t_{dus} = d/v_r = 51,428$ s.

Reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei d a şalupei de timp la deplasările A→B și B→A este redată în figura alăturată.



9.a. Pe scara imobilă timpul de urcare al omului este $t_2 = \ell/v_2$, unde v_2 este viteza omului față de scară, adică viteza relativă. Obținem $v_2 = \ell/t_2 = 0,714$ m/s = 2,57 km/h

b. Corpul studiat este omul, sistemul mobil este scara iar sistemul fix este solul. Notăm cu v_1 viteza scării față de sol adică viteza de transport. Inițial față de un observator aflat pe sol omul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, iar scalar $v_{abs} = v_1 + v_2$, astfel că $t_1 = \ell/(v_1 + v_2)$. Din cele

$$(v_1 + v_2) = \frac{\ell}{t_1} \text{ și } v_2 = \frac{\ell}{t_2} \text{ obținem } v_1 = \frac{\ell}{t_1} - \frac{\ell}{t_2} = \frac{\ell(t_2 - t_1)}{t_1 t_2} \approx 0,286 \text{ m/s} \approx 1,03 \text{ km/h}$$

c. Aflăm timpul în care este urcat omul de scară, dacă acesta nu se deplasează pe scară: $t_3 = \frac{\ell}{v_1} = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 35 \text{ s}$

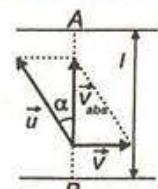
10.a. Studiem mișcarea ceferistului în sensul mișcării platformei. Notăm cu v_1 viteza ceferistului față de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}$ și scalar $v_1 = v_0 + v = 12 \text{ m/s}$. Studiem mișcarea ceferistului în sensul contrar mișcării platformei. Notăm cu v_2 viteza ceferistului față de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}$ și scalar $v_2 = v_0 - v = 10 \text{ m/s}$.

b. Timpul în care ceferistul revine la capătul platformei de unde a plecat este $t = t_{dus} + t_{intors} = \frac{2\ell}{v} = 14 \text{ s}$

c. Distanța parcursă de ceferist față de sol în situația de la punctul b. este $d = v_1 t_{dus} + v_2 t_{intors} = (v_1 + v_2) \frac{\ell}{v} = \frac{2v_0\ell}{v} = 168 \text{ m}$

11.a. Corpul studiat este vâslașul, sistemul mobil este apa, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei v este viteza de transport, iar u este viteza relativă. Pentru a ajunge pe malul opus pe drumul cel mai scurt, vâslașul orientează barca ca în figură.

Cum $\vec{v}_{abs} = \vec{u} + \vec{v}$, din desen: $\sin \alpha = \frac{u}{v} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \equiv 37^\circ$



b. Deoarece viteza vâslașului față de sol este $v_{abs} = \sqrt{u^2 + v^2} = 0,4 \text{ m/s}$, atunci timpul necesar pentru traversarea râului este $t_{AB} = \ell/v_{abs} = 125 \text{ s}$

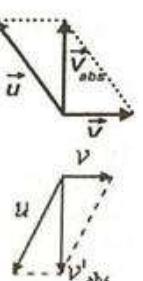
c. Dacă viteza vâslașului se păstrează timpul necesar pentru traversarea unui lac cu aceeași lățime este $t = \ell/u = 100 \text{ s}$

12.a. Corpul studiat este avionul, sistemul mobil este vântul, iar sistemul fix este solul. Studiem cazul în care vântul suflă perpendicular pe direcția parcursă de avion. Față de sol, avionul se deplasează cu viteza absolută \vec{v}_{abs} . Conform desenului

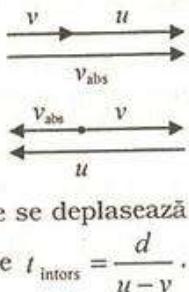
$v_{abs} = \sqrt{u^2 + v^2}$, astfel că $t_{dus} = \frac{d}{v_{abs}} = \frac{d}{\sqrt{u^2 + v^2}}$. La intors din

desen $v'_{abs} = \sqrt{u^2 - v^2}$ și obținem $t'_{intors} = \frac{d}{v'_{abs}} = \frac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$. Timpul

total de zbor este $t = t_{dus} + t_{intors} = \frac{2d}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 2010 \text{ s} \approx 33,5 \text{ min.}$



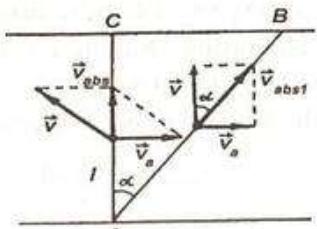
b. Studiem cazul în care vântul suflă pe direcția de zbor a avionului. Presupunem că la dus vântul suflă în sensul înaintării avionului. Cum $\vec{v}_{abs} = \vec{u} + \vec{v}$, din desen $v_{abs} = u + v$, este viteza cu care avionul se deplasează față de sol, astfel că timpul de dus este $t_{dus} = \frac{d}{u+v}$. La întors, vântul suflă în sens contrar sensului de zbor al avionului. În acest caz viteza cu care se deplasează avionul față de sol este $v'_{abs} = u - v$, iar timpul de întoarcere este $t_{intors} = \frac{d}{u-v}$.



$$\text{Obținem: } t_{zbor} = t_{dus} + t_{intors} = \frac{d}{u+v} + \frac{d}{u-v} = \frac{2du}{u^2 - v^2} = 33,67 \text{ min.}$$

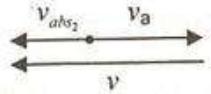
c. Dacă vântul nu suflă viteza cu care se deplasează avionul față de sol este u , atât la dus cât și la întors, astfel că $t_{zbor} = \frac{2d}{u} = 2000 \text{ s} \approx 33,33 \text{ min.}$

13.a. Studiem vâslașul care traversează râul perpendicular pe maluri. Viteza de transport este v_a , iar viteza relativă este v . Viteza absolută cu care se deplasează vâslașul față de mal este $\vec{v}_{abs} = \vec{v} + \vec{v}_a$. Iar scalar din desen: $v_{abs} = \sqrt{v^2 + v_a^2}$. Timpul necesar primului vâslaș să treacă râul este

$$t_1 = \frac{\ell}{\sqrt{v^2 + v_a^2}} \approx 11,56 \text{ s}$$


b. Studiem mișcarea celui de-al doilea vâslaș. Deoarece vâslașul orientează barca perpendicular pe maluri, el se va deplasa pe direcția AB și apoi el trebuie să se întoarcă de la B la C . Astfel timpul total de mișcare

$$\text{este } t_2 = t_{AB} + t_{BC}. \text{ Dar } t_{AB} = \frac{AB}{v_{abs_2}} = \frac{AC}{v} = \frac{\ell}{v} \text{ (din asemănarea triunghiurilor vitezei și cel al distanțelor). La întoarcere}$$

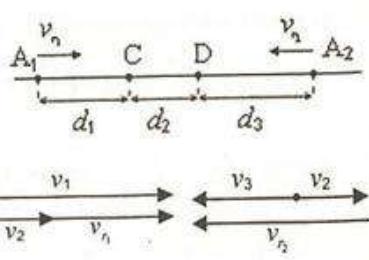


$$v_{abs_2} = v - v_a, \text{ astfel că } t_{BC} = \frac{BC}{v_{abs_2}} = \frac{BC}{v - v_a}. \text{ Cum } \frac{\ell}{v} = \frac{BC}{v_a} \Rightarrow$$

$$BC = \frac{\ell v_a}{v} \Rightarrow t_{BC} = \frac{\ell v_a}{v(v - v_a)}. \text{ Obținem } t_2 = \frac{\ell}{v} + \frac{\ell v_a}{v(v - v_a)} = \frac{\ell}{v - v_a} = 20 \text{ s}$$

c. Intervalul de timp care desparte sosirea vâslașilor în punctul de pe malul opus este $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\ell}{v - v_a} - \frac{\ell}{\sqrt{v^2 + v_a^2}} \approx 8,44 \text{ s}$

14.a. Considerăm că observatorul se află în autocamion. Față de acesta autoturismul și autobuzul se deplasează cu viteze relative. Viteza relativă a autoturismului este $\vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, iar conform figurii alăturate obținem $v_1 = v_1 - v_2$. Viteza relativă a autobuzului este $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_2$ și conform figurii alăturate obținem $v_2 = v_3 + v_2$.



Autoturismul după ce depășește autocamionul trebuie să treacă pe banda lui în momentul în care în acel loc ajunge pe banda opusă autobuzul. Astfel autoturismul parcurge față de autocamion distanța $d_1 + d_2$, astfel că $d_1 + d_2 = v_1 t = (v_1 - v_2)t$, iar autobuzul parcurge față de autocamion distanța $d_3 = d_{\min} - d_1 - d_2 = v_2 t = (v_3 + v_2)t$. Eliminând timpul t din cele două relații obținem: $d_{\min} = \frac{(v_3 + v_2)(d_1 + d_2)}{v_1 - v_2} = 225$ m.

b. Timpul necesar depășirii este $t = \frac{d_1 + d_2}{v_1 - v_2} = 5$ s

c. În timpul manevrei de depășire distanțele parcuse față de sol de fiecare vehicul sunt: $d_1 = v_1 t = 125$ m, $d_2 = v_2 t = 75$ m și $d_3 = v_3 t = 100$ m

15.a. Fie v_a viteza apei și v viteza pescarului față de apă. Pescarul se deplasează din dreptul podului din punctul A până în punctul B când pescarul își dă seama că a scăpat colacul. Deoarece pescarul se deplasează în sens contrar sensului de curgere al râului viteza acestuia față de sol este $\vec{v}_{abs} = \vec{v} + \vec{v}_a$, iar scalar $v_{abs} = v - v_a$, astfel că $AB = (v - v_a) \cdot \Delta t$ (1). La întoarcere pescarul se deplasează în sensul de curgere al râului cu viteza $v'_{abs} = v + v_a$. Distanța parcursă de pescar la întoarcere este $d + AB = (v + v_a) \cdot t$ (2), unde t reprezintă timpul cât se întoarce pescarul după ce realizează că a pierdut colacul și până când îl recuperează. Deoarece colacul se deplasează cu viteza apei un timp $t_c = \Delta t + t$, obținem $d = v_a t_c = v_a (\Delta t + t)$ (3). Din (3) obținem $t = \frac{d}{v_a} - \Delta t$.

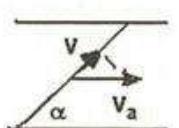
Introducând relația (1) și t în relația (2) obținem:

$$d + (v - v_a) \Delta t = (v + v_a) \left(\frac{d}{v_a} - \Delta t \right) \Rightarrow v \Delta t = \frac{vd}{v_a} - v \Delta t \Rightarrow d = 2v_a \Delta t \Rightarrow \frac{d}{v_a} = 2 \Delta t.$$

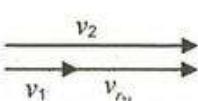
Timpul după care pescarul recuperează colacul din momentul pierderii acestuia este $t_c = \Delta t + t = 3 \Delta t = 1,5$ h

b. Astfel din $d = 2v_a \Delta t$ obținem viteza apei $v_a = d / (2 \Delta t) = 5$ km/h

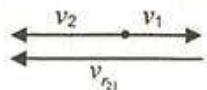
c. Deoarece colacul este barat de un cablu rigid AB legat între cele două maluri și care formează cu un mal un unghi α ca în figură, colacul se va mișca de-a lungul cablului cu viteza $v = v_a \cos \alpha = 2,5$ km



16.a. Considerăm că observatorul se află în trenul 1. Un observator din trenul 2 va înregistra o viteză relativă a trenului 2 față de trenul 1 $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Deoarece trenurile se deplasează în același sens, $v_{21} = v_2 - v_1$. Pentru ca trenurile să se depășească, distanța parcursă de trenul 2 este $d = \ell_1 + \ell_2$ și deci timpul de depășire este $t = \frac{\ell_1 + \ell_2}{v_2 - v_1} = 15$ s.



b. Dacă trenurile se deplasează în sens contrar, observatorul din trenul 2 va înregistra viteza relativă $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Conform figurii obținem $v_{21} = v_1 + v_2$ și timpul de depășire este



$$t = \frac{\ell_1 + \ell_2}{v_1 + v_2} = 3,75 \text{ s.}$$

c. Observatorul din primul tren vede trecând prin față lui trenul 2 cu viteza relativă $v_{r_1} = v_2 - v_1$ care are lungimea ℓ_2 . Timpul cât vede trecând observatorul trenul 2 este $t = \frac{\ell_2}{v_2 - v_1} = 9 \text{ s}$. Deoarece $v_2 > v_1$, omul din primul vede întâi locomotiva și apoi ultimul vagon al trenului 2.

17.a. Picăturile de ploaie cad față de tren cu viteza relativă $\vec{v}_r = \vec{v}_p - \vec{v}_1$.

Din figura alăturată obținem: $\tan \alpha = \frac{v_1}{v_p}$, astfel că viteza picăturilor de



ploaie este $v_p = v_1 / \tan \alpha \approx 86,5 \text{ km/h}$

b. Deoarece trenurile se deplasează în același sens, viteza relativă a trenului 2 față de trenul 1 este $\vec{v}_{r_1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, iar scalar $v_{r_1} = |v_2 - v_1|$. Timpul în care călătorul din primul tren vede trecând trenul al doilea cu lungimea ℓ este $t = \frac{\ell}{|v_2 - v_1|}$. Astfel viteza celui de-al doilea tren este $v_2 = v_1 \pm \frac{\ell}{t}$. Soluțiile sunt

$v_2 = 86 \text{ km/h}$ când trenul al doilea prinde din urmă primul tren și îl depășește și respectiv $v_2 = 14 \text{ km/h}$ când trenul al doilea este prins din urmă de primul tren și depășit de acesta.

c. Timpul cât un om aflat în al doilea tren vede trecând prin față lui trenul 1 cu lungimea ℓ_1 și cu viteza relativă $v_{r_2} = v_2 + v_1$ este $t = \frac{\ell_1}{v_2 + v_1} = 90 \text{ s}$

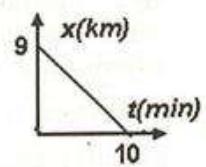
18.a. Viteza v_1 cu care scade distanța dintre M și N este viteza relativă a automobilului M față de automobilul N , astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}_M - \vec{v}_N$, iar scalar $v_1 = v_M - v_N = 2v_M / 3 = 72 \text{ km/h}$

b. Deoarece $d/2 = v_1 t$, automobilul M va ajunge din urmă automobilul N după timpul $t = d/(2v_1) = 225 \text{ s} = 3\text{min}45\text{s}$. Astfel ora la care se întâlnesc automobilele este 12:02:40

c. Fiecare automobil parcurge în timpul t distanțele: $d_M = v_M t = 6750 \text{ m}$, $d_N = v_N t = 2250 \text{ m}$ și $d_P = v_P t = 3375 \text{ m}$

d. Cum $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_p - x_a}{t}$ atunci coordonata punctului P este

$x_p = x_0 + v_p t = 9 - 54t$, unde timpul este exprimat în ore și coordonata în km. Automobilul P ajunge în originea O atunci când $x_p = 0$, astfel că $t = 1/6 \text{ h} = 10 \text{ min}$. Reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei automobilului P este redată în figura alăturată.



19.a. Înotătorii se întâlnesc prima oară când cel mai rapid întoarce iar cel lent încă nu a ajuns. Astfel primul sportiv a parcurs $AB+BC$, astfel că $AB+BC = v_1 \cdot t$ (C este punctul în care se întâlnesc sportivii). Al doilea sportiv parcurge doar AC , astfel că $AC = v_2 \cdot t$. În final obținem:

$$AB+BC+AC=(v_1+v_2)t \Rightarrow 2\ell=(v_1+v_2)t \Rightarrow t=\frac{2\ell}{v_1+v_2}=15,625 \text{ s.}$$

b. Distanța unde se vor întâlni prima dată față de punctul de plecare este $AC = v_2 \frac{2l}{v_1 + v_2} = 43,75$ m.

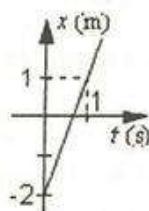
c. Primul sportiv parcurge de o distanță cu ℓ mai mare decât al doilea sportiv, astfel că $\ell = v_1 t - v_2 t$. Timpul după care primul înotător va parcurge mai mult decât al doilea o lungime de bazin este $t = \frac{\ell}{v_1 - v_2} = 62,5$ s.

20.a. Pentru a reprezenta grafic legea de mișcare trebuie să considerăm două valori pentru timpul t .

Pentru $t_1=0 \Rightarrow x_1=-2$ m, și pentru $t_2=1$ s $\Rightarrow x_2=1$ m.

b. Punctul de intersecție cu axa coordonatelor Ox , reprezintă coordonata inițială a mobilului $x_0=-2$ m. Punctul de intersecție cu axa timpului reprezintă momentul de timp când mobilul trece prin originea axei de coordonate, astfel că pentru $x=0$ obținem $t=0,666$ s

c. Viteza medie a mobilului coincide cu viteza instantaneă în cazul mișcării rectilinii și uniforme, astfel că $v=v_m=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=3$ m/s.



21.a. Cum $v=v_m=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t-t_0} \Rightarrow x=x_0+v(t-t_0)$. Alegem originea de timp $t_0=0$

s. Din datele problemei $x_0=4$ m și $v=-2$ m/s obținem ecuația coordonatei a mobilului $x=-2t+4$.

b. Momentul când trece prin originea axei de coordinate Ox se obține din condiția $x=0$. Obținem $t=2$ s.

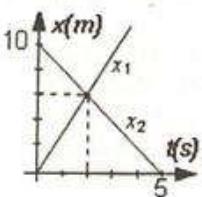
c. Distanța parcursă în primele 10 s se află cu $d=|x_f - x_0|$, unde $x_0=4$ m reprezintă coordonata inițială iar $x_f=-16$ m este coordonata la momentul $t=10$ s. Obținem $d=20$ m.

22.a. Pentru a reprezenta grafic legile de mișcare trebuie să alegem căte două valori distincte pentru timpul t pentru fiecare mobil și apoi trasăm dreptele. Astfel pentru primul mobil când $t_0=0 \Rightarrow x_{01}=0$ și când $t_1=1$ s $\Rightarrow x_1=3$ m, iar pentru al doilea mobil când $t_0=0 \Rightarrow x_{02}=10$ m și când $t_2=5$ s $\Rightarrow x_2=0$.

b. Pentru ca mobilele să se întâlnească trebuie ca cele două coordonate să fie egale, astfel că $x_1=x_2 \Rightarrow 3 \cdot t = 10 - 2 \cdot t \Rightarrow t = 2$ s. Mobilele se întâlnesc după 2 s, când coordonata este $x_1=6$ m.

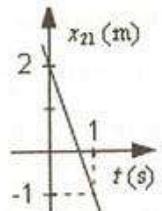
c. Cum legea de mișcare în mișcarea rectilinie uniformă este $x=x_0+v \cdot t$ prin identificarea coeficienților în cele două ecuații obținem: $v_1=3$ m/s; $v_2=-2$ m/s și $x_{02}=10$ m. Deoarece v_1 și v_2 au semne contrare, cele două mobile se deplasează unul spre celălalt, astfel că viteza relativă a primului mobil față de cel de-al doilea este: $v_{r21}=v_2-v_1=5$ m/s. Viteza relativă a mobilului 2 față de primul este $v_{r21}=v_2-v_1=-5$ m/s. Observăm că în modul vitezele relative sunt egale, dar au sensuri contrare.

d. Calculăm coordonatele la momentul $t=6$ s. Obținem $x_1=18$ m și $x_2=-2$ m; distanța dintre mobile este: $d=|x_1 - x_2|=20$ m.



23.a. Alegând sistemul de referință legat de mobilul 1, ecuația de mișcare a mobilului 2 față de acesta este: $x_{21} = x_2 - x_1 = -3 \cdot t + 2$.

Pentru $t_1=0$ s $\Rightarrow x_{21}=2$ m și pentru $t_2=1$ s $\Rightarrow x_{21}=-1$ m. Reprezentarea grafică a legii de mișcare a mobilului (2) în raport cu un sistem de referință legat de mobilul (1) este redată în figura alăturată.



b. Pentru a determina momentul întâlnirii mobilelor impunem condiția ca $x_{21}=0$. Obținem momentul întâlnirii celor două mobile $t \approx 0,666$ s

c. Coeficientul din fața timpului t în ecuația coordonatei reprezintă viteza mobilului. Astfel $v_1=2$ m/s și $v_2=-1$ m/s, viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 este $v_{r2} = v_1 - v_2 = 3$ m/s. Această viteza relativă are întotdeauna aceeași valoare, iar $v_{r1} = -3$ m/s

24.a. Din reprezentarea grafică a legii coordonatei în funcție de timp, putem calcula viteza mobilului: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan \alpha = -2$ m/s, unde $\tan \alpha$ se numește panta dreptei (α este unghiul făcut de dreapta cu axa timpului și $\alpha > 90^\circ$).

b. Cum din grafic la $t=0 \Rightarrow x_0=10$ m, iar ecuația coordonatei $x = x_0 + v \cdot t$ devine $x = 10 - 2t$ deoarece am considerat momentul inițial de timp momentul pornirii mobilului.

c. La momentul $t=3$ s coordonata mobilului este $x=4$ m.

25.a. Pe baza reprezentării grafice a legii coordonatei în funcție de timp, viteza mobilului în intervalul de timp $(0,7)$ s este: $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} = \frac{-4 - 10}{7} = -2$ m/s. Prin urmare mobilul se mișcă rectiliniu și uniform în sens contrar axei Ox .

b. În intervalul de timp de la 7 s la 10 s, deoarece $x=-4$ m, mobilul se află în repaus.

c. Viteza medie a mobilului pe parcursul întregii mișcări este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -1$ m/s deoarece la $t_0=0$, $x_0=10$ m, iar la $t_f=12$ s, $x_f=-2$ m.

d. Mobilul trece prin originea axei de coordonate când $x=0$. Cum în intervalul $t \in (0,7)$ s legea de mișcare este $x = 10 - 2t$, atunci după $t_1=5$ s mobilul trece prin originea axei Ox .

e. Pentru $t \in (0,7)$ s mobilul are o mișcare rectilinie uniformă în sens contrar axei Ox și la $t=5$ s trece prin originea axei. Pentru $t \in (7,10)$ s mobilul se află în repaus. Pentru $t \in (10,12)$ s mobilul are o mișcare uniformă în sensul axei de coordonate Ox .

26.a. Mobilul are pe prima porțiune de mișcare când $t \in (0,4)$ s viteza $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = 0,5$

m/s, pe a doua porțiune când $t \in (4,5)$ s viteza $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = -4$ m/s, pe a treia

porțiune când $t \in (5,6)$ s mobilul se află în repaus, deoarece $x=-2$ m și pe ultima porțiune când $t \in (6,8)$ s mobilul are viteza $v_4 = \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4} = 2$ m/s

b. Distanța totală parcursă este $d=d_1+d_2+d_3+d_4=10$ m, deoarece pe prima porțiune $d_1=2$ m, pe a doua porțiune $d_2=4$ m, pe a treia $d_3=0$ și pe a patra $d_4=4$ m

c. Viteza medie pe întregul interval de timp este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0,25$ m/s, deoarece $\Delta x=x_f-x_0=2$ m și $\Delta t=8$ s.

2.1.2. Mișcare rectilinie uniform variată a punctului material

1.a. Cum legea de mișcare a unui mobil care efectuează o mișcare rectilinie uniform variată este: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin identificarea coeficienților obținem $x_0 = 4$ m, $v_0 = 3$ m/s și $a = -2$ m/s².

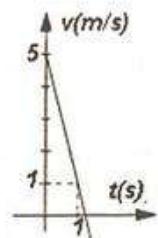
b. Când $t = 1$ s coordonata mobilului este $x = 6$ m.

c. Când mobilul trece prin originea axelor de coordonate $x = 0 \Rightarrow 0 = -t^2 + 3t + 4$, iar soluțiile ecuației sunt: $t_1 = -1$ s și $t_2 = 4$ s. Cum valoarea $t_1 = -1$ s înseamnă în trecut, soluția acceptabilă din punct de vedere fizic este $t_2 = 4$ s, ceea ce înseamnă că mobilul trece prin originea axei Ox după 4 secunde de la începerea mișcării.

2.a. Din legea de mișcare prin identificarea coeficienților obținem $x_0 = 3$ m, $v_0 = 5$ m/s, $a = -4$ m/s². Ecuația vitezei este $v = v_0 + at = 5 - 4t$. Pentru a reprezenta grafic ecuația vitezei vom atribui două valori timpului t .

Astfel pentru $t_0 = 0 \Rightarrow v_0 = 5$ m/s și pentru $t_1 = 1$ s $\Rightarrow v_1 = 1$ m/s

b. Intersecția graficului vitezei cu axa vitezei reprezintă fizic valoarea vitezei inițiale $v_0 = 5$ m/s, iar intersecția graficului vitezei cu axa timpului reprezintă fizic momentul de timp în care viteza



mobilului se anulează și acesta se oprește, astfel că: $v = 0 \Rightarrow t_{op} = -\frac{v_0}{a} = -\frac{5}{-4} = 1.25$ s

c. Aria cuprinsă între curba vitezei, axa vitezei și axa timpului este aria triunghiului $A = \frac{v_0 \cdot t_{op}}{2} = \frac{5 \cdot 1.25}{2} = 3.125$ m și reprezintă fizic spațiul parcurs de mobil până la oprire.

3.a. Din legea coordonatei prin identificarea coeficienților obținem $x_0 = 0$ m, $v_0 = 3$ m/s și $a = 2$ m/s², astfel că legea vitezei este: $v = v_0 + at = 3 + 2t$. Când $t_1 = 3$ s obținem $v_1 = 9$ m/s.

b. A cincea secundă de la lansare este cuprinsă între $t_2 = 4$ s și $t_3 = 5$ s. Calculăm coordonatele corespunzătoare celor două momente de timp și obținem: $x_2 = 28$ m și $x_3 = 40$ m. Distanța parcursă în a cincea secundă de la lansare este: $d = x_3 - x_2 = 12$ m.

c. Conform principiului al doilea al dinamicii $F = ma = 0,4$ N

4.a. Utilizăm ecuația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = -1$ m/s².

b. Calculăm momentul de timp la care mobilul trece prin punctul de coordonată x din legea vitezei $v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2x}{v + v_0} = 30$ s.

c. Viteza medie în acest timp interval de timp este $v_m = \frac{v + v_0}{2} = 5$ m/s.

d. Deoarece $v < 0$ și $v_0 > 0$ înseamnă că în acest interval de timp mobilul s-a oprit și apoi s-a întors, astfel că distanța parcursă este: $d = x_{op} + (x_{op} - x) = 2x_{op} - x$. Din ecuația lui Galilei aflăm coordonata în momentul opririi x_{op} : $0 = v_0^2 + 2ax_{op} \Rightarrow x_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 x}{v_0^2 - v^2} = x \frac{v_0^2 + v^2}{v_0^2 - v^2} = 250$ m.

e. Viteza în modul medie este: $|v_m| = \frac{d}{t} = \frac{v_0^2 + v^2}{2(v_0 - v)} = 8,33$ m/s.

5.a. Pe baza legii lui Galilei $v_1^2 = 2ad_1 \Rightarrow a = \frac{v_1^2}{2d_1} = 1,25$ m/s², iar din legea vitezei

$$v_1 = at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{2d_1}{v_1} = 4$$
 s.

b. $v_2^2 = 2ad_2 \Rightarrow d_2 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{v_2^2}{v_1^2} d_1 = 160$ m.

c. Din legea coordonatei: $d_3 = \frac{at_3^2}{2} \Rightarrow t_3 = \sqrt{\frac{2d_3}{a}} = \frac{2\sqrt{d_1 d_3}}{v_1}$ viteza medie este: $v_m = \frac{d_3}{t_3} = \frac{v_1}{2} \sqrt{\frac{d_3}{d_1}} = 5$ m/s.

6.a. Din legea vitezei $v = v_0 + a\Delta t$, când $v = 0 \Rightarrow a = -\frac{v_0}{\Delta t} = -1$ m/s².

b. Din ecuația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2as$, când $v = 0$, obținem spațiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0 \Delta t}{2} = 450$ m.

c. Viteza medie este: $v_m = \frac{v_0 + 0}{2} = 15$ m/s.

7.a. Din legea coordonatei: $\ell = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2\ell}{t^2} = 1,2$ m/s².

b. Din legea vitezelor: $v = at = \frac{2\ell}{t} = 12$ m/s.

c. Pe planul orizontal sania are o mișcare uniform încetinată cu accelerarea a_1 și cu viteza inițială v cea de la baza dealului. Pe baza relației lui Galilei și din condiția de oprire $v_f=0 \Rightarrow 0 = v^2 + 2a_1 d \Rightarrow d = \frac{v^2}{2a_1} = 8$ m.

8.a. Utilizăm ecuația coordonatei: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ cu $x_0 = 0$, astfel obținem:

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2(x - v_0 t)}{t^2} = 0,3$$
 m/s².

b. Din legea vitezei: $v = v_0 + at$ obținem viteza mobilului la momentul de timp t , $v = 16$ m/s.

c. Aflăm pe baza ecuației coordonatei la ce moment de timp se află mobilul în punctul de coordonată x_1 , astfel că $x_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow \frac{at_1^2}{2} + v_0 t_1 - x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ax_1}}{a} = 15$ s, iar în acest moment viteza mobilului este:

$$v_1 = v_0 + at_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ax_1} = 8,5 \text{ m/s. Viteza medie este: } v_m = \frac{v_0 + v_1}{2} = 6,25 \text{ m/s}$$

9.a. Aplicăm legea lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d} = -4 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2$.

b. Din legea vitezelor: $v = v_0 + at \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2d}{v + v_0} = 0,5 \text{ ms.}$

c. Pentru a afla grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul împunând condiția de oprire a proiectilului, $v=0$, astfel că:

$$0 = v_0^2 + 2ad_{\max} \Rightarrow d_{\max} = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 d}{v_0^2 - v^2} = 31,25 \text{ cm.}$$

10.a. Aplicăm legea lui Galilei și punând condiția ca $v=0$ obținem spațiul până la oprire $0 = v_0^2 - 2as_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2a} = 100$ m și din legea vitezelor cu $v=0$ obținem

timpul până la oprire $0 = v_0 - at_{op} \Rightarrow t_{op} = \frac{v_0}{a} = 20$ s.

b. Pe baza legii coordonatei: $x = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ când $t = 5$ s obținem $x = 43,75$ m.

c. A patra secundă de la începerea mișcării este cuprinsă între secundele $t_3 = 3$ s și $t_4 = 4$ s, astfel coordonatele mobilului sunt: $x_3 = 27,75$ m și $x_4 = 36$ m. Distanța parcursă în a patra secundă de la începerea mișcării este: $d_{3-4} = x_4 - x_3 = 8,25$ m.

11.a. Notăm cu v_0 valoarea inițială a mașinii și cu a , accelerația acesteia. Aplicăm ecuația lui Galilei: $v_1^2 = v_0^2 + 2ad_1$ și $v_2^2 = v_0^2 + 2ad_2$. Scădem cele 2 relații și obținem $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(d_2 - d_1)} = -8 \text{ m/s}^2$, iar $v_0 = \sqrt{\frac{v_2^2 d_1 - v_1^2 d_2}{d_1 - d_2}} = 17,43 \text{ m/s.}$

b. Timpul necesar mașinii să parcurgă distanța dintre cele două puncte este $\Delta t = t_2 - t_1$, unde t_2 și t_1 reprezintă momentele de timp la care vitezele mobilului au valorile v_2 și v_1 . Din legea vitezelor: $v_2 = v_0 + at_2$ și $v_1 = v_0 + at_1$ obținem $v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{2(d_2 - d_1)}{v_1 + v_2} = 0,5$ s.

c. La oprire $v = 0$ și din ecuația lui Galilei: $0 = v_0^2 + 2as_{op}$ obținem spațiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2 d_2 - v_2^2 d_1}{v_1^2 - v_2^2} = 19$ m, iar din

legea vitezelor $0 = v_0 + at_{op}$ obținem valoarea timpului de oprire: $t_{op} = -\frac{v_0}{a} \approx 2,18$ s

12.a. Notăm cu v_0 viteza inițială a mobilului și cu a , accelerarea acestuia. Aplicăm ecuația coordonatei pentru fiecare jumătate de drum. Astfel: $AC = \frac{d}{2} = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$ (1)



și $CB = \frac{d}{2} = v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$, unde $v_1 = v_0 + at_1$. Obținem: $\frac{d}{2} = (v_0 + at_1)t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$ (2).

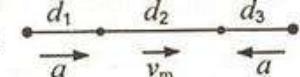
Eliminând v_0 din ecuațiile (1) și (2) obținem: $a = \frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 0,1 \text{ m/s}^2$.

b. Viteza inițială a mobilului este $v_0 = \frac{d - at_1^2}{2t_1} = 7,75 \text{ m/s}$.

c. Viteza medie a mobilului este $v_m = \frac{d}{t_m} = \frac{d}{t_1 + t_2} = 10 \text{ m/s}$.

13.a. Notăm cu d distanța dintre cele două stații. Din

$v_m = at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_m}{a} = 30 \text{ s}$, iar distanța parcursă la



accelerare este $d_1 = \frac{at_1^2}{2} = 450 \text{ m}$.

b. Deoarece accelerarea la accelerare este egală în modul cu accelerarea la frânare mișcarea este simetrică, astfel că distanța d_1 pe care accelerează metroul este egală cu distanța d_3 pe care frânează metroul, astfel că timpul de accelerare t_1 este egal cu cel de frânare t_3 : $t_1 = t_3$. La frânare metroul parurge aceeași distanță, astfel că $d_3 = d_1$. Cum metroul accelerează și frânează într-un timp $t = t_1 + t_3 = 1 \text{ min}$, înseamnă că restul de timp t de un minut metroul se mișcă uniform cu viteza v_m , astfel că $d_2 = v_m \cdot t' = 1800 \text{ m}$.

c. Distanța dintre stații este: $d = d_1 + d_2 + d_3 = 2700 \text{ m}$.

14.a. Studiem mișcarea mobilului pe fiecare porțiune. În intervalul de timp $t \in (0,2)\text{s}$, $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$, $x_{01} = 0 \text{ m}$ și $v_0 = 0 \text{ m/s}$ astfel că legea vitezei este:

$v = a_1 t = t$, iar legea coordonatei este: $x = \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$. Aflăm la finalul primei

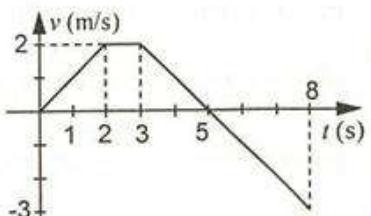
porțiuni de mișcare, când $t_1 = 2 \text{ s}$, viteza mobilului este $v_1 = 2 \text{ m/s}$ și coordonata este $x_1 = 2 \text{ m}$. Când $t \in (2,3)\text{s}$, $a_2 = 0$ și prin urmare pe a doua porțiune de mișcare mobilul are o mișcare rectilinie și uniformă iar viteza rămâne constantă la valoarea $v_1 = 2 \text{ m/s}$, iar legea coordonatei este: $x_2 = x_1 + v_1(t - t_1) = 2t - 2$, iar după $t_2 = 3 \text{ s}$ coordonata este $x_{2f} = 4 \text{ m}$

Studiem mișcarea mobilului pe porțiunea a treia, în care $a_3 = -1 \text{ m/s}^2$.

Mobilul are o mișcare uniform incetinită cu viteza inițială $v_1 = 2 \text{ m/s}$, $x_{03} = x_{2f} = 4 \text{ m}$, $a_3 = -1 \text{ m/s}^2$

când $t \in (3,8)\text{s}$. Legea vitezei este: $v_3 = v_1 + a_3(t - t_2) = 2 - (t - 3) = 5 - t$, iar cea a

coordonatei este: $x_3 = x_{03} + v_1(t - t_2) + \frac{a_3}{2}(t - t_2)^2$



$$\Rightarrow x_3 = 4 + 2(t-3) - \frac{(t-3)^2}{2}, \text{ deoarece } t_2=3 \text{ s.}$$

Aflăm la ce moment de timp de la începerea mișcării mobilul se oprește. Din $v = 0 \Rightarrow t_{op} = 5 \text{ s. În final când } t_f = 8 \text{ s} \Rightarrow v_f = -3 \text{ m/s.}$

b. Pentru $t_f = 8 \text{ s}$, aflăm din x_3 , coordonata finală $x_{3f} = 1,5 \text{ m.}$

c. Deoarece mobilul se oprește și apoi se întoarce, distanța parcursă de mobil nu coincide cu valoarea coordonatei finale. Aflăm la ce distanță de punctul de plecare se oprește mobilul. Pentru $t_{op} = 5 \text{ s}$ se obține $x_{3op} = 6 \text{ m. Distanța parcursă de mobil până la oprire este } d = x_{3op} + (x_{3op} - x_{3f}) = 10,5 \text{ m}$

15.a. Pentru ca două mobile care se deplasează pe aceeași axă de coordonate, să se întâlnească, ele trebuie să se afle în același punct. Condiția de întâlnire este: $x_1 = x_2$. Cum $x_1 = t^2 - 10t + 8$ și $x_2 = -3t^2 + 4t + 2$ obținem $t^2 - 10t + 8 = 2 + 4t - 3t^2 \Rightarrow 4t^2 - 14t + 6 = 0$. Soluțiile sunt $t_1 = 0,5 \text{ s}$ și $t_2 = 3 \text{ s}$, adică mobilele se întâlnesc de două ori, deoarece mobilul al doilea se oprește. Din legea vitezelui mobilului 2, $v_2 = 6 - 4t \Rightarrow t_{op2} = 0,66 \text{ s}$, iar apoi mobilul 2 se întoarce și îl întâlnește din nou pe primul mobil.

b. Cordonatele la care se întâlnesc mobilele sunt: $x = 3,25 \text{ m}$, când primul mobil se deplasează în sens contrar axei Ox iar al doilea în același sens, respectiv $x' = -13 \text{ m}$, când ambele mobile se deplasează în sens contrar axei Ox (după ce mobilul 2 s-a oprit și s-a întors, dar înainte ca primul mobil să se opreasă $t_{op1} = 5 \text{ s}$).

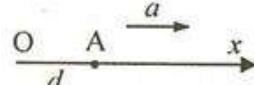
c. Legile vitezelor celor două mobile sunt:

$$v_1 = v_{01} + a_1 t = -10 + 2t, \text{ deoarece } v_{01} = 10 \text{ m/s și } a_1 = 2 \text{ m/s}^2.$$

$$v_2 = v_{02} + a_2 t = 4 - 6t, \text{ deoarece } v_{02} = 4 \text{ m/s și } a_2 = -6 \text{ m/s}^2.$$

Cum $v_1 = v_2 \Rightarrow t = 1,75 \text{ s} \Rightarrow$ mobilele au viteze egale după ce mobilul 2 s-a oprit. Valoarea vitezelui $v = v_1 = v_2 = -6,5 \text{ m/s}$ arată că ambele mobile se deplasează în sens contrar axei Ox .

16.a. Alegem origine a axei de coordonate Ox , punctul unde se află mașina care are o mișcare rectilinie și uniformă. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile: $x_1 = d + \frac{at^2}{2} = 8 + \frac{t^2}{2}$, iar $x_2 = 5t$. Impunem condiția de întâlnire a mobilelor: $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 5t + 8 = 0$, iar soluțiile ecuației sunt $t_1 = 2 \text{ s}$ și $t_2 = 8 \text{ s}$, adică mașina ce are o mișcare uniformă o prinde din urmă pe cea care pleacă de la stop accelerat după $t_1 = 2 \text{ s}$, pentru că la $t_2 = 8 \text{ s}$, mașina care se mișcă accelerat o prinde din urmă pe cea care se mișcă uniform și o depășește.



condiția de întâlnire a mobilelor: $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 5t + 8 = 0$, iar soluțiile ecuației sunt $t_1 = 2 \text{ s}$ și $t_2 = 8 \text{ s}$, adică mașina ce are o mișcare uniformă o prinde din urmă pe cea care pleacă de la stop accelerat după $t_1 = 2 \text{ s}$, pentru că la $t_2 = 8 \text{ s}$, mașina care se mișcă accelerat o prinde din urmă pe cea care se mișcă uniform și o depășește.

b. Calculăm distanțele la care se întâlnesc mașinile, atribuind pe rând valorile t_1 și t_2 în ecuația coordonatei. Obținem: $x = 10 \text{ m}$ și $x' = 40 \text{ m}$.

c.. Aflăm vitezele mașinii care se mișcă accelerat la cele două momente de timp t_1 și t_2 . Obținem: $v_1 = at_1 = 2 \text{ m/s}$ și $v_2 = at_2 = 8 \text{ m/s}$. Cum viteza relativă este $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, în primul moment t_1 , $v_r = v_1 - v = -3 \text{ m/s}$, deoarece mașina care

se mișcă accelerat este depășită de mașina care se mișcă uniform, iar în momentul t_2 , $v_{r_2} = v_2 - v = 3$ m/s, deoarece mașina care se mișcă accelerat depășește mașina care se mișcă uniform.

17.a. Alegem origine a axei de coordonate stopul și origine a timpului, momentul când prima mașină trece prin dreptul stopului. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mașini: $x_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 5t + t^2$, iar $x_2 = v(t - \Delta t) = 15(t - 1)$,

deoarece mașina a doua merge un timp mai mic cu Δt decât prima mașină intrucât pornește mai târziu. Impunem condiția de întâlnire: $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15t - 15 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0$, iar soluțiile sunt $t_1 = 1,838$ s și $t_2 = 8,162$ s. Mașinile se întâlnesc de două ori, prima dată când mașina care se mișcă uniform o prinde din urmă pe cea care se mișcă accelerat și a doua oară când mașina care se mișcă uniform este prinsă din urmă de mașina care se mișcă accelerat.

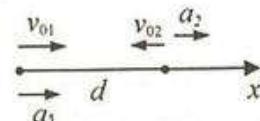
b. Distanțele măsurate de la stop la care se întâlnesc mașinile se află din ecuația coordonatelor în care introducem pe rând cele două valori ale timpului aflate t_1 și t_2 și obținem: $x \approx 12,57$ m și $x' \approx 107,43$ m.

c. Pentru a se întâlni o singură dată, ecuația de gradul doi trebuie să aibă o singură soluție $\Delta = 0$, astfel că din $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15(t - \Delta t) \Rightarrow t^2 - 10t + 15\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 60\Delta t$. Se obține $\Delta t \approx 1,666$ s.

Dacă $\Delta t < 5/3$ s, mașinile se întâlnesc de 2 ori, dacă $\Delta t = 5/3$ s, mașinile se întâlnesc o singură dată, iar dacă $\Delta t > 5/3$ s, mașinile nu se mai întâlnesc.

18.a. Alegem origine a axei de coordonate punctul de unde pornește primul mobil într-o mișcare accelerată. Considerăm origine de timp, momentul în care pornește primul mobil. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile. Pentru primul mobil

ecuația coordonatei este: $x_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} = 40t + t^2$.



Pentru mobilul al doilea ecuația coordonatei este: $x_2 = d - v_{02}(t - \Delta t) + \frac{a_2(t - \Delta t)^2}{2}$,

deoarece acesta pornește cu întârziere Δt față de primul mobil, din alt punct și deci are coordonata inițială $x_{02} = d$, se mișcă în sens contrar axei și incetină ceea ce înseamnă că viteza lui este negativă, iar accelerarea este pozitivă (a_2 are sensul axei). Astfel $x_2 = 426 - 10(t - 2) + \frac{1}{2}(t - 2)^2 = 448 - 10t + \frac{t^2}{2}$.

Impunem condiția de întâlnire a mobilelor $x_1 = x_2$:

Obținem: $40t + t^2 = 448 - 12t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} + 52t - 448 = 0$, iar soluția acceptabilă din

punct de vedere fizic este pozitivă și este $t_1 = 8$ s. Valoarea t_1 reprezintă momentul de timp la care se întâlnesc mobilele.

b. Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii acestora utilizând ecuațiile vitezelor: $v_1 = v_{01} + a_1 t_1 = 56$ m/s și $v_2 = -v_{02} + a_2(t_1 - \Delta t) = -4$ m/s deoarece al doilea mobil se deplasează în sens contrar axei de coordonate.

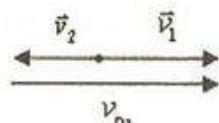
c. Calculăm vitezele medii ale mobilelor utilizând definiția vitezei medii:

$$v_{m_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_1}{t_1}, \text{ unde } x_1 \text{ reprezintă coordonata la care se întâlnesc mobilele.}$$

Coordonata la care se întâlnesc mobilele se obține introducând timpul de întâlnire în oricare din ecuațiile de coordonate. Prin urmare: $x_1 = 384 \text{ m}$. Obținem vitezele medii ale celor două mobile, astfel:

$$v_{m_1} = 48 \text{ m/s, iar } v_{m_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x_1 - d}{t_1 - \Delta t} = -7 \text{ m/s.}$$

Calculăm viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 în momentul întâlnirii. Cum $\vec{v}_{r12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, scalar



$$v_{r12} = v_1 + |v_2| = 60 \text{ m/s.}$$

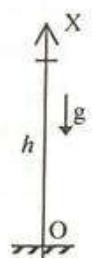
d. Calculăm după cât timp se oprește mobilul 2, din ecuația vitezei punând condiția ca $v_2 = 0$. Din $v_2 = -v_{02} + a_2(t - \Delta t) = -12 + t$ obținem: $t_{op} = 12 \text{ s}$. Calculăm la acest moment de timp valorile coordonatelor celor două mobile: $x_1 = 624 \text{ m}$ și $x_2 = 376 \text{ m}$. Astfel distanța dintre cele două mobile la acel moment de timp este: $d = x_1 - x_2 = 248 \text{ m}$.

2.1.3. Mișcarea punctului material sub acțiunea greutății

1.a. Studiem căderea liberă a pietrei. Alegem originea axei Ox pe sol.

Legea de mișcare a pietrei este: $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Când piatra ajunge la sol

$$x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4 \text{ s.}$$



b. Utilizăm ecuația lui Galilei pentru a afla viteza cu care piatra lovește solul. Din $v^2 = v_0^2 + 2gh$ cu $v_0 = 0$ obținem $v = \sqrt{2gh} = 40 \text{ m/s}$

c. Calculăm valoarea coordonatei când $t_1 = t_c - 1 = 3 \text{ s} \Rightarrow x = 35 \text{ m} \Rightarrow$ în ultima secundă piatra a coborât pe distanță de 35 m.

2.a. Deoarece originea axei de coordonate este pe sol, legea de mișcare a corpului este $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm timpul de cădere punând condiția ca $x = 0$:

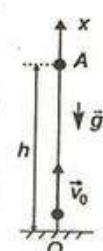
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20 \text{ s. Aflăm după cât timp corpul ajunge în punctul în care}$$

$$x = h_1 \Rightarrow h_1 = h - \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} = 16 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = t_c - t_1 = 4 \text{ s.}$$

b. Calculăm coordonatele la momentele de timp $t_2 = 1 \text{ s}$ și $t_3 = 2 \text{ s}$, deoarece a doua secundă de mișcare este cuprinsă între t_2 și t_3 .

Cum $x_2 = 1995 \text{ m}$ și $x_3 = 1980 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_3 = 15 \text{ m}$ reprezintă distanța parcursă de mobil în a doua secundă de la lansare.

3.a. Utilizăm ecuația lui Galilei, ținând cont că mobilul are o mișcare uniform incetinită cu accelerația $a = g$. În momentul atingerii înălțimii maxime, corpul se oprește, astfel că din $v = 0$



$$\Rightarrow 0 = v_0^2 - 2gh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 61,25 \text{ m.}$$

b. Din legea coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, considerând originea axei pe sol, punând condiția ca mobilul să reajungă pe sol, $x=0$, determinăm timpul de mișcare al mobilului, astfel că $0 = v_0 t_m - \frac{gt_m^2}{2} \Rightarrow t_m = \frac{2v_0}{g} = 7 \text{ s.}$

c. Calculăm timpul de urcare al mobilului până la înălțimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ punând condiția ca $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 3,5 \text{ s.}$

Observăm că $t_c = t_m - t_u = \frac{v_0}{g} = t_u \Rightarrow$ timpul de urcare este egal cu timpul de coborâre. A patra secundă de mișcare este cuprinsă între secundele 3 și 4.

Deoarece $t_u \in (3,4) \text{ s}$ înseamnă că în secunda a patra mobilul urcă, se oprește și apoi coboară. Aflăm valoarea coordonatelor la momentele $t_3 = 3 \text{ s}$ și $t_4 = 4 \text{ s}$ și observăm că $x_3 = x_4 = 60 \text{ m}$. Astfel mobilul urcă pe distanța $h_{\max} - x_3 = 1,25 \text{ m}$ și coboară pe distanța $h_{\max} - x_4 = 1,25 \text{ m}$.

Distanța parcursă este $d = 2(h_{\max} - x_3) = 2,5 \text{ m.}$

4.a. Corpul are o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială v_0 și accelerația g . Din grafic se determină timpul de urcare $t_u = 2 \text{ s}$. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ și când $v = 0 \Rightarrow v_0 = gt_u = 20 \text{ m/s}$. Viteza inițială a corpului este $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

b. Din legea lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pentru $v=0$ aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g \cdot t_u^2}{2} = 20 \text{ m.}$

c. Din punctul de înălțime maximă corpul coboară accelerat cu accelerația g . Timpul de coborâre se obține din ecuația coordonatei $x = h - \frac{gt^2}{2}$ cu

$$x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}} = \frac{v_0}{g} = t_u. \text{ Timpul total de mișcare este } t_m = t_u + t_c = 2t_u = 4 \text{ s}$$

Conform legii vitezei $v = -gt$, deoarece la coborâre corpul cade liber și cum $v_0 = 0$ atunci $v = -gt_c = -gt_u = -v_0 = -20 \text{ m/s} \Rightarrow$ corpul revine în punctul de lansare cu viteza cu care a fost lansat.

5.a. Un corp aruncat vertical de la sol urcă și coboară astfel că $\Delta t = t_u + t_c = 2t_u$, deoarece $t_u = t_c$. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ și când

$$v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_0 = \frac{g\Delta t}{2} = 30 \text{ m/s.}$$

b. Din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și pentru $v = 0$ aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul, astfel că $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g\Delta t^2}{8} = 45 \text{ m.}$

6.a. Pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și din condiția $v = 0$ în punctul de înălțime maximă obținem înălțimea maximă la care ajunge corpul $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 5\text{m}$.

Cum $h = \frac{h_{\max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g}$, pe baza ecuației coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$

$$\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} - v_0 t + \frac{v_0^2}{4g} = 0, \text{ iar cele două soluții sunt: } t_{1,2} = \frac{v_0}{g} (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$\Rightarrow t_1 = 0,29\text{ s și } t_2 = 1,71\text{ s. Se obțin două valori care corespund momentelor când mingea trece prin punctul aflat la jumătate din înălțimea maximă la care ajunge corpul la urcări și respectiv la coborâre.}$

b. Pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $h=h_{\max}/2$ obținem cele două valori ale vitezei mingii: $v^2 = v_0^2 - 2g \frac{h_{\max}}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v = \pm \frac{v_0 \sqrt{2}}{2} = \pm 7,05\text{ m/s,}$ unde valoarea pozitivă se obține la urcarea mingii iar cea negativă la coborârea acesteia.

c. Cum definiția vitezei medii este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, iar $\Delta x = x_f - x_0 = \frac{h_{\max}}{2}$ și $\Delta t = t_2 \Rightarrow v_m = \frac{v_0 \sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 1,463\text{ m/s.}$

Prin definiție viteza în modul medie este $|v|_m = \frac{d}{\Delta t}$, unde d reprezintă distanța

parcursă de minge în intervalul de timp Δt . Dar $d = h_{\max} + \frac{h_{\max}}{2} = \frac{3h_{\max}}{2} = \frac{3v_0^2}{4g}$.

deoarece mingea urcă până la înălțimea maximă și apoi coboară pe distanța $\frac{h_{\max}}{2} \Rightarrow |v|_m = \frac{3v_0 \sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 4,388\text{ m/s.}$

7.a. Conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ iar cum $v = \frac{v_0}{2}$ obținem $t = \frac{v_0}{2g} = 2\text{ s.}$

b. Utilizăm ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $v = \frac{v_0}{2}$ obținem $h = \frac{3v_0^2}{8g} = 60\text{ m}$

c. Observăm că $t_{1u} = \frac{v_0}{g} = 4\text{ s și din această cauză cum a treia secundă de lansare este cuprinsă între secundele } t_1=2\text{ s și } t_2=3\text{ s înseamnă că în a treia secundă corpul se află în urcări. Calculăm din legea coordonatei valorile coordonatelor la momentele } t_1 \text{ și } t_2 \text{ și obținem: } x_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 60\text{ m și}$

$x_2 = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 75\text{ m. Distanța parcursă de mobil eate } d = x_2 - x_1 = 15\text{ m.}$

8.a. Omul aflat pe platforma orizontală superioară vede coborând corpul după timpul Δt_1 măsurat din momentul urcării prin fața lui, astfel că $\Delta t_1 = t_{1u} + t_{1e} = 2t_{1u}$, deoarece $t_{1u} = t_{1e}$. Notăm cu v_{01} viteza cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma orizontală superioară. Din legea vitezei

$v = v_{01} - gt$ și din condiția de oprire $v = 0$ obținem:

$$t_{1u} = \frac{v_{01}}{g} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2v_{01}}{g} \Rightarrow v_{01} = \frac{g\Delta t_1}{2} = 10 \text{ m/s.}$$

b. Notăm cu v_{02} viteza cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platformă orizontală inferioară. Analog $v_{02} = \frac{g\Delta t_2}{2} = 30 \text{ m/s.}$

Aflăm distanța dintre cele două platforme, pe baza ecuației lui Galilei

$$v_{01}^2 = v_{02}^2 - 2gd \Rightarrow d = \frac{v_{02}^2 - v_{01}^2}{2g} = 40 \text{ m.}$$

9.a. Ambele picături cad liber, într-o mișcare uniform accelerată cu accelerația g . Alegem origine de timp, momentul când prima picătură se desprinde. Axa Ox este orientată în jos. Legile vitezelor celor două picături sunt $v_1 = gt$ și respectiv $v_2 = g(t - \Delta t)$. Prin definiție viteza relativă $v_r = v_1 - v_2 = g\Delta t \Rightarrow \Delta t = v_r / g = 1 \text{ s}$ reprezintă intervalul de timp care separă lansările celor două picături.

b. Cum $v_1 = 2v_2 \Rightarrow gt_1 = 2g(t_1 - \Delta t) \Rightarrow t_1 = 2\Delta t = 2 \text{ s.}$

c. Distanțele parcuse de cele două picături în intervalul de timp t_1 sunt $d_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 2g\Delta t^2$ și $d_2 = \frac{g}{2}(t_1 - \Delta t)^2 = \frac{g}{2}\Delta t^2$.

Distanța care desparte picăturile este $d = d_1 - d_2 = \frac{3}{2}g\Delta t^2 = 15 \text{ m.}$

10.a. Alegem originea axei de coordonate Ox , punctul de unde circarul lansează bilele. Alegem origine de timp momentul când este lansată prima bilă. Scriem legile de mișcare ale celor două bile: $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2$.

Condiția ca cele două bile să se întâlnească este $x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_{02} + g\Delta t^2}{2(v_{02} + g\Delta t - v_{01})} = 1.25 \text{ s}$ reprezintă timpul după care bilele se întâlnesc.

b. Introducând valoarea timpul după care bilele se întâlnește în oricare din ecuațiile coordonatelor obținem coordonata la care se întâlnește bilele: $x_1 = 4.6875 \text{ m.}$

c. Calculăm după cât timp din momentul aruncării primei bile ajung corpurile pe sol. Pentru aceasta impunem condițiile: $x_1 = 0$ și $x_2 = 0$ și obținem

$t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 2 \text{ s}$ și $t_{m_2} = \frac{2v_{02}}{g} + \Delta t = 5 \text{ s}$, iar intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este $\Delta t = t_{m_2} - t_{m_1} = 3 \text{ s.}$

d. Cele două bile se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când prima bilă coboară după $t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 2 \text{ s}$ iar a doua bilă începe să urce. Dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t > t_{m_1}$ bilele nu se mai pot întâlni în aer și prin urmare intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mare decât două secunde.

Cum $t_{m_2} = \frac{2v_{02}}{g} = 1 \text{ s}$, bilele se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când ambele coboară iar intervalul de timp ce desparte

sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t_{\min} = t_{m_1} - t_{m_2} = \frac{2(v_{01} - v_{02})}{g} \Rightarrow \Delta t_{\min} = 1\text{s.}$

Dacă $\Delta t < \Delta t_{\min}$, bila a doua ajunge în punctul de lansare mai repede decât prima bilă și bilele nu se întâlnesc în aer. Prin urmare dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mic decât o secundă bilele nu se mai pot întâlni în aer. Deci intervalul de timp Δt ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este cuprins între (1s, 2s) pentru că bilele să se întâlnescă în aer.

11.a. Calculăm înălțimea maximă la care ajunge corpul lansat vertical de jos în sus din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ punând condiția ca în momentul opririi

$v = 0$ și obținem $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 80\text{ m}$. Aflăm timpul de urcare al primului corp la

înălțimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ cu $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 4\text{ s}$

b. Calculăm înălțimea de la care se lasă liber cel de-al doilea corp pe baza datelor problemei și obținem: $h = \frac{3}{4}h_{\max} = \frac{3v_0^2}{8g}$. Alegem origine de timp momentul când se aruncă corpurile. Originea axei de coordonate Ox o alegem pe sol. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile considerând că primul mobil

este cel aruncat de pe sol. Astfel $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = h - \frac{gt^2}{2} = \frac{3v_0^2}{8g} - \frac{gt^2}{2}$.

Impunem condiția de întâlnire și aflăm timpul după care corpurile se întâlnesc:

$x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01}t - \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{3v_0^2}{8g} - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{3v_0}{8g} = 1,5\text{ s}$ și înlocuind această valoare în

oricare din ecuațiile coordonatei obținem: $x_1 = 48,75\text{ m}$.

c. Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii din ecuația vitezei prin introducerea timpului de întâlnire. Obținem $v_1 = v_0 - gt_1 = 25\text{ m/s}$ și $v_2 = -gt_1 = -15\text{ m/s}$, deoarece în momentul întâlnirii primul mobil urcă, iar al doilea coboară. Viteza relativă cu care mobilul care urcă trece prin dreptul mobilului care coboară este $v_r = v_1 - v_2 = 40\text{ m/s}$.

12.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două coruri, considerând primul corp cel care cade liber. Astfel: $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$.

Aflăm timpul după care primul corp ajunge la sol din $x_1 = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \sqrt{2h/g} = 2\text{s.}$

Impunem condiția de întâlnire $x_1 = x_2$ și obținem $h - \frac{g \cdot t^2}{2} = v_{02}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_{02} = \frac{h}{t_{c_1}}$.

Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_i = t_{c_1}$ viteza inițială cu care se aruncă corpul al doilea este $v_{02} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 10\text{ m/s.}$

b. Din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ calculăm înălțimea maximă la care ajunge corpul de pe sol, punând condiția ca în momentul opririi $v = 0$.

$$\text{Obținem: } h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{4} = 5 \text{ m.}$$

c. Calculăm pe baza ecuației lui Galilei vitezele cu care ajung corpurile pe sol, ambele având căderi libere de la înălțimile h și respectiv h_{\max} după ce corpul al doilea s-a orpit. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh} = 20 \text{ m/s}$ și $v_2 = \sqrt{2gh_{\max}} = v_1/2 = 10 \text{ m/s}$.

13.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și originea de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp, cel care cade liber. Ecuația de mișcare a acestuia este $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și când ajunge la sol din $x_1 = 0$

$$\text{aflăm timpul de coborâre al primului corp } t_{c_1} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 3,16 \text{ s.}$$

b. Ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp este $x_2 = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Impunem condiția de întâlnire a corpurielor

$$x_1 = x_2 \Rightarrow h_1 - \frac{g \cdot t^2}{2} = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{Viteza initială cu care a fost lansat corpul al doilea este } v_0 = h_2/t_1.$$

deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_1 = t_{c_1}$ atunci $v_0 \approx 3,16 \text{ m/s}$.

c. Calculăm pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 + 2gh$ viteza cu care ajunge primul corp la sol din $v_0=0$ și $h=h_1$. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 31,62 \text{ m/s}$.

Aplicăm ecuația lui Galilei pentru cel de-al doilea corp, ținând cont că $h = h_1 - h_2$ când corpul ajunge la sol. Obținem $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)} = 28,46 \text{ m/s}$, deoarece la întoarcere corpul al doilea are o mișcare accelerată cu accelerarea g și revine în punctul de lansare cu viteza v_0 cu care a fost aruncat, dar această viteză este orientată în jos.

14.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și originea de timp, momentul când se aruncă vertical în sus corpul aflat la înălțimea h .

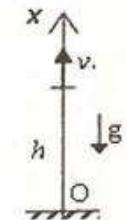
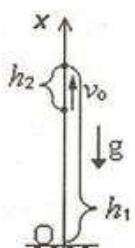
Scriem ecuația de mișcare a acestui corp: $x_1 = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ și aflăm după cât timp ajunge acest corp pe sol din condiția ca $x_1 = 0 \Rightarrow \frac{g \cdot t^2}{2} - v_0 t - h = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 4 \text{ s.}$

b. Scriem ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp: $x_2 = h - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}$,

deoarece acesta cade liber de la înălțimea h , dar mai târziu cu Δt . Deoarece corpurile se întâlnesc la sol concomitet atunci $x_2 = 0$ când

$$t = t_{c_1} \Rightarrow 0 = h - \frac{g(t_{c_1} - \Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = t_{c_1} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1,18 \text{ s.}$$

c. Aflăm viteza cu care ajunge corpul al doilea la sol, aplicând ecuația lui Galilei și ținând cont că acesta cade liber de la înălțimea h . Obținem $v_2 = \sqrt{2gh} \approx 28,28 \text{ m/s}$. Scriem ecuația vitezei pentru primul corp când acesta ajunge pe sol și $t = t_{c_1}$. Obținem $v_1 = v_0 - gt_{c_1} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} = -30 \text{ m/s}$, iar semnul minus apără deoarece corpul 1 se mișcă în sens contrar axei Ox .



15.a. Alegem originea axei de coordonate Ox pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp cel lansat de pe sol vertical în sus. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile:

$$x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{și} \quad x_2 = h - v_{02}t - \frac{gt^2}{2}. \quad \text{Din condiția de întâlnire } x_1 = x_2$$

$$\text{obținem } v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = h - v_{02}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{h}{v_{01} + v_{02}}.$$

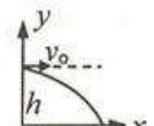
Ecuațiile vitezelor celor două mobile sunt: $v_1 = v_{01} - gt$ și $v_2 = -v_{02} - gt$. În momentul întâlnirii vitezele celor două coruri sunt egale, dar opuse, deoarece mobilele se deplasează în sens contrar, astfel că $v_1 = -v_2 \Rightarrow v_{01} - gt_1 = v_{02} + gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{01} - v_{02}}{2g} \Rightarrow h = \frac{v_{01}^2 - v_{02}^2}{2g} = 100 \text{ m}$.

b. Calculăm după cât timp din momentul lansării corpurile ajung pe sol, punând condiția ca $x=0$. Pentru primul corp: $x_1 = 0 \Rightarrow t_{m_1} = \frac{2v_{01}}{g} = 9 \text{ s}$.

Pentru cel de-al doilea corp: $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{gt_{m_2}^2}{2} + v_{02}t_{m_2} - h \Rightarrow t_{m_2} = \frac{-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{g} \Rightarrow t_{m_2} = \frac{v_{01} - v_{02}}{g} = 4 \text{ s}$. Intervalul de timp care desparte sosirea coruprilor la sol este $\Delta t = t_{m_1} - t_{m_2} = 5 \text{ s}$.

c. Utilizăm ecuația vitezei $v = v_0 - gt$ pentru a afla vitezele cu care cad coruprilor pe sol. Pentru primul corp $v_1 = v_{01} - gt_{m_1} = -v_{01} = -45 \text{ m/s}$, deoarece acesta se întoarce cu viteza cu care a plecat. Pentru corpul al doilea $v_2 = -v_{02} - gt_{m_2} = -v_{01} = -45 \text{ m/s}$. Semnele „-“ apar deoarece coruprilor se deplasează în sens contrar axei Ox .

16.a. Studiem mișcarea cărții pe două axe de coordonate Ox și Oy , cu originea pe sol. Pe Ox cartea are o mișcare rectilinie uniformă cu viteza $v_x = v_0$, iar ecuația de mișcare este $x = v_0 t$ iar pe Oy cartea are o mișcare uniform accelerată cu accelerația g și fără viteză inițială pe axa Oy $v_{0y} = 0$ (cădere liberă), astfel că ecuația de mișcare este $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Ecuația traectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații. Obținem $t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = h - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2}$. Traекторia este o parabolă deoarece y este o funcție de gradul doi de x .



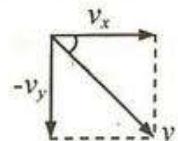
b. Cartea ajunge la sol când $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,4 \text{ s}$.

c. Cartea căde față de marginea masei la distanță: $d = v_{0f_c} = v_0 \sqrt{2h/g} = 40 \text{ m}$

17.a. Studiem aruncarea pietrei pe orizontală pe axe de coordonate Ox și Oy . Pe Ox mișcarea pietrei este rectilinie și uniformă cu $v_x = v_0$,

iar ecuația de mișcare este $x = v_0 t$ iar pe Oy piatra cade liber

de la înălțimea h , astfel că legea de mișcare este $y = h - \frac{gt^2}{2}$.



iar legea vitezei este $|v_y| = gt$. Cum vectorul viteză este tangent la traiectorie, il descompunem în două componente v_x și v_y , astfel că

$$\tan \alpha = \frac{|v_y|}{v_x} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{gt_m}{v_0} \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \tan \alpha}{g} \approx 2,595 \text{ s.}$$

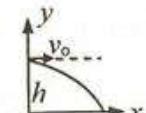
$$\text{Calculăm înălțimea casei din condiția ca } y = 0 \Rightarrow h = \frac{gt_m^2}{2} = \frac{v_0^2 \tan^2 \alpha}{2g} = 33,75 \text{ m.}$$

b. Din desen $\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\cos \alpha} = 30 \text{ m/s.}$

c. Distanța unde cade piatra se află din ecuația de mișcare rectilinie și uniformă cu viteza v_0 pe axa Ox , astfel că $d = v_0 t_m = \frac{v_0^2}{g} \tan^2 \alpha \approx 38,9 \text{ m.}$

18.a. Studiem aruncarea pe orizontală a unui corp. Astfel pe axa Ox corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza v_0 , astfel că $x = v_0 t$ iar pe axa Oy corpul are o cădere liberă, astfel că $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Timpul de cădere

se obține când corpul ajunge la sol astfel că $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.



Deoarece corpurile cad de la aceeași înălțime

$$h_1 = h_2 = h \Rightarrow t_{c_1} = t_{c_2} = t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{t_{c_2}}{t_{c_1}} = 1. \text{ Prin urmare corpurile cad în același}$$

interval de timp.

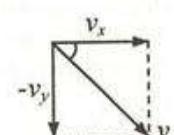
b. Deoarece $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_{02} t_{c_2}}{v_{01} t_{c_1}} = 4$ înseamnă că bătaia corpului al doilea

este de patru ori mai mare decât bătaia primului corp.

c. Viteza la sol se calculează din geometrie ținând cont că vectorul viteză este tangent la traiectorie, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$,

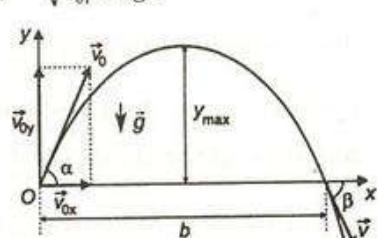
iar $v_x = v_0$ și $v_y = -gt_c = -\sqrt{2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ Raportul

vitezelor corpurilor când acestea ajung la sol este: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{\sqrt{v_{01}^2 + 2gh}} = 2$.



19.a. Studiem aruncarea pietrei sub un unghi pe cele două axe de coordonate cu originea pe sol Ox și Oy . Astfel că pe Ox piatra are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, iar legea de mișcare este: $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$ iar pe Oy piatra are o mișcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, iar legea

de mișcare este $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Pentru a obține ecuația traiectoriei, eliminăm timpul t , din cele două ecuații.



Astfel $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow y = x t g \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ redă dependența coordonatei y în funcție de coordonata x . Cum funcția lui y de x este de gradul doi, traiectoria este o parabolă cu vârful în sus, deoarece coeficientul lui x^2 este negativ.

b. Pentru a determina unde loveste piatra solul punem condiția ca $y=0$ și obținem $x_m = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 25,95$ m.

c. Aflăm timpul de urcare până la înălțimea maximă din legea vitezei pe axa Oy : $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$ și din condiția de oprire $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Prin introducem timpului în ecuația coordonatei pe axa Oy obținem $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 11,25$ m.

d. Cum viteza corpului este tangentă la traiectorie o descompunem în două componente pe cele două axe, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Cum $v_x = v_0 \cos \alpha$, deoarece pe Ox corpul se mișcă rectiliniu uniform, iar $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ obținem $v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g \sin \alpha + g^2 t^2} = 10$ m/s.

20.a. Studiem aruncarea proiectilului pe axele de coordonate Ox și Oy cu originea pe sol. Astfel pe Ox $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$, deoarece pe această axă proiectilul are o mișcare rectilinie și uniformă iar pe Oy $y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, deoarece pe această axă proiectilul are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Aflăm timpul de zbor al proiectilului din condiția ca acesta să ajungă la sol, astfel că $y = 0 \Rightarrow t_m = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow$ bătaia proiectilului se obține înlocuind timpul de

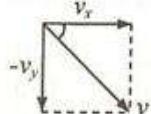
mișcare în ecuația coordonatei pe axa Ox . Obținem $b = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ și înlocuind timpul de mișcare în ecuația coordonatei pe axa Oy , obținem înălțimea maximă a proiectilului $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Cum $b = h_{max} \Rightarrow \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \Rightarrow 4 \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow 16 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
 $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ și $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

b. Înălțimea maximă la care urcă proiectilul este $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 80$ m.

c. Timpul de zbor este $t_m = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 8$ s.

21.a. Mingea este aruncată de un copil sub un unghi α și cu viteza inițială v_0 . Pe axa Oy , mingea are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, astfel că $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$. În momentul opririi



$v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Timpul total de mișcare este $t = t_u + t_c = 2t_u = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, deoarece timpul de urcare este identic cu cel la coborâre. Aplicând ecuația lui Galilei la mișcarea pe verticală de jos în sus obținem: $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh = v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh$.

În momentul opririi $v_y = 0 \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{gt^2}{8} = 5$ m și înălțimea maximă față de sol până la care ridică mingea este $H_{\max} = h_{\max} + h = 6,2$ m.

b. Pe axa Ox mingea are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, astfel că distanța la care se află copil pentru a prinde mingea este $d = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Deoarece această distanță este maximă atunci $\sin 2\alpha = 1$, adică $\alpha = 45^\circ$ și în acest caz $d = \frac{v_0^2}{g} = 10$ m.

c. Timpul de zbor al mingii când $\alpha = 45^\circ$ este $t_m = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \approx 1,41$ s

22.a. Studiem mișcarea corpului alegând originea axelor Ox și Oy pe sol, la baza turnului. Pe axa Ox , corpul se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, astfel că legea de mișcare este $x = v_0 \cos \alpha \cdot t$.

Pe axa Oy , corpul are o mișcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, astfel că legea de mișcare este $y = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm din legea vitezei pe axa Oy $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$, timpul de urcare până la înălțimea maximă punând condiția ca $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Astfel înălțimea

maximă la care urcă corpul este $h_{\max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 15$ m

b. Aflăm timpul de zbor al corpului, punând condiția ca:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{gt_m^2}{2} - v_0 \sin \alpha \cdot t_m - h = 0 \Rightarrow$$

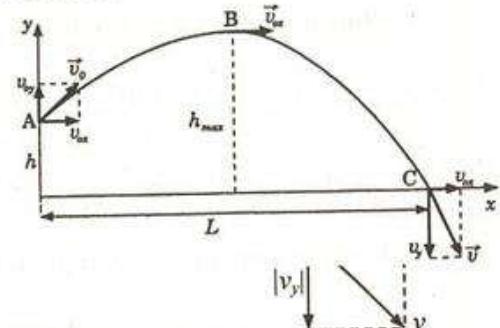
$$t_m = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} \approx 2,73 \text{ s.}$$

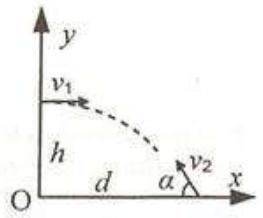
c. Distanța la care cade corpul față de baza turnului este $d = v_0 \cos \alpha \cdot t_m \approx 47,23$ m.

d. Din desen $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ unde $v_x = v_0 \cos \alpha$ iar $v_y = v_{0y} - gt_m \Rightarrow$

$$v_y = v_{0y} \sin \alpha - gt_m = -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 24,5 \text{ m/s.}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt_m}{v_0 \cos \alpha} = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ.$$





23.a. Deoarece piatra lovește pasărea, impunem condiția de întâlnire față de cele două axe de coordonate Ox și Oy , astfel că $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Originea axelor de coordonate se alege pe sol la baza stâlpului. Studiem mișcarea păsării pe cele două axe de coordonate: pe Ox : $x_1 = v_1 t$ și pe Oy : $y_1 = h$.

Deoarece piatra este aruncată simultan cu zborul păsării, legile de mișcare ale pietrei pe cele două axe de coordinate sunt:

$$\text{pe } Ox: x_2 = d - v_2 \cos \alpha \cdot t \text{ și pe } Oy: y_2 = v_2 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

$$\text{Din } y_1 = y_2 \Rightarrow h = v_2 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_2 \sin \alpha \pm \sqrt{v_2^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{g}.$$

În urmă după care piatra lovește pasărea sunt $t_1=1$ s, când piatra lovește pasărea în urcă, și $t_2=2$ s, când piatra lovește pasărea în coborâre.

b. Din $x_1 = x_2 \Rightarrow v_1 t = d - v_2 \cos \alpha \cdot t \Rightarrow d = (v_2 \cos \alpha + v_1)t$. Obținem valorile la care se poate afla pasărea de locul unde copilul lansează piatra: $d_1=40$ m și $d_2=80$ m corespunzătoare valorilor t_1 și t_2 .

c. Descompunem viteza pietrei în cele două componente v_x și v_y imediat înainte de ciocnire, astfel că în momentul lovirii păsării viteza pietrei este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Deoarece $v_x = v_2 \cos \alpha$ și $v_y = v_2 \sin \alpha - gt$ obținem $v = \sqrt{v_2^2 + g^2 t^2 - 2gtv_2 \sin \alpha}$.

Pentru t_1 și t_2 obținem aceeași valoare a vitezei $v \approx 26,46$ m/s

24. Arătăm că glonțele lovește întotdeauna țintă. Alegem originea axelor Ox și Oy pe sol unde se află pușca. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiția de întâlnire $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$. Scriem legile de mișcare pentru glonțe pe cele două axe: pe Ox : $x_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t$ și pe Oy :

$$y_1 = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad \text{Țintă se află la distanța } d \text{ de}$$

pușcă, astfel că $\tan \alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\tan \alpha}$ și legile de

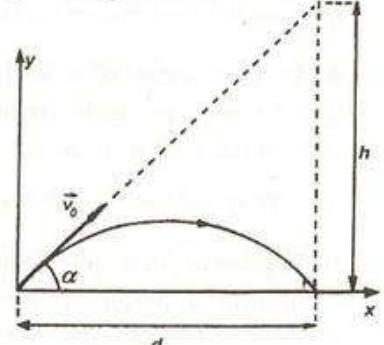
mișcare pentru țintă pe cele două axe sunt: pe Ox

$$x_2 = d = \frac{h}{\tan \alpha} \text{ și pe } Oy: y_2 = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Cum $x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 \cos \alpha \cdot t_i = \frac{h \cos \alpha}{\sin \alpha}$ obținem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin \alpha} = 0,25$ s și din

$$y_1 = y_2 \Rightarrow v_0 \sin \alpha \cdot t_i - \frac{gt_i^2}{2} = h - \frac{gt_i^2}{2} \text{ obținem } t_i = \frac{h}{v_0 \sin \alpha}.$$

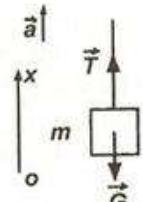
Deoarece se obține aceeași formulă pentru timpul de întâlnire, înseamnă că glonțele lovește întotdeauna țintă.



2.2. Principiile mecanicii

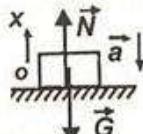
1.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului: greutatea \vec{G} ca rezultat al interacțiunii corp-Pământ și tensiunea \vec{T} ca rezultat al interacțiunii corp-fir. Se aplică principiul al II-lea al dinamicii: $\vec{T} + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$. Se alege o axă Ox în sensul de mișcare și se proiectează relația vectorială. Scalar se obține: $T - mg = ma \Rightarrow T = m(g + a) = 3mg = 60\text{ N}$

$$\mathbf{b.} \quad a_{\max} = T_{\max} / m - g = 30 \text{ m/s}^2$$



2.a. Omul apasă asupra podelei liftului cu o forță egală cu reacțiunea normală, astfel că pe baza principiilor mecanicii $\vec{N} + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$. Prin proiecție pe Ox se obține: $N - mg = -ma \Rightarrow N = m(g - a) = 900\text{ N}$

b. Deoarece $N \geq 0 \Rightarrow m(g - a) \geq 0 \Rightarrow g \geq a \Rightarrow$ accelerarea maximă cu care poate coborî liftul pentru ca omul să mai apese pe podea este accelerarea gravitațională $g = 10 \text{ m/s}^2$.

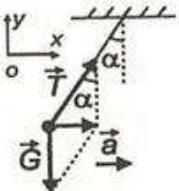


3. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al II-lea al dinamicii. Vectorial se obține: $\vec{T} + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$. Alegem un sistem de axe Ox și Oy și proiectăm pe aceste axe relația vectorială:

pe Ox : $T \sin \alpha = ma$ și pe Oy : $T \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow$

$$T \cos \alpha = mg \Rightarrow \tan \alpha = a/g \Rightarrow a = g \cdot \tan \alpha = 5.76 \text{ m/s}^2$$

Din $\cos \alpha = G/T \Rightarrow T = mg / \cos \alpha = 5.78 \text{ N}$.



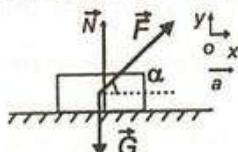
4. Pe baza desenului de la problema precedentă, proiectând relația vectorială $\vec{T} + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$ pe axele Ox și Oy obținem: $T \sin \alpha = ma$ și $T \cos \alpha = mg$. Împărțim cele două relații și obținem: $\tan \alpha = a/g \Rightarrow a = 30^\circ$, iar din teorema lui Pitagora

$$T^2 = m^2 a^2 + m^2 g^2 \Rightarrow T = m \sqrt{a^2 + g^2} = 2,31 \text{ N}$$

5. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{T} + \vec{G} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Scalar prin proiecția pe axe de coordonate se obține:

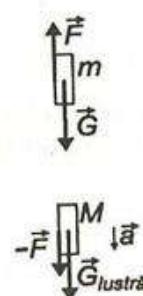
$$\text{pe } Ox: F \cos \alpha = ma \Rightarrow F = \frac{ma}{\cos \alpha} = 4 \text{ N.}$$

$$\text{pe } Oy: N + F \sin \alpha = mg \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha = 16,54 \text{ N.}$$



6. Deoarece pisica rămâne în permanență la aceeași înălțime față de sol, ea se află în repaus, astfel că rezultanta forțelor este nulă. Asupra pisicilor acționează atât greutatea G , ca rezultat al interacțiunii cu Pământ, cât și forța F , ca rezultat al interacțiunii pisiciei cu lustra. Lustra împinge pisica în sus, iar pisica împinge lustra în jos, conform principiului acțiunii și reacțiunii. Studiem repausul pisiciei, astfel că rezultanta forțelor care acționează asupra acesteia este nulă. Vectorial: $\vec{F} + \vec{G} = 0$ și scalar: $F = mg = 20 \text{ N}$

Reprezentăm forțele ce acționează asupra lustrăi și aplicăm



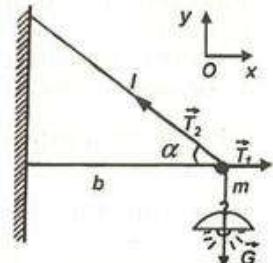
principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{G}' + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Scalar obținem: $G' + F = Ma \Rightarrow Mg + mg = Ma \Rightarrow a = \frac{(M+m)g}{M} = 15 \text{ m/s}^2$.

7. Deoarece lampa se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă, conform principiului 1. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox : $T_1 - T_2 \cos \alpha = 0$ și pe Oy :

$$T_2 \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Din geometrie } \sin \alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\ell} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_2 = \frac{mg\ell}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 100 \text{ N}$$

$$\text{și } T_1 = T_2 \cos \alpha = mg \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{mgb}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 80 \text{ N}.$$



8.a. Pentru $t \in (0,5)\text{s}$, $F_1 = 10 \text{ N} \Rightarrow$ accelerarea este $a_1 = F_1/m = 2 \text{ m/s}^2$. Conform definiției accelerării: $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}$, deoarece la momentul inițial $t_0=0$, $v_0=0 \Rightarrow v = a_1 t = 2t$, astfel că atunci când $t_1=5 \text{ s}$ $v_1 = a_1 t_1 = 10 \text{ m/s}$. Pentru $t \in (5,10)\text{s} \Rightarrow F_1 = 20 \text{ N} \Rightarrow a_2 = F_2/m = 4 \text{ m/s}^2$

$$\text{Cum } a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_{02}}{t - t_{02}} \Rightarrow v = v_{02} + a_2(t - t_{02}), \text{ unde}$$

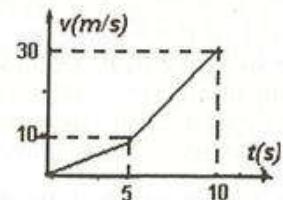
$$v_{02} = v_{\max} = 10 \text{ m/s și } t_{02} = 5 \text{ s} \Rightarrow v = 4t - 10.$$

$$\text{Când } t_f = 10 \text{ s} \Rightarrow v_f = 30 \text{ m/s}.$$

Reprezentarea grafică a dependenței vitezei în raport cu timpul este redată în figura alăturată.

b. Distanța parcursă de corp în timpul este $d = v_m t_1$,

$$\text{deoarece } v_m = \frac{0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow d = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 25 \text{ m}$$



c. Prin definiție $v_m = \frac{D}{\Delta t}$, unde D reprezintă distanța totală parcursă. Pe baza interpretării grafice, deoarece viteza este reprezentată în funcție de timp, distanța parcursă se calculează prin aria de sub curba vitezei, astfel că:

$$D = A_{\text{triunghi}} + A_{\text{trapez}} = 25 \text{ m} + 100 \text{ m} = 125 \text{ m} \Rightarrow v_m = 12,5 \text{ m/s}.$$

9.a. Când $t \in (0,10)\text{s}$, $a_1 = 0,2 \text{ m/s}^2$, astfel că liftul are o mișcare uniform accelerată pornind din repaus. Pe baza reprezentării forțelor obținem $T_1 - mg = ma_1 \Rightarrow T_1 = m(g + a_1) = 5100 \text{ N}$. Când $t \in (10,20)\text{s}$, $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$, astfel că liftul are o mișcare rectilinie și uniformă și $T_2 = mg = 5000 \text{ N}$. Când $t \in (20,25)\text{s}$, $a_3 = -0,4 \text{ m/s}^2$, astfel că liftul are o mișcare uniform frânată $T_3 = m(g + a_3) \Rightarrow T_3 = 4800 \text{ N}$.

$$\text{b. } a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a_1 t = 0,2t \text{ când } t \in (0,10)\text{s} \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s când } t_1 = 10 \text{ s}$$

Când $t \in (10,20) \text{ s}$ corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu $v_1 = 2 \text{ m/s}$

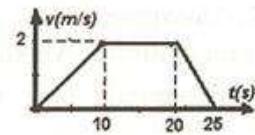
Când $t \in (20, 25)$ s, $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_{02}}{t - t_{02}} \Rightarrow v = v_{02} + a_2(t - t_{02})$ unde $v_{02} = 2$ m/s și $t_{02} = 20$ s, astfel că $v = 10 - 0,4t$.

Viteza finală se obține când $t = 25$ s $\Rightarrow v = 0$ m/s, adică liftul se oprește.

Reprezentarea grafică a vitezei liftului în funcție de timp în intervalul de timp $t \in (0; 25)$ s este redată în figura alăturată.

c. Când $t = 15$ s, liftul are o mișcare uniformă cu viteza $v = 2$ m/s

d. Deoarece când $t \in (0, 10)$ s, $v = 0,2t$, viteza medie reprezintă media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului, astfel că $v = \frac{0 + v_1}{2} = 1$ m/s

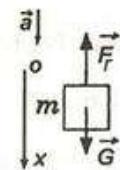


10. a. Din grafic pe baza definiției accelerării se obține $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} = 9$ m/s²

b. Pe baza acțiunii forțelor și a principiului II obținem:

$$mg - F_r = ma \Rightarrow F_r = m(g - a) = 0,1 \text{ N}$$

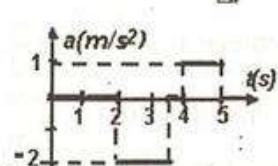
c. Cum $d = v_m \Delta t$, iar cum $v = at$, viteza medie reprezintă media aritmetică a vitezelor $v_1 = at_1 = 4,5$ m/s și $v_2 = at_2 = 13,5$ m/s, astfel că $v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = 9$ m/s $\Rightarrow d = 9$ m



11.a. Deoarece viteza este reprezentată în funcție de timp, distanța parcursă de corp în primele $t_1 = 3$ s reprezintă aria cuprinsă între curba vitezelor și axa timpului, astfel că $d_1 = A_{trapez} = 5$ m

b. În intervalul $t \in (3, 5)$ s corpul a parcurs distanța $d_2 = 1,25$ m, adică aria trapezului de sub axa timpului. Distanța totală parcursă de corp este $d = d_1 + d_2 = 6,25$ m, astfel că modulul vitezei medii este $v_m = d/t = 1,25$ m/s

c. Deoarece $F = ma$, atunci când $t \in (0; 2)$ s și când $t \in (3,5; 4)$ s $a = 0$ deoarece mobilul are o mișcare rectilinie și uniformă. Când $t \in (2; 3,5)$ s accelerarea este $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -2$ m/s² și când $t \in (4; 5)$ s accelerarea este $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1$ m/s²

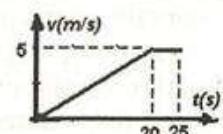


Reprezentarea grafică a forței rezultante care se exercită asupra corpului este redată în figura alăturată.

12. a. Cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow t = \frac{v}{a} = 20$ s

b. Pe baza acțiunii forțelor și a principiului II obținem: $F - F_r = (M + m)a$. Cum $F_r = F/n \Rightarrow F = n(M + m)/(n - 1) = 31,25$ N

c. În primele $t = 20$ s ciclistul are o mișcare accelerată și pornește din repaus, astfel că $v = at = 0,25t$, iar după $t = 20$ s, $v = 5$ m/s. Apoi ciclistul are o mișcare uniformă. Reprezentarea grafică a vitezei ciclistului este redată în figura alăturată.



d. Considerăm biciclistul observator și calculăm viteza relativă cu care se deplasează camionul față de el, $\bar{v}_r = \bar{v}_c - \bar{v}$. Scalar obținem $v_r = v_c + v$ deoarece camionul se deplasează în sens contrar. Intervalul de timp Δt în care camionul depășește ciclistul este $\Delta t = (t + t_1)/(v_c + v) = 0,6$ s

13. a. Din definiția accelerării $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -12 \text{ m/s}^2$

b. Cum $\Delta v = v - v_0$ obținem $v = v_0 + at$, astfel că atunci când $t_1 = 0,5 \text{ s}$ viteza este $v_1 = 18 \text{ m/s}$, iar viteza medie este $v_m = \frac{v_1 + v_0}{2} = 21 \text{ m/s}$

c. Pe baza principiului fundamental al dinamicii: $-mg - F_r = ma \Rightarrow F_r = -m(a + g) = 0,2 \text{ N}$

d. Distanța parcursă de corp la urcare reprezintă aria triunghiului astfel că $d = \frac{v_0 t_m}{2} = 24 \text{ m}$

14.a. În imediata vecinătate a Pământului, parasutistul are o mișcare uniformă astfel că: $\vec{G} + \vec{F}_r = 0 \Rightarrow mg = kv_0 \Rightarrow k = mg/v_0 = 200 \text{ Ns/m}$

b. $\vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}$, iar scalar $mg - kv = ma \Rightarrow a = g \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) = 5 \text{ m/s}^2$

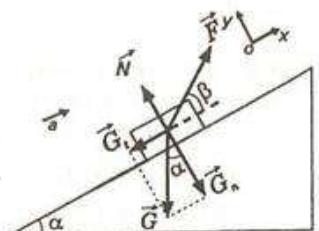


15.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe Ox : $F \cos \beta - mg \sin \alpha = ma$ și pe Oy :

$$N + F \sin \beta - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{m(a + g \sin \alpha)}{\cos \beta} \approx 9,92 \text{ N}$$

$$\text{b. } N = mg \cos \alpha - F \sin \beta = mg \cos \alpha - \frac{m(a + g \sin \alpha)}{\cos \beta} \sin \beta$$

$$N = m \frac{g \cos(\alpha + \beta) - a \sin \beta}{\cos \beta} = 1,65 \text{ N}$$



c. Deoarece corpul nu mai apasă pe plan înseamnă că $N=0 \Rightarrow F = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \beta} \approx 12,27 \text{ N}$. Din $N=0 \Rightarrow a = g \cos(\alpha + \beta)/\sin \beta = 3,65 \text{ m/s}^2$

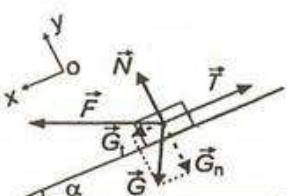
16.a. Impunem condiția de echilibru corpului și proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = 0$. Obținem pe axa Ox $F \cos \alpha + mg \sin \alpha - T = 0 \Rightarrow T = F \cos \alpha + mg \sin \alpha = 35 \text{ N}$

b. Dacă se taie firul, corpul se mișcă accelerat, astfel că pe baza principiului al II-lea al dinamicii obținem $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F} = m\vec{a}$, iar prin proiecție pe axa Ox obținem:

$$F \cos \alpha + mg \sin \alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha}{m} + g \sin \alpha \Rightarrow$$

$$a = 8,75 \text{ m/s}^2$$

c. Prin proiecția ecuației pe axa Oy obținem: $N + F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - F \sin \alpha$. Deoarece corpul mai rămâne în contact cu planul inclinat, trebuie ca $N \geq 0$, astfel că $F \leq mg \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow F_{\max} = mg \operatorname{ctg} \alpha = 69,2 \text{ N}$



17.a. Reprezentăm forțele și studiem mișcarea corpului pe baza principiului II al dinamicii: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm relația pe axe de coordonate: pe Ox :

$$T_1 \sin \frac{\alpha}{2} - T_2 \sin \frac{\alpha}{2} = m \cdot a \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{m \cdot a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1) \text{ și pe } Oy:$$

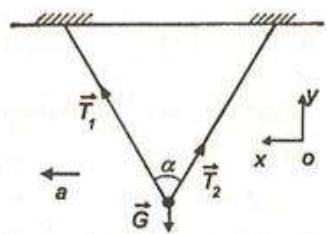
$$T_1 \cos \frac{\alpha}{2} + T_2 \cos \frac{\alpha}{2} - mg = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = \frac{mg}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

Adunăm cele două relații și apoi le scădem. Obținem:

$$T_1 = \frac{m(a \cos \frac{\alpha}{2} + g \sin \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha} \approx 20,34 \text{ N și } T_2 = \frac{m(g \sin \frac{\alpha}{2} - a \cos \frac{\alpha}{2})}{\sin \alpha} \approx 14,34 \text{ N.}$$

b. Primul se va rupe firul în care tensiunea este mai mare, adică firul 1.

$$\text{c. } T_1 = F \Rightarrow F \sin \frac{\alpha}{2} = ma \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow a = \frac{2F}{m} \sin \frac{\alpha}{2} - g \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx 4,22 \text{ m/s}^2$$

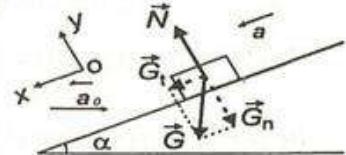


18.a. Aplicăm principiul al doilea al mecanicii, după reprezentarea forțelor corpului și vectorial se obține $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$, deoarece corpul se deplasează față de un observator de pe sol cu o accelerare compusă din accelerarea lui față de plan \vec{a} și accelerarea planului față de sol \vec{a}_0 .

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:

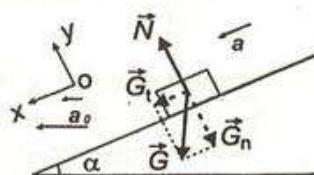
$$\text{pe } Ox: mg \sin \alpha = ma - ma_0 \cos \alpha \Rightarrow a = g \sin \alpha + a_0 \cos \alpha = 8,46 \text{ m/s}^2$$

$$\text{pe } Oy: N - mg \cos \alpha = -ma_0 \sin \alpha \Rightarrow N = m(g \cos \alpha - a_0 \sin \alpha) = 5,64 \text{ N}$$



b. Dacă planul este împins spre stânga, accelerarea \vec{a}_0 are sens contrar. Relația vectorială se păstrează: $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$. Proiecția relației pe Ox devine:

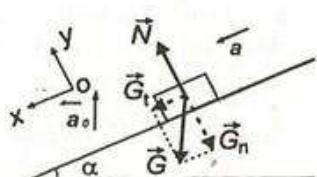
$$mg \sin \alpha = ma + ma_0 \cos \alpha \Rightarrow a = g \sin \alpha - a_0 \cos \alpha \\ a = 5,64 \text{ m/s}^2$$



$$\text{pe } Oy: N - mg \cos \alpha = ma_0 \sin \alpha \Rightarrow N = m(g \cos \alpha + a_0 \sin \alpha) = 8,46 \text{ N.}$$

c. Pentru ca acest corp să nu apese pe planul înclinat, $N = 0$, iar acest lucru se poate realiza doar în cazul în care planul se deplasează spre dreapta când $a_0 = g \operatorname{ctg} \alpha = 10 \text{ m/s}^2$

19.a. Aplicăm principiul al doilea al mecanicii după reprezentarea forțelor: $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$, unde $\vec{a} + \vec{a}_0$ reprezintă accelerarea corpului față de un observator aflat pe sol și este formată din accelerarea corpului față de plan \vec{a} și din accelerarea \vec{a}_0 a planului față de sol. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.



Pe Ox : $mg \sin \alpha = ma - ma_0 \sin \alpha \Rightarrow a = (g + a_0) \sin \alpha = 7 \text{ m/s}^2$

b. pe Oy : $N - mg \cos \alpha = ma_0 \cos \alpha \Rightarrow N = m(g + a_0) \cos \alpha = 24,22 \text{ N}$.

c. Proiectăm relația vectorială $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$ pe axele de coordonate când accelerația liftului este în jos:

pe Ox : $mg \sin \alpha = ma + ma_0 \sin \alpha \Rightarrow a = (g - a_0) \sin \alpha = 3 \text{ m/s}^2$

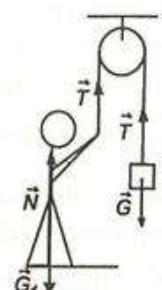
pe Oy : $N - mg \cos \alpha = -ma_0 \cos \alpha \Rightarrow N = m(g - a_0) \cos \alpha = 10,38 \text{ N}$

20.a. Tensiunea în fir este forța F , astfel că $T=F$. Reprezentăm forțele care acționează asupra sacului și pe baza principiului II obținem: $T - mg = ma \Rightarrow a = F/m - g \Rightarrow a = 1,25 \text{ m/s}^2$

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra omului și impunem condiția de echilibru $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = 0$. Scalar obținem: $T + N - G_1 = 0 \Rightarrow N = G_1 - F = 100 \text{ N}$

c. Deoarece sacul este ridicat fără ca muncitorul să se ridice de pe sol atunci, $N=0 \Rightarrow F=G_1$, astfel ca $a_{\max} = G_1/m - g = 2,5 \text{ m/s}^2$

d. $T - m'g = m'a \Rightarrow T = m'(g+a) = 450 \text{ N}$



21.a. Deoarece baloul m de aflat în echilibru, rezultanta forțelor este nulă, astfel că: $\vec{T} + \vec{G} = 0 \Rightarrow T = mg = 100 \text{ N}$

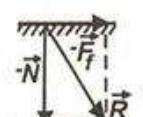
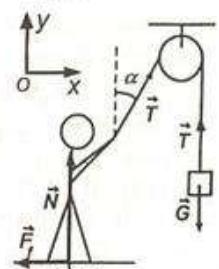
b. Impunem condiția de echilibru omului M și vectorial obținem: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar prin proiecție pe axe de coordonate se obține:

pe Ox : $T \sin \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = T \sin \alpha = mg \sin \alpha = 50 \text{ N}$

pe Oy : $T \cos \alpha + N = Mg \Rightarrow N = (M - m \cos \alpha)g = 713,5 \text{ N}$

c. Asupra suprafeței omul exercită două forțe conform principiului acțiunii și reacțiunii: o forță normală și forța de frecare. Rezultanta acestor forțe este:

$$R = \sqrt{N^2 + F_f^2} = g\sqrt{m^2 + M^2 - 2mM \cos \alpha} \approx 715,25 \text{ N}$$



22. a. Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecărui și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axe de coordonate.

Pentru corpul M : $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 = M\vec{a}$ și prin

proiecție pe axa Ox : $F - T = Ma$ (1), iar pentru

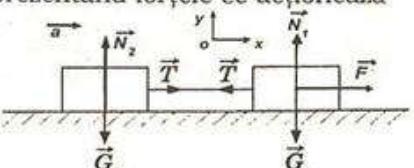
corpul m : $\vec{T} = m \cdot \vec{a}$ și scalar $T = ma$ (2).

Adunăm relațiile (1) și (2) $\Rightarrow F = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M+m} = 3 \text{ m/s}^2$

b. $T = ma = \frac{mF}{M+m} = 3 \text{ N}$.

c. Dacă forța F formează cu orizontală un unghi $\alpha = 30^\circ$, obținem prin proiecție pe axa Ox : $F \cos \alpha - T = Ma$ (3). Adunăm relațiile (2) și (3) și obținem

$F \cos \alpha = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha}{M+m} = 1,5 \text{ m/s}^2$



23.a. Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecărui și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axa de coordinate Ox. Pentru corpul m_1 : $F - m_1g - T = m_1a$ (1) și pentru corpul m_2 : $T - m_2g = m_2a$ (2). Adunând relațiile (1) și (2) obținem $F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a + g) = 48$ N.

b. $T = m_2(a + g) = 36$ N.

c. Dacă corporile urcă rectiliniu și uniform, accelerația corpului este $a = 0 \Rightarrow F = (m_1 + m_2)g = 40$ N.

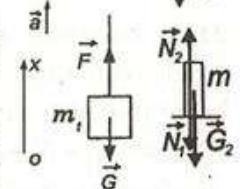
d. Dacă tensiunea în fir atinge valoarea maximă, accelerația sistemului este $a' = \frac{T_{\max}}{m_2} - g = 5$ m/s² $\Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a' + g) = 60$ N.



24. a. Reprezentăm forțele care acționează asupra primului corp și impunem condiția de echilibru. Obținem: $N_1 + F - m_1g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1g - F = 300$ N



b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului așezat pe suprafață și impunem condiția de repaus. Obținem $N_2 - N_1 - m_2g = F \Rightarrow N_2 = (m_1 + m_2)g - F = 700$ N

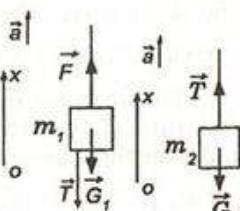


c. Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecărui și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axa de coordinate Ox. Pentru corpul m_1 : $F - m_1g - T = m_1a$ (1) și pentru corpul m_2 : $T - m_2g = m_2a$ (2).

Adunând relațiile (1) și (2) obținem

$$F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow m_2 = \frac{F}{a + g} - m_1 = 40 \text{ kg}$$

d. Tensiunea din fir este $T = F - m_1(g + a) = 480$ N



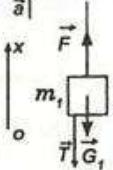
25.a. Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m = m + m_0$ și apoi reprezentăm forțele care acționează asupra acestui corp. Reprezentăm forțele și proiectăm pe axa Ox. Obținem:

$$F - (m + m_0)g = (m + m_0)a \Rightarrow a = \frac{F}{m + m_0} - g = 2.5 \text{ m/s}^2$$

b. Împărțim firul în două porțiuni: porțiunea superioară de lungime $2l/3$ și masă $m_1 = 2m_0/3$ și o porțiune inferioară de lungime $l/3$ și masă $m_2 = m_0/3$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru

corpul cu masa m_1 : $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}$ și scălar se obține:

$$F - m_1g - T = m_1a \Rightarrow F - \frac{2}{3}m_0g - T = \frac{2}{3}m_0a \quad (1)$$



Porțiunea inferioară de fir împreună cu masa m constituie un nou corp de studiu cu masa $M = m + m_0 = m + \frac{m_0}{3}$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa M : $\vec{T} + \vec{G}_t = M \cdot \vec{a}$ și scalar: $T - (m + \frac{m_0}{3})g = (m + \frac{m_0}{3})a$ (2).

Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem $F - (m + m_0)g = (m + m_0)a$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m + m_0} - g \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})(g + a) \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3}) \frac{F}{m + m_0} = 15N$$

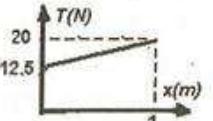
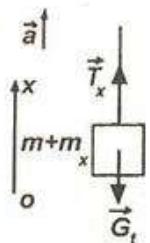
c. Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_0 = m_0x/\ell$ formează împreună cu corpul suspendat m un nou corp cu masa $m + m_0x/\ell$, astfel că:

$$T - (m + \frac{m_0x}{\ell})g = (m + \frac{m_0x}{\ell})a \Rightarrow T = (m + \frac{m_0x}{\ell})(g + a) = (m + \frac{m_0x}{\ell}) \frac{F}{m + m_0}$$

Când $x=0$ se obține valoarea minimă a tensiunii

$$T_{\min} = \frac{mF}{m + m_0} = 12,5 \text{ N}, \text{ în partea inferioară a firului și când } x=\ell$$

se obține valoarea maximă a tensiunii în fir $T_{\max} = F = 20 \text{ N}$, în partea superioară a firului. Tensiunea în fir depinde liniar de x , iar reprezentarea grafică a lui $T=f(x)$ este o dreaptă.



26.a. Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m = m_1 + m_0 + m_2$ și apoi reprezentăm forțele care acționează asupra acestui corp. Reprezentăm forțele și proiectăm $\vec{F} + \vec{G}_t = m \cdot \vec{a}$ pe axa Ox (desen 23.a). Obținem:

$$F - (m_1 + m_0 + m_2)g = (m_1 + m_0 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_0 + m_2} - g = 2 \text{ m/s}^2$$

b. Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_0 = m_0 \cdot x/\ell = fm_0$ împreună cu corpul cu masa m_2 constituie un nou corp cu masa $M = fm_0 + m_2$. Pe baza proiecției relației vectoriale $\vec{T} + \vec{G}_t = M \cdot \vec{a}$ pe axa Ox : $T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(a + g) \Rightarrow$

$$T = \frac{(fm_0 + m_2)F}{m_1 + m_0 + m_2} = 50,4 \text{ N}$$

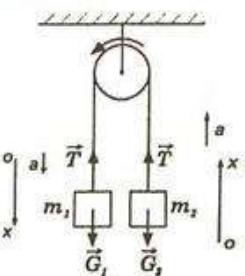
c. Dacă sistemul coboară cu accelerația a , proiectăm relația $\vec{T} + \vec{G}_t = M \cdot \vec{a}$ pe axa Ox : $(m_1 + m_0 + m_2)g - F = (m_1 + m_0 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_0 + m_2)(g - a) = 48 \text{ N}$

27.a. Deoarece $m_1 > m_2$, maimuța coboară accelerat, iar ciocchinele urcă cu aceeași accelerație. Pentru maimuță $\vec{T} + \vec{G}_t = m_1 \cdot \vec{a}$ și scalar $m_1g - T = m_1a$ (1).

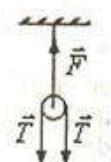
Pentru ciocchinele de banane $\vec{T} + \vec{G}_t = m_2 \cdot \vec{a}$ și scalar $T - m_2g = m_2a$ (2). Din adunarea relațiilor (1)+(2) obținem:

$$g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = g \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ și}$$

$$T = m_2(a + g) = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} = 480 \text{ N.}$$



b. Impunem condiția de echilibru scriptului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow$ scalar $F = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 960 \text{ N}$.



c. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = at = 2 \text{ m/s}$

d. Deoarece de maimuță trage de fir cu o forță egală cu greutatea corpului ei, tensiunea în fir este egală cu G_1 , astfel că $T = G_1$. Studiem mișcarea uniform accelerată a ciorchinelui de banane. Vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2 \vec{a}'$, iar scalar:

$$T - m_2 g = m_2 a' \Rightarrow m_1 g - m_2 g = m_2 a' \Rightarrow a' = g \frac{(m_1 - m_2)}{m_2} = 5 \text{ m/s}^2$$

28.a. Deoarece sistemul se află în repaus impunem condiția de echilibru corporilor. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_2 , astfel că $T = m_2 g$. Din condiția de echilibru impusă scriptelui $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow F = 2T = 2m_2 g = 6 \text{ N}$

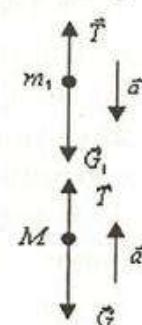
b. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masa m_1 : $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F} = 0$, astfel că scalar $F + m_1 g - T - N = 0 \Rightarrow N = F + (m_1 - m_2)g = 3 \text{ N}$

c. Lăsând liber sistemul de corpi acesta se va mișca accelerat cu accelerația a . Deoarece corpul cu masă m_2 coboară și corpul m_1 urcă, pe baza demonstrației de la 25.a din $T - m_1 g = m_1 a$ și din $m_2 g - T = m_2 a$ obținem $a = g \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m/s}^2$. Cum $a = \Delta v / \Delta t = v/t \Rightarrow v = at$, iar viteza medie este $v_m = v/2 = at/2$, astfel că distanța parcursă de corpi este $d = v_m t = at^2/2 = 2,5 \text{ m}$

29.a. Deoarece corpul m se aşază peste un corp M , noul corp cu masa $m_1 = m + M$ va coborî accelerat cu accelerația a , iar M va urca accelerat cu aceeași accelerație. Reprezentăm forțele asupra corporilor de mase m_1 și M apoi studiem mișcarea fiecărui corp. Aplicăm principiul al doilea al dinamicii și vectorial obținem pentru fiecare corp $\vec{T} + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$. Scalar se obține: pentru corpul m_1 :

$$m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow (m + M)g - T = (m + M)a \Rightarrow T = (m + M)(g - a) \quad (1)$$

Pentru corpul M : $T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(g + a) = 9,6 \text{ N} \quad (2)$



b. Din (1) și (2) $\Rightarrow (m + M)(g - a) = M(g + a) \Rightarrow m = \frac{2Ma}{g - a} = 400 \text{ g}$

c. Studiem mișcarea corpului cu masa m : $\vec{G} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}$, astfel că scalar $mg - N = ma \Rightarrow N = m(g - a) \Rightarrow N = 2Ma = 3,2 \text{ N}$

30.a.b. Pentru un observator aflat în lift corporile se deplasează cu accelerăția \vec{a} . Pentru un observator aflat pe sol, liftul se deplasează cu accelerăția \vec{a}_0 în sus. Fiecare corp se va deplasa față de observatorul de pe sol cu accelerăția formată din accelerăția liftului față de sol și din accelerăția corpului față de lift, adică cu accelerăția $\vec{a}_0 + \vec{a}$. Studiem mișcarea fiecărui corp.

Pentru corpul m_1 vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = m_1(\vec{a} + \vec{a}_0)$ și scalar $m_1g - T = m_1(a - a_0)$ (1)

Pentru corpul m_2 : vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2(\vec{a} + \vec{a}_0)$ și scalar $T - m_2g = m_2(a_0 + a)$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2) obținem $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a - (m_1 - m_2)a_0 \Rightarrow$

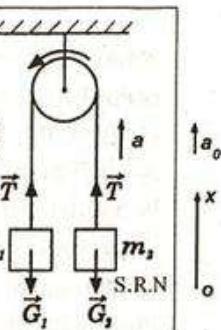
$$a = \frac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2} = 3 \text{ m/s}^2 \text{ și } T = m_2g + m_2(a_0 + a) = 2 \frac{m_1m_2(g + a_0)}{m_1 + m_2} = 4,5 \text{ N.}$$

c. Impunem condiția de echilibru scriptelui. Vectorial $\vec{F} = \vec{T} + \vec{T}$ iar scalar: $F = 2T = \frac{4m_1m_2(g + a_0)}{m_1 + m_2} = 9 \text{ N.}$

31. Calculăm masele porțiunilor de lanț care atârnă pe cele două părți. Astfel porțiunea de lanț cu lungimea l_0 , are masa $m_0 = m_0/l = fm$, iar cealaltă porțiune are masa $m_1 = (1-f)m$. Din condițiile de mișcare ale celor două porțiuni de lanț obținem $m_0g - T = m_0a$ și $T - m_1g = m_1a$. Prin adunarea celor două relații obținem $a = g \frac{(m_0 - m_1)}{m_1 + m_0} = g(2f - 1) = 6 \text{ m/s}^2$

b. Considerăm jumătatea de lanț cu masa $m_2 = m/2$ și impunând condiția de mișcare acestei porțiuni de lanț obținem $m_2g - T = m_2a$, astfel că $T = m_2(g - a) \Rightarrow T = mg(1 - f) = 12 \text{ N}$

c. Reprezentarea grafică a accelerării lanțului în funcție de fracțiunea f este redată în figura alăturată.



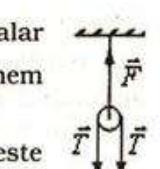
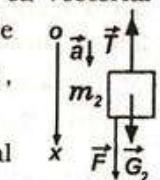
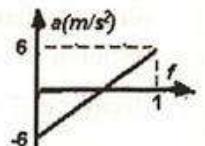
32.a. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_2 , astfel că vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = 0$, deoarece $a = 0 \Rightarrow$ scalar $F + m_2g = T$. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa m_1 . Obținem vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$, iar scalar $N + T - m_1g = 0 \Rightarrow N = (m_1 - m_2)g - F = 30 \text{ N}$

b. Dacă sistemul se mișcă accelerat, atunci pentru corpul m_2 vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a} \Rightarrow$ scalar $F + m_2g - T = m_2a$ (1).

Pentru corpul cu masă m_1 vectorial $\vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$, iar scalar $T - m_1g = m_1a$ (2). Din (1)+(2) obținem

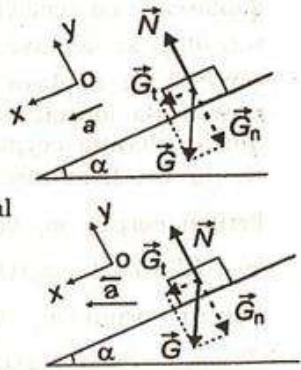
$$F = (m_1 - m_2)g + (m_2 + m_1)a \Rightarrow F = 56 \text{ N}$$

c. Impunem condiția de echilibru scriptelui. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow$ scalar $F = 2T = 2m_1(g + a) = 144 \text{ N}$



33.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului. Vectorial $\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Obținem pe Ox $mg \sin \alpha = ma \Rightarrow a = g \sin \alpha$
 $\Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$ și pe Oy $N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$

- b.** Pentru un observator de pe sol, corpul se deplasează împreună cu planul cu accelerarea acestuia \vec{a} . Vectorial pentru corp: $\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$ și prin proiecții obținem:
 Pe Ox : $mg \sin \alpha = m a \cos \alpha \Rightarrow a = gtg \alpha = 5,78 \text{ m/s}^2$
c. Pe Oy : $N - mg \cos \alpha = m a \sin \alpha \Rightarrow N = mg / \cos \alpha = 5,78 \text{ N}$



34.a Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecărui și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare. Proiectăm relațiile vectoriale pe axele de coordonate.
 Pentru corpul m : $\vec{N} + \vec{G} + \vec{T} = m\vec{a}$, iar scalar pe Ox :

$$T = m \cdot a \quad (1)$$

Pentru corpul M : $\vec{G}' + \vec{T} = M\vec{a}$, iar scalar pe Ox :
 $Mg - T = Ma \quad (2)$. Din (1)+(2) ⇒

$$Mg = (m + M)a \Rightarrow a = \frac{Mg}{M + m} = 6,66 \text{ m/s}^2$$

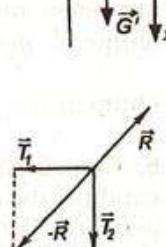
$$\text{b. } T = ma = \frac{mMa}{m + M} = 6,66 \text{ N.}$$

c. Impunem condiția de echilibru scripetului.

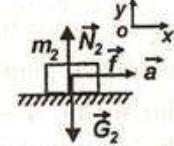
\vec{R} este reacțunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni \vec{T}_1 și \vec{T}_2 reprezintă forțele de interacțiune dintre scripete și cele două părți ale firului (cea orizontală și cea verticală).

$$\text{Astfel } \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow R^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2T^2,$$

$$\text{deoarece } T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} = \frac{mMa}{m + M}\sqrt{2} \approx 9,4 \text{ N.}$$



35.a. Studiem mișcarea fiecărui corp. Reprezentăm forțele ce acționează asupra fiecărui corp și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul cu masa m_2 : vectorial $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{f} = m_2\vec{a}$ și scalar $f = m_2a$ (1), unde f este forța cu care corpul 1 îl impinge pe al doilea.

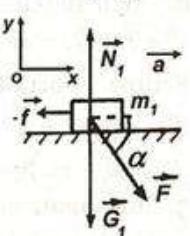


Pentru corpul cu masa m_1 : vectorial $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 - \vec{f} = m_1\vec{a}$

deoarece asupra corpului m_1 acționează o forță ($-\vec{f}$) cu care m_2 reacționează asupra corpului m_1 conform principiului acțiunii și reacțiunii. Prin proiecția pe axa de coordonate Ox obținem $F \cos \alpha - f = m_1 a$ (2)

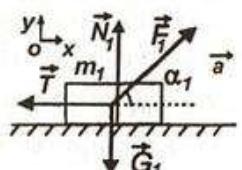
$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow F \cos \alpha = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m/s}^2$$

b. Forța cu care corpul 1 apasă asupra planului este reacțunea normală. Din proiecția pe axa Oy : $N_1 - m_1 g - F \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = F \sin \alpha + m_1 g = 64,6 \text{ N}$



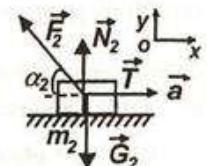
c. Forța cu care primul corp impinge cel de-al doilea este $f = m_2 a = 5 \text{ N}$

36.a. Stabilim sensul în care se deplasează sistemul de coruri comparând componentele celor două forțe pe orizontală. Cum $F_1 \cos \alpha_1 > F_2 \cos \alpha_2$ sistemul se deplasează spre dreapta accelerat. Pentru corpul m_1 , vectorial $\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} = m_1 \vec{a}$, iar scalar pe Ox $F_1 \cos \alpha_1 - T = m_1 a$ (1)



Pentru corpul m_2 , vectorial obținem $\vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a}$, iar scalar pe Ox $T - F_2 \cos \alpha_2 = m_2 a$ (2). Din (1)+(2) ⇒

$$F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = 0,5 \text{ m/s}^2$$

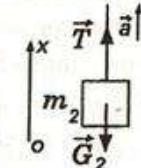


b. Din proiecția pe axa Oy : $N_1 + F_1 \sin \alpha_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - F_1 \sin \alpha_1$. Deoarece apăsarea exercitată pe suprafața orizontală de către corpul de masă m_1 este nulă, atunci $N_1 = 0 \Rightarrow F_1 = m_1 g / \sin \alpha_1 = 240 \text{ N}$

c. Deoarece sistemul de coruri se deplasează orizontal cu viteză constantă, $a = 0 \Rightarrow F_1 \cos \alpha_1 = F_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow F_2 / F_1 = \cos \alpha_1 / \cos \alpha_2 \approx 1,22$

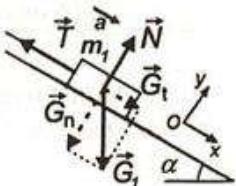
37.a. Deoarece componenta tangențială a greutății corpului 1 este mai mare decât greutatea corpului 2, corpul 2 urcă iar corpul 1 coboară de-a lungul planului inclinat. Reprezentăm forțele ce acționează asupra fiecărui corp și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste coruri. Pentru corpul m_2 :

vectorial $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2 \vec{a}$ și scalar pe Ox $T - m_2 g = m_2 a$ (1), iar



pentru corpul m_1 : vectorial $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = m_1 \vec{a}$ și scalar pe Ox obținem $m_1 g \sin \alpha - T = m_1 a$ (2). Din (1)+(2) ⇒

$$m_1 g \sin \alpha - m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{g(m_1 \sin \alpha - m_2)}{m_1 + m_2} = 0,71 \text{ m/s}^2$$

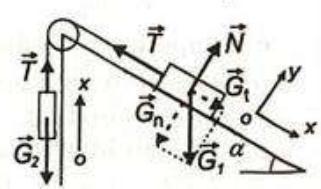


b. Dacă sistemul se deplasează în același sens atunci din $m_1 g \sin \alpha - m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{g \sin \alpha - a}{g + a} = 0,25 \text{ kg}$

Dacă sistemul se deplasează în sens contrar atunci pentru corpul m_2 : $m'_2 g - T = m'_2 a$ și pentru corpul m_1 : $T - m_1 g \sin \alpha = m_1 a$. Prin adunarea celor două relații obținem $m'_2 g - m_1 g \sin \alpha = (m_1 + m'_2) a \Rightarrow m'_2 = m_1 \frac{g \sin \alpha + a}{g - a} = 0,875 \text{ kg}$

c. Dacă sistemul rămâne în repaus atunci $a = 0 \Rightarrow m_1 \sin \alpha = m_2 \Rightarrow m_1 = m_2 / \sin \alpha = 0,8 \text{ kg}$

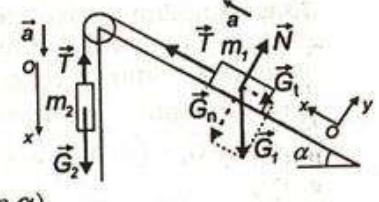
38.a. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$ și scalar pe Ox : $m_1 g \sin \alpha - T = 0$ (1). Pentru corpul m_2 vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$ și scalar pe Ox : $T - m_2 g = 0$ (2). Din (1)+(2) ⇒ $m_1 \sin \alpha = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{\sin \alpha} = 2$



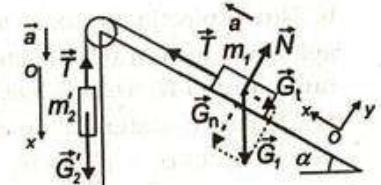
b. Deoarece $m_2=2m_1$ corpul cu masă m_2 coboară accelerat iar corpul m_1 urcă pe plan. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$ și scalar pe Ox : $T - m_1g \sin \alpha = m_1a$ (1). Pentru corpul m_2 vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$ și scalar pe Ox : $m_2g - T = m_2a$ (2). Din (1)+(2) $\Rightarrow g(m_2 - m_1 \sin \alpha) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = \frac{g(m_2 - m_1 \sin \alpha)}{m_1 + m_2} = 5/3 \text{ m/s}^2$

Corpul m_2 coboară pe distanță x , iar corpul m_1 urcă pe plan pe aceeași distanță x . Din geometrie $h = x + x \sin \alpha \Rightarrow x = h/(1 + \sin \alpha) = 1 \text{ m}$. Cum $x = v_m t$ și $v_m = v/2 \Rightarrow x = vt/2$. Din $\alpha = \Delta v / \Delta t = v/t \Rightarrow v = at \Rightarrow x = at^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2x/a} \approx 1.09 \text{ s}$

c. Viteza sistemului este $v = at = 1.81 \text{ m/s}$

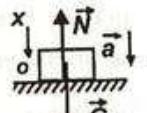


39.a. Deoarece sistemul de coruri este în echilibru atunci conform demonstrației de la problema precedentă de la punctul **a.**, obținem $m_1 \sin \alpha = m_2 \Rightarrow m_2 = 1 \text{ kg}$

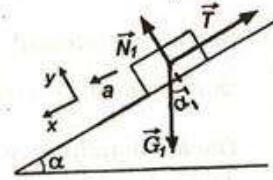


b. Dacă pe corpul 2 se adaugă o masă adițională m , noua masă a corpului devine $m'_2 = m_2 + m$. Pentru corpul m_1 vectorial $\vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{T} = m_1\vec{a}$ și scalar pe Ox $T - m_1g \sin \alpha = m_1a$ (1). Pentru corpul m'_2 pe Ox vectorial $\vec{G}'_2 + \vec{T} = m'_2\vec{a}$ și scalar pe Ox $m'_2g - T = m'_2a$ (2). Adunând (1)+(2) $\Rightarrow m'_2g - m_1g \sin \alpha = a(m_1 + m'_2) \Rightarrow m'_2(g - a) = m_1(g \sin \alpha + a)$ $\Rightarrow m'_2 = \frac{m_1(g \sin \alpha + a)}{g - a} \Rightarrow m = \frac{m_1(g \sin \alpha + a)}{g - a} - m_2 = 0.75 \text{ kg}$

c. Studiem mișcarea corpului adițional m . Vectorial $\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}$ și scalar: $mg - N = ma \Rightarrow N = m(g - a) = 6 \text{ N}$.



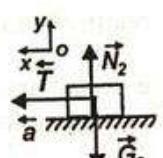
40.a. Corpul cu masa m_1 va cobori și va trage corpul cu masă m_2 . Pentru m_1 vectorial: $\vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$ și scalar pe Ox : $m_1g \sin \alpha - T = m_1a$ (1).



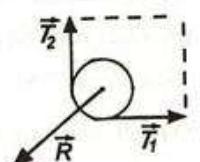
Pentru m_2 vectorial $\vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$, iar scalar $T = m_2a$ (2). Din (1) și (2) obținem prin adunare

$$m_1g \sin \alpha = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{m_1g \sin \alpha}{m_1 + m_2} = 3.75 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b. } T = \frac{m_1 m_2 g \sin \alpha}{m_1 + m_2} = 7.5 \text{ N}$$



c. Impunem condiția de echilibru scripetului. \vec{R} este reacțiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni \vec{T}_1 și \vec{T}_2 reprezintă forțele de interacție dintre scripete și cele două părți ale firului (cea orizontală și cea verticală).



$$\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow R^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2T^2, \text{ deoarece } T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} \approx 10.575 \text{ N.}$$

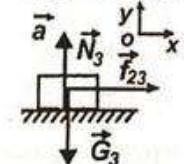
41.a. Considerăm sistemul un corp cu masa $m=m_1+m_2+m_3$, astfel că asupra acestuia acționează forță F . Accelerarea sistemului de corpuri este $a=F/(m_1+m_2+m_3)=1,5 \text{ m/s}^2$

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă m_3 și obținem vectorial $\vec{G}_3 + \vec{N}_3 + \vec{f}_{23} = m_3 \vec{a}$. Scalar pe Ox :

$f_{23}=m_3 a=3 \text{ N}$, unde f_{23} reprezintă forță cu care corpul cu masa m_2 împinge corpul cu masa m_3

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă m_2 și obținem vectorial $\vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{f}_{32} + \vec{f}_{12} = m_2 \vec{a}$. Scalar pe Ox :

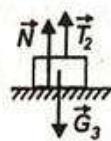
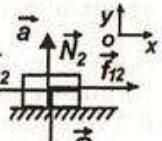
$f_{12}-f_{32}=m_2 a$, unde f_{12} reprezintă forță cu care corpul cu masa m_1 împinge corpul cu masa m_2 . $f_{12}=(m_3+m_2) a=7,5 \text{ N}$



42.a. Impunem condiția de echilibru corpului m_3 : $\vec{G}_3 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 = 0$ și scalar $N_2 + T_2 - m_3 g = 0 \Rightarrow T_2 = m_3 g - N = 120 \text{ N}$.

b. Din condiția de echilibru impusă scripetelui mobil obținem $2\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$, astfel că $T_2 = 2T_1 \Rightarrow T_1 = T_2/2 = 60 \text{ N}$

c. Impunem condiția de echilibru corpuriilor m_1 și m_2 : $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = 0$. Scalar obținem $m_1 g = T_1 \Rightarrow m_1 = T_1/g = 6 \text{ kg}$



43. a. Deoarece ansamblul se mișcă uniform, atunci $F_r = F_R = F_r + 3F_{rv} = 11 \text{ kN}$

b. Din principiul II pentru ansamblu obținem $F'_r - F_R = (M+3m)a$, astfel că $a=0,35 \text{ m/s}^2$

c. Din principiul II pentru ultimul vagon obținem $T - F_{rv} = ma$, astfel că $T=9 \text{ kN}$

d. Cum $a' = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -\frac{F_R}{M+3m} = \frac{0-v}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{F_R \Delta t}{M+3m} = 11 \text{ m/s}$

2.3. Forța de frecare

1. Metoda conform materiei obligatorii. Pe baza formulei vitezei medii:

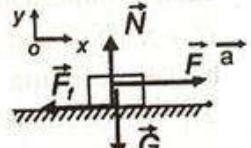
$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \frac{4 - 2(t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2 - (4 - 2t + t^2)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = -2 + 2t + \Delta t.$$

Viteza instantanee se obtine pentru $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow v_0 = 2t - 2$. Pe baza formulei acceleratiei medii $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{2(t + \Delta t) - 2 - (2t - 2)}{\Delta t} = 2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow$ acceleratia medie

coincide cu acceleratia instantanee, deoarece $a = 2 \text{ m/s}^2$ este constanta si atunci corpul are o miscare rectilinie uniform accelerata.

Reprezentam fortele care actioneaza asupra corpului si aplicam principiul al doilea al dinamicii si obtinem vectorial:

$\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectand pe axe de coordonate obtinem pe Ox : $F - F_f = ma$ si pe Oy : $N - mg = 0$. Conform legii frecarii $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = m(a + \mu g) = 3 \text{ N}$.



2. Impartim lanțul omogen în două bucăți: una de lungime $f\ell$ cu masa aferentă $m_1 = fm$, unde m reprezintă masa întregului lanț și alta de lungime $(1-f)\ell$ cu masa $m_2 = (1-f)m$. Forța care trage bucată orizontală de lanț cu masa m_2 , este greutatea bucatii verticale de

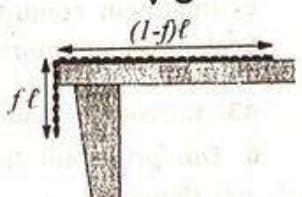
lanț cu masa m_1 : $G_1 = m_1 g = fmg$. Considerăm că bucată orizontală m_2 începe să se miște uniform, deci rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{G}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = 0$ si scalar prin proiecția pe axe de

coordonate obtinem: pe Ox : $G_1 - F_f = 0$ si pe Oy :

$$N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = G_2 = m_2 g = (1-f)mg$$

$$F_f = \mu N_2 = \mu(1-f)mg \Rightarrow fmg = \mu(1-f)mg \Rightarrow$$

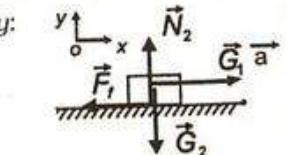
$$\mu = f/(1-f) = 0,25$$



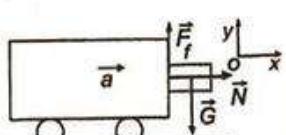
3. Deoarece corpul cu masa m nu cade, el se deplasează odată cu căruciorul, adică cu acceleratia \vec{a} pe care căruciorul o are față de un observator de pe sol. Reprezentam fortele care actionează asupra corpului m si aplicam principiul al doilea al dinamicii: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectam relația

vectorială pe axe de coordonate si obtinem: pe Ox : $N = ma$ si pe Oy :

$$mg - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg.$$

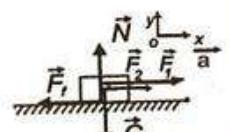


Dar conform legii frecarii $F_f = \mu N = \mu ma$. Din cele două relații obtinem $mg = \mu ma \Rightarrow \mu = g/a = 0,5$. Deoarece $\mu < 1$, problema este posibilă numai dacă $a > g \Rightarrow a > 10 \text{ m/s}^2$.



4.a. Pe baza relației $a = \Delta v / \Delta t = v_1 / t_1 = 0,3 \text{ m/s}^2$, deoarece din grafic $v_1 = 1,2 \text{ m/s}$ si $t_1 = 4 \text{ s}$

b. Reprezentam fortele care actionează asupra mașinii si aplicam principiul al doilea al dinamicii:



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:

pe Ox : $F_1 + F_2 - F_f = m \cdot a \Rightarrow F_f = F_1 + F_2 - ma = 500 \text{ N}$, astfel că $\mu = F_f/mg = 0,0625$

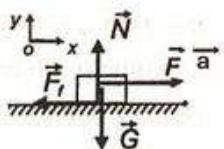
c. Distanța parcursă de mașină este $d = v_m t = v_i t / 2 = 2,4 \text{ m}$ cu $v_i = 1,2 \text{ m/s}$

d. Din momentul încețării acțiunii celor doi oameni mașina va avea o mișcare uniformă înceținită cu accelerarea imprimată de forța de frecare, astfel că $a_i = -F_f/m = -\mu g$. Cum $a_i = \Delta v/\Delta t = -v_i/t_{top} \Rightarrow t_{top} = v_i/\mu g = 1,92 \text{ s}$

5.a. Accelerarea corpului este $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v_i/t_i = 2 \text{ m/s}^2$, deoarece din grafic $v_i = 10 \text{ m/s}$ și $t_i = 5 \text{ s}$

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

$\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox : $F - F_f = ma$ și pe Oy : $N - mg = 0$, astfel că din $F_f = \mu N = \mu mg$, obținem $\mu = (F - ma)/mg = 0,3$



c. Din momentul încețării acțiunii forței F , corpul va avea o mișcare uniformă înceținită cu accelerarea imprimată de forța de frecare, astfel că $a_i = -F_f/m = -\mu g$. Cum $a_i = \Delta v/\Delta t = -v_i/\Delta t = -5 \text{ m/s}^2$, deoarece corpul se oprește în $\Delta t = t_2 - t_1 = 2 \text{ s}$, atunci $\mu_i = -a_i/g = 0,5$

6.a. Cum $a = \Delta v/\Delta t = (v - v_0)/t \Rightarrow v = v_0 + at$, din identificarea coeficienților obținem $v_0 = 8 \text{ m/s}$ și $a = -4 \text{ m/s}^2$

b. Din $a = -F_f/m$ și $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a = -\mu g$, obținem $\mu = -a/g = 0,4$

c. Corpul are o mișcare rectilinie uniformă înceținită, astfel că distanța parcursă de corp până la oprire este $d = v_{m,top} = v_0 t_{top}/2$. În momentul opririi $v = 0 \Rightarrow t_{top} = -v_0/a \Rightarrow d = -v_0^2/2a = 8 \text{ m}$

7.a. Deoarece rezultanta celor două forțe este paralelă cu planul orizontal, asupra corpului acționează forțele ca în figura 5.b., astfel că $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Scalar obținem: pe Ox : $F - F_f = ma$ și pe Oy : $N - mg = 0$ și cum din legea forței de frecare $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = m(a + \mu g) = 300 \text{ N}$

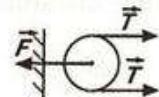
b. Din geometrie $\cos \alpha_1 = F_1/F = 0,5 \Rightarrow \alpha_1 = 60^\circ$ și cum $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 30^\circ$. Din $\tan \alpha_1 = F_2/F_1 \Rightarrow F_2 = F_1 \tan \alpha_1 = 259,5 \text{ N}$

c. Dacă acțiunea forțelor F_1 și F_2 încețează iar corpul va avea o mișcare rectilinie uniformă înceținită, astfel că $a_i = -F_f/m$ și din $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a_i = -\mu g = -2 \text{ m/s}^2$

8.a. Forța orizontală cu care trebuie să tragă omul de fir este $F = T$. Deoarece corpul se deplasează cu viteza constantă, rezultanta forțelor este nulă, astfel că $\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Pe axa Ox : $T - F_f = 0$ și pe Oy : $N - mg = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg$, obținem $T = \mu mg = 40 \text{ N}$

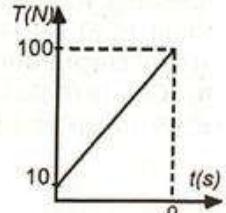
b. Impunem condiția de echilibru axului scripetelui și obținem: $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0$, iar scalar $F = 2T = 80 \text{ N}$

c. Pe baza relației vectoriale $\vec{T}_i + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \vec{a}$ obținem scalar pe axa Ox : $T_i - F_f = ma$ și cum $F_f = \mu N = \mu mg$ obținem $a = (T_i - \mu mg)/m = 1 \text{ m/s}^2$



9.a. Firul se rupe când $F = T_{max}$, astfel că $10t + 10 = 100 \Rightarrow t = 9 \text{ s}$

b. Cum $T = F = 10t + 10$, atunci când $t = 0 \Rightarrow F = 10 \text{ N}$, iar când $t = 9 \text{ s} \Rightarrow F = 100 \text{ N}$. Dependența forței de tensiune din fir în funcție

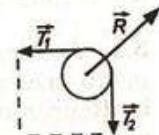


de timp, în primele 9 s de la începutul acțiunii forței F este redată în graficul alăturat.

c. Pe baza relației vectoriale $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$ obținem scalar pe axa Ox: $F - F_f = ma$ și cum $F_f = \mu N = \mu mg$ obținem $a = (F - \mu mg)/m = 0,2 \text{ m/s}^2$, deoarece la $t=10 \text{ s}$ forța $F=110 \text{ N}$

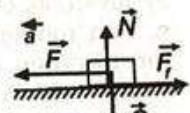
10.a. Forța care se exercită în fir este chiar $F=T$. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} = 0$, scalar obținem

$$R = T\sqrt{2} \approx 0,282 \text{ N}, \text{ deoarece } T_1 = T_2 = T$$



b. Studiem mișcarea accelerată a corpului, astfel că $\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Pe axe de coordonate obținem pe Ox: $T - F_f = ma$ și cum $F_f = \mu N = \mu mg$ obținem

$$a = \frac{T}{m} - \mu g = 1 \text{ m/s}^2$$

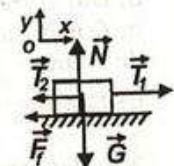


$$\text{c. } \text{Din } a = \frac{\Delta v}{\Delta t_1} = \frac{v}{\Delta t_1} \Rightarrow v = a\Delta t_1 = 1 \text{ m/s}$$

d. Din momentul încetării acțiunii forței F corpul se va mișca frânăt. Astfel $-F_f = ma' \Rightarrow -\mu mg = ma' \Rightarrow a' = -\mu g$.

$$\text{Cum } a' = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{0 - v}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{v}{\mu g} = 1 \text{ s} \Rightarrow \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \text{ s}$$

11.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$.

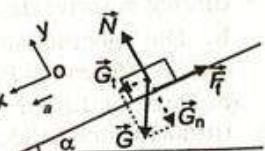


Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox: $T_1 - T_2 - F_f = ma$ și pe Oy: $N - mg = 0$ și cum $F_f = \mu N = \mu mg$ obținem

$$\mu = \frac{T_1 - T_2 - ma}{mg} = 0,04$$

$$\text{b. Cum } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = at = 1 \text{ m/s}$$

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox: $mg \sin \alpha - F_f = ma$ și pe Oy: $N - mg \cos \alpha = 0$.

Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, astfel $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

$$\text{Cum distanța coborâtă este } \ell = \frac{h}{\sin \alpha} = v_m t = \frac{vt}{2} = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a \sin \alpha}}, \text{ astfel că}$$

$$v = \sqrt{2ah / \sin \alpha} = \sqrt{2gh(1 - \mu \cos \alpha)} \approx 23,6 \text{ m/s}$$

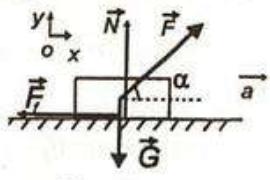
12.a. Asupra blocului de beton acționează forța de tracțiune F_t și o forță de frecare statică. Valoarea forței de frecare la alunecare este $F_{fa} = \mu mg = 10 \text{ N}$. Când $t \in [0;1] \text{ s}$ $F_t < F_{fa}$, inseamnă că forța de tracțiune este insuficientă pentru a scoate corpul din repaus \Rightarrow viteza blocului de beton este nulă.

b. Când $t \in [2;3] \text{ s}$ din grafic $F_t = 20 \text{ N}$. Obținem $F_t - F_{fa} = ma \Rightarrow F_t - \mu mg = ma \Rightarrow a = (F_t - \mu mg)/m = 1 \text{ m/s}^2$

c. În intervalul de timp $t \in [1;6]$ s corpul se mișcă și prin urmare forța de frecare dintre blocul de beton și suprafața orizontală este cea de alunecare $F_{fa} = \mu mg = 10$ N. La momentul $t=0,3$ s corpul se află în repaus iar forța de frecare statică este egală cu cea de tracțiune, astfel că $F_{fs}=F_{tr}$. Deoarece forța de tracțiune în intervalul de timp $t \in [0;1]$ crește direct proporțional cu timpul, după $t=0,3$ s va avea valoarea $F_{tr}=3$ N $\Rightarrow F_{fs}=3$ N

d. Asupra blocului în intervalul de timp $t \in [4;5]$ s acționează simultan forța de tracțiune și forța de frecare la alunecare, astfel că forța rezultantă este $F=F_f-F_{fa}=0$ N \Rightarrow corpul are o mișcare rectilinie și uniformă

13.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox : $F \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy : $N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha$. Conform legii frecării $F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu(mg - F \sin \alpha) \Rightarrow F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 15,35$ N



b. $N = mg - F \sin \alpha = 10,28$ N

c. Deoarece corpul se mișcă uniform cu viteza, accelerarea corpului este nulă $\Rightarrow a=0 \Rightarrow F = \frac{\mu \cdot mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 5,11$ N

14.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$, iar prin proiecția pe axele de coordonate (desen 13.a.) obținem: pe Ox : $F \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy : $N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha$. Din $F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu(mg - F \sin \alpha) \Rightarrow F_f = \mu(mg - F \sin \alpha) \Rightarrow F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) = ma \Rightarrow a=1$ m/s²

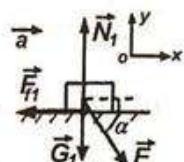
b. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at=15$ m/s

c. După încreșterea acțiunii forței F , asupra corpului acționează numai forța de frecare, astfel că că accelerarea corpului este $a_f=-F_f/m$ și din $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow a_f=-\mu g$. Cum $a_f=\Delta v/\Delta t=-v/\Delta t_{top}=\Delta t_{top}=v/\mu g=2,595$ s

15.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox : $F \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy :

$$N - mg - F \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = mg + F \sin \alpha \Rightarrow F_f = \mu N \Rightarrow$$

$$F_f = \mu(mg + F \sin \alpha) \Rightarrow F \cos \alpha - \mu(mg + F \sin \alpha) = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = 9,68$$
 N

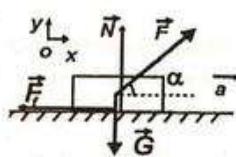


b. $N = mg + F \sin \alpha = 28,37$ N

c. Dacă de corp se trage cu forța F , pentru ca acest corp să nu apese asupra planului orizontal trebuie ca $N=0$.

Cum pe Oy : $N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow F = mg / \sin \alpha = 23,12$ N și în acest caz accelerarea săniei este:

$$a' = F \cos \alpha / m = g \cdot \operatorname{ctg} \alpha \approx 5,78$$
 m/s²



16.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și deoarece acest corp se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

$$\text{Pe } Oy: N - mg + F_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = mg - F_2 \sin \alpha \approx 51,35 \text{ N}$$

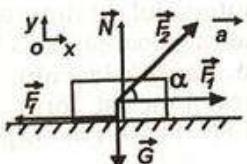
$$\text{b. Pe } Ox: F_1 + F_2 \cos \alpha - F_f = 0 \text{ și cum } F_f = \mu N \Rightarrow$$

$$F_f = \mu(mg - F_2 \sin \alpha), \text{ astfel că}$$

$$F_1 + F_2 \cos \alpha = \mu(mg - F_2 \sin \alpha) \Rightarrow \mu = \frac{F_1 + F_2 \cos \alpha}{mg - F_2 \sin \alpha} \approx 0,68$$

c. Deoarece valoarea coeficientului de frecare scade, corpul se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația pe axa Ox :

$$F_1 + F_2 \cos \alpha - F_f = ma \text{ și } F_f = \mu(mg - F_2 \sin \alpha) \Rightarrow a = \frac{F_1 + F_2 (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m} - \mu g \\ a \approx 2,95 \text{ m/s}^2$$



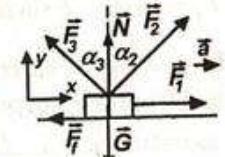
17.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}.$$

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox : $F_1 + F_2 \sin \alpha_2 - F_3 \sin \alpha_3 - F_f = ma \Rightarrow F_f = F_1 + F_2 \sin \alpha_2 - F_3 \sin \alpha_3 - ma = 3,46 \text{ N}$

$$\text{b. pe } Oy: N + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_2 \cos \alpha_2 - F_3 \cos \alpha_3 = 6 \text{ N}.$$

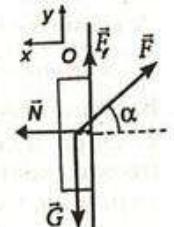
c. Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = F_f / N = 0,576$



18.a. După reprezentarea forțelor, impunem condiția ca acest corp să se afle în repaus. În acest caz, rezultanta forțelor este nulă:

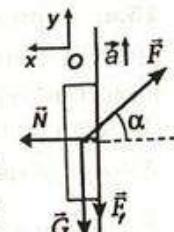
$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{F} = 0. \text{ Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe } Ox: N - F \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = F \cos \alpha \text{ și pe } Oy:$$

$$F_f + F \sin \alpha - mg = 0. \text{ Cum } F_f = \mu N = \mu F \cos \alpha \Rightarrow$$



$$mg = F(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \Rightarrow F = \frac{mg}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = 40 \text{ N}$$

$$\text{b. Forța de apăsare normală este: } N = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \approx 34,6 \text{ N.}$$



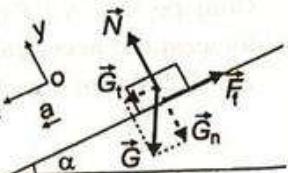
c. Deoarece corpul urcă accelerat, pe baza principiului al doilea al dinamicii $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ și prin proiecție pe axa Ox obținem: $F \sin \alpha - F_f = ma$ și pe Oy $N - F \cos \alpha = 0$, astfel că

$$F_f = \mu N = \mu F \cos \alpha. \text{ Astfel } F \sin \alpha - mg - \mu F \cos \alpha = ma \Rightarrow F = \frac{m(a+g)}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = 132 \text{ N}$$

19.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra snowmobilului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial:

$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}. \text{ Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe } Ox: mg \sin \alpha - F_f = m \cdot a \text{ și}$$

$$\text{pe } Oy: N - mg \cos \alpha = 0.$$



Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \text{const} \Rightarrow$ snowmobilul are o mișcare rectilinie uniform accelerată. Din $a = a_m = \Delta v / \Delta t = (v - v_0) / t \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$

b. $F_f = m(g \sin \alpha - a) = 1600 \text{ N}$

c. Din $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \Rightarrow \mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} \approx 0,231$

20.a. Deoarece corpul începe să alunecă pe planul înclinat, mișcarea acestuia este uniformă și rezultanta forțelor este nulă, conform principiului 1 al mecanicii.

$$\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0. \text{ Proiectăm relația vectorială pe axe de}$$

coordonate: pe $Ox: mg \sin \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg \sin \alpha$ și pe $Oy:$

$N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha.$ Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 0,578.$ Unghiul α pentru care corpul luncă uniform pe planul înclinat se numește unghi de frecare, astfel încât tangenta unghiului de frecare reprezintă fizic coeficientul de frecare la alunecare

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}.$

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

Pe $Ox: F - mg \sin \beta - F_f = ma$ și pe $Oy: N - mg \cos \beta = 0$

$$\Rightarrow N = mg \cos \beta \text{ Conform legii frecării:}$$

$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \beta \Rightarrow F - mg \sin \beta - \mu mg \cos \beta = ma \\ \Rightarrow F = m(g \sin \beta + \mu g \cos \beta + a) = 6,77 \text{ N}$$

c. Din $a = a_m = \Delta v / \Delta t = v / \Delta t \Rightarrow v = a \Delta t.$ Deoarece viteza corpului crește direct proporțional cu timpul, viteza medie este $v_m = v / 2 = a \Delta t / 2,$ astfel că distanța parcursă de corp este $d = v_m \Delta t = a \Delta t^2 / 2 = 4 \text{ m}$

21.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului ca în figură și impunem condiția ca acest corp să miște uniform ($a=0$) astfel că: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0.$ Proiectăm relația pe axe de coordonate. Obținem pe $Ox:$

$$F - mg \sin \alpha - F_f = 0 \text{ și pe } Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \text{ și din}$$

$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow F - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

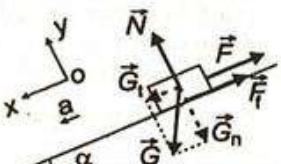
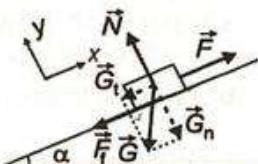
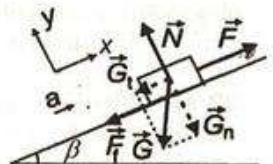
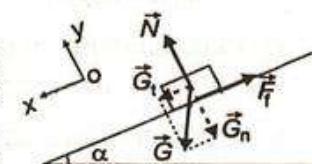
$$\mu = \frac{F - mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = 0,2$$

b. Deoarece forța cu care se trage de fir este mai mică decât cea inițială corpul coboară, astfel că $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \vec{a},$ iar scalar prin proiecția pe $Ox: mg \sin \alpha - F - F_f = ma$ și pe $Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow$

$$N = mg \cos \alpha \text{ și din } F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow$$

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - F / m = 0,4 \text{ m/s}^2$$

$$\text{c. Din } a = a_m = \Delta v / \Delta t = v / \Delta t \Rightarrow v = a \Delta t = 0,8 \text{ m/s}$$

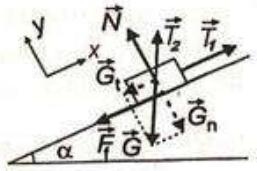


22.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului ca în figură și impunem condiția ca acest corp să miște uniform ($\alpha=0$) astfel că: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate: Pe Ox : $T_1 + T_2 \sin \alpha - mg \sin \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = T_1 + (T_2 - mg) \sin \alpha$

$F_f = 4 \text{ kN}$, ($\sin \alpha = h/l = 0,6$ și $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8$) și pe Oy : $N + T_2 \cos \alpha - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = (mg - T_2) \cos \alpha$

b. Pe baza legii frecării obținem: $\mu = \frac{F_f}{N} = \frac{T_1 + (T_2 - mg) \sin \alpha}{(mg - T_2) \cos \alpha} = 0,25$

c. Accelerarea cu care coboară liber lada goală pe planul inclinat se află reprezentând forțele și scriind principiul fundamental al dinamicii, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f = m \cdot a$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$. Pe baza legii frecării $F_f = \mu N \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 4 \text{ m/s}^2$ observăm că accelerarea cu care coboară lada goală nu depinde de masa acesteia



23.a. Calculăm accelerarea cu care urcă corpul pe planul inclinat, după reprezentarea forțelor și aplicarea principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:

pe Ox : $-F_f - mg \sin \alpha = m \cdot a_u$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$

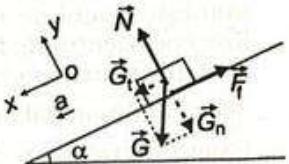
Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow$

$-\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \Rightarrow a_u = -9,9 \text{ m/s}^2$. Semnul “-” al accelerării ne arată că acest corp are o mișcare uniform frânătă.

b. Pe baza formulei accelerării medii: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$ și

ținând cont că $a_m = a$, iar $t_0 = 0 \Rightarrow v = v_0 + at$. Calculăm timpul până la oprire din condiția $v = 0 \Rightarrow 0 = v_0 + at_{top} \Rightarrow t_{top} = -v_0/a = 1 \text{ s}$.

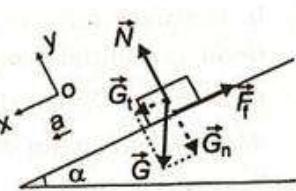
c. Distanța pe care o parcurge corpul până la oprire este $s_{op} = v_{mtop}$, unde viteza medie se obține ca fiind media aritmetică a valorilor inițială și finală deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel că $v_m = v_0/2 \Rightarrow s_{op} = -v_0^2/2a = 4,95 \text{ m}$.



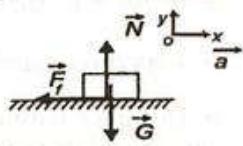
24.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f = m \cdot a$ și pe Oy :

$N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha$.

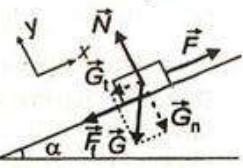
Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \approx 2,84 \text{ m/s}^2$.



b. La baza planului corpul are o viteză cu care se mișcă în continuare pe planul orizontal. Aflăm accelerarea corpului pe planul orizontal. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox : $-F_f = m \cdot a$ și pe Oy : $N - G = 0 \Rightarrow N = mg$. Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g = -2,5 \text{ m/s}^2$, iar semnul minus ne arată că acest corp are o mișcare încetinită.



c. Pentru ca acest corp să urce uniform pe planul inclinat, trebuie ca $\vec{a} = 0$, deci rezultanta forțelor care acționează asupra lui să fie nulă: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox : $F - mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 14,325 \text{ N}$



25.a. Pe baza interpretării geometrice distanța parcursă de corp până la oprire este aria triunghiului, astfel că $d = A = 4 \text{ m}$

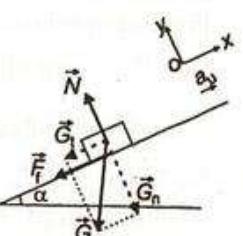
b. Studiem mișcarea corpului la urcarea pe plan inclinat. Astfel cum $a_u = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{\Delta t} = -8 \text{ m/s}^2$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

Pe Ox : $-F_f - mg \sin \alpha = m \cdot a_u$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$

Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow$

$$-\mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$\mu = -\left(\tan \alpha + \frac{a_u}{g \cos \alpha} \right) = 0,25, \text{ deoarece } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8$$



c. Studiem mișcarea corpului la coborârea pe plan inclinat. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

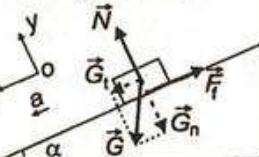
Pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f = m \cdot a$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$.

Pe baza legii frecării obținem:

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

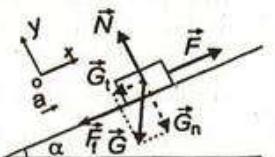
Din definiția accelerării $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v}{a} = 2 \text{ s}$, astfel că $t_i = 3 \text{ s}$

d. Distanța parcursă de corp la coborârea pe planul inclinat până când viteza revine la valoarea inițială este egală cu aria celui de-al doilea triunghi, astfel că $d' = A' = 8 \text{ m}$, iar $d_{total} = d + d' = 12 \text{ m}$.



26.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra saniei și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $F - mg \sin \alpha - F_f = ma$ și

pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$. Conform legii frecării:



$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow$$

$$F - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 0,5 \text{ m/s}^2$$

b. Deoarece sania se mișcă accelerat distanța parcursă de sanie este $d=v_m t$.

Deoarece viteza corpului crește direct proporțional cu timpul, viteza medie este $v_m = v/2$. Din $a = a_m = \Delta v / \Delta t = v/t \Rightarrow v = at$, astfel că $v_m = at/2 \Rightarrow d = at^2/2 = 9 \text{ m}$

c. După închiderea acțiunii forței F , sania va avea o mișcare uniformă încrețită, astfel că $\vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m \cdot \vec{a}_u$.

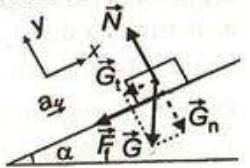
$$\text{Pe } Ox: -mg \sin \alpha - F_f = m \cdot a \text{ și pe } Oy: N - mg \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Pe baza legii frecării } F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma \Rightarrow a = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Distanța parcursă de corp până la oprire este $d_{op} = v_{top} t_{top}$,

unde $v_m = v/2$, astfel că $d_{op} = v_{top} t_{top}/2$. Cum $a_u = \Delta v / \Delta t = -v / t_{top} \Rightarrow t_{top} = -v / a_u$

$$\Rightarrow d_{op} = -v^2 / 2a_u = v^2 / 2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 0,45 \text{ m, unde } v = at = 3 \text{ m/s}$$



27.a. Deoarece $T > mg \sin \alpha$ corpul se va deplasa pe planul înclinat în sus. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m \cdot \vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

$$\text{Pe } Ox: T - mg \sin \alpha - F_f = ma \text{ și pe } Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \text{ și c}$$

$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{T - mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m} = 7,5 \text{ m/s}^2$$

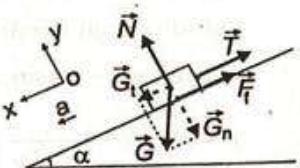
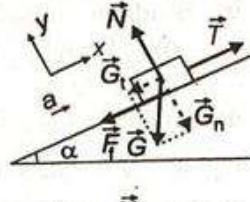
b. Deoarece $T < mg \sin \alpha$, corpul se va mișca în jos pe planul înclinat. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m \cdot \vec{a}. \text{ Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:}$$

$$\text{pe } Ox: mg \sin \alpha - T - F_f = ma \text{ și pe } Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha.$$

$$\text{Cum } F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - T}{m} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

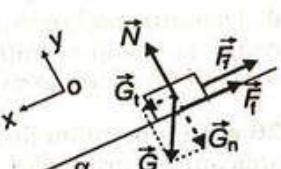
c. Dacă corpul urcă uniform în situația de la punctul **a.**, impunem condiția ca $\alpha = 0 \Rightarrow T = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 7,5 \text{ N}$. Dacă corpul coboară uniform în situația de la **b.**, impunem condiția ca $\alpha = 0 \Rightarrow T = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2,5 \text{ N}$



28.a. Deoarece corpul este menținut în repaus, rezultanta forțelor care acționează asupra corpului este nulă, iar forța F_1 este aplicată de-a lungul planului în sus, la fel ca și forța de frecare. Utilizăm principiul al doilea al dinamicii, după reprezentarea forțelor care acționează asupra corpului.

$$\text{Obținem: } \vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0.$$

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $mg \sin \alpha - F_1 - F_f = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$.



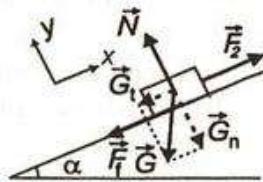
Cum $F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = F_1$ (1). Studiem mișcarea uniformă în sus pe planul inclinat a corpului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii, după reprezentarea forțelor care acționează asupra corpului, obținem vectorial: $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox : $F_2 - mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$.

$$F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow F_2 = mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha \quad (2).$$

Adunăm relațiile (1) și (2): $F_1 + F_2 = 2mg \sin \alpha \Rightarrow$

$$m = \frac{F_1 + F_2}{2g \sin \alpha} = 1,41 \text{ kg}$$

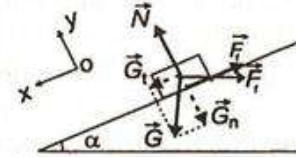


b. Împărțim relația (1) la relația (2) și obținem:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \Rightarrow \mu = \frac{(F_2 - F_1)}{(F_1 + F_2)} \operatorname{tg} \alpha = 0,5.$$

c. Unghiul de frecare este unghiul planului inclinat pentru care un corp lăsat liber pe plan coboară uniform, astfel că $\vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Pe axe obținem prin proiecții: pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$, astfel că din $F_f = \mu N = \mu \cdot mg \cos \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \mu = 0,5$

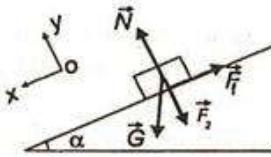
29.a. Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță orizontală. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii și obținem $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f - F_1 \cos \alpha = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha - F_1 \sin \alpha = 0$.



$$F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha + F_1 \sin \alpha) \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \mu F_1 \sin \alpha - F_1 \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță normală. Reprezentăm forțele și ținem cont că în repaus, rezultanta forțelor este nulă $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_2 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială și obținem pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha - F_2 = 0 \Rightarrow$



$$F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha + F_2) \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \mu F_2 = 0 \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\mu}.$$

$$\text{Cum } F_2 = nF_1 \Rightarrow \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\mu} = n \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \Rightarrow \mu = \frac{\cos \alpha}{n - \sin \alpha} \approx 0,31$$

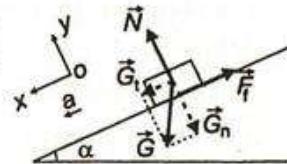
b. Dacă corpul este lăsat liber pe planul inclinat din condiția vectorială $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$, prin proiecția pe axele de coordonate,

obținem: pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f = m \cdot a$ și pe Oy :

$$N - mg \cos \alpha = 0. \quad \text{Pe baza legii frecării}$$

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma$$

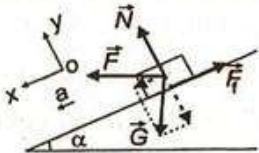
$$\Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \approx 4,87 \text{ m/s}^2$$



Din $\alpha = a_m = \Delta v / \Delta t = v / t \Rightarrow v = at = 9,74 \text{ m/s}$

c. Distanța parcursă de corp este $d = v_m t$, unde $v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 \Rightarrow d = 9,74 \text{ m}$

30.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox : $F \cos \alpha + mg \sin \alpha - F_f = ma$ și pe Oy : $N + F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0$.

Din legea frecării:

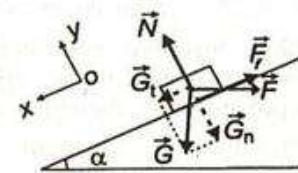
$$F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \alpha) \Rightarrow F \cos \alpha + mg \sin \alpha - \mu(mg \cos \alpha - F \sin \alpha) = ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m} + g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \approx 4,7 \text{ m/s}^2$$

b. Apăsarea corpului pe planul inclinat este $N = mg \cos \alpha - F \sin \alpha \approx 16,3 \text{ N}$

c. Pentru ca acest corp să nu mai apese pe planul inclinat, trebuie ca $N=0$
 $\Rightarrow F = mg \operatorname{ctg} \alpha \approx 34,6 \text{ N}$

31.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Oy : $N - F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha = 65 \text{ N}$.



b. Proiectând pe axa Ox :

$$mg \sin \alpha - F \cos \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg \sin \alpha - F \cos \alpha \approx 8,65 \text{ N}$$

c. Din legea frecării: $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{F_f}{N} = \frac{mg \sin \alpha - F \cos \alpha}{mg \cos \alpha + F \sin \alpha} \approx 0,133$

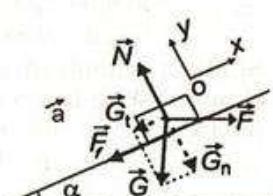
32.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \vec{a}. Deoarece F \cos \alpha \geq m g \sin \alpha, corpul va urca accelerat. Proiectăm relația pe axele de coordonate.$$

Pe Ox : $F \cos \alpha - F_f - mg \sin \alpha = ma$ și pe Oy :

$$N - F \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = F \sin \alpha + mg \cos \alpha. \text{ Din}$$

$$\text{legea frecării } F_f = \mu N \Rightarrow a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m} - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \approx 3,33 \text{ m/s}^2$$

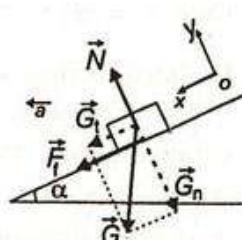


b. Deoarece corpul urcă uniform, $a=0 \Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \approx 20,76 \text{ N}$

c. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului.

Impunem condiția ca rezultanta forțelor să fie egală cu $m \cdot \vec{a}$, deoarece față de un observator aflat pe sol corpul se deplasează odată cu planul, adică cu accelerația orizontală \vec{a} a planului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii se obține: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe axa Ox : $mg \sin \alpha + F_f = ma \cos \alpha$

și pe Oy : $N = mg \cos \alpha + ma \sin \alpha \Rightarrow N - mg \cos \alpha = ma \sin \alpha$.



Cum $F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu(mg \cos \alpha + ma \sin \alpha) \Rightarrow$

$$mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha + \mu m a \sin \alpha = m a \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \approx 10,38 \text{ m/s}^2$$

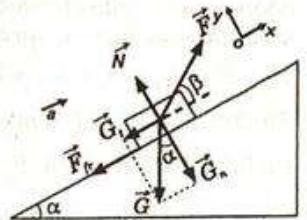
33.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, deoarece $\ddot{a} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

Pe Ox : $F \cos \beta - F_f - mg \sin \alpha = 0$ și pe Oy :

$N + F \sin \beta - mg \cos \alpha = 0$. Din legea forței de frecare:

$$F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) \Rightarrow F \cos \beta - \mu mg \cos \alpha + \mu F \sin \beta - mg \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \approx 8,935 \text{ N.}$$



b. Forța de apăsare normală este: $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta = \frac{mg \cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \approx 2,35 \text{ N}$

c. Dacă corpul se mișcă accelerat cu accelerația \ddot{a} , atunci relația vectorială devine: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\ddot{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

Obținem pe Ox : $F \cos \beta - F_f - mg \sin \alpha = ma$ și pe Oy : $N + F \sin \beta - mg \cos \alpha = 0$.

Din $F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) \Rightarrow$

$$F \cos \beta - \mu mg \cos \alpha + \mu F \sin \beta - mg \sin \alpha = ma \Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + ma}{\cos \beta + \mu \sin \beta} = 9,83 \text{ N}$$

Forța de apăsare normală este: $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta = 1,72 \text{ N}$

d. Pentru ca acest corp să nu mai apeze pe plan, trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă $\Rightarrow N = 0 \Rightarrow F = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \beta} \approx 12,2 \text{ N}$

34.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat.

Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axe de coordonate relațiile vectoriale. Pentru corpul m_1 vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1 \ddot{a}$. Pe Oy : $N_1 - G_1 = 0$ și

pe Ox : $F - F_{f1} - T = m_1 a$. Cum $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow F - \mu m_1 g - T = m_1 a$ (1)

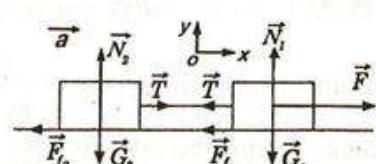
Pentru corpul m_2 : $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \ddot{a}$. Pe Ox : $T - F_{f2} = m_2 a$ și pe Oy :

$N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$. Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (2)

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow F - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b. } T = m_2(a + \mu g) = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 2 \text{ N}$$

c. Din $a = a_m = \Delta v / \Delta t = v / t \Rightarrow v = at = 8 \text{ m/s}$ și distanța parcursă de corp $d = v_m t$, unde $v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 = 16 \text{ m}$



35.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1 > F_2$, sistemul se mișcă spre dreapta. Pentru corpul m_1 : $\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1 \vec{a}$.

$$\text{Pe } Ox: F_1 - F_{f1} - T = m_1 a \text{ și pe } Oy: N_1 - G_1 = 0$$

$$\text{Pe baza legii frecării } F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow F_1 - \mu m_1 g - T = m_1 a \quad (1)$$

$$\text{Pentru corpul } m_2: \vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} + \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}. \text{ Pe } Ox: T - F_{f2} - F_2 = m_2 a \quad (1)$$

$$\text{Pe } Oy: N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g. F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g - F_2 = m_2 a \quad (2)$$

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow F_1 - F_2 - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} - \mu g = 0.5 \text{ m/s}^2$$

b. $T = m_2(a + \mu g) + F_2 = \frac{m_1 F_2 + m_2 F_1}{m_1 + m_2} = 50 \text{ N}$

c. Imediat cum F_1 incetează să acționeze sistemul se va mișca ca și înainte spre dreapta, până ce sistemul de corpură se va opri. Astfel, pentru corpul m_1 :

$$\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T}' = m_1 \vec{a}'.$$

$$\text{Pe } Ox: -F_{f1} - T' = m_1 a'$$

$$\text{și pe } Oy: N_1 - G_1 = 0. F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow -\mu m_1 g - T' = m_1 a' \quad (1)$$

$$\text{Pentru corpul } m_2: \vec{T}' + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} + \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}'. \text{ Pe } Ox: T' - F_{f2} - F_2 = m_2 a' \text{ și pe } Oy: N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g. \text{ Cum } F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow T' - \mu m_2 g - F_2 = m_2 a' \quad (2)$$

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow -F_2 - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a' \Rightarrow a' = -\frac{F_2}{m_1 + m_2} - \mu g \Rightarrow \text{tensiunea din fir}$$

$$\text{devine } T' = m_2(a' + \mu g) + F_2 = \frac{m_1 F_2 + m_2 F_1}{m_1 + m_2} = 8 \text{ N}$$

36.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1 \cos \alpha > F_2$, sistemul se mișcă spre dreapta.

$$\text{Pentru corpul } m_1: \vec{F}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} + \vec{N}_1 = m_1 \vec{a}.$$

$$\text{Proiectăm pe } Ox: F_1 \cos \alpha - F_{f1} - T = m_1 a \text{ și pe } Oy: N_1 + F_1 \sin \alpha - m_1 g = 0.$$

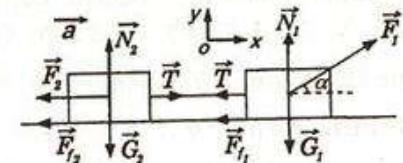
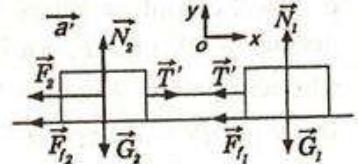
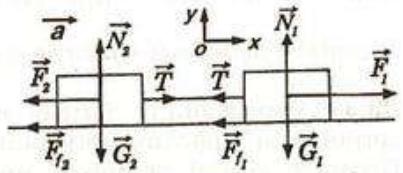
$$\text{Cum } F_{f1} = \mu N_1 = \mu(m_1 g - F_1 \sin \alpha) \Rightarrow F_1 \cos \alpha - \mu m_1 g + \mu F_1 \sin \alpha - T = m_1 a \quad (1)$$

$$\text{Pentru corpul } m_2: \vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} + \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}.$$

$$\text{Proiectăm pe } Ox: T - F_{f2} - F_2 = m_2 a \text{ și pe } Oy: N_2 - m_2 g = 0.$$

$$\text{Cum } F_{f2} = \mu N_2 \Rightarrow T - \mu m_2 g - F_2 = m_2 a \quad (2). \text{ Adunând relațiile (1) și (2) obținem:}$$

$$F_1(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g(m_1 + m_2) - F_2 = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F_1(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - F_2}{m_1 + m_2} - \mu g$$



$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ m/s}^2$$

b. $T = m_2(a + \mu g) + F_2 = 16,95 \text{ N}$

c. Deoarece sistemul se mișcă uniform spre dreapta, atunci $\alpha = 0$, astfel că forța $F_1 = \frac{F_2 + \mu g(m_1 + m_2)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \approx 23,78 \text{ N}$

37.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii și apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul m_1 : $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} + \vec{N}_1 = m_1 \vec{a}$.

Proiectăm pe Ox : $F \cos \alpha - F_{f1} - T = m_1 a$ și pe Oy : $N_1 + F \sin \alpha - m_1 g = 0$

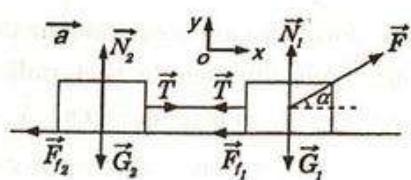
Pentru corpul m_2 : $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$. Proiectăm pe Ox : $T - F_{f2} = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g = 0$. Deoarece $N_1 = N_2 = 0,5 \Rightarrow m_1 g - F \sin \alpha = m_2 g \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

b. Deoarece $N_1 = N_2$, atunci $F_{f1} = F_{f2} = F = \mu m_2 g = 6 \text{ N}$

c. Din $F \cos \alpha - F_{f1} - T = m_1 a$ (1) și $T - F_{f2} = m_2 a$ (2) prin adunarea relațiilor (1) și

$$(2) \text{ obținem: } F \cos \alpha - 2F_f = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha - 2F_f}{m_1 + m_2} = 1,76 \text{ m/s}^2$$

d. Din $T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow T = m_2 a + F_f = 7,76 \text{ N}$



38.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii și apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul m_1 , vectorial $\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}$, iar scalar pe Ox $F_1 \cos \alpha_1 - T - F_{f1} = m_1 a$ și pe Oy :

$$N_1 + F_1 \sin \alpha_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - F_1 \sin \alpha_1$$

$$\Rightarrow F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 (m_1 g - F_1 \sin \alpha_1) \Rightarrow F_1 \cos \alpha_1 - T - \mu_1 (m_1 g - F_1 \sin \alpha_1) = m_1 a \quad (1)$$

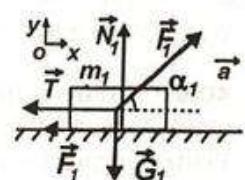
Pentru corpul m_2 , vectorial $\vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$, iar scalar pe Ox $T - F_2 \cos \alpha_2 - F_{f2} = m_2 a$ și pe Oy :

$$N_2 + F_2 \sin \alpha_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 (m_2 g - F_2 \sin \alpha_2) \Rightarrow$$

$$T - F_2 \cos \alpha_2 - \mu_2 (m_2 g - F_2 \sin \alpha_2) = m_2 a \quad (2). \text{ Din (1)+(2) } \Rightarrow$$

$$F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 - \mu_1 (m_1 g - F_1 \sin \alpha_1) - \mu_2 (m_2 g - F_2 \sin \alpha_2) = (m_1 + m_2) a \Rightarrow$$

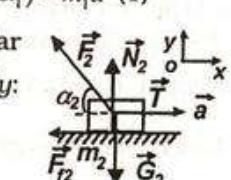
$$a = \frac{F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 - \mu_1 (m_1 g - F_1 \sin \alpha_1) - \mu_2 (m_2 g - F_2 \sin \alpha_2)}{m_1 + m_2} \approx 1,07 \text{ m/s}^2$$



b. Distanța parcursă de corp $d = v_m t$. Din $a = a_m = \Delta v / \Delta t = v / t \Rightarrow v = at \Rightarrow v_m = v / 2$, astfel că $d = vt / 2 = at^2 / 2 = 53,51 \text{ m}$

c. Deoarece sistemul se mișcă uniform în același sens ca la punctul **a**, atunci $F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2 - \mu_1 (m_1 g - F_1 \sin \alpha_1) - \mu_2 (m_2 g - F_2 \sin \alpha_2) = 0 \Rightarrow$

$$F_1 = \frac{F_2 (\cos \alpha_2 - \mu_2 \sin \alpha_2) + g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos \alpha_1 + \mu_1 \sin \alpha_1} \approx 31,35 \text{ N}$$



39.a. Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță orizontală. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii, ținând cont că $\ddot{a} = 0$. Pentru corpul m_2 : $\vec{f} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \ddot{a}$, unde \vec{f}

este forța cu care corpul de masă m_1 împinge corpul de masă m_2 . Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate, pe Ox : $f - F_{f2} = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow$

$$F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow f - \mu m_2 g = m_2 a \quad (1)$$

Pentru corpul m_1 : $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 - \vec{f} = m_1 \ddot{a}$, unde $-\vec{f}$ este

forța de reacție cu care corpul de masă m_2 împinge corpul de masă m_1 , conform principiului acțiunii și reacțiunii. Prin proiecție pe axe de coordonate obținem pe Ox : $F \cos \alpha - F_{f1} - f = m_1 a$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g - F \sin \alpha = 0 \Rightarrow$

$$F_{f1} = \mu N_1 = \mu(F \sin \alpha + m_1 g) \Rightarrow F \cos \alpha - \mu F \sin \alpha - \mu m_1 g - f = m_1 a \quad (2)$$

Din (1)+(2) $\Rightarrow F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu g(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2)a \Rightarrow$

$$a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m_1 + m_2} - \mu g \approx 5,65 \text{ m/s}^2$$

b. Forța dintre cele două coruri este $f = m_2(\mu g + a) \approx 1,524 \text{ N}$.

c. Forța de apăsare normală exercitată de corpul 1, este $N_1 = F \sin \alpha + m_1 g = 5,5 \text{ N}$.

40.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul m : $\vec{G} + \vec{T} = m \ddot{a}$ și pe axa Ox obținem: $mg - T = ma \quad (1)$

Pentru corpul M : $\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G}' = M \ddot{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T - F_f = Ma$ și pe Oy : $N - Mg = 0$. Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow T - \mu Mg = Ma \quad (2)$

$$\text{Din (1)+(2)} g(m - \mu M) = (m + M)a \Rightarrow a = \frac{g(m - \mu M)}{m + M}$$

$$a = 2,8 \text{ m/s}^2$$

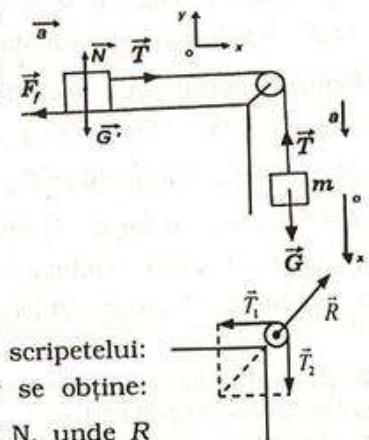
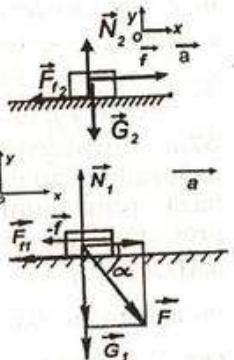
$$\text{b. } T = m(g - a) = \frac{mM(1 + \mu)g}{M + m} = 14,4 \text{ N}$$

c. Impunem condiția de echilibru scripetelui: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Din geometrie scalar se obține:

$$R^2 = T_1^2 + T_2^2. \text{ Cum } T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2} = 20,3 \text{ N, unde } R \text{ este reacție în axul scripetelui.}$$

41.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii.

Studiem mișcarea corpului vertical: $\vec{G} + \vec{T} = m \ddot{a}$ și scalar Ox : $mg - T = ma \quad (1)$



Studiem mișcarea corpului aflat pe planul orizontal: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox : $T - F_f = ma$ și pe Oy : $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow T - \mu mg = ma$ (2)

Din(1)+(2) $\Rightarrow mg - \mu mg = 2ma \Rightarrow \mu = (g - 2a)/g = 0,6$.

b. Dacă sub acțiunea forței F , corporile se mișcă în sens contrar cu aceeași accelerație. Pentru corpul vertical vectorial: $\vec{G} + \vec{T} = m\vec{a}$, iar scalar prin proiecție pe axa verticală obținem: $T - mg = ma$ (1).

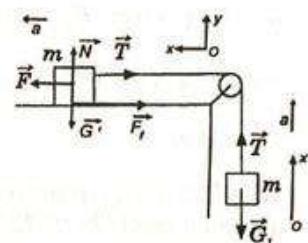
Pentru corpul care se deplasează pe orizontală: $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $F - F_f - T = ma$ și pe Oy :

$N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F - \mu mg - T = ma$ (2)

Din(1)+(2) obținem: $F - \mu mg - mg = 2ma \Rightarrow$

$F = m(2a + \mu g + g) = 2mg = 40\text{ N}$

c. Tensiunea în fir este $T = m(a + g) = 24\text{ N}$



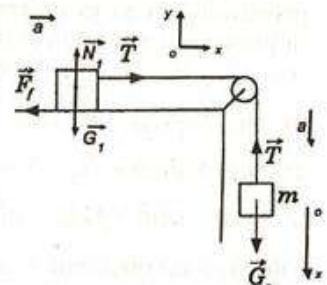
42.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Studiem mișcarea corpului cu masa m_2 . Relația vectorială este: $\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}_1$ și scalar prin proiecție pe axa de coordonate Ox : $m_2g - T = m_2a_1$ (1)

Studiem mișcarea corpului cu masa m_1 . Relația vectorială este: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T - F_{f1} = m_1a_1$

și pe Oy : $N_1 - m_1g = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1g \Rightarrow T - \mu m_1g = m_1a_1$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow m_2g - \mu m_1g = (m_1 + m_2)a_1 \Rightarrow g(m_2 - \mu m_1) = (m_1 + m_2)a_1$.

Cum $m_2 = 4m_1 \Rightarrow a_1 = g(4 - \mu)/5$ (3). Schimbând corporile între ele se obține analog: $g(m_1 - \mu m_2) = (m_1 + m_2)a_2 \Rightarrow a_2 = g(1 - 4\mu)/5$ (4)



Împărțind relația (3) la (4) se obține: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{4 - \mu}{1 - 4\mu} = 6,5 \Rightarrow a_1 = 6,5a_2$

b. Pentru ca sistemul de coruri să se deplaseze cu viteză constantă $a_1 = 0 \Rightarrow m_{tot} = m_2/\mu = 40\text{ kg} \Rightarrow m_{tot} = m_{tot} - m_1 = m_2/\mu - m_1 = 39\text{ kg}$

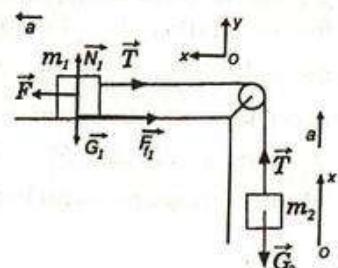
c. Pentru corpul m_2 , $\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$ și scalar $T - m_2g = m_2a$ (1), iar pentru corpul m_1 , $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

Pe Ox $F - T - F_{f1} = m_1a$ și pe Oy $N_1 - m_1g = 0 \Rightarrow$

$F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1g \Rightarrow F - T - \mu m_1g = m_1a$ (2).

Adunăm (1)+(2): $F - m_2g - \mu m_1g = (m_1 + m_2)a$

$F = (m_2 + \mu m_1)g + (m_1 + m_2)a = 46\text{ N}$



d. Studiem mișcarea corpului cu masa m_2 . $\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a}$ și scalar prin proiecție pe axa de coordonate Ox : $T - m_2 g = m_2 a$ (1)

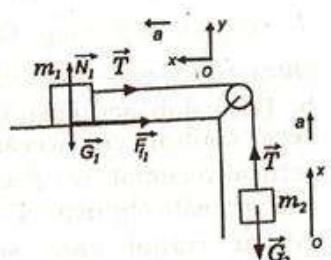
Studiem mișcarea corpului cu masa m_1 :

$$\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}. Pe Ox - T - F_f = m_1 a și Oy$$

$$N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_f = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow -T - \mu m_1 g = m_1 a$$

$$-m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = -\frac{g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$a = -8.2 \text{ m/s}^2$$

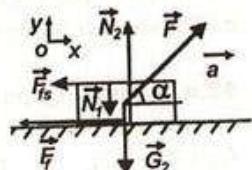


43.a. Distanța parcursă de corp $d = v_{mt}$. Din $a = a_m = \Delta v / \Delta t = v / t \Rightarrow v = at \Rightarrow v_m = v / 2$, astfel că $d = vt / 2 = at^2 / 2 \Rightarrow a = 2d / t^2 = 2 \text{ m/s}^2$

b. Deoarece coletul se află pe sanie se deplasează împreună cu sania, el va avea aceeași accelerare. Din reprezentarea forțelor $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{fs} = m \vec{a}$, scalar forța de frecare statică dintre colet și sanie este $F_{fs} = ma = 10 \text{ N}$ (1)

c. Reprezentăm forțele saniei. Coletul acționează asupra saniei pe verticală cu forță de apăsare $N_1 = mg$ în jos și pe orizontală cu forță de frecare F_{fs} în sens contrar sensului de deplasare al saniei. Vectorial obținem:

$$\vec{F} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f + \vec{F}_{fs} + \vec{N}_1 = M \vec{a} \text{ și scalar:}$$



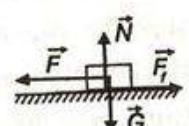
$$Pe Ox: F \cos \alpha - F_f - F_{fs} = Ma \Rightarrow F \cos \alpha - F_f - ma = Ma$$

$$Pe Oy: F \sin \alpha + N_2 - N_1 - Mg = 0 \Rightarrow N_2 = (m + M)g - F \sin \alpha \text{ și din } F_f = \mu N_2 \Rightarrow$$

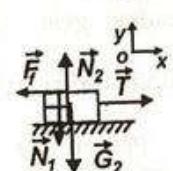
$$F \cos \alpha - \mu(m + M)g + \mu F \sin \alpha - ma = Ma \quad (2)$$

$$Din (1) și (2) obținem: F = \frac{(m + M)(a + \mu g)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \approx 57,68 \text{ N}$$

44.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului 1 și aplicăm principiul al doilea al dinamicii, astfel că $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_f = 0$. Scalar obținem: $F = F_f = \mu N = \mu m_1 g = 75 \text{ N}$



b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului 2. Înănd cont că asupra corpului 2 forța de frecare exercitată de primul corp este îndreptată spre stânga (conform principiului acțiunii și reacțiunii) și presupunând că firul nu se rupe, atunci $T = F_f = \mu m_2 g = 75 \text{ N}$



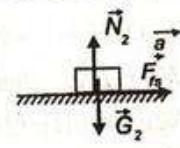
c. Firul rezistă la solicitare deoarece $T < T_{max}$

45.a. Studiem corpul cu masa m_2 . Dacă corpul cu masă m_2 nu alunecă pe scăndură, forța de frecare ce apare la contactul corp-scăndură este o forță de frecare statică F_{fs} . Conform principiului al doilea al dinamicii

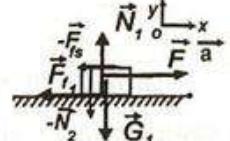
forța de frecare statică F_{fs} imprimă corpului cu masa m_2 o accelerare identică cu cea a scăndurii și în același sens. Vectorial

$$F_{fs} = m_2 \vec{a} \Rightarrow \text{scalar } F_{fs} = m_2 a \quad (1)$$

Studiem mișcarea scăndurii. Vectorial:



$\vec{F} + \vec{N}_1 - \vec{F}_{f_2} - \vec{N}_2 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = m_1 \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $F - F_{f_1} - F_{f_2} = m_1 a$ și pe Oy : $N_1 - N_2 - G_1 = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g + N_2 = (m_1 + m_2)g$, deoarece $N_2 = G_1$.



Din $F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 (m_1 + m_2)g \Rightarrow F - F_{f_1} - \mu_1 (m_1 + m_2)g = m_1 a$ (2).

Din (1)+(2) obținem $F - m_2 a - \mu_1 (m_1 + m_2)g = m_2 a \Rightarrow$

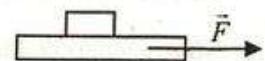
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu_1 g \Rightarrow F_{f_2} = m_2 \left(\frac{F}{m_1 + m_2} - \mu_1 g \right). \text{ Condiția de nealunecare a corpului}$$

m_2 pe scândură este ca forța de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare este $F_{f_2} \leq F_{f_s} \Rightarrow F_{f_2} \leq \mu_2 m_2 g \Rightarrow$

$$m_2 \left(\frac{F}{m_1 + m_2} - \mu_1 g \right) \leq \mu_2 m_2 g \Rightarrow F \leq (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g \Rightarrow F \leq 9 \text{ N.}$$

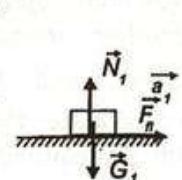
Dacă $F > 9$ N, corpul m_2 începe să alunece pe scândură.

46.a. Inițial forța F este mică și prin urmare corpurile se mișcă împreună formând un corp cu masă $m_t = m_1 + m_2$. Cum

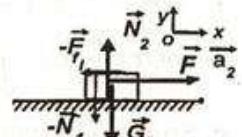


$$F = c \cdot t = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{c \cdot t}{m_1 + m_2} = t, \text{ adică accelerarea sistemului de coruri crește direct proporțional cu timpul.}$$

b. La un anumit moment de timp t_0 , corpul începe să lunece pe scândură, iar forța de frecare la alunecarea este cea care va imprima corpului o accelerare. Deoarece inițial corpul se va



mișca sub acțiunea forței \vec{F} într-un sens, forța de frecare la alunecare va acționa în același sens cu forța \vec{F} . Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului m_1 . Conform principiului al doilea prin proiecția pe axa Ox , scalar obținem: $F_{f_1} = m_1 a_1$. Cum $F_{f_1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow a_1 = \mu g = 2 \text{ m/s}^2$ și din



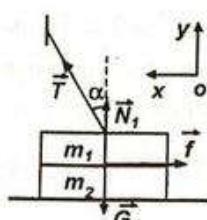
momentul t_0 când corpul alunecă pe scândură, accelerarea acestuia ramâne constantă. Reprezentăm forțele care acționează asupra scândurii:

$$F - F_{f_2} = m_2 a_2 \Rightarrow c \cdot t - \mu m_1 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{c \cdot t - \mu m_1 g}{m_2} = \frac{5t - 2}{4}, \text{ deci accelerarea scândurii continuu să crească liniar cu trecerea timpului.}$$

c. Momentul de timp t_0 la care coruri încep să se miște independent se poate afla din condiția ca $a_1 = a_2 \Rightarrow \mu g = \frac{ct_0 - \mu m_1 g}{m_2} \Rightarrow t_0 = \frac{\mu g(m_1 + m_2)}{c} = 2 \text{ s}$

47.a. Reprezentăm forțele ce acționează asupra cărămidelor superioare și impunem condiția ca aceasta să se afle în repaus: Vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{f} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T \sin \alpha - f = 0$ și pe Oy : $T \cos \alpha + N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - T \cos \alpha$.

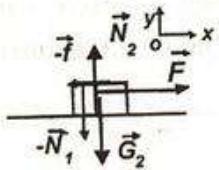
$$f = \mu N_1 = \mu(m_1 g - T \cos \alpha) \Rightarrow T \sin \alpha - \mu(m_1 g - T \cos \alpha) = 0$$



$$\Rightarrow T = \frac{\mu m_1 g}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \approx 2,35 \text{ N}$$

b. Obținem $f = T \sin \alpha = \frac{\mu m_1 g \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \approx 1,67 \text{ N}$

Reprezentăm forțele care acționează asupra cărămidei inferioare și impunem condiția ca aceasta să iasă uniform de sub cea superioară, adică rezultanta forțelor să fie nulă. Vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_2 - \vec{f} - \vec{N}_1 + \vec{G}_2 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.



Pe Ox: $F - f = 0 \Rightarrow F = f = \frac{\mu m_1 g \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \approx 1,67 \text{ N}$.

c. Pe Oy: $N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + m_2 g$.

Cum $N_1 = \frac{f}{\mu} = \frac{m_1 g \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \Rightarrow N_2 = \frac{m_1 g \sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} + m_2 g \approx 28,35 \text{ N}$, unde N_2 reprezintă forța cu care cărămidă inferioară apasă asupra planului

48.a. Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus în raport cu platforma, ele se deplasează față de un observator de pe sol cu accelerația platformei \ddot{a} .

Studiem mișcarea corpului de masă m_2 . Vectorial:

$\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2 \ddot{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox: $T \sin \alpha = m_2 a$ (1) și pe Oy: $T \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow T \cos \alpha = m_2 g$ (2). Ridicăm la patrat cele două ecuații și apoi le adunăm. Obținem

$$T^2 = m_2^2 (a^2 + g^2) \Rightarrow T = m_2 \sqrt{a^2 + g^2} \approx 1,077 \text{ N}$$

b. $\cos \alpha = \frac{m_2 g}{T} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \approx 0,928$

c. Studiem mișcarea corpului cu masa m_1 . Vectorial: $\vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \ddot{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox: $F_{f1} - T = m_1 a$ și pe

Oy: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g - m_2 \sqrt{a^2 + g^2} = m_1 a \Rightarrow$

$$\mu = \frac{m_1 a + m_2 \sqrt{a^2 + g^2}}{m_1 g} \approx 0,615$$

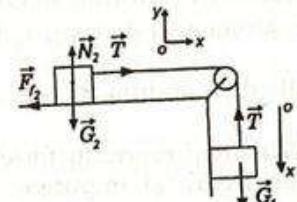
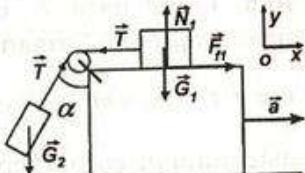
49.a. Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus pe căruciorul care se mișcă rectiliniu și uniform, înseamnă că și ele se vor mișca rectiliniu și uniform față de un observator aflat pe sol. Pentru corpul m_2 :

$$\vec{T} + \vec{G}_2 = 0 \Rightarrow T = m_2 g = 25 \text{ N}$$

b. Pentru corpul m_1 : $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = 0$

Pe Ox: $T - F_f = 0 \Rightarrow T = F_f \Rightarrow F_f = m_2 g$

și pe Oy: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_f = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g = m_2 g \Rightarrow \mu = m_2 / m_1 = 0,25$



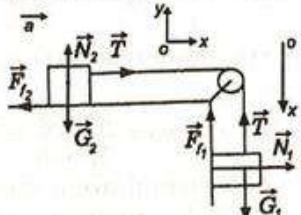
c. Schimbăm locul corpurilor pe cărucior și imprimăm căruciorului o mișcare accelerată, astfel încât sistemul de coruri să se afle în repaus față de cărucior și să se deplaseze față de un observator de pe sol cu accelerarea căruciorului \ddot{a} . Pentru corpul de masă m_2 : $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f_2} + \vec{G}_2 = m_2 \ddot{a}$. Pe Ox : $T - F_{f_2} = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f_2} = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (1)

Pentru m_1 vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = m_1 \ddot{a}$ și scalar pe Ox : $N_1 = m_1 a$ și pe Oy : $T + F_{f_1} - m_1 g = 0$.

Cum $F_{f_1} = \mu N_1 = \mu m_1 a \Rightarrow T + \mu m_1 g - m_1 g = 0$ (2)

Introducem relația (2) în (1) și obținem:

$$T = m_1 g - \mu m_1 a \Rightarrow m_1 g - \mu m_1 a - \mu m_2 g = m_2 a \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_2 + \mu m_1} = \frac{g(m_1^2 - m_2^2)}{2m_1 m_2} \Rightarrow a = 18,75 \text{ m/s}^2$$

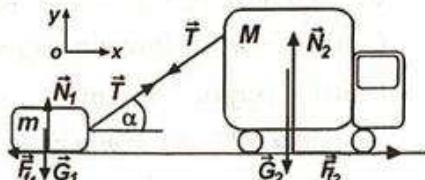


50.a. Studiem mișcarea lăzii. Deoarece lada se mișcă rectiliniu și uniform, atunci vectorial $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = 0$. Scalar pe Ox :

$T \cos \alpha - F_{f_1} = 0$ și pe Oy : $T \sin \alpha + N_1 - mg = 0$

$F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 (mg - T \sin \alpha) \Rightarrow$

$$T = \frac{\mu_1 mg}{\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha} \approx 671,14 \text{ N}$$



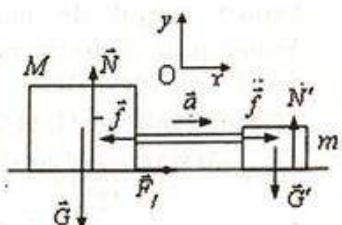
b. Studiem mișcarea mașinii. Astfel $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f_2} + \vec{G}_2 = 0$, forța de frecare se pune în sensul de mers pentru că Pământul împinge mașina înainte. Pe Ox :

$$F_{f_2} - T \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_{f_2} = \frac{\mu_1 mg \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha} \approx 335,8 \text{ N} \text{ și pe } Oy: N_2 - T \sin \alpha - Mg = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = g \frac{M \cos \alpha + \mu_1 (M+m) \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha} \Rightarrow \mu_2 = \frac{F_{f_2}}{N_2} = \frac{\mu_1 m \cos \alpha}{M \cos \alpha + \mu_1 (M+m) \sin \alpha} \approx 0,021$$

c. Dacă se consideră că toate roțile sunt motoare și toate apasă la fel asupra șoselei, atunci forța de frecare care se exercită asupra fiecărei roți este $F_f = F_{f2}/4 \approx 83,9 \text{ N}$

51.a. Deoarece frâna blochează numai roțile autocamionului, numai asupra acestuia se exercită o forță de frecare. Bara rigidă împinge remorca cu forță \vec{f} astfel ca și aceasta să frâneze cu accelerarea autocamionului. Studiem mișcarea remorci: $\vec{N}' + \vec{G}' + \vec{f} = m \ddot{a}$, iar prin proiecția pe axa Ox : $f = m \cdot a$ (1).



Studiem mișcarea autocamionului. Remorca împinge prin intermediul barei rigide autocamionul cu o forță $(-\vec{f})$ pe aceeași direcție, dar în sens contrar, conform principiului acțiunii și reacțiunii astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f - \vec{f} = M \ddot{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox : $F_f - f = Ma$ și pe Oy : $N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg$, iar $F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow \mu Mg - f = Ma$ (2). Adunăm cele două relații (1) și (2) $\Rightarrow \mu Mg - ma = Ma \Rightarrow a = \frac{\mu Mg}{M + m} = 6,4 \text{ m/s}^2$

b. $f = ma = \frac{\mu m Mg}{M + m} = 6,4 \text{ kN}$

c. Sistemul are o mișcare rectilinie uniform încetinită cu $a = -6,4 \text{ m/s}^2$, astfel că $s_{op} = v_m t_{top}$, unde v_m reprezintă viteza medie și t_{top} timpul până la oprire. Cum $a = a_m = \Delta v / \Delta t = (v - v_0) / t$, în momentul opririi $v = 0 \Rightarrow t_{top} = -v_0 / a$. Deoarece viteza depinde liniar de timp $v_m = v_0 / 2 \Rightarrow s_{op} = -v_0^2 / 2a = 20 \text{ m}$

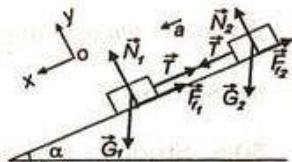
52 a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă m_1 : $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox : $m_1 g \sin \alpha - T - F_{f1} = m_1 a$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$.

Cum $F_{f1} = \mu_1 N_1$, obținem: $m_1 g \sin \alpha - T - \mu_1 m_1 g \cos \alpha = m_1 a$ (1)

Pentru corpul de masă m_2 : $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$. Proiectăm pe Ox : $m_2 g \sin \alpha + T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow m_2 g \sin \alpha + T - \mu_2 m_2 g \cos \alpha = m_2 a$ (2)

Adunăm (1) cu (2): $a = g \sin \alpha - g \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha = 3,5 \text{ m/s}^2$



b. $T = m_1(g \sin \alpha - \mu_1 g \cos \alpha - a) = -4 \text{ N} \Rightarrow$ sensul tensiunilor în tijă sunt invers

c. În absența frecării între corperi și suprafața planului înclinat $\mu_1 = 0$ și $\mu_2 = 0$, astfel că sistemul de corperi va cobori accelerat cu acceleerația $a = g \sin \alpha \Rightarrow$ tensiunea din tijă este $T = 0$.

53.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă M : $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relația

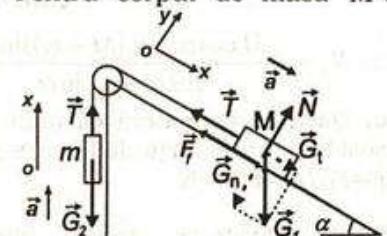
vectorială pe Ox : $Mg \sin \alpha - T - F_f = Ma$ și pe

Oy : $N - Mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg \cos \alpha$

$\Rightarrow Mg \sin \alpha - T - \mu Mg \cos \alpha = Ma$ (1)

Pentru corpul de masă m : $\vec{G}_2 + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$.

Scalar prin proiecția relației vectoriale pe axa Ox : $T - mg = ma$ (2)



Adunând relațile (1) și (2) $\Rightarrow g(M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha - m) = (m + M)a \Rightarrow$

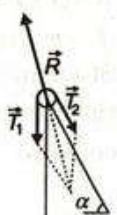
$$a = g \frac{(M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha - m)}{M + m} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

b. $T = m(a + g) = \frac{mMg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha + 1)}{M + m} = 10,5 \text{ N}$

c. Impunem condiția de echilibru scriptelui: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow$

$\vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Pe baza teoremei Pitagora generalizată obținem:

$$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90^\circ - \alpha)$$



Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2 \sin \alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1+\sin \alpha)} \approx 18,165 \text{ N}$

54.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă m : $\vec{G}_2 + \vec{T} = m\vec{a}$ și scalar prin proiecția pe axa Ox : $mg - T = ma$ (1)

Pentru corpul de masă M , relația vectorială este:

$\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe Ox : $T - F_f - Mg \sin \alpha = Ma$ și pe Oy : $N - Mg \cos \alpha = 0$.

$$F_f = \mu N = \mu Mg \cos \alpha \Rightarrow T - \mu Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha = Ma$$

(2). Prin adunarea relațiilor (1) cu (2) \Rightarrow

$$g(m - \mu M \cos \alpha - M \sin \alpha) = (m + M)a \Rightarrow$$

$$a = \frac{g(m - \mu M \cos \alpha - M \sin \alpha)}{m + M} \approx 6,725 \text{ m/s}^2$$

b. $T = m(g - a) = \frac{mMg(1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m + M} \approx 16,375 \text{ N}$.

c. Distanța parcursă de corp $d = v_{mt}$. Din $\alpha = a_m = \Delta v / \Delta t = v/t \Rightarrow v = at \Rightarrow v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2 = 13,45 \text{ m}$

55.a. Când pe taler se aşază corpul cu masa m_1 corpul cu masa m are tendință să coboare. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul m_1 : $T_1 = m_1 g$ și pentru corpul m : $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar prin proiecția pe axa Ox : $m g \sin \alpha - T_1 - F_f = 0$. Cum $N = mg \cos \alpha$ și $F_f = \mu N \Rightarrow m_1 = m(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ (1)

Când pe taler se aşază corpul cu masa m_2 corpul cu masa m are tendință să urce. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul m_2 : $T_2 = m_2 g$ și pentru corpul m : $\vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$ și prin proiecția pe axa Ox : $T_2 - m g \sin \alpha - F_f = 0$. $N = mg \cos \alpha$ și $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 = m(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ (2).

Din (1)+(2) obținem: $m = \frac{m_1 + m_2}{2 \sin \alpha} = 25 \text{ kg}$, cu

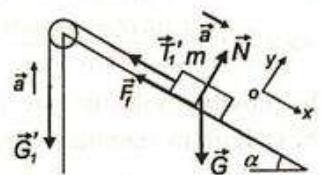
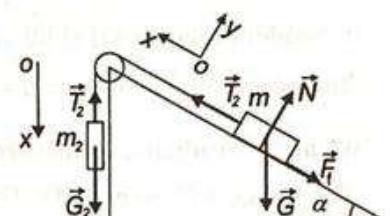
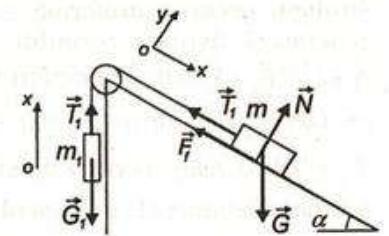
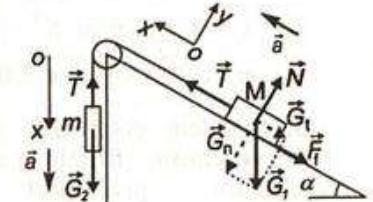
$$\sin \alpha = \frac{h}{\ell} = 0,6.$$

b. Din (2)-(1) obținem: $\mu = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \operatorname{tg} \alpha = 0,25$, deoarece $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8$

c. Deoarece se trage cu o forță egală cu jumătate din greutatea corpului cu masa m_1 atunci $T'_1 = m_1 g/2$. Corpul cu masă m coboară accelerat cu accelerăția a , astfel că $\vec{T}'_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f - T'_1 = ma$.

Cum $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, obținem

$$a = g[\sin \alpha - \mu \cos \alpha - m_1/(2m)] = 2 \text{ m/s}^2$$



56.a. Calculăm reacția unei în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos(90^\circ - \alpha)$.
 $T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2 \sin \alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1 + \sin \alpha)} \Rightarrow R = m_1 g \sqrt{2(1 + \sin \alpha)} \approx 6,06 \text{ N}$

b. Studiem coborârea uniformă a corpului aflat pe plan. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{T}_1 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe Ox : $m g \sin \alpha - T_1 - F_f = 0$ și pe Oy : $N - m g \cos \alpha = 0$.

Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu m g \cos \alpha \Rightarrow m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha = m_1 g$ (1).

Studiem urcarea uniformă a corpului aflat pe plan. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{T}_2 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe Ox : $T_2 - m g \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy : $N - m g \cos \alpha = 0$. Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu m g \cos \alpha \Rightarrow m g \sin \alpha + \mu m g \cos \alpha = m_2 g$ (2)

Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem:

$$2m g \sin \alpha = (m_1 + m_2)g \Rightarrow m = \frac{m_1 + m_2}{2 \sin \alpha} = 1 \text{ kg}$$

c. Scădem relațiile (1) și (2) și obținem:

$$2\mu m g \cos \alpha = (m_2 - m_1)g \Rightarrow \mu = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \operatorname{tg} \alpha \approx 0,173$$

57.a. Studiem mișcarea corpului m_1 :

$\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}$. Pe Ox : $T - F_{f1} = m_1 a$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1$. Obținem:

$T - \mu m_1 g = m_1 a$ (1). Studiem mișcarea corpului m_2 : $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$.

Pe Ox : $m_2 g \sin \alpha - F_{f2} - T = m_2 a$ și pe Oy :

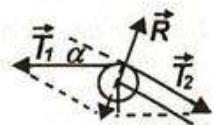
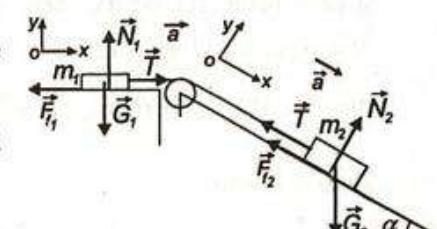
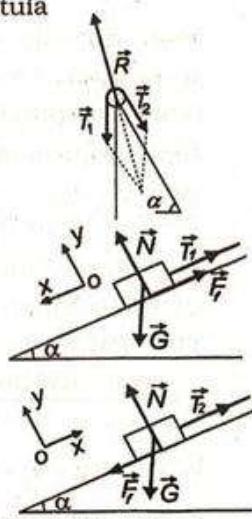
$$N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu N_2 \Rightarrow m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha - T = m_2 a$$
 (2).

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow g(m_2 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha - \mu m_1) = (m_1 + m_2)a$$

$$\Rightarrow a = g \frac{m_2 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha - \mu m_1}{m_1 + m_2} = 0,62 \text{ m/s}^2$$

b. Tensiunea din fir este $T = m_1(a + \mu g) = 0,262 \text{ N}$.

c. Calculăm reacția unei în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow$



$$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 - 2T^2 \sin \alpha \Rightarrow R = T \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \approx 0,262 \text{ N}$$

d. Deoarece sistemul de coruri se mișcă uniform, atunci $\alpha=0$, astfel că $m_1 = m_2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)/\mu = 654 \text{ g}$

58.a. Studiem mișcarea corpului m_1 :

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}.$$

$$\text{Pe } Ox: T - F_{f1} - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \quad \text{și pe } Oy:$$

$$N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1.$$

$$\text{Obținem: } F - T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \quad (1).$$

$$\text{Studiem mișcarea corpului } m_2: \vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}.$$

Pe Ox : $T - F_{f2} = m_2 a \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a \quad (2)$. Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem: $F - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - \mu m_2 g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$.

b. Tensiunea din fir este $T = m_2(a + \mu g) = 8 \text{ N}$

c. Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia

$$\text{condiția de echilibru: } \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow$$

$$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$T_1 = T_2 = T = m_1 g \Rightarrow R^2 = 2T^2 - 2T^2 \sin \alpha \Rightarrow R = T \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \approx 7,155 \text{ N}$$

$$\text{d. Din } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v = at, \text{ deoarece } v_0 = 0 \text{ și } t_0 = 0.$$

$$\text{Cum } d = v_m t = \frac{v}{2} t = \frac{at^2}{2} \text{ obținem: } t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = 1,2 \text{ s}$$

$$\text{59.a. Studiem mișcarea corpului } m_1: \vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}.$$

$$\text{Pe } Ox: F - T - F_{f1} = m_1 a \text{ și pe } Oy: N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow$$

$$F_{f1} = \mu N_1 \Rightarrow F - T - \mu m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

Studiem mișcarea corpului m_2 :

$$\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}.$$

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Obținem pe Ox :

$$T - F_{f2} - m_2 g \sin \alpha = m_2 a \text{ și pe } Oy: N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Cum } F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \cos \alpha \Rightarrow T - \mu m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha = m_2 a \quad (2)$$

$$\text{Din (1)+(2): } F - \mu m_1 g - m_2 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a \approx 0,71 \text{ m/s}^2$$

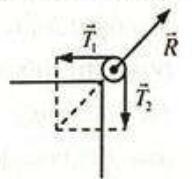
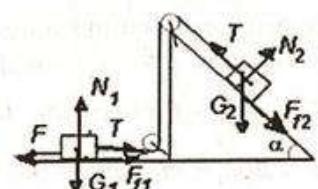
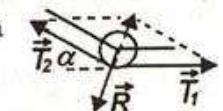
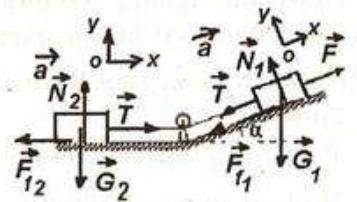
$$\text{b. } T = F - m_1(\mu g + a) \approx 4,58 \text{ N}$$

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra scripetelui S_1 și impunem condiția de echilibru acestuia. $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Din

geometrie se obține scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2$. Cum

$$T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T \sqrt{2} \approx 6,46 \text{ N, unde } R \text{ este reacțiunea în axul scripetelui.}$$

$$\text{d. Deoarece sistemul se deplasează uniform în același sens ca la punctul a., atunci } \alpha = 0 \Rightarrow F = \mu m_1 g + m_2 g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \approx 8,23 \text{ N}$$



60.a. Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Studiem mișcarea corpului m_2 .

$$\text{Vectorial: } \vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}.$$

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox : $m_2 g \sin \beta - T - F_{f_2} = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g \cos \beta = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g \cos \beta$. Cum

$$F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos \beta \Rightarrow m_2 g \sin \beta - T - \mu_2 m_2 g \cos \beta = m_2 a \quad (1)$$

Studiem mișcarea corpului m_1 . Vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}$. Obținem:

$$\text{Pe } Ox: T - F_{f_1} - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \text{ și pe } Oy: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Cum } F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha \Rightarrow T - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \quad (2)$$

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow m_2 g (\sin \beta - \mu_2 \cos \beta) - m_1 g (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = g \frac{m_2 (\sin \beta - \mu_2 \cos \beta) - m_1 (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2} \approx 1,72 \text{ m/s}^2$$

b. $T = m_1 (a + g \sin \alpha + \mu_1 g \cos \alpha) \approx 10,87 \text{ N}$

c. Studiem echilibrul scripetelui. $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Deoarece \vec{T}_1 și \vec{T}_2 sunt perpendiculare, din geometrie se obține scalar:

$$R^2 = T_1^2 + T_2^2 = 2T^2 \Rightarrow R = T\sqrt{2} \approx 15,32 \text{ N}$$

61.a. Corpurile se deplasează spre dreapta uniform accelerat. Studiem mișcarea corpului cu masa m_3 :

$$\vec{f} + \vec{G}_3 + \vec{N}_3 + \vec{F}_{f3} = m_3 \vec{a}. \text{ Scalar } f - \mu m_3 g = m_3 a \quad (1).$$

Pentru corpul cu masa m_1 : $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1 \vec{a}$, iar scalar:

$$F - T - \mu m_1 g = m_1 a \quad (2)$$

Pentru corpul cu masa m_2 :

$$\vec{T} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} + \vec{f} = m_2 \vec{a}, \text{ scalar pe axa } Ox:$$

$$T - \mu m_2 g - f = m_2 a \quad (3). \text{ Din (1)+(2)+(3) obținem:}$$

$$F - \mu(m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2 + m_3) a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu g = 1 \text{ m/s}^2$$

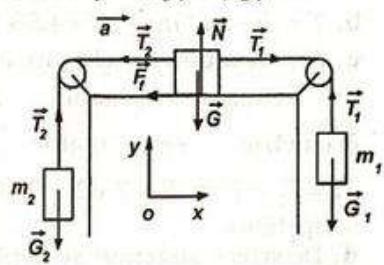
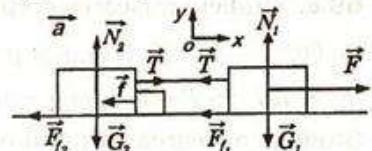
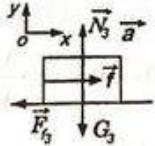
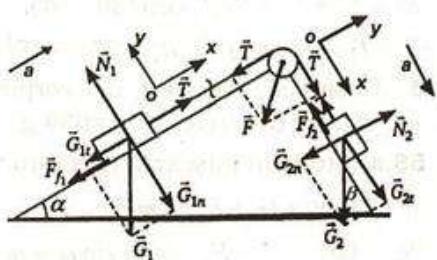
b. Din (2) obținem $T = F - m_1(a + \mu g) = \frac{F(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} = 10,5 \text{ N}$

c. Forța cu care corpul m_2 împinge corpul cu masa m_3 este $f = m_3(a + \mu g) = 7 \text{ N}$

62.a. Studiem mișcarea corpului cu masa m_1 :

$$\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}. \text{ Scalar obținem prin proiecția pe axa de coordonate: } m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

Studiem mișcarea corpului cu masă m_2 . Vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}$ și scalar obținem prin proiecția pe axa de coordonate: $T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (2)$. Studiem mișcarea corpului cu masă M :



$\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox: $T_1 - T_2 - F_f = Ma$ și pe Oy: $N - Mg = 0 \Rightarrow$

$F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu Mg = Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$$g(m_1 - \mu M - m_2) = (m_1 + m_2 + M)a \Rightarrow 3 \text{ m/s}^2$$

b. $T_1 = m_1(g - a) = 35 \text{ N}$ și $T_2 = m_2(a + g) = 13 \text{ N}$

c. Deoarece sistemul se mișcă uniform în același sens ca la punctul a., atunci $a = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 + \mu M = 2 \text{ kg}$

63.a. Pentru corpul cu masa m_1 : $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}$, iar scalar obținem: $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)

Pentru corpul cu masa m_2 : $\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}$ și scalar obținem: $T_2 - m_2 g = m_2 a$ (2). Pentru corpul m_2 cu masa M : $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Pe Ox: $T_1 - T_2 - F_f = Ma$ și pe Oy: $N - Mg = 0 \Rightarrow$

$F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu Mg = Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$$g(m_1 - \mu M - m_2) = (m_1 + m_2 + M)a \Rightarrow m_1 = \frac{(m_2 + M)a + (\mu M + m_2)g}{g - a} = 5,25 \text{ kg}$$

b. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1(g - a)}{m_2(g + a)} = 1,75$

c. $g(m_1 - \mu M - m_2) = (m_1 + m_2 + M)a_1 \Rightarrow \mu = \frac{g(m_1 - m_2) - (m_1 + m_2 + M)a_1}{Mg} = 0,2$

64.a. Dacă elevul pune un cubuleț pe taler corpul m_1 începe să coboare uniform, atunci pentru corpul cu masă m_1 : $m_1 g = T_1$, iar pentru corpul cu masă m : $mg = T_2$. Impunând condiția de mișcare uniformă corpului cu masă m_2 : vectorial $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = 0$, iar scalar

$$T_1 - T_2 - \mu m_2 g = 0 \Rightarrow m_1 - m - \mu m_2 = 0 \quad (1)$$

Dacă elevul pune cinci cubulete pe taler corpul m_1 începe să urce uniform, astfel că pentru corpul cu masă m_1 : $m_1 g = T_1$, iar pentru corpul cu masă $5m$: $5mg = T_2$.

Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_2 :

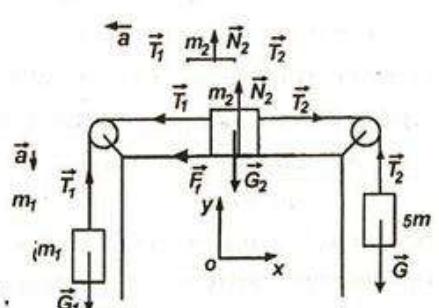
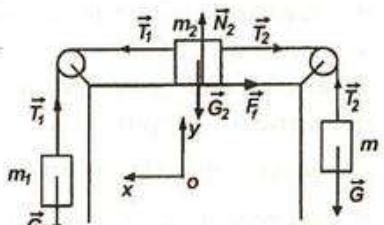
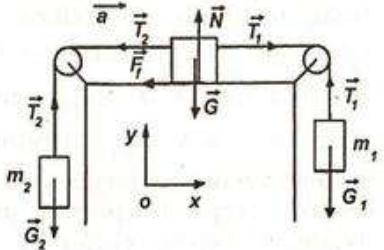
$$\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = 0, \quad \text{scalar}$$

$$T_1 - T_2 - \mu m_2 g = 0 \Rightarrow 5m - m - \mu m_2 = 0 \quad (2)$$

Din (1) $m = m_1 - \mu m_2$, astfel că introducând în (2) $\mu = 2m_1/(3m_2) = 0,25$

b. Masa unui cubuleț este $m = m_1 - \mu m_2 = 1 \text{ kg}$

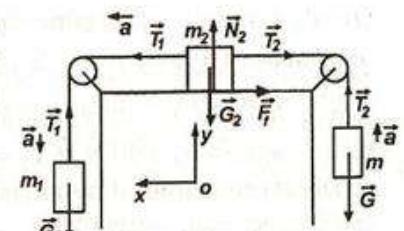
c. Sistemul se mișcă accelerat, astfel încât corpul cu masa m_1 coboară, iar corpul cu masă m_2 urcă. Pentru corpul m_1 : $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}$, scalar $m_1 g - T_1 = m_1 a$, iar pentru corpul m : $\vec{G} + \vec{T}_2 = 3m \vec{a}$, scalar $T_2 - 3mg = 3ma$.



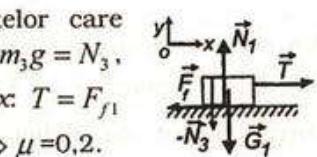
Pentru corpul cu masa m_2 :

$$\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = m_2 \vec{a}, \text{ iar scalar obținem: pe}$$

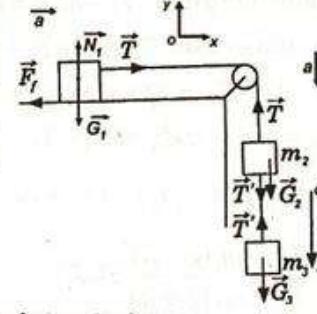
$$\text{Ox } T_1 - T_2 - \mu m_2 g = m_2 a. \text{ Adunând cele trei relații obținem: } a = g \frac{m_1 - \mu m_2 - 3m}{m_1 + m_2 + 3m} \approx 0,345 \text{ m/s}^2$$



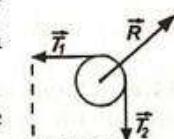
65.a. Impunem condiția ca fiecare corp să se miște rectiliniu și uniform. Astfel rezultanta forțelor care acționează fiecărui corp este nulă. Pentru corpul 3, $m_3 g = N_3$, pentru corpul 2, $T = m_2 g$, iar pentru corpul 1, pe Ox: $T = F_{f1}$ și pe Oy: $N_1 = N_3 + m_1 g$. Obținem $m_2 g = \mu(m_1 + m_3)g \Rightarrow \mu = 0,2$.



b. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul 3, $m_3 g - T' = m_3 a$, pentru corpul 2, $T' + m_2 g - T = m_2 a$, iar pentru corpul 1, $T - \mu m_1 g = m_1 a$. Adunăm cele trei ecuații și obținem: $m_3 g + m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow a = g \frac{m_3 + m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 2 \text{ m/s}^2$.



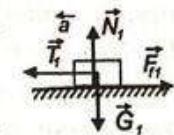
c. Forța de apăsare pe scripetele S în condițiile punctului anterior este $R = T\sqrt{2} \approx 4,5 \text{ N}$, deoarece din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} = 0$, unde $T_1 = T_2 = T = m_1(a + \mu g)$.



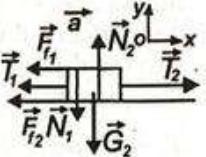
d. Tensiunea din firul care leagă corpurile 2 și 3 este $T' = m_3(g - a) = 1,6 \text{ N}$

66.a. Sistemul de coruri se deplasează accelerat cu accelerația a .

A. Pentru corpul m_1 , $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 = m_1 \vec{a}$, iar scalar $T_1 - \mu_1 m_1 g = m_1 a$ (1), deoarece $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$.



Pentru corpul m_2 : $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$, scalar pe Ox $T_2 - T_1 - F_{f1} - F_{f2} = m_2 a$ și



$$\text{pe Oy: } N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu_2(m_1 + m_2)g \Rightarrow$$

$$T_2 - T_1 - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = m_2 a \quad (2)$$

$$\text{Pentru corpul } m_3: \vec{G}_3 + \vec{T}_2 = m_3 \vec{a}. \text{ Scalar } m_3 g - T_2 = m_3 a \quad (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \quad m_2 g - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow$$

$$a = g \frac{m_3 - 2\mu_1 m_1 - \mu_2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 5,8 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b. } T_1 = m_1(a + \mu_1 g) = 15,6 \text{ N și } T_2 = m_3(g - a) = 52 \text{ N}$$

c. Deoarece sistemul de coruri se mișcă uniform în același sens, $a=0 \Rightarrow m_3 = 2\mu_1 m_1 + \mu_2(m_1 + m_2) = 1,3 \text{ kg}$

67.a. Studiem mișcarea corpului m_3 .

$\vec{G}_3 + \vec{T}_2 = m_3 \vec{a}$. Prin proiecția pe axa de coordonate Ox : $m_3 g - T_2 = m_3 a$ (1)

Studiem mișcarea corpului m_2 . Vectorial: $\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$.

Pe Ox : $T_2 - m_2 g \sin \alpha - F_{f2} - T_1 = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow$

$$F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \cos \alpha \Rightarrow T_2 - m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha - T_1 = m_2 a \quad (2)$$

Studiem mișcarea corpului m_1 . Vectorial: $\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}$

Proiectăm pe Ox : $T_1 - m_1 g \sin \alpha - F_{f1} = m_1 a$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$.

Cum $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos \alpha \Rightarrow T_1 - m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha = m_1 a$ (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow g[m_3 - (m_1 + m_2)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow a = g \frac{m_3 - (m_1 + m_2)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} = 2,63 \text{ m/s}^2$$

b. $T_2 = m_3(g - a) = 36,85 \text{ N}$

c. $T_1 = m_1(g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha + a) = 12,28 \text{ N}$

68.a. Studiem mișcarea corpului m_1 . Vectorial: $\vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1 \vec{a}$.

pe Ox : $m_1 g \sin \alpha - T_1 - F_{f1} = m_1 a$

pe Oy : $N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$

Cum $F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha \Rightarrow$

$$m_1 g \sin \alpha - T_1 - \mu_1 m_1 \cos \alpha = m_1 a \quad (1)$$

Studiem mișcarea corpului m_2 .

$$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a}$$

pe Ox : $T_1 - T_2 - F_{f2} = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g = 0$.

Cum $F_{f2} = \mu_2 N_2 \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu_2 m_2 g = m_2 a$ (2)

Studiem mișcarea corpului m_3 : $\vec{T}_2 + \vec{G}_3 = m_3 \vec{a}$ și scalar $T_2 - m_3 g = m_3 a$ (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow g(m_1 \sin \alpha - \mu_1 m_1 \cos \alpha - \mu_2 m_2 - m_3) = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\Rightarrow a = g \frac{m_1 \sin \alpha - \mu_1 m_1 \cos \alpha - \mu_2 m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0,834 \text{ m/s}^2$$

b. $T_1 = m_1(g \sin \alpha - \mu_1 g \cos \alpha - a) \approx 16,5 \text{ N}$ și $T_2 = m_3(g + a) = 10,83 \text{ N}$

69.a. Studiem mișcarea corpului m_1 .

$$\vec{T}_1 + \vec{G}_1 = m_1 \vec{a} \text{ și } m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$$

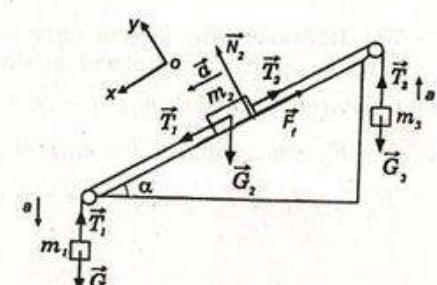
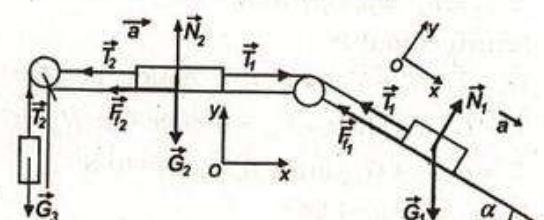
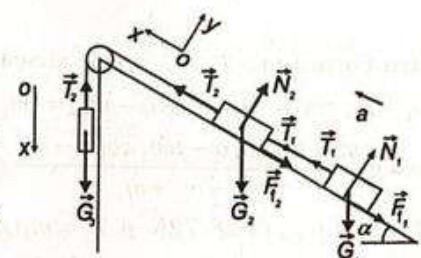
Studiem mișcarea corpului m_2 :

$$\vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2 \vec{a} \text{ Proiectăm pe } Ox:$$

$T_1 + m_2 g \sin \alpha - T_2 - F_{f2} = m_2 a$ și pe Oy :

$$N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \cos \alpha$$

$$T_1 + m_2 g \sin \alpha - T_2 - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a \quad (2)$$



Pentru corpul m_3 : $\vec{T}_2 + \vec{G}_3 = m_3 \vec{a}$ și scalar $T_2 - m_3 g = m_3 a$ (3). Din (1)+(2)+(3) ⇒
 $g(m_1 + m_2 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha - m_3) = (m_1 + m_2 + m_3)a$
 $\Rightarrow a = g \frac{m_1 + m_2 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 3,32 \text{ m/s}^2$

b. $T_1 = m_1(g - a) = 26,72 \text{ N}$ și $T_2 = m_3(g + a) = 26,64 \text{ N}$

c. Dacă se rupe firul care leagă corpul m_3 de corpul m_2 sistemul de corpi se mișcă accelerat cu accelerația a_1 . Pentru corpul m_1 :

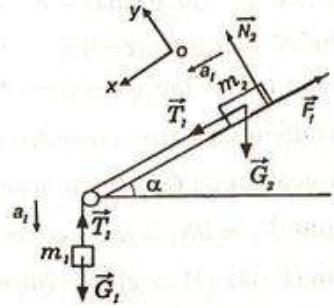
$m_1 g - T_1 = m_1 a_1$ (1), iar pentru corpul m_2 :

$T_1 + m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a_1$ (2).

Din (1)+(2) obținem:

$m_1 g + m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha = (m_1 + m_2)a_1 \Rightarrow$

$$a_1 = g \frac{m_1 + m_2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2} = 7,76 \text{ m/s}^2$$



70.a. Deoarece sistemul de corpi se mișcă uniform $a=0$. Pentru corpul A:

$$\vec{G}_A + \vec{T}_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_A g$$

Pentru corpul C: $\vec{G}_C + \vec{T}_2 + \vec{N}_C + \vec{F}_{\mathcal{K}} = 0$

$$\Rightarrow T_2 = F_{\mathcal{K}} = \mu_C G_C = 10 \text{ N}$$

Pentru corpul B:

$$\vec{G}_B + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{N}_B + \vec{F}_{\mathcal{K}B} = 0. \text{ Astfel pe } Ox.$$

$$T_1 - T_2 - G_B \sin \alpha - F_{\mathcal{K}B} = 0 \text{ și pe } Oy: N_B = G_B \cos \alpha \text{ și } F_{\mathcal{K}B} = \mu_B N_B \Rightarrow$$

$$T_1 = \mu_C G_C + G_B (\sin \alpha + \mu_B \cos \alpha) = 40 \text{ N}$$

b. $m_A = T_1 / g = 4 \text{ kg}$

c. Sistemul se mișcă accelerat în același sens ca la punctul a., astfel că pentru m_A : $\vec{G}_A + \vec{T}_1 = m_A \vec{a}$ și scalar pe Ox : $m_A g - T_1 = m_A a$ (1)

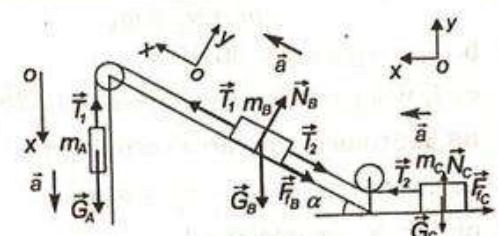
Pentru m_B : $\vec{G}_B + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{N}_B + \vec{F}_{\mathcal{K}B} = m_B \vec{a}$. Pe Ox : $T_1 - T_2 - G_B \sin \alpha - F_{\mathcal{K}B} = m_B a$

Pe Oy : $N_B - G_B \cos \alpha = 0$ și $F_{\mathcal{K}B} = \mu_B N_B \Rightarrow T_1 - T_2 - G_B \sin \alpha - \mu_B G_B \cos \alpha = m_B a$ (2)

Pentru m_C : $\vec{G}_C + \vec{T}_2 + \vec{N}_C + \vec{F}_{\mathcal{K}C} = m_C a \Rightarrow$ pe Ox : $T_2 - \mu_C G_C = m_C a$ (3)

Din (1)+(2)+(3) ⇒ $G_A - G_B (\sin \alpha + \mu_B \cos \alpha) - \mu_C G_C = (m_A + m_B + m_C)a \Rightarrow$

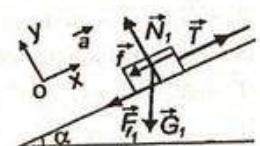
$$G_A = \frac{[G_B (\sin \alpha + \mu_B \cos \alpha) + \mu_C G_C]g + (G_B + G_C)a}{g - a} = 70 \text{ N} \Rightarrow m_A = \frac{G_A}{g} = 7 \text{ kg}$$



71. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: Studiem mișcarea corpului m_1 : $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{f} = m_1 \vec{a}$. Pe Ox :

$$T - F_{f1} - m_1 g \sin \alpha - f = m_1 a \text{ și pe } Oy: N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$F_{f1} = \mu N_1 \Rightarrow T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - f = m_1 a \quad (1)$$



Studiem mișcarea corpului m_2 : $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} + \vec{f} = m_2 \vec{a}$, astfel că pe Ox : $f - F_{f2} - m_2 g \sin \alpha = m_2 a$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu N_2 \Rightarrow f - \mu m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha = m_2 a$ (2)

Studiem mișcarea corpului m_3 : $\vec{T} + \vec{G}_3 = m_3 \vec{a}$, astfel că scalar

$$m_3 g - T = m_3 a \quad (3) \quad \text{Adunând cele trei ecuații obținem: } m_3 g - (m_1 + m_2)g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = (m_1 + m_2 + m_3)a = 2 \text{ m/s}^2.$$

b. Forța cu care corpul de masă m_1 impinge corpul de masă m_2 este $f = m_2(\mu g \cos \alpha + g \sin \alpha + a) = 12 \text{ N}$

c. Tensiunea în firul de legătură este $T = m_3(g - a) = 24 \text{ N}$.

Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \Rightarrow$

$$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos(90^\circ - \alpha). \quad \text{Cum } T_1 = T_2 = T \Rightarrow$$

$$R^2 = 2T^2 + 2T^2 \sin \alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1 + \sin \alpha)} \approx 42,93 \text{ N}$$

d. Impunem condiția de mișcare uniformă pentru sistemul de corpi m_1 și m_2 , dacă acestea se mișcă în același sens, astfel că accelerarea este nulă. Cum $T = F_1$, obținem pentru corpul m_1 : $F_1 - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - f = 0$ și pentru corpul m_2 obținem: $f - \mu m_2 g \cos \alpha - m_2 g \sin \alpha = 0$.

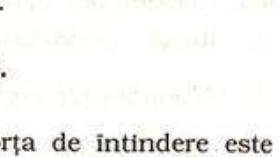
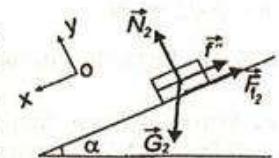
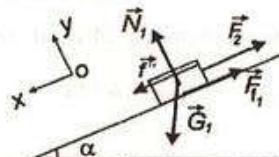
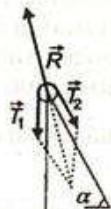
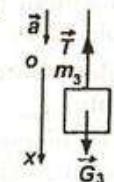
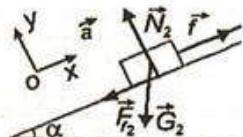
Astfel prin adunare obținem

$$F_1 = (m_1 + m_2)g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 20 \text{ N}.$$

Dacă corpurile își schimbă sensul de mișcare, se schimbă sensul forțelor de frecare, astfel că pentru corpul m_1 obținem: $m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha + f'' - F_2 = 0$ și pentru

corpul m_2 obținem: $m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha - f'' = 0$. Astfel

prin adunare obținem $F_2 = (m_1 + m_2)g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 4 \text{ N}$.



2.4. Legea lui Hooke. Forță elastică.

1.a. Din legea lui Hooke $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \Rightarrow F = SE \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$. Cum forța de întindere este

$$\text{greutatea corpului } F = mg \Rightarrow m = \frac{SE \Delta \ell}{g \ell_0} = \frac{\pi \cdot d^2 E \Delta \ell}{4g \ell_0} \approx 1,5 \text{ kg.}$$

b. Efortul unitar din cablu este $\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \approx 1,9 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

c. Impunem condiția de mișcare accelerată a corpului:

$$\vec{F} + \vec{G} = m \vec{a} \quad \text{Pe } Ox: F - mg = ma \Rightarrow F = m(a + g).$$

$$\text{Cum } \frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell_1}{\ell_0} \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{m(a + g)\ell_0}{S \cdot E} \quad \text{Cum } S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow$$



$$\Delta\ell_1 = \frac{4m(a+g)\ell_0}{\pi \cdot d^2 \cdot E} = \frac{(a+g)\Delta\ell}{g} = 2.124 \text{ mm. Efortul unitar din cablu este:}$$

$$\sigma_1 = \frac{F}{S} = \frac{4m(a+g)}{\pi \cdot d^2} = \frac{\sigma(a+g)}{g} = 2.27 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$$

2.a. Aflăm masa cablului de susținere $m_c = m_0 = 48 \text{ kg}$ și masa totală ridicată de cablu este: $m_t = m + m_c = 1024 \text{ kg}$. Conform principiului al doilea al dinamicii, scalar obținem tensiunea maximă care apare în cablu la pornirea accelerată a liftului: $T_{\max} - m_t g = m_t a \Rightarrow T_{\max} = m_t(a+g) = 11.776 \text{ kN}$

b. În momentul pornirii cablul este alungit atât de greutatea lui cât și de a liftului suspendat. Datorită distribuției uniforme a masei cablului de-a lungul acestuia forța de întindere datorită numai greutății acestuia este $1/2$ din greutatea cablului. Astfel cablul poate fi considerat un punct material cu masa concentrată în centrul de greutate. Deoarece liftul și cablul pornesc accelerat, atunci forța maximă de întindere a firului se obține când liftul se

$$\text{află la parter: } F - \left(\frac{m_c}{2} + m\right)g = \left(\frac{m_c}{2} + m\right)a \Rightarrow F = \left(\frac{m_c}{2} + m\right)(g+a) = 11.5 \text{ kN}$$

$$\text{Conform legii lui Hooke } \frac{F}{S} = E \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{F \cdot \ell_0}{S \cdot E} = 5.75 \text{ mm.}$$

c. Deoarece efortul unitar nu depășește pe cel maxim admisibil σ_a , atunci

$$S_{\min} = \frac{F}{\sigma_a} = 0.2 \text{ cm}^2$$

3.a. Conform compunerii vectorilor, forța rezultantă este $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow$

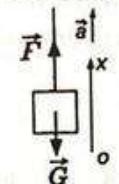
$$R = F\sqrt{2} = 4 \text{ N}$$

$$\text{b. Cum forța de întindere a firului este } R, \text{ din } \frac{R}{S} = E \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow E = \frac{R\ell_0}{S\Delta\ell} = 10^{11} \text{ N/m}^2$$

c. După tăierea firului, corpul se va mișca uniform accelerat cu acelerația $a = R/m$, astfel că $v = at = 4 \text{ m/s}$

4.a. Considerăm sistemul unui corp cu masa $m = M + m$. Acest corp se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F} + \vec{G} = (M+m)\vec{a}$, iar scalar

$$F - (M+m)g = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M+m} - g = 2 \text{ m/s}^2.$$



Impunem condiția de mișcare manșonului: $\vec{N} + \vec{G}' = m\vec{a}$ și scalar $N - mg = ma \Rightarrow N = m(a+g) = 36 \text{ N}$

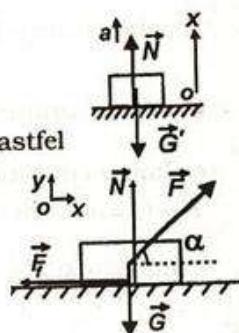
b. Cum $a = \Delta v / \Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta v / a = 3 \text{ s}$

$$\text{c. Prin definiție efortul unitar este } \sigma = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2} \approx 1.2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

5.a. Impunem condiția de mișcare rectilinie uniformă corpului, astfel

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0. \text{ Pe } Ox: F \cos \alpha - F_f = 0 \text{ și pe } Oy: N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha)$$

$$F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) = 0 \Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 80 \text{ N}$$



b. Conform legii lui Hooke: $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta\ell}{\ell_0}$ și $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow E = \frac{4F}{\pi \cdot d^2 \varepsilon} = 8 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

c. Reacție normală la suprafață este $N = \frac{mg \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 160 \text{ N}$

6.a. Deoarece distanța dintre cele două ziduri este mai mare decât suma lungimilor cablurilor nedeformate, ambele cabluri sunt întinse, iar forțele de întindere sunt egale. Pe baza principiului acțiunii și reacțiunii, tensiunile din cele două cabluri sunt egale, astfel că $F_1 = F_2 = F$. Conform legii lui Hooke

$$\begin{aligned} \frac{F}{S} = E \frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F\ell_1}{SE}, \Delta\ell_2 = \frac{F\ell_2}{SE} \Rightarrow \ell = \ell_1 + \Delta\ell_1 + \ell_2 + \Delta\ell_2 = \ell_1 + \frac{F\ell_1}{SE} + \ell_2 + \frac{F\ell_2}{SE} \\ \Rightarrow \frac{F(\ell_1 + \ell_2)}{SE} = \ell - \ell_1 - \ell_2 \Rightarrow F = \frac{SE(\ell - \ell_1 - \ell_2)}{\ell_1 + \ell_2} = 270 \text{ kN} \end{aligned}$$

b. Alungirile absolute ale cablurilor sunt:

$$\Delta\ell_1 = \frac{F\ell_1}{SE} = \frac{\ell_1(\ell - \ell_1 - \ell_2)}{\ell_1 + \ell_2} \approx 9,8 \text{ cm și } \Delta\ell_2 = \frac{F\ell_2}{SE} = \frac{\ell_2(\ell - \ell_1 - \ell_2)}{\ell_1 + \ell_2} \approx 10,2 \text{ cm}$$

c. Eforturile unitare la care sunt supuse cablurile sunt egale cu $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{F}{S} = 2,7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

7.a. Legea lui Hooke este valabilă atât timp cât alungirea este direct proporțională cu forța de întindere. Observăm că o creștere a alungirii cu $\Delta\ell = 6 \text{ mm}$ se obține atunci când forța de întindere crește cu $\Delta F = 5 \text{ N}$. Acest lucru este valabil până ce resortul se alungește cu $\Delta\ell = 2,4 \text{ mm}$, deci până când forța de întindere devine $F = 20 \text{ N}$. După ce forța de întindere depășește valoarea de 20 N , când aceasta crește alungirea coardei crește mai mult ca înainte, astfel nu se mai respectă legea $F = k\Delta\ell$. Domeniul de valori ale forțelor de întindere pentru care este valabilă legea lui Hooke este $F \in [0, 20] \text{ N}$.

b. Din $F = k\Delta\ell \Rightarrow k = F/\Delta\ell = 833,33 \text{ N/m}$, deoarece $F = 5 \text{ N}$ și $\Delta\ell = 6 \text{ mm}$

c. Studiem mișcarea uniformă a coardei, astfel că $F - F_f = 0 \Rightarrow F = \mu N = \mu mg = k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \mu mg/k = 6 \text{ mm}$

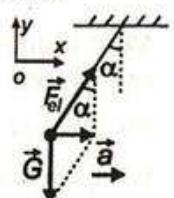
8.a. Din grafic se observă că atunci când $x = 8 \text{ cm}$, forța elastică corespunzătoare este $F = 64 \text{ N}$. Atunci constanta elastică a resortului este $k = F/x = 800 \text{ N/m}$

b. Din condiția de echilibru impusă corpului $\vec{G} + \vec{F}_{el} = 0$, scalar obținem $G = F_{el} \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = mg/k = 2,5 \text{ mm}$

c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului. Vectorial $\vec{F}_{el} + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm pe axa Ox : $F_{el} \sin \alpha = ma$ și pe Oy : $F_{el} \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow F_{el} = m\sqrt{a^2 + g^2} = kx_1 \Rightarrow x_1 = 2,75 \text{ mm}$

9.a. Impunem condiția de echilibru corpului: $\vec{G} + \vec{F}_{el} = 0$, iar scalar $G = F_{el} \Rightarrow mg = k\Delta\ell = k(\ell - \ell_0) = k\ell_0 f$, deoarece lungimea resortului devine $\ell = \ell_0(1 + f)$. Dacă se acționează asupra bilei prinse de resort cu o forță verticală, atunci $\vec{G} + \vec{F}_{el}' + \vec{F}_1 = 0$, iar scalar $G + F_1 = F_{el}' \Rightarrow mg + F_1 = k2\Delta\ell \Rightarrow mg + F_1 = 2mg \Rightarrow m = F_1/g \Rightarrow m = 0,5 \text{ kg}$

b. Din $mg = k\ell_0 f \Rightarrow k = \frac{mg}{f \cdot \ell_0} = \frac{F_1}{f \cdot \ell_0} = 500 \text{ N/m}$



c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: $\vec{G} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_2 = 0$. Scalar pe Ox . $F_{el} \sin \alpha - F_2 = 0$ și pe Oy :

$$F_{el} \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow F_{el} = \sqrt{F_2^2 + (mg)^2} = kx \Rightarrow \\ x = \frac{\sqrt{F_2^2 + (mg)^2}}{k} = 1,2 \text{ cm}$$

10.a. Studiem mișcarea accelerată a liftului în sus:

$$\vec{G} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}. \text{ Scalar } F_{el} - mg = ma \Rightarrow F_{el} = m(a + g) = 10,8 \text{ N}$$

$$\text{Deformația resortului este } x_1 = \frac{F_{el}}{k} = 5,4 \text{ cm}$$

b. Studiem coborârea accelerată a liftului: $\vec{G} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$

Scalar $mg - F_{el} = ma \Rightarrow F_{el} = m(g - a) = 9,2 \text{ N}$, iar deformația

$$\text{resortului este } x_2 = \frac{F_{el}}{k} = \frac{m(g - a)}{k} = 4,6 \text{ cm}$$

c. În cazul mișcării uniforme a liftului, accelerația acestuia este zero.

$$\vec{G} + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow F_{el} = G = mg = 10 \text{ N}, \text{ iar } x_3 = \frac{F_{el}}{k} = \frac{mg}{k} = 5 \text{ cm.}$$

11.a. Studiem echilibrul corpului aflat pe căntar $\vec{G} + \vec{F}_{el} = 0$, iar

$$\text{scalar } G = F_{el} \Rightarrow mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

b. Dacă în locul copilului pe căntar se urcă adultul, atunci $G_a = F'_{el} \Rightarrow Mg = kx' \Rightarrow x' = \frac{Mg}{k} = \frac{M}{m}x = 6 \text{ cm}$

c. Pentru adultul aflat pe căntarul din liftul care coboară frână $\vec{G} + \vec{F}_{el} = M\vec{a}$. Viteza liftului este orientată în jos, iar accelerația acestuia este orientată în sus, astfel că $F_{el} - Mg = Ma \Rightarrow F_{el} = M(a + g)$.

Forța elastică determină acul căntarului să arate eronat mai mult, astfel că masa indicată este $M_1 = \frac{F_{el}}{g} = 95,4 \text{ kg}$

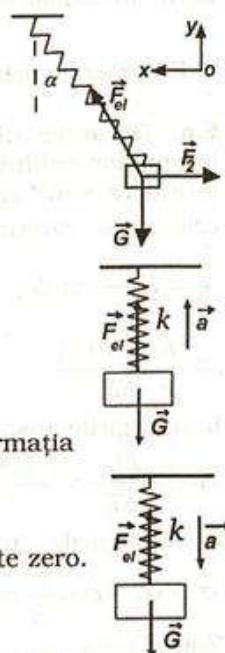
12.a. În intervalul de timp $t \in (1.9)\text{s}$, $a=0 \text{ m/s}$ și prin urmare corpul de iluminat se mișcă rectiliniu și uniform, astfel că $\vec{G} + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow G = F_{el} \Rightarrow mg = k\Delta\ell \Rightarrow k = mg/\Delta\ell = 500 \text{ N/m}$

b. În cea de-a treia etapă a mișcării accelerația corpului este $a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -6 \text{ m/s}^2$.

Studiem mișcarea corpului: $\vec{G} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}_3$, iar scalar obținem:

$$mg - k\Delta\ell_3 = m|a_3| \Rightarrow \Delta\ell_3 = m(g - |a_3|)/k = 4 \text{ mm} \Rightarrow \ell = \ell_0 + \Delta\ell_3 = 20,4 \text{ cm}$$

c. Calculăm distanța parcursă de ascensor cu ajutorul ariei cuprinse între curba vitezei și axa timpului. Astfel $d=54 \text{ m}$. Numărul de etaje ale clădirii este $N = \frac{d}{h_0} + 1 = 19$, deoarece la numărul de nivele ale clădirii se obține adunând parterul la numărul de etaje parcuse de lift.



13.a. Din grafic se observă că $\Delta\ell = kt$, astfel că $\frac{\Delta\ell}{\Delta\ell_m} = \frac{t}{t_m} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\Delta\ell_m t}{t_m} = 3$ cm.

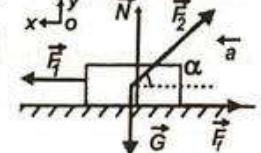
astfel că forța elastică este $F_{el} = k\Delta\ell = 6$ N, deoarece la momentul $t_m = 5$ s, deformarea maximă a resortului este $\Delta\ell_m = 5$ cm.

b. Când $\Delta\ell = 2$ cm, corpul se află în repaus, deoarece până când deformarea resortului devine $\Delta\ell_m = 5$ cm alungirea și forța elastică cresc. Astfel vectorial $\vec{G} + \vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Scalar $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_f = k\Delta\ell = 4$ N

c. Corpul începe să alunecă când forța de frecare devine maximă și egală cu forța elastică maximă. Astfel $F_{el}' = F_f' \Rightarrow k\Delta\ell_m = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{k\Delta\ell_m}{mg} = 0.2$

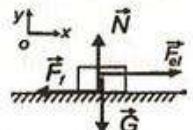
14.a. Din $F_i = k\Delta\ell \Rightarrow k = F_i / \Delta\ell = 7$ cm

b. Impunem condiția de echilibru corpului cu masă m . Vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Deoarece $F_1 > F_2 \cos \alpha$, corpul se va deplasa spre stânga accelerat. Proiectăm pe axe de coordonate. Pe Ox : $F_1 - F_2 \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy : $F_2 \sin \alpha + N - mg = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu(mg - F_2 \sin \alpha) \Rightarrow F_1 - F_2(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a = 1.94$ m/s²



c. Pentru ca acest corp să nu apese pe planul orizontal trebuie ca $N = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{mg}{\sin \alpha} = 20$ N

15.a. Studiem mișcarea rectilinie uniformă a corpului: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_{el} = F_f$ și pe Oy :



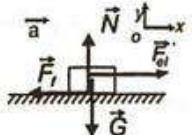
$$F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow kx_0 = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{kx_0}{mg} = 0.1$$

b. Studiem mișcarea accelerată a corpului când alungirea resortului este de trei ori mai mare decât în cazul mișcării uniforme. În acest caz:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = m\vec{a}$$

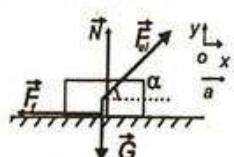
$$N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow 3kx_0 - \mu mg = ma$$

$$\text{Cum } kx_0 = \mu mg \Rightarrow 2kx_0 = ma \Rightarrow a = \frac{2kx_0}{m} = 2 \text{ m/s}^2$$



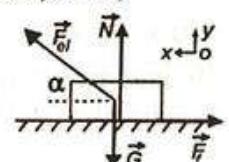
c. Reprezentăm forțele asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm pe axe de coordonate. Pe Ox : $F_{el} \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy : $N + F_{el} \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el} \sin \alpha \Rightarrow F_f = \mu N \Rightarrow$

$$F_f = \mu(mg - F_{el} \sin \alpha) \Rightarrow F_{el}(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow x = \frac{m(a + \mu g)}{k(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 2 \text{ cm}$$



16.a. Impunem condiția de echilibru corpului suspendat m_1 : $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow G_1 = F_{el} \Rightarrow m_1 g = kx \Rightarrow x = m_1 g / k = 6$ cm

b. Impunem condiția de echilibru cubului cu masa $m_2 = \rho V = \rho(\ell^3 - \ell_1^3) = 7,488$ kg. Vectorial $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.



Proiectăm pe axa Oy : $N + F_{el} \sin \alpha - m_2 g = 0 \Rightarrow N = g(m_2 - m_1 \sin \alpha) \approx 59,88 \text{ N}$

c. Pe Ox : $F_{el} \cos \alpha - F_f = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{m_1 \cos \alpha}{m_2 - m_1 \sin \alpha} \approx 0,43$

17.a. Deoarece corpul se află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă. Scalar $G = F_{el} \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = \frac{mg}{k} = 5 \text{ mm}$

b. Studiem echilibrul corpului, după reprezentarea forțelor: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:

pe Ox : $F - F_{el} \sin \alpha = 0$ și

pe Oy : $F_{el} \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow kx \cos \alpha = mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k \cos \alpha} = 1 \text{ cm}$

$$\Rightarrow F = kx \sin \alpha = m \cdot g \cdot \tan \alpha = 0,865 \text{ N}$$

c. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G} = 0$.

pe Ox : $F \cos \beta - F_{el} = 0 \Rightarrow F \cos \beta = kx$ și

pe Oy : $F \sin \beta - mg = 0 \Rightarrow \sin \beta = \frac{mg}{F} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{F \cos \beta}{k} = 7,06 \text{ mm}$$

18.a. Studiem mișcarea corpului. Deoarece corpul începe să se deplaseze, considerăm că în acel moment mișcarea corpului este uniformă, iar rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:

pe Ox : $F_{el} \sin \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F_{el} \sin \alpha$;

pe Oy : $F_{el} \cos \alpha + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el} \cos \alpha$.

$$F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el} \cos \alpha) \Rightarrow \mu = \frac{F_{el} \sin \alpha}{mg - F_{el} \cos \alpha}$$

Dar $F_{el} = k\Delta l = k(\ell - \ell_0)$ și cum $\cos \alpha = \frac{\ell_0}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{\ell_0}{\cos \alpha} \Rightarrow F_{el} = \frac{k\ell_0(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha}$

$$\Rightarrow \mu = \frac{k\ell_0(1 - \cos \alpha) \tan \alpha}{mg - k\ell_0(1 - \cos \alpha)} = 0,5$$

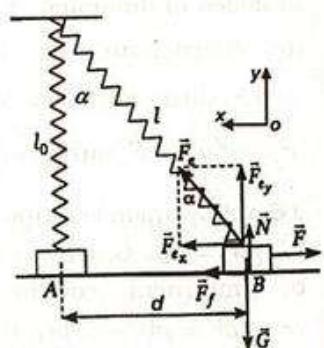
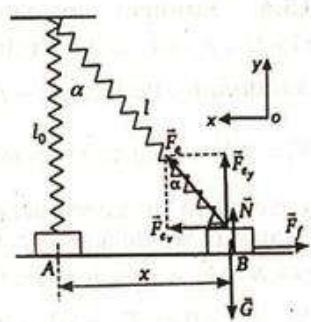
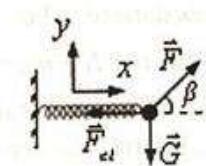
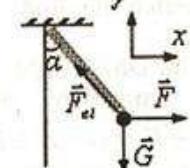
b. $N = mg - F_{el} \cos \alpha = mg - k\ell_0(1 - \cos \alpha) = 8,65 \text{ N}$

c. Când trece prin poziția verticală $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{m}\vec{a}$, deoarece forța elastică este nulă pentru că resortul este nedeformat.

Scalar $-\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu \cdot g \Rightarrow a = -5 \text{ m/s}^2$

19.a. $F_{el} = k(\ell - \ell_0) = k\sqrt{\ell_0^2 + d^2} - \ell_0 = 7,8 \text{ N}$

b. Impunem condiția de echilibru corpului în poziția B. Vectorial $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox :



$F_{el} \sin \alpha - F + F_f = 0$ și pe Oy : $F_{el} \cos \alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el} \cos \alpha)$
 $\Rightarrow F = F_{el}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + \mu mg \approx 5,056N$,

$$\sin \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \ell_0^2}} = 0,6 \text{ și } \cos \alpha = \frac{\ell_0}{\sqrt{d^2 + \ell_0^2}} = 0,8$$

c. În momentul în care este eliberat în poziția B corpul se va mișca accelerat, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Vectorial obținem pe Ox :

$$F_{el} \sin \alpha - F_f = ma \Rightarrow F_{el} \sin \alpha - \mu(mg - F_{el} \cos \alpha) = ma \Rightarrow a = \frac{F_{el}(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m} - \mu \cdot g \approx 4,304 \text{ m/s}^2$$

20.a. Considerăm că acest corp pornește într-o mișcare uniformă și prin urmare rezultanta forțelor care acționează asupra corpului este nulă. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $F_{el} \cos \alpha - F_f = 0 \Rightarrow kx \cos \alpha = F_f$ și pe Oy :

$$N - mg - F_{el} \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = mg + kx \sin \alpha.$$

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow kx \cos \alpha = \mu mg + \mu kx \sin \alpha \Rightarrow x = \frac{\mu mg}{k(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = 3,525 \text{ cm.}$

b. $F_{el}' = kx' = kx\sqrt{2} = 1,5 \text{ N}$

c. Impunem condiția de mișcare corpului $\vec{F}_{el}' + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Scalar pe Ox : $F_{el}' \cos \alpha - F_f = ma \Rightarrow kx\sqrt{2} \cos \alpha - F_f = ma$. Înlocuind x și forța de frecare $F_f = \mu N = \mu(mg + kx\sqrt{2} \sin \alpha)$, obținem $a = \mu g(\sqrt{2} - 1) \approx 0,82 \text{ m/s}^2$

21. a. Deoarece $F = k\Delta\ell$, atunci $\frac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} = \frac{F_2}{F_1} = 1,2$

b. Impunem condiția de echilibru corpului: $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Pe Ox : $F_1 \cos \alpha - F_f = 0$ iar pe Oy :

$$N + F_1 \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_1 \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{F_1 \cos \alpha}{mg - F_1 \sin \alpha} = 0,25$$

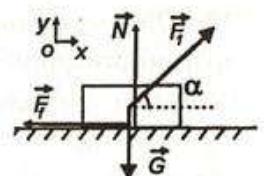
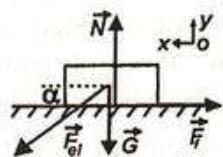
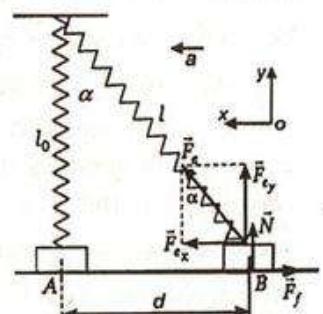
c. Sub acțiunea forței F_2 , vectorial obținem $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$.

Pe Ox : $F_2 \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy : $N + F_1 \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow$

$$F_f = \mu N = \mu(mg - F_2 \sin \alpha) \Rightarrow a = \frac{F_2(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}{m} - \mu g = 0,5 \text{ m/s}^2$$

d. Deoarece corpul nu mai apasă pe suprafață $N=0 \Rightarrow F_f = \frac{mg}{\sin \alpha} \approx 7,05 \text{ N}$

22.a. Deoarece corpul este în repaus, atunci $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} = 0$, iar scalar pe Ox : $mg \sin \alpha = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow \ell = \ell_0 + mg \sin \alpha / k = 90 \text{ cm}$

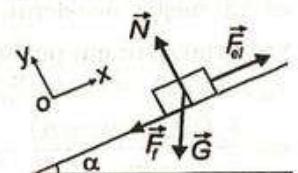
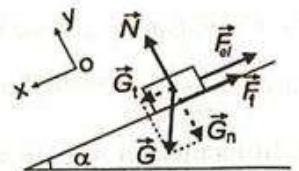


b. În prezența forțelor de frecare $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$

Pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f - k(\ell - \ell_0) = 0$ și pe Oy :
 $N = mg \cos \alpha \Rightarrow F_f = \mu mg \cos \alpha$.

Astfel $\ell = \ell_0 + mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)/k = 84$ cm

c. Impunem condiția de mișcare rectilinie și uniformă corpului, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Pe Ox :
 $k\Delta\ell = mg \sin \alpha + F_f$. Cum $F_f = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow$
 $\Delta\ell = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)/k = 16$ cm



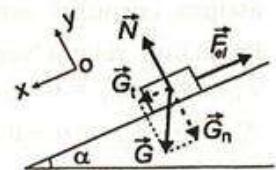
23.a. Din condiția de echilibru impusă corpului suspendat obținem:
 $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow mg = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow k = mg/(\ell - \ell_0) = 100$ N/m

b. Resortul este comprimat, iar corpul se află în echilibru, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} = 0$.

Forța elastică este $F_{el} = k(\ell_0 - \ell_1) = 0,5$ N

c. Proiectăm pe Ox relația vectorială și obținem:

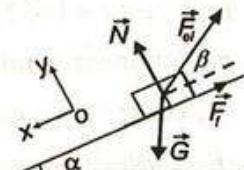
$$mg \sin \alpha - k(\ell_0 - \ell_1) = 0 \Rightarrow \sin \alpha = F_{el}/mg = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$



24.a. Impunem condiția de echilibru corpului. $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm pe Ox : $mg \sin \alpha - F_{el} \cos \beta - F_f = 0$ și pe Oy :

$$F_f = \mu(mg \cos \alpha - F_{el} \sin \beta) \Rightarrow F_{el} = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \beta - \mu \sin \beta} \approx 2,3$$
 N



b. Alungirea resortului este $\Delta\ell = F_{el}/k = 2,28$ cm

c. Forța de apăsare normală este:

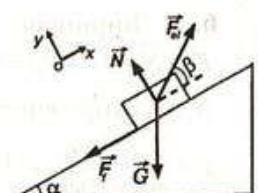
$$N = mg \cos \alpha - F_{el} \sin \beta \approx 0,126$$
 N

25.a. Reprezentăm forțele care acționează asupra schiorului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe Ox : $F_{el} \cos \beta - mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy : $N + F_{el} \sin \beta - mg \cos \alpha = 0$

Obținem $F_{el} \cos \beta - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha + \mu F_{el} \sin \beta = 0 \Rightarrow$

$$F_{el} = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \approx 697,3$$
 N și obținem $\Delta\ell = \frac{F_{el}}{k} \approx 10$ cm



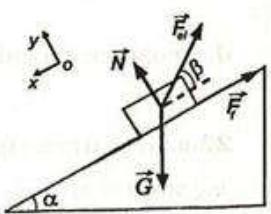
b. Apăsarea schiorului asupra părției este $N = mg \cos \alpha - F_{el} \sin \beta \approx 148,4$ N

c. Timpul necesar urcării părției este $\Delta t = \frac{D}{v} = 20,8$ m/s

d. Reprezentăm forțele care acționează asupra achiorului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm pe axele de coordonate și obținem: pe Ox : $mg \sin \alpha - F_f - F_{el} \cos \beta = 0$ și pe Oy :

$$N + F_{el} \sin \beta - mg \cos \alpha = 0$$



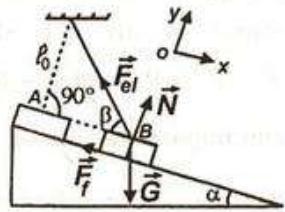
Obținem $mg \sin \alpha - F_{el} \cos \beta - \mu mg \cos \alpha + \mu F_{el} \sin \beta = 0 \Rightarrow$

$$\Delta\ell' = \frac{F_{el}}{k} = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{k(\cos \beta - \mu \sin \beta)} \approx 9,35 \text{ cm}$$

26. a. Alungirea firului în poziția de echilibru *B* este $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, unde $\ell = \ell_0 / \sin \beta$, astfel că $\Delta\ell = \ell_0(1/\sin \beta - 1) \approx 16,4 \text{ cm}$

b. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectând pe *Oy*: $F_{el} \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - F_{el} \sin \beta$ și proiectând pe *Ox* obținem: $mg \sin \alpha - F_{el} \cos \beta - F_f = 0$.



Cum $F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha - F_{el} \sin \beta)$ obținem: $F_{el} = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \beta - \mu \sin \beta} \approx 3,1 \text{ N}$

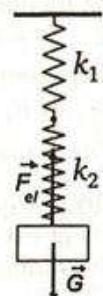
c. Din $F_{el} = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{F_{el}}{\Delta\ell} \approx 18,9 \text{ N/m}$

d. $N = mg \cos \alpha - F_{el} \sin \beta \approx 1 \text{ N}$

27.a. Legăm cele două resorturi în serie. Suspendăm de resortul de jos un corp cu masa *m*, astfel ca forța de întindere este $F = mg = k_2 x_2$, deoarece corpul se află în echilibru. Cum resorturile sunt alungite cu x_1 și respectiv x_2 , forțele de întindere în cele două resorturi sunt egale (conform principiului acțiunii și reacțiunii), astfel că $F = k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{k_1}$ și $x_2 = \frac{F}{k_2}$. Înlocuind cele două resorturi

trebuie să obținem un singur resort cu constanta elastică k_s , astfel ca la aceeași forță de întindere alungirea finală să fie $x_s = x_1 + x_2$.

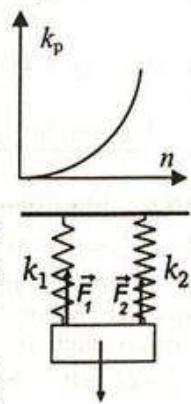
Cum $F = k_s x_s \Rightarrow x_s = \frac{F}{k_s} \Rightarrow \frac{F}{k_s} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 7,5 \text{ N/m}$



b. Legăm cele două resorturi în paralel și suspendăm un corp cu masa *m*, astfel că cele două resorturi se vor întinde identic deformându-se la fel cu *x*, astfel că $F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2)x$.

Înlocuim cele două resorturi cu un singur resort, acesta se va alungi identic sub acțiunea aceleiași forțe de întindere *F*.

$F = k_p x \Rightarrow k_p = k_1 + k_2 = 40 \text{ N/m}$



c. Putem considera resortul inițial ca o legare în serie a "n" resorturi identice, cu constanta elastică *k*. Cum $\frac{1}{k} = \sum \frac{1}{k_i} = \frac{n}{k} \Rightarrow k = nk_i$. Legăm apoi cele "n" resorturi identice

în paralel și se va obține un resort cu constanta elastică: $k_p = \sum k = nk = n^2 k_i$. Reprezentarea grafică a lui *k_p* în funcție de "n" este o parabolă.

28.a. Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta face *n* pași din momentul în care inelușul începe să opună

rezistență. Astfel $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox : $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow kn_1 p = \mu mg$ (1), unde p reprezintă lungimea unui pas, iar m este masa gândăcelului. Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta trage din nou dar având și un bob de orez în brațe: $\vec{F}_{el}' + \vec{G}' + \vec{N}' + \vec{F}_f' = 0$. Scalar pe Ox : $F_{el}' - F_f' = 0 \Rightarrow kn_2 p = \mu(m + m_0)g$ (2).

Din împărțirea relației (2) la (1) obținem: $m = \frac{n_1 m_0}{n_2 - n_1} = 0,125$ g

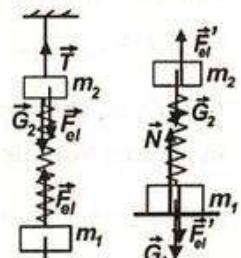
b. Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta atârnă la marginea mesei suspendat de cui prin intermediul inelușului. Astfel $\vec{F}_{el/0} + \vec{G} = 0$, iar scalar $mg = kn_0 p$ (3). Din (1) și (3) obținem: $\mu = n_1/n_0 = 0,25$

c. Dacă inelușul se tăie și ramăne fixat de cui atunci cele două jumătăți ale inelușului vor fi legate în serie. Constanta elastică a firului este k' , astfel că $\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_1} \Rightarrow k' = \frac{k_1}{2}$, unde k_1 reprezintă constanta elastică a unei jumătăți de ineluș. Cum inițial cele două jumătăți de ineluș erau legate în paralel, atunci $k = k_1 + k_2 = 2k_1 \Rightarrow k_1 = k/2 \Rightarrow k' = k/4$.

Impunem condiția de echilibru gândăcelului când începe să alunece. $F_{3/3} - F_f = 0 \Rightarrow k'n_3 p = \mu mg \Rightarrow kn_3 p/4 = \mu mg$ (4).

Din (1) și (4) obținem: $n_3 = 4n_0 = 40$ pași

29.a. Considerăm cazul în care corpul m_2 este suspendat și de el este prins corpul m_1 . În acest caz resortul este alungit. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_1 : $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0$. Scalar $m_1 g = k(\ell_1 - \ell_0)$ (1). Din condiția de echilibru pentru corpul m_2 : $\vec{T} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar $T = m_2 g + k(\ell_1 - \ell_0) = (m_1 + m_2)g = 4$ N



b. Considerăm cazul în care corpul cu masa m_1 este așezat pe masă iar corpul m_2 comprimă resortul. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa m_2 : $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 = 0 \Rightarrow m_2 g = k(\ell_0 - \ell_2)$ (2).

Împărțind relația (1) la (2) obținem: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0 - \ell_2} \Rightarrow \ell_0 = \frac{m_1 \ell_2 + m_2 \ell_1}{m_1 + m_2} = 35$ cm

c. Din $m_1 g = k(\ell_1 - \ell_0)$ și $\ell_0 = \frac{m_1 \ell_2 + m_2 \ell_1}{m_1 + m_2}$ obținem valoarea constantei elastice

$$k = \frac{(m_1 + m_2)g}{\ell_1 - \ell_2} = 20 \text{ N/m}$$

30.a. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa m_1 : $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0$ și scalar $m_1 g = kx \Rightarrow k = m_1 g / x = 250 \text{ N/m}$

b. Pentru ca m_2 să se desprindă de suprafață trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă $N=0$. Acest lucru se poate întâmpla numai dacă resortul este alungit. Astfel pentru corpul cu masa m_2 $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 = 0 \Rightarrow kx' = m_2 g \Rightarrow x' = m_2 g / k$. Corpul cu masa m_1 se



deplasează pe verticală pe distanță $d = x + x' = (m_1 + m_2)g/k$. Deoarece corpul cu masă m_1 se deplasează uniform intervalul de timp după care corpul m_2 se desprinde de suprafață este $\Delta t = \frac{(m_1 + m_2)g}{vk} = 15$ s

c. La momentul $t=10$ s sistemul de coruri se află așezat pe suprafață. Deplasarea resortului este $d_1 = vt = 2$ cm. Resortul se deplasează în sus pe distanță x pentru a se decomprima, iar apoi se alungește cu $x_1 = d_1 - x = 1$ cm.

Impunem condiția de echilibru corpului m_1 , astfel că $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0$.

Scalar $F = m_1 g + kx_1 = 5$ N

31.a. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_1 obținem $T' = m_1 g$, iar din condiția de echilibru impusă corpului cu masă m_2 obținem $T' = F_{el2} + m_2 g$, deoarece resortul k_2 este inițial alungit.

$$\text{Astfel cum } k_2(\ell - \ell_0) = (m_1 - m_2)g \Rightarrow \ell = \ell_0 + \frac{(m_1 - m_2)g}{k_2} = 27 \text{ cm}$$

b. Studiem mișcarea fiecărui corp.

Pentru m_1 pe axa Ox obținem: $m_1 g - T = m_1 a$ (1)

Pentru m_2 pe axa Ox obținem: $T - m_2 g = m_2 a$ (2)

$$\text{Din (1)+(2): } g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\text{c. Tensiunea din fir este } T = m_2(a + g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 1,5 \text{ N}$$

d. Impunem condiția de echilibru scripetelui.

$$\vec{F}_{el} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow F_{el} = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Cum } F_{el} = k_1 x \Rightarrow x = \frac{4m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)k_1} = 6 \text{ cm}$$

32.a. Studiem echilibrul coruporilor. Pentru corpul 1 $\vec{F}_o + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe Ox : $F_o - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1).

Pentru corpul 2: $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe Ox : $F_{el} - F - \mu m_2 g = 0$ (2).

$$\text{Din (1)+(2) obținem: } F_o = F + \mu(m_1 + m_2)g = 4,4 \text{ N}$$

b. Studiem mișcarea rectilie uniformă a sistemului de coruri. Pentru corpul 1:

$$\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0, \text{ iar scalar pe } Ox:$$

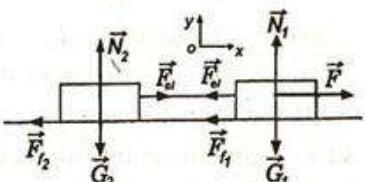
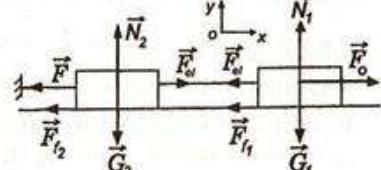
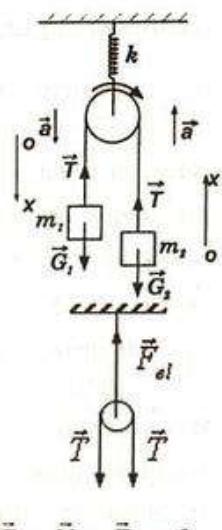
$$F - F_{el} - \mu m_1 g = 0 \quad (1). \text{ Pentru corpul 2:}$$

$$\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0, \text{ iar scalar pe } Ox:$$

$$F_{el} - \mu m_2 g = 0 \quad (2).$$

$$\text{Din (1)+(2) obținem: } F = \mu(m_1 + m_2)g = 2,4 \text{ N}$$

$$\text{c. Din } F_{el} = F_{f1} = \mu m_1 g \text{ și } F_{el} = kx \Rightarrow \mu m_1 g = kx \Rightarrow x = \frac{\mu m_1 g}{k} = 1,6 \text{ cm}$$



33.a. Studiem mișcarea corpului cu masa m :

$$\vec{G} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}, \text{ iar scalar: } mg - T = ma \quad (1)$$

Studiem mișcarea corpului cu masa M :

$$\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = M\vec{a}. \text{ Proiectăm pe } Ox:$$

$$T - F_f = Ma \text{ și pe } Oy: N - Mg = 0.$$

$$\text{Cum } F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow T - \mu Mg = Ma \quad (2).$$

$$(1)+(2) \Rightarrow g(m - \mu M) = (m + M)a \Rightarrow a = \frac{g(m - \mu M)}{m + M} \Rightarrow a = 6 \text{ m/s}^2$$

b. $T = m(g - a) = \frac{mM(1 + \mu)g}{M + m} = 16 \text{ N}$. Deoarece resortul este întins chiar de tensiunea din fir, atunci $T = kx \Rightarrow x = \frac{mM(1 + \mu)g}{(M + m)k} = 3,2 \text{ cm}$.

c. Impunem condiția de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$, iar scalar $R = T\sqrt{2} \approx 22,56 \text{ N}$, deoarece $T_1 = T_2 = T$

34.a. Studiem echilibrul sistemului de coruri. Pentru corpul 1 $\vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{el} = 0$, iar scalar pe axa Ox : $m_1 g \sin \alpha = F_{el}$ (1). Pentru corpul 2 $\vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{el} = 0$, iar scalar pe axa Ox : $m_2 g \sin \beta = F_{el}$ (2). Din (1) și (2) obținem:

$$m_2 = \frac{m_1 \sin \alpha}{\sin \beta} = 1,41 \text{ kg}$$

b. Cum $m_1 g \sin \alpha = F_{el} = kx \Rightarrow x = m_1 g \sin \alpha / k$

lungimea finală a resortului este $\ell = \ell_0 + x = 87,05 \text{ cm}$

c. Studiem situația în care sistemul de coruri are tendință ca m_1 să coboare și m_2 să urce. Din condiția de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{el}' + \vec{F}_{fl} = 0$ pe Ox :

$$m_1 g \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha = F_{el}' = kx' \Rightarrow x' = m_1 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) / k \Rightarrow x' = 5,64 \text{ cm} \text{ și lungimea finală a resortului este } \ell = \ell_0 + x' = 85,64 \text{ cm}$$

Studiem situația în care sistemul de coruri are tendință ca m_2 să coboare și m_1 să urce. Din condiția de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{el}' + \vec{F}_{fl} = 0$ iar scalar pe Ox :

$$m_1 g \sin \alpha + \mu m_1 g \cos \alpha = F_{el}' = kx' \Rightarrow$$

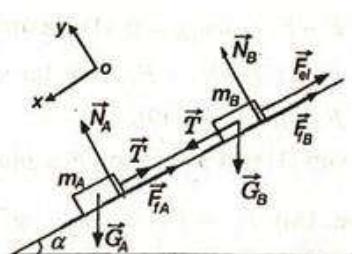
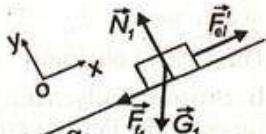
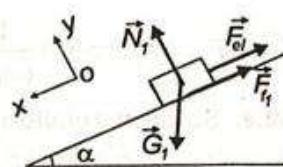
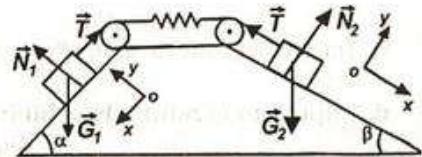
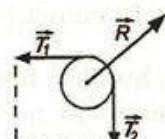
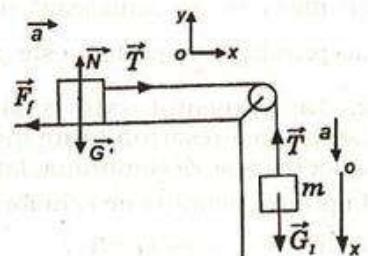
$$x' = m_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) / k = 8,46 \text{ cm, și lungimea finală a resortului este } \ell = \ell_0 + x' = 88,46 \text{ cm}$$

35.a. Studiem echilibrul fiecărui corp.

Pentru corpul A : $\vec{G}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{fl} + \vec{T} = 0$.

Prin proiecția pe axele de coordonate obținem pe Ox : $m_A g \sin \alpha - F_{fl} - T = 0$, iar pe Oy :

$$N_A - m_A g \cos \alpha = 0. \text{ Cum } F_{fl} = \mu N_A \Rightarrow$$



$$m_A g \sin \alpha - \mu \cdot m_A g \cos \alpha - T = 0 \Rightarrow T = m_A g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 7 \text{ N}$$

b. Pentru corpul m_B $\vec{G}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{fb} + \vec{T} + \vec{F}_{el} = 0$. Prin proiecția pe axele de coordonate obținem pe Ox : $m_B g \sin \alpha - F_{fb} + T - F_{el} = 0$, iar pe Oy :

$$N_B - m_B g \cos \alpha = 0. \text{ Cum } F_{BA} = \mu N_B \Rightarrow m_B g \sin \alpha - \mu m_B \cos \alpha + T - F_{el} = 0 \quad (2)$$

$$F_{el} = (m_A + m_B)g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = kx \Rightarrow x = (m_A + m_B)g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)/k = 7 \text{ cm}$$

c. Dacă se schimbă între ele pozițiile celor două corpurilor alungirea resortului nu se modifică, deoarece pe baza calculului de la punctul b. alungirea resortului este $x = (m_A + m_B)g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)/k$, independentă de poziția corpurilor pe plan.

36.a. Valorile minime ale maselor m_1 și m_2 pentru care sistemul se află în echilibru se obțin pentru situația în care corpul cu masa m_3 are tendință să coboare. Din condiția de echilibru pentru m_3 $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe axa Ox obținem:

$$m_3 g \sin \alpha - T - F_f = 0, \text{ unde } \sin \alpha = h/L = 0,5. \text{ Din condiția de echilibru pentru } m_1: T = m_1 g \Rightarrow m_1 = m_3 \sin \alpha \cdot F_f/g = 1,3 \text{ kg, iar din condiția de echilibru pentru } m_2: m_2 g = F_{el}.$$

$$\text{Cum scripetele mobil 2 este în echilibru } F_{el} = 2T \Rightarrow m_2 = 2(m_3 \sin \alpha \cdot F_f/g) = 2,6 \text{ kg}$$

$$\mathbf{b.} F_{el} = 2T = kx \Rightarrow 2(m_3 g \sin \alpha - F_f) = k\Delta\ell \Rightarrow k = 2(m_3 g \sin \alpha - F_f)/\Delta\ell = 2000 \text{ N/m}$$

c. Deoarece corpul m_3 urcă uniform pe plan forța de frecare are sens contrar astfel că vectorial $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox : $T - F_f - m_3 g \sin \alpha = 0$

$$\text{Din condiția de echilibru pentru corpul } m_1: m_1 g = T \Rightarrow m_1 = m_3 \sin \alpha + F_f/g = 1,7 \text{ kg}$$

$$\text{Din condiția de echilibru pentru corpul } m_2$$

$$m_2 g = F_{el} = 2T = 2(m_3 g \sin \alpha + F_f) \Rightarrow m_2 = 2(m_3 g \sin \alpha + F_f)/g = 3,4 \text{ kg}$$

37.a. Studiem echilibrul corpului 1 $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0$, iar scalar

$$m_1 g = k_1 \Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \quad (1)$$

Studiem echilibrul corpului 2. Asupra corpului 2, forța elastică exercitată de primul resort este orientată în jos conform principiului acțiunii și reacțiunii, deoarece corpul 2 îl impinge pe primul corp prin intermediul resortului 1 în sus: $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$, iar scalar

$$m_2 g + k_1 \Delta\ell_1 = k_2 \Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_2} \quad (2)$$

$$\text{Prin împărțirea relației (1) la (2) obținem: } \frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = 1,2.$$

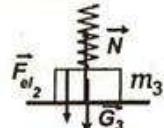
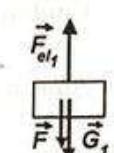
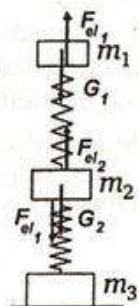
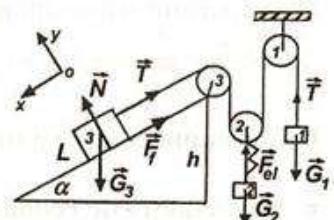
b. Studiem echilibrul corpului 1 după aplicarea forței F . Vectorial:

$$\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0, \text{ iar scalar } k_1 \Delta\ell_1 = F + m_1 g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{F + m_1 g}{k_1}$$

Studiem echilibrul corpului 2. Vectorial: $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$,

$$\text{iar scalar } m_2 g + k_1 \Delta\ell_1 = k_2 \Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{(m_1 + m_2)g + F}{k_2}.$$

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{F + m_1 g}{F + (m_1 + m_2)g} \cdot \frac{k_2}{k_1}. \text{ Cum } \frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = 2 \Rightarrow F = 4 \text{ N.}$$



c. Studiem echilibrul corpului 3. Vectorial: $\vec{N} + \vec{F}_{el2} + \vec{G}_3 = 0$, iar scalar $N = m_3g + k_2\Delta\ell_2 = m_3g + m_2g + k_1\Delta\ell_1 \Rightarrow N = (m_1 + m_2 + m_3)g + F = 14 \text{ N}$.

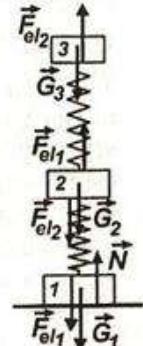
38.a. Studiem echilibrul corpurilor. Notăm cu ℓ_0 lungimea inițială a resorturilor. Resorturile sunt comprimate, cel inferior 1 este mai comprimat decât cel superior 2.

Pentru corpul 3 $\vec{G}_3 + \vec{F}_{el2} = 0$, iar scalar $mg = k(\ell_0 - \ell_2)$ (1)

Pentru corpul 2 $\vec{G}_2 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0$, iar scalar $mg + F_{el2} + F_{el1} = 0$

$mg + k(\ell_0 - \ell_2) = k(\ell_0 - \ell_1)$ (2). Din (1) și (2) obținem $2mg = k(\ell_0 - \ell_1)$ (3). Împărțind relația (3) la relația (1) obținem

$$2 = \frac{\ell_0 - \ell_1}{\ell_0 - \ell_2} \Rightarrow \ell_0 = 2\ell_2 - \ell_1 = 24 \text{ cm}$$



b. Constanta elastică a unui resort este $k = \frac{mg}{\ell_2 - \ell_1} = 500 \text{ N/m}$

c. Din condiția de echilibru impusă corpului 1 așezat pe masă, $\vec{N} + \vec{F}_{el1} + \vec{G}_1 = 0$, scalar obținem $N = mg + k(\ell_0 - \ell_1)$. Utilizând relația (3) obținem $N = 3mg = 90 \text{ N}$

39.a. Resorturile se alungesc cu $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ și $\Delta\ell_3$. Alungirea totală este $\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3$. Studiem echilibrul corpurilor 1, 2 și 3.

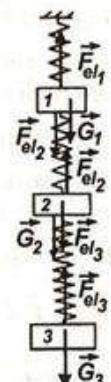
Pentru corpul 3: $\vec{G}_3 + \vec{F}_{el3} = 0$, iar scalar $mg = k\Delta\ell_3$ (1). Pentru corpul 2

$\vec{G}_2 + \vec{F}_{el3} + \vec{F}_{el2} = 0 \Rightarrow mg + k\Delta\ell_3 = k\Delta\ell_2 \Rightarrow k\Delta\ell_2 = 2mg$ (2), iar pentru corpul 1: $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0 \Rightarrow mg + k\Delta\ell_2 = k\Delta\ell_1 \Rightarrow k\Delta\ell_1 = 3mg$ (3)

Din (1), (2) și (3) obținem $\Delta\ell = 6mg/k \Rightarrow \Delta\ell_3 = \Delta\ell/6 = 2 \text{ cm}$

b. $F_{el2} = k\Delta\ell_2 = 2mg = k\Delta\ell/3 = 8 \text{ N}$

c. Dacă două resorturi se leagă în paralel, se formează un nou resort cu constantă elastică $k_p = 2k$. Acest nou resort se leagă în serie cu cel de-al treilea resort, se formează un resort cu constantă echivalentă k_e , astfel că $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_e = \frac{k k_p}{k + k_p} \Rightarrow k_e = 2k/3 = 133,33 \text{ N/m}$



2.5. Legea atracției universale

1. Conform legii atracției universale: $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} = 4,27 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$.

2. Aplicăm legea atracției universale $F = k \frac{m M}{R_{PS}^2} = 3,557 \cdot 10^{22} \text{ N}$.

3. Pe baza legii atracției universale $F = k \frac{m_1 m_p}{r^2} = \frac{1840 k \cdot m_i}{r^2} = 3,618 \cdot 10^{-49} \text{ N}$.

4. Conform datelor problemei $M = \frac{M_p}{9}$, iar $R = \frac{R_p}{4}$. Forța de atracție exercitată de planetă asupra cosmonautului este $F = k \frac{M m}{R^2} = 16 \frac{k M_p m}{9 R_p^2} = \frac{16}{9} \cdot G$.

unde G reprezintă greutatea corpului pe Pământ. Deoarece G este forța cu care Pământul atrage corpul aflat pe suprafață să, atunci

$$G = k \frac{M_p m}{R_p^2} = mg_0 \Rightarrow F = \frac{16}{9} mg_0 \Rightarrow F = 1393,77 \text{ N.}$$

5. Deoarece cosmonautul este în imponderabilitate înseamnă că rezultanta forțelor care se exercită asupra acestuia este nulă. Asupra cosmonautului se exercită forțe de atracție atât de către Pământ, cât și de către Lună, astfel că cele două forțe sunt opuse:
- $$\vec{F}_p + \vec{F}_L = 0 \Rightarrow F_p = F_L \Rightarrow k \frac{mM_p}{x^2} = k \frac{mM_L}{(d-x)^2}, \text{ unde}$$
-

cu m am notat masa corpului. Astfel $81M_L(d-x)^2 = M_Lx^2 \Rightarrow 9(d-x) = x \Rightarrow x = 9d/10 = 3,42 \cdot 10^5 \text{ km}$

6. Prin definiție accelerarea gravitațională este $g = \frac{F}{m} = k \frac{M_p}{r^2} = k \frac{M_p}{(R_p + h)^2}$.

La suprafața Pământului $h=0 \Rightarrow g_0 = \frac{kM_p}{R_p^2}$. Cum $g = \frac{g_0}{2} \Rightarrow k \frac{M_p}{(R_p + h)^2} = \frac{kM_p}{2R_p^2}$
 $\Rightarrow h = R_p(\sqrt{2} - 1) = 2611 \text{ km}$

7. Pe baza definiției accelerării gravitaționale: $g_L = k \frac{M_L}{R_L^2} = \frac{kM_p}{81R_L^2}$.

Cum $d_L = \frac{3}{11}d_p \Rightarrow R_L = \frac{3}{11}R_p \Rightarrow g_L = \frac{121kM_p}{729R_L^2} = \frac{121}{729}g_0 \approx 1,63 \text{ m/s}^2$

8. Conform definiției: $g_1 = \frac{kM_1}{R_1^2}$ și $g_2 = \frac{kM_2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = \frac{1}{2}$.

9. Prin definiție densitatea unui corp este $\rho = \frac{m}{V}$. Conform definiției accelerării

gravitațională la suprafața Pământului este $g_0 = k \frac{M_p}{R_p^2} \Rightarrow M_p = \frac{g_0 R_p^2}{k}$.

Considerând Pământul o sferă, volumul acestuia este

$$V = \frac{4\pi R_p^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3g_0}{4\pi \cdot k R_p} = 5483 \text{ kg/m}^3$$

10. Conform problemei precedente $\rho = \frac{3g}{4\pi \cdot k R}$ la suprafața planetei, iar pe

Pământ $\rho_p = \frac{3g_0}{4\pi \cdot k R_p} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_p} = \frac{gR_p}{g_0 R}$. Cum $g = 2,5 \cdot g_0$ și $R = 3R_p \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_p} = 0,833$

11. Dacă un om sare pe verticală cu viteza inițială v_0 , mișcarea corpului este uniform frânărată cu accelerarea gravitațională a planetei. Înălțimea maximă la care se ridică corpul se obține din ecuația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 - 2gh$ și din $v=0$

$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$. Pe planetă $h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{15v_0^2}{2g} = 15h \Rightarrow \frac{h'}{h} = 15 \Rightarrow$ detinția omului pe

planetă în condițiile în care viteza inițială este tot v_0 , este de 15 ori mai mare decât detinuta același om pe Pământ.

12. În timpul mișcării Pământului în jurul Soarelui, forța de atracție exercitată de Soare joacă rol de forță centripetă, astfel că

$$F_a = F_{cp} \Rightarrow k \frac{M_s M_p}{R^2} = \frac{M_p v^2}{R} \Rightarrow M_s = \frac{v^2 R}{k} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

13. Nava cosmică execută o mișcare de rotație în jurul Pământului, deoarece forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă.

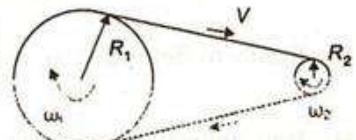
$$F_a = F_{cp} \Rightarrow k \frac{M_p \cdot m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k \cdot M_p}{r}} = \sqrt{\frac{k \cdot M_p}{2R_p}}, \text{ deoarece } r = 2R_p.$$

$$\text{Cum } g_0 = \frac{kM_p}{R_p^2} \Rightarrow kM_p = g_0 R_p^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_p}{2}} = 5,6 \text{ km/s}$$

14. Satelitul geostaționar execută o mișcare de rotație cu perioada de rotație egală cu cea proprie a Pământului. Forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă. Astfel $F_a = F_{cp} \Rightarrow k \frac{M_p \cdot m}{r^2} = m \omega^2 r$. Cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$ iar

$$g_0 = \frac{kM_p}{R_p^2} \Rightarrow kM_p = g_0 R_p^2 \Rightarrow \frac{g_0 R_p^2}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow r = \left(\frac{g_0 R_p^2 T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \approx 42222 \text{ km}$$

2.6. Mișcarea circular uniformă



1. Deoarece lanțul leagă cele două roți, roata mare aflată în mișcare de rotație va antrena și roata mică tot în mișcare de rotație. Viteza liniară a lanțului este aceeași, astfel că: $v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 R_2 / R_1 = 5 \text{ rad/s}$.

2. Pe baza relației dintre perioada de rotație T și viteza unghiulară ω , obținem: $\omega = 2\pi/T = 72,68 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$. Pe baza relației dintre viteza liniară v și viteza unghiulară ω : $v = \omega R = 2\pi R/T = 465,18 \text{ m/s}$.

3. Pe baza relației dintre viteza liniară v și viteza unghiulară ω : $v = \omega R \Rightarrow \omega = v/R = 0,8 \text{ rad/s}$. La efectuarea unui cerc întreg, distanța parcursă de avion este $s = 2\pi R = 6,28 \text{ km}$.

4. Aflăm viteza unghiulară cu care se rotește polizorul: $\omega = v/R$. Cum relația dintre viteza unghiulară și frecvență este $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R} = 5 \text{ rot/s}$.

5. Aflăm perioada de rotație împărțind timpul t la numărul de rotații N astfel că: $T = t/N = 0,5 \text{ s}$. Cum $T = 2\pi/\omega \Rightarrow \omega = 2\pi/T = 12,56 \text{ rad/s}$.

6. Minutarul efectuează o rotație completă într-un interval de timp $T = 1 \text{ h} = 60 \text{ min}$. Dacă într-o perioadă T , vîrful minutarului descrie un cerc cu lungimea $L = 2\pi \ell$, atunci în intervalul de timp Δt , vîrful minutarului descrie un arc de cerc cu lungimea: $s = (2\pi \ell \cdot \Delta t)/T = 1,046 \text{ mm}$.

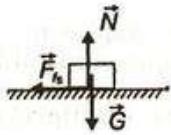
7. Deoarece avionul se deplasează spre vest și Soarele rămâne staționar față de avion, înseamnă că avionul se rotește odată cu Pământul cu viteza unghiulară a acestuia $\omega = 2\pi/T$, unde T este perioada proprie de rotație a Pământului. Viteza avionului se calculează cu ajutorul relației: $v = \omega \cdot R$, unde $R = R_p + h$, reprezintă

distanța de la centrul Pământului până la punctul unde se află avionul, astfel că $v = \frac{2\pi}{T}(R_p + h) = 465,18 \text{ m/s}$.

8. Reprezentăm forțele care acționează asupra mașinii și ținem cont că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$. Cum $\vec{N} + \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$, adică forța de frecare statică joacă rol de forță centripetă, astfel că:

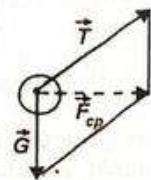
$F_f = \frac{mv^2}{R}$. Condiția ca mașina să nu derapeze este ca forța de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare:

$$F_f \leq F_f \Rightarrow \frac{mv^2}{R} \leq \mu mg \Rightarrow v \leq \sqrt{\mu g R} = 15,81 \text{ m/s} = 56,92 \text{ km/h.}$$



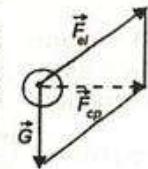
9. Asupra motociclistului acționează normala și greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, deoarece motociclistul execută un viraj. Vectorial: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$

Din figura alăturată: $\tan \alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg} = 0,578 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.



10. Dacă corpul este suspendat în vagon prin intermediul unui dinamometru, corpul se va rota odată cu vagonul descriind un cerc în plan orizontal, astfel că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{F}_{el} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. Greutatea aparentă este forță indicată de dinamometru, adică forță elastică.

$$F_{el} = G_a = \sqrt{F_{cp}^2 + G^2} = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (mg)^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$



Calculăm cu cât la sută este mai mare greutatea aparentă decât greutatea reală:

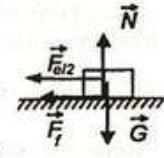
$$\frac{G_a - G}{G} = \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}} - 1 = 96,6 \cdot 10^{-3} \approx 0,1 = 10\%$$

11. Neglijăm cădere pe verticală a glontelui. Pe orizontală între cele două discuri acesta are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza v , astfel că distanța parcursă este $d = vt$, unde t este timpul de mișcare al glontelui între cele două discuri. După ce glonțele produce primul orificiu prin pătrunderea prin primul disc, până la pătrunderea prin discul al doilea, discul al doilea se rotește cu unghiul α , astfel că $\alpha = \omega t = 2\pi n t$. Cum $t = d/v \Rightarrow \alpha = 2\pi n d/v \Rightarrow v = 2\pi n d/\alpha = 300 \text{ m/s}$

12. Considerăm cazul în care nu există frecare. În acest caz rezultanta forțelor este forță centripetă: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{el1} = \vec{F}_{cp1}$, iar scalar forța elastică joacă rol de forță centripetă, astfel că: $k\Delta\ell_1 = m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k(\ell_1 - \ell_0) = m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k\ell_0 = \ell_1(k - m\omega^2) \Rightarrow$

$$\ell_1 = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}, \text{ iar } \Delta\ell_1 = \ell_1 - \ell_0 = \frac{m\omega^2\ell_0}{k - m\omega^2} \quad (1).$$

În cazul existenței forței de frecare, vectorial: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{el2} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp2}$,



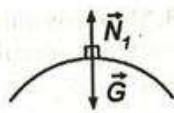
iar scalar: $k\Delta\ell_2 + F_f = m\omega^2\ell_2$, unde $F_f = \mu mg \Rightarrow$

$$k(\ell_2 - \ell_0) + \mu mg = m\omega^2\ell_2 \Rightarrow \ell_2 = \frac{k\ell_0 + \mu mg}{k - m\omega^2} \Rightarrow \Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0 = \frac{m(\omega^2\ell_0 - \mu g)}{k - m\omega^2} \quad (2).$$

Împărțind cele două relații obținem: $\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{\omega^2\ell_0}{\omega^2\ell_0 - \mu g} = 1,33$.

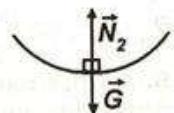
13. Impunem condiția ca rezultanta forțelor ce acționează asupra camionului în punctul superior al podului să joace rol de forță centripetă: $\vec{N}_1 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $mg - N_1 = \frac{mv^2}{R}$, dacă

corpul se deplasează pe podul convex, astfel $N_1 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) = 38,75 \text{ kN}$.



În cazul deplasării pe un pod concav, în punctul inferior al podului vectorial: $\vec{N}_2 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $N_2 - mg = \frac{mv^2}{R}$, astfel

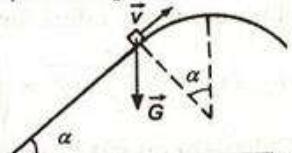
că $N_2 = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = 61,25 \text{ kN}$.



În punctul inferior al podului concav forța de apăsare normală este mai mare decât greutatea corpului, iar în punctul superior al podului convex forța de apăsare normală este mai mică decât greutatea corpului.

14. Asupra seminței când intră pe tambur acționează greutatea și normala. Dacă sămânța se desprinde de bandă, forța de apăsare normală este nulă, iar componenta greutății de-a lungul normalei joacă rol de forță centripetă, astfel că:

$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR \cos \alpha} = 1 \text{ m/s} \Rightarrow$ dacă viteza maximă nu depășește valoarea de 1 m/s, atunci sămânța rămâne pe bandă.

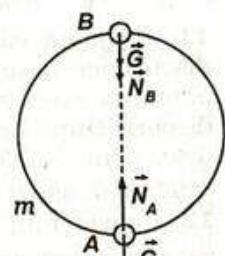


15. În punctele inferior (A) și superior (B) ale traiectoriei, acționează forța de apăsare normală asupra scaunului și greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, astfel că vectorial: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. În punctul inferior al traiectoriei scalar obținem:

$N_A - mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_A = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = 4800 \text{ N}$, iar în punctul

superior al traiectoriei proiectând relația vectorială obținem:

$N_B + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_B = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) = 3200 \text{ N}$.



16. Asupra motociclistului aflat la periferia platformei acționează forța de frecare care joacă rol de forță centripetă. Deoarece motociclistul nu derapează forța de frecare este statică și este mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare, astfel că: $F_{fs} = F_{cp} \Rightarrow F_{cp} \leq F_{fl} \Rightarrow \frac{mv^2}{R} \leq \mu \cdot mg$, unde v reprezintă

viteza cu care se mișcă motociclistul față de sol și se obține prin adunarea vectorială a vitezei platformei la periferie $v_p = \omega R = 2\pi \cdot nR$ și a vitezelor motociclistului față de platformă u , astfel că: $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{u}$.

Dacă motociclistul se deplasează în același sens cu platforma, atunci:

$$v = v_p + u = 2\pi \cdot nR + u \Rightarrow \mu \geq \frac{(2\pi \cdot nR + u)^2}{gR} = 0,777.$$

Dacă motociclistul se deplasează în sens contrar cu platforma, atunci:

$$v = v_p - u = 2\pi \cdot nR - u \Rightarrow \mu \geq \frac{(2\pi \cdot nR - u)^2}{gR} = 0,358.$$

- 17.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, iar rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $N = F_{cp} \Rightarrow N = m\omega^2 R$ și pe Oy : $F_f - G = 0 \Rightarrow mg = F_f$. Conform legii frecării:

$$F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow mg = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}.$$

$$\text{Cum } \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\mu R}} \approx 1 \text{ rot/s.}$$

- 18.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: greutatea și tensiunea din fir, astfel că rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

Pe Ox : $T \sin \alpha = F_{cp} = m\omega^2 R \quad (1)$ și pe Oy : $T \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow T \cos \alpha = mg \quad (2)$

$$\text{Împărțind cele două relații obținem: } \tan \alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Din geometrie raza de rotație R este: $R = l \sin \alpha$, astfel că $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$, iar

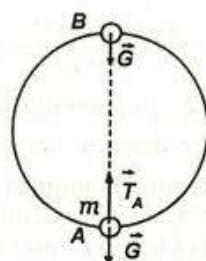
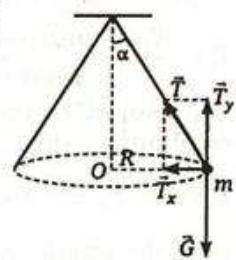
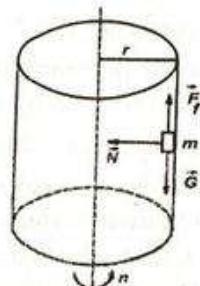
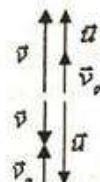
$$\text{perioada de rotație este: } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} \approx 0,77 \text{ s.}$$

- b.** Tensiunea în fir este: $T = \frac{mg}{\cos \alpha} = 2 \text{ N.}$

- 19.a.** Deoarece apa nu curge din găleată în niciun punct al traectoriei, înseamnă că nu curge nici când găleata se află în punctul superior al traectoriei cu gura în jos. În acest caz, considerăm că greutatea apei joacă rol de forță centripetă, deoarece considerăm că: $G = F_{cp} \Rightarrow m_a g = m_a \omega^2 l$, iar cum

$$\omega = 2\pi\nu \text{ obținem } g = 4\pi^2 v^2 l \Rightarrow v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 0,712 \text{ rot/s}$$

- b.** Datorită condiției de la punctul precedent obținem că în punctul superior al traectoriei tensiunea în fir este nulă. În punctul inferior al traectoriei rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T - mg = m\omega^2 l \Rightarrow T = 2mg = 80 \text{ N.}$ Deci în punctul inferior al traectoriei tensiunea în sfoară are valoarea maximă.



c. Dacă frecvența se dublează $\nu' = 2\nu \Rightarrow \omega' = 2\pi\nu' = 2\omega$. În punctul superior asupra găleșii acționează și tensiunea T' , alături de greutate, astfel că rezultanta acestora este forță centripetă: $\vec{G} + \vec{T}' = \vec{F}_{cp}$. Scalar obținem:

$$G + T' = F_{cp} \Rightarrow mg + T' = m\omega'^2 l = 4m\omega^2 l \Rightarrow mg + T' = 4mg \Rightarrow T' = 3mg = 120 \text{ N.}$$

20. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă.

Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate:

pe Ox : $T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = m\omega^2 R$, unde R este raza de rotație și din geometrie $R = l_1 \sin \alpha$ și pe Oy : $T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta - mg = 0$.

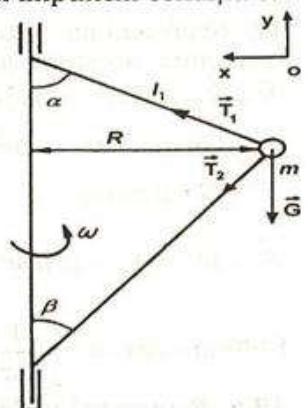
Obținem sistemul de ecuații:

$$T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = m\omega^2 l_1 \sin \alpha \text{ și } T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta - mg = 0.$$

Rezolvând sistemul de ecuații obținem:

$$T_2 = \frac{m(\omega^2 l_1 \cos \alpha - g) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 0,865 \text{ N și}$$

$$T_1 = \frac{m(\omega^2 l_1 \sin \alpha \cos \beta + g \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 5,5 \text{ N.}$$



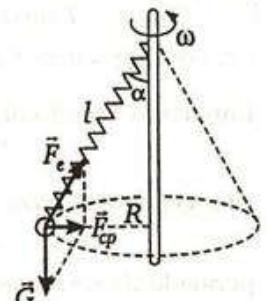
21. Asupra corpului acționează atât greutatea cât și forță elastică, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă:

$\vec{G} + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg}$, iar $R = l \sin \alpha$ reprezintă raza de rotație în plan orizontal, iar l reprezintă noua lungime a resortului, astfel că $l = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{F_{el}}{k}$.

Deoarece $\cos \alpha = \frac{mg}{F_{el}}$ ⇒ $F_{el} = \frac{mg}{\cos \alpha} \Rightarrow l = l_0 + \frac{mg}{k \cos \alpha}$. Din

geometrie: $\tan \alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2}{g} (l_0 + \frac{mg}{k \cos \alpha}) \sin \alpha \Rightarrow$

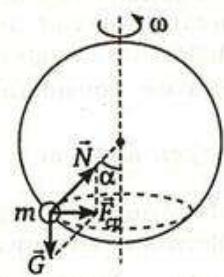
$$1 = \frac{\omega^2 (k l_0 \cos \alpha + mg)}{kg} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{kg}{k l_0 \cos \alpha + mg}} \approx 6,32 \text{ rad/s}$$



22. Reprezentăm forțele care acționează asupra bilei, iar rezultanta lor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, deoarece asupra bilei acționează atât greutatea ei cât și reacțiunea normală exercitată de inel. Bila execută un cerc în plan orizontal cu raza R_1 .

Din desen $\tan \alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R_1}{mg}$, unde $R_1 = R \sin \alpha \Rightarrow$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\omega^2 R \sin \alpha}{g} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

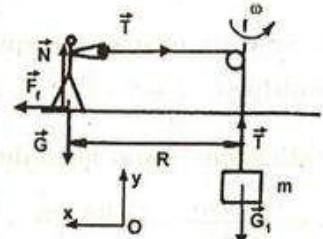


23. Studiem mișcarea accelerată în sus a corpului cu masa m : $\vec{T} + \vec{G}_1 = m \cdot \vec{a}$, iar scalar $T - mg = ma$. Studiem mișcarea de rotație a omului aflat pe platformă. Reprezentăm forțele care acționează asupra lui și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial se obține $\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$ și prin proiecția relației vectoriale pe axele de coordonate obținem: pe Ox :

$$T - F_f = F_{cp} = M\omega^2 R \text{ și pe } Oy: N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow$$

$$T = M(\omega^2 R + \mu g) \Rightarrow a_{max} = \frac{M}{m}(\omega^2 R + \mu g) - g = 50 \text{ m/s}^2. \text{ Studiem celălalt caz, când asupra omului forța de frecare își schimbă sensul, astfel că } T + F_f = F_{cp} = M\omega^2 R \Rightarrow T = M(\omega^2 R - \mu g) \Rightarrow a_{min} = \frac{M}{m}(\omega^2 R - \mu g) - g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Dacă accelerarea cu care omul ridică masa m este cuprinsă între $a \in (10, 50) \text{ m/s}^2$ atunci omul rămâne în repaus față de platformă.

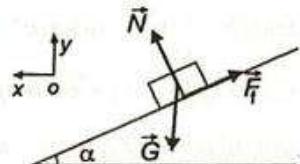


24. Reprezentăm forțele care acționează asupra motociclistului și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

$$\text{Pe } Ox: N \sin \alpha - F_f \cos \alpha = m\omega^2 R \text{ și pe } Oy:$$

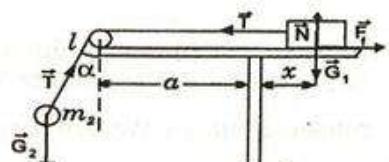
$$N \cos \alpha + F_f \sin \alpha - mg = 0.$$



$$\text{Conform legii frecării: } F_f = \mu N \Rightarrow N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{R(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)}} \approx 1,825 \text{ rad/s, iar accelerarea centripetă este } a_{cp} = \omega^2 R \approx 6,66 \text{ m/s}^2.$$

25. Studiem mișcarea de rotație în plan orizontal a corpului cu masa m_2 . Rezultanta tensiunii și a greutății joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{T} + \vec{G}_2 = \vec{F}_{cp}$.



$$\text{Din geometrie: } \cos \alpha = \frac{m_2 g}{T} \Rightarrow T = \frac{m_2 g}{\cos \alpha} = 2 \text{ N.}$$

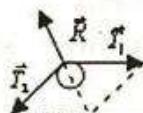
Reprezentăm forțele care acționează asupra axului scripetelui și deoarece acesta este ideal și nu are masă rezultanta acestora este nulă:

$$\text{Astfel: } \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2). \text{ Scalar: } R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90^\circ + \alpha).$$

$$\text{Cum } T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \approx 1,04 \text{ N.}$$

b. Dar pentru corpul m_2 $T \sin \alpha = F_{cp} \Rightarrow m_2 g \operatorname{tg} \alpha = m_2 \omega^2 R$, unde R este raza de rotație a corpului cu masa m_2 .

$$\text{Din geometrie } R = a + \ell \sin \alpha \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{a + \ell \sin \alpha}} \approx 5,63 \text{ rad/s}$$



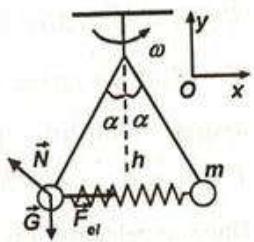
c. Studiem mișcarea corpului cu masa m_1 . Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$, iar scalar: $T - F_f = m_1\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{T - \mu m_1 g}{m_1 \omega^2} \Rightarrow x = 25,25 \text{ cm}$. Când forța de frecare acționează în sens contrar, $T + F_f = m_1\omega^2 x \Rightarrow x = \frac{T + \mu m_1 g}{m_1 \omega^2} = 37,88 \text{ cm}$.

26. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărei bile și impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{cp}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:
pe Ox : $F_{el} - N \cos \alpha = F_{cp} = m\omega^2 R$ și

$$\text{pe } Oy: N \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

Cum $F_{el} = kx \Rightarrow kx - mg \cdot \operatorname{ctg} \alpha = m\omega^2 R$, unde R este raza cercului orizontal descris de fiecare bilă. Din geometrie $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h} \Rightarrow R = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$, iar $F_{el} = k(2R - \ell_0) = k(2h \cdot \operatorname{tg} \alpha - \ell_0) \Rightarrow k(2h \cdot \operatorname{tg} \alpha - \ell_0) - mg \cdot \operatorname{ctg} \alpha = m\omega^2 h \cdot \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow 2kh \cdot \operatorname{tg} \alpha - m\omega^2 h \cdot \operatorname{tg} \alpha = k\ell_0 + mg \cdot \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow h = \frac{k\ell_0 + mg \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{(2k - m\omega^2) \cdot \operatorname{tg} \alpha} \approx 65,63 \text{ cm}$.



27. Greutatea unui corp se determină prin suspendarea acestuia de un dinamometru și forța indicată de dinamometru este greutatea măsurată a corpului. Dacă suspendăm corpul de dinamometru la pol, în imediata vecinătate a Pământului, greutatea corpului este egală cu forța elastică, astfel că la pol dinamometrul indică greutatea reală $G = mg_0$, unde g_0 reprezintă acceleratia gravitațională în imediata vecinătate a Pământului.

La pol la altitudinea h , greutatea este $G_p = F_{el}$ și din legea atracției universale

$$\text{forța de atracție este: } F_a = G_p = \frac{kmM}{(R_p + h)^2}, \text{ astfel că } F_{el} = \frac{kmM}{(R_p + h)^2}.$$

La ecuator asupra corpului acționează atât forța de atracție a Pământului cât și forța elastică, iar rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, deoarece corpul se rotește odată cu Pământul cu viteza unghiulară $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a Pământului. T este perioada proprie de rotație a Pământului.

Astfel: $F_{a_E} - F_{el} = F_{cp} \Rightarrow F_{el} = F_{a_E} - m\omega^2 R_p$. La ecuator forța de atracție în imediata vecinătate a Pământului este: $F_{a_E} = \frac{kmM}{R_p^2}$, deoarece se consideră Pământul sferic

cu raza R_p .

Deoarece greutatea unui corp este aceeași ca la ecuator, atunci

$$\frac{kmM}{(R_p + h)^2} = \frac{kmM}{R_p^2} - m\omega^2 R_p \Rightarrow R_p + h = \sqrt{\frac{kmR_p^2}{km - \omega^2 R_p^3}} \Rightarrow h = R_p \left(\sqrt{\frac{km}{km - \omega^2 R_p^3}} - 1 \right)$$

$$\text{Cum } \rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho \frac{4\pi R_p^3}{3} \Rightarrow h = R_p \left(\sqrt{\frac{k\rho T^2}{k\rho T^2 - 3\pi}} - 1 \right) \approx 11 \text{ km}$$

28. La ecuatorul asteroidului forța de atracție compusă cu forța indicată de dinamometru (greutatea măsurată) joacă rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o mișcare de rotație împreună cu asteroidul și cu perioada de rotație a acestuia. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{F}_a = \vec{F}_{cp}$. Deoarece corpul pare fără greutate resortul dinamometrului nu este întins și prin urmare $F_{el} = 0$, iar $F_a = F_{cp} \Rightarrow k \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow \frac{kM}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R$, unde M reprezintă masa asteroidului. Obținem $M = \rho \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3\pi}{kT^2} = 1210 \text{ kg/m}^3$.

29. Asupra satelitului acționează forța de atracție care joacă rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow k \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R_p} = mg_0 \Rightarrow v = \sqrt{g_0 R_p} \approx 7,9 \text{ km/s}$. Valoarea $v=7,9 \text{ km/s}$ reprezintă prima viteza cosmică, adică viteza unui satelit care se rotește chiar la suprafața Pământului.

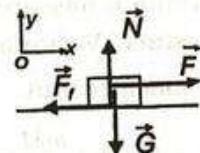
30. Impunem condiția ca forța de atracție exercitată de planetă asupra navei玄ice să joace rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow k \frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h} \Rightarrow kM = v^2(R+h)$, unde M este masa planetei și R raza ei. Din definiția accelerării gravitaționale: $g = \frac{F_a}{m} = \frac{kM}{R^2} = \frac{v^2(R+h)}{R^2} \approx 1,4 \text{ m/s}^2$.

3.1. Lucrul mecanic. Puterea mecanică

a. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a mașinii este $L_G = 0$, deoarece greutatea este perpendiculară pe direcția de mișcare.

b. Studiem mișcarea uniformă a mașinii de spălat:

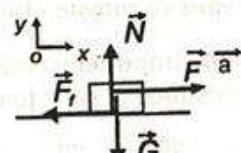
$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Scalar pe Ox: $F - F_f = 0 \Rightarrow F = F_f$ și pe Oy: $N - G = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de forța de impingere este $L_F = Fd = \mu mgd = 2400 \text{ J}$



c. În cazul forței de frecare $L_{F_f} = F_f d \cos 180^\circ$, deoarece forța de frecare își deplasează punctul de aplicare pe direcția de deplasare pe distanța d , dar are sens opus. Astfel $L_{F_f} = -\mu mgd = -2400 \text{ J}$. Deoarece mașina de spălat se mișcă uniform, lucru mecanic al forței de impingere este compensat de lucru mecanic al forței de frecare.

2.a. Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox: $F - F_f = ma$ și pe Oy: $N - mg = 0$.



Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu g = 4 \text{ m/s}^2$.

Aflăm distanța pe care se deplasează corpul în timpul t din relația:

$d = v_m \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{at^2}{2}$, deoarece mișcarea corpului este rectilinie uniform

accelerată și din definiție: $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow L_F = F \cdot d = \frac{Fat^2}{2} = 20 \text{ J}$

b. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mgd = -\frac{\mu \cdot mgat^2}{2} = -4 \text{ J}$.

c. Prin definiție puterea mecanică instantanee este $P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

deoarece pentru un interval de timp foarte scurt $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{d}/\Delta t$.

Din $v = at \Rightarrow P = Fat_1 = 20 \text{ W}$, deoarece vectorul forță și vectorul viteza au aceeași direcție și sens.

3.a. Conform definiției lui lucrului mecanic efectuat de greutatea unui corp: $L_G = mgh$, unde h este înălțimea pe care coboară corpul. Cum corporile cad

liber sub acțiunea greutății cu accelerarea g , după timpul t , $h = v_m t = \frac{gt^2}{2}$,

deoarece $v_m = \frac{gt}{2} = \frac{gt^2}{2}$, astfel că $L_G = \frac{mg^2 t^2}{2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{m_1 t_1^2}{m_2 t_2^2} = \frac{1}{8} = 0,125$.

b. Prin definiție puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t}$, iar în cazul greutății este

$$P_m = \frac{mgh}{t} = \frac{mg^2 t}{2} \Rightarrow \frac{P_{m1}}{P_{m2}} = \frac{m_1 t_1}{m_2 t_2} = 0.25$$

c. Lucrul mecanic total al greutății care acționează asupra corpului 1 este $L_G = L_c + L_u$, unde L_c reprezintă lucru mecanic efectuat de greutate la coborârea corpului 1 și L_u reprezintă lucru mecanic efectuat de greutate la urcarea corpului 1. Astfel $L_c = mgh$, deoarece la coborâre greutatea ajută la mișcare și este o forță motoare, iar $L_u = -mgh$, deoarece la urcare greutatea nu ajută la mișcare și este o forță rezistivă. Astfel $L_G = 0$, deoarece greutatea este o forță de tip conservativ iar lucrul ei mecanic pe un drum închis este zero.

4.a. Conform definiției lui mecanic efectuat de tensiunea din cablu: $L = TH$, cu $H = 5h$, unde h este înălțimea medie a unui etaj, iar T este tensiunea în cablul de susținere al liftului. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = m\vec{a}$, iar scalar $T - mg = ma \Rightarrow T = m(a + g) \Rightarrow L = 5m(a + g)h = 44$ kJ

b. $L_G = -mgH = -5mgh = -40$ kJ

c. Prin definiție puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{TH}{\Delta t} = T v_m$, unde v_m reprezintă viteza medie a liftului. Cum $H = v_m t = at^2 / 2 \Rightarrow t = \sqrt{2H/a}$, deoarece

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2} = \frac{\sqrt{2ah}}{2} \Rightarrow P_m = m(g + a) \frac{\sqrt{2ah}}{2} = 8,8 \text{ kW}$$

5.a. Studiem mișcarea corpului. Vectorial:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$$

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe Ox : $F \cos \alpha - F_f = ma$ și pe Oy :

$$F \sin \alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$F \cos \alpha - \mu mg + \mu F \sin \alpha = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$L_F = F d_1 \cos \alpha = \frac{m(a + \mu g)d_1}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{m(a + \mu g)d_1}{1 + \mu \tan \alpha} \approx 9,45 \text{ J}$$

b. Lucrul mecanic al normalei este $L_N = 0$, deoarece forța normală este în permanență perpendiculară pe direcția de mișcare

c. Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = F_f d_3 \cos 180^\circ = -\mu N d_3$

$$N = mg - F \sin \alpha = mg - \frac{m(a + \mu g) \sin \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \Rightarrow$$

$$L_{F_f} = -\frac{\mu m(g \cos \alpha - a \sin \alpha) d_3}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = -2,67 \text{ J}$$

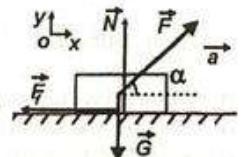
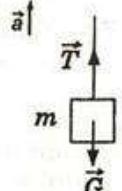
6.a. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L = Fd \cos \alpha = 207,6$ J

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este

$$L_{F_f} = F_f d \cos 180^\circ = -F_f d$$

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow L_{F_f} = -\mu N d$. Din proiecția pe axa Oy :

$$F \sin \alpha + N = mg \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F \sin \alpha)d = -8 \text{ J}$$



c. Utilizăm formula puterii medii: $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{Fd \cos \alpha}{\Delta t} = Fv_m \cos \alpha = \frac{Fv}{2} \cos \alpha$, unde

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2}. Studiem mișarea corpului: \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}.$$

Din proiecția pe axa Ox obținem:

$$\begin{aligned} F \cos \alpha - F_f &= ma \Rightarrow F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a = F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)/m - \mu g \\ &\Rightarrow a \approx 12,475 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

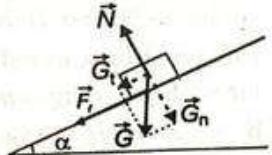
$$\text{Cum } d = v_m t = \frac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \Rightarrow v_m = \frac{\sqrt{2ad}}{2} \approx 5 \text{ m/s, astfel că } P_m \approx 259,5 \text{ W}$$

7.a. Conform definiției lucrului mecanic al forței de frecare este: $L_{F_f} = F_f d \cos 180 = -F_f d$. Conform legii frecării: $F_f = \mu_m N = \mu_m mg \cos \alpha$, unde coeficientul de frecare mediu μ_m se calculează prin media aritmetică a valorilor coeficienților de frecare din punctul de lansare și punctul de oprire. Deoarece coeficientul de frecare descrește uniform, valoarea medie este:

$$\mu_m = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \Rightarrow L_{F_f} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd \cos \alpha = -8,65 \text{ J}$$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este $L_G = -mgd \sin \alpha = -25 \text{ J}$, deoarece greutatea este o forță rezistivă și nu ajută la mișarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de apăsare este $L_N = 0$, deoarece forța de apăsare normală \vec{N} este perpendiculară pe traiectorie



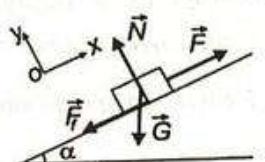
8.a. Puterea furnizată de motor este $P = Fv = 20 \text{ kW}$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul deplasării blocului de piatră este $L_{F_f} = F_f d \cos 180 = -F_f d$.

Deoarece blocul de piatră este tras uniform: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar pe Ox:

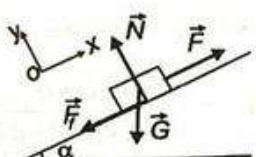
$$F - F_f - G \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_f = F - G \sin \alpha \Rightarrow L_{F_f} = -(F - G \sin \alpha)d = -20 \text{ kJ}$$

c. Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra blocului pe distanța OA este nulă, deoarece blocul este ridicat uniform, astfel că rezultanta forțelor care acționează asupra blocului este nulă.



9.a. Deoarece corpul este ridicat uniform pe planul înclinat, atunci rezulanta forțelor este nulă, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, unde F reprezintă o forță de tracțiune paralelă cu planul. Proiectăm pe Ox: $F - mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy: $N - mg \cos \alpha = 0$.

Cum $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. Astfel puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă este $P = Fv \Rightarrow P = mgv(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 3,75 \text{ W}$



b. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea acestuia până în vârful planului inclinat este $L_G = -mgh = -5$ J, deoarece greutatea este o forță rezistivă neajutând la urcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{F_f} = F_f d \cos 180 = -\mu N d \Rightarrow L_{F_f} = -\mu m g h \operatorname{ctg} \alpha = -2,5$ J, deoarece între distanța parcursă de corp pe plan și înălțimea planului există relația $h = d \sin \alpha$

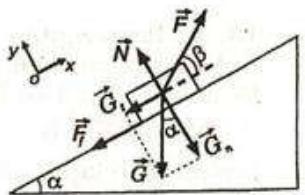
10.a. Lucrul mecanic efectuat de forța F este $L_F = F d \cos \beta$. Împunem condiția de mișcare uniformă a corpului $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$.

Proiectăm pe axa Ox : $F \cos \beta - mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe axa Oy : $F \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0$.

Din $F \cos \beta - mg \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha + \mu F \sin \beta = 0 \Rightarrow$

$$F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) \Rightarrow F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \Rightarrow$$

$$L_F = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} d \cos \beta \approx 2,57 \text{ J}$$



b. $L_G = -G_h = -G d \sin \alpha = -2$ J, deoarece greutatea corpului nu ajută la mișcarea corpului

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{F_f} = F_f d \cos 180 = -F_f d$. Deoarece forța de tracțiune este paralelă cu planul, atunci $\beta=0$, astfel că $F_f = \mu N = \mu m g \cos \alpha \Rightarrow L_{F_f} = -\mu m g d \cos \alpha = -1$ J

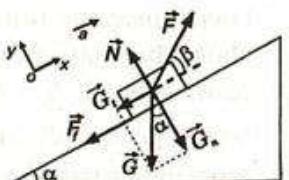
11.a. Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate și obținem pe Ox : $F \cos \beta - mg \sin \alpha - F_f = ma$ și

pe Oy : $F \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0$ ⇒

Cum $F_f = \mu N = \mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) \Rightarrow$

$$F \cos \beta - mg \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha + \mu F \sin \beta = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \Rightarrow F \approx 20,163 \text{ N} \Rightarrow L = F d \cos \beta \approx 71,07 \text{ J}.$$



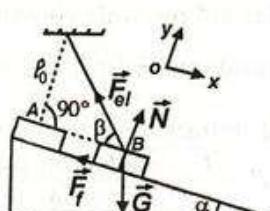
b. $L_N = 0$, deoarece normală este perpendiculară pe direcția de deplasare.

c. $L_{F_f} = F_f \cdot d \cdot \cos 180^\circ = -\mu N d = -\mu(mg \cos \alpha - F \sin \beta) d \approx -3,61 \text{ J}$.

12.a. Alungirea firului în poziția de echilibru este $\Delta l = l - l_0$, unde $l = l_0 / \sin \beta$, astfel că

$$\Delta l = l_0 (1/\sin \beta - 1) = 20,5 \text{ cm}$$

b. Lucrul mecanic al greutății corpului este $L_G = mgh = mgAB \sin \alpha$, unde $AB = l_0 \operatorname{ctg} \beta$, astfel că $L_G = mg l_0 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha = 2,5 \text{ J}$



c. Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm pe Oy : $F_{el} \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - k\Delta\ell \sin \beta \approx 5,76 \text{ N}$

d. Proiectând ecuația vectorială pe Ox obținem: $mg \sin \alpha - F_{el} \cos \beta - F_f = 0$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{mg \sin \alpha - k\Delta\ell \cos \beta}{mg \cos \alpha - k\Delta\ell \sin \beta} \approx 0,366$

13. a. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

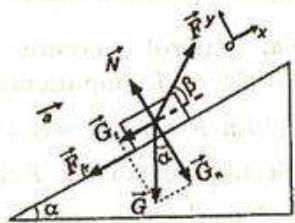
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe axa Oy :

$$N + F \sin \beta - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha - F \sin \beta = 900 \text{ N}$$

b. Pe axa Ox : $F \cos \beta - F_f - mg \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_f = F \cos \beta - mg \sin \alpha = 200 \text{ N}$, astfel că din legea a doua a forței de frecare $F_f = \mu N$ obținem $\mu = \frac{F_f}{N} \approx 0,22$

c. Puterea dezvoltată de motor este $P = Fv \cos \beta = 800 \text{ W}$



14.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{ff} = F_f \ell \cos 180 = -\mu N \ell = -\mu m g \ell \cos \alpha = -1,25 \text{ kJ}$

b. Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucru mecanic util și lucru mecanic consumat: $\eta = \frac{L_u}{L_c}$.

Lucrul mecanic util este efectuat de o forță \vec{F}_1 paralelă cu planul înclinat, care ridică uniform și fără frecare corpul pe plan, astfel că $L_u = F_1 \ell$. Cum $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} = 0$,

scalar pe Ox : $F_1 = mg \sin \alpha \Rightarrow L_u = m g \ell \sin \alpha = mgh$, unde h reprezintă înălțimea la care urcă corpul.

Dacă corpul se deplasează uniform cu frecare pe aceeași distanță ℓ sub acțiunea forței \vec{F}_2 paralelă cu planul înclinat, lucru mecanic consumat este $L_c = F_2 \ell$.

Cum $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, scalar prin proiecția relației pe axe de coordonate obținem pe Ox : $F_2 - mg \sin \alpha - F_f = 0$ și pe Oy :

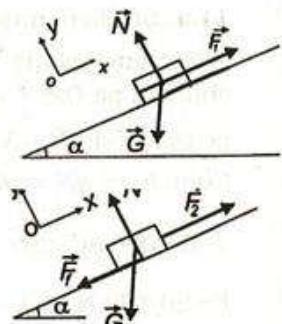
$$N - mg \cos \alpha = 0. \text{ Cum } F_f = \mu N = \mu m g \cos \alpha \Rightarrow F_2 = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Lucrul mecanic consumat este $L_c = m g \ell (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = mgh(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) \Rightarrow$

randamentul rampei este: $\eta = \frac{1}{1 + \mu \cdot \operatorname{ctg} \alpha} \approx 66,66\%$

c. Puterea medie necesară ridicării lăzii pe rampă este:

$$P_m = \frac{L_c}{\Delta t} = \frac{m g \ell (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\Delta t} = 187,5 \text{ W}$$



15.a. Luărul mecanic util pentru urcarea uniformă a unui corp se efectuează împotriva greutății corpului, astfel că $L_u = -L_G = mgh = mg\ell \sin \alpha$, unde ℓ reprezintă distanța urcată de corp pe planul inclinat.

Luărul mecanic consumat este luărul mecanic efectuat de o forță constantă paralelă cu planul care determină urcarea uniformă cu frecare a corpului pe planul inclinat.

Astfel $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Proiectând pe Ox obținem:

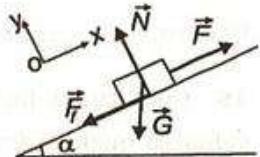
$$F - mg \sin \alpha - F_f = 0 \text{ și pe } Oy: N - mg \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Cum } F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

$$L_c = mg\ell(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = mg\ell \sin \alpha + \mu mg\ell \cos \alpha = L_u - L_f = 2500 \text{ J}$$

b. Prin definiție randamentul unui plan inclinat este definit prin raportul dintre luărul mecanic util și luărul mecanic consumat: $\eta = \frac{L_u}{L_c} = 80\%$

$$\text{c. Din } L_u = -L_G = mgh \Rightarrow h = \frac{L_u}{mg} = 20 \text{ m}$$



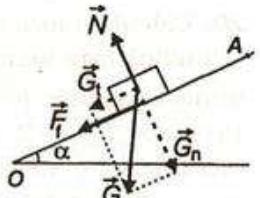
16.a. Studiem mișcarea corpului pe planul inclinat. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar scalar pe direcția de mișcare $-mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ (1)

Din grafic determinăm accelerarea corpului la urcare $a_u = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v_0}{t_u} = -3 \text{ m/s}^2$, deoarece $v_0 = 9 \text{ m/s}$ și $t_u = 3 \text{ s}$

Studiem coborârea corpului pe planul inclinat. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mișcare $mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ (2).

Din grafic determinăm accelerarea corpului la coborâre

$$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t_c} = 1,2 \text{ m/s}^2, \text{ deoarece } v = 6 \text{ m/s și } t_c = 5 \text{ s}$$



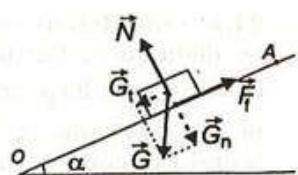
$$\text{Din (1)+(2) obținem } \sin \alpha = \frac{|a_u| + a_c}{2g} = 0,21$$

$$\text{b. Din (1)-(2) obținem } \mu = \frac{|a_u| - a_c}{2g \cos \alpha} = 0,092, \text{ deoarece } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx 0,978$$

c. Calculăm distanța parcursă de corp la urcare cu ajutorul ariei triunghiului delimitat de axa vitezei, axa timpului și graficul vitezei. Astfel $d_u = 13,5 \text{ m}$, iar la coborâre distanța parcursă este $d_c = 15 \text{ m}$, adică aria dintre graficul vitezei, axa timpului și ordonata construită în punctul $t=8 \text{ s}$. Astfel

$$\text{luărul mecanic total efectuat de forța de frecare este } L_{ff} = F_f(d_u + d_c) \cos 180^\circ$$

$$L_{ff} = -\mu mg(d_u + d_c) \cos \alpha = -2,56 \text{ J}$$



17. Deoarece forța nu este constantă, dar este reprezentată în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței, axa de coordonate Ox și ordonatele duse prin extremitățile x_1 și x_2 reprezintă fizic luărul mecanic. În cazul nostru

figura geometrică este un trapez, astfel că aria acestuia este:

$$L = \frac{(F_1 + F_2)(x_2 - x_1)}{2}.$$

Deoarece $F_1 = ax_1 \Rightarrow a = \frac{F_1}{x_1}$, iar $F_2 = ax_2 = \frac{F_1 x_2}{x_1} \Rightarrow L = \frac{F_1(x_2^2 - x_1^2)}{2x_1} = 1,2 \text{ J.}$

- 18.** Conform definiției lucrului mecanic: $L = F_m(x_2 - x_1)$, unde F_m reprezintă valoarea medie a forței. Deoarece forța F depinde liniar de coordonată, valoarea medie a forței F se calculează cu ajutorul mediei aritmetice a valorilor de la capetele intervalului, astfel că: $F_m = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2} = 5 \text{ N}$, deoarece pentru $x_1 = 1 \text{ m} \Rightarrow F_1 = 8 \text{ N}$ și pentru $x_2 = 4 \text{ m} \Rightarrow F_2 = 2 \text{ N}$. Prin urmare obținem $L = 15 \text{ J.}$

- 19.** Conform interpretării geometrice a lucrului mecanic, dacă forța F este reprezentată grafic în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței și axa coordonatelor reprezintă fizic lucru mecanic. Obținem: $L_F = 14 \text{ J.}$

- 20.** Calculăm aria cuprinsă între curba forței și axa coordonatelor. Aceastăarie semnifică fizic lucru mecanic, astfel că: $L_F = L_1 + L_2 + L_3$. Astfel $L_1 = 8 \text{ J} \Rightarrow$ pe prima porțiune forța este motoare, deoarece lucru ei mecanic este pozitiv. Deoarece $L_2 = -2 \text{ J} \Rightarrow$ pe a doua porțiune forța este rezistivă, deoarece lucru ei mecanic este negativ și pe treia porțiune forța este tot rezistivă, astfel că $L_3 = -1 \text{ J}$. În total $L_F = 5 \text{ J.}$

- 21.a.** Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe asfalt pe distanță x . Deoarece scândura se deplasează uniform cu ajutorul unei forțe orizontale, atunci $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar pe Ox : $F = F_f = \mu N$, iar pe Oy : $N = G_x$, unde m_x reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porțiunii cu lungimea ℓ este

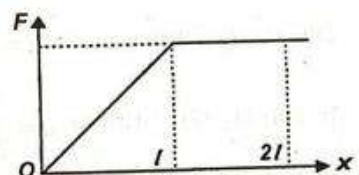
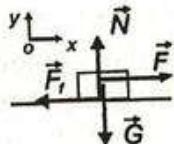
$$m_x = \frac{mx}{\ell} \Rightarrow F = F_f = \frac{\mu mgx}{\ell}.$$

Deoarece forța depinde direct proporțional de x reprezentarea ei grafică este redată în figura alăturată.

Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, acesta este egal cu aria cuprinsă între curba forței, axa Ox și ordonatele construite prin extremități. Când $x_1 = \ell/3 \Rightarrow F = \mu mg/3$, iar aria este un triunghi dreptunghic, astfel că $L = Fx_1/2 = \mu mg\ell/18 = 30 \text{ mJ}$

b. Când scândura pătrunde în întregime pe asfalt forța cu care trage elevul scândura atinge valoarea maximă $F_{max} = \mu mg$, astfel lucru mecanic total este $L = \mu mg\ell/2 = 0,27 \text{ J}$

c. După ce pătrunde pe lungimea ℓ pe asfalt, forța cu care trage elevul scândura pentru ca aceasta să se miște uniform este $F = F_{max} = \mu mg = \text{const}$, astfel că lucru mecanic suplimentar efectuat de elev astfel ca scândura să mai pătrundă pe distanță $x = \ell$ este $L_s = \mu mg\ell$. Lucru mecanic total este $L = L_t + L_s = 3\mu mg\ell/2 = 0,81 \text{ J}$



22.a. Deoarece forța de tracțiune este egală cu forța de deformare elastică, atunci $F=kx \Rightarrow k=F/x=100 \text{ N/m}$

b. În timpul deplasării uniforme a corpului $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, astfel că scalar

$$F = F_{el} = F_f \Rightarrow kx_m = \mu mg \Rightarrow x_m = \frac{\mu mg}{k} = 4 \text{ cm.}$$

c. Pe baza interpretării grafice a lucrului mecanic lucrul mecanic efectuat de forță F care trage de resort, în timpul deformării resortului de la x_1 la x_2 reprezintă aria trapezului cuprins între forță, axa Ox și cele două ordonate construite prin x_1 și x_2 , astfel că $L = \frac{(F_1 + F_2)(x_2 - x_1)}{2} = 60 \text{ mJ}$

23. Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă $\Delta\ell$ este $L_1 = \frac{k}{2} \left(\frac{\Delta\ell}{3} \right)^2 = \frac{k\Delta\ell^2}{18}$.

Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi este $L_2 = \frac{k\Delta\ell^2}{2} - \frac{k\Delta\ell^2}{18} = \frac{4}{9}k\Delta\ell^2$. Împărțim cele două lucruri mecanice și obținem:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow L_1 = \frac{L_2}{8} \Rightarrow \text{lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă este de opt ori mai mic decât lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi.}$$

24. Pentru a alungi un resort cu $\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L = \frac{k\Delta\ell^2}{2}$.

Pentru a alungi resortul cu $3\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L' = \frac{9k\Delta\ell^2}{2}$ și deci lucrul mecanic suplimentar este $L_s = L' - L = 4k\Delta\ell^2$.

$$\text{Cum } F = k\Delta\ell \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta\ell} \Rightarrow L_s = 4F\Delta\ell = 0,08 \text{ J.}$$

25.a. Deoarece puterea dezvoltată de forță de tracțiune este constantă, din $P = F_nv_1 \Rightarrow F_n = \frac{P}{v_1} = 4 \text{ kN}$. Studiem mișcarea corpului când asupra acestuia acționează R_1 . Deoarece Vectorial $\vec{F}_n + \vec{N} + \vec{G} + \vec{R}_1 = m\vec{a}_1$ și scalar

$$F_n - R_1 = ma_1 \Rightarrow a_1 = \left(\frac{P}{v_1} - R_1 \right) / m = 5 \text{ m/s}^2$$

b. Când autoturismul are viteza v_2 , $F_{t2} - R_2 = ma_2 \Rightarrow R_2 = F_{t2} - ma_2 \Rightarrow R_2 = P/v_2 - ma_2 = 2 \text{ kN}$

c. Când autoturismul atinge valoarea maximă v_3 , rezultanta forțelor care se opun mișcării devine R_3 . În acest caz forța de tracțiune este egală cu R_3 , astfel că

$$F_{t3} = R_3. \text{ Din expresia puterii } P = F_{t3}v_3 = R_3v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{P}{R_3} = 20 \text{ m/s}$$

26.a. Studiem mișcarea uniformă a camionului în cazul în care drumul este orizontal. Vectorial $\vec{F}_{t0} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{R} = 0$, astfel că scalar pe direcția mișcării se obține $F_{t0} = R$. Cum $P_0 = F_{t0}v_0$, relația cerută este $P_0 = Rv_0$ (1).

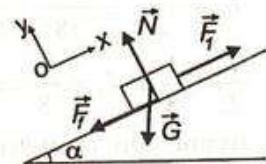
b. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta urcă drumul de pantă p . Vectorial $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{R} = 0$, iar scalar în sensul mișcării se obține: $F_1 - G \sin \alpha - R = 0$, unde $\sin \alpha = p$. Din $P_1 = F_1 v_0$ obținem relația cerută $P_1 = (Gp + R) \cdot v_0$ (2).

c. Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta coboară drumul de pantă p . Vectorial $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{R} = 0$, iar scalar în sensul mișcării se obține: $F_2 + G \sin \alpha - R = 0$, unde $\sin \alpha = p$. Din $P_2 = F_2 v_0$ obținem relația cerută $P_2 = (R - Gp) \cdot v_0$ (3).

d. Adunând relațiile (2) cu (3) obținem $R = \frac{P_1 + P_2}{2v_0}$ astfel că introducând în

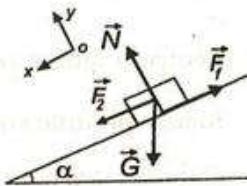
$$\text{relația (1) obținem } P_0 = \frac{P_1 + P_2}{2} = 118 \text{ kW}$$

27.a. Studiem mișcarea mașinii de urcare a pantei. Deoarece mașina urcă uniform pantă: $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox : $F_1 - F_f - mg \sin \alpha = 0$ și pe Oy : $N - mg \cos \alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, atunci $F_1 = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$. Puterea mașinii la urcarea pantei este: $P = F_1 \cdot v_1 = mgv_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ (1)



b. Studiem cazul când mașina coboară uniform aceeași pantă. Vectorial $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox : $F_2 + mg \sin \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_2 = mg(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$.

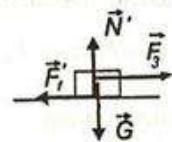
Puterea mașinii la coborârea pantei este: $P = F_2 v_2 = mgv_2(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ (2)



c. În cazul în care mașina se deplasează pe orizontală uniform vectorial obținem $\vec{F}_3 + \vec{N}' + \vec{G} + \vec{F}_f' = 0$.

Scalar $F_3 = F_f' = \mu N' = \mu mg$, iar puterea dezvoltată de motorul

$$\text{mașinii este } P = F_3 v_3 = \mu mg v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{P}{\mu mg}$$



$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \mu mg = \frac{P(v_2 + v_1)}{2v_1 v_2 \cos \alpha} \Rightarrow v_3 = \frac{2v_1 v_2 \cos \alpha}{v_2 + v_1}$$

$$\text{Cum } \alpha \text{ este foarte mic, } \cos \alpha \approx 1 \Rightarrow v_3 = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1} = 12 \text{ m/s.}$$

28.a. Puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal este: $P = T v = 6 \text{ kW}$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență pe drum orizontal este $L = F_r d \cos 180^\circ = -F_r d$. Deoarece remorca este tractată cu viteză constantă, atunci rezultanta forțelor care acționează asupra ei este nulă, astfel că $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$. Scalar pe direcția de mișcare $T = F_r$, astfel că $L = -T d = -6 \text{ kJ}$

c. Puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă este $P' = T'v$, unde noua valoare a forței de tracțiune a remorcii este T' . Deoarece remorca urcă uniform pe pantă, atunci $\vec{T}' + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$.

Scalar pe Ox : $T' = F_r + mg \sin \alpha = T + mg \sin \alpha$, astfel că

$$P' = (T + mg \sin \alpha)v = 16 \text{ kW}$$

29.a. Studiem mișcarea uniformă a saniei pe planul înclinat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe Ox :

$$F = mg \sin \alpha + F_f.$$

Cum $F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow F = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

reprezintă forța de tracțiune dezvoltată de cal.

Puterea activă dezvoltată de cal este $P_{activ} = F \cdot v = mgv(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 338,4 \text{ W}$

b. Alte puteri care intervin sunt puterea forței de frecare: $P_{F_f} = -F_f \cdot v = -\mu mgv \cos \alpha$ și puterea greutății $P_G = -mgv \sin \alpha$. Bilanțul puterilor este $P_{activ} = |P_{F_f}| + |P_G|$, deoarece puterea activă dezvoltată de forța de tracțiune a calului se consumă atât sub formă de putere pentru învingerea forțelor de frecare cât și pentru învingerea greutății saniei.

$$\text{c. } \frac{|P_{F_f}|}{P_{activ}} = \frac{\mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = \frac{\mu}{\tan \alpha + \mu} \approx 16,66 \%$$

30.a. Deoarece corpul cu masa m_2 are masa mai mare comparativ cu corpul cu masa m_1 , corpul m_1 urcă, iar corpul cu masa m_2 coboară, deci tensiunea care acționează asupra corpului 2 ajută la mișcare, astfel că lucru

el mecanic este $L_T = Th$.

Studiem mișcarea fiecărui corp. Pentru corpul cu masa m_2 :

$$m_2g - T = m_2a, \text{ iar pentru corpul cu masa } m_1:$$

$$T - m_1g = m_1a \Rightarrow a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow T = m_1(a + g) = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$L_T = \frac{2m_1m_2gh}{m_1 + m_2} = 8 \text{ J}$$

$$\text{b. } L_{G_{total}} = L_{G_2} + L_{G_1} = m_2gH - m_1gH = (m_2 - m_1)gH = 12 \text{ J},$$

deoarece corpul 2 coboară și \vec{G}_2 este forță motoare, iar corpul 1 urcă și \vec{G}_1 este forță rezistivă.

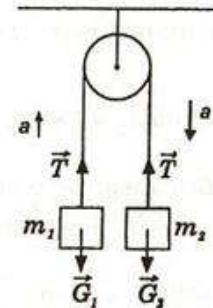
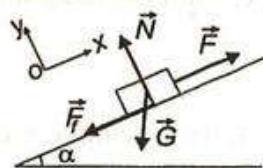
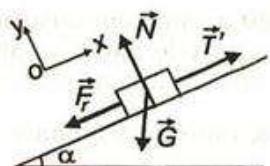
c. Prin definiție $P_m = \frac{L_t}{\Delta t}$, unde L_t reprezintă lucru mecanic al tuturor forțelor și

Δt reprezintă intervalul de timp după care corpul m_2 ajunge pr sol.

Deoarece lucru mecanic total al celor două tensiuni este nul, deoarece o tensiune este forță motoare iar cealaltă tensiune este forță rezistivă, atunci

$$L_t = L_{G_{total}}. \text{ Dar } H = v_m \Delta t = \frac{v \Delta t}{2}, \text{ unde } v = a \Delta t, \text{ astfel că } H = \frac{a(\Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2H}{a}} \Rightarrow$$

$$\Delta t = 0,6 \text{ s} \Rightarrow P_m = \frac{(m_2 - m_1)gH}{\Delta t} = 20 \text{ W}$$



30.a. Studiem mișcarea uniformă a corpului 2, astfel că $T_2 = m_2 g$. Din condiția ca scripetele mobil să aibă o mișcare uniformă obținem $T_2 = 2T_1$, iar din condiția de mișcare uniformă a corpului 1: $F + m_1 g = T_1 \Rightarrow F = (m_2/2 - m_1)g = 200 \text{ N}$.

b. Puterea dezvoltată de forța F este $P = \frac{F}{t} = \frac{Fh}{t} = 20 \text{ W}$

c. Cum $P = Fv \Rightarrow v = P/F = 0,1 \text{ m/s}$

3.2. Energia cinetică și potențială*

1. Prin definiție energia cinetică: $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Cum $E_{c_1} = E_{c_2} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}$, și cum $v_2 = 2v_1$ deoarece al doilea sportiv aleargă de două ori mai repede, obținem că: $m_1 = 4m_2$.

2. Cum $E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_c}{v^2} = 4 \text{ kg}$

3. Pe verticală săgeata are o mișcare uniform încetinită datorită acțiunii greutății cu viteza inițială v_0 , astfel că $v = v_0 - gt \Rightarrow$ la o secundă de la lansare viteza este

$$v = 10 \text{ m/s} \Rightarrow E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_0 - gt)^2 = 2 \text{ J}$$

4. Deoarece corpul se mișcă uniform accelerat din repaus, accelerația medie coincide cu cea instantanee, astfel că $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v = at$, iar distanța parcursă este: $d = v_m t = \frac{v}{2} t = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2d_1}{t_1^2} = 2 \text{ m/s}^2$.

$$\text{Când } t_2 = 2 \text{ s}, v_2 = at_2 = \frac{2d_1}{t_1^2} t_2 = 4 \text{ m/s} \Rightarrow E_c = \frac{mv_2^2}{2} = 8 \text{ J}$$

5. Lansat pe o suprafață orizontală cu o viteza inițială v_0 , corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel $F_f = -ma \Rightarrow \mu N = -ma \Rightarrow \mu mg = -ma \Rightarrow a = -\mu g$.

Cum $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow v = v_0 - \mu gt \Rightarrow$ energia cinetică este

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_0 - \mu gt)^2 = 81 \text{ J}$$

6. Conform definiției energia potențială gravitațională este: $E_p = mgd = mg \frac{h}{4} = 5 \text{ J}$

7. Cum energia potențială gravitațională este: $E_p = mgh \Rightarrow \frac{E_{p_2}}{E_{p_1}} = \frac{m_2 gh}{m_1 gh} = 4$.

8. Corpul aruncat pe verticală de jos în sus are o mișcare uniform încetinită cu accelerația g , astfel că $v = v_0 - gt$, iar la înălțimea maximă $v=0$, astfel că timpul de oprire este $t_{op} = \frac{v_0}{g}$. Înălțimea maximă la care ajunge corpul este

$h_{\max} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2} t_{op} = \frac{v_0^2}{2g}$. La jumătate din înălțimea maximă, energia potențială

$$\text{gravitațională este: } E_p = mg \frac{h_{\max}}{2} = \frac{mv_0^2}{4} = 20 \text{ J.}$$

9. Din grafic $h=2 \text{ m}$ și $E_p=30 \text{ J}$, iar conform definiției energiei potențiale gravitaționale: $E_p = mgh \Rightarrow m = \frac{E_p}{gh} = 1,5 \text{ kg}$.

10.a. Când drumul este orizontal energia potențială gravitațională este constantă. Prin urmare cum $E_p=\text{const}$ obținem intervalele de timp în care drumul este orizontal $\Delta t \in [0,2;0,3] \text{ min}$ când $E_p=1 \text{ MJ}$ și $\Delta t \in [0,7;0,8] \text{ min}$ când $E_p=0 \text{ MJ}$.

b. Camionul începe să coboare când energia potențială a lui începe să scadă, adică după $t=0,3 \text{ min}$. Cum $\Delta E_p = mg\Delta h$, atunci diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul și punctul din care acesta începe să coboare este $\Delta h = \Delta E_p / (mg) = 10 \text{ m}$.

c. Calculăm distanța parcursă de camion într-un interval de timp $\Delta t=0,1 \text{ min}$. Astfel $d_i = v\Delta t = 75 \text{ m}$.

Reprezentarea grafică a energiei potențiale E_p a camionului, în funcție de distanța parcursă d este redată în figura alăturată.

d. Din grafic observăm că după ce camionul parcurge o distanță egală cu 375 m față de punctul de pornire, energia potențială este $E_{p_f}=-1 \text{ MJ}$. Astfel variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării până ajunge la 375 m este $\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = -1 \text{ MJ}$, deoarece $E_{p_i}=0$

11. Conform definiției energia potențială elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2}$.

$$\text{Cum } F_{el} = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} \Rightarrow E_p = \frac{Fx}{2} = 0,5 \text{ J.}$$

12. Din definiția energiei potențiale elastice: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_p}{x^2} = \frac{k}{2}$, deci panta dreptei este $\frac{k}{2}$, adică jumătate din valoarea constantei elastice a resortului.

13. Pe baza definiției energiei potențiale elastice $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$.

Când cele două resorturi sunt legate în serie forțele elastice cu care acționează unul asupra celuilalt sunt egale, conform principiului acțiunii și reacțiunii, astfel

$$\text{că } F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_2}{k_1} = 2$$

14. Energie potențială elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2}$.

Deoarece resorturile sunt legate în paralel, sub acțiunea unei forțe deformatoare ele se vor deforma la fel, astfel că $x_1 = x_2 = x \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} = 0,333$.

15.a. Din grafic determinăm constantele elastice pentru fiecare resort. Pentru primul resort când $x_1^2 = 8 \text{ cm}^2$, $E_{p_1} = 16 \text{ J} \Rightarrow k_1 = \frac{2E_{p_1}}{x_1^2} = 4 \cdot 10^4 \text{ N/m}$.

Pentru al doilea resort când $x_2^2 = 4 \text{ cm}^2$, $E_{p_2} = 32 \text{ J} \Rightarrow k_2 = \frac{2E_{p_2}}{x_2^2} = 16 \cdot 10^4 \text{ N/m}$.

b. Când se leagă în serie resorturile se alungesc cu x_1 și respectiv x_2 , astfel că alungirea totală este $x = x_1 + x_2$. La legarea în serie forțele elastice apar în cele două resorturi sunt egale, astfel că:

$$F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{k_2 x_2}{k_1} \Rightarrow x = x_2 \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2} = 4 \text{ cm.}$$

3.3. Teorema de variație a energiei cinetice

1.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru mașină din momentul frânării până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{f_f} \Rightarrow L_{f_f} = -\frac{mv^2}{2} \Rightarrow L_f = -10^5 \text{ J}$

b. Forța de frânare este $F_f = ma = m\Delta v/\Delta t = mv/\Delta t = 500 \text{ N}$

c. Distanța parcursă de mașină până la oprire este $d = v_0 \Delta t = v \Delta t / 2 = 200 \text{ m}$

2.a. Lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanța d este $L = Fd = 180 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul format din barcă, prieten, fetiță și soție din momentul pornirii până în momentul când acesta parcurge distanța d : $\Delta E_c = L = L_{f_f} + L_{f_r}$, unde $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 250 \text{ kg}$

$$\frac{mv^2}{2} = (F - F_r)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(F - F_r)d}{m}} = 0,894 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru barcă din momentul închecării acțiunii forței F până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{f_r} \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2} = -F_r s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv^2}{2F_r} = \frac{(F - F_r)d}{F_r} = 1,25 \text{ m}$$

3.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp din momentul pornirii până în momentul t , $\Delta E_c = L \Rightarrow E_c = Fd \Rightarrow d = \frac{E_c}{F} = 2 \text{ m}$

b. Cum $E_c = \frac{mv^2}{2}$ și din $F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{v}{\Delta t}$ prin împărțirea relațiilor obținem

$$\frac{E_c}{F} = \frac{v \Delta t}{2} \Rightarrow v = \frac{2E_c}{F \Delta t} = 2 \text{ m/s}$$

$$\text{c. } \text{Din } E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_c}{v^2} = \frac{F^2 \Delta t^2}{2E_c} = 4 \text{ kg}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp din momentul aplicării forței suplimentare până în momentul opririi $\Delta E_c = L = L_F + L_{F_s} \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2} = FD - F_s D \Rightarrow F_s = F + \frac{mv^2}{2D} = 20 \text{ N}$$

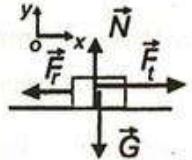
4.a Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp Δt , astfel că $\Delta E_c = L_i = L_{F_f} + L_{F_r} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L_{F_f} - F_f d \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat forță de tracțiune este $L_{F_f} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + F_f d = 72 \text{ J}$

b. Din definiție $L_{F_f} = F_f d \Rightarrow F_f = \frac{L_{F_f}}{d}$. Deoarece puterea medie dezvoltată de forță de tracțiune este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F_f d}{\Delta t} = F_f v_m = \frac{(v_1 + v_2)L_{F_f}}{2d} = 14,4 \text{ W}$.

$$\text{Din } P_m = \frac{L_{F_f}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L_{F_f}}{P_m} = 5 \text{ s.}$$

c. Din expresia forței de frecare $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow \mu = F_f / (mg) = 0,1$

5.a. Deoarece inițial autoturismul se deplasă cu viteza constantă înseamnă că rezultanta forțelor care acționau asupra automobilului este nulă. Astfel vectorial $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar $F_t = F_r$. Cum $P = F_t v \Rightarrow F_t = P/v$. După ce motorul se oprește datorită forțelor de rezistență autoturismul se oprește. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow L = -\frac{mv^2}{2} = -90 \text{ kJ}$



b. Cum $L = F_t d \cos 180^\circ = -F_t d = -P d / v \Rightarrow d = -Lv / P = 90 \text{ m}$

c. Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v}{t} \Rightarrow t = -\frac{v}{a}$. Studiind mișcarea autoturismului obținem: $-F_r = ma \Rightarrow a = -F_r / m = -P / (mv) \Rightarrow t = mv^2 / P = 12 \text{ s}$

6.a. Lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență este $L = F_r d \cos 180^\circ = -F_r d = -fmgd = -24 \text{ MJ}$

b. Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este $P = F_t v$. Deoarece trenul se deplasează cu viteza constantă, atunci $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar $F_t = F_r = fmg \Rightarrow v = P / (fmg) = 20 \text{ m/s}$. Lucrul mecanic efectuat de locomotivă este $L = P \Delta t = 48 \text{ MJ}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru ultimul vagon.

$$\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{mv^2}{2} - F_r d_1 = -fmgd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v^2}{2fg} = 2 \text{ km}$$

7.a. Din formula puterii $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v} = 5 \text{ kN}$.

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$ și prin proiecție pe axa Ox obținem: $F - fmg = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} - fg = 4 \text{ m/s}^2$.

- c. Viteza maximă pe care o poate atinge automobilul se obține când acesta se mișcă rectiliniu și uniform, astfel că forța de tracțiune devine $F' = fmg$, astfel că din $P = F'v_{max} \Rightarrow v_{max} = \frac{P}{F'} = \frac{P}{fmg} = 35 \text{ m/s}$

- d. Variația energiei cinetice a automobilului, de la plecare până la atingerea vitezei maxime este:

$$\Delta E_c = \frac{mv_{max}^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 58,8 \text{ kJ}$$

- 8. a.** Puterea mecanică dezvoltată de tren în timpul mișcării sale uniforme este $P = Fv = 1,26 \text{ MW}$

- b.** Energia cinetică a trenului înainte de decuplarea vagonului este:

$$E_c = \frac{Mv^2}{2} = 94,5 \text{ MJ}$$

- c.** Deoarece inițial trenul se deplasează uniform, atunci forța de tracțiune era egală cu cea de rezistență, astfel că: $F = F_r = kMg \Rightarrow k = \frac{F}{Mg}$. După desprinderea ultimului vagon trenul se va mișca accelerat, astfel că: $F - k(M-m)g = (M-m)a \Rightarrow a = \frac{F}{M-m} - kg = \frac{Fm}{M(M-m)} = 0,01 \text{ m/s}^2$

- d.** Vagonul desprins va avea o mișcare uniformă incetinită astfel că pe baza teoremei de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{fr} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} - kmgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2kg} = \frac{Mv^2}{2F} = 2,25 \text{ km.}$$

- 9.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp Δt ,

astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{fr} + L_{rr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L + L_{fr} \Rightarrow$

$$L_{fr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - L = -75 \text{ kJ}$$

- b.** Din formula puterii medii $P = F_t v_m = \frac{F_t(v_1 + v_2)}{2}$ obținem forța de tracțiune

dezvoltată de motor $F_t = \frac{2P}{v_1 + v_2} = 6 \text{ kN}$. Studiem mișcarea corpului, astfel că

$$\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}. \text{ Scalar } F_t - F_r = ma \Rightarrow F_r = F_t - ma.$$

Din $L = P\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P} = 5 \text{ s}$ și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 3 \text{ m/s}^2 \Rightarrow F_r = 1,2 \text{ kN}$

- c.** Distanța parcursă de camionetă în intervalul de timp Δt este $d = v_m \Delta t = (v_1 + v_2) \Delta t / 2 = 62,5 \text{ m}$

- 10.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul oprește alimentarea cu energia electrică și punctul de oprire:

$\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{mv_0^2}{2}$, deoarece în final trenul se oprește și viteza finală este nulă, $L_{F_r} = -F_r d = -f_1 mgd$, deoarece forța de rezistență apare pe tot parcursul mișcării pe distanța d de la întreruperea alimentării cu energie electrică și este o forță cu caracter rezistiv, iar $L_{F_f} = -F_f s = -f_2 mgs$, deoarece forța de frânare apare din momentul punerii în acțiune a sistemului de frânare și acționează pe distanța s având caracter rezistiv. Înlocuind formulele în teorema de variație a energiei cinetice obținem:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd - f_2 mgs \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2f_2g} - \frac{f_1 d}{f_2} = 288 \text{ m.}$$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de frânare este $L_{F_f} = -F_f s = -f_2 mgs \Rightarrow$

$$L_{F_f} = -\frac{mv_0^2}{2} + f_1 mgd = -36 \text{ MJ}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul oprește alimentarea cu energia electrică și punctul aflat la distanța d_1 : $\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_1} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Lucrul mecanic al forței de rezistență este $L_{F_r} = -F_r d_1 = -f_1 mgd_1$, iar al forței de frânare $L_{F_f} = -F_f (s - d + d_1) = -f_2 mg(s - d + d_1)$, deoarece trenul frânează pe distanța $s - d + d_1$.

Astfel se obține $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd_1 - f_2 mg(s - d + d_1) \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2f_1 d_1 g - 2f_2 g(s - d + d_1)} \approx 16,43 \text{ m/s}$

11.a. Energia cinetică a corpului în momentul lansării este $E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2} = 0,04 \text{ J}$

b. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{F_f}$, cum $L_G = 0$ și $L_N = 0$, atunci $L_{F_f} = E_{c_f} - E_{c0} = -\frac{mv_0^2}{2} = -0,04 \text{ J}$

c. Deoarece sub acțiunea forței de frecare corpul are o mișcare uniform încetinită, atunci distanța parcursă de corp până la oprire este

$$d = v_m t_{op} = \frac{v}{2} t_{op} = 10 \text{ m}$$

d. Pe baza definiției lucrului mecanic al forței de frecare $L_{F_f} = -F_f d \Rightarrow F_f = -\frac{L_{F_f}}{d} = 4 \text{ mN}$

12. a. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{F_f}$, cum

$$L_G = 0 \text{ și } L_N = 0, \text{ atunci } L_{F_f} = E_{c_f} - E_{c0} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{-\frac{2L}{m}} = 20 \text{ m/s}$$

b. Din principiul al doilea al dinamicii $-F_f = ma \Rightarrow -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g$, astfel

că din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 - \mu gt$ și din condiția de oprire $v=0$, obținem

$$\mu = \frac{v_0}{gt_{op}} = 0,2$$

c. Spațiul parcurs de corp până la oprire este $s_{op} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2} t_{op} = 100$ m

d. După $t_1=3$ s din momentul lansării viteza corpului este $v_1 = v_0 - \mu gt_1 = 14$ m/s, astfel că energia cinetică a corpului este $E_c = \frac{mv^2}{2} = 196$ J

13. a. Energia mecanică a copilului la ieșirea de pe tobogan este $E_m = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh = 342$ J

b. Lucrul mecanic efectuat de copil pentru a urca până în vârful toboganului este efectuat împotriva greutății, astfel că $L = -L_G = mgH = 900$ J

c. Puterea medie dezvoltată de copil în timpul urcării toboganului este $P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{mgH}{\Delta t} = 90$ W

d. Conform teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_{pf}$ și cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, $L_G = mg(H-h)$ obținem $L_{pf} = \frac{mv^2}{2} - mg(H-h) = -558$ J

14. a. Energia mecanică a schiorului aflat în vârful A al trambulinei este $E_{mA} = E_{pA} = mgh = 37,6$ kJ

b. Energia cinetică a schiorului în punctul B este $E_{cB} = \frac{mv^2}{2} = 36$ kJ

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}. \text{ Cum } L_{N,AB} = 0, L_{G,AB} = mgh \text{ iar } \Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv^2}{2}$$

$$\text{obținem: } \frac{mv^2}{2} = mgh + L_{F_f,AB} \Rightarrow L_{F_f,AB} = m\left(\frac{v^2}{2} - gh\right) = -1,6 \text{ kJ}$$

d. Din definiția lucrului mecanic al forței de frecare

$$L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu mg AB \cos \alpha \text{ obținem } \mu = \frac{2gh - v^2}{2g\ell} = 0,04, \text{ deoarece}$$

$\ell = AB \cos \alpha$, α fiind unghiul planului inclinat

15.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion între punctele A și B: $\Delta E_c = L = L_{fr} + L_G$. Deoarece avionul planează cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că $L_{fr} = -L_G = -mg(h_1 - h_2) = -25 \text{ MJ}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion la întoarcerea acestuia, astfel că $\Delta E_c = L = L_{fr} + L_G + L_F$. Deoarece avionul se întoarce cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că lucrul mecanic dezvoltat de motor este $L_F = -L_G - L_{fr} = 2mgh = 50 \text{ MJ}$, deoarece greutatea este o forță rezistivă

c. Deoarece $d = v\Delta t \Rightarrow \Delta t = d/v$, astfel că puterea dezvoltată de motor este $P = L/\Delta t = Lv/d = 2 \cdot 10^5 \text{ W}$

16.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate este $L_G = MgH = 13,5 \text{ J}$, deoarece greutatea este forță de tip conservativ și lucru mecanic depinde doar de poziția inițială și de cea finală

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra sistemului format din elicopter și jucărie, astfel că $\vec{F} + \vec{G} = (m+M)\vec{a}$. Doarece sistemul de corpi va coborî, aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpi din momentul pornirii și până ce este scăpată jucăria, astfel că

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow \frac{(m+M)v^2}{2} = (m+M)gh - Fh \Rightarrow v = \sqrt{2\left(g - \frac{F}{m+M}\right)h} \approx 6,32 \text{ m/s}$$

c. Din momentul în care scapă jucăria elicopterul se va mai mișca în jos pe distanța x după care se oprește. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care scapă jucăria și punctul unde elicopterul se oprește. Astfel:

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgx - Fx \Rightarrow x = \frac{mv^2}{2(mg - F)} = 2 \text{ m}$$

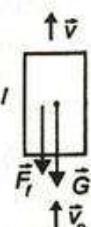
Energia potențială minimă a elicopterului este $E_{Pmin} = mg(H-h-x) = 1,5 \text{ J}$

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

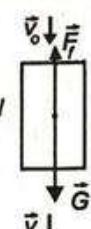
$\Delta E_c = L = L_G + L_f$, unde $L_G = -mgl$, deoarece când glonțele se deplasează de jos în sus greutatea glonțelui nu ajută la mișcarea acestuia și prin urmare greutatea este o forță rezistivă, iar $L_f = -F_f l$, deoarece și forța de frecare este o forță rezistivă.

$$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgl - F_f l \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2l}{m}(mg + F_f)} = 400 \text{ m/s.}$$



b. Dacă glonțele este tras de sus în jos, pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgl - F_f l$, deoarece în acest caz greutatea ajută la mișcarea glonțelui și este o forță motoare $\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2l}{m}(mg - F_f)} = 400,1 \text{ m/s.}$



c. Dacă glonțele este tras pe orizontală, pe baza teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -F_f l \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2F_f l}{m}} \approx 400 \text{ m/s}$

18.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru bilă din momentul acțiunii forței F până în momentul în care acțiunea forței începează.

$$\Delta E_c = L = L + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + mg(h - h_0) \Rightarrow h = h_0 + \frac{2L - mv^2}{2mg} = 4,2 \text{ m}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care acțiunea forței începează până în momentul în care bila atinge înălțimea maximă. Astfel $\Delta E_c = L_G \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -mg(H - h) \Rightarrow H = h + \frac{v^2}{2g} = 5 \text{ m}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care bila atinge înălțimea maximă până în momentul în care trece prin punctul inițial $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mg(H - h_0) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - h_0)} \approx 8,94 \text{ m/s}$

19.a. Din definiție $\Delta E_{p2} = -L_{G2} = -m_2gh_2 = -200 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru un corp care cade liber de la înălțimea h , între punctul de plecare și punctul în care corpul atinge solul.

$$\text{Astfel obținem } \Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \approx 1,41$$

$$\text{c. Cum } v = g\Delta t \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \approx 1,41$$

20.a. Energia mecanică inițială este $E_{mi} = mgH$. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul care cade liber de la înălțimea H , între punctul de plecare și punctul impactului cu solul. Astfel obținem:

$$\Delta E_c = L = L_G + L_{Fr} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgH + L_{Fr} \Rightarrow L_{Fr} = \frac{mv^2}{2} - mgH. \text{ Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul este } E_{mf} = \frac{mv^2}{2} = fE_{mi} = fmgH \Rightarrow L_{Fr} = -(1-f)mgH = -300 \text{ J}$$

b. Din relația precedentă obținem viteza corpului la atingerea solului $v = \sqrt{2fgH} \approx 42,42 \text{ m/s}$

c. Cum $L_{Fr} = -F_rH \Rightarrow F_r = -L_{Fr}/H = 3 \text{ N}$

21. a. Din grafic viteza maximă atinsă de corpul A în timpul căderii este: $v_{Amax} = 4 \text{ m/s}$

b. Deoarece când se atinge viteza maximă se obține când corpul cade uniform, atunci rezultanta forțelor care acționează asupra acestuia este nulă. Astfel

$$G_A = F_{rA} \Rightarrow m_A g = k v_{Amax} \Rightarrow k = \frac{m_A g}{v_{Amax}} = 0,125 \text{ Ns/m}$$

c. Din condiția de mișcare rectilinie și uniformă a corpului B, obținem

$$G_B = F_{rB} \Rightarrow m_B g = k v_{Bmax} \Rightarrow m_B = \frac{k v_{Bmax}}{g} = m_A \frac{v_{Bmax}}{v_{Amax}} = 25 \text{ g}, \text{ deoarece } v_{Bmax} = 2 \text{ m/s}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul A din momentul lansării până la momentul $t=1,4 \text{ s}$ când corpul a ajuns la mișcare rectilinie și uniformă. Astfel:

$$\Delta E_c = L_G + L_{fr} \Rightarrow \frac{m_A v_{A\max}^2}{2} = m_A g d + L_{fr} \Rightarrow L_{fr} = m_A \left(\frac{v_{A\max}^2}{2} - g d \right) = -1,6 \text{ J}$$

22.a. Lucrul mecanic al forței de frecare este:

$$L_{fr} = -F_f d = -\mu_m mgd = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd = -80 \text{ J}$$

b. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{fr}$, cum $L_G=0$

$$\text{și } L_N=0, \text{ atunci } 0 = -\frac{mv^2}{2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd \Rightarrow v = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)gd} = 4 \text{ m/s}$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{fr}$, cum $L_G=0$

$$\text{și } L_N=0, \quad L_{fr} = -F_f d = -\mu_m mgd = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd, \text{ unde coeficientul de frecare la distanța } d_1 \text{ se află ținând cont că scade liniar cu distanța.}$$

Astfel cum $\mu = ax + b$, iar pentru $x=0 \Rightarrow b = \mu_1$ și pentru $x=d \Rightarrow \mu_2 = ad + \mu_1$.

$$\text{obținem } a = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{d} \Rightarrow \mu = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{d} x + \mu_1. \text{ Pentru } x=d_1 \text{ se obține } \mu_2 = 0,05.$$

$$\text{Din } \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 - (\mu_1 + \mu_2)gd_1} \approx 3,24 \text{ m/s}$$

23.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L$.

Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, deoarece $v_0 = 0 \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2}$. Deoarece din grafic când $t=40$ s viteza corpului este $v=30$ m/s obținem $L=4500$ J

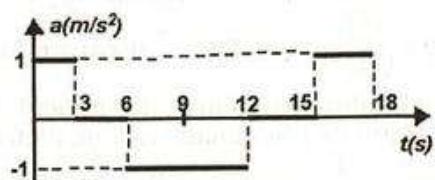
b. Deoarece lucrul mecanic este: $L = F_m d$, forța medie este $F_m = L/d$, unde d reprezintă distanța parcursă de mobil în primele 40 s de la începerea mișcării. Din grafic distanța parcursă se calculează cu aria cuprinsă între curba vitezei și axa timpului până ce $t = 40$ s $\Rightarrow d = 600$ m $\Rightarrow F_m = 7,5$ N.

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = 0$, deoarece vitezele inițială și finală sunt nule la momentele $t_1 = 0$ s și $t_2 = 90$ s

24.a. Se utilizează definiția accelerării

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ pe diferitele porțiuni.}$$

Reprezentarea grafică a accelerării corpului pe durata întregii mișcări este redată în figura alăturată.



b. Distanța parcursă de corp este modulul ariei cuprinse între graficul vitezei și axa timpului. Obținem $d_{dus}=18$ m, $d_{intors}=18$ m $\Rightarrow d=d_{dus}+d_{intors}=36$ m.

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow L=-0,45$ J, deoarece la momentul t_2 , $v_2=0$ m/s și la momentul t_1 , $v_1=3$ m/s

25.a. Din grafic valoarea vitezei inițiale a corpului este $v_0=4,8$ m/s, astfel că energia cinetică inițială a corpului este $E_{c0} = \frac{mv_0^2}{2} = 11,52$ J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și cel de revenire, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_N=0$, $L_G=0$, deoarece corpul revine în același punct obținem $L_{F_f} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -8,64$ J

c. Distanța parcursă de corp pe planul înclinat este una din arile triunghiurilor, conform interpretării geometrice al spațiului parcurs de un corp, astfel că $d=A=7,2$ m. Din definiția lucrului mecanic al forțelor de frecare $L_{F_f} = -2F_f d \Rightarrow F_f = -\frac{L_{F_f}}{2d} = 0,6$ N

d. La momentul $t=3$ s corpul se află în repaus și are doar energie potențială. Astfel $E_m = E_c + E_p = E_p = mgh$. Aflăm înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat din teorema de variație a energiei cinetice scrisă pentru punctul de plecare și cel de oprire: $\Delta E_c = L_G + L'_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_c = -\frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = -mgh$, $L_N = 0$ și $L'_{F_f} = \frac{L_{F_f}}{2}$, obținem $-\frac{mv_0^2}{2} = -mgh + \frac{L_{F_f}}{2} \Rightarrow E_m = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{L_{F_f}}{2} = 7,2$ J

26.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic obținem lucru mecanic efectuat de forță F ca fiind aria trapezului $L=140$ J

b. Forța medie este $F_m=L/d=14$ N

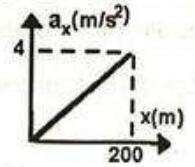
c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_i \Rightarrow L_i = \frac{mv_i^2}{2} \Rightarrow$

$v_i = \sqrt{\frac{2L_i}{m}} \approx 6,32$ m/s, deoarece lucru mecanic pe primii 4 m reprezintă aria triunghiului determinat de graficul forței, axa Ox și ordonata construită prin punctul de coordonată $x_1=4$ m, astfel că $L_i=40$ J

d. Aflăm viteza corpului în punctul de coordonată $x_2=6$ m, astfel că $v_2 = \sqrt{\frac{2L_2}{m}} \approx 10,95$ m/s, deoarece lucru mecanic pe primii 6 m reprezintă aria trapezului determinat de graficul forței, axa Ox și ordonata construită prin punctul de coordonată $x_2=8$ m, astfel că $L_2=120$ J.

Din $a = \frac{F}{m}$ și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{m(v_2 - v_1)}{F} = 0,463$ s

27.a. Din grafic pe primii 200 m forța F_x depinde direct proporțional de coordonata x , astfel că $F_x = bx$, unde $b=20$ N/m. Cum $F_s = ma_x \Rightarrow a_x = bx/m \Rightarrow a_x = 0,02x$. Reprezentarea grafică a proiecției accelerării a_x pe direcția mișcării automobilului, în funcție de coordonata x , este redată în figura alăturată.



b. Viteza devine maximă în momentul în care automobilul nu mai accelerează. Astfel pe primii 200 m automobilul are o mișcare accelerată cu accelerăția crescătoare, pe următorii 100 m are o mișcare

uniform accelerată, iar pe următorii 100 m are o mișcare accelerată cu acceleratie descrescătoare. Astfel la 400 m, $F_x=0 \Rightarrow a=0$. La coordonata $x_m=400$ m viteza automobilului devine maximă.

c. Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă reprezintă aria cuprinsă între graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită în punctul de coordonată $x=300$ m, astfel că $L=8 \cdot 10^5$ J

d. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 40 \text{ m/s}$$

28.a. În primele 3 s viteza corpului este pozitivă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox. Distanța parcursă în primele 3 s este $d=5$ m, astfel că dacă presupunem că mobilul pornește din originea axei Ox, după 3 s acesta ajunge în punctul de coordonată $x_1=d=5$ m (aria trapez). În următoarele 2 s viteza corpului este negativă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul negativ al axei Ox, parcurgând distanța $d_2=1,25$ m (aria trapez de sub axa timpului). Astfel după 5s, coordonata finală este $x_f=3,75$ m. Viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t=x_f/\Delta t=0,75$ m/s

b. Deoarece accelerarea este $a=\Delta v/\Delta t$, reprezentarea grafică a accelerării în funcție de timp în intervalul $t \in (0,6)$ s în figura alăturată.

c. Lucrul mecanic al rezultantei forțelor se află pe baza teoremei de variație a energiei cinetice,

astfel că $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2} = -15$ J, deoarece la momentul $t_1=2$ s, viteza este $v_1=2$ m/s și la momentul $t_1=3,5$ s, viteza este $v_2=-1$ m/s.



29.a. Inițial corpul se mișcă acelerat, iar după ce acțiunea forței de tracțiune incetează asupra corpului se va exercita numai forță de frecare. Astfel forța de frecare este $F_f=20$ N. Cum pentru $x \in [100,500]$ m $R_x=F_t-F_f$, obținem valoarea forței de tracțiune $F_t=R_x+F_f=60$ N.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de coordonată $x_0=100$ m și punctul de coordonată $x_1=500$ m: $\Delta E_c = L_{pt} + L_{ff}$.

Din interpretarea geometrică a lucrului mecanic $L=L_{pt}+L_{ff}=16$ kJ, astfel că $\frac{mv_1^2}{2} = L \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 80$ m/s

c. Puterea medie dezvoltată de motor este $P_m=F_t v_m=F_t v_1/2=2400$ W

d. Din $P_m = \frac{L}{\Delta t}$ obținem $\Delta t = \frac{L}{P_m} = \frac{F_t(x_1 - x_0)}{P_m} = 10$ s

e. Analog $\Delta E_c = L_{ff} \Rightarrow \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2} = -F_f(x_2 - x_1) \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2F_f(x_2 - x_1)}{m}} = 60$ m/s

30.a. Lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului este $L_i=F_i y_i=60$ kJ

b. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_i + L_G \Rightarrow$

$$\frac{mv_1^2}{2} = L_i - mgy_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}(L_i - mgy_1)} \approx 6,32 \text{ m/s}$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_2 + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} = L_2 - mgy_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}(L_2 - mgy_2)} = 8\text{m/s}$, deoarece lucru mecanic efectuat de motorul ascensorului reprezintă aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când $y_2=22\text{ m}$, astfel că $L_2=126\text{ kJ}$. Puterea instantanee a motorului în punctul de coordonată $y_2=22\text{ m}$ este $P=F_2v_2=40\text{ kW}$

31.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucru mecanic total efectuat de forță este egal cu aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când $x=25\text{ m}$. Se obține: $L=112,5\text{ J}$.

b. Observăm că pentru $x \in (10,25)\text{ m}$ forța scade liniar cu x , astfel că $F=ax+b$. Cum pentru $x_1=10\text{ m}$, $F_1=10\text{ N}$, iar pentru $x_2=25\text{ m}$, $F_2=-5\text{ N}$ obținem valorile $a=-1\text{ N/m}$ și $b=20\text{ m}$. Pentru $x_3=12\text{ m}$ obținem $F_3=8\text{ N}$

c. Cu ajutorul teoremei de variație a energiei cinetice, $\Delta E_c = L_1$, unde $L_1=93\text{ J}$ reprezintă aria de sub graficul forței, axa coordonatei și ordonata construită când $x_3=12\text{ m}$. Cum $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2L_1}{m}} = 10\text{ m/s}$

Puterea instantanee este $P=F_3v_1=80\text{ W}$

32.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucru mecanic efectuat de forță este egal cu aria de sub graficul forței și axa coordonatei Ox . Se obține: $L=100\text{ J}$.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L + L_{ff}$ și cum

$$L_{ff} = -\mu Nx = -\mu mgx \text{ obținem } \frac{mv^2}{2} = L - \mu mgx \Rightarrow v = \sqrt{2\left(\frac{L}{m} - \mu gx\right)} = 4\text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care încetează acțiunea forței F și punctul în care corpul se oprește, astfel că

$$\Delta E_c = L_{ff} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = 4\text{ m}$$

33.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_{ff} \Rightarrow L_{ff} = -\frac{mv_0^2}{2} = -1\text{ J}$

b. Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe astfalt pe distanța x . Din legea frecării $F_f=\mu N=\mu mg$, unde m reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porțiunii cu lungimea ℓ este $m_x = \frac{mx}{\ell} \Rightarrow F_f = \frac{\mu mgx}{\ell}$.

Deoarece forța de frecare depinde direct proporțional de x lucrul ei mecanic este

$$L_{ff} = -F_{fm}d = -\frac{\mu mgd^2}{2\ell}, \text{ deoarece forța de frecare medie reprezintă media aritmetică a valorilor pentru } x=0 \text{ și pentru } x=d, d \text{ fiind distanța pe care pătrunde scândura pe asfalt. Din cele două relații pentru lucrul mecanic al forțelor de}$$

$$\text{frecare obținem: } \frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu mgd^2}{2\ell} \text{ (1). Obținem } d = v_0 \sqrt{\frac{\ell}{\mu g}} = 0,5\text{ m}$$

c. Dacă scândura este de două ori mai lungă pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeași distanță ca și prima trebuie indeplinită relația $\frac{m'v_{01}^2}{2} = \frac{\mu m' g d^2}{2\ell'} \quad (2)$.

Prin împărțirea relației (2) la (1) obținem $\frac{v_{01}^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{01} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \text{ m/s}$

34.a. Energia cinetică a corpului în momentul inițial este $E_c = \frac{mv_0^2}{2} = 72 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și punctul de la capătul liber al platformei, astfel că $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{F_f}$. Cum

$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, iar lucrurile mecanice sunt $L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu m g \ell$, $L_G = 0$, $L_N = 0$.

Obținem $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu m g \ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \ell} = 5 \text{ m/s}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de la capătul liber al platformei și punctul în care corpul lovește solul, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow$

$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gh} = 7 \text{ m/s}$

35.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G.$$

$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, deoarece inițial corpul se află în repaus.

Din definiția lucrului mecanic $L_F = Fd \cos \alpha$, $L_N = 0$ și

$L_G = 0$, deoarece aceste două forțe sunt perpendiculare pe direcția de mișcare.

Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu N d$.

Din proiecția relației vectoriale pe verticală obținem:
 $N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F \sin \alpha)d$

$$\frac{mv^2}{2} = Fd \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2d}{m}[F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu \cdot g]} = 4,57 \text{ m/s}$$

b. $E_c = \frac{mv^2}{2} = Fd(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu m g \approx 20,95 \text{ J}$.

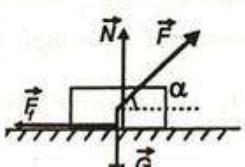
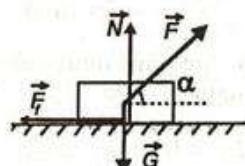
c. Prin definiție puterea medie este: $P_m = \frac{L_F}{\Delta t} = \frac{Fd \cos \alpha}{\Delta t}$ și cum

$d = v_m \Delta t \Rightarrow P_m = Fv_m \cos \alpha$. Deoarece sub acțiunea forței F , corpul va avea o mișcare uniform accelerată, viteza medie se calculează prin media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului $v_m = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2} \Rightarrow P_m = \frac{Fv \cos \alpha}{2} \approx 29,69 \text{ W}$.

36.a. Din $L = Fd \cos \alpha \Rightarrow d = L/(F \cos \alpha) = 2 \text{ m}$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu N d$. Proiectând forțele pe verticală:

$$N + F \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F \sin \alpha)d = -4 \text{ J}$$



c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

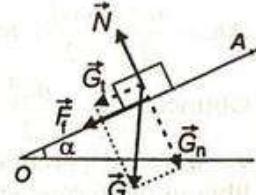
$$\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + L_{F_f} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L + L_{F_f})}{m}} = 4 \text{ m/s. Viteza medie } v_m = v/2, \text{ astfel că puterea medie dezvoltată de forța } F \text{ este } P_m = Fv_m \cos \alpha = \frac{Fv \cos \alpha}{2} = 20 \text{ W. Obținem } P_m = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P_m} = 1 \text{ s}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp între marginea masei și sol, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh \Rightarrow E_{c_f} = \frac{mv^2}{2} + mgh \Rightarrow E_{c_f} = 36 \text{ J.}$

37.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{ai}} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

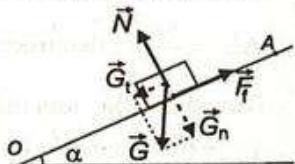
Cum $\Delta E_{c_{ai}} = E_{c_A} - E_{c_0} = -\frac{mv_0^2}{2}$, unde v_0 este viteza cu care este lansat corpul de jos din O în sus spre A .

$L_G = -mgh = -mg\ell \sin \alpha$. $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu N \ell = -\mu mg \ell \cos \alpha \Rightarrow$ obținem $-\frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell \sin \alpha - \mu mg \ell \cos \alpha \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 14,14 \text{ m/s.}$



b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{sd}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. $L_G = mgh = mg\ell \sin \alpha$.

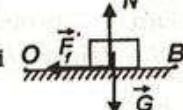
$L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu N \ell = -\mu mg \ell \cos \alpha$.



Cum $\Delta E_{c_{sd}} = E_{c_0} - E_{c_A} = \frac{mv^2}{2}$ obținem:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\ell \sin \alpha - \mu mg \ell \cos \alpha \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = 10 \text{ m/s.}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice în cazul mișcării corpului pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{os}} = L_{F_f'} + L_{N'} + L_G$.



$$\Delta E_{c_{os}} = E_{c_B} - E_{c_0} = -\frac{mv^2}{2}; L_{N'} = 0; L_G = 0; L_{F_f'} = -F_f d = -\mu' N' \ell = -\mu' mgd \Rightarrow$$

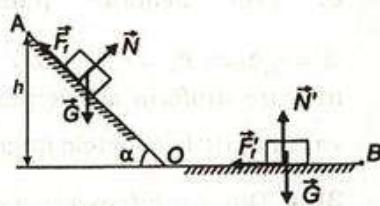
$$-\frac{mv^2}{2} = -\mu' mgd \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu' g} = \frac{\ell(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\mu'} = 50 \text{ m.}$$

38.a. Aplicăm între punctele A și B teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_{c_{ab}} = L = L_G + L_{F_f} + L_N.$$

Deoarece corpul pornește din repaus și în final se oprește $\Delta E_{c_{ab}} = 0$. Deoarece greutatea este o forță motoare $L_G = mgh$, $L_N = 0$ și

$$L_{F_f} = -F_f AO - F_f' OB = -\mu N \frac{h}{\sin \alpha} - \mu N \left(d - \frac{h}{\tan \alpha} \right), \text{ deoarece } AO = \frac{h}{\sin \alpha} \text{ și cum}$$



$$OB = d - \frac{h}{\tan \alpha} \Rightarrow L_{F_f} = -\mu mgh \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \mu mg \left(d - \frac{h}{\tan \alpha} \right) = -\mu mgd.$$

$$\text{Obținem: } 0 = mgh - \mu mgd \Rightarrow \mu = \frac{h}{d} = 0,2.$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O:

$$\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N. \text{ Cum } \Delta E_{c_{AO}} = E_{c_0} = \frac{mv^2}{2}; L_G = mgh, L_N = 0, L_{F_f} = -\mu mgh \cdot \tan \alpha$$

$$\text{obținem } \frac{mv^2}{2} = mgh - mgh \cdot \tan \alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gh(1 - \mu \cdot \tan \alpha)} \approx 6,32 \text{ m/s}$$

c. Puterea medie a forței de frecare la coborârea saniei pe părte este

$$P_m = F_f v_m \cos 180 = -\frac{\mu m g v \cos \alpha}{2} \approx -24,54 \text{ W}, \text{ deoarece } v_m = \frac{v}{2} \text{ și din}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ obținem } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx 0,97$$

39.a. Studiem urcarea cărămidii pe scândură. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar pe direcția de mișcare $-mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ (1)

Studiem coborârea cărămidii pe scândură. Astfel $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mișcare $mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ (2).

Deoarece $|a_u| = 2a_c \Rightarrow g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \Rightarrow \mu = \tan \alpha / 3 \approx 0,33$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea cărămidii pe scândură: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_0} - E_{c_1} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$

$$L_G = -mgh = -mgs_{op} \sin \alpha \text{ și } L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu m g s_{op} \cos \alpha.$$

$$\text{Obținem: } -\frac{mv_0^2}{2} = -mgs_{op} \sin \alpha - \mu m g s_{op} \cos \alpha \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 0,85 \text{ m}$$

$$\text{c. Rândamentul scândurii inclinate este } \eta = \frac{1}{1 + \mu \cdot \tan \alpha} = 75\%$$

40.a. Din definiția lucrului mecanic al forței de frecare obținem

$$L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu N AB = -\mu mg \cos \alpha \frac{h_1}{\sin \alpha} = -\mu mgh_1 \cdot \tan \alpha = -2 \text{ J}$$

b. Aplicăm între punctele A și B teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}. \text{ Cum } L_{N,AB} = 0, L_{G,AB} = mgh_1 \text{ și } \Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$\text{obținem: } \frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 - \mu mgh_1 \cdot \tan \alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_1(1 - \mu \cdot \tan \alpha)} = 6 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și baza planului: $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$.

$$\text{Cum } \Delta E_c = \frac{mv^2}{2}, L_N = 0, L_G = mgh_2, L_{F_f} = -\mu mgh_2 \cdot \tan \alpha \text{ obținem:}$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_2 - \mu mgh_2 \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow h_2 = \frac{v^2}{2g(1-\mu \operatorname{ctg} \alpha)} = 3,125 \text{ m}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul C de pe planul orizontal unde se oprește corpul: $\Delta E_{c,ac} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

Cum $\Delta E_{c,ac} = 0$, $L_N = 0$, $L_{G,ac} = L_{G1} + L_{G2} = mgh_2$ și

$L_{F_f, total} = L_{F_f} + L'_{F_f} = -\mu mgh_2 \operatorname{ctg} \alpha - \mu_1 mgd$ obținem:

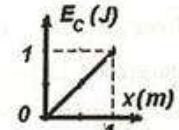
$$0 = mgh_2 - \mu mgh_2 \operatorname{ctg} \alpha - \mu_1 mgd \Rightarrow d = \frac{h_2(1-\mu \operatorname{ctg} \alpha)}{\mu_1} = 11,25 \text{ m}, \text{ astfel că distanța}$$

totală parcursă de corp este $D = d + \frac{h_2}{\sin \alpha} \approx 15,65 \text{ m}$

41.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și un punct aflat pe plan la coordonata x , astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_c = E_c$, $L_N = 0$, $L_G = mgh = mgx \sin \alpha$ și $L_{F_f} = -F_f x = -\mu N x = -\mu mgx \cos \alpha$ obținem $E_c = mgx \sin \alpha - \mu mgx \cos \alpha = mgx(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

b. Pe baza tabelului de valori reprezentăm grafic dependența energiei cinetice E_c de coordonata x la care se găsește corpul.

$x(m)$	0	0,25	0,5	0,75	1
$E_c(J)$	0	0,25	0,5	0,75	1



c. Alegem o valoare a lui $x=1 \text{ m}$ și valoarea corespunzătoare a energiei cinetice $E_c=1 \text{ J}$. Astfel $\mu = \operatorname{tg} \alpha = \frac{E_c}{mgx \cos \alpha} = 0,346$

42.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare este 0, deoarece greutatea este o forță conservativă astfel că lucrul ei mecanic pe o traiectorie închisă este nul.

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul inclinat: $\Delta E_{co} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{co} = E_{co} - E_{c,i} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$;

$L_G = -mgh$, unde h reprezintă înălțimea la care urcă corpul pe planul inclinat,

$L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mg s_{op} \cos \alpha = -\mu mg h \operatorname{ctg} \alpha$ cu $\sin \alpha = h / s_{op}$.

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgh - \mu mg h \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1+\mu \operatorname{ctg} \alpha)} \Rightarrow E_p = \frac{mv_0^2}{2(1+\mu \operatorname{ctg} \alpha)} = \frac{E_{co}}{1+\mu \operatorname{ctg} \alpha} \Rightarrow E_p = 312,5 \text{ J}, \text{ deoarece } \operatorname{ctg} \alpha = 4$$

$$\text{c. } L_{F_f} = -\mu mg h \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\mu E_{co}}{\mu + \operatorname{tg} \alpha} = -187,5 \text{ J}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare O și punctul de coborâre O. $\Delta E_{co} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{co} = E'_{co} - E_{co}$; $L_N = 0$;

$$L_G = 0 \text{ și } L_{F_f} = -2\mu mg h \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2\mu E_{co}}{\mu + \operatorname{tg} \alpha}, \text{ astfel că: } E'_{co} = E_{co} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\operatorname{tg} \alpha + \mu} = 125 \text{ J.}$$

43.a. Conform definiției energia mecanică a schiorului în vârful A al pantei este $E_{mA} = E_{pA} = mgh_{AB} = mgl \sin \alpha = 42$ kJ

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul de oprire C, astfel că $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{N,AC} + L_{Ff,AC}$.

Cum $\Delta E_{c,AC} = 0$, $L_{N,AC} = 0$, $L_{G,AC} = mgl \sin \alpha$ și

$$L_{Ff,AC} = L_{Ff,AB} + L_{Ff,BC} = -\mu mg \ell \cos \alpha - \mu mg d = -\mu mg (\ell \cos \alpha + d) \text{ obținem:}$$

$$0 = mgl \sin \alpha - \mu mg (\ell \cos \alpha + d) \Rightarrow \mu = \frac{\ell \sin \alpha}{\ell \cos \alpha + d} = 0,375, \text{ cu } \cos \alpha = 0,8$$

c. Din $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{N,AB} + L_{Ff,AB}$, cum $\Delta E_{c,AB} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_{G,AB} = mgl \sin \alpha$ și

$$L_{Ff,AB} = -\mu mg \ell \cos \alpha \text{ obținem } v_B = \sqrt{2g\ell(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \approx 24,5 \text{ m/s}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul C și punctul A, astfel că: $\Delta E_{c,CA} = L_{Ff,CA} + L_{G,CA} + L_{Ff,CA} + L_{N,CA}$.

Cum $\Delta E_{c,CA} = 0$, $L_{G,CA} = -mgl \sin \alpha$, $L_{N,CA} = 0$ și

$$L_{Ff,CA} = L_{Ff,CB} + L_{Ff,BC} = -\mu mg d - \mu mg \ell \cos \alpha = -\mu mg (\ell \cos \alpha + d) = -mgl \sin \alpha$$

obținem: $0 = L_{Ff,CA} - 2mgl \sin \alpha$. Puterea dezvoltată de motorul teleschiului este

$$P = \frac{L_F}{\Delta t} = \frac{2mgl \sin \alpha}{\Delta t} = 350 \text{ W}$$

44.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare O și punctul A, astfel că $\Delta E_{c_{OA}} = L_G \Rightarrow E_{cA} = mg(H-h) = 160$ J.

b. După clopnirea cu planul energia cinetică a corpului este $E'_{cA} = E_{cA}(1-f)$, astfel energia mecanică totală a corpului imediat după clopnirea cu planul este $E'_{mA} = E'_{cA} + E_{pA} = mg(H-h)(1-f) + mgh = 80$ J.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B, astfel că $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_c$, $L_N = 0$, $L_G = mgh$ și $L_{F_f} = -F_f \ell$ obținem $E_{cB} = mg(H-h)(1-f) + mgh - F_f \ell = 64$ J \Rightarrow $v = \sqrt{2E_{cB}/m} = 8$ m/s.

d. Din $F_f = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu = \frac{F_f}{mg \cos \alpha} = 0,23$, deoarece $\sin \alpha = \frac{h}{\ell} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

45.a. $L_{FAB} = F_f d \cos 180 = -\mu_1 N d = -\mu_1 mg d = -125$ J

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_G = 0$; $L_N = 0$; $L_{FAB} = -\mu_1 mg d$ și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA}$ obținem $E_{cB} = \frac{mv_0^2}{2} - \mu_1 mg d = 125$ J

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = -E_{cB}$; $L_G = -mgh$; $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -F_f BC = -\mu_2 mg BC \cos \alpha = -\mu_2 mg h \operatorname{ctg} \alpha$ obținem: $E_{cB} = mgh + \mu_2 mg h \operatorname{ctg} \alpha$

$$\Rightarrow h = \frac{E_{ch}}{mg(1 + \mu_2 ctg\alpha)} = 1,25 \text{ m}$$

d. Randamentul planului înclinat este $\eta = \frac{1}{1 + \mu_2 ctg\alpha} = 50\%$.

46.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = 0$; $L_G = mgh$ și $L_N = 0$. Astfel $L_{F_f} = -mgh = -mg\ell \sin \alpha = -360 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_G = mgh$; $L_N = 0$; $L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu mg\ell \cos \alpha$ și

$$\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{8} = \frac{3mv_0^2}{8} \Rightarrow \frac{3mv_0^2}{8} = mg\ell \sin \alpha - \mu mg\ell \cos \alpha \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{\frac{3v_0^2}{8}}{g\ell \cos \alpha} = 0,125, \text{ deoarece } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0,8$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice între punctele A și B $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = \frac{mv_0^2}{8} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{3mv_0^2}{8}$; $L_G = 0$; $L_N = 0$ și

$$L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu mgAB. \text{ Astfel } \frac{3mv_0^2}{8} = \mu mgAB \Rightarrow AB = \frac{3v_0^2}{8\mu g} = 120 \text{ m}$$

d. Considerăm că $E_{pc} = 0$, astfel că variația energiei mecanice totale a corpului între punctele B și C este $\Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB}$, unde $E_{mC} = E_{cC} = \frac{mv_0^2}{2}$ și

$$E_{mB} = E_{cC} + E_{pc} = \frac{mv_0^2}{8} + mgh \Rightarrow \Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB} = \frac{3mv_0^2}{8} - mg\ell \sin \alpha = -60 \text{ J}.$$

Calculăm lucru mecanic al forței de frecare pe porțiunea BC, $L_{F_fBC} = -\mu mg\ell \cos \alpha = -60 \text{ J}$. Observăm că $\Delta E_{mBC} = -L_{F_fBC}$.

47.a. Lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din C în A este $L_{F_f} = F_f(CB + BA)\cos 180 = -2\mu mgCB\cos \alpha = -2\mu mg hctg \alpha = -48 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și A $\Delta E_{cCA} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_N = 0$ și $L_G = 0$, pentru că acest corp urcă până la

$$\text{aceeași înălțime și din } \Delta E_{cCA} = E_{cA} - E_{cC} = -E_{cC} = -\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} = 2\mu mg hctg \alpha$$

$$\Rightarrow v_C = 2\sqrt{\mu ghctg \alpha} \approx 6,92 \text{ m/s}$$

c. Variația energiei mecanice a corpului între punctele A și D este

$$\Delta E_{mAD} = E_{mD} - E_{mA} = E_{cD} + E_{pD} - E_{pA} = \frac{mv_D^2}{2} + \frac{mgh}{4} - mgh, \text{ deoarece } E_{pB} = 0$$

Aflăm viteza corpului în punctul D pe seama teoremei de variație a energiei cinetice între punctele A și D, astfel că: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Din

$$L_G = mg(h_A - h_D) = \frac{3mgh}{4}; L_N = 0; L_{F_f} = -F_f AD = -\mu mgAD \cos \alpha = -\frac{3\mu mg hctg \alpha}{4} \text{ și}$$

$$\Delta E_{cAD} = E_{cD} = \frac{mv_D^2}{2} \text{ obținem } \frac{mv_D^2}{2} = \frac{3mgh}{4}(1 - \mu ctg\alpha) \Rightarrow \Delta E_{mAD} = -\frac{3\mu mghctg\alpha}{4} = -18J$$

48.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B de pe primul derdeleș $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh_1}$
 $\Rightarrow v_B = 12 \text{ m/s}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B și punctul C de pe suprafață orizontală, astfel că $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_N=0$ și $L_G=0$,

$$\text{obținem } \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g\ell} = 11 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D de pe al doilea derdeleș $\Delta E_{cCD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_G = -mgh_2$, $L_N=0$,

$$L_{F_f} = -F_f CD = -\mu' mg CD \cos \alpha = -\mu' mgh_2 ctg \alpha \text{ și } \Delta E_{cCD} = -E_{cC} = -\frac{mv_C^2}{2}, \text{ astfel că}$$

$$\frac{mv_C^2}{2} = mgh_2 + \mu' mgh_2 ctg \alpha \Rightarrow \mu' = \left(\frac{v_C^2}{2gh_2} - 1 \right) \operatorname{tg} \alpha = 0,21$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B și același punct când corpul se întoarce. Astfel $\Delta E_{cBB} = L_G + L_{F_f} + L_N$, unde $L_G=0$, $L_N=0$ și

$$L_{F_f} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg \alpha, \text{ iar } \Delta E_{cBB} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2}. \text{ Obținem:}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg \alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_B^2 - 4g(\mu\ell + \mu' h_2 ctg \alpha)} \approx 7,48 \text{ m/s}$$

49.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclimat $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.

$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

$$L_G = -mgh = -mg\ell \sin \alpha; L_N = 0 \text{ și}$$

$$L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu N \ell = -\mu mg \ell \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell \sin \alpha - \mu mg\ell \cos \alpha \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 8 \text{ m/s.}$$

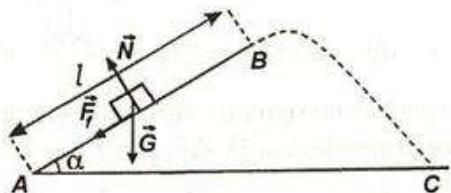
b. $L_{F_f} = -\mu mg\ell \cos \alpha = -6 \text{ J.}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B unde corpul părăsește planul și punctul C unde corpul lovește solul:

$$\Delta E_{c_{BC}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = mgh = mg\ell \sin \alpha, \text{ deoarece numai greutatea}$$

efectuează lucru mecanic. Obținem: $v_C = \sqrt{v^2 + 2g\ell \sin \alpha} \approx 9,7 \text{ m/s}$

d. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului între punctele A și C este $L_{G,AC} = -mgh_{max} + mgh_{max} = 0$.



50.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinaț $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 4,47 \text{ m/s}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C de pe porțiunea orizontală: $\Delta E_{c_{BC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{BC}} = E_{c_C} - E_{c_B} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2}$,

$$L_G = 0, \quad L_N = 0 \quad \text{și} \quad L_{F_f} = -F_f d = -\mu mgd \quad \text{obținem} \quad \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu gd} = \sqrt{2g(h - \mu d)} \approx 2,82 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D :

$$\Delta E_{c_{CD}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_D^2}{2} = -mgh_{CD} \Rightarrow h_{CD} = \frac{v_D^2}{2g} = h - \mu d = 0,4 \text{ m}$$

d. Corpul se oprește pe porțiunea orizontală în punctul F . Aflăm distanța parcursă de corp pe planul orizontal, astfel că aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul F : $\Delta E_{c_{AF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.

Cum $\Delta E_{c_{AF}} = 0$, $L_N = 0$, $L_G = mgh$ și $L_{F_f} = -F_f d_t = -\mu mgd_t$, obținem: $0 = mgh - \mu mgd_t \Rightarrow d_t = h / \mu \approx 3,33 \text{ m}$. Astfel porțiunea BC este parcursă integral o singură dată iar corpul se oprește în F , $CF \approx 1,33 \text{ m} \Rightarrow BF \approx 0,67 \text{ m}$

51.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{Mv_A^2}{2} = -MgH \Rightarrow v_A = \sqrt{2gH} = 8 \text{ m/s}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele A și C : $\Delta E_{c_{AC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_{F_f} = fL_G = -fMgh_C$, $L_N = 0$,

$$L_G = -Mgh_C \quad \text{și} \quad \Delta E_{c_{AC}} = -E_{c_A} = -\frac{Mv_A^2}{2}, \quad \text{obținem} \quad h_c = \frac{v_A^2}{2g(1+f)} \approx 2,91 \text{ m}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele A și D : $\Delta E_{c_{AD}} = L_{F_f} + L_G + L_N \Rightarrow$

$$\frac{Mv_D^2}{2} - \frac{Mv_A^2}{2} = L_{F_f} - Mgh_D \Rightarrow L_{F_f} = M \left(gh_D + \frac{v_D^2 - v_A^2}{2} \right) = -360 \text{ J}$$

52. a. Din definiție $L_{G,AD} = mg(h - h_1) = 400 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul D : $\Delta E_{c,AD} = L_{G,AD} + L_{F_f,AD} + L_{N,AD}$. Cum $\Delta E_{c,AD} = E_{c,D} - E_{c,A} = 0$, $L_{N,AD} = 0$ obținem: $0 = mg(h - h_1) + L_{F_f,AD} \Rightarrow L_{F_f,AD} = -mg(h - h_1) = -400 \text{ J}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C , astfel că:

$$\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_f,AC} + L_{N,AC}. \quad \text{Cum} \quad \Delta E_{c,AC} = E_{c,C} - E_{c,A} = -\frac{mv_A^2}{2}, \quad L_{N,AC} = 0,$$

$$L_{G,AC} = mg(h_C - h_A) = 0 \quad \text{și} \quad L_{F_f,AC} = L_{F_f,AB} + L_{F_f,BC} = 2L_{F_f,AB} \quad \text{obținem:} \quad -\frac{mv_A^2}{2} = 2L_{F_f,AB}.$$

Aflăm lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea AB din teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea AB, astfel că:

$$\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{Ff,AB} + L_{N,AB} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh + L_{Ff,AB} \Rightarrow L_{Ff,AB} = \frac{mv_B^2}{2} - mgh \approx -320\text{J},$$

$$\text{astfel că } v_A = 2\sqrt{-\frac{L_{Ff,AB}}{m}} = 4 \text{ m/s}$$

d. Din definiție $P_m = \frac{L_{G,AB}}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = 3,2 \text{ kW}$

53.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare A și punctul D: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_N$. Deoarece $L_N=0$,

$L_G = mg(h_A - h_D)$ și $\Delta E_{cAD} = E_{cD} - E_{cA} = -\frac{mv_A^2}{2}$ obținem $v_A = \sqrt{2g(h_D - h_A)}$. Cum arcul AB este egal cu 1/3 dintr-un cerc, atunci unghiul $AOB=120^\circ$, astfel că $h_A = R(1 - \cos 60^\circ) = R/2 = 2 \text{ m}$. Obținem $v_A \approx 4,47 \text{ m/s}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele A și B: $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Deoarece $L_G=0$, $L_N=0$ și

$$\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_A^2}{2} \text{ obținem } -\frac{(M+m)v_A^2}{2} = L_{Ff} \Rightarrow v_A = \sqrt{-\frac{2L_{Ff}}{M+m}} = 8 \text{ m/s}$$

c. Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele A și C: $\Delta E_{cAC} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum $L_G = (M+m)g(h-h')$, $L_N=0$ și

$$\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{(M+m)v_0^2}{2} = (M+m)g(h-h') + L_{Ff} \Rightarrow$$

$$L_{Ff} = (M+m) \left[-\frac{v_0^2}{2} + g(h'-h) \right] = -2025 \text{ J}$$

54.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele M și C: $\Delta E_{cMC} = L_{Ff} + L_G + L_N$. Din $L_G=mgh_1$, $L_N=0$, $L_{Ff}=-\mu mgd$ și

$$\Delta E_{cMC} = E_{cC} = \frac{mv_C^2}{2} \text{ obținem } \frac{mv_C^2}{2} = mgh_1 - \mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h_1 - \mu d)} = 5 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele C și N: $\Delta E_{cCN} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_C^2}{2g} = h_1 - \mu d = 1,25 \text{ m}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare M și punctul de oprire F: $\Delta E_{cMF} = L_{Ff} + L_G + L_N$. Cum $L_N=0$,

$$L_G=mgh_1 \text{ și } \Delta E_{cMF} = 0 \text{ obținem } 0 = mgh_1 + L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -mgh_1 = -1715 \text{ J}$$

d. Din $L_{Ff} = -\mu mgD$ calculăm distanța totală parcursă de sportiv pe porțiunea orizontală, astfel că $D = -\frac{L_{Ff}}{\mu mg} = \frac{h_1}{\mu} = 24,5 \text{ m}$. Astfel corpul parcurge porțiunea

$$BC \text{ de } N = \left[\frac{D}{d} \right] = 2 \text{ ori, astfel că sportivul se oprește definitiv la } 0,5 \text{ m de punctul B.}$$

55. a. Energia mecanică a corpului în momentul în care este lăsat liber este $E_{mi} = E_{ci} + E_{pi} = E_{pi} = m_2 g \ell = 0,64 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și punctul A, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell} = 4 \text{ m/s}$

c. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctele A și C, astfel că $\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_f,AC} + L_{N,AC}$.

$$\Delta E_{c,AC} = E_{c,C} - E_{c,A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}, \quad L_{N,AC} = 0, \quad L_{G,AC} = 0 \text{ și } L_{F_f,AC} = -\mu_1 mgd_1,$$

$$\text{obținem } \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -\mu_1 mgd_1 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 - 2\mu_1 gd_1} \Rightarrow v_C \approx 3,16 \text{ m/s}$$

d. Aplicăm teorema de variație a de variație a energiei cinetice între punctele C și E, astfel că $\Delta E_{c,CE} = L_{G,CE} + L_{F_f,CE} + L_{N,CE}$, iar $\Delta E_{c,CE} = E_{c,E} - E_{c,C} = 0 - \frac{mv_C^2}{2}$,

$L_{N,CE} = 0$, $L_{G,CE} = 0$ și $L_{F_f,CE} = -\mu_m mgCE$. Deoarece coeficientul de frecare crește liniar atunci coeficientul de frecare mediu este $\mu_m = \frac{\mu + \mu'}{2}$, unde μ' este coeficientul de frecare după parcugerea distanței CE.

Cum $\mu = ax$, iar când $x = d_2 \Rightarrow \mu_2 = ad_2$ obținem constanta $a = \frac{\mu_2}{d_2}$, astfel că

$$\mu' = \frac{\mu_2 CE}{d_2} \Rightarrow \mu_m = \frac{\mu_2 CE}{2d_2}. \text{ Obținem } \frac{mv_C^2}{2} = -\frac{\mu_2 mgCE^2}{2d_2} \Rightarrow CE = v_C \sqrt{\frac{d_2}{\mu_2 g}} = 2,5 \text{ m.}$$

56.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și poziția verticală O: $\Delta E_{c,o} = L_G + L_T$. Dar:

$$\Delta E_{c,o} = E_{c,o} - E_{c,A} = \frac{mv_0^2}{2}, \quad L_G = mgh = mg\ell(1 - \cos \alpha) \text{ și } L_T = 0,$$

deoarece tensiunea este în permanență perpendiculară pe traiectorie. Obținem: $\frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \alpha)} \Rightarrow$

$$v_0 = 2 \text{ m/s}$$

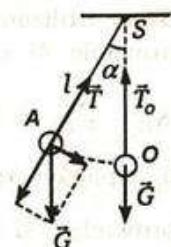
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A și punctul B în care firul formează un unghi $\beta = 30^\circ$ cu verticala, astfel că $\Delta E_{c,B} = L_G + L_T$.

Cum $L_G = mg(h_A - h_B) = mg[\ell(1 - \cos \alpha) - \ell(1 - \cos \beta)] = mg\ell(\cos \beta - \cos \alpha)$, $L_T = 0$ și $E_{c,B} = E_{c,B}$ obținem $E_{c,B} = mg\ell(\cos \beta - \cos \alpha) = 0,292 \text{ J}$

c.* Deoarece corpul are o traiectorie circulară, impunem condiția ca în punctul inferior al traiectoriei, rezultanta forțelor să joace un rol de forță centripetă:

$$\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}, \text{ iar scalar } T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{\ell}\right) \Rightarrow T_0 = mg(3 - 2\cos \alpha) \Rightarrow$$

$T_0 = 4 \text{ N} \Rightarrow$ Dacă tensiunea este cel mult egală cu 4 N, firul nu se rupe când corpul trece prin poziția verticală.

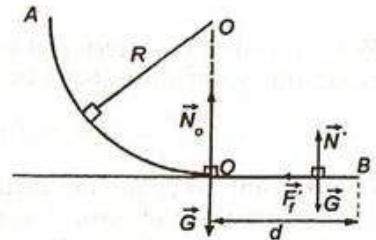


57.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea de jgheab:

$$\Delta E_{c,o} = L_G + L_N + L_{F_f}.$$

$$\Delta E_{c,o} = E_{c_o} - E_{c_0} = \frac{mv_0^2}{2}; L_G = mgR, \text{ iar } L_N = 0.$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgR + L_{F_f} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}(mgR + L_{F_f})} = 2 \text{ m/s}$$



b.* Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în poziția verticală O și impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o traiectorie circulară. Vectorial: $\vec{N}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.

$$\text{Scalar: } N_0 - mg = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow N_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{R}\right) \approx 2,33 \text{ N.}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la mișcarea pe planul orizontal:

$$\Delta E_{c_{os}} = L_{N'} + L_G + L_{F_f}. \text{ Deoarece } L_{F_f} = -F_f d = -\mu N' d = -\mu mgd, \quad L_{N'} = 0; \quad L_G = 0$$

$$\text{și } \Delta E_{c_{os}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 2 \text{ m.}$$

58.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul în care corpul ajunge pe jgheab B: $\Delta E_{c_{os}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mg(h - R) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h - R)}$

$$\Rightarrow v_B \approx 4,47 \text{ m/s.}$$

b.* Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca pe direcția formată de corp și centrul jgheabului, rezultanta forțelor pe această direcție să joace rol de forță centripetă. Scalar se obține:

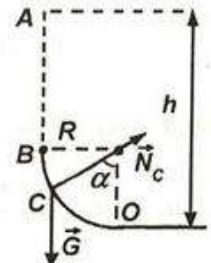
$$N_C - mg \cos \alpha = \frac{mv_C^2}{R} \Rightarrow N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} + g \cos \alpha\right).$$

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C:

$$\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N. \text{ Cum } \Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2}; \quad L_G = mg(h - R + R \cos \alpha); \quad L_N = 0$$

$$\text{obținem: } \frac{mv_C^2}{2} = mg(h - R + R \cos \alpha) \Rightarrow v_C^2 = 2g(h - R + R \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$N_C = mg\left(\frac{2h}{R} + 3 \cos \alpha - 2\right) = 25 \text{ N.}$$



Valoarea maximă a forței de apăsare pe jgheab se obține când corpul se află în poziția O, astfel că $\alpha=0$. Obținem $N_O = mg\left(\frac{2h}{R} - 1\right) = 55 \text{ N}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul O, unde corpul se oprește, deoarece pe jgheab mișcarea se face cu frecare: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$. Dar $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = 0; \quad L_G = mgh$ și $L_N = 0$ obținem: $0 = mgh + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = -mgh = -15 \text{ J}$, deoarece forța de frecare este o forță cu caracter rezistiv.

59.a. În punctul superior al buclei, corpul nu mai apasă asupra acesteia, astfel că greutatea corpului joacă rol de forță centripetă. Astfel obținem:

$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B = \sqrt{gR} \approx 2,236 \text{ m/s}$$

b.* Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul cel mai de sus al buclei circulare B: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G$. Cum

$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2}; \quad L_N = 0 \quad \text{și} \quad L_G = mg(h - 2R)$$

$$\text{obținem: } \frac{mgR}{2} = mg(h - 2R) \Rightarrow h = \frac{5R}{2} = 1,25 \text{ m.}$$

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare și punctul superior al buclei circulare: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mgR}{2}, \quad \text{deoarece în punctul superior al buclei circulare corpul nu apasă asupra jgheabului și } v_B^2 = gR.$$

Cum $L_N = 0$ și $L_G = mg(H - 2R)$ obținem:

$$\frac{mgR}{2} = mg(H - 2R) + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = mg\left(\frac{5R}{2} - H\right) = -2,5 \text{ J.}$$

60.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt$

$$\text{Cum } v = nv_0 \Rightarrow \frac{mv^2}{2} (n^2 - 1) = Pt \Rightarrow t = \frac{mv_0^2(n^2 - 1)}{2P} = 150 \text{ s.}$$

$$\text{b. } P = Fv = Fn v_0 \Rightarrow F = \frac{P}{nv_0} = 100 \text{ N.}$$

c. Cum $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$, adică forța depinde invers proporțional de viteză, astfel că pentru $v_0 = 10 \text{ m/s} \Rightarrow F_0 = 400 \text{ N.}$

Reprezentarea grafică a forței în funcție de viteză este fig 1

$$\text{Din teorema de variație a energiei cinetice: } \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Pt}{m}}.$$

Cum $t = 0 \Rightarrow v = v_0 = 10 \text{ m/s}$, atunci reprezentarea grafică a vitezei în funcție de timp este fig 2.

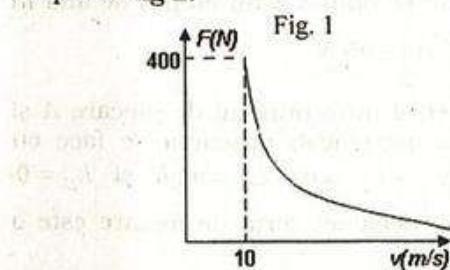


Fig. 1

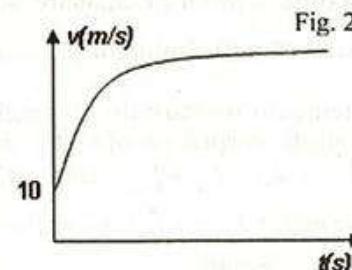


Fig. 2

61.a. Aplicăm pentru sistemul de corpuri teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_{G_1} + L_{G_2} + L_{T_1} + L_{T_2}$. Lucrurile mecanice ale celor două tensiuni se compensează întrucât tensiunea care acționează asupra corpului m_1 este motoare, deoarece corpul 1 se ridică, iar tensiunea care acționează asupra corpului m_2 este rezistivă, deoarece corpul 2 coboară.

Astfel: $L_{T_1} + L_{T_2} = -Th + Th = 0 \Rightarrow \Delta E_c = L_{G_1} + L_{G_2} \Rightarrow E_c = L_{G_1} + L_{G_2}$.

Deoarece $L_{G_1} = -m_1gh_1$ și $L_{G_2} = m_2gh_1$ obținem: $E_c = (m_2 - m_1)gh_1 = 0,8\text{ J}$

$$\mathbf{b.} \Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_2 - m_1)gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2}}$$

$$\Rightarrow v = 2\text{ m/s.}$$

c. Când corpul cu masa m_2 ajunge pe sol, corpul cu masa m_1 se află la înălțimea $2h = 2\text{ m}$ față de sol. Cum corpul 1 are viteza orientată în sus, iar firul se slăbește, aplicând teorema de variație a energiei cinetice, aflăm înălțimea pe care mai urcă corpul 1, ținând cont că asupra acestuia acționează numai greutatea. Din $\Delta E_c = L_G \Rightarrow E_{c_f} - E_{c_i} = -m_1gh_1 \Rightarrow 0 - \frac{m_1v^2}{2} = -m_1gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v^2}{2g} = 0,2\text{ m}$

Înălțimea maximă măsurată față de sol la care se oprește corpul 1 este: $h_{\max} = 2h + h_1 = 2,2\text{ m}$.

62.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii până în momentul ruperii firului, astfel că: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$.

$L_{T_1} + L_{T_2} = Td - Td = 0$, deoarece tensiunea care acționează asupra corpului m_1 este forță motoare, iar tensiunea care acționează asupra corpului m_2 este forță rezistivă. Cum $L_G = 0$, $L_N = 0$, $L_{F_f} = -\mu m_1gd$ și $L_{G_2} = m_2gd$ obținem:

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_2gd - \mu m_1gd \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gd(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1,58\text{ m/s}$$

b. După ce firul se rupe corpul m_1 are o mișcare uniform încetinită, astfel că aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru acest corp obținem:

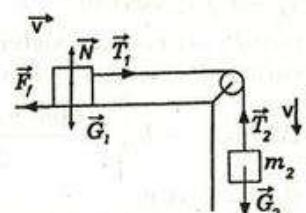
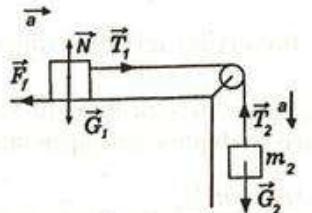
$$\Delta E_{c1} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_N + L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_1v^2}{2} = -\mu m_1gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{d(m_2 - \mu m_1)}{\mu(m_1 + m_2)} = 0,625\text{ m}$$

Distanța parcursă până la oprire de corpul m_1 măsurată din momentul pornirii este $d_f = d + s_{op} = 1,125\text{ m}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_2 din momentul ruperii firului până în momentul ajungerii acestuia la sol, astfel că:

$$\Delta E_{c2} = L_{total2} = L_{G_2} \Rightarrow \frac{m_2v^2}{2} - \frac{m_2v^2}{2} = m_2gh \Rightarrow$$

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 5,15\text{ m/s}$$



63.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când m_2 coboară pe distanța h_1 , iar m_1 se deplasează spre dreapta: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$. Din

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}, \quad L_{G_1} = 0, \quad L_N = 0,$$

$$L_{T_2} + L_{T_1} = 0, \quad L_{G_2} = m_2gh_1 \text{ și } L_{F_f} = -\mu m_1gh_1.$$

$$\text{Obținem: } -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_2gh_1 - \mu m_1gh_1 \quad (1)$$

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când corpul m_1 se deplasează spre stânga pe distanța h_2 : $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f}$.

$$\text{Deoarece } \Delta E_c = -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}, \quad L_{G_2} = -m_2gh_2; \quad L_N = 0; \quad L_{G_1} = 0; \quad L'_{F_f} = -\mu m_1gh_2,$$

$$\text{iar } L_{T_1} + L_{T_2} = 0 \text{ obținem: } -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = -m_2gh_2 - \mu m_1gh_2 \quad (2).$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow m_2gh_1 - \mu m_1gh_1 = -m_2gh_2 - \mu m_1gh_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_2(h_1 + h_2)}{m_1(h_1 - h_2)} = 0,3.$$

b. Raportul lucururilor mecanice ale forțelor de frecare este $\frac{L_{F_f}}{L'_{F_f}} = \frac{h_1}{h_2} = 5$

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri care se deplasează spre stânga: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f} \Rightarrow$

$$-\frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = -m_2gs_{op} - \mu m_1gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2g(m_2 + \mu m_1)} = 3 \text{ m}$$

64.a. Din formula lucrului mecanic obținem:

$$L_F = Fd \cos \alpha \Rightarrow F = \frac{L_F}{d \cos \alpha} = 20 \text{ N}$$

b. Lucrul mecanic total al forțelor de frecare este $L_{F_f} = L_{F_f1} + L_{F_f2}$, cu $L_{F_f2} = -\mu N_1 d = -\mu m_1 g d$.

Proiectând forțele care acționează asupra corpului m_1 pe verticală: $N_1 - m_1 g + F \sin \alpha = 0 \Rightarrow L_{F_f1} = -\mu N_1 d = -\mu(m_1 g - F \sin \alpha)d$.

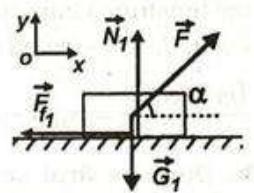
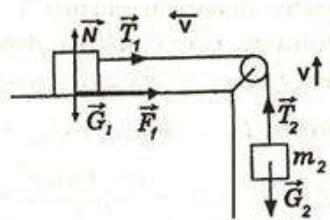
$$\text{Obținem: } L_{F_f} = -\mu[(m_1 + m_2)g - F \sin \alpha]d \Rightarrow \mu = -\frac{L_{F_f}}{[(m_1 + m_2)g - F \sin \alpha]d} = 0,1$$

c. Puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa m_2 este $P_m = F_{f2}v_m \cos 180 = -\mu \cdot m_2 g v_m$, unde v_m este viteza medie a sistemului și este $v_m = v/2$ cu v viteza sistemului după parcurserea distanței d . Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$$\Delta E_c = L_F + L_{F_f} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = L_F + L_{F_f} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L_F + L_{F_f})}{m_1 + m_2}} \approx 11,24 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$$P_m \approx -2,81 \text{ W}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:



$$\Delta E_c = L_F + L_{F_f} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = FD \cos \alpha - \mu[(m_1 + m_2)g - F \sin \alpha]D \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2D[F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu(m_1 + m_2)g]}{m_1 + m_2}} \approx 15,9 \text{ m/s}$$

65.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri, astfel că:

$$\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G_2} + L_{F_f} + L_N, \text{ unde}$$

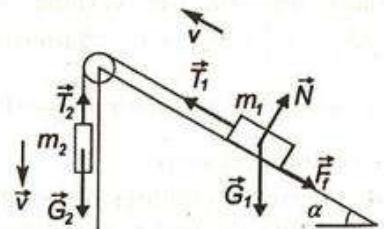
$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}, \quad L_{G_2} = m_2gh,$$

deoarece corpul m_2 coboară, iar greutatea lui este o forță motoare; $L_{T_1} + L_{T_2} = 0$, deoarece

$T_1 = T_2 = T$. T_1 este forță motoare, T_2 este o forță rezistivă și ambele își deplasează punctele de aplicare pe aceeași distanță h , $L_N = 0$, $L_{G_1} = -m_1gh \sin \alpha$ și

$$L_{F_f} = -\mu m_1gh \cos \alpha. \text{ Obținem: } \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_2gh - m_1gh \sin \alpha - \mu m_1gh \cos \alpha \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2}} \approx 2,31 \text{ m/s.}$$



b. Aflăm distanța parcursă de corpul m_1 , aflat pe planul înclinat, până la oprire, după ce corpul m_2 ajunge pe sol și tensiunea nu mai acționează. Corpul se mișcă pe distanță d . Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{G_1} + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{m_1v^2}{2} = -m_1gd \sin \alpha - \mu m_1gd \cos \alpha \Rightarrow d = \frac{v^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

$\Rightarrow d = 40 \text{ cm}$. Distanța totală parcursă până la oprire este $D = d + h = 1 \text{ m}$

$$\text{c. } L_{F_f} = -F_f(h + d) = -\mu m_1 g(h + d) \cos \alpha = -3,33 \text{ J}$$

66.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{F_f} = -\mu m_1 g \ell \cos \alpha = -8 \text{ J}$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este $L_{G_2} = -m_2 g \ell = -40 \text{ J}$.

c. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri

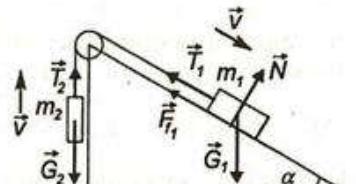
$$\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G_2} + L_{F_f} + L_N, \text{ unde } \Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}, \quad T_2$$

este o forță motoare iar T_1 o forță rezistivă și ambele își deplasează punctele de aplicare pe aceeași distanță h , astfel că $L_{T_1} + L_{T_2} = 0$, $L_N = 0$,

$$L_{G_1} = m_1 g \ell \sin \alpha. \text{ Obținem:}$$

$$\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_1 g \ell \sin \alpha - \mu m_1 g \ell \cos \alpha - m_2 g \ell \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\ell(m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha - m_2)}{m_1 + m_2}} \approx 2,658 \text{ m/s.}$$



67. a. Variația energiei potențiale gravitaționale a sistemului lăda-Pământ este $\Delta E_p = -L_G = mgh = 100 \text{ J}$.

b. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică este $L_{F_e} = -\frac{kh^2}{2} = -25 \text{ J}$.

c. Deoarece lada este ridicată cu viteză constantă atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru sistemul lada-resort $\Delta E_c = L_G + L_{F_{el}} + L_F \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada este

$L_F = -L_G - L_{F_{el}} = mgh + \frac{kh^2}{2} = 125 \text{ J}$, deoarece și greutatea lăzii și forța elastică sunt forțe rezistive

d. Impunem condiția de echilibru omului: $\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Deoarece omul nu se desprinde de podea înseamnă că $N \geq 0$. Considerăm cazul cel mai defavorabil când $N=0$, astfel că forța cu care trage omul de fir este $F=Mg$. Din condiția de echilibru impusă lăzii $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G}' = 0$ obținem $F = kx' + mg \Rightarrow x' = \frac{(M-m)g}{k} = 3m$, practic este imposibil să deformăm resortul atât pentru ca omul să se ridice de pe podea

68. a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B aflat la baza planului înclinat. $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = E_{cB}$,

$$L_G = mgh = mgd \sin \alpha \text{ și } L_N = 0 \text{ obținem } E_{cB} = mgd \sin \alpha = 50 \text{ J}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între B aflat la baza planului înclinat și punctul C imediat înainte ca obiectul să atingă resortul, astfel

$$\Delta E_{cBC} = L_G + L_N + L_{F_f} \Rightarrow E_{cC} - E_{cB} = -\mu mg \ell \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} - mgd \sin \alpha = -\mu mg \ell \Rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{2g(d \sin \alpha - \mu \ell)} \approx 7,07 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele C și D în care corpul se oprește: $\Delta E_{cCD} = L_G + L_N + L_{F_{el}} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = v \sqrt{\frac{m}{k}} = 10 \text{ cm}$.

69.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru a afla viteza cu care este lansat corpul prin destinderea resortului:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v = x \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp imediat după lansare în punctul A și până când ajunge la înălțimea maximă în punctul B:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}. Deoarece \Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv^2}{2}, L_N = 0, L_G = -mgh$$

și lucrul mecanic total al forței de frecare este $L_{F_f} = L_{F_{f,so}} + L_{F_{f,oc}} \Rightarrow$

$$L_{F_f} = -\mu mg \ell - \mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = -\mu mg \ell - \mu mgh \operatorname{ctg} \alpha \text{ obținem:}$$

$$\frac{mv^2}{2} = -mgh - \mu mg \ell - \mu mgh \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow h = \frac{v^2 - 2\mu g \ell}{2g(1 + \mu \cdot \operatorname{ctg} \alpha)} \approx 1,57 \text{ m}$$

c. Lucrul mecanic total al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mg(\ell + h \operatorname{ctg} \alpha) = -3,43 \text{ J}$

70.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare al corpului A și punctul de la baza planului B, astfel că: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$. Cum

$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2}, \quad L_G = mgh, \quad L_{F_f} = -\mu mg \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha = -\mu mgh \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{și} \quad L_N = 0$$

obținem $\frac{mv_B^2}{2} = mgh - \mu mgh \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} \approx 4.47 \text{ m/s}$

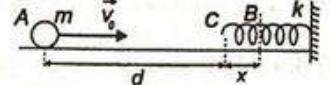
b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A al corpului și punctul C în care comprimarea resortului este maximă și corpul se oprește: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_d}$. Cum $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = 0$, $L_N = 0$; $L_G = mgh$,

$$L_{F_f} = -\mu mg \frac{h}{\sin \alpha} \cos \alpha = -\mu mgh \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{și} \quad L_{F_d} = -\frac{kx^2}{2} \quad \text{obținem:}$$

$$0 = mgh - \mu mgh \operatorname{ctg} \alpha - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} = 10 \text{ cm}$$

c. Lucrul mecanic al forței elastice este $L_{F_d} = -\frac{kx^2}{2} = -2 \text{ J}$

71.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul inițial A când vagonul se desprinde de tren și punctul B când resortul este comprimat la maxim și vagonul se oprește: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_d}$.



Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ și lucrurile mecanice sunt $L_G = 0$ și $L_N = 0$,

$$L_{F_f} = -\mu mg(d + x) = -\mu mgs_{op} \quad \text{unde} \quad s_{op} = d + x \quad \text{și} \quad L_{F_d} = -\frac{kx^2}{2}, \quad \text{obținem:}$$

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs_{op} - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv_0^2 - kx^2}{2\mu mg} = 60 \text{ m.}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de desprindere A și punctul C imediat înaintea ciocnirii resortului, astfel că: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și $L_{F_f} = -\mu mgd$ obținem

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \approx 2 \text{ m/s, deoarece: } d = s_{op} - x = 59,9 \text{ m.}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele B și C:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_d} \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} = -\mu mgx + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{\frac{kx^2 - 2\mu mgx}{m}} \approx 1,95 \text{ m/s}$$

72.a. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A în care resortul este comprimat și punctul B unde comprimarea dispare, astfel că

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_d}. \quad \text{Cum} \quad \Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}, \quad L_G = 0, \quad L_N = 0 \quad \text{și} \quad L_{F_d} = \frac{kx^2}{2} \quad \text{obținem:}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v_B = x\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1,41 \text{ m/s}$$

b. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul B în care resortul este decomprișat și punctul C unde se oprește corpul pe suprafața sferică, astfel

$$\Delta E_{c_{BC}} = L_N + L_G. \text{ Cum } \Delta E_{c_{BC}} = -\frac{mv_B^2}{2}, L_N = 0 \text{ și } L_G = -mgh \Rightarrow$$

$$-\frac{mv_B^2}{2} = -mgh \Rightarrow h = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{kx^2}{2mg} = 10 \text{ cm.}$$

$$\text{Dar } h = R(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{h}{R} = \frac{1}{2}. \text{ Obținem } \alpha = 60^\circ.$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și D unde se va opri corpul: $\Delta E_{c_{AD}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_d}$.

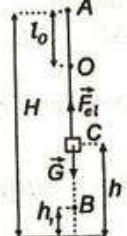
Deoarece $\Delta E_{c_{AD}} = 0$, $L_N = 0$, $L_G = -mgh$ și $L_{F_f} = -\mu mgx$ și $L_{F_d} = \frac{kx^2}{2}$ obținem:

$$0 = \frac{kx^2}{2} - \mu mgx - mgh \Rightarrow \mu = \frac{kx^2 - 2mgh}{2mgx} = 0,25$$

73.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B : $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_d}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = 0$ iar lucrurile mecanice ale forțelor sunt $L_G = mg(H - h_1)$ și

$$L_{F_d} = -\frac{k\Delta\ell^2}{2} = -\frac{k(H - \ell_0 - h_1)^2}{2} \text{ obținem:}$$

$$0 = mg(H - h_1) - \frac{k(H - \ell_0 - h_1)^2}{2} \Rightarrow mg(H - h_1) = \frac{k(H - \ell_0 - h_1)^2}{2} \quad (1), \text{ unde}$$



cu ℓ_0 am notat lungimea nealungită a corzii elastice.

Impunem condiția de echilibru corpului $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow k(H - h - \ell_0) = mg \quad (2)$

Din (1) și (2) obținem: $2(H - h_1)(H - h - \ell_0) = (H - \ell_0 - h_1)^2$. Înlocuind valorile obținem: $56(20 - \ell_0) = (28 - \ell_0)^2$. Rezolvând obținem: $\ell_0 \approx 18,33 \text{ m}$

b. Sportivul atinge viteza maximă atât timp cât cade sub acțiunea greutății până ce coarda elastică începe să se alungească, iar forța elastică frânează sportivul. Astfel aplicând teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O obținem $\Delta E_{c_{AO}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_O^2}{2} = mg\ell_0 \Rightarrow v_O = \sqrt{2g\ell_0} \approx 19,15 \text{ m/s}$

$$\text{c. Din } k(H - h - \ell_0) = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{H - h - \ell_0} \approx 35,928 \text{ kN/m}$$

74.a. Din condiția de echilibru impusă corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$, scalar obținem

$$F_{el} = F + mg = 40 \text{ N}$$

b. Comprimarea resortului este $\Delta\ell = F_{el}/k = 8 \text{ cm}$, astfel că lungimea resortului este $\ell = \ell_0 - \Delta\ell = 92 \text{ cm}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_e}$. Deoarece greutatea este forță rezistivă lucrul ei mecanic este $L_G = mgh$ și forța elastică este o forță motoare $L_{F_e} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow h = \frac{k\Delta\ell^2}{2mg} = 16$ cm. Înălțimea maximă față de sol la care va urca corpul dacă acțiunea forței F încetează este $h_{sol} = \ell + h = 108$ cm

75.a. Din condiția de echilibru impusă corpului $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow kx = mg$ obținem constanta elastică a resortului $k = mg/x = 100$ N/m

b. Din condiția de echilibru impusă corpului după ce resortul se apasă $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$ obținem $F + mg = kx' = 2kx \Rightarrow F = mg = 2$ N

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A după închetarea acțiunii forței F și punctul B de oprire al corpului, astfel că:

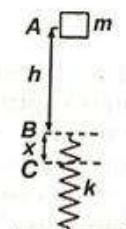
$$\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_e} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{kx'^2}{2} \Rightarrow h = \frac{kx'^2}{2mg} = \frac{2kx^2}{mg} = 2x = 4 \text{ cm.}$$

76.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul B în care corpul lovește resortul, astfel că:

$$\Delta E_{c,AB} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 2,83 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare A și punctul C unde comprimarea resortului x este maximă. Obținem: $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_e}$. Deoarece corpul pornește din repaus și în ajunge în final în repaus $\Delta E_{c,AB} = E_{c_B} - E_{c_A} = 0$ iar lucrurile mecanice sunt $L_G = mg(h+x)$, deoarece greutatea ajută la mișcare și

$$L_{F_e} = -\frac{kx^2}{2}, \text{ deoarece forța elastică se opune mișării, obținem:}$$



$$0 = mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0 \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} = 20 \text{ cm.}$$

c. Lucrul mecanic al forței elastice este $L_{F_e} = -\frac{kx^2}{2} = -0,6 \text{ J}$

77.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice din momentul lăsării libere a corpului și până în momentul alungirii firului elastic. Astfel $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB}$.

Cum $\Delta E_{c,AB} = E_{c,B} - E_{c,A} = \frac{mv_B^2}{2}$ și $L_{G,AB} = mg\ell_0 \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgl_0 \Rightarrow v_B = \sqrt{2gl_0}$. Cum

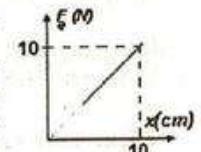
$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_B}{g} = \sqrt{\frac{2\ell_0}{g}} \approx 0,28 \text{ s}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice din momentul lăsării libere a corpului din punctul A și până în momentul în care corpul se oprește. Astfel

$$\Delta E_{c,AC} = L_{G,AC} + L_{F_{el},AC}. \quad \text{Cum} \quad \Delta E_{c,AC} = 0, \quad L_{G,AC} = mg(\ell_0 + x) \quad \text{și}$$

$$L_{F_{el},AC} = -\frac{kx^2}{2} \Rightarrow 0 = mg(\ell_0 + x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2 g^2 + 2kmg\ell_0}}{k} = 10 \text{ cm}$$

c. Cum forța elastică este $|F_{el}| = kx$, reprezentarea grafică a dependență modulului forței elastice din fir de alungirea acestuia până când firul se alungește la maximum este redată grafic în figura alăturată. Când $x=10 \text{ cm}$ forța elastică maximă este $F_{el,max}=10 \text{ N}$.



78.a. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului este $L_G = -mgh = -20 \text{ J}$

b. Din $h=v_m t$ cu viteza medie $v_m=(v+v_0)/2$ și cum $v=v_0-gt$ obținem

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} = 0,4 \text{ s}$$

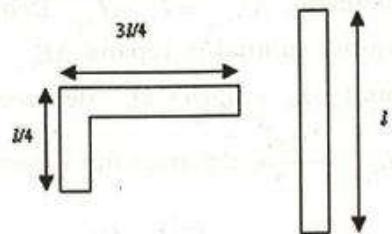
c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul A și punctul C în care corpul se oprește. Astfel: $\Delta E_{c,K} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece $L_G = -mg(h+x)$,

$$L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2} \quad \text{și} \quad \Delta E_{c,K} = -E_{c,t} = -\frac{mv_0^2}{2} \quad \text{obținem:} \quad -\frac{mv_0^2}{2} = -mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-mg + \sqrt{m^2 g^2 + mk(v_0^2 - 2gh)}}{k} = 16,8 \text{ cm}$$

3.4. Conservarea energiei mecanice

1.a. Deoarece nu există frecări între lanț și masă putem aplica legea de conservare a energiei mecanice. Alegem valoarea zero pentru energia potențială la nivelul mesei. m este masa întregului lanț. Inițial porțiunea de lanț cu lungime $\ell/4$ care atârnă poate fi considerată un punct material cu masa $m/4$ și cu întreaga masă concentrată în centrul de greutate, deci la $\ell/8$ de suprafața mesei. Energia potențială inițială a lanțului este $E_{p,i} = -\frac{m}{4}g\frac{\ell}{8} = -\frac{mgl}{32}$. Când lanțul alunecă de pe masă și devine vertical, el



are energia potențială $E_{p,f} = -mg\frac{\ell}{2}$, deoarece centrul de greutate al lanțului în

care considerăm concentrată întreaga masă a lanțului se află la distanța $\ell/2$ față de masă. Energia cinetică a lanțului când acesta părăsește masa este

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow -\frac{mgl}{32} = -\frac{mgl}{2} + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{15gl}}{4} = 3 \text{ m/s.}$$

b. Lucrul mecanic necesar urcării porțiunii de lanț care atârnă se efectuează pentru a urca centrul de greutate al lanțului care atârnă la nivelul mesei, astfel

$$\text{că } L_{ef} = -\Delta E_{p,grav} = \frac{mgl}{32} = 0,6 \text{ J}$$

2.a. Deoarece asupra corpului se exercită numai forța de greutate, care este forță de tip conservativ pentru sistemul corp-Pământ, putem aplica legea de

conservare a energiei mecanice între punctele A și B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$, unde $E_{c_A} = 0$, deoarece corpul pornește din repaus. Alegem nivel de referință pentru energia potențială punctul O, aflat pe sol, astfel că $E_{p_0} = 0$.

$$\text{Cum } E_{c_B} = \frac{E_{p_B}}{4} \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{p_B}}{4} + E_{p_B} = \frac{5}{4} E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{5}{4} mgh' \Rightarrow h' = \frac{4h}{5} = 80 \text{ m}$$

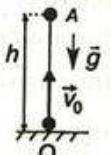
b. Utilizăm legea conservării energiei între punctele A și C, astfel că $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow mgh = \frac{mv_C^2}{2} + mgh_C \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h - h_C)} = 40 \text{ m/s}$

c. Pe baza conservării energiei mecanice $E_{p_A} = E_{c_0} \Rightarrow E_{c_0} = mgh$ și deoarece imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune f din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire atunci $E'_{c_0} = fE_{c_0} = fmgh$ și din legea conservării energiei obținem înălțimea la care se ridică din nou corpul: $E'_{c_0} = E_{p_D} \Rightarrow fmgh = mgh_D \Rightarrow h_D = fh = 40 \text{ m}$

3.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice în cazul aruncării mingii pe verticală de jos în sus. La sol mingea are doar energie cinetică ($E_{p_{\text{sol}}} = 0$) iar la înălțimea maximă doar energie potențială, astfel că:

$$E_{csol} = E_{p_{\text{max}}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\text{max}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_{\text{max}}} \approx 4,47 \text{ m/s}$$

b. Prin definiție $E_m = E_c + E_p$. Pe baza legii de conservare a energiei mecanice $E_m = E_{m_{\text{sol}}} = E_{c_{\text{sol}}} = mgh_{\text{max}} = 5 \text{ J}$



c. Din $E_{csol} = E_{p_{\text{max}}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\text{max}} \Rightarrow h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$ Dacă viteza mingii se

dublează $v = 2v_0 \Rightarrow h'_{\text{max}} = \frac{v^2}{2g} = 4 \frac{v_0^2}{2g} = 4h_{\text{max}} = 4 \text{ m}$, astfel că mingea se va ridica mai mult cu $\Delta h = h'_{\text{max}} - h_{\text{max}} = 3h = 3 \text{ m}$

4.a. Aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctele O și A: $E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece $E_{p_0} = mgh$ și în punctul de înălțime maximă $E_{c_A} = 0$, astfel că

$$E_{c_0} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{\text{max}} \Rightarrow h_{\text{max}} = h + \frac{v_0^2}{2g} = 5,8 \text{ m}$$

b. În punctul B aflat la o pătrime din înălțimea maximă la care se ridică corpul, $h_B = \frac{h_{\text{max}}}{4}$, aflăm energie cinetică pe baza conservării energiei mecanice între punctele A și B astfel că: $E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_A} - E_{p_B} \Rightarrow$

$$E_{c_B} = mgh_{\text{max}} - mg h_B = \frac{3mgh_{\text{max}}}{4} = 4,35 \text{ J}$$

c. Conservând energia mecanică între punctul de înălțime maximă A și punctul de pe sol C, obținem: $E_{p_A} = E_{c_C} \Rightarrow mgh_{\text{max}} = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2gh_{\text{max}}} \approx 10,77 \text{ m/s}$

5.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele O și M :

$$E_{c_0} = E_{p_M} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH} = 20 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele M și P :

$$E_{p_M} = E_{c_p} + E_{p_p} \Rightarrow mgH = \frac{mv_p^2}{2} - mgh \Rightarrow v_p = \sqrt{2g(H+h)} \approx 24,49 \text{ m/s}$$

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pe toată durata deplasării pietrei este $L_G = L_{G_{OM}} + L_{G_{MP}} = -mgH + mg(H+h) = mgh = 20 \text{ J}$

6.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare O și punctul A în care corpul ajunge la înălțimea maximă, astfel

$$E_{c_0} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 3,2 \text{ m}$$

b. Pe baza legii conservării energiei mecanice $E_{c_0} = E_{c_B} + E_{p_B}$ și cum $E_{c_0} = E_{p_B}/3$

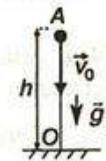
$$\text{obținem } E_{c_0} = 4E_{c_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{4mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{2} = 4 \text{ m/s}$$

c. Dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare aflat pe sol O și același punct la revenirea corpului, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_f$. Deoarece $\Delta E_c = E'_{c_0} - E_{c_0}$, lucru mecanic al greutății este nul $L_G = 0$ și $L_f < 0$ pentru că forța de frecare este rezistivă obținem $E'_{c_0} < E_{c_0} \Rightarrow v'_0 < v_0$. Viteza cu care corpul atinge solul la coborâre este mai mică decât viteza inițială v_0 , dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă.

7.a. Energia mecanică a ghiozdanului este:

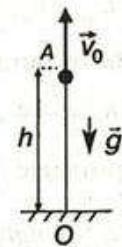
$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 288 \text{ J}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și O : $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 12 \text{ m/s}$



c. Pe baza conservării energiei dacă ghiozdanul este lăsat liber din punctul B de la înălțimea h' obținem:

$$E_{p_B} = E_{c_0} \Rightarrow mgh' = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh' \Rightarrow h' = h + \frac{v_0^2}{2g} = 7,2 \text{ m}$$



8.a. Energia potențială corespunzătoare înălțimii maxime este

$$E_{p_{\max}} = E_p + E_c = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 1,6 \text{ kJ}$$

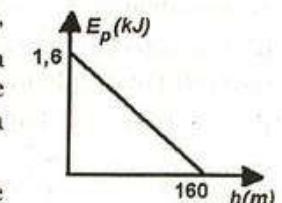
b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistem între punctul de plecare A și punctul B : $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece

$$E_{c_B} = 3E_{p_B} \text{ obținem: } \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 4mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{h}{4} + \frac{v_0^2}{8g} = 20 \text{ m.}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între vârful turnului A aflat la înălțimea h de sol și punctul O de pe sol. Alegem pe sol $E_{p_0} = 0$. Obținem:

$$E_{c_0} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 40 \text{ m/s.}$$

9.a. Deoarece la sol energia potențială este nulă $E_{p_0} = 0$, atunci dependenței energiei potențiale gravitaționale a pachetului în funcție de înălțimea h este $E_p = E_{p_0} - mgh = 1600 - 10h$. Reprezentarea grafică a funcției este redată în figura alăturată.

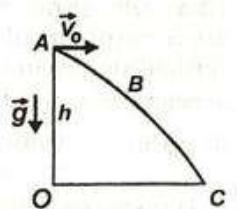


b. Pentru sistemul pachet-sol aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și O. Obținem:

$$E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_0} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60 \text{ m/s.}$$

c. Dacă pachetul se aruncă oblic în jos aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de aruncare și punctul în care corpul lovește solul, astfel că:

$$E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_0} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60 \text{ m/s}$$



Pachetul ajunge la sol cu aceeași viteză fie că este lăsat să cadă pe verticală în jos sau este aruncat oblic în jos, numai că ajunge la sol cu viteze orientate pe direcții diferite, vertical când pachetul cade vertical și oblic când este aruncat sub un unghi.

10.a. Timpul în care este ridicat coletul cu materiale este $t = \frac{h}{v} = 50 \text{ s}$

b. Puterea dezvoltată de macara este $P = Fv = mgv = 2 \text{ kW}$

c. Pe baza legii conservării energiei între punctul de plecare și sol, considerând că la sol energia potențială este nulă, obținem

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \approx 14,1 \text{ m/s}$$

d. După desprindere din colet piesa are o mișcare uniform accelerată, astfel că viteza medie de deplasare este $v_m = \frac{v'}{2}$. Din $h = v_m t' = \frac{v' t'}{2} \Rightarrow t' = \frac{2h}{v'} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1,41 \text{ s}$

11.a. Din grafic când corpul se află la sol $h = 0$ și $E_{c_{\max}} = 24 \text{ J}$. Lansat pe verticală de jos în sus corpul este supus acțiunii greutății, care este forță de tip conservativ. Aplicând legea conservării energiei mecanice, energia cinetică a corpului se transformă la înălțimea maximă în energia potențială, astfel că $E_{p_{\max}} = E_{c_{\max}} = 24 \text{ J}$.

b. Din grafic $h_{\max} = 6 \text{ m}$. Cum $E_{p_{\max}} = mgh_{\max} \Rightarrow m = \frac{E_{p_{\max}}}{gh_{\max}} = 400 \text{ g}$.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice și obținem:

$$E_{c_{\max}} = E_{c_i} + E_{p_i} \Rightarrow E_{c_{\max}} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_i \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(E_{c_{\max}} - mgh_i)}{m}} = \sqrt{2g(h_{\max} - h)} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

12.a. Din grafic la înălțimea maximă $h_{\max} = 6$ m, energia potențială are valoarea $E_{p_{\max}} = 18$ J. Considerând că pe sol, energia potențială este nulă, pe baza conservării energiei mecanice $E_{c_{\max}} = E_{p_{\max}} \Rightarrow$ energia cinetică maximă este la sol și are valoarea $E_{c_{\max}} = 18$ J

b. Considerăm punctul în care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potențiale în acel punct, astfel că $E_c = E_p / 3$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice:

$$E_{c_{\max}} = E_c + E_p = \frac{4}{3} E_p \Rightarrow E_{p_{\max}} = \frac{4}{3} E_p \Rightarrow mgh_{\max} = \frac{4}{3} mgh \Rightarrow h = \frac{3}{4} h_{\max} = 4,5 \text{ m}$$

$$\text{c. } E_c = \frac{E_p}{3} = \frac{E_{p_{\max}}}{4} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mgh_{\max}}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gh_{\max}}{2}} \approx 5,48 \text{ m/s}$$

13.a. Din grafic aflăm valoarea inițială a energiei cinetice $E_c = 400$ J și timpul după care corpul ajunge la înălțimea maximă $t_u = 2$ s. Deoarece corpul lansat vertical de jos în sus în câmp gravitațional are o mișcare uniform incetinită cu accelerația g și cu viteza inițială v_0 , conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ și din condiția de oprire $v = 0$ obținem viteza inițială a corpului $v_0 = gt_u = 20$ m/s

$$\text{b. } \text{Din expresia energiei cinetice } E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow m = \frac{2E_c}{v^2} = \frac{2E_c}{g^2 t_u^2} = 2 \text{ kg}$$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că $E_{c_{\text{sol}}} = E_{p_{\max}} \Rightarrow E_c = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = E_c / (mg) = 20$ m

d. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de pe sol O și punctul cerut A, astfel că: $E_{c_0} = E_{p_A} + E_{c_A}$. Deoarece $E_{c_A} = fE_{p_A}$ obținem:

$$E_{c_0} = E_{p_A}(1+f) \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{c_0}}{1+f} \Rightarrow E_{c_A} = \frac{fE_{c_0}}{1+f} = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2fE_{c_0}}{m(1+f)}} \approx 8,16 \text{ m/s}$$

14.a. Energia mecanică a bilei este $E_m = E_p = mgh_0$. Deoarece neglijăm frecările cu aerul energia mecanică a bilei se conservă în procesul căderii acesteia, astfel că la sol energia are aceeași valoare. În urma ciocnirii cu suprafața plană bila pierde $f=10\%$ din energia mecanică, astfel că energia mecanică imediat după ciocnire devine $E_{m1} = (1-f)E_m = (1-f)mgh_0$. Pe baza legii conservării energiei mecanice după ciocnire obținem

$$E_{m1} = E_{p_{\max 1}} \Rightarrow (1-f)mgh_0 = mgh_1 \Rightarrow h_1 = (1-f)h_0 = 90 \text{ cm}$$

b. După cea de-a două ciocnire cu suprafața plană nouă valoare a energiei mecanice este $E_{m2} = (1-f)E_{m1} = (1-f)^2 E_m = (1-f)^2 mgh_0$. Imediat după cea de-a două ciocnire viteza v_2 a bilei se obține din $\frac{mv_2^2}{2} = (1-f)^2 mgh_0 \Rightarrow$

$$v_2 = (1-f)\sqrt{2gh_0} \approx 4,02 \text{ m/s}$$

c. După cea de-a treia ciocnire cu suprafața plană energia mecanică a bilei este $E_{m3} = (1-f)E_{m2} = (1-f)^3 E_m = (1-f)^3 mgh_0 = 2,916 \text{ J}$

15.a. Deoarece corpul este aruncat vertical de jos în sus pe baza conservării energiei mecanice, considerând că la nivelul solului $E_{psol}=0$, atunci $E_{c_{sol}} = E_{p_{max}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 20 \text{ m}$

b. După prima ciocnire viteza corpului devine $v'_0 = 10 \text{ m/s}$, astfel că energia mecanică este $E_{m2} = E'_{c_{sol}} = \frac{mv'^2_0}{2}$, astfel că fractiunea pierdută din energia mecanică este $f = \frac{E_{c_{sol}} - E'_{c_{sol}}}{E_{c_{sol}}} = 1 - \frac{v'^2_0}{v_0^2} = 75\%$

c. Variația energiei mecanice după cea de-a de-a doua ciocnire este $\Delta E_{m2} = E_{m2} - E_{m1} = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{mv'^2_0}{2} - \frac{mv^2_0}{2} = -7,5 \text{ J}$, deoarece $v''_0 = 5 \text{ m/s}$

16.a. Deoarece jgheabul este lucios neglijăm frecările și utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul B unde corpul părăsește jgheabul. Considerăm nulă energie potențială la nivelul solului.

Obținem: $E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} + mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \Rightarrow v_B = 10 \text{ m/s}$

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul A și punctul unde corpul loveste solul C:

$$E_{m_A} = E_{m_C} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_C} \Rightarrow mgH = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{2gH} \approx 12,65 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de conservare a energiei mecanice între punctul A și punctul D aflat la înălțimea $h_D = fH$, astfel că: $E_{m_A} = E_{m_D} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow mgH = \frac{mv_D^2}{2} + mgh_D \Rightarrow v_D = \sqrt{2g(H-h_D)} = \sqrt{2gH(1-f)} \approx 11,31 \text{ m/s}$

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_N + L_G$. Deoarece $L_{F_f} = -F_f \ell = -\mu m g \ell$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ și

$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \text{ obținem } \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu m g \ell \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \ell} \Rightarrow v_B \approx 5,47 \text{ m/s}$$

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele aflate pe jgheab B și C. Considerăm nulă energie potențială în punctul B. Astfel:

$$E_{m_B} = E_{m_C} \Rightarrow E_{c_B} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + mgR \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gR} \approx 4,47 \text{ m/s}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul B și punctul D până la care urcă bila: $E_{m_B} = E_{m_D} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_D} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_D \Rightarrow h_D = \frac{v_B^2}{2g} = 1,5 \text{ m}$

18.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru punctele aflate pe suprafață curbă A și B considerând că în B energia potențială este nulă.

$$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH} = 10 \text{ m/s}$$

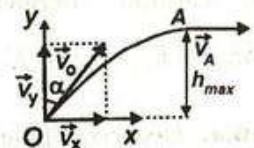
b. Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului între punctele A și B este $L_G = mgH = 50 \text{ J}$

c. Energia mecanică totală inițială este $E_{m,A} = E_{p,A} = mgH$. În punctul C energia mecanică este $E_{m,C} = E_{m,A}/4 = mgH/4$. Cum $E_{m,C} = E_{c,C}$ putem aplica între punctele A și C teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_{c,K} = L_G + L_N + L_F$.

Deoarece $\Delta E_{c,K} = E_{c,C} = \frac{mgH}{4}$, $L_G = mgH$, $L_N = 0$ și $L_F = -F_f BC = -\mu mgBC$ obținem:

$$\frac{mgH}{4} = mgH - \mu mgBC \Rightarrow BC = \frac{3H}{4\mu} = 18,75 \text{ m}$$

19.a. Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate Ox și Oy sunt $v_{0x} = v_0 \cos \alpha \approx 8,65 \text{ m/s}$ și $v_{0y} = v_0 \sin \alpha = 5 \text{ m/s}$



b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pe axa verticală între punctul de plecare O și punctul în care corpul se oprește. Se consideră nulă energia potențială gravitațională în punctul de pe sol. Astfel că

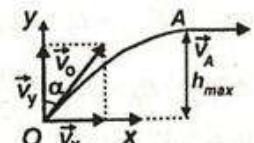
$$E_{m,O} = E'_{m,A} \Rightarrow E_{c,Oy} = E_p \Rightarrow \frac{mv_{0y}^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 1,25 \text{ m}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de plecare O și punctul A în care corpul ajunge la înălțimea maximă. Astfel că:

$$E_{m,O} = E_{m,A} \Rightarrow E_{c,O} = E_{c,A} + E_{p,A} \Rightarrow \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh_{max} \Rightarrow \frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{mv_{0y}^2}{2} \Rightarrow v_A = v_0 \cos \alpha = 8,65 \text{ m/s}$$

d. Lucrul mecanic al forței de greutate din momentul lansării și până când corpul atinge solul este $L_{G, total} = L_{G, urcare} + L_{G, cobord} = -mgh_{max} + mgh_{max} = 0$

20.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul minge-Pământ între punctul O aflat pe sol și punctul A aflat la înălțimea maximă: $E_{c,O} + E_{p,O} = E_{c,A} + E_{p,A}$, cu $E_{p,O} = 0$, deoarece alegem pe sol valoarea zero pentru energia potențială



În punctul de înălțime maximă, vectorul viteză este orizontal. Pe orizontală mingea are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v_0 \cos \alpha$, astfel că $v_A = v_0 \cos \alpha \Rightarrow v_0 = \frac{v_A}{\cos \alpha} \Rightarrow E_{c,O} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{E_{c,A}}{\cos^2 \alpha} = 90 \text{ J}$

b. Când mingea formează cu orizontală un unghi β , astfel că $v_B \cos \beta = v_A$, deoarece pe orizontală mișcarea mingei este rectilinie și uniformă $v_B = \frac{v_A}{\cos \beta}$ și

$$E_{c,B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2 \cos^2 \beta} = \frac{E_{c,A}}{\cos^2 \beta} = 60 \text{ J.}$$

c. Aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare de pe sol O și punctul B, unde mingea formează cu orizontală un unghi β .

Considerând că pe sol energia potențială este nulă, aflăm energia potențială în B.

$$\text{Din } E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_B} + E_{p_B} \text{ și cum } E_{p_0} = 0 \Rightarrow E_{p_B} = E_{c_0} - E_{c_B} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2 \alpha} - \frac{E_{c_A}}{\cos^2 \beta} = 30 \text{ J}$$

21.a. Aplicăm între punctul de plecare O și punctul în care energia cinetică este o fracțiune f din energia cinetică inițială, legea de conservare a energiei mecanice, astfel că: $E_{c_0} + E_{p_0} = E_c + E_p$. Considerăm că în punctul de lansare O, energia potențială este nulă. Astfel obținem: $E_{c_0} = E_c + E_p \Rightarrow$

$$E_p = E_{c_0} - E_c = E_{c_0} - fE_{c_0} = E_{c_0}(1-f) \Rightarrow mgh = \frac{mv_0^2}{2}(1-f) \Rightarrow h = \frac{v_0^2(1-f)}{2g} \approx 0,65 \text{ m}$$

b. Deoarece pe orizontală mișcarea corpului este rectilinie și uniformă $v_0 \cos \alpha = v \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{v}$.

$$\text{Cum } E_c = fE_{c_0} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = f \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = fv_0^2 \Rightarrow v = v_0 \sqrt{f} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{f}} = 0,625.$$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul O și punctul A în care corpul ajunge la înălțimea maximă: $E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece pe orizontală corpul are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v_A = v_0 \cos \alpha$ energia potențială maximă este $E_{p_A} = E_{c_0} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = 6,75 \text{ J}$

22.a. Considerăm că pe sol, în punctul O, energia potențială este nulă. Energia mecanică totală a corpului este formată din energia cinetică și energia potențială, astfel:

$$E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 70 \text{ J}$$

b. Deoarece pe orizontală corpul se mișcă uniform, întrucât asupra corpului acționează numai greutatea care este verticală, atunci

$$v_0 = v_B \cos \alpha \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{\cos \alpha} \Rightarrow E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2 \cos^2 \alpha} = 40 \text{ J}$$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice între punctele A și B obținem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{p_B} = E_m - E_{c_B} = mgh - \frac{mv_0^2}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha = 30 \text{ J}$$

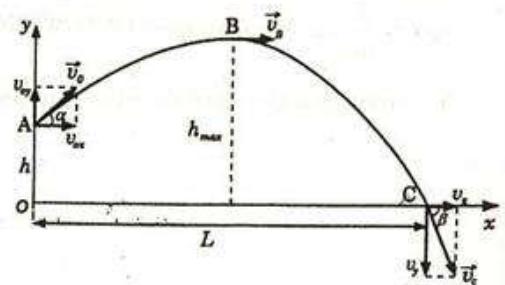
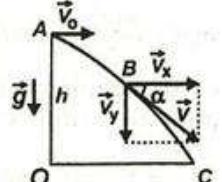
c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul de sosire de pe sol C: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$
Cum

$$E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 26,46 \text{ m/s}$$

23.a. Pe baza definiției energiei mecanice totale: $E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 100 \text{ J}$

b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A și punctul cel



mai înalt al traectoriei B , astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Pe orizontală mișcarea corpului este rectilinie și uniformă, astfel că: $v_0 \cos \alpha = v_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{\max} + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} \Rightarrow h_{\max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 16,25 \text{ m}$

c. Aplicăm între punctul de plecare A și punctul de sosire la sol C , legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$.

$$\text{Cum } E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 20 \text{ m/s.}$$

d. Pe orizontală, corpul se mișcă uniform astfel că $v_0 \cos \alpha = v_C \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{v_0 \cos \alpha}{v_C} \approx 0,4325$.

24.a. $E_m = E_c + E_p = mgh = 18 \text{ J}$, deoarece în poziția inițială corpul nu are energie cinetică și are doar energie potențială, iar pe sol alegem valoarea zero pentru energia potențială gravitațională.

b. Aplicăm între punctul de plecare B și punctul când corpul se află în poziția verticală A legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow$

$$mgh = \frac{mv_A^2}{2} + mg(h - \ell) \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell} = 4 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare B și punctul C unde corpul ajunge pe sol.

$$E_{p_B} = E_{c_{sol}} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s.}$$

d*. Impunem condiția ca în poziția verticală A rezultanta tensiunii și a greutății să joace un rol de forță centripetă, deoarece corpul are o traierie circulară.

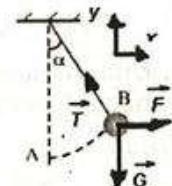
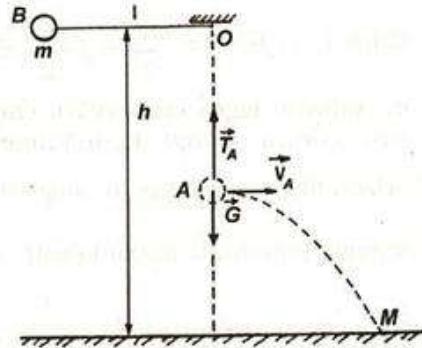
Scalar: $T_A - mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m \left(g + \frac{v_A^2}{\ell} \right) = 3mg = 30 \text{ N} \Rightarrow$ firul se

rupe pe verticală când tensiunea ajunge la valoarea 30 N.

25.a. Impunem condiția de echilibru bilei în poziția B , astfel că $\vec{T} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate Ox : $F - T \sin \alpha = 0$ și pe Oy : $T \cos \alpha - mg = 0$. Împărțind cele două relații obținem:

$$\tan \alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg \tan \alpha \Rightarrow F \approx 0,865 \text{ N}$$

b. Tensiunea din firul de care este legată bila în poziția B este $T = \frac{mg}{\cos \alpha} = 1 \text{ N}$



c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A și B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Considerăm nulă energia potențială în punctul cel mai de jos al trajectoriei, adică punctul A. Astfel $E_{p_B} = E_{c_A} \Rightarrow mgl(1 - \cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} \approx 1.41 \text{ m/s}$

26.a. Aplicăm între punctul O în care se află corpul inițial și punctul A când firul devine orizontal, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul O energia potențială este nulă, astfel că $E_{p_O} = 0$.

$$\text{Astfel: } E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgl \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell} = 4 \text{ m/s.}$$

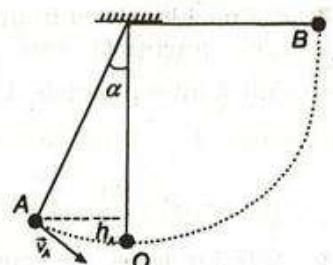
b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A și punctul unde se oprește corpul B: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece $E_{c_B} = 0$ obținem: $E_{c_B} = 0 \Rightarrow mgl + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{v_0^2}{2g} = 1,25 \text{ m.}$

c. $L_T = 0$, deoarece forța de tensiune este orientată perpendicular pe trajectorie și $L_G = -mgh_B = -2,5 \text{ J}$, deoarece greutatea nu ajută la mișcare și prin urmare este o forță cu caracter rezistiv.

27.a. Aplicăm între punctul de plecare A și punctul B, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul cel mai de jos al trajectoriei energia potențială este nulă $E_{p_O} = 0$. Obținem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$.

Cum $E_{p_A} = mgl(1 - \cos\alpha)$ și $E_{c_B} = 0$, deoarece în punctul B corpul se oprește, se obține:

$$\frac{mv_A^2}{2} + mgl(1 - \cos\alpha) = mgl \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell \cos\alpha} \Rightarrow v_A = 2 \text{ m/s.}$$

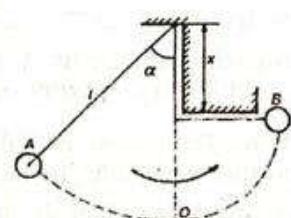


b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul O și punctul B: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{p_O} = 0$ și $E_{c_B} = 0$ obținem:

$$E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgl \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} \approx 2,83 \text{ m/s.}$$

c. Energia inițială a corpului este $E_m = E_c + E_p = \frac{mv_0^2}{2} = mgl = 0,4 \text{ J.}$

28.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al trajectoriei energia potențială este nulă. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul B, când firul devine orizontal: $E_{p_A} + E_{c_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$. Deoarece corpul pornește din repaus și ajunge în final în repaus $E_{c_A} = 0$ și $E_{c_B} = 0$, astfel $E_{p_A} = E_{p_B} \Rightarrow mgh_A = mgh_B \Rightarrow h_B = h_A = \ell(1 - \cos\alpha)$ $\Rightarrow h_B = 20 \text{ cm} \Rightarrow$ corpul urcă până la înălțimea de la care a plecat.



b. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul A și poziția verticală O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Cum $E_{c_A} = 0$ și $E_{p_O} = 0$ obținem:

$$mgl(l - \cos \alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gl(l - \cos \alpha)} = 2 \text{ m/s.}$$

c. $L_G = L_{G_{AO}} + L_{G_{OB}} = mgh_A - mgh_B = mg(h_A - h_B) = 0$, deoarece punctul A și punctul B se află pe aceeași orizontală, astfel că $h_A = h_B$.

29.a. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este $L_G = mg\ell(l - \cos \alpha) = 5J$

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și poziția de echilibru O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Deoarece $E_{c_A} = 0$ și $E_{p_O} = 0$

$$\text{obținem } mg\ell(l - \cos \alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gl(l - \cos \alpha)} \approx 3,16 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între poziția de echilibru O și punctul în care $E_c = E_p$, astfel că $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p \Rightarrow E_{c_O} = 2E_p \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{\ell(l - \cos \alpha)}{2} = 25 \text{ cm}$$

30.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei O, energia potențială este nulă $E_{p_O} = 0$. Conservăm energia mecanică între punctele A și O: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$.

Deoarece $E_{c_A} = 0$ obținem:

$$mg\ell(l - \cos \alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gl(l - \cos \alpha)} = 3 \text{ m/s.}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg\ell(l - \cos \alpha) = \frac{mv_B^2}{2} + mg\ell(l - \cos \beta) \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2gl(\cos \beta - \cos \alpha)} \approx 2,56 \text{ m/s.}$$

c*. În punctul B impunem condiția ca rezultanta forțelor pe direcția firului să joace rol de forță centripetă. Scalar obținem:

$$T_B - mg \cos \beta = \frac{mv_B^2}{l} \Rightarrow T_B = m \left(\frac{v_B^2}{l} + g \cos \beta \right) \Rightarrow T_B = mg(3 \cos \beta - 2 \cos \alpha).$$

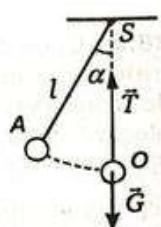
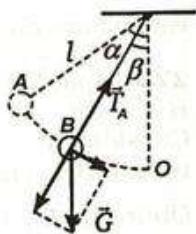
Particularizăm pentru: $\beta = \alpha = 60^\circ \Rightarrow T_A = mg \cos \alpha = 0,5 \text{ N.}$

Pentru $\beta = 30^\circ \Rightarrow T_B = mg(3 \cos \beta - 2 \cos \alpha) = 1,595 \text{ N.}$

Pentru $\beta = 0^\circ \Rightarrow T_O = mg(3 - 2 \cos \alpha) = 2 \text{ N.}$

În poziția de plecare A, tensiunea în fir este minimă, iar în poziția de echilibru O (poziția verticală), tensiunea în fir este maximă.

31.a. Tensiunea în cablu este maximă când cablul se află în poziție verticală. În această poziție, rezultanta tensiunii și a greutății joacă rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar



scalar: $T - mg = \frac{mv_0^2}{\ell}$, unde ℓ este lungimea firului.

$$\text{Cum } T = 2mg \Rightarrow mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow v_0 = \sqrt{g\ell} = 10 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele O și A , unde se oprește corpul. Considerăm că $E_{p_A} = 0$ și deoarece $E_{c_A} = 0$, obținem

$$E_{c_0} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

c. Pentru ca acest corp să poată să descrie cercul în plan vertical, trebuie ca în A , tensiunea în cablu să fie mai mare sau cel puțin egală cu zero. Considerăm cazul cel mai defavorabil când tensiunea din cablu în A este nulă. În acest caz în punctul A , greutatea joacă rol de forță centripetă, astfel că:

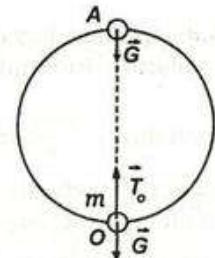
$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow v_A^2 = g\ell. \text{ Aplicăm între punctele } A \text{ și } O$$

legea de conservare a energiei mecanice. $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_0} + E_{p_0}$ și deoarece $E_{p_0} = 0$ obținem

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg2\ell \Rightarrow v_0^2 = v_A^2 + 4g\ell = 5g\ell.$$

Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul O și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă: $\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar obținem

$$T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = mg + \frac{mv_0^2}{\ell} = 6mg = 1,2 \text{ kN} \Rightarrow \text{pentru ca acest corp să poată să descrie un cerc în plan vertical trebuie ca firul să suporte o forță de rupere minimă de cel puțin șase ori mai mare decât greutatea corpului susținut.}$$



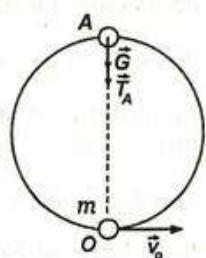
32.a. Deoarece $E_{p_0}=0$ energia inițială a corpului este $E_{m_0} = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{mv_0^2}{2} = 10 \text{ J}$

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare O și punctul cel mai de sus al traectoriei A . Obținem: $E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_A} + E_{p_A}$

$$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + 2mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 4g\ell} \approx 8,944 \text{ m/s.}$$

c.*. Reprezentăm forțele care se exercită asupra corpului în punctul superior al traectoriei și impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă: $\vec{T}_A + \vec{G} = \vec{F}_{cpA}$, iar scalar obținem:

$$T_A + mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m\left(\frac{v_A^2}{\ell} - g\right) = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} - 5g\right) = 30 \text{ N.}$$



33*.a. Alegem $E_{p_0} = 0$ și aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și O : $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_0} + E_{p_0}$.

$$\text{Cum } E_{c_A} = 0 \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_0} \Rightarrow mg\ell = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} = 3 \text{ m/s.}$$

b. Pentru a putea descrie cercul cu raza $\ell - x$, corpul trebuie să ajungă în punctul superior al cercului. Considerăm că în punctul B tensiunea în fir este nulă, iar greutatea joacă rol de forță centripetă, astfel că:

$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{\ell - x} \Rightarrow v_B^2 = g(\ell - x)$. Aplicăm între punctele A și B legea de conservare a energiei mecanice astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow$

$$mgl = \frac{mv_B^2}{2} + 2mg(\ell - x) \Rightarrow x = \frac{3\ell}{5} = 27 \text{ cm}, \text{ deoarece raza cercului este } \ell - x.$$

c. Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este: $L_G = mg(\ell - OB) = mg(2x - \ell) = \frac{mgl}{5} = 0,9 \text{ J}$.

34.a. Aplicăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele A și B aflate pe planul înclimat: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{c_A} = 0$ și $E_{p_B} = 0$ obținem:

$$mgAB \sin \alpha = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gAB \sin \alpha} \approx 8,94 \text{ m/s}$$

b. Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele A și C este: $L_{G_{AC}} = mg(h - R) = mg(AB \sin \alpha - R) = 15 \text{ J}$

c. Pe baza legii de conservare a energiei cinetice între punctele A și C obținem: $E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow E_{c_C} = mg(AB \sin \alpha - R) = 15 \text{ J}$

d. Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele A și punctul D în care energia cinetică este egală cu energia potențială: $E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$$E_{p_A} = 2E_{p_D} \Rightarrow mgAB \sin \alpha = 2mgh_D \Rightarrow h_D = \frac{AB \sin \alpha}{2} = 2 \text{ m}$$

35*.a. Considerăm că în punctul cel mai de jos al buclii energia potențială este nulă, astfel că $E_{p_0} = 0$. Deoarece mișcarea montagne rousse-ului decurge fără frecare, aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B , unde B este punctul cel mai sus al buclii, iar punctul A este cel de plecare. Obținem:

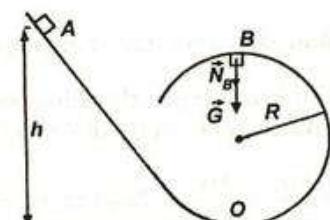
$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR \quad (1)$$

În punctul B , greutatea joacă rol de forță centripetă deoarece presupunem că forța de apăsare asupra şinei este nulă. Scalar obținem:

$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR \quad (2). \text{ Din (1) și (2) obținem: } h = \frac{5R}{2} = 10 \text{ m.}$$

b. Pe baza conservării energiei mecanice între punctele A și B obținem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR \Rightarrow v_B = \sqrt{v^2 + 2g(h - 2R)} \Rightarrow \\ v_B = \sqrt{v^2 + gR} = 7 \text{ m/s.}$$



c. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul B și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{G} + \vec{N}_B = \vec{F}_{cp}$, iar scalar:

$$G + N_B = F_{cp} \Rightarrow mg + N_B = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow N_B = m\left(\frac{v_B^2}{R} - g\right) = \frac{mv^2}{R} = 1845 \text{ N}$$

36*.a. Alegem valoarea zero a energiei potențiale pentru toate punctele planului orizontal. Pentru ca acest corp să poată să descrie jgheabul semicircular BCD , în punctul D , greutatea corpului trebuie să joace rol de forță centripetă, deoarece presupunem că acest corp nu apasă asupra jgheabului. Scalar obținem:

$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_D^2}{R} \Rightarrow v_D^2 = gR$$

Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A și D . Obținem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_D^2}{2} + 2mgR \Rightarrow v_A = \sqrt{5gR} = 5 \text{ m/s.}$$

b. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în punctul M și impunem condiția ca rezultanta forțelor pe direcția normalei să joace rol de forță centripetă. Obținem: $N_M - mg \cos \alpha = \frac{mv_M^2}{R} \Rightarrow N_M = m\left(\frac{v_M^2}{R} + g \cos \alpha\right)$.

Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctele A și M :

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_M} + E_{p_M} \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_M^2}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v_M^2 = v_A^2 - 2gR(1 - \cos \alpha) \Rightarrow v_M^2 = gR(3 + 2 \cos \alpha) \Rightarrow N_M = 3mg(1 + \cos \alpha) = 9 \text{ N.}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul N unde corpul lovește solul: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_N} + E_{p_N}$.

Cum $E_{p_A} = E_{p_N} = 0 \Rightarrow E_{c_A} = E_{c_N} \Rightarrow v_N = v_A = 5 \text{ m/s} \Rightarrow$ corpul lovește solul cu aceeași viteză cu care a plecat, dar direcția vectorului viteză este diferită.

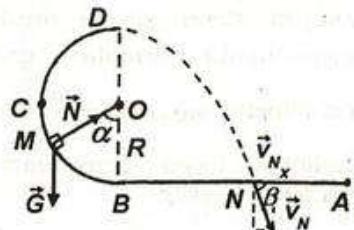
d. Din desen $\cos \beta = \frac{v_{N_x}}{v_N}$. Cum pe orizontală, după ce părăsește jgheabul semicircular, corpul are o mișcare rectilinie și uniform cu viteză $v_{N_x} = v_D = \sqrt{gR} \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447$

37.a. Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din A în B este $L_G = mgh_{AB} = mg(h_A - h_B) = mg(2R - h) = 32 \text{ mJ}$

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele A și B .

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_B^2}{2} + mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(2R - h)} \approx 1,79 \text{ m/s}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul A și punctul C aflat pe sol. Obținem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$



$$v_B = 2\sqrt{gR} \approx 4,38 \text{ m/s}$$

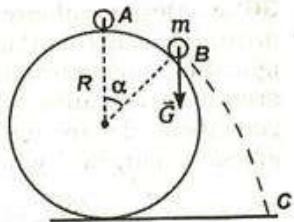
d. Pe baza legii conservării energiei mecanice, energia totală a corpului când acesta se află față de sol la o înălțime egală cu raza sferei este $E_m = E_{p_A} = 2mgR = 192 \text{ mJ}$

38*.a. Pentru ca să se poată desprinde de sferă în punctul B , trebuie ca forța de apăsare exercitată de corp asupra sferei să se anuleze, astfel că $N_B = 0$, iar componenta normală a greutății să joace rol de forță centripetă: $mg \cos \alpha = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR \cos \alpha$ (1)

Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A și B :

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_B^2}{2} + mg(R + R \cos \alpha) \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \approx 2,83 \text{ m/s.}$$



b. $h_B = R(1 + \cos \alpha) = 2 \text{ m}$, reprezintă înălțimea față de sol la care se desprinde corpul de sferă.

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare A și punctul în care corpul ajunge la sol C , deoarece mișcarea se face fără frecare:

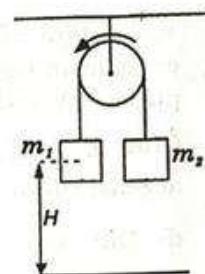
$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow 2mgR = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{4gR} \approx 6,93 \text{ m/s.}$$

39.a. Energia totală a sistemului de corperi, considerând că la sol energia potențială este nulă este: $E_t = (m_1 + m_2)gH = 100 \text{ J}$, deoarece corpurile se află în repaus și au doar energie potențială.

b. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul de corperi. La sol energia totală a sistemului de corperi este $E_t = E_c + E_p = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + m_1g2H$, deoarece când ajunge la

sol corpul al doilea, ambele corperi au aceeași viteză, iar corpul m_1 se află la înălțimea $2H$ față de sol. Obținem:

$$(m_1 + m_2)gH = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + 2m_1gH \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2}} = 2 \text{ m/s.}$$



c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul 1, care se află la înălțimea $2H$ și se mișcă vertical în sus. Astfel $E_t = E_f \Rightarrow E_c + E_p = E_{p_f} \Rightarrow$

$$\frac{m_1v^2}{2} + 2m_1gH = m_1gh \Rightarrow h = 2H + \frac{v^2}{2g} = H \left(2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) = \frac{H(3m_2 + m_1)}{m_1 + m_2} = 2,2 \text{ m.}$$

40.a. Cum $F_1 = kx_1$ constanta elastică a resortului este $k = F_1/x_1 = 500 \text{ N/m}$

b. Lucrul mecanic efectuat de forța elastică în procesul comprimării cu x_1 este

$$L = -F_{el}x_1 = -\frac{kx_1^2}{2} = -\frac{F_1x_1}{2} = -2,5 \text{ J}$$

c. Deoarece forța elastică este o forță de tip conservativ, pentru sistemul corp-resort se aplică legea conservării energiei mecanice, astfel că energia potențială de deformare a resortului se transformă în energia cinetică a corpului. Astfel

$$E_p = E_c \Rightarrow \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = x_1 \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F_1 x_1}{m}} = 10 \text{ m/s}$$

41.a. Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctul O de pe sol și punctul A, astfel că $E_{mO} = E_{mA} \Rightarrow E_{cO} = E_{cA} + E_{pA} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mgh \Rightarrow$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \approx 6,32 \text{ m/s}$$

b. Distanța parcursă de corp pe planul inclinat este $AB = \frac{h}{\sin \alpha} - \ell_0 = 4,8 \text{ m}$

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}. \text{ Cum } \Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}, L_{N,AB} = 0,$$

$$L_{G,AB} = mgh_{AB} = mgAB \sin \alpha \text{ și } L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu NAB = -\mu mgAB \cos \alpha, \text{ obținem } \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = mgAB \sin \alpha - \mu mgAB \cos \alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gAB(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = 8 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între capătul resortului B și punctul C în care resortul este comprimat la maxim, astfel că:

$$\Delta E_{c,BC} = L_{G,BC} + L_{F_d,BC} + L_{N,BC}.$$

$$\Delta E_{c,BC} = -\frac{mv_B^2}{2}, L_{N,BC} = 0, L_{G,BC} = mgx \sin \alpha, L_{F_d,BC} = -F_{el,BC}x = -\frac{F_{elC}}{2}x = -\frac{kx^2}{2}$$

$$\text{obținem: } -\frac{mv_B^2}{2} = mgx \sin \alpha - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = \frac{mg \sin \alpha + \sqrt{m^2 g^2 \sin^2 \alpha + kmv_B^2}}{k} \approx 8 \text{ cm.}$$

Lungimea resortului comprimat este $\ell = \ell_0 - x \approx 1,12 \text{ m}$

d. Deoarece după ce lovește resortul mișcarea corpului se efectuează fără frecare, corpul revine după destinderea resortului în punctul B cu aceeași viteză $v_B = 8 \text{ m/s}$, conform legii conservării energiei. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între capătul resortului B și punctul D unde se oprește corpul:

$$\Delta E_{c,BD} = L_{G,BD} + L_{F_f,BD} + L_{N,BD}. \text{ Cum } \Delta E_{c,BD} = -\frac{mv_B^2}{2}, L_{N,BD} = 0,$$

$$L_{G,BD} = -mgBD \sin \alpha \text{ și } L_{F_f,BD} = -F_f BD = -\mu mgBD \cos \alpha \text{ obținem:}$$

$$-\frac{mv_B^2}{2} = -mgBD \sin \alpha - \mu mgBD \cos \alpha \Rightarrow BD = \frac{v_B^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 4,26 \text{ m}$$

3.5. Impulsul punctului material.

Teorema de variație a impulsului punctului material.

1. Conform definiției $E_c = \frac{mv^2}{2}$ și $p = mv \Rightarrow m = \frac{p}{v} \Rightarrow E_c = \frac{pv}{2} \Rightarrow$

$$v = \frac{2E_c}{p} = 10 \text{ m/s și } m = \frac{p^2}{2E_c} = 160 \text{ g.}$$

2. Cum $E_c = \frac{mv^2}{2}$ și $p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m} \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$. Dacă $p' = 3p$

$$\Rightarrow E'_c = \frac{p'^2}{2m} = \frac{9p^2}{2m} = 9E_c \Rightarrow \text{energia cinetică crește de 9 ori.}$$

3. După $t_1 = 2$ s, viteza corpului este $v = 10$ m/s și impulsul corpului este $p = mv = 5$ Ns. $\Delta p = p - p_0$, unde p_0 reprezintă impulsul inițial al corpului $p_0 = mv_0 = 10$ Ns, deoarece viteza inițială la $t = 0$ este $v_0 = 20$ m/s $\Rightarrow \Delta p = -5$ Ns, deoarece impulsul corpului scade în primele două secunde de la începerea mișcării

4. Conform legii cordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin metoda identificării coeficienților obținem: $x_0 = 4$ m, $v_0 = -8$ m/s și $a = 12$ m/s², astfel că la momentul inițial de timp $t = 0$, impulsul corpului este $p_0 = mv_0 = -8$ Ns.

Legea vitezei este $v = v_0 + at = -8 + 12t$ și prin urmare la momentul $t = 2$ s $\Rightarrow v = 16$ m/s, iar $p = mv = 16$ N·s $\Rightarrow \Delta p = p - p_0 = 24$ Ns.

5. Deoarece corpul are o mișcare uniform accelerată cu viteza inițială v_0 , legea vitezei este de formă $v = v_0 + at = 2 + 2t$, iar după $t = 4$ s de la începerea mișcării corpul are viteza $v = 10$ m/s $\Rightarrow p = mv = 2$ Ns.

6. Aplicăm pentru sistemul mingă - sol legea conservării energiei mecanice, astfel că energia potențială a mingii se transformă în energie cinetică la sol:

$E_p = E_c \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 10$ m/s $\Rightarrow p = mv = 4$ Ns este impulsul corpului la sol.

7. Aflăm înălțimea maximă la care poate ajunge mingea aplicând legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică la sol a mingii de pinpong se transformă în energie potențială gravitațională:

$$E_{c_{sol}} = E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Aflăm viteza la înălțimea $h = \frac{h_{\max}}{3} = \frac{v_0^2}{6g}$, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul aflat la sol și cel aflat la înălțimea h .

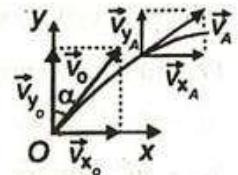
$$E_{cm} = E_c + E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \pm v_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow p = \pm mv_0 \sqrt{\frac{2}{3}} = \pm 0,2 \text{ kg}\cdot\text{m/s.}$$

Se obțin două valori ale impulsului corespunzătoare cazului de urcare și respectiv de coborâre prin punctul aflat la o treime din înălțimea maximă la care poate ajunge corpul.

8. Mișcarea paharului corespunde aruncării pe orizontală a unui corp. Cum vectorul viteză este întotdeauna tangent la traectorie, îl vom descompune în cele două componente v_x și v_y , astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Pe orizontală paharul se mișcă uniform cu viteza v_0 , astfel că $v_x = v_0$, iar pe verticală cade liber cu accelerată gravitațională, astfel încât $v_y = gt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \Rightarrow p = mv = m\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \Rightarrow p = 0,447 \text{ N}\cdot\text{s.}$

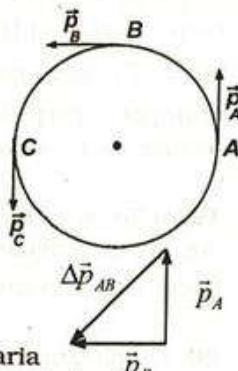
9. Mișcarea ventuzei este o aruncare sub un unghi, iar vectorul viteză tangent în permanență la traectorie se descompune în două componente, una orizontală și una verticală. Pe orizontală ventuza are o mișcare rectilinie și uniformă astfel că $v_x = v_0 \cos \alpha$, iar pe verticală are o aruncare de jos în sus, astfel că $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha} \approx 5,2 \text{ m/s și } p = mv = 0,26 \text{ kg}\cdot\text{m/s.}$$



10. Între punctele diametral opuse A și C , variația impulsului este $\Delta \vec{p}_{AC} = \vec{p}_C - \vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AC}| = mv + mv = 2mv = 1280 \text{ Ns}$, deoarece impulsurile sunt egale în modul ($p_C = p_A = mv$) și au sensuri contrare.

După ce atletul parcurge un sfert de pistă, între punctele A și B , $\Delta \vec{p}_{AB} = \vec{p}_B - \vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AB}| = mv\sqrt{2} \approx 902,4 \text{ Ns}$, deoarece impulsul în punctul B este perpendicular pe impulsul din punctul A , iar scalar $p_A = p_B = mv$.



11. Deoarece forța este reprezentată în funcție de timp, aria cuprinsă între curba forței, axa timpului și ordinata la momentul $t = 4 \text{ s}$ reprezintă fizic variația impulsului forței, astfel că: $\Delta H = 21 \text{ Ns}$. Pe baza teoremei de variație a impulsului: $\Delta p = \Delta H \Rightarrow p = \Delta H \Rightarrow mv = \Delta H$

deoarece inițial corpul se află în repaus și $p_0 = 0 \Rightarrow v = \frac{\Delta H}{m} = 21 \text{ m/s.}$

12. Deoarece forța este reprezentată în funcție de timp, aria cuprinsă între curba forței și axa timpului semnifică fizic impulsul forței, astfel că: $\Delta H = \frac{F_0 \cdot t}{2}$.

Pe baza teoremei de variație a impulsului unui punct material:

$$\Delta H = \Delta p \Rightarrow p_f - p_i = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow mv - mv_0 = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow v = v_0 + \frac{F_0 \cdot t}{2m} = 15 \text{ m/s.}$$

13. Utilizând teorema de variație a impulsului unui punct material:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = 16 \text{ s.}$$

14. Aplicăm teorema de variație a impulsului unui punct material:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv}{\Delta t} = 100 \text{ N, deoarece inițial } v_0=0 \text{ m/s și } p_0=0 \text{ Ns}$$

15. Aplicăm pentru glonte teorema de variație a impulsului:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -750 \text{ N. Semnul minus arată că această forță se opune mișcării glontelui și astfel îl micșorează acestuia impulsul.}$$

16. Se utilizează teorema de variație a impulsului pentru tren:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow -mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = -\frac{mv_0}{\Delta t} = -200 \text{ kN, deoarece în final trenul se oprește și } v=0 \text{ m/s. Semnul } "-" \text{ ne arată că forța determinată frânează trenul.}$$

17. Utilizăm teorema de variație a impulsului în cazul frânării mașinii:

$$\Delta p = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow F_f = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -800 \text{ N. Semnul } "-" \text{ arată că forța de frânare micșorează impulsul mașinii, deoarece se opune mișcării acesteia.}$$

18. Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul lansării cu frecare a unui corp pe plan orizontal. Vectorial: $\Delta \vec{p} = \vec{F}_f \cdot \Delta t$, iar scalar:

$$\Delta p = -F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = -\mu mg t, \text{ deoarece } F_f = \mu N = \mu mg \text{ și ea micșorează impulsul corpului pentru că se opune mișcării acestuia, astfel că } p = mv = mv_0 - \mu mg t = m(v_0 - \mu g t) = 1,6 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$$

19. Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul căderii libere a corpului: $\Delta p = G \cdot \Delta t$, deoarece singura forță care acționează asupra corpului în cădere liberă este greutatea și $\Delta t = t \Rightarrow \Delta p = mgt = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s.}$

20. a. Aplicăm teorema de variație a impulsului $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \Rightarrow m(v - v_0) = F \Delta t$ (1) și cum $\Delta E_c = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2)$ (2) prin împărțirea relațiilor obținem:

$$\frac{\Delta E_c}{F \Delta t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow v = \frac{2 \Delta E_c}{F \Delta t} - v_0 = 3 \text{ m/s}$$

b. Masa corpului este $m = \frac{F \Delta t}{v - v_0} = 1 \text{ kg}$

c. Variația impulsului corpului este $\Delta p = F \cdot \Delta t = 2 \text{ Ns}$

22.a. Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctul A și punctul B pentru corpul m . Alegem nulă energia potențială gravitațională în punctul B, astfel că

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{pA} = E_{pB} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 20 \text{ m/s}$$

b. Din definiție lucrul mecanic efectuat de forța de fricare este $L_{ff} = -F_f d = -\mu Mgd \Rightarrow L_{ff} = -8 \text{ J}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul C și punctul B pentru corpul M , astfel că: $\Delta E_{c,CB} = L_{G,CB} + L_{ff,CB} + L_{N,CB}$.

Cum $\Delta E_{c,CB} = -\frac{Mv_0^2}{2}$, $L_{G,CB} = 0$, $L_{N,CB} = 0$ și $L_{ff,CB} = -\mu Mgd$ obținem

$$-\frac{Mv_0^2}{2} = -\mu Mgd \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\mu gd} = 4 \text{ m/s}$$

d. Pe baza teoremei de variație a impulsului pentru corpul m , obținem $F\Delta t = \Delta p = -mv \Rightarrow |F| = \frac{mv}{\Delta t} = 4 \text{ kN}$

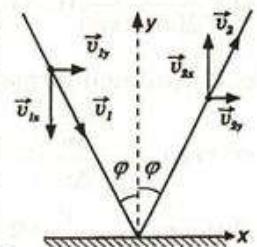
23.a. Variația impulsului mingii la ciocnirea normală cu podeaua este: $\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -2m\vec{v}_0 \Rightarrow |\Delta p| = 2mv_0$. Conform teoremei de variație a impulsului

$$\text{vectorial: } \Delta \vec{p} = \vec{F}\Delta t, \text{ iar scalar: } |\Delta p| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\Delta t} = 40 \text{ kN, unde } F$$

este forța pe care podeaua o exercită asupra mingii. Conform principiului al acțiunii și reacțiunii al dinamicii mingea lovește podeaua cu o forță egală orientată perpendicular pe aceasta.

b. Ciocnirea mingii cu podeaua este perfect elastică și mingea ricoșează cu o viteză egală și sub un unghi egal față de normală. Observăm că în urma ciocnirii cu podeaua proiecția vectorului viteză de-a lungul podelei, pe axa Ox , nu se modifică în timp ce proiecția vectorului viteză pe o direcție perpendiculară pe perete își schimbă sensul. Prin urmare impulsul mingii se modifică numai pe direcția perpendiculară pe podea (axa Oy), ceea ce înseamnă că podeaua exercită asupra mingii o forță perpendiculară pe ea. Conform principiului acțiunii și reacțiunii mingea acționează asupra podelei cu o forță egală și de sens contrar. Cum $\Delta p_y = -mv'_y - mv_y = -2mv_0 \cos \varphi$ prin aplicarea teoremei de variație a impulsului obținem:

$$|\Delta p_y| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p_y|}{\Delta t} = \frac{2mv_0 \cos \varphi}{\Delta t} = 20 \text{ kN, deoarece } \varphi = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$$



3.6 Ciocniri plastice și elastice

1.a. Energia cinetică inițială a sistemului este $E_{ci} = \frac{mv^2}{2} = 112,5 \text{ J}$

b. În urma procesului de ciocnire are loc un transfer de impuls de la corpul cu masa m spre corpul cu masa M . Din reprezentarea grafică a forței în funcție de

temp. se calculează impulsul transferat cu ajutorul ariei cuprinse între curba forței și axa timpului, astfel că $\Delta p = \frac{F_0 \cdot t}{2} = 10 \text{ N}\cdot\text{s}$.

Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru fiecare corp. Pentru corpul cu masa m : $-\Delta p = mv'_1 - mv \Rightarrow v'_1 = v - \frac{\Delta p}{m} = 5 \text{ m/s}$, deoarece acest corp transferă impulsul Δp corpului aflat în repaus și prin urmare viteza acestui corp scade.

Pentru corpul cu masa M : $-\Delta p = Mv'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\Delta p}{M} = 2 \text{ m/s}$.

b. Variația energiei cinetice a sistemului este: $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} \Rightarrow$

$$\Delta E_c = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -90 \text{ J} \Rightarrow \text{pierderea energiei cinetice este de } 90 \text{ J.}$$

2.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două coruri: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$, iar scalar obținem:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}$$

b. Căldura degajată în acest proces provine din scăderea energiei cinetice a sistemului, astfel că: $Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} \Rightarrow$

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2 = 24 \text{ J}$$

c. Corpul nou format are o mișcare uniform incetinită cu accelerația $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$

și cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_c}{t} \Rightarrow v = v_c - \mu g t$. Când corpul se oprește $v=0$, astfel că

$$\text{obținem } t_{op} = \frac{v_c}{\mu g} = 2 \text{ s}$$

3.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru corpul nou format $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$. Deoarece corurile se mișcă în sens contrar astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}$ și $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ atunci $\vec{v}_c = 0$. Corpul nou format se oprește imediat după ciocnirea plastică a celor două coruri.

b. Energia cinetică relativă totală este $E_{Crel} = \frac{2mv_{rel}^2}{2} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = 4mv^2$. Vitezele

coruprilor imediat înainte de ciocnire sunt $|v| = \sqrt{\frac{E_{Crel}}{m}} = 2,5 \text{ m/s}$

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii este:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = mv^2 = \frac{E_{Crel}}{4} = 25 \text{ J}$$

4.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din gloante și blocul de lemn: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v}_c$, iar scalar:

$$mv_0 = (m+M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv_0}{m+M} = 2 \text{ m/s}$$

b. Căldura degajată în urma ciocnirii este $Q = \frac{mM}{2(m+M)} v_0^2 = 198 \text{ J}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctul de formare și cel de oprire. $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_1 v_c^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 2 \text{ m}$

5.a. Când proiectilul străbate blocul de lemn forțele care apar sunt de natură internă pentru sistem și ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Deoarece în timpul interacțiunii cu proiectilului cu blocul neglijăm forțele de natură externă, conservăm impulsul sistemului. Astfel

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_i = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}_2 \text{ și scalar } m_1 v_i = m_1 v'_1 + m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1(v_i - v'_1)}{m_2} = 0,8 \text{ m/s.}$$

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru bloc între punctul de pornire și cel de oprire $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_2 v_2^2}{2} = -\mu m_2 g d \Rightarrow \mu = \frac{v_2^2}{2gd} = 0,16$

b. Energia cinetică pierdută de proiectil este: $\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1}{2} (v_1^2 - v'_1^2) = -240 \text{ J}$

$$\text{c. } E_{C_{loc}} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = 0,32 \text{ J}$$

6.a. Deoarece mișcarea vagonului se efectuează cu frecare, accelerarea acestuia este $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$. Utilizăm legea vitezei: $v = v_0 - a\Delta t = v_0 - \mu g t = 6 \text{ m/s}$

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului la cuplarea vagoanelor și aflăm viteza corpului nou format. Obținem: $m_1 v = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s, iar căldura degajată prin ciocnire este:}$

$$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J.}$$

c. Aplicăm pentru corpul nou format teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2) g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 20 \text{ m.}$

7.a. Pentru a afla timpul după care corpurile se ciocnesc, scriem ecuațiile coordonatelor și impunem condiția de întâlnire: $x_1 = x_2$. Alegem originea axelor de coordonate în punctul de unde pornește corpul m_1 .

$$\text{Astfel: } x_1 = v_{01} t + \frac{a_1 t^2}{2} = v_{01} t - \mu g \frac{t^2}{2}, \text{ deoarece } a_1 = -\frac{F_f}{m_1} = -\mu g \text{ și}$$

$$x_2 = d - v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2} \Rightarrow v_{01}t - \mu g \frac{t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Din $x_1 = x_2 \Rightarrow \mu g t^2 - (v_{01} + v_{02})t + d = 0 \Rightarrow 2t^2 - 50t + 112,5 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $t_1 = 2,5$ s și $t_2 = 22,5$ s. Soluția acceptată fizic este $t_1 = 2,5$ s, deoarece corpul 1 se oprește după $t_{op} = \frac{v_{01}}{\mu g} = 10$ s.

b. Aflăm vitezele corpurilor înainte de ciocnire, utilizând legile vitezelor: $v_1 = v_{01} - \mu g t_1 = 15$ m/s și $v_2 = -v_{02} + \mu g t_1 = -25$ m/s

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea conservării impulsului:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 7 \text{ m/s}$$

Pentru a afla distanța parcursă până la oprire de corpul nou format se aplică teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2)gs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = 12,25 \text{ m}$$

c. Variația energiei cinetice produsă la ciocnirea plastică este:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 = -1280 \text{ J, unde}$$

semnul “-” arată că în procesul ciocnirii plastice energia cinetică a sistemului scade și se transformă în căldură

8.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1

$$\Delta E_c = L_N + L_G + L_{ff} \Rightarrow \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 g \ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g \ell} = 5 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului, astfel că $m_1 v = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow$

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare și sol: $E_c + E_p = E'_{sol} \Rightarrow \frac{m_1 v^2}{2} + m_1 g \ell = \frac{m_1 v_{sol}^2}{2}$

$\Rightarrow v_{sol} = \sqrt{v^2 + 2g\ell}$. Impulsul noului corp în momentul în care acesta atinge suprafața pământului este $p_{sol} = (m_1 + m_2) v_{sol} = (m_1 + m_2) \sqrt{v^2 + 2g\ell} = 10 \text{ Ns}$

9.a. Corpul are o mișcare uniform încetinită, astfel că la un anumit moment se oprește. Cum $-g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{g} = 1 \text{ s}$

b. Din teorema de variație a energiei cinetice între punctul A de pornire și punctul B unde se oprește corpul obținem lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului din momentul aruncării acestuia și până la anularea impulsului. Astfel:

$$\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} \Rightarrow L_{G,AB} = -\frac{mv_0^2}{2} = -10 \text{ J}$$

c. Aplicăm legea conservării energiei între punctul de plecare A și punctul C unde corpul are viteza v_1 . Astfel: $E_{mA} = E_{mC} \Rightarrow E_{cA} + E_{pA} = E_{cC} + E_{pC} \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + E_{pC} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + E_{pC} \Rightarrow E_{pC} = m\left(\frac{v_0^2 - v_1^2}{2}\right) + mgh = 10J$$

d. Deoarece $v_1 > v_0$ înseamnă că corpul se întoarce și se deplasează spre Pământ, iar cele doi vectori viteză au sensuri diferite. Pe baza teoremei de variație a impulsului obținem: $\Delta p = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$, iar scalar $\Delta p = m(v_0 + |v_1|) = 6$ Ns

10.a. În procesul în care sare de pe scândură, broasca apasă scândura cu o forță orientată vertical în jos, iar scândura acționează vertical asupra broaștei cu o forță orientată în sus și egală conform principiului acțiunii și reacțiunii. Aplicăm teorema de variație a impulsului broaștei pe verticală în momentul săriturii acesteia, pentru a determina forța dezvoltată de scândură. Obținem:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv_0 \sin \alpha = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv_0 \sin \alpha}{\Delta t} = 1 \text{ kN}, \text{ deoarece pe verticală impulsul inițial al broaștei este zero } (p_i=0).$$

b. Aplicăm conservarea impulsului pe direcția orizontală pentru sistemul format din scândură și broască, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$.

$$\text{Scalar: } 0 = mv_0 \cos \alpha - Mv \Rightarrow v = \frac{mv_0 \cos \alpha}{M} \approx 2,16 \text{ m/s}$$

c. Energia cinetică a sistemului imediat după ce sare broasca este:

$$E_c = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = 11,875 \text{ J.}$$

11.a. Conform legilor de coordonate, corpurile au o mișcare rectilinie și uniformă. Cum $x = x_0 + v_0 t \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s}$ și $v_2 = -3 \text{ m/s}$ reprezintă vitezele corpuri în momentul întâlnirii.

b. Aplicăm legea conservării impulsului și aflăm viteza corpului format după ciocnirea plastică: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s}$. Semnul - al vitezei comune arată că noul corp are viteza în sensul de mișcare al corpului 2.

$$\text{Energia cinetică a sistemului imediat după ciocnire este } E_c = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = 8 \text{ J.}$$

c. Legea de mișcare a corpului nou format este: $x = x_i + v(t - t_i)$, unde x_i reprezintă coordonata la momentul întâlnirii t_i . Aflăm valoarea timpului de întâlnire din condiția $x_1 = x_2 \Rightarrow 2 + t_i = 4 - 3t_i \Rightarrow t_i = 0,5 \text{ s}$, iar $x_i = 2,5 \text{ m}$. Obținem legea de mișcare a corpului nou format $x = 2,5 - 2t$.

12.a. Primul corp are o mișcare rectilinie uniformă și pe baza legii de mișcare $x_1 = x_{01} + v_1 t$ prin identificarea coeficienților obținem viteza primului corp $v_1 = 2 \text{ m/s}$. Al doilea corp are o mișcare uniform accelerată și din legea coordonatei $x_2 = x_{02} + v_{02} t + a_2 t^2 / 2$ obținem $v_{02} = 2 \text{ m/s}$ și $a = 10 \text{ m/s}^2$, astfel că viteza corpului

2 este $v_2 = v_{02} + at = 2 + 10t$. Aflăm mometul la care se ciocnesc corpurile din $x_1 = x_2 \Rightarrow t_f = 2$ s, astfel că $v_2 = 22$ m/s

b. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 12$ m/s

c. Căldura degajată în ciocnire este $Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_2 - v_1)^2 = \frac{m}{4} (v_2 - v_1)^2 = 50$ J

13.a. Deoarece ciocnirea dintre proiectil și pendulul balistic este plastică, aplicăm legea conservării impulsului pentru sistem, astfel că $mv_0 = (M+m)v$, unde v_0 este viteza proiectilului. Datorită vitezelor v , corpul nou format cu masa $M+m$ se ridică la înălțimea h . Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul format din corpul cu masa $M+m$ și Pământ. Astfel energia cinetică a sistemului se transformă în energie potențială:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} = (M+m)gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 2 \text{ m/s.}$$

b. Din cele două legi de conservare obținem viteza inițială a proiectilului $v_0 = \frac{(M+m)}{m} \sqrt{2gh} = 402$ m/s

c. Căldura care se degăjă în procesul ciocnirii este $Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(m+M)v^2}{2} = 804$ J

14.a. Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerând că $E_{po}=0$, atunci $E_{p_i} = E_{c_o}$. Obținem:

$$m_1 g l (1 - \cos \alpha) = \frac{m_1 v_i^2}{2} \Rightarrow v_i = \sqrt{2g l (1 - \cos \alpha)} = 2 \text{ m/s.}$$

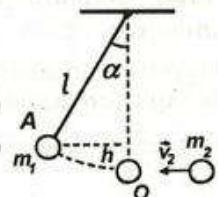
b. Utilizăm în cazul ciocnirii plastice conservarea impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Scalar: $m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$, deoarece în momentul ciocnirii corpul al doilea se deplasează în sens opus, iar după ciocnire sistemul de corpuri se oprește. Obținem $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = 4$ m/s.

c. Căldura degajată în cursul ciocnirii plastice provine din scăderea energiei cinetice a sistemului de corpuri:

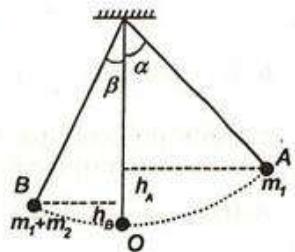
$$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} + E_{c_2} = \frac{m_1 v_i^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 6 \text{ J, deoarece } E_{c_f} = 0.$$

15.a. Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că $E_{p_0} = 0 \Rightarrow E_{p_i} = E_{c_o}$. Obținem:

$$m_1 g l (1 - \cos \alpha) = \frac{m_1 v_i^2}{2} \Rightarrow v_i = \sqrt{2g l (1 - \cos \alpha)} = 4 \text{ m/s.}$$



b. Aflăm viteza v a corpului nou format dacă după ciocnirea plastică acesta se ridică astfel că firul formează cu verticala unghiul β . Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice, astfel că $E_{c_0} = E_{p_\beta} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = (m_1 + m_2)g\ell(1 - \cos \beta) \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \beta)} \approx 2,07 \text{ m/s.}$



Aflăm viteza corpului al doilea, dacă ciocnirea corporilor este plastică. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$. Considerăm primul caz în care după ciocnirea plastică firul deviază ca în figură. Obținem scalar $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1 - (m_1 + m_2)v}{m_2} \approx 36,53 \text{ m/s}$

Considerăm cazul în care după ciocnirea plastică firul deviază de aceeași parte a verticalei ca în figură.

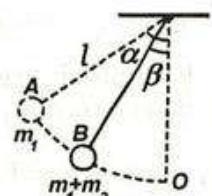
$$m_1v_1 - m_2v_2 = -(m_1 + m_2)v \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1 + (m_1 + m_2)v}{m_2} \approx 123,47 \text{ m/s.}$$

c. Calculăm căldura degajată în cele două cazuri:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 + v_2)^2. \text{ deoarece corporile 1 și 2 se deplasează în sens opus.}$$

$$\text{Obținem: } Q_1 \approx 78,22 \text{ J și } Q_2 \approx 773,74 \text{ J.}$$



16.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul m_1 între punctul de plecare și punctul inferior al traectoriei astfel că: $E_c + E_p = E'_c \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} + m_1g\ell = \frac{m_1v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell} = 6 \text{ m/s}$

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_i = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$ și scalar $m_1v_i = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_i}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s.}$ Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare și cel de oprire. Astfel $E'_c = E'_p \Rightarrow \frac{m_1v_c^2}{2} = m_1g\ell(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

c. $\frac{E_{mi}}{E_{mf}} = \frac{m_1(v_0^2 + 2g\ell)}{(m_1 + m_2)v_c^2} = 1,5$, deoarece prin ciocnire sistemul pierde energie care se degăjă sub formă de căldură

17.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul și baza jgheabului. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{ff}$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, $L_N = 0$ și $L_G = mg(h - h_0)$ obținem lucrul mecanic al forței de frecare $L_{ff} = \frac{mv^2}{2} - mg(h - h_0) = -1 \text{ kJ}$

b. Din definiție $L_{ff} = -F_f d = -F_f \frac{h-h_0}{\sin \alpha} \Rightarrow F_f = -\frac{L_{ff} \sin \alpha}{h-h_0} = -\frac{33.33 \text{ N}}{0.2} = -166.65 \text{ N}$

c. Aplicăm teorema de conservare a impulsului numai pe direcția orizontală pentru sistemul format din sac și vagonet.

Astfel $mv \cos \alpha = (m+M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv \cos \alpha}{m+M} = \frac{1.44 \text{ m/s}}{1.44 + 1.44} = 0.72 \text{ m/s}$

d. Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru sac pe direcția verticală.

Astfel $\Delta p_y = F \Delta t \Rightarrow |F| = \frac{mv \sin \alpha}{\Delta t} = 25 \text{ kN}$, deoarece $\Delta p_y = p_{sf} - p_{sv} = 0 - mv \sin \alpha$

18.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele A și C:

$$E_{mA} = E_{mC} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 4 \text{ m/s}$$

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_i = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow$

$$v_c = \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = 1.6 \text{ m/s}$$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele C și D pentru sistem nou format cu masa $m_1 + m_2$.

$$\text{Astfel } E_{cC} = E_{pD} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = (m_1 + m_2) g \ell (1 - \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = 0.744$$

19.a. Energia mecanică a corpului în vârful planului inclinat este

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{m_1 v_0^2}{2} + m_1 gh = 80 \text{ J}$$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B pentru

corpul m_1 : $\Delta E_{c_A} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_B} = \frac{m_1 v_B^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2}$,

$$L_{G,AB} = mgh = mg\ell \sin \alpha \quad L_{N,AB} = 0 \quad L_{F_f,AB} = -F_f \ell = -\mu N \ell = -\mu m_1 g \ell \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\frac{m_1 v_B^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = m_1 g \ell \sin \alpha - \mu m_1 g \ell \cos \alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = 8 \text{ m/s},$$

cu $\sin \alpha = 0.6$ și $\cos \alpha = 0.8$.

Energia mecanică la baza planului inclinat este $E_{mB} = E_{cB} = \frac{m_1 v_B^2}{2} = 64 \text{ J}$.

Diferența dintre E_{mB} și E_{mA} se explică prin existența forței de frecare care este o forță dissipativă, astfel că o parte din energie se pierde. Se poate observa că

$$E_{mB} - E_{mA} = L_{F_f,AB}.$$

c. Aplicăm conservarea impulsului în procesul de ciocnire perfect plastică, astfel

$$\text{că } \vec{p}_i = \vec{p}_f, \text{ iar scalar } m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = 1.6 \text{ m/s}$$

d. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de jos și punctul în care se oprește sistemul de corpuri. Astfel

$$E_{mB} = E_{mC} \Rightarrow E_{cB} = E_{cC} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = (m_1 + m_2)gh \Rightarrow h = \frac{v_c^2}{2g} = 12,8 \text{ cm.}$$

S-a considerat nulă energia potențială gravitațională în punctul B.

20.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și C, astfel

că $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, iar $L_N = 0$,

$L_G = m_1 gh$ și $L_{F_f} = L_{F_{f,AB}} + L_{F_{f,BC}} = -\mu_1 m_1 g h c t g \alpha - \mu_2 m_1 g B C$, astfel că:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 gh - \mu_1 m_1 g h c t g \alpha - \mu_2 m_1 g B C \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(h - \mu_1 h c t g \alpha - \mu_2 B C)} = 4 \text{ m/s}$$

b. Căldura degajată la ciocnirea celor două corpuri este

$$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = 9,6 \text{ J}$$

c. Din legea conservării impulsului în procesul ciocnirii aflăm viteza comună a corpurilor: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow$

$$v_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 1,6 \text{ m/s.}$$

Aplicăm legea conservării energiei între punctul C și punctul de pe jgheab în care

corpul se oprește. Astfel $E_{m_c} = E_{m_B} \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = (m_1 + m_2)gh \Rightarrow h = \frac{v_c^2}{2g} \Rightarrow$

$$h = 12,8 \text{ cm}$$

21.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = mgh$ și

$$L_{F_f,AB} = -F_f AB \Rightarrow L_{F_f,AB} = -\mu N \frac{h}{\sin \alpha} = -\mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = -\mu mgh c t g \alpha \text{ obținem:}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = mgh - \mu mgh c t g \alpha \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh(1 - \mu c t g \alpha)} = 4 \text{ m/s}$$

b. Aplicăm conservarea impulsului la cuplarea corpurilor, astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar

scalar: $mv_B = (m + m')v \Rightarrow mv_B = \left(m + \frac{m}{3}\right)v \Rightarrow v = \frac{3v}{4} = 3 \text{ m/s}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctele B și E: $\Delta E_{c,BE} = L_{G,BE} + L_{F_f,BE} + L_{N,BE}$.

Cum $\Delta E_{c,BE} = \frac{m_1 v^2}{2}$, $L_{N,BE} = 0$, $L_{G,BE} = -m_1 gh_{BE} = -m_1 g B E \sin \alpha$ și

$$L_{F_f,BE} = L_{F_f,AC} + L_{F_f,CE} = -\mu m_1 g d - \mu' m_1 g C E \cos \alpha, \text{ obținem:}$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 g B E \sin \alpha - \mu m_1 g d - \mu' m_1 g C E \cos \alpha \Rightarrow C E = \frac{v^2 - 2\mu' g d}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = 0,5 \text{ m}$$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și D:

$$\Delta E_{c,AD} = L_{G,AD} + L_{F_f,AD} + L_{N,AD}, \text{ cu } \Delta E_{c,AD} = -\frac{mv_0^2}{2}, L_{G,AD} = mg(h_D - h_A) = 0,$$

$$L_{F_f,total} = L_{F_f,AB} + L_{F_f,BC} + L_{F_f,CD} = 2L_{F_f,AB} + L_{F_f,BC} = -2\mu mghctg\alpha - \mu' mgd \Rightarrow \\ -\frac{mv_0^2}{2} = -2\mu mghctg\alpha - \mu' mgd \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g(2\mu hctg\alpha + \mu' d)} \approx 3,16 \text{ m/s}$$

22.a. Energia mecanică a corpului de masă m_1 este $E_m = E_c + E_p = E_p = m_1gh = m_1g\ell \sin\alpha \Rightarrow E_m = 1,2 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1 între punctul de plecare și baza planului înclinat, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{F_f}$. Cum

$$\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2}, L_N = 0, L_G = m_1gh = m_1g\ell \sin\alpha \text{ și } L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu_1 N\ell = -\mu_1 m_1 g\ell \cos\alpha,$$

$$\text{obținem: } \frac{m_1v_1^2}{2} = m_1g\ell \sin\alpha - \mu_1 m_1 g\ell \cos\alpha \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha)} = 2 \text{ m/s.}$$

Deoarece corpul are o mișcare uniform accelerată, atunci $\ell = v_1 t = \frac{v_1}{2} t \Rightarrow t = \frac{2\ell}{v_1} = 0,8 \text{ s}$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format din momentul formării și până în momentul opririi. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{F_f}$, cu

$$\Delta E_c = 0 - E_{c1} = -\frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2}, L_G = 0, L_N = 0 \text{ și } L_{F_f} = -\mu_2(m_1 + m_2)gd_2. \text{ Obținem:}$$

$$-\frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = -\mu_2(m_1 + m_2)gd_2 \Rightarrow v_c = \sqrt{2\mu_2 gd_2} = 0,6 \text{ m/s}$$

d. Aflăm viteza corpului m_1 imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de conservare a impulsului pentru sistemul de corperi format prin ciocnire. Astfel $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, iar scalar, $m_1 v_2 = (m_1 + m_2) v_c = 3m_1 v_c \Rightarrow v_2 = 3v_c = 1,8 \text{ m/s}$

Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul m_1 între baza planului înclinat și punctul de ciocnire. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_N + L_{F_f}$, cu

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \frac{m_1v_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2}, L_G = 0, L_N = 0 \text{ și } L_{F_f} = -\mu_2 m_1 gd_1. \text{ Obținem:}$$

$$\frac{m_1v_2^2}{2} - \frac{m_1v_1^2}{2} = -\mu_2 m_1 gd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2\mu_2 g} = 38 \text{ cm}$$

23.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul C_1 între punctul A și B, astfel că $\Delta E_{c,AB} = L_{G,AB} + L_{F_f,AB} + L_{N,AB}$. Cum $L_{N,AB} = 0$, $L_{G,AB} = 0$,

$$L_{F_f,AB} = -F_f AB = -\mu m_1 gd \quad \text{iar} \quad \Delta E_{c,AB} = E_{cB} - E_{cA} = \frac{m_1v_B^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2} \quad \text{obținem:}$$

$$\frac{m_1v_B^2}{2} - \frac{m_1v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \Rightarrow v_B = 3 \text{ m/s}$$

b. Energia mecanică inițială a corpului C_2 este:

$$E_{mi} = E_{Ci} + E_{pi} = E_{pi} = m_2 g \ell = 0,48 \text{ J}$$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul C_2 între punctul de plecare și punctul C , astfel că:

$$E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow E_{pi} = E_{cf} \Rightarrow m_2 g \ell = \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g\ell}. \text{ Impulsul corpului } C_2,$$

imediat înainte de impact este $p_2 = m_2 v_2 = m_2 \sqrt{2g\ell} = 0,24 \text{ NS}$

d. Aplicăm conservarea impulsului în momentul ciocnirii dintre corpurile C_1 și C_2 în punctul C , astfel că $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_B + m_2 \vec{v}_2 = 0$, iar scalar

$$m_1 v_B - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{m_1 v_B}{v_2} = 80 \text{ g}$$

24.a. Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic pe primii 7 m, lucrul mecanic este: $L_F = A_{trapez} - A_{triunghi} = \frac{(2+5)40}{2} - \frac{2 \cdot 40}{2} = 80 \text{ J}$

b. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice, astfel că: $\Delta E_c = L_F + L_{F_f}$.

Cum $\Delta E_c = E_{cf} - \frac{mv^2}{2}$, iar $L_{F_f} = -F_f x = -\mu mgx$, obținem:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(L_F - \mu mgx)} \approx 19,1 \text{ m/s.}$$

c. Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru a afla viteza comună a corpului nou format: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, astfel că scalar obținem $mv = (m+m_i)v_c \Rightarrow v_c = 10 \text{ m/s.}$

d. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul nou format, astfel că $\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_c v_c^2}{2} = -\mu m_c g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 20 \text{ m.}$

25.a. Aflăm viteza corpului lansat pe suprafață orizontală imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu Mg d \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd}.$$

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea de conservare a impulsului:

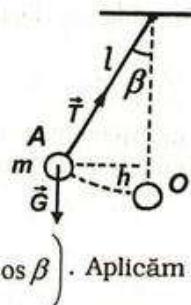
$$Mv = (M+m)v_c \Rightarrow v_c = \frac{Mv}{M+m} = 5 \text{ m/s.}$$

e. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul nou format, astfel că energia cinetică se transformă în energie potențială. Din $E_c = E_p \Rightarrow$

$$\frac{(M+m)v_c^2}{2} = (M+m)g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_c^2}{2g\ell} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

f. Impunem condiția ca pe direcția firului rezultanta forțelor să

jace rol de forță centripetă: $T - m_i g \cos\beta = \frac{m_i v_A^2}{\ell} \Rightarrow T = m_i \left(\frac{v_A^2}{\ell} + g \cos\beta \right)$. Aplicăm



pentru corpul cu masa $m_i = M + m$, legea conservării energiei mecanice: $E_{c_0} = E_{p_A} + E_{c_i} \Rightarrow \frac{m_i v_c^2}{2} = m_i g \ell (1 - \cos \beta) + \frac{m_i v_A^2}{2}$
 $\Rightarrow v_A^2 = v_c^2 - 2g\ell(1 - \cos \beta) \Rightarrow T = (M + m) \left(\frac{v_c^2}{\ell} + 3g \cos \beta - 2g \right) = 4,785 \text{ N.}$

26.a. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corp între punctul de plecare și punctul A. $E_p = E_c \Rightarrow mgR(1 - \cos \alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$$v_A = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)} \approx 2,86 \text{ m/s, deoarece } \alpha = 45^\circ$$

b. Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două coruri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_A = 2m\vec{v}_c$, astfel că $v_c = v_A/2$. Aplicăm pentru corpul nou format legea conservării energiei mecanice între punctul A și punctul de oprire: $E_{cA} = E_p \Rightarrow \frac{m_i v_c^2}{2} = m_i gh \Rightarrow h = \frac{v_A^2}{8g} = \frac{R(1 - \cos \alpha)}{4} \approx 10,25 \text{ cm}$

c. Căldura degajată în urma ciocnirii corurilor este:

$$Q = \frac{nv_A^2}{4} = \frac{mgR(1 - \cos \alpha)}{2} \approx 41 \text{ mJ}$$

27.a. Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul care coboară din A în B, astfel că $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgR = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR} \approx 4,47 \text{ m/s}$

b. Pe baza conservării impulsului obținem $mv_0 = 2mv \Rightarrow v = v_0/2 \approx 2,235 \text{ m/s}$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul nou format între punctul B și punctul E: $E_{cB} = E_{pE} \Rightarrow \frac{m_i v^2}{2} = m_i gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0}{8g} = \frac{R}{4} = 25 \text{ cm}$

28.a. Aflăm viteza bilei lansată vertical de jos în sus imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variație a impulsului:

$\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1 v_1 - m_1 v_0 = -m_1 gt \Rightarrow v_1 = v_0 - gt = 40 \text{ m/s. Aflăm viteza comună a corpului nou format în urma ciocnirii plastice utilizând legea de conservare a impulsului:}$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 10 \text{ m/s.}$$

b. Căldura degajată la ciocnirea plastică este:

$$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = 600 \text{ J}$$

c. Aplicăm pentru corpul nou format prin ciocnirea plastică legea conservării energiei mecanice, considerând pe sol $E_p = 0$ și obținem: $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{p_f} \Rightarrow$

$\frac{m_1 v^2}{2} + m_1 g h = m_1 g h_i \Rightarrow h_i = h + \frac{v^2}{2g}$. Din legea coordonatei aflăm la ce înălțime urcă bila înainte de ciocnire: $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 100$ m. Obținem $h_i = 105$ m.

29.a. Impunem condiția de întâlnire corporilor: $x_1 = x_2$ alegând originea axelor de coordonate pe sol. Cum $x_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = h_{max1} - \frac{gt^2}{2}$, unde h_{max1} reprezintă înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp. Din legea conservării energiei mecanice aflăm h_{max1} , astfel că

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{m_1 v_0^2}{2} = m_1 g h_{max1} \Rightarrow h_{max1} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Obținem $v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_i = \frac{v_0}{2g} = 2$ s

b. Aflăm vitezele corporilor imediat înainte de ciocnire. Astfel $v_1 = v_0 - gt_i = \frac{v_0}{2}$ și $v_2 = -gt_i = -\frac{v_0}{2}$.

Din legea conservării impulsului: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$ și scalar $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{(m_1 - m_2) v_0}{2(m_1 + m_2)} = 5$ m/s

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii este:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)} = 20 \text{ J}$$

30.a. Alegând axa Ox cu originea pe sol și considerând origine de timp momentul ciocnirii primului corp atunci $x_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_0(t - \Delta t) - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}$. Obținem condiția de întâlnire $x_1 = x_2 \Rightarrow t_i = \frac{\Delta t}{2} + \frac{v_0}{2} = 3$ s

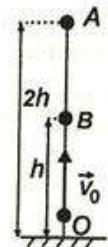
Viteza corpului 1 imediat înainte de ciocnire este $v_1 = v_0 - gt_i = -10$ m/s. Pe baza teoremei de variație a impulsului obținem: $\Delta \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_0$, iar scalar $\Delta p_1 = m_1 (v_0 + |v_1|) = 3$ Ns

Viteza corpului 2 imediat înainte de ciocnire este $v_2 = v_0 - g(t_i - \Delta t) = 10$ m/s. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_c$ și scalar $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow$ viteza corpului nou format dacă corporile se ciocnesc elastic este $v_c = 0$ m/s, deoarece $m_1 = m_2 = m$

Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_2 - v_1)^2 = \frac{m}{4} (v_2 - v_1)^2 = 10 \text{ J}$$

1.a. Din legea conservării energiei aflăm înălțimea la care se ridică orul lansat de la sol $E_{co} = E_{pb} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$. Din legea



conservării energiei mecanice pentru corpul lăsat liber aflat înainte de ciocnire, astfel că:

$$E_{pA} = E_{pB} + E_{cB} \Rightarrow mg2h = mgh + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = gh = v_0^2 \Rightarrow v_2 = v_0 = 4 \text{ m/s}$$

b. Din legea conservării impulsului obținem $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}_c$, iar scalar $v_c = v_0/2 = 2 \text{ m/s}$

c. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul format prin ciocnire

$$\text{intre punctul de formare și sol: } E_{pB} + E_{cB} = E_{csol} \Rightarrow E_{csol} = \frac{m_i v_c^2}{2} + m_i g h = \frac{5mv_0^2}{4} \Rightarrow$$

$$E_{csol} = 40 \text{ J}$$

32.a. Impunem condiția de întâlnire: $x_1 = x_2$, astfel că deoarece $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și

$x_2 = v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$ obținem $t_i = \frac{h}{v_{02}}$. Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire

sunt $v_1 = -gt_i = -\frac{gh}{v_{02}}$ și $v_2 = v_{02} - gt_i = v_{02} - g\frac{h}{v_{02}}$. Pe baza legii conservării

impulsului $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ iar scalar $m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \Rightarrow$

$$-m_1\frac{gh}{v_{02}} + m_2\left(v_{02} - \frac{gh}{v_{02}}\right) = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)gh}{m_2}} = 46,24 \text{ m/s}$$

$$\text{b. } \frac{E_{cl}}{E_{c2}} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_1 g^2 h^2}{m_2 (v_{02}^2 - gh)^2} = \frac{m_2}{m_1} = 0,6$$

$$\text{c. Înălțimea la care s-a produs ciocnirea este } h_i = h - \frac{gt_i^2}{2} = \frac{m_1 m_2 h}{m_1 + m_2} = 65 \text{ m}$$

33.a. Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică în momentul lansării se transformă în energie potențială la înălțimea maximă:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{m_1 v_0^2}{2} = m_1 g h_{\max}, \text{ astfel că înălțimea maximă la care ajunge primul corp}$$

este $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Aflată viteza primului corp la înălțimea $h = \frac{3}{4}h_{\max} = \frac{v_0^2}{8g}$, imediat

înainte de ciocnire. Aplicăm legea conservării energiei mecanice:

$$E_c = E_{c_f} + E_{p_f} \Rightarrow \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g h \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \frac{v_0}{2} = 15 \text{ m/s.}$$

b. Aflată timpul de mișcare al primului corp până momentul ciocnirii, aplicând teorema de variație a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1 v_1 - m_1 v_0 = -m_1 g \Delta t \Rightarrow$

$$-\frac{m_1 v_0}{2} = -m_1 g \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{2g} = 1,5 \text{ s.}$$

c. Aflăm viteza corpului al doilea imediat înainte de ciocnirea plastică, dacă se cunoaște că după ciocnire corpul nou format se oprește. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $p_i = p_f = 0 \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2} = 45 \text{ m/s}$

34.a. Când omul urcă pe scară, forțele care apar sunt de natură internă pentru sistem, astfel că ele nu modifică impulsul total al sistemului. Prin urmare impulsul sistemului aerostat-om se conservă, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Cum $\vec{p}_i = 0$, deoarece sistemul se află în repaus atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0$, deoarece cu \vec{v}_1 am notat viteza omului față de sol și cu \vec{v}_2 viteza aerostatului față de sol. Cum \vec{u} este viteza relativă a omului în raport cu aerostatul, atunci $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + M(\vec{v}_2 - \vec{u}) = 0 \Rightarrow m_1 v_1 + Mv_2 - Mu = 0$. Obținem viteza omului față de sol $v_1 = \frac{Mu}{M+m} = 0,36 \text{ m/s}$

b. Viteza aerostatului față de sol este $v_2 = -\frac{mu}{M+m} = -0,04 \text{ m/s}$. Semnul minus apare deoarece aerostatul se deplasează în sens contrar sensului de deplasare al omului.

c. Lucrul mecanic dezvoltat de om prin punerea sistemului în mișcare este:

$$L = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{Mm \cdot u^2}{2(M+m)} = 5,76 \text{ J.}$$

35.a. Când patinatorul aruncă rucsacul acționează asupra acestuia cu o forță, iar rucsacul reacționează asupra patinatorului cu o forță egală și de sens contrar conform principiului acțiunii și reacțiunii. Cum cele două forțe sunt de natură internă pentru sistem ele nu modifică impulsul total al acestuia. Astfel conservăm impulsul pentru sistem: $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$.

Cum $\vec{p}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_f = 0 \Rightarrow M\vec{v}_1 + m\vec{v} = 0$, iar scalar $v_1 = -0,5 \text{ m/s}$ este viteza patinatorului după ce acesta aruncă bila. Semnul minus al vitezei arată că patinatorul se deplasează în sens opus sensului în care se mișcă rucsacul.

i. Lucrul mecanic efectuat de patinator pune în mișcare atât rucsacul cât și pe el este: $L = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{m(M+m)v^2}{2M} = 210 \text{ J.}$

Din momentul punerii în mișcare, patinatorul are o mișcare uniform frânătoare accelerată $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$, astfel că utilizând teorema de variație a energiei înținute obținem distanța parcursă de patinator până la oprire. Astfel: $E_c = L_{F_f} \Rightarrow 0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 12,5 \text{ m.}$

6.a. Din condiția de echilibru impusă corpului suspendat de resortul vertical obținem $mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = 500 \text{ N/m}$

b. Energia potențială a resortului comprimat este $W = \frac{k(\ell - \ell_1)^2}{2} = 1,6 \text{ J}$

c. Forțele elastice care acționează asupra corpurilor sunt forțe de natură internă pentru sistem și ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Cum $\vec{p}_i = 0$ atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$. Scalar $m_1v_1 = m_2v_2$ (1). Energia eliberată la destinderea resortului este preluată de cele două coruri, astfel că $W = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$ (2). Din (1) și (2) obținem: $v_1 = \sqrt{\frac{2m_2W}{m_1(m_1 + m_2)}} \approx 1,46 \text{ m/s}$ și $v_2 = \sqrt{\frac{2m_1W}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 0,73 \text{ m/s}$

37.a. Filmată în sens invers explozia unui obuz, poate fi considerată o ciocnire plastică și prin urmare se poate aplica și exploziilor legea de conservare a impulsului: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Scalar: $Mv = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow$

$$v_2 = \frac{Mv - m_1v_1}{m_2} = \frac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 375 \text{ m/s. Deoarece viteza } v_2 \text{ este pozitivă, fragmentul}$$

al doilea se deplasează în același sens cu obuzul.

b. Energia degajată în urma exploziei provine din scăderea energiei cinetice:

$$\Delta E_c = E_{ci} - E_{cf} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1M}{2(M - m_1)}(v - v_1)^2 = 125 \text{ kJ.}$$

c. Fracțiunea din energia inițială degajată prin explozie este $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} \approx 1,56\%$.

$$\text{deoarece } E_{ci} = \frac{Mv^2}{2} = 8 \text{ MJ}$$

34.a. Din legea coordonatei: $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$, pe baza identificării coeficienților,

obținem: $x_0 = 10 \text{ m}$, $v_0 = 20 \text{ m/s}$ și $a = -5 \text{ m/s}^2$. Deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, $a = -\frac{F_f}{m} = -\mu g \Rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = 0,5$.

b. Aflăm viteza corpului imediat înainte de explozie utilizând legea vitezei: $v = v_0 + at_1 = 15 \text{ m/s}$, deoarece $t_1 = 1 \text{ s}$. Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul exploziei: $mv = m_2v_2 - m_1v_1$, unde v_1 și v_2 reprezintă vitezele celor două fragmente imediat după explozie.

Cum vectorial $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, scalar $v_r = v_1 + v_2$. Cum $m_1 = \frac{m}{4}$ și $m_2 = \frac{3m}{4}$ atunci

$$mv = \frac{3m}{4}v_2 - \frac{m}{4}(v_r - v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{4v + v_r}{4} = 21 \text{ m/s și } v_1 = \frac{3v_r - 4v}{4} = 3 \text{ m/s.}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare fragment, pentru a afla distanța parcursă de fiecare fragment până la oprire. Pentru primul fragment: $\Delta E_{c_1} = L_{F_H} \Rightarrow -\frac{m_1 v_1^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op_1} \Rightarrow s_{op_1} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 0,9 \text{ m.}$

Analog pentru fragmentul al doilea obținem: $s_{op_2} = \frac{v_2^2}{2\mu g} = 44,1 \text{ m. Distanța dintre cele două fragmente după ce acesta se opresc este: } d = s_{op_1} + s_{op_2} = 45 \text{ m}$

39.a. Energia cinetică inițială a sistemului de vagoane este:

$$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} = 887,5 \text{ kJ}$$

• Primele se ciocnesc vagoanele 1 cu 2 și pe baza conservării impulsului obținem $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{12} \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3 \text{ m/s}$

• Consecvăm impulsul pentru întreg sistemul:

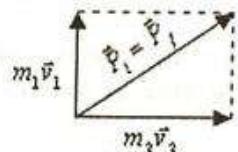
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3) v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 4 \text{ m/s}$$

10.a. Energia cinetică a sistemului imediat înainte de ciocnire este $E_{ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 8,75 \text{ J}$

• Aplicăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1$ și scalar

$$v' = \frac{1}{m_1} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} \approx 18,03 \text{ m/s.}$$

$$\cdot \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 (m_2 - m_1) v_2^2}{2m_1} = 7,5 \text{ J}$$



1.a. Aflăm viteza cu care ajunge sferă la înălțimea h , utilizând legea de conservare a energiei mecanice: $E_{p_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$, zoarece pe sol $E_{p_0} = 0$.

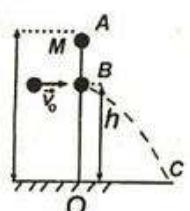
$$\text{stfel } MgH = Mgh + \frac{Mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \approx 8,94 \text{ m/s.}$$

Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul ciocnirii astice: $M\vec{v}_B + m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}$. Scalar obținem:

$$v^2 v_B^2 + m^2 v_0^2 = (M+m)^2 v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{M^2 v_B^2 + m^2 v_0^2}}{M+m} = \frac{\sqrt{2M^2 g(H-h) + m^2 v_0^2}}{M+m} \approx 8,11 \text{ m/s}$$

Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice:

$$E_{p_0} + E_{p_B} = E_{c_c} \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} + (M+m)gh = \frac{(M+m)v_c^2}{2} \Rightarrow v_c = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 13,63 \text{ m/s}$$



42.a. Din legea coordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$ prin identificare găsim $v_0 = 10$ m/s și $a = -2$ m/s², astfel legea vitezei este $v = v_0 + at = 10 - 2t$. La momentul t_1 viteza este $v_1 = 4$ m/s iar impulsul corpului $p_1 = m_1 v_1 = 10$ Ns

b. În ciocnirea perfect elastică se aplică legea de conservare a impulsului și legea de conservare a energiei cinetice:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1) \text{ și } \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2} \quad (2).$$

$$\text{Din (1) și (2) obținem } v'_1 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \text{ și } v'_2 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2.$$

Tinând cont că $v_1 = v$ și $v_2 = 0$ aflăm pe baza formulelor anterioare vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică.

$$v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = 1 \text{ m/s și } v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m/s. Deoarece } m_1 > m_2, \text{ după}$$

ciocnire corpurile se mișcă în sensul în care s-a mișcat primul corp înainte de ciocnire

c. Energia cinetică a celui de-al doilea corp imediat după ciocnire este

$$E'_{c2} = \frac{m_2 v'_2^2}{2} = \frac{2m_1^2 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)^2} = 18,75 \text{ J}$$

43.a. Din legile de conservare aplicate în cazul ciocnirii perfect elastice: legea de conservare a impulsului $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$ și legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2}$ obținem vitezele particulelor

$$\text{imediat după ciocnire } v'_1 = \frac{2(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 = -\frac{3v_2 + v_1}{2} = -16 \text{ m/s și } v'_2 = \frac{2(m_1 v_1 - m_2 v_2)}{m_1 + m_2} + v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2} = 8 \text{ m/s.}$$

b. Dacă prima particulă se oprește imediat după ciocnire atunci $v'_1 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{3} \approx -6,66 \text{ m/s.}$

c. Din legea de conservare a impulsului $m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{v_1 - 3v_2 - v'_1}{3} = 1 \text{ m/s. Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire}$

$$E_{ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2} (v_1^2 + 3v_2^2) \text{ iar energia cinetică a sistemului după ciocnire}$$

$$E_{cf} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2} = \frac{m_1}{2} (v'_1^2 + 3v'_2^2).$$

$$\text{Astfel } f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} = \frac{E_{cf} - E_{ci}}{E_{ci}} = \frac{E_{cf}}{E_{ci}} - 1 \Rightarrow f = -93,75\%$$

d. Fracția din energia cinetică inițială a primei particule care este transferată particulei a doua este $f = \frac{E'_{c2}}{E_{ci}} = \frac{m_2 v'^2_2}{m_1 v^2_1}$.

Cum $v'^2_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ deoarece $v_2=0$ obținem $f = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 75\%$

44.a. Pe baza legii de conservare a impulsului $mv_0 = mv'_1 + mv'_2$ și din legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{mv^2_0}{2} = \frac{mv'^2_1}{2} + \frac{mv'^2_2}{2}$ obținem vitezele particulelor

imediat după ciocnire $v'_1 = 0$ și $v'_2 = v_0 = 5$ m/s. Deoarece corpurile au masele egale după ciocnirea perfect elastică ele schimbă vitezele între ele.

b. Datorită forței de frecare care acționează asupra corpului al doilea energia cinetică a acestui corp se degajă sub formă de căldură, astfel că $Q = \frac{mv'^2_2}{2} = 6,25$ J

c. Imediat după ciocnire primul corp se oprește. Din teorema de variație a energiei cinetice aflăm distanța parcursă de al doilea corp după ciocnire. Astfel

$$\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{mv'^2_2}{2} = -\mu m g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v'^2_2}{2\mu g} = 12,5 \text{ m}$$

45.a. Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică:

$$v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 3 \text{ m/s și } v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 8 \text{ m/s pentru că } v_2=0$$

Deoarece ambele viteze sunt pozitive înseamnă că după ciocnire corpurile se leplasează în același sens.

d. Energia cinetică a sistemului de corpi imediat după ciocnire este $E'_c = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} = 5 \text{ J}$

e. Aflăm distanțele pe care le parcurg cele două coruri după ciocnire până la oprire, aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare corp.

$$\text{pentru corpul cu masa } m_1: \Delta E_{ci} = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_1 v'^2_1}{2} = -\mu m_1 g s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v'^2_1}{2\mu g}$$

$$\text{pentru corpul cu masa } m_2: \Delta E_{ci} = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v'^2_2}{2\mu g}$$

$$\text{Distanța dintre coruri când s-au oprit este: } d = s_2 - s_1 = \frac{v'^2_2 - v'^2_1}{2\mu g} = 27,5 \text{ m.}$$

6.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa

$$u \text{ între punctele } A \text{ și } B: E_{pA} = E_{cA} \Rightarrow m_1 g \ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell} = 4 \text{ m/s}$$

Aflăm vitezele corpurilor imediat după ciocnirea perfect elastică:

$$v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 2,4 \text{ m/s și } v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 6,4 \text{ m/s pentru că } v_2=0$$

Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul al doilea între punctul B și punctul unde se oprește D . Astfel: $\Delta E_{cBD} = L_N + L_G + L_{Ff}$.

Deoarece $L_N=0$ și $L_G=-m_2gh$ și $L_{Ff}=-\mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 ghctg\alpha$ obținem:

$$-\frac{m_2 v_2'^2}{2} = -m_2 gh - \mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 ghctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v_2'^2 - 2\mu_1 gBC}{2g(1 + \mu_2 ctg\alpha)} = 1 \text{ m}$$

c. Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g\ell(1 - \cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_1'^2}{2g\ell} = 0,64$

47.a. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B pentru corpul m_1 : $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} = 1 \text{ m/s}$

b. Imediat după ciocnirea elastică, deoarece inițial bila se află în repaus, aceasta va avea viteza: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 0,5 \text{ m/s}$

c. Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de lovire și punctul în care bila se oprește. Astfel $E'_{cB} = E'_{pC} \Rightarrow \frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 gh \Rightarrow h = \frac{v_2'^2}{2g} = 1,25 \text{ cm}$

48.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctele A și B : $E'_{pA} = E'_{cB} \Rightarrow m_1 gR = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} \approx 6,32 \text{ m/s}$. După

ciocnirea perfect elastică a corpurilor obținem: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \Rightarrow$

$$v'_1 \approx -2,1 \text{ m/s și } v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \approx 4,2 \text{ m/s pentru că } v_2 = 0$$

b. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_{pC} \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 gh \Rightarrow h = \frac{v_1'^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R \Rightarrow$

$$h \approx 22,22 \text{ cm}$$

c. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul al doilea imediat după ciocnire $\Delta E_{cBC} = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2 v_2'^2}{2} = -\mu m_2 gBC \Rightarrow BC = \frac{v_2'^2}{2\mu g} \Rightarrow$

$$BC = \frac{4m_1^2 R}{\mu(m_1 + m_2)^2} \approx 4,44 \text{ m}$$

49.a. Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa m_1 între punctul de plecare și punctul înainte de ciocnire:

$$E_p = E \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell} \approx 4,47 \text{ m/s}$$

b. Vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică sunt $v'_1 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v \approx -1,5$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} \approx 3$ m/s deoarece $v_2=0$.

Utilizăm legile de conservare a energiei mecanice pentru cele două coruri imediat după ciocnire. Pentru primul corp: $\frac{m_1v'^2}{2} = m_1gh_1 \Rightarrow$

$$h_1 = \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \ell \approx 11,11 \text{ cm și pentru corpul al doilea } \frac{m_2v'^2}{2} = m_2gh_2 \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{v'^2}{2g} = \frac{4m_1^2\ell}{(m_1 + m_2)^2} \approx 44,44 \text{ cm}$$

c. Deoarece după ciocnire bilele se ridică la aceeași înălțime, atunci $h_1=h_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

50.a. Aflăm viteza bilei m_1 imediat înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice: $E_c = E_p \Rightarrow m_1g\ell = \frac{m_1v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell}$. Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnire și obținem:

$$v'_1 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{2g\ell}}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s și}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{2g\ell}}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s.}$$

Deoarece cele două viteze au semne opuse, bila 1 se întoarce iar bila 2 se va împlasa în sensul în care a fost ciocnită.

i. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul format din

$$\text{bila } m_1 \text{ și Pământ. Astfel: } E'_{c_B} = E'_{p_B} \Rightarrow \frac{m_1v'^2}{2} = m_1g\ell(1 - \cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v'^2}{2g\ell} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0,75$$

ii. Aplicăm pentru corpul cu masă m_2 teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_{c_2} = L = L_{F_f} + L_{F_d} \Rightarrow -\frac{m_2v'^2}{2} = -\mu m_2g\ell - \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow k = \frac{m_2(v'^2 - 2\mu g\ell)}{\Delta\ell^2} = 10,2 \text{ kN/m}$$

1.a. Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică:

$$v_A = \frac{2m_1v_0}{m_1 + m_2} - v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0 = -\frac{v_0}{3} \text{ și } v_B = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} = \frac{2v_0}{3}, \text{ astfel că raportul}$$

vitezelor corpurilor imediat după ciocnire este $\frac{v_B}{v_A} = -2$

Raportul energiilor cinetice ale celor două coruri, imediat după ciocnire este

$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = \frac{mv_A^2}{2mv_B^2} = \frac{1}{8}$$

c. Aplicăm pentru sistemul corp B și resort legea conservării energiei mecanice:

$$E_{c_B} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow \Delta\ell = \sqrt{\frac{8mv_0^2}{9k}}.$$

$$\text{Cum } E_{c_0} = \frac{mv_0^2}{2} \text{ obținem } \Delta\ell = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E_{c_0}}{k}} = 4 \text{ cm.}$$

52.a. Aflăm viteza bilei cu masa m_1 înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice:

$$E_{p_A} = E_{c_0} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}. \quad \text{Aflăm vitezele bilelor}$$

$$\text{imediat după ciocnire: } v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{v}{2} \quad \text{și}$$

$$v'_2 = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{3}{2}v. \quad \text{Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru fiecare bilă: } E_c = E_p.$$

$$\text{Pentru bila cu masa } m_1: \frac{m_1 v'^2}{2} = m_1 gh_1 \Rightarrow$$

$$h_1 = \frac{v'^2}{2g} = \frac{v^2}{8g} = \frac{h}{4} = 5 \text{ cm și pentru bila cu masa } m_2: \frac{m_2 v'^2}{2} = m_2 gh_2 \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{v'^2}{2g} = \frac{9v^2}{8g} = \frac{9h}{4} = 45 \text{ cm. Astfel raportul înălțimilor este } \frac{h_2}{h_1} = 9.$$

b. Deoarece bila m_1 ciocnește perfect plastic o a doua bilă m_2 , aflăm viteza corpului nou format după ciocnire utilizând legea de conservare a impulsului:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3v}{4}. \quad \text{Utilizând legea conservării energiei}$$

mecanice pentru corpul nou format, astfel că:

$$E_c = E_p \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2) v_c^2}{2} = (m_1 + m_2) gh' \Rightarrow h' = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{9v^2}{32g} = \frac{9h}{16} = 11,25 \text{ cm.}$$

c. Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este:

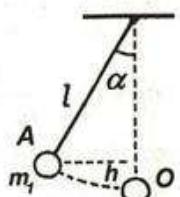
$$Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{3m_2 gh}{4} = 1,5 \text{ J}$$

53.a. Viteza particulei a două după ciocnirea perfect elastică este $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$,

unde v este viteza înainte de ciocnire a primei bile. Fracțiune din energia cinetică inițială a primei particule transferată particulei a două este:

$$f = \frac{E'_{c_2}}{E_{c_1}} = \frac{m_2 v'^2}{m_1 v^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 75\%$$

b. Dacă ciocnirea este plastică viteza comună a particulelor este $v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$



Fracție din energia cinetică inițială a primei particule transferată particulei a doua este: $f = \frac{E_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v_c^2}{m_1 v^2} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 18,75\%$

• Căldura degajată în ciocnirea plastică este $Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$. Astfel fracția din energia cinetică inițială a primei particule care se transformă în căldură în cazul ciocnirii plastice este $f = \frac{Q}{E_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 75\%$

54.a. Ciocnirea moleculei cu pistonul este o ciocnire perfect elastică cu un corp cu masa foarte mare (cu un perete). Aflăm viteza moleculei după ciocnirea perfect elastică, ținând cont că $m_1 = m$ și $m_2 \rightarrow \infty$. Obținem viteza moleculei

$$\text{mediat după ciocnire: } v'_1 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{\frac{2m_1}{m_2} v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_1$$

$v'_1 = 2v_2 - v_1 = -498 \text{ m/s}$. Deoarece molecula are după ciocnirea cu pistonul viteza cu minus înseamnă că se întoarce după ciocnire.

• Variația impulsului moleculei este:

$$\Delta p = mv'_1 - mv_1 = m(v'_1 - v_1) = 2m(v_2 - v_1) = -5 \cdot 10^{-23} \text{ Ns}$$

• Variația energiei cinetice a moleculei este:

$$\Delta E_c = \frac{mv'^2_1}{2} - \frac{mv^2_1}{2} = \frac{m}{2} (v'^2_1 - v^2_1) = 2mv_2(v_2 - v_1) = 10^{-22} \text{ J.}$$

55.a. Deoarece corpul ciocnește perfect elastic un alt corp vitezele după ciocnire sunt: $v'_1 = \frac{2(mv_1 + Mv_2)}{m + M} - v_1$ și $v'_2 = \frac{2(mv_1 + Mv_2)}{m + M} - v_2$. Deoarece peretele are masă foarte mare astfel că $M \rightarrow \infty$ obținem viteza corpului imediat după ciocnirea cu peretele $v'_1 = 2v_2 - v_1 = -1 \text{ m/s}^2$.

• Pe baza principiului acțiunii și reacțiunii forță cu care peretele acționează supra corpului este egală cu forța cu care corpul acționează supra peretelui. Conform teoremei de variație a impulsului vectorial: $\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t$, iar

$$\text{scalar: } |\Delta p| = F \Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{|P_f - P_i|}{\Delta t} = \frac{|mv'_1 - mv_1|}{\Delta t} = \frac{2m(v_1 - v_2)}{\Delta t} = 8 \text{ kN}$$

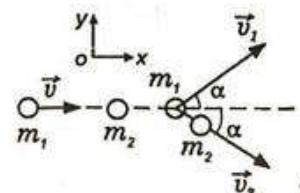
• Deoarece corpul cu masă m_1 se oprește atunci $v'_1 = 0$ obținem $v_1/v_2 = 1/2$

6.a. Utilizăm formulele vitezelor pentru ciocnirea perfect elastică:

$$v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} \text{ și } v'_2 = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2}.$$

$$v'_1 = -v'_2 \Rightarrow \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = -\frac{2m_2 v}{m_1 + m_2} \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

• Deoarece ciocnirea particulelor este perfect elastică utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$, unde \vec{v} este viteza primei



particule înainte de ciocnire, iar \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox : $m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \alpha$ (1) și pe Oy : $0 = m_1 v_1 \sin \alpha - m_2 v_2 \sin \alpha \Rightarrow$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \quad (2). \text{ Din (1) și (2) obținem } m_1 v = 2m_1 v_1 \cos \alpha \Rightarrow$$

$v = 2v_1 \cos \alpha$. Aplicăm legea conservării energiei cinetice și obținem:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow 4m_1 v_1^2 \cos^2 \alpha = m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4 \cos^2 \alpha - 1 = 2$$

57.a. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (1), iar din legea de conservare a energiei cinetice

$$E_c = E_{c_1} + E_{c_2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (2), \text{ unde cu } v \text{ am notat viteza}$$

neutronului înainte de ciocnire iar cu v_1 și v_2 vitezele neutronilor imediat după ciocnire. Ridicăm relația (1) la pătrat și obținem $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha$ și pe baza relației (2) obținem $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, unde α reprezintă unghiul dintre direcțiile de mișcare ale neutronilor după ciocnire. Direcțiile de mișcare ale celor doi neutroni după ciocnire sunt perpendiculare.

b. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe Ox : $v = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2$ (1) și pe Oy : $0 = v_1 \sin \alpha_1 - v_2 \sin \alpha_2$ (2)

Din legea de conservare a energiei cinetice obținem:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (3)$$

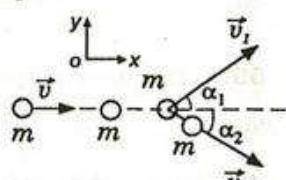
Cum $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ (4).

Din relațiile (3) și (4) obținem:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 90 \Rightarrow \alpha_2 = 90 - \alpha_1.$$

$$\text{Din (2)} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1 \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = v_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \text{ și din (1)} \Rightarrow v = v_1 \cos \alpha_1 + \frac{v_1 \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \sin \alpha_1.$$

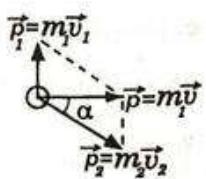
$$\text{Obținem } v_1 = v \cos \alpha_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = v \sin \alpha_1 \approx 1,73 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$



58.a. Aplicăm în cazul ciocnirii perfect elastice legea conservării impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$, unde \vec{v} reprezintă viteza primei particule înainte de ciocnire, iar \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt vitezele particulelor 1 și 2 după ciocnirea perfect elastică. Din teorema lui Pitagora obținem $m_2 v_2^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v^2$ (1).

Pe baza conservării energiei cinetice:

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad (2).$$



Din (1) și (2) obținem $v_1^2 = \frac{v^2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$. Viteza primei particule imediat după

ciocnire este $v_1 = v \sqrt{\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1,55 \text{ m/s}$ și viteza particulei a doua imediat după

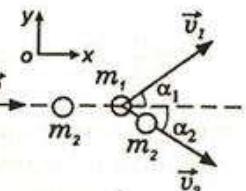
ciocnire este $v_2 = v \sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 6,32 \text{ m/s}$

b. Fracțiunea cerută este: $f = \frac{E_{c_{\text{particulă}}}}{E_{c_i}} = \frac{E_{c_i} - E_{c_f}}{E_{c_i}} = 1 - \frac{E_{c_f}}{E_{c_i}}$

$$f = 1 - \frac{m_1 v_1^2}{m_1 v^2} = 1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 0,4.$$

59.a. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ și proiectăm pe axele de coordonate.

pe Ox : $m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2$ (1) și pe Oy : $0 = m_1 v_1 \sin \alpha_1 - m_2 v_2 \sin \alpha_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin \alpha_1}{m_2 \sin \alpha_2}$.



Introducem în relația (1) și obținem $m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha_1 + \frac{m_1 v_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} \Rightarrow$ vitezele

corpurilor după ciocnire sunt $v_1 = \frac{v \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 7,326 \text{ m/s}$ și

$$v_2 = \frac{m_1 v \sin \alpha_1}{m_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 2,6 \text{ m/s.}$$

Raportul energiilor cinetice ale corpurilor după ciocnire este

$$\frac{E_{c_1}}{E_{c_2}} = \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_2 \sin^2 \alpha_2}{m_1 \sin^2 \alpha_1} = 4.$$

Căldura degajată provine pe seama scăderii energiei cinetice:

$$\Delta E = \frac{m_1 v^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) \approx 16,45 \text{ J.}$$

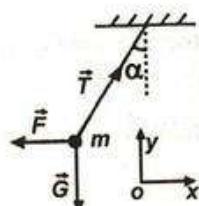
4.1. Echilibrul de translație

1.a. Impunem condiția de echilibru corpului: $\vec{T} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Obținem pe Ox : $T \sin \alpha - F = 0$ și pe Oy :

$$T \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \alpha} = 10 \text{ N.}$$

b. $F = T \sin \alpha = m \cdot g \cdot \tan \alpha = 8,65 \text{ N.}$

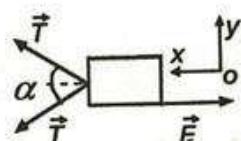


2. Studiem echilibrul plugului: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_r = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

$$\text{Pe } Oy: T_2 \sin \frac{\alpha}{2} - T_1 \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T \text{ și pe axa } Ox$$

$$2T \cos \frac{\alpha}{2} - F_r = 0 \Rightarrow F_r = 2T \cos \frac{\alpha}{2} = 25,95 \text{ N.}$$



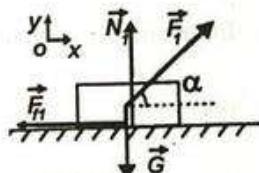
3.a. Deoarece sania are viteza constantă, rezultanta forțelor este nulă, iar echilibrul de translație este dinamic. Studiem sania când asupra ei se exercită forța \vec{F}_1 . Vectorial: $\vec{F}_1 + \vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe Ox : $F_1 \cos \alpha - F_{f1} = 0$ și pe Oy : $F_1 \sin \alpha + N_1 - mg = 0$.

$$F_{f1} = \mu N_1 = \mu(mg - F_1 \sin \alpha) \Rightarrow F_1 \cos \alpha - \mu mg + \mu F_1 \sin \alpha = 0$$

$$F_1(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = \mu mg \quad (1).$$



Studiem sania când asupra ei se exercită forța \vec{F}_2 .

Analog obținem: $F_2(\cos \beta + \mu \sin \beta) = \mu mg \quad (2)$. Din (1)+(2) ⇒

$$F_1(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = F_2(\cos \beta + \mu \sin \beta) \Rightarrow \mu = \frac{F_2 \cos \beta - F_1 \cos \alpha}{F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta} \approx 0,247.$$

$$\text{b. Introducând formula lui } \mu, \text{ obținem: } m = \frac{F_1 F_2 \sin(\alpha - \beta)}{g(F_2 \cos \beta - F_1 \cos \alpha)} \approx 34,6 \text{ kg.}$$

4. Studiem echilibrul corpului cu masa m_2 : $\vec{T} + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar $T = m_2 g$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1 :

$\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{R} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe Ox : $T \sin \alpha - R = 0$ și pe Oy :

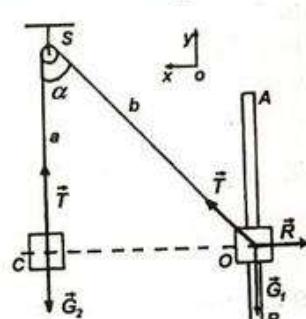
$$T \cos \alpha - m_1 g = 0 \Rightarrow T \cos \alpha = m_1 g \Rightarrow m_2 \cos \alpha = m_1$$

În triunghiul OCS : $a + b = 2\ell \Rightarrow a = 2\ell - b$, unde $OC = \ell$.

Pe baza teoremei lui Pitagora $a^2 + \ell^2 = b^2$ obținem

$$4\ell^2 - 4\ell b + b^2 + \ell^2 = b^2 \Rightarrow 5\ell^2 - 4\ell b = 0 \Rightarrow b = \frac{5\ell}{4} \text{ și}$$

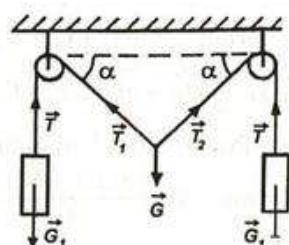
$$a = \frac{3\ell}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \cos \alpha = 0,6.$$



5. Studiem echilibrul corpului cu greutatea G_1 . $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar $T = G_1$. Studiem echilibrul corpului cu greutatea G : Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$.

Scalar: $T_1 = T_2 = T = G_1$. Proiectăm relația vectorială pe verticală: $2T \cos \alpha = G \Rightarrow G = 2G_1 \cos \alpha \Rightarrow$

$$G_1 = \frac{G}{2 \cos \alpha} = \frac{G\sqrt{2}}{2} = 100 \text{ N.}$$



6. Studiem echilibrul corpului cu masa m .

Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = 0$, iar scalar: $T = mg = 40 \text{ N}$.

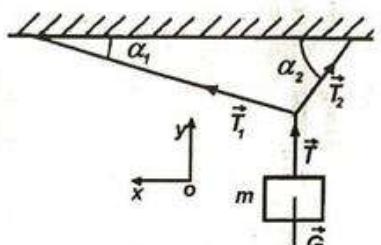
Din echilibrul punctului de prindere $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{T}$.

Cum $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$, tensiunile T_1 și T_2 sunt perpendiculare, astfel că prin proiecție pe axe de coordonate obținem:

$$\text{pe } Ox: T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \text{ și}$$

$Oy: T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 - T = 0$. Din cele două ecuații obținem:

$$T_1 = \frac{mg \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 20 \text{ N}, \text{ iar } T_2 = \frac{mg \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = 34,6 \text{ N.}$$



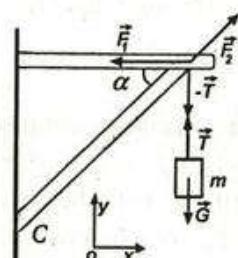
7. Impunem condiția de echilibru pentru corp: Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = 0$ și scalar: $T = mg$.

Notăm cu F_1 și F_2 tensiunile din grinzi și prin proiecția relației vectoriale $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0$ obținem pe axe de coordonate:

pe $Ox: F_2 \cos \alpha - F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \cos \alpha$ și pe Oy :

$$F_2 \sin \alpha - T = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{T}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha} = 240 \text{ N.}$$

$$F_1 = m \cdot g \cdot \operatorname{ctg} \alpha \approx 207,6 \text{ N.}$$



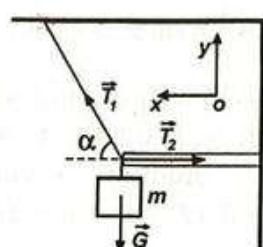
3. Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate și obținem:

pe $Ox: T_1 \cos \alpha - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 \cos \alpha$ și pe Oy :

$$T_1 \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{\sin \alpha} = 40 \text{ N.}$$

$$T_2 = m \cdot g \cdot \operatorname{ctg} \alpha \approx 34,6 \text{ N.}$$



1.a. Studiem echilibrul omului: $\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} = 0$, iar scalar $T + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - T$. (fig. 1.)

Studiem echilibrul scripetelui peste care este trecut firul de care trage omul. (fig 2) $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $T_1 = 2T$. Studiem echilibrul platformei. (fig 3)

Vectorial: $\vec{T} + \vec{T}_1 + \vec{G} - \vec{N} = 0$ și scalar: $T + T_1 - Mg - N = 0 \Rightarrow 3T - Mg - N = 0$
 $\Rightarrow 3T - Mg - mg + T = 0 \Rightarrow 4T = g(m + M) \Rightarrow T = \frac{g(m + M)}{4} = 300 \text{ N.}$

b. Forța de apăsare exercitată de om asupra platformei este $N = mg - T = \frac{g(3m - M)}{4} = 500 \text{ N.}$



Fig. 1.

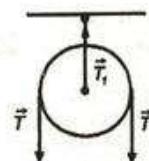


Fig. 2

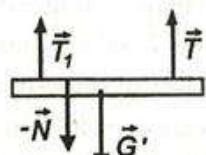


Fig. 3

10.a. Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T_1 \sin \alpha - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 \sin \alpha$ și pe Oy :

$$T_1 \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{\cos \alpha} \approx 184,97 \text{ N.}$$

$$T_2 = mg \operatorname{tg} \alpha \approx 92,49 \text{ N.}$$

11.a. Studiem echilibrul corpului cu greutate G , astfel că $\vec{T}_1 + \vec{G} = 0$, iar scalar $T_1 = G = mg$.

Studiem echilibrul corpului cu greutatea G_1 :

$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$. Proiectăm pe Ox :

$$T_2 \cos \alpha - T_1 \cos \beta = 0 \quad Oy: T_2 \sin \alpha + T_1 \sin \beta - G_1 = 0$$

Din datele problemei: $T_2 = 2T_1 \Rightarrow 2 \cos \alpha = \cos \beta$.

Cum $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \beta = \sin \alpha \Rightarrow$

$$2 \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ și } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$G_1 = 2T_1 \sin \alpha + T_1 \sin \beta = mg(2 \sin \alpha + \sin \beta) \approx 44,7 \text{ N.}$$

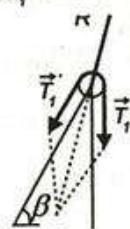
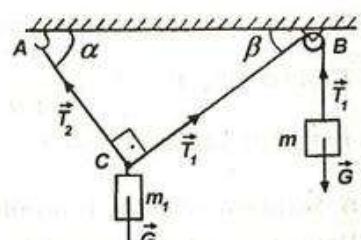
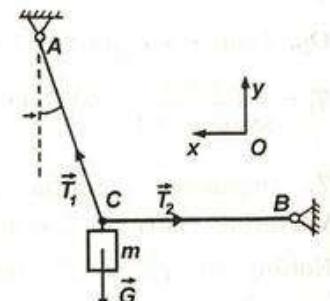
b. $T_2 = 2T_1 = 2mg = 40 \text{ N.}$

c. Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial:

$$\vec{R}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}'_1 = 0 \Rightarrow \vec{R}_1 = -\vec{T}_1 - \vec{T}'_1 \text{ cu } T_1 = T'_1 \text{ și scalar:}$$

$$R_1^2 = T_1^2 + T_1'^2 + 2T_1 T_1' \cos(90^\circ - \beta) = 2T_1^2(1 + \sin \beta)$$

$$\text{Cum } R = T_1 \sqrt{2(1 + \sin \beta)} = mg \sqrt{2(1 + \sin \beta)} \approx 34 \text{ N.}$$

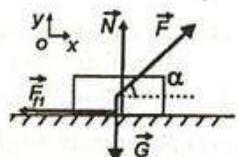


12. Deoarece corpul se mișcă uniform înseamnă că se află în echilibru dinamic de translație, astfel că rezultanta forțelor care se exercită asupra corpului este nulă. Obținem:

$\vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{N} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordinate:

pe Ox : $F \cos \alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F \cos \alpha$ și pe Oy : $F \sin \alpha + N - mg = 0$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu(mg - F \sin \alpha) = F \cos \alpha \Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 3,25 \text{ N}$.



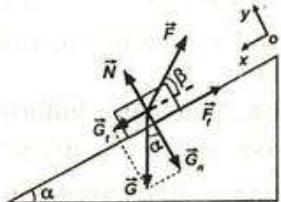
13.a. Studiem echilibrul corpului aflat pe planul inclinat. Rezultanta forțelor ce acționează asupra corpului este nulă.

Obținem: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm pe Ox : $mg \sin \alpha - F \cos \beta - F_f = 0$ și pe Oy :

$N + F \sin \beta - mg \cos \alpha = 0$. Deoarece $F_f = \mu N$

$$mg \sin \alpha - F \cos \beta - \mu mg \cos \alpha + \mu F \sin \beta = 0 \Rightarrow$$



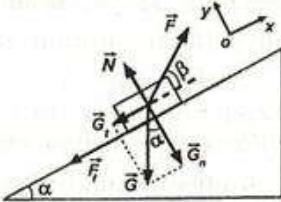
$$F = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \beta - \mu \sin \beta} = 3,36 \text{ N}.$$

b. Forța de apăsare exercitată de corp asupra planului este $N = mg \cos \alpha - F \sin \beta \approx 6,97 \text{ N}$.

c. Studiem urcarea uniformă a corpului pe planul inclinat: $\vec{F}_i + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm pe Ox : $F_i \cos \beta - F_f - mg \sin \alpha = 0$ și pe Oy :

$F_i \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow$

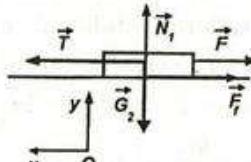


$$F_i \cos \beta - \mu mg \cos \alpha + \mu F_i \sin \beta - mg \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_i = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \beta + \mu \sin \beta} \approx 7,48 \text{ N}.$$

$$\text{i. } N = mg \cos \alpha - F_i \sin \beta \approx 4,91 \text{ N}.$$

14. Împărțim lanțul în două părți: o porțiune verticală cea care atârnă și o porțiune orizontală aflată pe masă. Studiem echilibrul porțiunii de lanț care târnă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar $m_1 g - T = 0$

$\Rightarrow T = m_1 g$, unde $m_1 = \frac{m \ell_1}{\ell}$ reprezintă masa porțiunii de lanț care atârnă. Studiem echilibrul porțiunii de lanțflată pe masă cu masa $m_2 = \frac{m(\ell - \ell_1)}{\ell}$.



Vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f + \vec{F} = 0$ și proiectăm relația pe Ox : $T - F_f - F = 0$ și pe

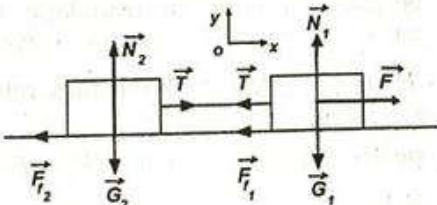
Oy : $N_1 - G_2 = 0$. Deoarece $F_f = \mu N_1 = \mu m_2 g \Rightarrow F = \frac{m}{\ell} \ell_1 g - \mu \frac{m(\ell - \ell_1)}{\ell} g \Rightarrow$

$$F = \frac{mg}{\ell} (\ell_1 - \mu \ell + \mu \ell_1) = 5,2 \text{ N}.$$

15. Studiem mișcarea rectilinie și uniformă a corpului cu masa m_2 . Vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f_2} = 0$ și proiectând pe axele de coordonate obținem pe Ox : $T - F_{f_2} = 0$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow$
 $F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \Rightarrow T = \mu_2 m_2 g$.

Studiem mișcarea rectilinie și uniformă a corpului cu masa m_1 : $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = 0$.

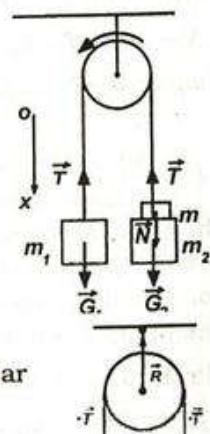
Scalar pe Ox : $F - T - F_{f_1} = 0$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \Rightarrow$
 $F = T + F_{f_1} = \mu_2 m_2 g + \mu_1 m_1 g = g(\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1) = 1,6 \text{ N}$.



16.a. Studiem echilibrul dinamic de translație al corpului cu masă m_1 : $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar $T = m_1 g$. Studiem echilibrul dinamic de translație al corpului cu masă m_2 : $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar $T = N + m_2 g$, unde N este apăsarea normală exercitată de corpul adițional. Studiem echilibrul dinamic de translație al corpului adițional cu masa m . Astfel $\vec{N} + \vec{G} = 0$, iar scalar $mg = N \Rightarrow m_1 g = mg + m_2 g \Rightarrow m = m_1 - m_2 = 2 \text{ kg}$. Corpul adițional se aşază pe corpul cu masă mai mică.

b. Forța de apăsare a corpului adițional este $N = 20 \text{ N}$

c. Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R} - 2\vec{T} = 0$, iar scalar $R = 2T = 2m_1 g = 100 \text{ N}$.



17. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1 : $\vec{T}_1 + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar obținem $m_1 g = T_1$. (fig 4)

Studiem echilibrul scripetelui de care este prins corpul de masă m_2 : $2\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0$, iar scalar $T_2 = 2T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2 : $\vec{T}_2 + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar obținem:

$$m_2 g = T_2 \Rightarrow m_2 g = 2m_1 g \Rightarrow m_2 = 2m_1 \Rightarrow \\ m_1 = \frac{m_2}{2} = 5 \text{ kg.}$$

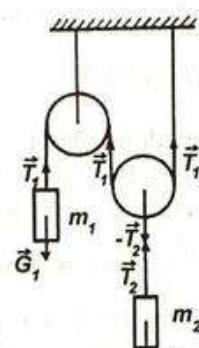


Fig. 4

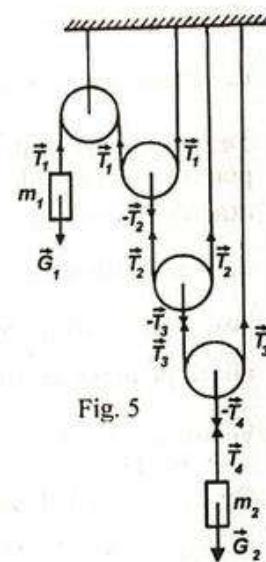


Fig. 5

18. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1 : $\vec{T}_1 + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar obținem $T_1 = m_1 g$. (fig 5)

Studiem echilibrul scripeților.

Scalar obținem: $T_2 = 2T_1$; $T_3 = 2T_2 = 4T_1$ și $T_4 = 2T_3 = 8T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2 : $\vec{T}_4 + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar obținem $T_4 = m_2 g \Rightarrow m_2 g = 8m_1 g \Rightarrow m_2 = 8m_1 = 64$ kg.

19.a. Deoarece sistemul de corpi este ridicat uniform de forță F , considerăm că intreg sistemul este un punct material cu masa totală $m_t = m_1 + m_0 + m_2$, astfel că: $F = G_t = m_t g = (m_1 + m_0 + m_2)g = 32$ N.

b. Studiem mișcarea rectilinie uniformă, a corpului cu masa m_2 și a porțiunii inferioare de lanț cu lungimea ℓ_0 . Această porțiune de lanț are

$$\text{masa } m = \frac{m_0 \ell_0}{\ell}, \text{ astfel că: } T - G = 0 \Rightarrow T = G = (m + m_2)g = \left(\frac{m_0 \ell_0}{\ell} + m_2 \right)g = 20,8 \text{ N}$$

20.a. Studiem echilibrul corpului cu masă m_1 : $\vec{F} + \vec{f} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate pe Ox : $F \cos \alpha - f - F_{f1} = 0$ și pe Oy : $F \sin \alpha + N_1 - m_1 g = 0$.

$$\text{Cum } F_{f1} = \mu_1 N_1 \text{ obținem } F \cos \alpha - f - \mu_1 m_1 g + \mu_1 F \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

Studiem echilibrul corpului cu masă m_2 . Vectorial:

$$\vec{f} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = 0. \text{ Proiectăm relația vectorială pe } Ox:$$

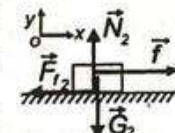
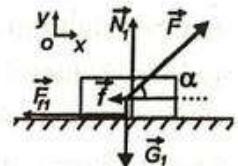
$$f - F_{f2} = 0; \text{ pe } Oy: N_2 - m_2 g = 0 \text{ și cum } F_{f2} = \mu_2 N_2 \text{ obținem}$$

$$f = \mu_2 m_2 g \quad (2). \text{ Adunând (1) cu (2) obținem:}$$

$$F \cos \alpha - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g + \mu_1 F \sin \alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha} \approx 14,2 \text{ N.}$$

b. Forțele de apăsare sunt reacțiunile normale: $N_1 = m_1 g - F \sin \alpha \approx 22,9$ N și $N_2 = m_2 g = 50$ N.

c. Forțele de frecare sunt $F_{f1} = \mu_1 N_1 \approx 2,29$ N și $F_{f2} = \mu_2 N_2 = 10$ N



21.a. Studiem echilibrul corpului cu masa m_2 : $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar obținem $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1 .

Deoarece lăsat liber sistemul de corpi, corpul m_1 urcă, \vec{F}_f acționează de-a lungul planului înclinat în jos. Vectorial: $\vec{T} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația

vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T - F_{f1} - m_1 g \sin \alpha - F = 0$ și pe Oy :

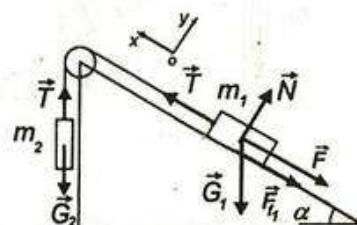
$$N - m_1 g \cos \alpha = 0. \text{ Cum } F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - F = 0 \Rightarrow$$

$$F = g(m_2 - m_1 \sin \alpha - \mu m_1 \cos \alpha) = 20,7 \text{ N.}$$

b. Tensiunea din fir este $T = m_2 g = 40$ N.

c. Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$

$$\text{Scalar } R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90^\circ - \alpha). \text{ Deoarece } T_1 = T_2 = T \Rightarrow$$



$$R = T\sqrt{2(1+\sin \alpha)} = m_2 g \sqrt{2(1+\sin \alpha)} \approx 77.25 \text{ N.}$$

22.a. Caz 1 Sistemul se află în repaus, iar F_{f_1} are sensul din figura 6.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2 : $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$. Studiem echilibrul corpului cu masa m_1 : $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T - F_{f_1} - m_1 g \sin \alpha = 0$ și pe Oy : $N - m_1 g \cos \alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = 0 \Rightarrow m_2 = m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = 586,5 \text{ g.}$

Caz 2: Sistemul se află în repaus, iar F_{f_1} are sensul din figura 7.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_2 : $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa m_1 : $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $T + F_{f_1} - m_1 g \sin \alpha = 0$ și pe Oy : $N - m_1 g \cos \alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g + \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = 0 \Rightarrow m_2 = m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 413,5 \text{ g. Deci sistemul se află în echilibru dacă corpul al doilea are masa } m_2 \in [413,5 \text{ g; } 586,5 \text{ g].}$

b. $T_{\min} = m_{2\min} g \approx 4,135 \text{ N și } T_{\max} = m_{2\max} g \approx 5,865 \text{ N.}$

c. Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2$. Scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90^\circ - \alpha)$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2 \sin \alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1+\sin \alpha)} = T\sqrt{3}$. Pentru T_{\min} obținem $R_{\min} \approx 7,15 \text{ N}$ și pentru T_{\max} obținem $R_{\max} \approx 10,15 \text{ N.}$

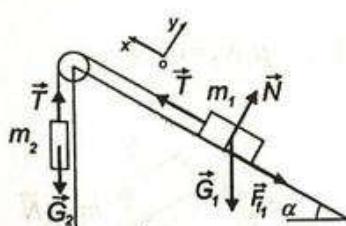


Fig. 6

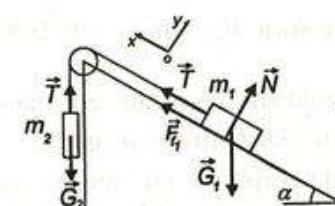


Fig. 7

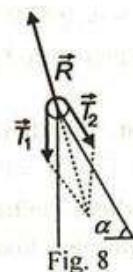


Fig. 8

23. Caz 1: Studiem situația în care corpul m_1 ar începe să alunecă uniform în jos (fig 9.) Pentru corpul m_1 : $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f_1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Obținem:

Pe Ox : $m_1 g \sin \alpha - F_{f_1} - T = 0$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g \cos \alpha$.

Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha \Rightarrow m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - T = 0$ (1).

Pentru corpul m_2 : $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f_2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox : $T - m_2 g \sin \beta - F_{f_2} = 0$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$.

Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha$ și $F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos \beta$ rezultă că $T - m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta = 0$ (2).

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow m_1 g \sin \alpha + m_2 g \sin \beta = T = m_1 g \cos \alpha + m_2 g \cos \beta \Rightarrow \\ m_2 = \frac{m_1 (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)}{\sin \beta + \mu_2 \cos \beta} = 2,44 \text{ kg.}$$

Caz 2: Studiem situația în care corpul m_2 ar începe să alunecă uniform în jos (fig 10). Pentru corpul m_1 : $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f_1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate: pe Ox : $T - m_1 g \sin \alpha - F_{f_1} = 0$ și pe Oy : $N_1 - m_1 g \cos \alpha = 0$. Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 \Rightarrow T - m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha = 0$ (1)

Pentru corpul m_2 : $\vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{f_2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Pe Ox : $m_2 g \sin \beta - F_{f_2} - T = 0$ și pe Oy : $N_2 - m_2 g \cos \beta = 0$.

$$\text{Cum } F_{f_2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g \cos \beta \Rightarrow m_2 g \sin \beta - \mu_2 m_2 g \cos \beta - T = 0 \quad (2)$$

$$\text{Din (1)+(2)} \Rightarrow m_2 g \sin \beta - \mu_2 m_2 g \cos \beta - m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha = 0 \Rightarrow \\ m_2 = \frac{m_1 (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{\sin \beta - \mu_2 \cos \beta} = 5,2 \text{ kg.}$$

Sistemul se află în echilibru, dacă corpul al doilea are masa $m_2 \in [2,44 \text{ kg}; 5,2 \text{ kg}]$.

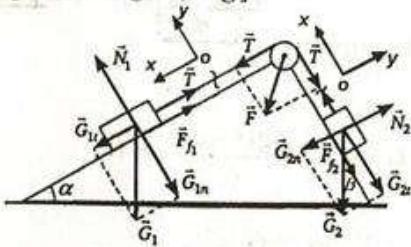


Fig. 9

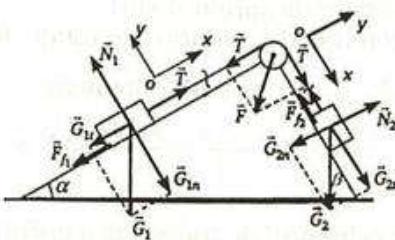


Fig. 10

b. Tensiunilor în fire în cele două cazuri sunt $T = m_1 g (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) \Rightarrow T \approx 20,675 \text{ N}$ și $T' = m_1 g (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) \approx 29,325 \text{ N}$

c. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$.

Scalar, pe baza teoremei cosinusului obținem $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos \gamma$, unde $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 105^\circ$, astfel că $\cos \gamma \approx -0,26$.

Deoarece $T_1 = T_2 = T$ obținem: $R = T \sqrt{2(1 + \cos \gamma)}$.

Pentru T obținem $R \approx 25,15 \text{ N}$ și pentru T' obținem $R' \approx 35,68 \text{ N}$.

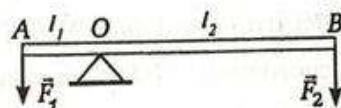
4.2. Echilibru de rotație

1. Momentul forței față de axa de rotație este $M_F = Fd \sin \alpha$, unde α este unghiul format de direcția forței F și bară. Deoarece bara rămâne în echilibru de rotație și sub acțiunea forței F_1 aplicată la distanța d_1 față de axa de rotație înseamnă că momentul acestei forțe este egal cu momentul forței F , astfel că

$$M_F = F_1 d_1 \sin \alpha \Rightarrow Fd = F_1 d_1 \Rightarrow F_1 = \frac{Fd}{d_1} = 100 \text{ N.}$$

2. Deoarece scândura este în echilibru de rotație înseamnă că suma momentelor forțelor față de punctul O este zero. Astfel $\vec{M}_{F_1,0} + \vec{M}_{F_2,0} = 0$, iar

$$\text{scalar obținem } F_1 \ell_1 - F_2 \ell_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 \ell_1}{\ell_2} = 20 \text{ N.}$$

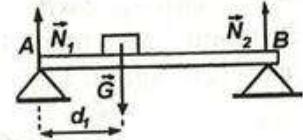


3. Impunem condiția de echilibru de translație $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar: $N_1 + N_2 = G_1$, unde N_1 și N_2 sunt forțele de apăsare exercitate de scândură asupra punctelor de sprijin A și B .

Impunem condiția de echilibru de rotație față de punctul

A : $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{N_2,A} = 0$, iar scalar obținem:

$$-G_1 d + N_2 \ell = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{G_1 d}{\ell} = \frac{mgd}{\ell} = 2 \text{ N și } N_1 = G - N_2 = \frac{mg(\ell - d)}{\ell} = 8 \text{ N.}$$



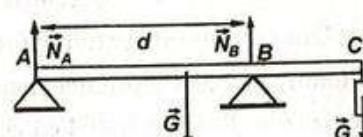
4. Studiem echilibrul de translație a grinzii: $\vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{G} + \vec{G}_1 = 0$.

Scalar: $N_A + N_B - mg - m_1 g = 0$.

Studiem echilibrul de rotație față de punctul A . Suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul A este nulă: $\vec{M}_{N_B,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{G_1,A} = 0$.

$$N_B d - mg \frac{\ell}{2} - m_1 g \ell = 0 \Rightarrow N_B = \frac{g \ell (m + 2m_1)}{2d} = 112.5 \text{ N}$$

$$\text{și } N_A = (m + m_1)g - N_B = 27.5 \text{ N.}$$

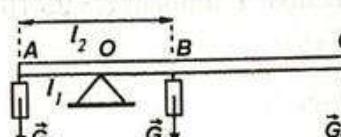


5. Studiem echilibrul de rotație a scândurii, astfel că suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul O este nulă.

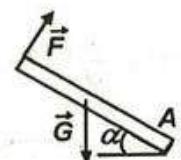
Vectorial: $\vec{M}_{G_1,0} + \vec{M}_{G_2,0} + \vec{M}_{G_3,0} = 0$.

Scalar: $m_1 g \ell_1 - m_2 g (\ell_2 - \ell_1) - m_3 g (\ell - \ell_1) = 0 \Rightarrow$

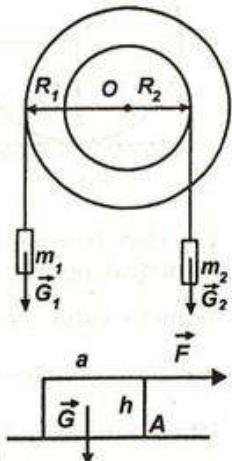
$$m_3 = \frac{m_1 \ell_1 - m_2 (\ell_2 - \ell_1)}{\ell - \ell_1} = 320 \text{ g.}$$



- 6.** Deoarece scândura se poate rota în jurul punctului A, când scândura formează cu orizontală unghiul α ea se află în echilibru de rotație. Impunem condiția ca suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul A să fie zero:
- $$\bar{M}_{G,A} + \bar{M}_{F,A} = 0 \Rightarrow -mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha + F\ell = 0 \Rightarrow F = \frac{mg \cos \alpha}{2} \approx 21,63 \text{ N}$$



- 7.** Studiem echilibrul de rotație al scripetelui. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul O este nulă. Vectorial:
- $$\bar{M}_{G_1,0} + \bar{M}_{G_2,0} = 0, \text{ iar scalar: } m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = 0 \text{ obținem}$$
- $$m_2 = \frac{m_1 R_1}{R_2} = 10 \text{ kg.}$$



- 8.a.** Pentru ca acest corp prismatic să se răstoarne, trebuie ca momentul forței \vec{F} față de axa AA' (muchia corpului de pe plan perpendiculară pe forța \vec{F}) să fie cel puțin egal cu momentul greutății corpului calculat față de aceeași axă.

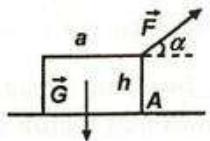
$$M_{F,AA'} \geq M_{G,AA'} \Rightarrow Fh \geq mg \frac{a}{2} \Rightarrow F \geq \frac{mga}{2h} \Rightarrow F \geq 1 \text{ N} \Rightarrow \text{dacă}$$

forța F este mai mare decât 1 N, corpul se răstoarnă.

- b.** Dacă forța F, formează cu orizontală unghiul α , pentru ca să se răstoarne corpul, trebuie ca:

$$M_{F,AA'} \geq M_{G,AA'} \Rightarrow Fh \cos \alpha \geq mg \frac{a}{2} \Rightarrow F \geq \frac{mga}{2h \cos \alpha} \Rightarrow F \geq 2$$

N. Pentru a răsturna corpul trebuie ca forța F să fie mai mare decât 2 N



- 9.** Pentru ca roata să urce treapta, trebuie ca momentul forței \vec{F} față de punctul A să fie cel puțin egal cu momentul greutății roții față de același punct A. (fig 1) $M_{F,A} \geq M_{G,A} \Rightarrow F(R-h) \geq mgb$, unde b este brațul greutății față de punctul A (lungimea perpendiculară constituită din A pe dreapta suport a greutății \vec{G}). Din geometrie: $b = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{h(2R-h)} \Rightarrow F \geq \frac{mgb\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \geq 55,9 \text{ N}$. Dacă forța este cel puțin egală cu 55,9 N, roata poate urca treapta.

- 10.** Împărțim bara în două regiuni: una din oțel cu lungimea $\ell/4$ și masa $m_1 = \rho_1 S \frac{\ell}{4}$, iar cealaltă din aluminiu cu lungimea $3\ell/4$ și masa $m_2 = \rho_2 S \frac{3\ell}{4}$ (fig 2).

- Notăm cu x distanța de la punctul în care suspendăm bara pentru ca aceasta să rămână în echilibru și capătul din oțel al barei. Studiem echilibrul de rotație al greutăților față de punctul de suspensie O: $\bar{M}_{G_1,0} + \bar{M}_{G_2,0} = 0$, iar scalar: $G_1 \left(x - \frac{\ell}{8} \right) = G_2 \left(\ell - x - \frac{3\ell}{8} \right) \Rightarrow \rho_1 S \frac{\ell}{4} g \left(x - \frac{\ell}{8} \right) = \rho_2 S \frac{3\ell}{4} g \left(\frac{5\ell}{8} - x \right) \Rightarrow$

$$\rho_1 \left(x - \frac{\ell}{8} \right) = 3\rho_2 \left(\frac{5\ell}{8} - x \right) \Rightarrow x = \frac{\ell(\rho_1 + 15\rho_2)}{8(\rho_1 + 3\rho_2)} \approx 38 \text{ cm}$$

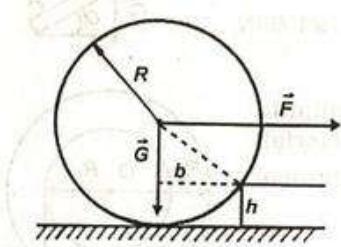


Fig. 1

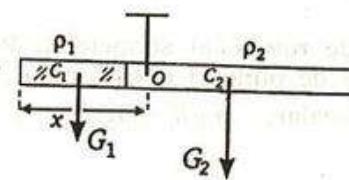


Fig. 2

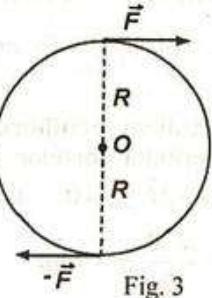


Fig. 3

11. Deoarece asupra volanului se acționează cu două forțe tangente și egale, diametral opuse, ca în figura 3, acestea formează un cuplu de forțe al cărui moment este: $\vec{M} = \vec{M}_{F,0} + \vec{M}_{-F,0}$, iar scalar $M = 2FR \Rightarrow F = \frac{M}{2R} = 15 \text{ N}$, unde F este forța cu care șoferul trage cu o mână de volan.

12.a. Studiem echilibrul de rotație a barei față de punctul A. Rezultanta momentelor forțelor față de A este nulă: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T_B,A} = 0$, iar scalar:

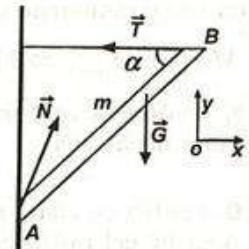
$$-mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha + T_B \ell \sin \alpha = 0 \Rightarrow T_B = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha = 1730 \text{ N.}$$

b. Studiem echilibrul de translație a barei: $\vec{N}_A + \vec{G} + \vec{T}_B = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Obținem pe Ox : $N_{A_x} - T_B = 0 \Rightarrow N_{A_x} = T_B = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha$ și pe Oy :

$$N_{A_y} - G = 0 \Rightarrow N_{A_y} = mg.$$

Din geometrie: $N_A = \sqrt{N_{A_x}^2 + N_{A_y}^2} = 2645 \text{ N.}$

$$\text{c. } \operatorname{tg} \beta = \frac{N_{A_y}}{N_{A_x}} = 2 \operatorname{tg} \alpha = 1,156$$



13.a. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația A este nulă: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T_{DE},A} + \vec{M}_{F,A} = 0$, iar scalar:

$$-\frac{mg\ell}{2} + T_{DE}(\ell - d) \sin \alpha - F\ell \sin \beta = 0 \Rightarrow$$

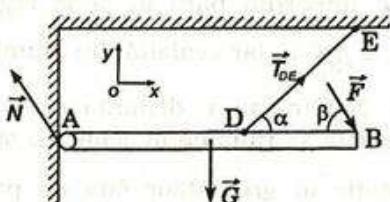
$$T_{DE} = \frac{\ell(mg + 2F \sin \beta)}{2(\ell - d) \sin \alpha} = 996,8 \text{ N.}$$

b. Studiem echilibrul de translație a scândurii: $\vec{N}_A + \vec{G} + \vec{T}_{DE} + \vec{F} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate.

$$\text{pe } Ox: -N_{A_x} + T_{DE} \cos \alpha + F \cos \beta = 0 \Rightarrow N_{A_x} = T_{DE} \cos \alpha + F \cos \beta = 1073,73 \text{ N.}$$

$$\text{pe } Oy: N_{A_y} + T_{DE} \sin \alpha - mg - F \sin \beta = 0 \Rightarrow N_{A_y} = mg + F \sin \beta - T_{DE} \sin \alpha \Rightarrow$$



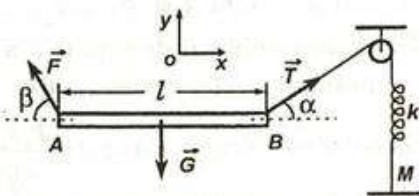
$N_{Ay} = -86.9$ N iar semnul “-“ arată că \vec{N}_{Ay} are sens contrar celui presupus.

$$N_A = \sqrt{N_{Ax}^2 + N_{Ay}^2} = 1077.24 \text{ N.}$$

14.a. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația A este nulă.) Vectorial: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar obținem:

$$-\frac{mgl}{2} + Tl \sin \alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = 115.6 \text{ N.}$$

$$\text{Cum } F_{el} = T = kx \Rightarrow x = \frac{T}{k} = 5.78 \text{ cm.}$$



b. Studiem echilibrul de translație a scândurii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{T} = 0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe Ox: $T \cos \alpha - F_x = 0 \Rightarrow F_x = T \cos \alpha = 57.8 \text{ N}$ și pe Oy:

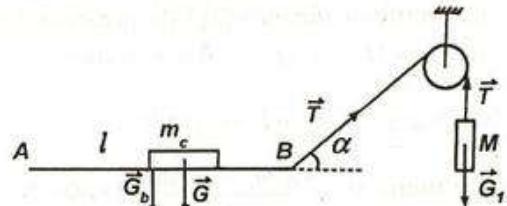
$$T \sin \alpha + F_y - mg = 0 \Rightarrow F_y = mg - T \sin \alpha = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} = 100 \text{ N.}$$

$$\text{Obținem } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 115.5 \text{ N.}$$

$$\text{c. } \operatorname{tg} \beta = \frac{F_y}{F_x} = 1.73 \approx \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60^\circ.$$

15. Studiem echilibrul corpului cu masă M . Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar obținem $T = Mg$.

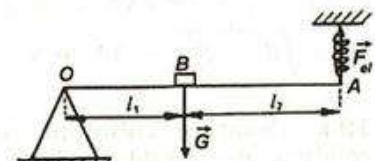
Studiem echilibrul de rotație a barei în raport cu punctul A. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul A este zero: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{F_{el},A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar obținem: $-mg \frac{l}{2} - m_c gx + Tl \sin \alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell(2M \sin \alpha - m)}{2m_c} = 4 \text{ cm.}$



16. Studiem echilibrul de rotație a barei în raport cu punctul O. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul O este zero: $\vec{M}_{G,O} + \vec{M}_{F_{el},O} = 0$, iar scalar obținem:

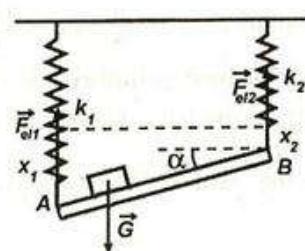
$$-mg\ell_1 + F_{el}(\ell_1 + \ell_2) = 0. \quad \text{Cum} \quad F_{el} = kx \Rightarrow$$

$$mg\ell_1 = kx(\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow k = \frac{mg\ell_1}{x \cdot (\ell_1 + \ell_2)} = 1250 \text{ N/m.}$$



17.a. Studiem echilibrul de translație a scândurii AB. Rezultanta forțelor este nulă: $\vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} + \vec{G} = 0$, iar scalar: $F_{el1} + F_{el2} = mg \Rightarrow k_1 x_1 + k_2 x_2 = mg \quad (1)$.

$$\sin \alpha = \frac{x_1 - x_2}{\ell} \Rightarrow x_1 - x_2 = \ell \sin \alpha \quad (2)$$



Din (1) și (2) ⇒ $x_1 = \frac{mg + k_2 \ell \sin \alpha}{k_1 + k_2} = 12,5$ cm, iar $x_2 = \frac{mg - k_1 \ell \sin \alpha}{k_1 + k_2} = 2,5$ cm.

b. $F_{el_1} = k_1 x_1 = 6,25$ N și $F_{el_2} = k_2 x_2 = 3,75$ N.

c. Studiem echilibrul de rotație a scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul A este nulă. Astfel $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{F_{el},A} = 0$, iar scalar $-Gd \cos \alpha + F_{el_2} \ell \cos \alpha = 0 \Rightarrow d = \frac{k_2 x_2 \ell}{mg} = 75$ cm.

d. Deoarece scândura rămâne orizontală după așezarea corpului m, înseamnă că $x_1 = x_2 = x$. Din condiția de echilibru de translație obținem:

$$k_1 x + k_2 x = mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k_1 + k_2} = 5 \text{ cm, iar din condiția de echilibru de rotație}$$

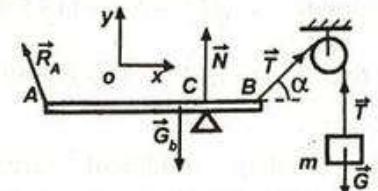
$$d' = \frac{k_2 x \cdot \ell}{mg} = 150 \text{ cm.}$$

18.a. Studiem echilibrul corpului m suspendat de fir. Scalar: $T = mg$.

Studiem echilibrul de rotație a barei. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul A este nulă: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{N,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$ iar scalar:

$$-m_b g \frac{\ell}{2} + N \frac{3\ell}{4} + T \ell \sin \alpha = 0$$

$$\text{Obținem } N = \frac{4g(m_b - 2m \sin \alpha)}{6} = 200 \text{ N.}$$



b. Studiem echilibrul de translație a barei: $\vec{R} + \vec{G}_b + \vec{N} + \vec{T} = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate obținem:

$$\text{pe } Ox: -R_{A_x} + T \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_{A_x} = T \cos \alpha = mg \cos \alpha = 17,3 \text{ N și}$$

$$\text{pe } Oy: R_{A_y} + N + T \sin \alpha - m_b g = 0 \Rightarrow R_{A_y} = m_b g - N - mg \sin \alpha = 110 \text{ N.}$$

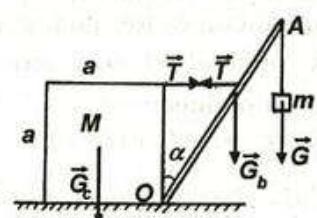
$$R_A = \sqrt{R_{A_x}^2 + R_{A_y}^2} \approx 111,36 \text{ N.}$$

19.a. Deoarece cubul nu se răstoarnă, impunem condiția de echilibru de rotație față de muchia orizontală OA ce trece prin punctul O și este perpendiculară pe forța T: $\vec{M}_{T,OA} + \vec{M}_{G_c,OA} = 0$, iar

$$\text{scalar } Ta = Mg \frac{a}{2} \Rightarrow T = \frac{Mg}{2} = 25 \text{ N.}$$

b. Studiem echilibrul de rotație a barei. Rezultanta momentelor forțelor în raport cu punctul O este nulă: $\vec{M}_{G_b,0} + \vec{M}_{T,0} + \vec{M}_{G_c,0} = 0$, iar scalar obținem

$$-mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha + Ta - G \ell \sin \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2Ta}{\ell(mg + 2G)} = \frac{Mga}{\ell(mg + 2G)} = 0,25.$$



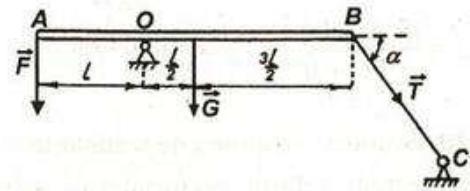
20.a. Studiem echilibrul de rotație a barei. Suma vectorială a momentelor forțelor, calculate în raport cu punctul O este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{F,0} + \vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{T,0} = 0$ și scalar obținem

$$F\ell - mg \frac{\ell}{2} - 2T\ell \sin \alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{2F - mg}{4 \sin \alpha}$$

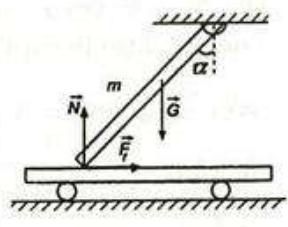
$$\Rightarrow T = 5 \text{ kg}$$

b. Pentru ca tensiunea în cablul BC să fie

$$\text{nulă } T=0 \Rightarrow F = \frac{mg}{2} \Rightarrow m = \frac{2F}{g} = 2 \text{ kg.}$$



21. Studiem echilibrul căruciorului. Scalar pe Ox : $F = F_f$. Dacă bara se deplasează spre stânga ca în figură, studiem echilibrul de rotație a barei față de punctul de prindere O . Asupra barei se exercită o forță de frecare în sens opus celei care se exercită asupra căruciorului (conform principiului acțiunii și reacțiunii). Rezultanta momentelor forțelor este nulă: $\vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{F_f,0} + \vec{M}_{N,0} = 0$, iar



scalar: $mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha - F_f \ell \cos \alpha - N \ell \sin \alpha = 0$, unde ℓ este lungimea barei.

$$\text{Conform legii frecării } F_f = \mu N \Rightarrow \frac{mg}{2} \sin \alpha = F_f \cos \alpha + \frac{F_f}{\mu} \sin \alpha \Rightarrow$$

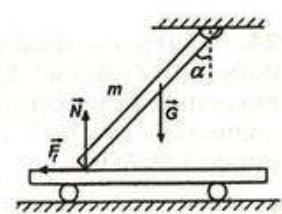
$$F_f = F = \frac{\mu mg \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 2,36 \text{ N.}$$

Dacă bara se deplasează în sens opus, echilibrul de rotație a barei față de punctul O devine:

$$-mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha - F_f \ell \cos \alpha + N \ell \sin \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{mg \sin \alpha}{2} = F_f \cos \alpha - \frac{F_f}{\mu} \sin \alpha \Rightarrow F = F_f = \frac{\mu mg \sin \alpha}{2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} \Rightarrow$$

$$F \approx 13 \text{ N.}$$



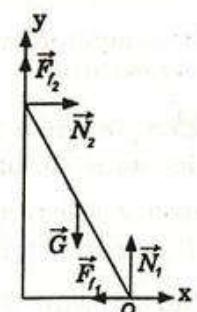
22. Studiem echilibrul de translație a scării: $\vec{N}_2 + \vec{F}_{f_2} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{N}_1 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axe de coordonate. Obținem:

Pe Ox : $N_2 - F_{f_2} = 0 \Rightarrow N_2 = F_{f_2}$ și pe Oy : $F_{f_2} + N_1 - mg = 0$.

Conform legilor frecării $F_{f_2} = \mu N_1$ și $F_{f_2} = \mu N_2$ obținem

$$N_2 = \mu N_1 \Rightarrow F_{f_2} = \mu^2 N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{mg}{1 + \mu^2} \text{ și } N_2 = \frac{\mu mg}{1 + \mu^2}$$

Studiem echilibrul de rotație a scării. Notăm cu h înălțimea la care se află centrul de greutate al scării și impunem condiția ca rezultanta momentelor forțelor față de punctul de sprijin al scării pe podea (O) să fie nulă: $\vec{M}_{F_{f_2},0} + \vec{M}_{N_1,0} + \vec{M}_{G,0} = 0$, iar scalar obținem:



$$-F_{f_1}\ell \cos \alpha - N_2 \ell \sin \alpha + mg \frac{h}{\tan \alpha} = 0 \Rightarrow mg \frac{h}{\tan \alpha} = N_2 \ell (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \Rightarrow$$

$$h = \frac{\mu \ell \sin \alpha (\tan \alpha + \mu)}{1 + \mu^2} = 16,86 \text{ cm.}$$

23. Studiem echilibru de translație a barei $\vec{N}_A + \vec{F}_{f_A} + \vec{G} + \vec{N}_B = 0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe Ox : $F_{f_A} - N_B \sin \alpha = 0$ și pe

$$Oy: N_A + N_B \cos \alpha - mg = 0.$$

Conform legii frecării $F_{f_A} = \mu N_A \Rightarrow$

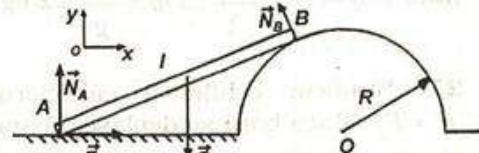
$$\mu N_A = N_B \sin \alpha \Rightarrow N_A = \frac{N_B \sin \alpha}{\mu}$$

$$\frac{N_B \sin \alpha}{\mu} + N_B \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow N_B = \frac{\mu mg}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$

Studiem echilibrul de rotație a barei. Suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul de sprijin de pe planul orizontal A este nulă: $\vec{M}_{N_B, A} + \vec{M}_{G, A} = 0$. Scalar:

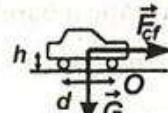
$$N_B \ell - \frac{mg\ell}{2} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_B = \frac{mg \cos \alpha}{2} \Rightarrow \frac{mg \cos \alpha}{2} = \frac{\mu mg}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 - \cos^2 \alpha}. \text{ Dar } \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \mu \approx 0,333.$$



24. Pentru ca mașina să nu se răstoarne în curbă, față de punctul de contact O dintre roata exterioară și sol, trebuie ca momentul forței centrifuge să fie mai mic sau cel puțin egal cu momentul greutății autoturismului, ambele calculate față de punctul O . Astfel:

$$|M|_{F_{cf}, O} \leq |M|_{G, O} \Rightarrow F_{cp} h \leq G \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{R} h \leq mg \frac{d}{2} \Rightarrow v \leq \sqrt{\frac{Rgd}{2h}} \Rightarrow v \leq 31,62 \text{ m/s}$$



Dacă autoturismul intră în curbă cu o viteză mai mică decât 113,84 km/h, el nu se răstoarnă.

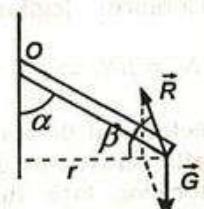
25.a. Deoarece bila execută o mișcare circular uniformă, ea se află în echilibru de rotație. Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă, astfel că $F_{cp} = m\omega^2 r$, unde r este raza de rotație și este $r = \ell \sin \alpha \Rightarrow$

$$F_{cp} = m4\pi^2 n^2 \ell \sin \alpha.$$

$$\text{Din geometrie } R = \sqrt{F_{cp}^2 + G^2} = m\sqrt{(4\pi^2 n^2 / \sin \alpha)^2 + g^2} \approx 16,12 \text{ N.}$$

$$\text{b. } F_{cp} = R \sin \beta \Rightarrow m\omega^2 r = R \sin \beta.$$

$$G = R \cos \beta \Rightarrow mg = R \cos \beta \Rightarrow \tan \beta = \frac{4\pi^2 n^2 \ell \sin \alpha}{g} = 8.$$



c. Calculăm momentul reacțiunii \vec{R} față de punctul de fixare de ax. Cum $\vec{R} + \vec{G} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_{cp} - \vec{G}$. Astfel $\vec{M}_{R,0} = \vec{M}_{F_{cp},0} - \vec{M}_{G,0}$, iar scalar obținem $M_{R,0} = F_{cp}\ell \cos \alpha - mg\ell \sin \alpha = m\ell \sin \alpha(4\pi^2 n^2 \ell \cos \alpha - g) = 12,84 \text{ Nm}$.

d. Cum $M_{R,0} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} \ell \cos \alpha - g = 0$, deoarece $n = \frac{1}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \alpha}{g}} \approx 1,85 \text{ s}$

26. Studiem echilibru de rotație al corpului. Rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

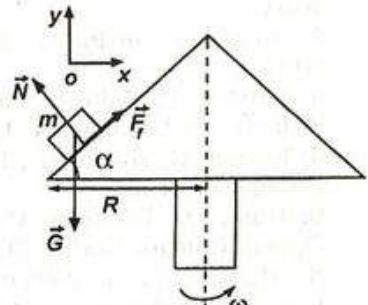
Pe Ox : $F_f \cos \alpha - N \sin \alpha = F_{cp}$ și pe Oy :

$$F_f \sin \alpha + N \cos \alpha - G = 0. \quad \text{Cum} \quad F_f = \mu N \Rightarrow \\ \mu N \cos \alpha - N \sin \alpha = m\omega^2 R \quad (1)$$

$$\mu N \sin \alpha + N \cos \alpha = mg \quad (2)$$

Împărțim relațiile (1) la (2) obținem:

$$\frac{\mu \cos \alpha - \sin \alpha}{\mu \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\omega^2 R}{g} \Rightarrow \mu = \frac{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha} \approx 0,8.$$



Bibliografie:

1. Chiriță M., Davidescu D., Șoltuianu M., Bacalaureat la fizică, Editura Tamar, 2003
2. Rusu O., Chiriță M., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Niculescu, 2004
3. Hristev A., Fălie V., Manda D., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1996
4. Enescu G. și colectiv, Fizică manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1995
5. Rusu O., Trăistaru C., Galbură A., Dinică L., Chiriță M., Fizică Mecanică, Optică, Editura Corint, 2006
6. Hristev A. și colectiv, Probleme de fizică pentru clasele IX-X, Editura Didactică și Pedagogică, 1983
7. Cone G., Stanciu Gh., Tudorache Ș., Probleme de fizică pentru liceu (vol I și II), Editura All, 1996
8. Vlăduță Gh. și colectiv, Probleme de fizică pentru clasele XI-XII, Editura Didactică și Pedagogică, 1993
9. Hristev A., Probleme de fizică. Optică. Fizică atomică și nucleară, Editura ARH, 1992
10. Toader E., Spulber V., 555 Teste de optică, Editura Didactică și Pedagogică, 1989
11. Rusu O., Galbură A., Probleme de mecanică, Editura Niculescu, 1994
12. Ionescu R., Onea C., Toma I., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Teora, 2000
13. Druică Z., Popescu A., Probleme de mecanică și acustică, Editura tehnica, 1974
14. Colectiv, Culegere de probleme pentru admiterea în învățământul superior, Editura Științifică și Enciclopedică, 1989
15. Colectiv, Teste de fizică, Editura Politehnica Press, 2002
16. Colectiv, Societatea de Științe Fizice și Chimice, 1986
17. Hristev A., Probleme de fizică pentru învățământul mediu, Editura Icar, 1991
18. Probleme date la examenul de bacalaureat
19. Variantele propuse la examenul de bacalaureat 2007, 2008 și 2009
20. Subiecte de bacalaureat date în diversi ani





9 786068 010526

ISBN: 978-606-8010-52-6

Pret: 30 lei