# Fizică

## CULEGERE DE PROBLEME propuse și rezolvate

**pentru CLASA a IX-a**
**și examenul de**
**BACALAUREAT**

**Mihaela CHIRIȚĂ**

Editura **Tamar**

Lucrare realizată de Mihaela Chiriță
prof. la Colegiul Național Sf. SAVA, București

Comenzile se pot face:
telefonic, la numerele 021-411.33.93, 0742.014.405,
prin poștă, la adresa O. P. 69 C. P. 181
prin e-mail: tamarprint@gmail. com

ISBN:978-606-8010-29-8

**În memoria tatălui meu**

# Recomandări

Această culegere de probleme se adresează atât elevilor de clasa a IX-a cât şi elevilor care se pregătesc să susţină un examen la mecanică sau optică.

Ca să puteţi să rezolvaţi problemele trebuie să cunoaşteţi teoria din manualul de clasa a IX-a. Încercaţi să rezolvaţi problemele în ordinea propusă (gradual). Pentru a obţine o pregătire minimă este necesar să rezolvaţi prima treime a problemelor din fiecare capitol. Pentru a obţine o pregătire medie trebuie să rezolvaţi şi a doua treime din problemele propuse. Dacă veţi reuşi să rezolvaţi toate problemele înseamnă că această disciplină nu are secrete pentru voi. În cazul în care nu reuşiţi să rezolvaţi o problemă, amânaţi o zi sau două şi apoi încercaţi din nou. Dacă nici în acest caz nu reuşiţi, citiţi rezolvarea, încercaţi să înţelegeţi această rezolvare şi după un timp (câteva zile) încercaţi să rezolvaţi singuri problema.

Problemele cu steluţă „*" se adresează elevilor cu trei ore de studiu pe săptămână, dar pot fi rezolvate şi de ceilalţi elevi, dacă profesorul a predat acea materie. Unele capitole cu caracter facultativ (de exemplu: mişcarea rectilinie uniform variată, mişcarea sub acţiunea greutăţii, impulsul punctului material, etc.) se adresează elevilor care doresc să cunoasă foarte bine această disciplină. Este bine ca fiecare elev să fie capabil să rezolve cel puţin problemele din materia obligatorie.

În calcule se consideră $\sqrt{2}=1,41$, $\sqrt{3}=1,73$, $\pi=3,14$ şi acceleraţia gravitaţională $g = 10$ m/s$^2$.

În speranţa că v-am venit în ajutor, vă urez baftă!

Mihaela Chiriţă

# Cuprins

# 1. Optică geometrică

## 1.1. Principiile opticii geometrice, reflexie, refracţie

**1.** Umbra unui om cu înălţimea $h$=1,73 m este de $d$=1 m. Să se afle unghiul sub care cad razele de lumină pe Pământ.

**2.** Într-o zi însorită un par înfipt vertical, cu înălţimea $h$=1 m deasupra Pământului, formează o umbră cu lungimea $\ell$=25 cm. Care este lungimea umbrei unei persoane cu înălţimea $H$=1,8 m?

**3.** Un om porneşte de sub un felinar aflat la o înăţime de $h$=8 m într-o mişcare rectilinie uniformă cu viteza $v$=1 m/s. Omul are înălţimea de $h_0$=1,8 m. Cu ce viteză se deplasează umbra omului?

**4.** Flacăra unei lumânări cu înălţimea $h$=20 cm arde uniform cu viteza $v$=1 cm/min. Iniţial umbra flăcării se află la distanţa $\ell$=10 cm de lumânare. Cu ce viteză se deplasează umbra flăcării?

**5.** Într-o cameră întunecoasă se află pe podea o sursă de lumină punctiformă. La $h$=50 cm de sursă este aşezată o fantă pătratică cu latura de $\ell$=10 cm decupată într-un carton, astfel încât centrul său de greutate se află pe verticala sursei. Să se afle latura petei luminoase obţinute pe tavanul aflat la $H$=2,5 m de podea.

**6.** O lampă considerată punctiformă este acoperită în partea superioară şi se află într-o cameră întunecoasă la distanţa $h$=25 cm de o oglindă plană circulară cu raza $r$=10 cm, pe verticala centrului oglinzii. Să se afle raza petei luminoase care se formează pe tavanul aflat la distanţa $H$=2,5 m de oglindă.

**7.** Fie o oglindă plană. Să se afle:
**a.** unghiul cu care se roteşte raza reflectată în jurul axei, dacă pe oglinda plană cade o rază sub un unghi de incidenţă $i$, iar oglinda se roteşte cu unghiul $\alpha$ în jurul unei axe oarecare
**b.** înălţimea faţă de podea a punctului în care raza de lumină cade pe oglindă, dacă raza de lumină pătrunde prin fereastra unei încăperi întunecoase la înălţimea $h$=1,5 m de podea şi se reflectă pe oglinda aflată pe peretele opus ferestrei formând apoi o pată luminoasă la mijlocul podelei
**c.** unghiul şi sensul în care se roteşte imaginea obiectului faţă de noua poziţie a obiectului, dacă obiectul aflat în faţa unei oglinzi plane se roteşte cu unghiul $\alpha$=30°
**d.** viteza cu care se deplasează imaginea faţă de obiect, dacă o persoană se apropie cu viteza $v$=4 m/s de un oglinda plană verticală

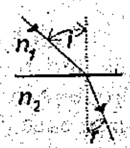
**8.** Două oglinzi plane formează între ele un unghi $\alpha$. Să se afle:
**a.** unghiul cu care va fi deviată o rază de lumină în urma reflexiei succesive pe cele două oglinzi
**b.** numărul imaginilor unui obiect luminos punctiform aşezat între cele două oglinzi plane care se formează datorită reflexiilor succesive pe ele

**c.** numărul imaginilor care se formează în cazul **b.**, dacă unghiul dintre oglinzi este $\alpha$=15⁰

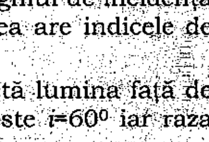
**9.** Un om cu înălţimea $H$=1,8 m se fotografiază printr-o oglindă plană paralelă cu el pe un perete vertical. Distanţa dintre om şi oglindă este $d$=60 cm, înălţimea oglinzii $h$=60 cm, iar aparatul de fotografiat se află la om la jumătatea înălţimii lui, faţă în faţă cu centrul oglinzii. Neglijând distanţa de la ochi la creştet, să se afle:
**a.** cât la sută din înălţimea omului apare pe fotografia lui?
**b.** distanţa faţă de perete la care se află cel mai apropiat punct de pe podea pe care îl poate vedea omul
**c.** înălţimea minimă a oglinzii pentru ca omul să se poată vedea în întregime, dacă distanţa de la creştet la ochi este $h_1$=10 cm

**10.** Pe o oglindă sferică concavă cu raza $R$=5 cm cad două raze de lumină paralele cu axul optic principal: una trece la distanţa $h_1$=0,5 cm de ax, iar cealaltă la $h_2$=3 cm. Razele se reflectă pe oglindă. Să se afle:
**a.** distanţa măsurată faţă de vârful oglinzii unde prima rază taie axul optic principal
**b.** distanţa măsurată faţă de vârful oglinzii unde a doua rază taie axul optic principal
**c.** distanţa între punctele în care aceste raze intersectează axul optic principal

**11.** O rază de lumină care cade pe suprafaţa de separaţie dintre două medii optice transparente se propagă dintr-un mediu în alt mediu ca în figură. Să se afle:




**a.** indicele de refracţie relativ al celui de-al doilea mediu faţă de primul mediu, dacă unghiul de incidenţă de incidenţă este $i$=45⁰ iar cel de refracţie este $r$=30⁰
**b.** unghiul dintre raza refractată şi raza reflectată, dacă unghiul de incidenţă de incidenţă este $i$=45⁰, primul mediu este aer iar al doilea are indicele de refracţie $n=\sqrt{2}$
**c.** indicele de refracţie relativ al mediului în care se refractă lumina faţă de mediul din care vine lumina, dacă unghiul de incidenţă este $i$=60⁰ iar raza reflectată este perpendiculară pe raza refractată
**d.** indicele de refracţie al celui de-al doilea mediu, dacă primul mediu are indicele de refracţie $n_1$=3/2 iar graficul alăturat reprezintă dependenţa sin$i$=$f$(sin$r$) la trecerea unei raze de lumină dintr-un mediu optic în alt mediu optic

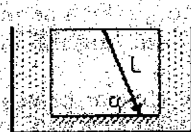



**12.** Pe partea inferioară a unei plăci din sticlă de grosime $d$=3,46 cm şi indice de refracţie $n$=1,73 se află o sursă de lumină punctiformă $S$. O rază de lumină porneşte de la sursa $S$ şi formează cu faţa (2) în punctul $P$ un unghi $\alpha$=60⁰ ca în desenul alăturat. Placa este situată în aer. Să se afle:

**a.** reprezentaţi mersul razei de lumină care ajunge la un observator plasat în aer deasupra feţei (2) a plăcii
**b.** unghiul de refracţie la ieşirea în aer a razei de lumină
**c.** distanţa de la punctul $O$ până la punctul $P$

**13.** O rază de lumină pătrunde din aer într-un lichid cu indicele de refracţie $n$=4/3, sub un unghi de incidenţă $i$ astfel că sin$i$=2/3. Lichidul se află într-un vas suficiet de larg având fundul argintat, ca în figura alăturată. Să se afle:
**a.** unghiul de refracţie în punctul de incidenţă
**b.** unghiul format de direcţia razei de lumină care iese din lichid (după reflexia pe fundul vasului) cu direcţia razei incidente, dacă unghiul de incidenţă la trecerea luminii din aer în lichid ar fi $i$=60$^0$
**c.** unghiul de incidenţă $i$, dacă sinusul unghiului de refracţie la intrarea luminii în lichid ar fi sin$r$=3/4

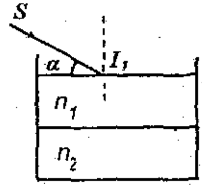

**14.** Un cub de sticlă la care una dintre feţe este o oglindă plană este introdus într-un vas cu apă ($n_a$=4/3) astfel încât faţa reflectătoare să se afle pe fundul vasului, ca în figură. O rază de lumină $L$ se propagă în sticlă, se reflectă pe oglindă şi întâlneşte faţa laterală a cubului. Se constată că, mărind treptat unghiul razei faţă de oglindă ($\alpha$), începând de la $\alpha_{min}$=60$^0$ lumina nu mai intră în apă deşi întâlneşte faţa laterală a cubului. Să se afle:
**a.** mersul razelor de lumină prin dispozitiv pentru $\alpha$<60$^0$
**b.** indicele de refracţie al sticlei
**c.** noua valoare minimă a sinusului unghiului $\alpha$ pentru care raza de lumină nu iese din cub prin faţa laterală, daca apa s-ar scoate din vas




**15.** Fie o suprafaţă de separaţie dintre aer şi o soluţie de argint coloidal plană şi orizontală. Soluţia are indicele de refracţie $n$=1,4. Se utilizează o rază a unui fasciculul laser care trece prin soluţie. Soluţia este transparentă pentru raza fasciculului laser. Să se afle:
**a.** unghiurile de reflexie şi de refracţie, dacă raza trece din aer în soluţie perpendicular pe suprafaţa de separare
**b.** sinusul unghiului de incidenţă corespunzător unui unghi de refracţie de 90$^0$, în cazul în care raza trece din soluţie în aer
**c.** sinusul unghiului de incidenţă, dacă raza trece din aer în soluţie şi cosinusul unghiului de refracţie este 0,80
**d.** ce se întâmplă cu razele laser care pleacă din soluţie şi cad pe suprafaţa de separare sub unghiuri de incidenţă $x$ pentru care tg$x$>1,2

**16.** O rază de lumină este incidentă sub un unghi $i$=45$^0$ din aer pe o lamă cu feţe plan paralele de grosime $h$=1,5 cm şi indicele de refracţie $n=\sqrt{2}$. Ştiind sin15$^0$=0,26. Să se afle:
**a.** unghiul de refracţie al razei de lumină în lamă
**b.** distanţa dintre direcţia razei incidente şi direcţia razei emergente din lamă

**c.** distanța dintre punctul de intrare a razei în lamă și punctul de ieșire a razei din lamă, dacă fața inferioară a lamei se arginteazã




**17.** Într-o cuvă din sticlă ($n_2$=1,5) se toarnă apă ($n_1$=1,33). Grosimea stratului de apă este egală cu grosimea fundului cuvei, care constituie o lamă cu fețe plan-paralele. O rază de lumină $SI_1$ sosește din aer și formează un unghi $\alpha$=30⁰ cu suprafața liberă a apei din cuvă, ca în figura alăturată. Să se afle:

**a.** sinusul unghiului de refracție în punctul de incidență

**b.** unghiul de emergență al razei la ieșirea din cuvă prin fața inferioară

**c.** unghiul față de verticală sub care se propagă lumina în sticla flint, dacă cuva se așază pe o lamă orizontală din sticlă flint cu indicele de refracție $n_3$=1,73

**18.** O plăcuță cu suprafețele plan-paralele aflată în aer este formată din trei regiuni plane și paralele cu fețele plăcuței, cu indicii de refracție $n_1=\sqrt{2}$, $n_2=n_1/k$, $n_3=n_2/k$, unde $k$ este o constantă. Să se afle:

**a.** unghiul de refracție al razei în prima regiune a plăcuței, dacă pe fața ei superioară cade o rază de lumină sub un unghi de incidență $i$=45⁰

**b.** constanta $k$, dacă în regiunea a doua raza pătrunde sub unghiul $r_2$=60⁰

**c.** indicelele de refracție $n_0$ al mediului înconjurător în care se introduce plăcuța dacă se produce o reflexie totală pe suprafața ce separă regiunile 2 și 3, dacă unghiul de incidență pe plăcuță este $i$=15⁰(sin15⁰=0,26)

**19.** Un om privește o piatră aflată pe fundul unui bazin de înălțime $h$=4 m plin cu apă sub un unghi de incidență $i$=60⁰. Indicele de refracție al apei este $n$=4/3. Să se afle:

**a.** poziția imaginii pietrei față de suprafața apei

**b.** distanța dintre piatră și imaginea ei

**c.** poziția imaginii pietrei față de suprafața dacă omul privește normal pe suprafața apei

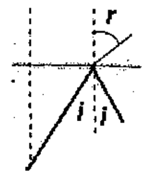
**20.** Un scafandru stă în picioare într-un bazin în care adâncimea este de $h$=2,4 m. Indicele de refracție al apei este $n$=4/3. Ochii scafandrului sunt la înălțimea $h'$=1,8 m față de fundul bazinului. În aer pe aceeași verticală cu scafandrul este un observator ai cărui ochi se află la înălțimea $h_1$=48 cm față de apă. Privind către suprafața apei scafandrul vede ca într-o oglindă obiectele de pe fundul bazinului. El observă că imaginile obiectelor se văd mai intens decât cele ale obiectelor apropiate. Să se afle:

**a.** înălțimea față de suprafața apei la care vede scafandrul ochii observatorului

**b.** distanța dintre observator și adâncimea la care vede observatorul ochii scafandrului

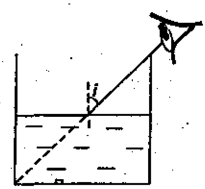
**c.** distanța minimă măsurată pe orizontală dintre scafandru și obiectele a căror imagine este intensă

**21.** O sursă de lumină de mici dimensiuni se află la $h$=1,2 m sub nivelul lichidului transparent dintr-un bazin. Dacă sursa este privită din afara bazinului, pe verticala ce trece prin aceasta, imaginea se observă la adâncimea $H$=90 cm față de suprafața plană a lichidului. Dacă observarea se face în lungul unei drepte înclinate față de verticală cu unghiul $r$ pentru care $\sin r$=0,8, se poate constata că raza care a suferit reflexia pe suprafața lichidului, revine în lichid sub un unghi $i$ față de verticală ca în figură. Să se afle:

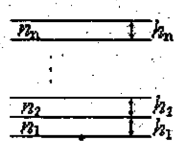



**a.** indicele de refracție al lichidului
**b.** sinusul unghiului dintre raza reflectată și verticală
**c.** raza cercului luminos de la suprafața apei cu centrul pe verticala sursei de lumină

**22.** Un vas are înălțimea $h$=20 cm. Un copil privește o monedă la marginea vasului sub un unghi de incidență $i$=30⁰, ca în figură și nu o vede. Turnând apă în vas, copilul vede moneda când nivelul apei a ajuns la jumătatea vasului. Indicele de refracție al apei este $n$=4/3. Să se afle:
**a.** distanța monedei față de marginea vasului
**b.** lărgimea unui fasciculul în apă, dacă în aer lărgimea sa este $d_{aer}$=4 cm și acesta cade pe suprafața apei sub un unghi de incidență $i$=30⁰
**c.** distanța dintre punctul unde va atinge un bețișor fundul vasului și monedă, dacă acesta este introdus de copil sub un unghi de $\alpha$=60⁰ față de suprafața apei, cu scopul de a atinge moneda



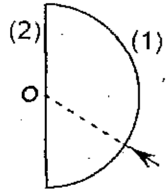

**23.** În fața unei lame de sticlă cu fețe plan-paralele se așază un obiect. Lama are grosimea $h$=3 cm și indicele de refracție $n$=1,5. Să se afle:
**a.** distanța dintre imagine și obiect
**b.** poziția imaginii obiectului față de suprafața superioară a lamei, dacă obiectul luminos punctiform se află pe marginea inferioară a lamei
**c.** poziția imaginii unui punct luminos față de fața superioară, a unui sistem format din $n$ lame cu fețe plan paralele și de grosimi $h_1$, $h_2$,...$h_n$ și indici de refracție $n_1$, $n_2$,...$n_n$ format ca în figura alăturată, dacă punctul luminos se află pe baza inferioară a ultimei fețe a sistemului



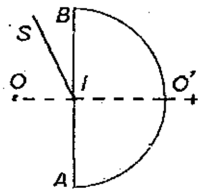

**24.** Pe suprafața plană a unei fibre optice de diametru $d$=2 cm si indice de refractie $n=\sqrt{2}$, cade o rază de lumină sub unghiul de incidență $i$=45⁰, care intră pe axul optic. Să se afle:
**a.** unghiul de refracție
**b.** unghiul de incidență pe suprafața cilindrică
**c.** distanța străbătută de raza de lumină de-a lungul fibrei optice după $N$=20 reflexii pe suprafața cilindrică

**25.** Un semicilindru aflat în aer este confecționat din sticlă transparentă cu indicele de refracție $n$=1,41. O rază de lumină monocromatică, care se

propagă într-un plan perpendicular pe axa cilindrului, ajunge pe suprafaţa cilindrică (1) şi apoi în punctul $O$ situat pe axa cilindrului ca în figura alăturată. Raza de lumină care iese din semicilindru prin suprafaţa plană (2) a acestuia formează cu normala la suprafaţă unghiul $r_2$=45°. Să se afle:
**a.** unghiul $r_1$ sub care se refractă raza de lumină la traversarea suprafeţei (1)
**b.** unghiul $\alpha$ dintre raza incidentă pe suprafaţa (2) şi cea reflectată pe aceeaşi suprafaţă
**c.** unghiul de incidenţă $i_4$ pe suprafaţa (2), dacă raza de lumină este deplasată paralel cu ea însăşi până într-o poziţie în care raza refractată prin suprafaţa (2) este de-a lungul acestei suprafeţe
**d.** mersul razei de lumină prin semicilindru în condiţiile punctului **c.**




**26.** O rază de lumină monocromatică, $SI$, soseşte din aer sub un unghi de 30° faţă de suprafaţa plană $AB$ a unui semicilindru din sticlă cu indicele de refracţie $n=\sqrt{3}$ şi raza $R$=5 cm, ca în figura alăturată. Punctul de incidenţă $I$ este situat la mijlocul segmentului $AB$. Să se afle:




**a.** unghiul de refracţie în punctul $I$ şi unghiul de refracţie a luminii la trecerea din sticlă în aer
**b.** unghiul de refracţie a luminii la trecerea din sticlă în aer, dacă într-un alt aranjament raza de lumină cade normal pe faţa $AB$ a semicilindrului, la distanţa $h$=2,5 cm de axa $OO'$
**c.** distanţa faţă de suprafaţa plană a semicilindrului la care raza de lumină transmisă va intersecta axa optică $OO'$ în condiţiile punctului **b.**

**27.** Un semicilindru este confecţionat din sticlă cu indicele de refracţie $n=\sqrt{2}$. Pe faţa plană cad raze de lumină sub un unghi $i$=45°. Razele de lumină se află într-un plan perpendicular pe axa cilindrului. Să se afle:
**a.** unghiul sub care intră razele în semicilindru
**b.** unghiul limită la trecerea razelor din semicilindru în aer
**c.** porţiunea suprafeţei cilindrice pe care ies razele de lumină

**28.** În imediata apropiere a suprafeţei unei sfere transparente şi în stânga centrului se află un izvor luminos punctiform. Raza sferei este $R$=10 cm şi indicele de refracţie al materialului sferei este $n$=2. Să se afle:
**a.** unghiul limită la trecerea razei din sferă în aer
**b.** distanţa de la imaginea punctiformă a izvorului luminos faţă de obiect
**c.** distanţa faţă de centrul sferei la care raza fasciculului emergent din sferă, în dreapta centrului acesteia, este egală cu dublul razei sferei

**29.** O prismă optică al cărei indice de refracţie relativ faţă de aer este egal cu $n=\sqrt{3}$ are secţiunea principală transversală sub forma unui triunghi echilateral. Să se afle:
**a.** unghiul de incidenţă la care apare deviaţia minimă

**b.** unghiul de deviație minimă
**c.** indicele de refracție al unui mediu în care trebuie introdusă prisma dacă o rază de lumină care cade perpendicular pe o muchie a prismei părăsește prisma de-a lungul celeilalte

**30.** Secțiunea dreaptă a unei prisme acoperiș este un triunghi echilateral *ABC*. Pe fața *AB* a prismei cade o rază de lumină sub unghiul de incidență $i=60^0$ corespunzător condiției de deviație minimă. Considerând că raza incidentă se proapagă în aer sub unghiul de incidență corespunzător deviației minime, se argintează fața *AC* a prismei și se așază prisma *ABC* cu baza în contact cu baza *BC* a unei prisme isoscele *BCD*, dreptunghiulare ($BDC=90^0$), al cărei indice de refracție este egal cu $n_2=\sqrt{3/2}$. Să se afle:
**a.** indicele de refracție al prismei *ABC*
**b.** direcția după care iese raza de lumină din ansamblul celor două prisme, după argintarea feței *AC*
**c.** mersul razelor de lumină prin ansamblul prismelor

**31.** O prismă are indicele de refracție $n=2$. Să se afle:
**a.** pentru ce valori ale unghiului prismei orice rază de lumină incidentă pe prima față a prismei emerge din prismă?
**b.** pentru ce valori ale unghiului prismei nici o rază de lumină incidentă pe prima față a prismei nu emerge din prismă?

## 1.2. Lentile, asociații de lentile, sisteme de lentile

**1.** O lentilă biconvexă simetrică din sticlă ($n=1,5$) cu distanța focală $f=30$ cm, formează imaginea unui obiect așezat la 45 cm de ea. Să se afle:
**a.** convergența lentilei
**b.** poziția imaginii față de lentilă și natura acesteia
**c.** mărirea liniară transversală
**d.** modulul razei de curbură a unei suprafețe sferice

**2.** O lentilă convergentă are distanța focală $f=20$ cm. Un obiect este așezat față de lentilă la distanța 40 cm, iar apoi se apropie cu 10 cm de lentilă. Imaginea se prinde pe un ecran așezat corespunzător. Să se afle:
**a.** unde trebuie așezat inițial ecranul față de lentilă?
**b.** cu cât și în ce sens se va deplasa ecranul când obiectul se apropie?
**c.** de câte ori se modifică dimensiunea liniară transversală a noii imagini față de prima imagine?

**3.** O lentilă subțire biconvexă simetrică cu raza $|R|=20$ cm, confecționată din sticlă, formează o imagine reală și de 3 ori mai mare decât obiectul. Distanța dintre obiectul așezat perpendicular pe axul optic principal și imaginea sa este de 80 cm. Să se afle:
**a.** distanța de la lentilă la imagine
**b.** distanța focală a lentilei
**c.** indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila

**4.** În graficul din figura 1 este reprezentată convergenţa unei lentile plan-convexe în funcţie de valoarea razei de curbură a feţei convexe. În faţa lentilei se aşază un obiect la distanţa de 30 cm de aceasta. Să se afle:
**a.** indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată lentila
**b.** poziţia imaginii faţă de lentilă şi natura acesteia dacă $R$=30 cm
**c.** mărirea liniară transversală în condiţiile de la punctul **b.**

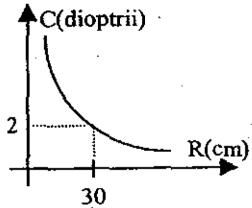


Fig. 1

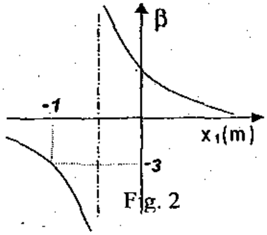


Fig. 2

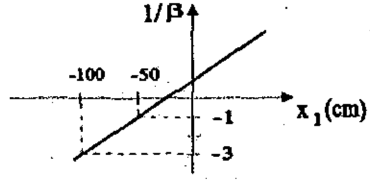


Fig. 3

**5.** Graficul din figura 2 reprezintă dependenţa măririi liniare transversale de coordonata obiectului în cazul imaginii formate printr-o lentilă subţire. Să se afle:
**a.** distanţa focală a lentilei
**b.** distanţa focală a lentilei dacă aceasta se introduce într-un mediu cu indicele de refracţie egal cu cel al lentilei
**c.** mărirea liniară transversală a lentilei dacă $x_1$=−2,25 m

**6.** Pentru o lentilă convergentă subţire se reprezintă grafic inversul măririi liniare transversale $1/\beta$ în funcţie de coordonata $x_1$ a obiectului ca în figura 3. Lentila este plan-convexă cu raza de curbură a feţei convexe de 15 cm. Un obiect se aşază la 75 cm în faţa lentilei. Să se afle:
**a.** distanţa focală a lentilei
**b.** mărirea liniară transversală a lentilei
**c.** indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată lentila

**7.** O lentilă plan-convexă care formează pe un ecran imaginea unui obiect are distanţa focală $f$=7,5 cm şi raza feţei convexe de $R$=4,5 cm. Să se afle:
**a.** indicele de refracţie din care este confecţionată lentila
**b.** distanţa obiect-ecran în cazul în care imaginea este de 3 ori mai mică decât obiectul
**c.** convergenţa lentilei, dacă aceasta se scufundă într-un mediu cu indice de refracţie $n_a$=4/3

**8.** O lentilă convex-concavă (menisc convergent) are razele feţelor de curbură 3 cm şi 5 cm. Mediul din care este confecţionată lentila are indicele de refracţie $n$=1,5. În faţa lentilei se aşază un obiect luminos la distanţa 45 cm de aceasta şi cu înălţimea $y_1$=4 cm. Să se afle:
**a.** distanţa focală a lentilei
**b.** poziţia imaginii faţă de lentilă
**c.** înălţimea $y_2$ a imaginii

**9.** Pentru o lentilă convergentă valoarea măririi unui obiect este $\beta_1=-4$. Dacă obiectul este îndepărtat cu distanța $d=10$ cm, valoarea măririi devine $\beta_2=-2$. Imaginile se prind pe un ecran. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei
**b.** distanța minimă dintre obiect şi imaginea sa reală
**c.** mărirea liniară transversală în cazul distanței minime obiect-imagine

**10.** O lentilă subțire biconvexă simetrică este confecționată dintr-un material cu indicele de refracție $n=1,5$. Un obiect cu înălțimea $y_1=3$ cm, situat la distanța $-x_1=30$ cm în fața lentilei, perpendicular pe axa optică principală, îşi formează imaginea prin lentilă la o distanță $x_2=20$ cm față de lentilă. Se introduce apoi lentila într-o cuvă cu pereți transparenți subțiri, plani şi paraleli, umplută cu lichid şi de grosime egală cu a lentilei. Pentru ca imaginea obiectului să se formeze în acelaşi punct, pe axa optică principală, trebuie ca obiectul să fie îndepărtat foarte mult de sistem. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei în aer
**b.** înălțimea imaginii
**c.** convergența sistemului optic obținut prin introducerea lentilei în cuvă
**d.** razele de curbură ale fețelor convexe ale lentilei

**11.** Un obiect cu înălțimea $y_1=5$ cm este aşezat în fața unei lentile divergente cu distanța focală $f=-7$ cm la distanța de 28 cm de aceasta. Să se afle:
**a.** convergența lentilei
**b.** poziția imaginii față de lentilă şi natura acesteia
**c.** înălțimea $y_2$ a imaginii

**12.** Distanța focală a unei lentile subțiri divergente este $f=-40$ cm. Imaginea virtuală a unui obiect real situat perpendicular pe axa optică are înălțimea egală cu jumătate din înălțimea obiectului. Să se afle:
**a.** valoarea măririi liniare transversale
**b.** distanța la care trebuie aşezat obiectul în fața lentilei
**c.** distanța față de lentilă la care s-ar forma imaginea, dacă obiectul s-ar îndepărta de lentilă cu 20 cm

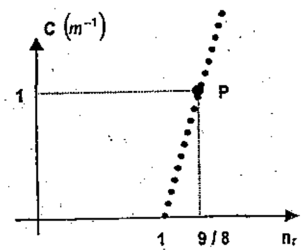
**13.** Cu ajutorul unei lentile plan-concave cu convergența $C=-5$ dioptrii se obține o imagine virtuală situată la distanța $d=18$ cm de obiect. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentile
**b.** poziția obiectul față de lentilă
**c.** raza feței concave, dacă indicele de refracție al lentilei este $n=1,5$

**14.** Aşezăm în fața unei lentile biconcave simetrice cu distanța focală $f=-30$ cm un obiect, astfel încât imaginea acestuia este de 5 ori mai mică decât obiectul. Lentila este confecționată din sticlă cu indicele de refracție $n=1,5$. Să se afle:
**a.** poziția obiectului față de lentilă
**b.** raza feței concave
**c.** distanța focală a lentilei, dacă aceasta se scufundă într-un mediu optic transparent cu indicele de refracție $n_l=1,6$

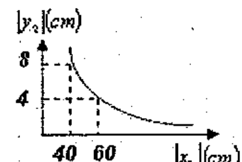
**15.** O lentilă subțire biconcavă cu razele de curbură de valori egale cu 20 cm are indicele de refracție $n$=1,5. În fața acestei lentile, la o distanță de 50 cm este plasat, perpendicular pe axa optică principală, un obiect liniar cu înălțimea de 10 cm. Să se afle:
**a.** convergența lentilei
**b.** distanța la care se formează imaginea față de lentilă
**c.** distanța dintre obiect și noua sa imagine dacă lentila este deplasată cu 50 cm, îndepărtându-se de obiect

**16.** O lentilă divergentă convex-cocavă are razele fețelor de 30 cm, respectiv 60 cm și este confecționată din sticlă cu indicele de refracție $n$=1,5. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei
**b.** poziția imaginii față de lentilă a unui obiect așezat la 60 cm de lentilă
**c.** distanța focală a lentilei, dacă aceasta se intoduce într-un mediu transparent cu indicele de refracție $n'=1{,}8$

**17.** Convergența unei lentile biconvexe simetrice variază atunci când este plasată în medii transparente diferite, în funcție de indicele de refracție relativ $n_r$ al lentilei în raport cu mediul, conform graficului alăturat Se cunoaște că lentila este confecționată din sticlă cu indicele de refracție $n$=1,5. Să se afle:
**a.** valoarea razelor de curbură ale fețelor lentilei
**b.** poziția imaginii față de lentilă a unui obiect aflat la distanța de 50 cm de aceasta
**c.** poziția obiectului față de lentilă, dacă lentila formează pentru acesta o imagine reală și de două ori mai mare decât obiectul

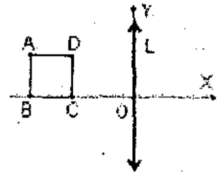



**18.** În graficul din figură este redată dependența modulului imaginii unui obiect obținut cu ajutorul unei lentile convergente biconvexe, în funcție de modulul distanței dintre obiect și centrul optic al lentilei. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei
**b.** mărimea liniară a obiectului
**c.** indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila, dacă aceasta are raza de curbură cea mai mică de 15 cm, iar cealaltă rază de curbură este de trei ori mai mare



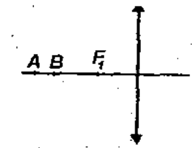

**19.** O lentilă convergentă cu distanța focală $f$ se află la distanța $2f$ de un obiect real. Să se afle:
**a.** raportul măririlor liniare transversale ale imaginilor, dacă lentila se apropie cu $f/2$ de obiect
**b.** raportul mărimilor liniare transversale ale imaginilor, dacă lentila se depărtează cu $f$ de obiect
**c.** poziția imaginii finale a obiectului punctiform, dacă se rotește lentila în sens orar cu unghiul $\alpha=60^0$

**20.** Un obiect luminos *ABCD* de forma unui pătrat este situat ca în figură. Lentila are distanța focală $f$=4 cm şi diametrul $d$=10 cm. Punctele $B$ şi $C$ sunt pe axa optică principală a lentilei. $A_1$, $B_1$, $C_1$ şi $D_1$ reprezintă imaginile punctelor $A$, $B$, $C$ şi $D$. Într-un sistem de axe $XOY$ punctul $A_1$ are coordonatele (8, −2) cm. Să se afle:




**a.** coordonatele punctului $A$
**b.** mărimea segmentului $B_1C_1$
**c.** mărimea petei luminoase care se obţine pe un ecran aşezat în planul focal imagine al lentilei atunci când în punctul $A$ se aşază o sursă punctiformă de lumină

**21.** Un segment luminos *AB* este aşezat pe axa optică principală a unei lentile cu distanţa focală în aer de 20 cm ca în figură. Mijlocul segmentului se află la 30 cm de lentilă, iar lungimea lui este 4 cm. Să se afle:




**a.** lungimea imaginii segmentului *AB*
**b.** mărirea longitudinală
**c.** relația dintre mărirea longitudinală şi măririle transversale pentru obiectele transversale aflate în punctele $A$ şi $B$

**22.** Cu ajutorul unei lentile subţiri convergente de sticlă ($n$=3/2) s-a obţinut imaginea reală a unui obiect, imginea fiind situată la o distanță de 10 cm de lentilă. După ce obiectul şi lentila au fost scufundate în apă fără a schimba distanța dintre ele s-a obținut imaginea la o distanța de 60 cm de lentilă. Dacă indicele de refracție al apei este $n_a$=4/3 să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei în aer
**b.** poziția obiectului față de lentilă
**c.** distanța focală a lentilei în apă

**23.** O lentilă subţire convex-concavă (menisc convergent) din sticlă ($n$=1,5), situată în aer are razele fețelor de curbură 4 cm şi respectiv 5 cm. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei
**b.** distanța minimă dintre un obiect şi un ecran, astfel încât imaginea obiectului obținută pe ecran să fie reală
**c.** cu cât trebuie deplasat obiectul față de lentilă şi în ce sens pentru a obține o imagine reală pe ecran, dacă lentila rămâne fixă şi ecranul se depărtează cu $d$=10 cm față de poziția anterioară de la punctul **b.**?

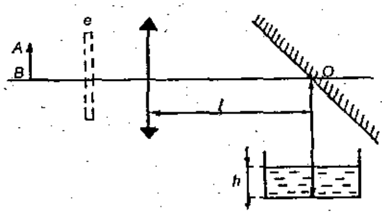
**24.** O lentilă plan-convexă din sticlă cu indicele de refracție $n$=1,5 are convergența $C$=2 dioptrii. La distanța 60 cm în fața lentilei se află un obiect luminos. Să se afle:
**a.** raza de curbură a lentilei
**b.** distanța obiect-ecran
**c.** în ce sens şi cu cât trebuie deplasată lentila pentru a se obține o nouă imagine pe ecran, dacă obiectul şi ecranul sunt la distanța de la punctul **b.**

**25.** Între un obiect real şi un ecran aflate la distanţa $d$ se constantă că se poate deplasa o lentilă convergentă cu distanţa focală $f<d/4$. Notăm cu $y_2=4$ cm şi $y_2'=9$ cm mărimile imaginilor clare obţinute pe ecran pentru două poziţii ale lentilei şi cu $D$ distanţa dintre cele două poziţii ale lentilei pentru care pe ecran se obţin imaginile clare. Să se afle:
**a.** mărimea obiectului $y_1$
**b.** mărimile liniare transversale în cele două situaţii
**c.** raportul dimensiunilor corespunzătoare a celor două imagini $y_2'/y_2$ în funcţie de $d$ şi $D$

**26.** O lentilă subţire convergentă formează pe un ecran o imagine clară cu înălţimea $h_1=8$ cm a unui obiect aşezat perpendicular pe axa optică principală a lentilei. Menţinând obiectul şi ecranul fixe la distanţa $D=90$ cm unul de celălat, se apropie lentila de ecran şi se obţine o a doua imagine clară de înălţime $h_2=2$ cm a obiectului pe ecran. Să se afle:
**a.** înălţimea obiectului
**b.** măririle imaginilor în cele două situaţii
**c.** distanţa focală a lentilei

**27.** Imaginea reală a unui obiect cu înălţimea $y=3$ cm se formează pe un ecran situat la distanţa $D=1$ m de obiect. Se utilizează o lentilă subţire plan convexă cu raza de curbură a feţei convexe egală cu 10 cm. Se constată că există două poziţii posibile ale lentilei, distanţa dintre ele fiind egală cu $d=50$ cm pentru care pe ecran se formează imagini clare ale obiectului. Să se afle:
**a.** distanţa focală a lentilei
**b.** măririle imaginilor în cele două cazuri
**c.** indicele de refracţie al materialului lentilei

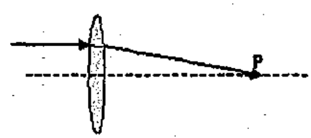
**28.** O lentilă subţire cu distanţa focală $f=30$ cm formează pentru un obiect aflat pe axa optică a lentilei şi în faţa ei o imagine reală la distanţa de 55 cm de lentilă. Să se afle:
**a.** poziţia obiectului faţă de lentilă
**b.** mărirea liniară transversală
**c.** grosimea unei lame cu feţele plan-paralele şi cu indicele de refracţie $n=1,5$ care aşezată perpendicular pe axa optică, între obiect şi lentilă, ar determina ca imaginea să fie egală cu obiectul




**29.** Un obiect rectiliniu este aşezat perpendicular pe axa optică principală a unei lentile subţiri cu distanţa focală $f=30$ cm astfel încât lentila formează o imagine reală de trei ori mai mare ca obiectul pe un ecran ca în figura alăturată. Să se afle:
**a.** poziţia obiectului faţă de lentilă
**b.** dacă aşezăm apoi o lamă cu feţe plan-paralele şi grosimea $e=9$ cm şi indicele de refracţie $n=1,8$, între obiect şi lentilă, în ce sens şi cu cât trebuie deplasat ecranul pentru a obţine din nou imaginea pe ecran?

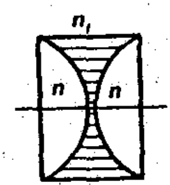
**c.** dacă în condițiile punctului **b.** așezăm o oglindă plană *O* în dreapta lentilei și care intersectează axul optic la distanța de 1 m de lentilă sub un unghi $\alpha=45^0$, la ce distanță de axa optică principală a lentilei se va forma imaginea și ce natură are aceasta?
**d.** unde trebuie să se găsească fundul unei cuve față de axul optic principal al lentilei, în condițiile de la punctul **c.**, dacă cuva conține un strat de apă cu adâncimea $h$=20 cm și indicele de refracție $n$=4/3 pentru ca imaginea finală să fie reală și plasată pe fundul cuvei

**30.** Un fascicul paralel de lumină, îngust, trece printr-o lentilă subțire biconvexă simetrică, din sticlă cu indicele de refracție $n$=1,5 și se strânge într-un punct *P* aflat în partea opusă a lentilei, la 20 cm de ea, ca în figura alăturată. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei
**b.** raza de curbură a unei suprafețe a lentilei
**c.** în ce sens se deplasează imaginea, dacă între lentilă și punctul *P* se interpune, perpendicular pe axa optică, o placă transparentă cu fețe plane și paralele, având indicele de refracție $n_1$=1,6 și grosimea $d$=2 cm?




**31.** Un obiect se află în fața unei lentile convergente subțiri din sticlă ($n$=1,5). Lentila este biconvexă și are razele fețelor de curbură 5 cm și respectiv 20 cm. Lentila formează pentru obiect o imagine care se prinde pe un ecran și care este de 4 ori mai mare decât obiectul. Să se afle:
**a.** poziția obiectului față de ecran
**b.** cu cât și în ce sens trebuie deplasat ecranul, dacă între obiect și lentilă se așază o lamă cu fețe plan-paralele cu grosimea $e$=2,25 cm și indicele de refracție $n_l$=1,8
**c.** poziția imaginii față de lentila de la punctul **a.** și care este natura imaginii, dacă din planul focal imagine al lentilei se află un mediu transparent cu indicele de refracție $n$=1,6 care umple complet spațiul din spatele lentilei, în codițiile în care obiectul se află așezat ca la punctul **a.**

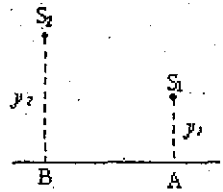
**32.** Două lentile plan-convexe identice, confecționate din sticlă, cu indicele de refracție $n$=1,5 și distanța focală $f$=60 cm, sunt centrate pe aceeași axă cu fețele curbe în contact ca în figură. Spațiul dintre ele se umple cu un lichid și se constată că sistemul astfel format are distanța focală $F$=1,62 m. Să se afle:
**a.** raza de curbură a feței convexe
**b.** indicele de refracție al lichidului
**c.** poziția unui obiect față de sistemul de lentile, dacă imaginea formată de acest sistem este reală și de două ori mai mare decât obiectul




**33.** Două lentile subțiri, biconvexe, identice, cu distanța focală $f$=20 cm și indicele de refracție $n$=1,5 sunt puse în contact. Se umple cu lichid intervalul rămas liber între cele două lentile și se obține astfel un sistem optic

convergent. Un obiect $y_1$=6 cm, aşezat la distanţa de 20 cm de sistem, îşi formează imaginea reală la distanţa de 60 cm de sistem. Să se afle:
**a.** distanţa focală a sistemului echivalent
**b.** mărimea imaginii obiectului
**c.** indicele de refracţie al lichidului.

**34.** Cu ajutorul unei lentile subţiri din sticlă situată în aer se obţine o imagine virtuală a sursei de lumină, ca în figura alăturată. Se cunosc $y_1$=5 cm, $y_2$=10 cm şi distanţa $AB$=50 cm. Indicele de refracţie al sticlei este $n$=1,5. Să se afle:




**a.** distanţa focală a lentilei
**b.** indicele de refracţie al unui lichid în care, dacă introducem lentila, distanţa ei focală creşte de două ori
**c.** distanţa focală a lentilei care alipită de prima lentilă face ca imaginea unui obiect real să devină virtuală şi de două ori mai mică, în condiţiile în care obiectul se menţine la aceeaşi distanţă faţă de prima lentilă

**35.** Imaginea reală a unui obiect cu înălţimea $h$=6 cm, plasat la distanţa de 90 cm de o lentilă subţire, aşezat perpendicular pe axa optică principală a acesteia, se formează la 45 cm de lentilă. Dacă alipim de prima lentilă o a doua lentilă, iar distanţa obiect-sistem optic rămâne neschimbată, imaginea reală a obiectului se va forma la 72 cm de sistemul celor două lentile alipite. Să se afle:
**a.** convergenţa primei lentile
**b.** distanţa focală a celei de a doua lentile
**c.** înălţimea imaginii formate de sistemul celor două lentile alipite

**36.** În faţa unei lentile subţiri este plasat, perpendicular pe axa optică principală, la 10 cm de lentilă, un obiect liniar. Imaginea formată prin lentilă este virtuală şi de cinci ori mai mare decât obiectul. Să se afle:
**a.** distanţa focală a lentilei
**b.** convergenţa lentilei
**c.** convergenţa celei de-a doua lentile, dacă noua imagine a obiectului este prinsă pe un ecran aflat la 40 cm de sistemul de lentile în situaţia în care fără a modifica poziţia obiectului şi a lentilei se lipeşte de prima lentilă o a doua lentilă subţire

**37.** Imaginea reală a unui obiect aşezat la distanţa de 60 cm în faţa unei lentile subţiri, perpendicular pe axa optică principală a lentilei, se formează la 15 cm de lentilă. Alipind de prima lentilă o a doua lentilă subţire, centrată pe aceeaşi axă optică principală, imaginea virtuală a aceluiaşi obiect aşezat la 60 cm de sistem se formează la 30 cm de acest sistem. Să se afle:
**a.** distanţa focală a primei lentilei
**b.** distanţa focală a sistemului format din cele două lentile
**c.** convergenţa celei de-a doua lentile
**d.** raportul dintre înălţimea imaginii formate de prima lentilă şi înălţimea imaginii formate de sistemul de lentile

**38.** Un sistem optic este format din patru lentile plan-convexe identice de sticlă cu indicele de refracţie $n$=1,5 având fiecare distanţa focală $f$=50 cm. Prima şi a doua, precum a treia şi a patra sunt aşezate cu feţele convexe în contact. Feţele plane ale lentilelor 2 si 3 sunt lipite. Se umple spaţiul dintre lentilele 1 şi 2 precum şi cel dintre 3 si 4 cu un lichid transparent cu indicele de refracţie $n'$=1,4. Să se afle:

**a.** convergenţa sistemului astfel format

**b.** indicele de refracţie al lichidului care umple spaţiul dintre lentilele de sticlă. dacă o rază de lumină care cade pe sistemul astfel format iese din sistem paralelă cu ea însăşi

**c.** convergenţa sistemului dacă se înlătură lichidul transparent dintre lentilele 1 şi 2 şi 3 şi 4

**39.** În faţa unei lentile biconvexe subţiri simetrică din sticlă cu indicele de refracţie $n$=1,5 este aşezat un obiect luminos rectiliniu perpendicular pe axa optică principală. Deplasând obiectul de-a lungul axei optice a lentilei se constată că distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D$=40 cm. Să se afle:

**a.** raza unei feţe a lentilei

**b.** distanţa minimă dintre obiect şi imaginea reală, dacă întreg sistemul se introduce în apă cu indicele de refracţie $n_a$=4/3

**c.** distanţa faţă de obiectul plasat la 30 cm în faţa lentilei la care se formează imaginea obiectului, dacă alături de prima lentilă lipită de de ea plasăm o a doua lentilă subţire convergentă cu distanţa focală $f_2$=15 cm în cazul în care sistemul se află în aer

**40.** Două lentile subţiri biconvexe identice, confecţionate din sticlă cu indicele de refracţie $n$=1,5 şi razele de curbură 20 cm sunt puse în contact coaxial. Spaţiul dintre lentile este umplut cu apă care are indicele de refracţie $n_a$=4/3. În faţa acestui sistem optic se plasează un obiect cu înălţimea $y$=10 cm la distanţa de 40 cm. Să se afle:

**a.** distanţa focală a ansamblului de lentile

**b.** distanţa dintre obiect şi imaginea acestuia prin sistem

**c.** înălţimea imaginii

**d.** distanţa faţă de sistem la care se formează imaginea dacă întregul sistem se introduce în apă păstrând distanţa obiect-sistem

**41.** Un obiect este plasat perpendicular pe axa optică principală a unei lentile subţiri $L_1$. Imaginea acestuia prin lentilă este reală, de două ori mai mică decât obiectul şi se formează la distanţa de 45 cm de centrul optic al lentilei $L_1$. Alipind de prima lentilă o a doua lentilă subţire, $L_2$, înălţimea imaginii obiectului rămas la aceeaşi distanţă faţă de lentila $L_1$, observată pe un ecran, este cu 20% mai mică decât înălţimea obiectului. Să se afle:

**a.** distanţa focală a lentilei $L_1$

**b.** convergenţa sistemului format din cele două lentile alipite

**c.** distanţa focală a lentilei $L_2$

**d.** înălţimea imaginii date de sistemul de lentile alipite, dacă înălţimea obiectului este $h$=10 mm

**42.** O lentilă plan-concavă are raza de curbură 10 cm şi indicele de refracţie $n$=1,5. La 20 cm în faţa ei se aşază un obiect înalt de 2 cm. Să se afle:
**a.** mărimea imaginii
**b.** poziţia şi mărimea imaginii în cazul în care se alătură lentilei o a doua lentilă identică având feţele plane în contact
**c.** distanţa focală a sistemului optic cu cele două lentile alipite cu feţele curbe în contact, dacă spaţiul dintre lentile se umple cu apă ($n_a$=4/3)

**43.** Două lentile convergente cu distanţele focale $f_1$=20 cm şi $f_2$=7,5 cm sunt aşezate coaxial la distanţa $d$=40 cm una de cealaltă. În stânga primei lentile se aşază un obiect cu înălţimea $y_1$=2 cm la 60 cm de aceasta. Să se afle:
**a.** poziţia imaginii finale faţă de cea de-a doua lentilă
**b.** mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
**c.** înălţimea imaginii obţinute cu ajutorul sistemului

**44.** Două lentile subţiri convergente $L_1$ şi $L_2$ au distanţele focale $f_1$=5 cm şi respectiv $f_2$=10 cm. Ele sunt aşezate coaxial. În faţa primei lentile $L_1$, la distanţa de 25 cm de centrul ei, se găseşte un obiect de înălţime 12 cm. Lentila $L_1$ formează imaginea acestui obiect la distanţa de 6 cm în faţa lentilei $L_2$. Să se afle:
**a.** distanţa dintre lentilele $L_1$ şi $L_2$
**b.** distanţa faţă de lentila $L_2$ la care se formează imaginea finală
**c.** înălţimea imaginii formate de sistemul de lentile

**45.** Un sistem optic este format din două lentile subţiri situate în aer la distanţa $d$=30 cm una de cealaltă. Perpendicular pe axul optic principal la 20 cm în faţa primei lentile se află un obiect liniar luminos. Prima lentilă produce o imagine reală, răsturnată şi la fel de mare ca obiectul. Lentila a doua are convergenţa $C_2$=−10 $m^{-1}$. Să se afle:
**a.** distanţa focală a primei lentile
**b.** poziţia imaginii finale faţă de lentila a doua
**c.** mărirea liniară transversală a sistemului de lentile

**46.** La distanţa de 30 cm de o lentilă convergentă cu convergenţa $C_1$=4 δ se aşază perpendicular pe axul optic un obiect liniar luminos cu înălţimea $y_1$=2 mm, iar imaginea se obţine pe un ecran aşezat într-o poziţie convenabilă. Menţinând obiectul şi lentila fixe, la distanţa de $d$=1,2 m de lentilă, către partea ecranului, se aşază o a doua lentilă divergentă cu convergenţa de $C_2$=−1,25 δ. Să se afle:
**a.** poziţia imaginii faţă de prima lentilă
**a.** deplasarea ecranului şi sensul pentru ca imaginea să se formeze pe ecran
**b.** natura imaginii şi mărimea ei

**47.** De o lentilă cu convergenţa $C_1$=10 δ se alipeşte central o a doua lentilă cu convergenţa $C_2$=−2 δ. În faţa primei lentile se aşază un obiect real la distanţa de 25 cm de ea. Să se afle:
**a.** natura celor două lentile şi distanţa focală a sistemului echivalent
**b.** poziţia imaginii faţă de sistemul echivalent şi natura imaginii

**c.** dacă lentila a doua se depărtează de prima lentilă $C_1$ cu $d$=20/3 cm, care este natura imaginii finale şi unde se formează faţă de lentila din dreapta

**48.** Două lentile subţiri cu convergenţele de $C_1$=10 m$^{-1}$ şi de $C_2$=−10 m$^{-1}$ sunt centrate pe aceeaşi axă la $d$=5 cm una de alta. Un obiect cu înălţimea $y_1$=4 cm este aşezat la 20 cm în faţa lentilei convergente. Să se afle:

**a.** convergenţa sistemului care s-ar forma prin alipirea celor două lentile
**b.** distanţa faţă de lentila convergentă la care se formează imaginea finală
**c.** înălţimea imaginii finale

**49.** Un obiect luminos se aşază perpendicular pe axa optică principală, la distanţa 75 cm în faţa unei lentile biconvexe din sticlă $L_1$, cu indice de refracţie $n$=1,45, ale cărei feţe au aceeaşi rază de curbură $R$. Lentila $L_1$ formează o imagine reală a obiectului, la distanţa $x_2$=1,5 m de lentilă. De partea opusă obiectului, la distanţa $d$=1,25 m faţă de lentila $L_1$, se aşază o lentilă divergentă $L_2$ cu distanţa focală $f_2$=−1 m. Cele două lentile au axa optică principală comună iar sistemul se află în aer. Să se afle:

**a.** distanţa focală a lentilei $L_1$
**b.** razele de curbură ale feţelor lentilei $L_1$
**c.** coordonata imaginii dată de sistem, măsurată faţă de lentila $L_2$

**50.** Un obiect cu înălţimea $y_1$=6 cm se aşază în faţa unei lentile convergente cu distanţa focală $f_1$=30 cm la 40 cm de aceasta. În spatele lentilei convergente se aşază coaxial cu ea şi la distanţa $d$=1 m o a doua lentilă convergentă cu distanţa focală $f_2$=60 cm. Să se afle:

**a.** poziţia imaginii faţă de lentila a doua şi natura acestei imagini
**b.** mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
**c.** mărimea imaginii finale

**51.** Folosind o lentilă convergentă subţire se obţine o imagine a unui obiect liniar cu mărimea $y_1$=10 cm aşezat perpendicular pe axa optică principală a lentilei. Distanţa dintre obiect şi imagine este $d$=48 cm, iar mărirea liniară $\beta$=3. Dacă după lentilă se aşază o altă lentilă subţire cu distanţa focală $f_2$=24 cm, la distanţa $d$=$f_2$ de prima lentilă, imaginea se modifică. Să se afle:

**a.** distanţa focală a primei lentilei
**b.** distanţa de la lentila a doua la imaginea finală
**c.** înălţimea imaginii formate de sistemul celor două lentile

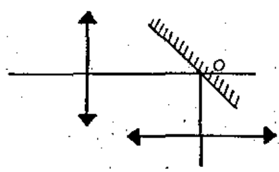
**52.** Un teleobiectiv este format din o lentilă divergentă cu convergenţa $C_1$=−10 δ şi o lentilă convergentă cu convergenţa $C_2$=8 δ aflate la distanţa $d$=7,5 cm una de cealaltă. În faţa lentilei divergente se aşază un obiect la distanţa de 30 cm. Să se afle:

**a.** distanţele focale ale celor două lentile
**b.** distanţa la care trebuie aşezată o peliculă fotografică faţă de lentila convergentă pentru ca imaginea să se formeze pe aceasta
**c.** să se realizeze mersul razelor de lumină şi să se precizeze care este mărirea liniară transversală a sistemului de lentile

**53.** Un sistem optic este format dintr-o lentilă divergentă şi o lentilă convergentă situate la distanţa $d$=40 cm una de cealată. Cele două lentile au distanţele focale în modul $|f|$=40 cm. Un obiect se aşază în faţa lentilei divergente la distanţa de 80 cm de aceasta. Să se afle:
**a.** distanţa de la lentila a doua la imaginea finală
**b.** mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
**c.** convergenţa sistemului obţinut prin alipirea lentilelor

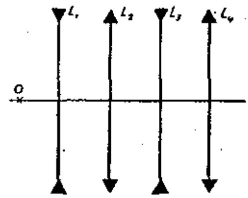
**54.** O lentilă subţire formează imaginea unui obiect cu înălţimea $y_1$=1 cm pe un ecran plasat la 20 cm de lentilă. Imaginea este de 4 ori mai mare decât obiectul. La mijlocul distanţei dintre această lentilă şi ecran se aşază o lentilă divergentă. Pentru a se obţine din nou imaginea clară, ecranul trebuie deplasat cu 20 cm. Să se afle:
**a.** convergenţa primei lentile
**b.** distanţa focală a lentilei divergente
**c.** înălţimea imaginii finale

**55.** O sursă de lumină punctiformă este plasată pe axa optică principală a unei lentile convergente subţiri cu convergenţa $C_1$=5 dioptrii la distanţa de 25 cm de centrul optic al lentilei. De cealaltă parte a lentilei, la distanţa 50 cm de centrul optic se află o oglindă plană înclinată cu un unghi $\alpha$=45$^0$ faţă de axa optică principală a lentilei cu convergenţa $C_1$. Pe direcţia perpendiculară pe axa optică a primei lentile se află la distanţa $d_2$=80 cm de punctul de intersecţie cu oglinda plană, o altă lentilă convergentă cu distanţa focală $f_2$=25 cm. Să se afle:
**a.** poziţia imaginii formate de lentila $L_1$
**b.** poziţia imaginii finale a sursei faţă de lentila $L_2$
**c.** mărirea liniară transversală a sistemului




**56.** Un obiect luminos liniar este fixat perpendicular pe un banc optic. Amplasând o lentilă convergentă la o distanţă de 4 cm de obiect, se obţine o imagine reală de trei ori mai mare decât obiectul. Înlocuind lentila convergentă cu o lentilă divergentă şi menţinând aceeaşi distanţă lentilă-obiect, se obţine o imagine virtuală de trei ori mai mică decât obiectul. Cu lentila convergentă aflată la 4 cm de obiect, se amplasează pe bancul optic şi lentila divergentă, la distanţa de 16 cm faţă de lentila convergentă. Astfel lumina provenită de la obiect trece succesiv prin cele două lentile. Să se afle:
**a.** distanţele focale ale celor două lentile
**b.** poziţia şi natura imaginii finale, precum şi mărirea liniară transversală dată de sistemul de lentile
**c.** între ce limite şi în ce sens trebuie deplasată lentila divergentă, păstrând celelalte elemente fixe ca la punctul **b.**, astfel încât imaginea finală dată de sistem să poată fi proiectată pe un ecran

**57.** Un punct luminos se află la o distanţă de 10 cm de prima lentilă pe axul optic principal al unui sistem de lentile aşezate în următoarea ordine: o lentilă divergentă cu $f_1$=−5 cm, urmată la o distanţă de $d_1$=20/3 cm de o lentilă convergentă cu $f_2$=5 cm, urmată la o distanța de $d_2$=5 cm de o lentilă divergentă cu $f_3$=−5 cm, urmată la o distanță de $d_3$=10 cm de o lentilă convergentă cu $f_4$=5 cm ca în figura alăturată. Să se afle:



**a.** poziția imaginii formate de prima lentilă
**b.** poziția imaginii formate de a doua lentilă
**c.** poziția imaginii finale a obiectului luminos față de ultima lentilă

**58.** Două lentile subțiri convergente cu distanțele focale $f_1$ și $f_2$ formează un sistem afocal. Un obiect punctiform se așază pe axa optică principală a sistemului afocal la distanța $x$ de prima lentilă. Să se afle:
**a.** distanța dintre cele două lentile
**b.** mărirea liniară transversală a sistemului, dacă distanțele focale ale celor două lentile sunt $f_1$ și $f_2$ și să se arate că aceată mărire nu depinde de $x$
**c.** particularizați cerințele punctelor precedente pentru $f_1$=20 cm și $f_2$=50 cm

**59.** Două lentile subțiri situate la distanta $d$=40 cm, formează un sistem afocal. Un obiect punctiform se așază pe axa optică principală a sistemului afocal la distanța $x$ de prima lentilă. Sistemul forma o imagine mărită și răsturnată cu mărirea $\beta$=−1/3. Să se afle:
**a.** distanțele focale ale celor două lentile
**b.** diametrul unui fascicul la ieșirea din cea de-a doua lentilă, dacă un fascicul paralel cu diametrul de 3 cm cade pe lentila cu convergență mai mică
**c.** convergența sistemului astfel format prin acolarea celor două lentile

**60.** Un sistem optic este format din două lentile cu distanțele focale $f_1$=20 cm si $f_2$=4 cm. Distanța inițială dintre lentile este $d$=23 cm. Se îndepărtează lentila a doua cu 1 cm de prima lentilă. Să se afle:
**a.** poziția imaginii finale față de lentila a doua, dacă un obiect se află la o distanță infinit de mare în fața primei lentile în situația inițială
**b.** poziția imaginii finale față de lentila a doua a unui obiect așezat la 40 cm în fața primei lentile în situația în care $L_2$ s-a îndepărtat de $L_1$
**c.** mărirea liniară transversală a sistemului de lentile în situația de la **b.**

**61.** Două lentile subțiri cu distanțele focale de $f_1$=15 cm și $f_2$=−5 cm sunt centrate pe același ax optic, astfel încât un fascicul paralel cu axul optic principal părăsește sistemul tot paralel cu axul optic principal. Un obiect înalt de 9 cm este plasat în fața lentilei convergente. Să se afle:
**a.** distanța dintre cele două lentile
**b.** înălțimea imaginii obiectului obținută cu sistemul de lentile
**c.** convergența sistemului astfel format prin acolarea celor două lentile

**62.** Un sistem afocal este format din două lentile. Prima lentilă are distanța focală $f_1$=30 cm și distanța dintre lentile este $d$=20 cm. Lentilele sunt confecționate din sticlă cu indicele de refracție $n$=1,5. Să se afle:
**a.** distanța focală a lentilei a doua

**b.** mărirea liniară transversală a sistemului afocal
**c.** distanţă dintre lentile pentru ca sistemul să rămână afocal, dacă sistemul se introduce sistemul în apă cu indicele de refracţie $n_a$=4/3

**63.** O lentilă convergentă are distanţa focală de $f_1$=30 cm. În faţa lentilei se aşază un obiect liniar la distanţa de 40 cm de aceasta. În spatele lentilei convergente se aşază o a doua lentilă divergentă cu distanţa focală $f_2$=−20 cm şi la $d$=1,1 m de lentila convergentă. Să se afle:
**a.** poziţia ecranului în spatele lentilei convergente şi în lipsa lentilei divergente, pentru ca imaginea să se formeze pe acesta
**b.** cu cât şi în ce sens trebuie deplasat ecranul pentru ca imaginea să se prindă pe acesta după aşezarea lentilei divergente?
**c.** distanţa dintre cele două lentile, dacă cu ajutorul acestora se formează un sistem afocal şi care va fi mărirea liniară transversală a acestui sistem, dacă prima lentilă este convergentă

## 1.3. Instrumente optice

**1.** Un miop vede fără ochelari să citească la distanţa $d$=20 cm. Cu ce lentile îşi corectează miopul vederea, dacă distanţa optimă de vedere pentru un ochi normal este $d_0$=25 cm?

**2.** Un hipermetrop vede fără ochelari obiectele situate la distanţa $d$=30 cm. Cu ce lentile îşi corectează acesta vederea, dacă distanţa optimă de vedere pentru un ochi normal este $d_0$=25 cm?

**3.** Un om vârstnic are punctul remotum la distanţa $d$=1 m. Ce lentile trebuie să utilizeze el pentru a vedea, practic, până la infinit?

**4.** Un prezbit vede obiectele situate între $d_1$=40 cm şi $d_2$=50 cm. Vederea acestui prezbit se corectează cu ochelari bifocali, care au sus o lentilă ce îi permite să vadă bine la depărtare şi jos o lentilă care îi permite să citească. Să se afle convergenţele lentilelor.

**5.** O persoană vede clar obiectele aflate la mai mult de $D$=40 cm de ochii săi. Ce devin pentru acest observator limitele vederii distincte, când el priveşte prin ochelari cu convergenţa $C$=1 δ? Distanţa dintre ochi şi centrul optic al lentilei este în ambele cazuri $d$=1 cm.

**6.** Un miop vede clar până la $d_1$=2 m depărtare de ochi şi foloseşte ochelarii unui miop care vede clar până la $d_2$=4 m. Să se afle distanţa la care va vedea clar primul miop cu ochelarii celui de-al doilea miop.

**7.** Pentru un miop distanţele maximă şi minimă de vedere distinctă sunt $D$=3 m şi respectiv $d$=20 cm. El îşi procură ochelari care îi permit să vadă obiectele situate la infinit. Să se afle noua distanţă minimă de vedere clară.

**8.** Un observator miop care vede clar între distanțele $d$=10 cm și $D$=2 m, observă o linie subțire cu ajutorul unei lentile ce are convergența $C$=50 δ. Ochiul se află la distanța $a$=2 cm de lentilă. Între ce limite poate omul să deplaseze obiectul față de lentilă, fără a înceta să vadă clar linia?

**9.** O lupă are mărirea $\beta$=6 pentru un ochi normal, care privește lângă lupă. La ce distanță optimă de o foaie de hârtie trebuie ținută lupă pentru ca razele solare să carbonizeze hârtia?

**10.** Fie un sistem optic format din obiectivul $O$ cu distanța focală $f_1$=2 mm și un ocular $C$ cu distanța focală $f_2$=3 cm. Un obiect se află la distanța $a$=3 mm de obiectiv. Să se afle distanța minimă dintre cele două lentile pentru ca un observator a cărui distanță minimă de vedere distinctă este $d_0$=25 cm să vadă clar imaginea obiectului.

**11.** Se fotografiează un obiect de două ori cu același aparat. Când obiectul se află la distanța de $d_1$=20 m, înălțimea imaginii sale pe fotografie este $h_1$=20 mm, iar când obiectul se află la distanța de $d_2$=15 m, înălțimea imaginii sale pe fotografie este $h_2$=40 mm. Să se afle distanța focală a obiectivului aparatului.

**12.** Trebuie fotografiat un patinator care are viteza $v$=5 m/s. Distanța focală a obiectivului este $f$=10 cm iar distanța patinatorului până la aparat este de 5 m. Să se afle timpul de expunere maxim, dacă neclaritatea imaginii nu depășește $a$=0,2 mm.

**13.** Un obiect trebuie fotografiat cu un aparat de fotografiat al cărui obiectiv are distanța focală $f$=12 cm. Obiectul se află la 15 cm de obiectiv iar distanța obiectiv-placă fotografică este 20 cm. Să se afle distanța focală a lentilei adiționale ce trebuie folosită pentru a realiza fotografia.

**14.** Se fotografiează un obiect punctiform aflat la distanța $d_1$=4 m, cu un aparat foto cu un obiectiv ce are distanța focală $f$=25 cm. Pentru a fotografia același obiect, dar de la distanțe diferite se diafragmează obiectivul astfel că imaginea sa să nu depășească pe peliculă înălțimea $d$=0,1 mm. Să se afle diametrului diafragmei, dacă obiectul se află la:
**a.** distanța $d_2$=3 m de obiectiv
**b.** distanța $d_2$=6 m de obiectiv

**15.** Un diapozitiv cu dimensiunile 3 cm și 4 cm se proiectează pe un ecran aflat la distanța de 4 m de obiectivul aparatului de proiecție. Lentila aparatului de proiecție are distanța focală $f$=20 cm. Să se afle dimensiunile celor două laturi ale imaginii de pe ecranul de proiecție.

**16.** Un teleobiectiv este format dintr-o lentilă convergentă cu distanța focală $f_1$=6 cm și o lentilă divergentă cu distanța focală $f_2$=−10 cm, centrate la distanța $d$=1,5 cm una de alta. Obiectul cu înălțimea $y_1$=10 cm este așezat la 30 cm în fața lentilei convergente. Să se afle:

**a.** poziția imaginii față de lentila divergentă
**b.** mărirea liniară transversală a sistemului de lentile
**c.** înălțimea imaginii pe peliculă

**17.** Obiectivul unui fotoaparat are două lentile: prima divergentă cu distanța focală $f_1$=−50 mm iar a doua convergentă cu distanța focală $f_2$=80 mm. Lentila divergentă este la distanța $\ell$=45 cm de peliculă. La ce distanță de peliculă trebuie aşezată lentila convergentă pentru a forma imagini clare ale obiectelor de la infinit?

**18.** Ocularul unui microscop cu distanța focală $f_2$=2 cm se află centrat față de obiectivul cu distanța focală $f_1$=0,6 cm la o anumită distanță. Obiectul de examinat se găseşte la distanța de 5/8 cm în fața obiectivului, iar imaginea dată de microscop este observată la distanța de vedere optimă egală cu $d_0$=25 cm. Să se afle:
**a.** poziția imaginii față de lentila obiectiv
**b.** lungimea tubului microscopului
**c.** mărirea microscopului

**19.** La un microscop distanța focală a obiectivului este $f_1$=5,4 mm, iar a ocularului este $f_2$=1 cm. Distanța obiectului față de obiectiv este de 5,6 mm. Un ochi normal vede între distanța de vedere optimă egală cu $d_0$=25 cm şi punctul de infinit. Să se afle:
**a.** lungimea tubului microscopului când imaginea se formează la distanța optimă de vedere
**b.** lungimea tubului microscopului când imaginea se formează la infinit
**c.** cât poate să deplaseze observatorul ocularul pentru a pune la punct microscopul?

**20.** Un microscop optic este format din două lentile subțiri convergente cu axul optic principal comun. Un obiect este aşezat la distanța de 5,2 mm în fața primei lentile obiectiv, care are distanța focală de $f_1$=5 mm. Imaginea virtuală este observată de ochiul unui obsevator miop alipit de a doua lentilă ocular, cu distanța focală de $f_2$=2 cm, la distanța de 15 cm de ochiul observatorului. Să se afle:
**a.** lungimea tubului microscopului
**b.** mărirea microscopului
**c.** cum ar trebui aşezate cele două lentile astfel încât sistemul să păstreze paralel un fascicul incident de lumină paralelă, mărindu-i dimensiunile?

**21.** O lamă transparentă de grosime $h$=5 mm este privită printr-un microscop. Dacă se pune la punct microscopul pentru observarea feței superioare a lamei, pentru a vedea clar fața inferioară, măsuța pe care se află lama se deplasează în sus cu $D$=3,5 mm. Să se afle indicele de refracție al lamei.

**22.** Obiectivul şi ocularul unui microscop au distanţele focale $f_1$=5 mm şi $f_2$=2 cm, iar distanţa dintre centrele lor optice este $e$=12 cm. Punerea la punct a microscopului este practic pentru infinit. Să se afle:
**a.** valorea grosismentului microscopului
**b.** valorea puterii optice a microscopului
**c.** lungimea tubului microscopului

**23.** O lunetă astronomică are două lentile cu distanţele focale $f_1$=80 cm şi $f_2$=10 cm. Să se afle:
**a.** lungimea minimă şi maximă a lunetei pentru un om care vede între distanţa optimă de citire $d_0$=25 cm şi punctul de infinit
**b.** lungimea minimă şi maximă a lunetei pentru un miop care vede clar între $d_1$=16 cm şi $d_2$=2 m
**c.** distanţa pe care poate deplasa ocularul un om care vede normal pentru a vedea clar imaginea formată de lunetă

**24.** O lunetă al cărei obiectiv are distanţa focală egală cu $f_1$=80 cm este focalizată pentru a observa Luna. Ştiind că obiectivul lunetei este fix, cum şi cu cât trebuie deplasat ocularul lunetei pentru a se putea observa un obiect aflat la distanţa de $d$=10 m de obiectivul lunetei, dacă ocularul are distanţa focală $f_2$=5 cm şi dacă în acest caz ochiul priveşte fără acomodare?

**25.** Un binoclu de teatru are obiectivul cu distanţa focală $f_1$=8 cm şi ocularul cu distanţa focală de $f_2$=-4 cm. Între ce limite poate fi reglată distanţa dintre obiectiv şi ocular pentru un ochi normal?

# 2. Principii şi legi în mişcarea mecanică
## 2.1. Mişcarea mecanică

**1.** Legea de mişcare a unui punct material este exrpimată cu ajutorul vectorului de poziţie: $\vec{r}(t)=(4t-2)\vec{i}+(-3t+1)\vec{j}$ (m), unde timpul $t$ este exprimat în secunde. Să se afle:
**a.** ecuaţia traiectoriei punctului material
**b.** expresia vectorului viteză a punctului material
**c.** modulul vitezei punctului material
**d.** acceleraţia punctului material

**2.** Ecuaţia de mişcare a unui punct material este $\vec{r}(t)=\frac{t^2}{2}\vec{i}+t\vec{j}$. Să se afle:
**a.** ecuaţia traiectoriei punctului material
**b.** modulul vitezei punctului material la momentul $t$=2 s
**c.** acceleraţia momentană în intervalul de timp $t\in(0, 4)$s

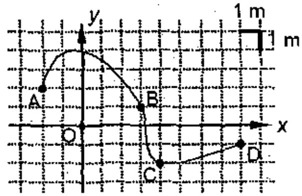
**3.** Vectorul de poziţie al unui punct material depinde de timp conform relaţiei $\vec{r}(t)=\vec{i}+2t\vec{j}+t^2\vec{k}$. Să se afle:
**a.** vectorul viteză
**b.** modulul vitezei la momentul $t_1$=2 s
**c.** vectorul acceleraţie

**4.** Un punct material se deplasează astfel încât ecuaţiile de mişcare pe cele două axe de coordonate sunt $x=3t-4$ şi $y=8-t$, unde $x$ şi $y$ sunt exprimate în metri, iar $t$ în secunde. Să se afle:
**a.** ecuaţia traiectoriei punctului material
**b.** vectorul viteză al punctului material
**c.** modulul vitezei punctului material

**5.** Un punct material se deplasează pe o traiectorie descrisă de ecuaţia $y=2x+1$. La momentul $t_1$=1 s mobilul se află în punctul de abscisă $x_1$=1 m iar la momentul $t_2$=2 s se află în punctul de abscisă $x_2$=3 m. Să se afle:
**a.** deplasarea punctului material între cele două momente de timp
**b.** viteza medie a punctului material
**c.** expresia vectorului viteză a punctului material, dacă mobilul se mişcă uniform pe axele de coordonate
**d.** vectorul acceleraţie în condiţiile punctului **c.**

**6.** Un punct material are la momentul iniţial de timp vectorul de poziţie $\vec{r}_0=2\vec{i}-\vec{j}$ iar componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt $v_x$=−4 m/s şi $v_y$=3 m/s. Să se afle:
**a.** modulul vitezei punctului material şi vectorul viteză
**b.** vectorul de poziţie
**c.** deplasarea mobilului în intervalul de timp $t_1$=2 s şi $t_2$=4 s
**d.** ecuaţia traiectoriei

**7.** În figura alăturată este redată traiectoria curbilinie plană descrisă de un punct material în sistemul de axe $xOy$. Inițial, mobilul se află în punctul $A$. Durata mişcării din punctul $A$ până în punctul $D$ este $\Delta t$=1 min. Să se afle:




**a.** coordonatele mobilului atunci când acesta se află în punctul $C$
**b.** modulul vectorului de poziție al mobilului atunci când acesta se află în punctul $A$
**c.** modulul vectorului viteză medie cu care s-a deplasat mobilul între punctele $A$ şi $D$

**8.** Un mobil descrie o mişcare rectilinie caracterizată de legea de mişcare $x=2t^2-3t+5$ (m). Să se afle:
**a.** modul cum variază viteza instantanee a mobilului în funcție de timp
**b.** reprezentarea grafică a legii vitezei
**c.** accelerația mobilului

**9.** Un mobil se mişcă rectiliniu uniform încetinit cu modulul accelerației $|a|$=2 m/s$^2$ şi cu viteza inițială $v_0$=10 m/s. Să se afle:
**a.** viteza mobilului după trei secunde de la începerea mişcării
**b.** momentul de timp la care mobilul se opreşte
**c.** viteza medie a mobilului calculată de la începutul mişcării până în momentul opririi
**d.** distanța parcursă de mobil până la oprire

**10.** Un tren accelerează uniform pornind din repaus până la viteza $v$=90 km/h într-un interval de timp de $\Delta t$=10 s. Să se afle:
**a.** accelerația în această mişcare
**b.** viteza medie în acest intervalul de timp considerat
**c.** distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

**11.** O maşină care are la un moment dat $v_0$=54 km/h vede un stop roşu şi frânează uniform într-un interval de timp de $\Delta t$=15 s. Să se calculeze:
**a.** accelerația în această mişcare
**b.** viteza medie în acest intervalul de timp considerat
**c.** distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

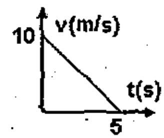
**12.** Un şofer care se deplasează rectiliniu şi uniform cu viteza $v_0$=72 km/h intră într-o depăşire şi îşi creşte viteza în fiecare secundă în mod uniform cu 1 m/s. Depăşirea durează un interval de timp $\Delta t$=20 s. Să se afle:
**a.** accelerația în această mişcare
**b.** viteza medie în acest intervalul de timp considerat
**c.** distanța parcursă de mobil în acest interval de timp

**13.** Un biciclist are la un moment dat viteza $v_0$=2 m/s şi frânează uniform până la viteza $v$=1 m/s într-un interval de timp $\Delta t$=10 s. Să se afle:
**a.** accelerația în această mişcare

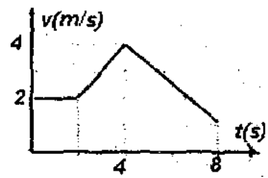
**b.** viteza medie în intervalul de timp considerat
**c.** distanța parcursă de mobil în acest interval de timp
**d.** după cât timp se oprește bicilistul și ce distanță parcurge până la oprire

**14.** Un mobil se deplasează pe o suprafață orizontală astfel că viteza variază în funcție de timp după legea $v=12-4t$. Să se afle:
**a.** momentul de timp la care corpul se oprește
**b.** accelerația instantanee a corpului
**c.** distanța parcursă de corp până la oprire

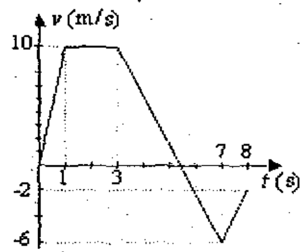
**15.** Reprezentarea grafică din figura alăturată a vitezei în funcție de timp este o linie dreaptă. Să se afle:
**a.** accelerația mobilului
**b.** spațiul parcurs de mobil între momentele de timp $t_1$=2 s și $t_2$=4 s
**c.** viteza medie a mobilului în intervalul de timp ($t_1$, $t_2$)
**d.** spațiul parcurs de mobil până la oprire



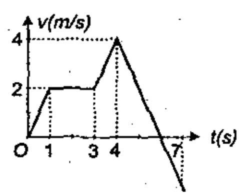

**16.** Un corp se mişcă pe o traiectorie rectilinie cu o viteză care variază conform graficului. Să se afle:
**a.** valoarea maximă a modulului accelerației în decursul mişcării
**b.** distanța parcursă în intervalul $t\in(0, 4)$s
**c.** viteza medie a corpului în intervalul $t\in(0, 8)$s




**17.** Un mobil pornește în sensul pozitiv al axei de coordonate *Ox* din originea acesteia. Viteza depinde de timp conform graficului alăturat. Să se afle:
**a.** viteza medie a mobilului în intervalul de timp $t\in(0; 3)$s
**b.** modulul maxim al accelerației
**c.** viteza medie în intervalul de timp $t\in(0;8)$s
**d.** viteza în modul medie în intervalul de timp $t\in(0;8)$s




**18.** Este reprezentată grafic dependența vitezei în funcție de timp. Coordonata inițial este nulă. Să se afle:
**a.** viteza medie a mobilului în intervalul de timp $t\in(0; 1)$s
**b.** viteza medie a mobilului în intervalul de timp $t\in(0; 6)$s
**c.** accelerația pentru intervalul de timp $t\in(4; 7)$s și să se precizeze caracterul mişcării
**d.** valoarea vitezei instantanee la momentul $t_7$=7 s




### 2.1.1. Mişcarea rectilinie şi uniformă a punctului material

**1.** Un sonar lansează un semnal sonor care se propagă prin apă mării cu viteza $v$=1500 m/s. Semnalul sonor se reflectă pe obiect și este recepționat după $\Delta t$=10 s. Să se afle la ce distanță de sonar se situează obiectul detectat.

**2.** Un radiolocator care are scopul să localizeze obiecte în spaţiul cosmic prin utilizarea semnalelor radio. Undele radio se propagă prin spaţiu cosmic cu viteza $c=3\cdot10^8$ m/s, se reflectă după ce ating obiectul respectiv şi se întorc pe aceaşi direcţie. Se măsoară timpul dintre momentul emisiei şi momentul recepţionării undelor radio $\Delta t=2$ min. Să se afle distanţa la care se află acest obiect faţă de Pământ.

**3.** Un elev vede lumina emisă de un fulger şi după $\Delta t=3$ s aude tunetul. Sunetul se propagă prin aer cu viteza $v=340$ m/s. Să se afle:
**a.** distanţa faţă de elev la care a fulgerat
**b.** dacă centrul furtunii se apropie sau se depărtează de elev, dacă după un timp acesta vede un nou fulger şi aude tunetul după $\Delta t'=2$ s

**4.** Viteza legală în afara localităţilor pentru autoturisme este $v_l=90$ km/h. Să se afle:
**a.** viteza autoturismului, dacă în intervalul de timp $t=1/50$ s deplasarea acestuia detectată cu radarul este $d=60$ cm şi precizaţi dacă autoturismul a depăşit viteza maximă admisă în afara localităţilor
**b.** viteza medie cu care s-a deplasat autoturismului, dacă acesta parcurge prima jumătate a drumului său total cu viteza legală, iar cealaltă jumătate cu viteza $v_2=20$ m/s
**c.** viteza medie cu care s-a deplasat autoturismului, dacă acesta parcurge prima jumătate din drumul său total cu viteza $4v$, următorul sfert de drum cu viteza $2v$, iar restul cu viteza $v$

**5.** Un automobil se mişcă uniform cu viteza $v_1=72$ km/h din punctul $A$ spre punctul $B$, astfel că distanţa $AB=100$ km. Un al doilea automobil se deplasează cu viteza $v_2=90$ km/h. Să se afle:
**a.** distanţa dintre cele două automobile după $t=1$ h de la începerea mişcării, dacă acestea pornesc simultan, iar al doilea automobil porneşte din $B$, perpendicular pe direcţia $AB$
**b.** distanţa la care se întâlnesc cele două automobile faţă de oraşul $A$, dacă acestea pornesc unul spre celălalt simultan
**c.** intervalul de timp $\Delta t$ de la plecarea primului automobil după care porneşte un al doilea automobil din acelaşi loc, astfel că cele două se întâlnesc chiar în punctul $B$

**6.** Doi copii $A$ şi $B$ sunt aşezaţi la distanţa $D=120$ m unul de celălalt, în

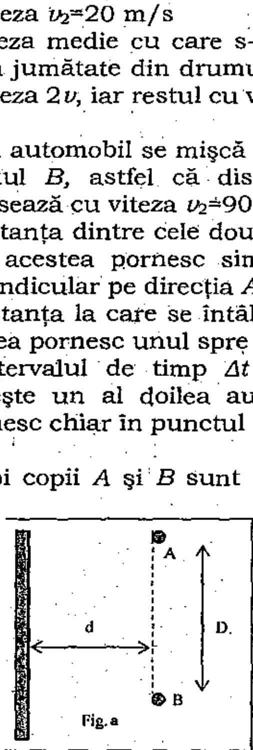


Fig. a

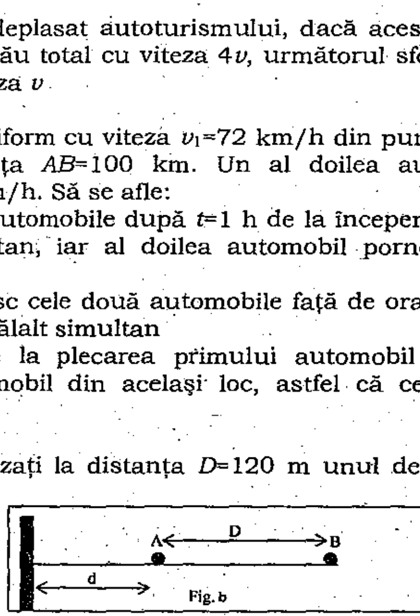


Fig. b

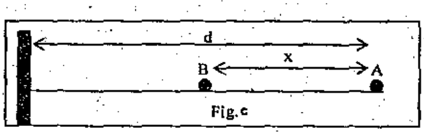


Fig. c

apropierea unui zid lung şi drept. Copii se află aşezaţi faţă de zid ca în figurile a, b şi c. Copilul $A$ emite un sunet scurt. Sunetul se propagă cu viteza $c$=340 m/s. Să se afle:

**a.** intervalul de timp dintre momentele recepţionării sunetelor de către $B$, în cazul a, dacă $d$=80 m

**b.** intervalul de timp dintre momentele recepţionării sunetelor de către $B$, în cazul b, dacă $d$=80 m

**c.** durata unui semnal lung emis de copilul $A$ astfel ca copilul $B$ să perceapă un sunet de două ori mai lung în cazul c, dacă $d$=80 m şi $x$=40 m

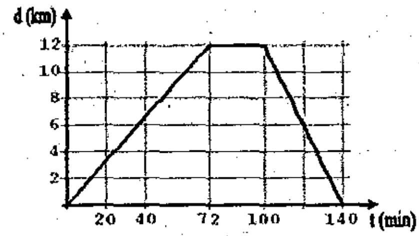
**7.** Distanţa dintre două porturi este $d$=80 km. O şalupă se deplasează în sensul curentului în timpul $t_1$=4 h iar împotriva curentului în timpul $t_2$=8 h cu aceeaşi viteză faţă de apă. Să se afle:

**a.** viteza de curgere a apei

**b.** viteza şalupei faţă de apă

**c.** timpul în care apa deplasează şalupa între porturi dacă motorul acesteia nu funcţionează

**8.** Apa unui fluviu curge cu viteză constantă între două porturi $A$ şi $B$ având sensul de la $B$ la $A$. Dependenţa de timp a coordonatei $d$ a unei şalupe, măsurată faţă de portul $A$, este redată în figura alăturată. Şalupa porneşte din $A$, ajunge în $B$ unde staţionează şi se întoarce în $A$. Viteza şalupei faţă de apă se consideră constantă pe tot parcursul mişcării. Să se afle:




**a.** viteza şalupei faţă de apă

**b.** durata deplasării şalupei pe drumul $A$-$B$-$A$ dacă şalupa nu ar staţiona în $B$

**c.** distanţa faţă de portul $B$ la care se întâlnesc două şalupe, presupunând că ele pornesc simultan din $B$ şi $A$ cu aceeaşi viteză faţă de apă ca la **a.**

**d.** reprezentarea grafică a dependenţei de timp a coordonatei $d$ a şalupei (la deplasările $A \rightarrow B$ şi $B \rightarrow A$) în condiţiile în care apa ar fi stătătoare şi şalupa nu ar staţiona în $B$

**9.** Pe o scară rulantă cu lungimea $\ell$=10 m, aflată în mişcare, un om urcă scara în timpul $t_1$=20 s. Pe scara imobilă călătorul urcă scara în timpul $t_2$=80 s. Ştiind că omul se mişcă cu aceeaşi viteză faţă de scară, să se afle:

**a.** viteza omului faţă de scară

**b.** viteza scării rulante

**c.** timpul în care ridică scara omul dacă acesta stă pe ea

**10.** O platformă de tren cu lungimea $\ell$=14 m se deplasează rectiliniu cu viteza $v_0$=12 m/s. Un ceferist se mişcă de-a lungul platformei, plecând de la unul din capete, dus-întors cu viteza $v$=2 m/s faţă de aceasta. Să se afle:

**a.** vitezele ceferistului faţă de sol la dus şi la întors

**b.** timpul în care ceferistul revine la capătul platformei de unde a plecat

**c.** distanţa parcursă de ceferist faţă de sol în situaţia de la punctul **b.**

**11.** Un vâslaş care se mişcă cu viteza $u$=0,5 m/s faţă de râul care curge cu viteza $v$=0,3 m/s doreşte să traverseze râul pe drumul cel mai scurt. Lăţimea râului este $\ell$=50 m. Să se afle:
**a.** cum trebuie să orienteze barca, pentru a ajunge pe malul opus?
**b.** timpul necesar pentru traversarea râului
**c.** timpul necesar pentru traversarea unui lac cu aceeaşi lăţime, dacă viteza vâslaşului se păstrează

**12.** Un avion parcurge distanţa $d$=200 km dus-întors cu viteza $u$=200 m/s faţă de vânt. Vântul bate cu viteza $v$=20 m/s. Să se afle durata zborului, dacă vântul suflă:
**a.** perpendicular pe direcţia parcursă
**b.** de-a lungul direcţiei parcurse
**c.** când nu suflă vântul

**13.** Doi vâslaşi pornesc simultan din acelaşi punct de pe un mal spre un punct de pe malul opus aflat perpendicular pe direcţia de curgere, mişcându-se astfel: primul îşi orientează barca asfel încât un om de pe sol să-l vadă deplasându-se perpendicular pe maluri, în timp ce al doilea îşi orientează barca perpendicular pe maluri, iar când atinge malul opus se deplasează în sens contrar curgerii râului. Apa curge cu viteza $v_a$=1 m/s, iar vâslaşii se deplasează cu viteza $v$=2 m/s aceeaşi tot timpul faţă de apă. Distanţa dintre cele două maluri este $\ell$=20 m. Să se afle:
**a.** timpul necesar primului vâslaş ca să traverseze râul
**b.** timpul necesar celui de-al doilea vâslaş ca să traverseze râul
**c.** intervalul de timp care desparte sosirea vâslaşilor în punctul de pe malul opus

**14.** Un autoturism se mişcă cu viteza $v_1$=25 m/s în spatele unui autocamion care are viteza $v_2$=15 m/s. Când distanţa dintre autoturism şi autocamion devine $d_1$=20 m conducătorul autoturismului se angajează în depăşirea autocamionului, dar observă în acelaşi timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza $v_3$=20 m/s. Să se afle:
**a.** distanţa minimă $d_3$ care trebuie asigurată între autobuz şi autoturism pentru a efectua în siguranţă manevra de depăşire, astfel ca, după depăşire, autoturismul să fie la distanţa $d_2$=30 m în faţa autocamionului
**b.** timpul necesar depăşirii
**c.** distanţele parcurse de cele trei vehicule în timpul manevrei de depăşire

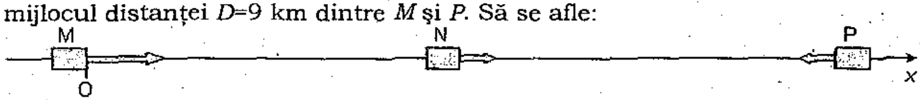
**15.** Un pescar merge cu barca în susul râului şi scapă în dreptul unui pod un colac în apă. După un timp $\Delta t$=1/2 h pescarul îşi dă seama că a scăpat colacul, se întoarce şi găseşte colacul la distanţa $d$=5 km mai departe de pod. Pescarul vâsleşte mereu cu aceeaşi viteză faţă de apă. Să se afle:
**a.** timpul după care pescarul recuperează colacul din momentul pierderii acestuia
**b.** viteza apei

**c.** viteza colacului față de maluri, dacă mişcarea acestuia este barată de un cablu rigid $AB$ legat între cele două maluri şi care formează cu un mal un unghi $\alpha=60^0$

**16.** Două trenuri au lungimile $\ell_1=60$ m şi repectiv $\ell_2=90$ m. Cele două trenuri se deplasează pe direcții paralele cu vitezele $v_1=15$ m/s şi respectiv $v_2=25$ m/s. Să se afle:
**a.** timpul cât durează trecerea unui tren prin dreptul celuilalt, dacă trenurile se deplasează în acelaşi sens
**b.** timpul cât durează trecerea unui tren prin dreptul celuilalt, dacă trenurile se deplasează în sensuri contrare
**c.** timpul cât vede un om aflat în primul tren trecând prin dreptul lui trenul al doilea, dacă trenurile se mişcă în acelaşi sens

**17.** Un călător se află într-un tren care se deplasează cu viteza constantă $v_1=50$ km/h. La un moment dat începe să plouă şi călătorul observă că picăturile de ploaie lasă urme pe fereastra trenului înclinate cu unghiul $\alpha=30^0$ față de verticală. Să se afle:
**a.** viteza picăturilor de ploaie
**b.** viteza celui de-al doilea tren, dacă în timpul $t=30$ s călătorul din primul tren vede trecând trenul al doilea cu lungimea $\ell=300$ m în acelaşi sens pe o linie paralelă
**c.** timpul cât vede un om aflat în al doilea tren trecând prin dreptul lui primul tren cu lungimea $\ell_1=200$ m, dacă trenurile se mişcă în sensuri contrare şi trenul al doilea are viteza $v_2=30$ km/h

**18.** Trei automobile, $M$, $N$ şi $P$ se deplasează uniform, cu vitezele $v_M=3v_N=2v_P=108$ km/h pe o autostradă dreaptă. La ora 11:58:55, $N$ se află la mijlocul distanței $D=9$ km dintre $M$ şi $P$. Să se afle:




**a.** viteza $v_1$ cu care scade distanța dintre $M$ şi $N$
**b.** ora hh:mm:ss la care automobilul $M$ va ajunge din urmă automobilul $N$
**c.** distanța parcursă de fiecare automobil în intervalul de timp cuprins între ora 11:58:55 şi ora hh:mm:ss la care $M$ l-a ajuns din urmă pe $N$
**d.** reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei automobilului $P$, alegând axa $Ox$ ca în figură, considerând originea timpului la ora 11:58:55 şi intervalul de timp dintre 11:58:55 şi ora la care $P$ ajunge în originea $O$

**19.** Doi înotători parcurg un bazin de lungime $\ell=50$ m, cu vitezele $v_1=3,6$ m/s şi respectiv, $v_2=2,8$ m/s. Cei doi înotători pleacă în acelaşi moment de la acelaşi capăt al bazinului. Presupunând că întoarcerile de la capetele bazinului sunt considerate instantanee, să se afle:
**a.** momentul de timp la care se vor întâlni prima dată
**b.** distanța unde se vor întâlni prima dată față de punctul de plecare
**c.** timpul după care primul înotător va parcurge mai mult decât al doilea o lungime de bazin

**20.** Mişcarea rectilinie şi uniformă a unui mobil este descrisă de ecuaţia de mişcare $x=3t-2$, unde timpul este exprimat în secunde şi coordonata în metri. Să se afle:

**a.** reprezentarea grafică a legii de mişcare

**b.** ce reprezintă punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate?

**c.** viteza mobilului

**21.** Un mobil execută o mişcare rectilinie uniformă cu viteza $v=-2$ m/s de-a lungul axei de coordonate $Ox$ şi porneşte din punctul de coordonată $x_0=4$ m. Să se afle:

**a.** ecuaţia coordonatei a mobilului

**b.** momentul de timp când mobilul trece prin originea axei de coordonate

**c.** distanţa parcursă de mobil în primele 10 s de la începerea mişcării

**22.** Mişcările rectilinii a două mobile sunt descrise de legile de mişcare $x_1=3t$ şi $x_2=10-2t$, unde $x$ este exprimat în metri şi $t$ în secunde. Mobilele pornesc simultan la momentul $t_0=0$ s. Să se afle:

**a.** reprezentarea grafică în coordonate $(x,t)$, a legilor de mişcare ale mobilelor

**b.** timpul după care se întâlnesc mobilele şi locul unde se întâlnesc

**c.** viteza cu care trec mobilele unul pe lângă celălalt în momentul întâlnirii

**d.** distanţa dintre mobile după $t=6$ s de la începerea mişcărilor

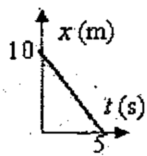
**23.** Mişcările rectilinii a două mobile sunt descrise de legile: $x_1=2+2t$ (m) şi $x_2=4-t$ (m) unde $t$ este exprimat în secunde. Să se afle:

**a.** reprezentarea grafică a legii de mişcare a mobilului (2) în raport cu un sistem de referinţă legat de mobilul (1)

**b.** momentul întâlnirii celor două mobile

**c.** viteza relativă cu care trec mobilele unul pe lângă celălalt în momentul întâlnirii

**24.** Reprezentarea grafică a legii de mişcare a unui mobil este redată în figura alăturată. Să se afle:

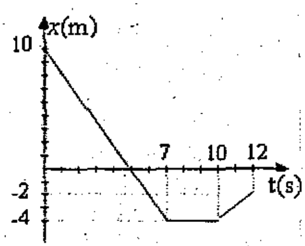



**a.** viteza mobilului

**b.** ecuaţia de mişcare a mobilului

**c.** coordonata la momentul $t=3$ s

**25.** Un mobil se deplasează de-a lungul axei de coordonate $Ox$. În figura 2.1.3 este reprezentată grafic coordonata mobilului de timp. Să se afle:



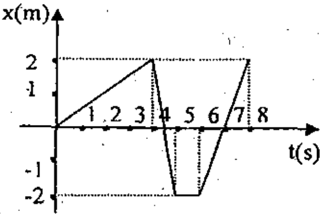

**a.** viteza mobilului când $t\in(0, 7)$s

**b.** caracterul mişcării mobilului când $t\in(7, 10)$s

**c.** viteza medie a mobilului când $t\in(0, 12)$s

**d.** momentul de timp în care mobilul trece prin originea axei de coordonate

**26.** În graficul din figură este reprezentată legea de mişcare a unui mobil care se deplasează rectiliniu. Să se afle:
**a.** vitezele de mişcare ale mobilului în cele patru etape distincte de mişcare
**b.** distanţa totală parcursă
**c.** viteza medie pe întregul interval de timp




### 2.1.2. Mişcare rectilinie uniform variată a punctului material

**1.** Legea de mişcare a unui mobil este $x=-t^2+3t+4$ (m). Să se afle:
**a.** acceleraţia mobilului şi viteza iniţială a acestuia
**b.** coordonata la momentul $t$=1 s
**c.** momentul de timp la care mobilul trece prin originea axelor de coordonate

**2.** Legea de mişcare a unui mobil este $x=-2t^2+5t+3$ (m). Să se afle:
**a.** ecuaţia vitezei şi să se reprezinte grafic
**b.** ce reprezintă fizic intersecţiile curbei vitezei cu axele de coordonate
**c.** ce reprezintă fizic aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului şi axa vitezei

**3.** Un corp are o mişcare descrisă de ecuaţia de mişcare $x=3t+t^2$, unde $x$ este exprimat în metri şi $t$ în secunde. Să se afle:
**a.** viteza corpului după 3 s de la începerea mişcării
**b.** distanţa parcursă în a cincea-a secundă de la lansare
**c.** forţa care acţionează asupra corpului cu masa $m$=200 g

**4.** Un mobil se mişcă uniform variat din originea axei $Ox$ cu viteza iniţială $v_0$=20 m/s la $t_0$=0 s. Prin punctul de abscisă $x$=150 m mobilul trece la momentul $t$ cu viteza $v$=−10 m/s. Să se calculeze:
**a.** acceleraţia mobilului
**b.** momentul de timp la care mobilul trece prin punctul de coordonată $x$
**c.** viteza medie a mobilului în intervalul de timp $(0,t)$
**d.** distanţa parcursă de mobil în intervalul de timp $(0,t)$
**e.** viteza în modul medie a mobilului în intervalul de timp $(0,t)$

**5.** Un automobil pornind din repaus atinge, în mişcare uniform accelerată, viteza $v_1$=18 km/h, după ce a parcurs $d_1$=10 m. Să se afle:
**a.** timpul după care automobilul ajunge la $v_1$
**b.** distanţa parcursă din momentul pornirii până în momentul în care a atins viteza $v_2$=72 km/h
**c.** viteza medie a mobilului după ce acesta parcurge distanţa $d_3$=40 m

**6.** Un tren electric se mişcă cu viteza $v_0$=108 km/h. În urma unei pene de curent electric, trenul se opreşte într-un interval de timp $\Delta t$=30 s. Să se afle:
**a.** acceleraţia trenului
**b.** distanţa parcusă de tren până la oprire

**c.** viteza medie până la oprire

**7.** O sanie coboară liber, uniform accelerat, pe un deal cu lungimea $\ell$=60 m într-un timp $t$=10 s. Să se afle:
**a.** accelerația cu care coboară sania dealul
**b.** viteza pe care o are sania la baza dealului
**c.** distanța parcursă în virtutea inerției, dacă mişcarea saniei se continuă pe un plan orizontal cu accelerația $a_1$=−9 m/s$^2$

**8.** Un mobil porneşte uniform accelerat cu viteza inițială $v_0$=4 m/s şi ajunge în punctul de abscisă $x$=400 m după un timp $t$=40 s. Să se afle:
**a.** accelerația mobilului
**b.** viteza mobilului la momentul de timp $t$
**c.** viteza medie când mobilul se află în punctul de abscisă $x_1$=93,75 m

**9.** În urma străpungerii unui blindaj, viteza unui proiectil scade de la valoarea $v_0$=500 m/s la valoarea $v$=300 m/s, dacă grosimea stratului de blindaj este $d$=0,2 m. Să se afle:
**a.** accelerația cu care se mişcă proiectilul în blindaj
**b.** timpul în care proiectilul a străpuns blindajul
**c.** grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul

**10.** Un corp frânează uniform cu accelerația $a$=0,5 m/s$^2$ pornind la momentul inițial cu viteza $v_0$=10 m/s. Să se afle:
**a.** distanța parcursă de corp până la oprire şi timpul după care se opreşte acesta
**b.** distanța parcursă după $t$=5 s de la începerea mişcării
**c.** distanța parcursă de corp în a patra secundă de la începerea mişcării

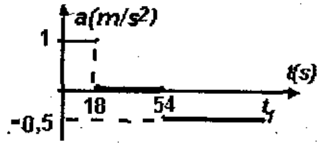
**11.** O maşină se mişcă uniform încetinit. După ce parcurge distanța $d_1$=10 m față de punctul de plecare maşina are viteza $v_1$=12 m/s, iar după parcurgerea distanței $d_2$=15 m față de acelaşi punct viteza maşinii este $v_2$=8 m/s. Să se afle:
**a.** viteza inițială şi accelerația maşinii
**b.** timpul necesar maşinii să parcurgă distanța dintre cele două puncte
**c.** timpul şi distanța parcursă până la oprire

**12.** Un mobil parcurge prima jumătate din drumul său $d$=450 m în timpul $t_1$=25 s, iar cealaltă jumătate în $t_2$=20 s. Să se afle:
**a.** accelerația mobilului
**b.** viteza inițială a mobilului
**c.** viteza medie a mobilului

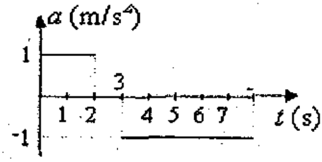
**13.** Metroul parcurge distanța dintre două stații consecutive în $t$=2 min. Dacă accelerația inițială este egală cu modulul accelerației finale, $a$=1 m/s$^2$ şi viteza maximă la care ajunge trenul este $v_m$=108 km/h să se afle:
**a.** distanța pe care accelerează metroul

**b.** distanța parcursă de metrou în mod uniform
**c.** distanța dintre cele două stații.

**14.** În graficul alăturat este reprezentată dependența de timp a accelerației unui metrou pe durata deplasării rectilinii între cele două stații de la pornirea până la oprirea la momentul $t_1$. Să se afle:
**a.** viteza maximă atinsă de metrou
**b.** durata totală a călătoriei
**c.** distanța parcursă între cele două stații




**15.** Graficul din figura alăturată reprezintă dependența accelerației unui mobil care pornește din repaus în funcție de timp. Să se afle:
**a.** dependența vitezei în funcție de timp pe parcursul întregii mișcări
**b.** coordonata finală a mobilului
**c.** distanța parcursă de mobil în decursul mișcării




**16.** Două mobile se deplasează în lungul axei $Ox$ după legile de mișcare $x_1=t^2-10t+8$ și $x_2=2+4t-3t^2$, unde $x$ este exprimat în metri și $t$ în secunde. Să se afle:
**a.** momentele de timp la care mobilele se întâlnesc și să se interpreteze rezultatul
**b.** valorile coordonatelor în momentele întâlnirii
**c.** momentul de timp la care vitezele instantanee ale celor două mobile devin egale

**17.** O mașină pornește de la stop cu accelerația $a=1$ m/s². În același moment în spatele stopului la $d=8$ m, se află o altă mașină în mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v=5$ m/s. Să se afle:
**a.** momentele de timp la care se întâlnesc mașinile și să se interpreteze rezultatul
**b.** distanța măsurată de la stop la care se întâlnesc mașinile
**c.** valorea vitezei relative cu care se depășesc mașinile

**18.** Două mașini trec prin dreptul unui stop în mișcare rectilinie astfel: prima uniform accelerat cu $a=2$ m/s² și viteza inițială $v_0=5$ m/s, iar a doua uniform cu $v=15$ m/s, dar cu o întârziere $\Delta t=1$ s față de prima. Să se afle:
**a.** momentele de timp la care se întâlnesc mașinile și să se interpreteze rezultatul
**b.** distanța măsurată de la stop la care se întâlnesc mașinile
**c.** după ce interval de timp trebuie să treacă prin dreptul stopului mașina a doua pentru a se întâlni o singură dată

**19.** Două mobile pornesc din două puncte aflate la distanța $d=426$ m unul spre celălalt. Dintr-un punct se deplasează un mobil uniform accelerat cu

accelerația $a_1$=2 m/s$^2$ şi cu viteza inițială $v_{01}$=40 m/s, iar din celălalt punct cu o întârziere $\Delta t$=2 s, un mobil într-o mişcare uniform încetinită cu accelerația $a_2$=1 m/s$^2$ şi cu viteza inițială $v_{02}$=10 m/s. Să se afle:
**a.** momentul de timp la care se întâlnesc mobilele
**b.** vitezele în momentul întâlnirii
**c.** vitezele medii şi viteza relativă în momentul întâlnirii
**d.** distanța dintre mobile în momentul opririi celui de-al doilea mobil

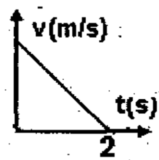
### 2.1.3. Mişcarea punctului material sub acțiunea greutății

**1.** O piatră cade liber de la înălțimea $h$=80 m. Să se afle:
**a.** timpul de coborâre
**b.** viteza cu care atinge piatra solul
**c.** spațiul parcurs în ultima secundă de cădere

**2.** Un corp cade liber de la înălțimea $h$=2000 m. Să se afle:
**a.** intervalul de timp în care sunt parcuşi ultimii $h_1$=720 m
**b.** spațiul parcurs în a doua secundă de cădere

**3.** Un mobil este aruncat vertical în sus de la sol cu viteza inițială $v_0$=35 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** înălțimea maximă la care urcă corpul
**b.** timpul după care corpul se întoarce pe Pământ
**c.** distanța parcursă de corp în secunda a patra de mişcare

**4.** Graficul redă dependența vitezei unui mobil care se mişcă fără frecare sub acțiunea greutății în funcție de timp. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** viteza inițială a mobilului
**b.** înălțimea maximă la care se ridică mobilul
**c.** timpul de mişcare şi viteza cu care corpul revine în punctul de lansare




**5.** Un corp este aruncat vertical în sus de la sol şi revine pe Pământ după $\Delta t$=6 s din momentul aruncării. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** viteza inițială a corpului
**b.** înălțimea maximă la care a urcat corpul

**6.** O minge este aruncată pe verticală de jos în sus cu viteza inițială $v_0$=10 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** momentele de timp la care mingea trece printr-un punct situat la jumătate din valoarea maximă a înălțimii şi să se interpreteze rezultatul obținut
**b.** vitezele mingii în momentele de timp calculate la punctul **a.**
**c.** viteza medie şi viteza în modul medie a mingii în intervalul de timp din momentul plecării până la întoarcerea prin punctul $h=h_{max}/2$

**7.** Un mobil este aruncat pe verticală în sus cu viteza inițială $v_0$=40 m/s. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** momentul de timp la care viteza mobilului este jumătate din cea inițială
**b.** distanța parcursă de mobil până în momentul calculat la punctul **a.**
**c.** distanța parcursă de mobil în a treia secundă de lansare

**8.** Un om se află pe o platformă orizontală și vede un corp întorcându-se prin fața lui după un timp $\Delta t_1$=2 s, măsurat din momentul urcării. Un al doilea om este situat mai jos decât primul, pe o altă platformă orizontală și vede același corp coborând prin fața lui după un timp $\Delta t_2$=6 s măsurat din momentul urcării. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** viteză cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma superioară
**b.** distanța dintre platforma inferioară și cea superioară

**9.** Din același punct cad succesiv două picături de apă. Se constată că viteza de deplasare a primei picături față de a doua este constantă și are valoarea $v_r$=10 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** intervalul de timp care desparte lansările celor două picături
**b.** momentul de timp la care viteza primei picături de apă este dublul vitezei celei de-a doua picături
**c.** distanța care desparte picăturile în condițiile punctului **b.**

**10.** Un circar aruncă o bilă vertical în sus cu viteza $v_{01}$=10 m/s. După un interval de timp egal cu $\Delta t$=1 s circarul aruncă din același punct o a doua bilă tot vertical în sus cu viteza $v_{02}$=20 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** momentul de timp măsurat din momentul aruncării primei bile la care se întâlnesc bilele
**b.** distanța față de punctul de lansare la care se întâlnesc bilele
**c.** intervalul de timp care desparte sosirea bilelor în punctul de lansare
**d.** care sunt limitele permise ale intervalului de timp $\Delta t$ pentru ca cele două bile să se întâlnească în aer deasupra punctului de lansare, dacă bila a doua este lansată cu $v_{02}$=5 m/s

**11.** Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială $v_0$=40 m/s. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Concomitent de la o înălțime $h$ egală cu 3/4 din înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp se lasă liber un doilea corp. Să se afle:
**a.** înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp și timpul de urcare
**b.** momentul de timp și înălțimea la care se întâlnesc corpurile
**c.** viteza relativă cu care trec corpurile unul pe lângă celălalt

**12.** Un corp cade liber de la înălțimea $h$=20 m, iar al doilea corp este lansat simultan pe verticală de la suprafața Pământului. Se neglijează frecarea cu aerul. Știind că cele două corpuri ajung simultan pe sol, să se afle:
**a.** viteza inițială cu care se aruncă corpul al doilea
**b.** înălțimea maximă atinsă de corpul al doilea
**c.** vitezele cu care sosesc corpurile la sol

**13.** Un corp cade liber dintr-un punct aflat la o înălțime $h_1$=50 m. Simultan dintr-un punct situat cu $h_2$=10 m mai jos de punctul de unde este lăsat liber primul corp este aruncat vertical în sus un al doilea corp. Să se afle:
**a.** timpul după care ajunge primul corp la sol
**b.** viteza inițială cu care a fost lansat corpul al doilea dacă cele două corpuri ajung simultan pe Pământ
**c.** vitezele cu care ajung corpurile la sol

**14.** De la înălțimea $h$=40 m față de sol se aruncă vertical în sus un corp cu viteza $v_0$=10 m/s. Neglijăm forțele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** timpul după care corpul ajunge la sol
**b.** intervalul de timp după care trebuie lăsat liber din același punct un al doilea corp astfel încât cele două corpuri să ajungă simultan la sol
**c.** vitezele cu care ajung cele două corpuri la sol

**15.** Se aruncă pe verticală în sus un corp de la sol cu viteza inițială $v_{01}$=45 m/s. Concomitent de la o înălțime $h$ și de pe verticala punctului de lansare a primului corp, se aruncă vertical în jos un al doilea corp. Viteza inițială a celui de-al doilea corp este $v_{02}$=5 m/s. Să se afle:
**a.** înălțimea $h$ de la care a fost aruncat al doilea corp dacă în momentul întâlnirii aceste corpuri aveau valorile vitezelor egale
**b.** intervalul de timp care desparte sosirea mobilelor pe sol
**c.** vitezele cu care cad corpurile pe sol

**16.** Un copil împinge cu viteza $v_0$=1 m/s, o carte aflată pe o masă cu înălțimea $h$=80 cm. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** traiectoria corpului
**b.** timpul în care ajunge cartea la sol
**c.** distanța unde cade cartea pe podea față de marginea mesei

**17.** O piatră este aruncată pe orizontală cu viteza $v_0$=15 m/s de pe acoperișul unui bloc, cade pe sol sub unghiul $\alpha=60^0$ față de orizontală. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** timpul de mișcare al pietrei și înălțimea blocului
**b.** viteza cu care ajunge piatra la sol
**c.** distanța față de bloc unde cade piatra

**18.** Dacă se aruncă orizontal din același punct aflat la înălțimea $h=2v_{01}^2/g$, două corpuri al doilea având viteza inițială $v_{02}=4v_{01}$, să se afle:
**a.** de câte ori se modifică timpul de cădere al corpului al doilea față de timpul de cădere al primului corp?
**b.** de câte ori se modifică bătaia corpului al doilea față de bătaia primului corp?
**c.** de câte ori se modifică viteza corpului al doilea față de viteza primului corp la sol?

**19.** Se aruncă de pe Pământ sub un unghi $\alpha=60^0$ un corp cu viteza $v_0=10\sqrt{3}$ m/s. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul:
**a.** traiectoria pietrei
**b.** distanța la care lovește piatra Pământul măsurată din punctul de aruncare
**c.** înălțimea maximă la care urcă piatra
**d.** valoarea vitezei pietrei la momentul $t=1$ s

**20.** Se aruncă oblic un proiectil cu viteza inițială $v_0=10\sqrt{17}$ m/s, astfel încât înălțimea maximă la care ajunge proiectilul să fie egală cu bătaia sa. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul:
**a.** cosinusul unghiul format de vectorul viteză inițială cu orizontala
**b.** înălțimea maximă la care urcă proiectilul
**c.** timpul de zbor

**21.** Doi copii cu înălțimea de $h=1,2$ m fiecare se joacă cu mingea arucând-o unul altuia. Știind că mingea zboară de la un copil la altul, să se afle, dacă neglijăm frecarea cu aerul:
**a.** înălțimea maximă măsurată față de sol atinsă de minge în timpul jocului, dacă mingea zboară de la un copil la altul timp de $t=2$ s
**b.** distanța maximă la care se pot afla copii, dacă viteza cu care este aruncată inițial mingea este $v_0=10$ m/s și unghiul sub care trebuie aruncată mingea
**c.** timpul de zbor al mingii în condițiile punctului **b.**

**22.** Dintr-un turn cu înălțimea $h=10$ m se aruncă deasupra orizontalei un corp cu viteza inițială $v_0=20$ m/s sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală. Să se afle, dacă neglijăm efectul forțelor de frecare cu aerul:
**a.** înălțimea maximă la care urcă corpul
**b.** timpul de zbor al corpului
**c.** distanța măsurată față de baza turnului la cade corpul
**d.** viteza cu care ajunge corpul la baza turnului și cu ce unghi față de orizontală lovește solul

**23.** Din vârful unui stâlp cu înălțimea $h=10$ m își ia zborul orizontal o pasăre cu viteza $v_1=14,05$ m/s. Concomitent un copil lansează din imediata vecinătate a solului o piatră cu viteza inițială $v_2=30$ m/s sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală. Piatra lovește pasărea. Să se afle:
**a.** momentele de timp după care piatra poate lovi pasărea
**b.** distanțele de la care trebuie aruncată piatra, măsurate de la baza stâlpului
**c.** vitezele pietrei când aceasta lovește pasărea

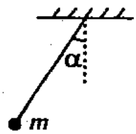
**24.** O pușcă este orientată către o țintă aflată la înălțimea $h=50$ m deasupra solului sub unghiul $\alpha=30^0$ față de orizontală, sub care pușcașul vede ținta. În momentul tragerii glontelui către țintă, aceasta se lasă liberă. Să se arate că glontele lovește întotdeauna ținta și să se afle după cât timp lovește glontele ținta dacă viteza acestuia este $v_0=400$ m/s

## 2.2. Principiile mecanicii

**1.** Un corp cu masa $m$=2 kg este ridicat accelerat cu accelerația $a$=2$g$. Firul de susținere rezistă la o tensiune maximă $T_{max}$=80 N. Să se afle:
**a.** tensiunea în firul de susținere
**b.** accelerația maximă cu care trebuie ridicat accelerat corpul pentru ca firul să se rupă

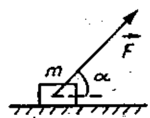
**2.** Într-un lift care urcă frânat cu accelerația $a$=1 m/s$^2$ se află un om cu masa $m$=100 kg. Să se afle:
**a.** valoarea forței cu care apasă omul pe podeaua liftului
**b.** valoarea maximă a accelerației cu care coboară liftul, astfel încât omul să mai apese pe podea

**3.** De un fir este prin un corp cu masa $m$=0,5 kg. Corpul și firul se află într-un vagon care pornește accelerat. Pendulul deviază față de verticală cu unghiul α=30° ca în figură. Să se afle accelerația vagonului și tensiunea în fir în poziție finală.



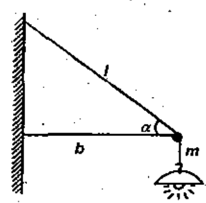

**4.** Un corp cu masa $m$=200 g este suspendat de un fir și se află într-un tren care se mișcă rectiliniu și uniform. Mecanicul trenului începe să frâneze cu accelerația $a$=10/ $\sqrt{3}$ m/s$^2$. Să se afle unghiul cu care deviază pendulul și tensiunea din fir.

**5.** Asupra unui corp cu masa $m$=2 kg acționează sub unghiul α=60° o forță $F$ ca în figură. Mișcarea corpului se face fără frecare cu accelerația $a$=1 m/s$^2$. Să se afle valoarea forței $F$ și valoarea forței cu care corpul apasă pe plan.

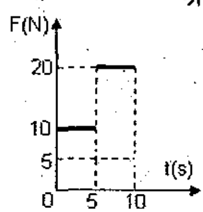



**6.** De tavanul unei camere este suspendată o lustră cu masa $M$=4 kg. O pisică cu masa $m$=2 kg sare și se agață de lustră, dar în același moment lustra cade și atunci pisica se cațără pe lustră, astfel că rămâne la aceeași înălțime față de podea. Să se afle accelerația cu care cade lustra și forța cu care pisica împinge lustra în jos.

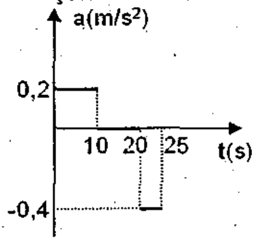
**7.** O lampă cu masa $m$=6 kg este suspendată ca în figură. Cunoscând lungimea cablului ℓ=0,5 m și lungimea tijei $b$=0,4 m să se afle tensiunile din cablu și din tijă.




**8.** Asupra unui corp cu masa $m$=5 kg aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală se acționează cu o forță orizontală care variază cu timpul ca în figură. Corpul se mișcă fără frecare. Să se afle:
**a.** reprezentarea grafică a dependenței vitezei în raport cu timpul
**b.** distanța parcursă de corp în timpul $t_1$=5 s
**c.** viteza medie în intervalul (0,10)s

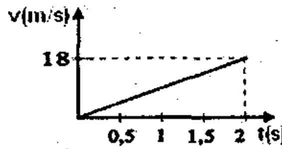


**9.** În figura alăturată este reprezentată dependenţa de timp a acceleraţiei unui lift cu masa $m$=500 kg care este ridicat vertical, pornind din repaus, cu ajutorul unui cablu inextensibil şi de masă neglijabilă. Mişcarea liftului se realizează în timpul de 25 s. Să se afle:



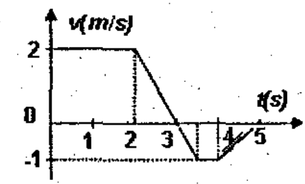

**a.** forţa de tensiune din cablu în fiecare dintre cele trei intervale de mişcare
**b.** reprezentarea grafică a vitezei liftului în funcţie de timp în intervalul $t\in(0;25)$s
**c.** viteza liftului la momentul $t$=15 s
**d.** viteza medie a liftului în intervalul de timp $t\in(0;10)$s

**10.** În figura alăturată este redată dependenţa de timp a vitezei unui corp cu masa $m$=100 g, care cade vertical de la o înălţime. Să se afle:




**a.** acceleraţia corpului
**b.** forţa de rezistenţă întâmpinată de corp
**c.** distanţa parcursă de corp între momentele de timp $t_1$=0,5 s şi $t_2$=1,5 s

**11.** În figura alăturată este reprezentată dependenţa de timp a vitezei unui corp cu masa $m$=10 kg. Să se afle:

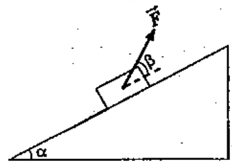



**a.** distanţa parcursă de corp în primele $t_1$=3 s
**b.** viteza în modul medie a mobilului în $\Delta t$=5 s
**c.** reprezentarea grafică a forţei rezultante care se exercită asupra corpului în 5 s

**12.** Un ciclist cu masa de $M$=80 kg porneşte din repaus pe un drum orizontal şi parcurge o distanţă $d$ cu acceleraţia $a$=0,25 m/s², atingând viteza $v$=18 km/h. Masa bicicletei este $m$=20 kg. Forţa de tracţiune dezvoltată este de $n$=5 ori mai mare decât forţa de rezistenţă la înaintare. După atingerea vitezei $v$, ciclistul se deplasează rectiliniu uniform şi este depăşit de un camion de lungime $\ell$=10 m care circulă în sens contrar, cu viteza $v_c$=54 km/h. Să se afle:
**a.** intervalul de timp necesar atingerii vitezei $v$
**b.** forţa de tracţiune dezvoltată de ciclist
**c.** graficul vitezei ciclistului în funcţie de timp în primele 25 s de mişcare
**d.** intervalul de timp $\Delta t$ în care camionul depăşeşte ciclistul, dacă lungimea bicicletei este $\ell_1$=2 m

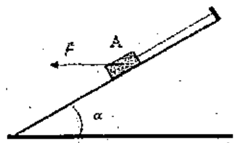
**13.** Un paraşutist cu masa $m$=80 kg întâmpină în cădere datorită aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza instantanee $\vec{F}=-k\vec{v}$. Paraşutistul sare dintr-un avion de la o înălţime foarte mare şi îşi deschide imediat paraşuta. Ştiind că în imediata vecinătate a Pământului paraşutistul cade cu o viteză limită $v_0$=4 m/s, să se afle:
**a.** constanta de proporţionalitate $k$
**b.** acceleraţia paraşutistului când viteza acestuia este $v$=2 m/s

**14.** Asupra unui corp cu masa $m$=1kg aflat în mişcare pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30$^0$ acţionează o forţă $F$ ca în figură sub un unghi $\beta$=45$^0$ faţă de planul înclinat. Corpul se mişcă fără frecare. Să se afle:



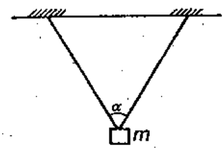

**a.** forţa cu care se acţionează dacă corpul urcă pe planul înclinat cu acceleraţia $a$=2 m/s$^2$
**b.** forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului
**c.** valoarea forţei pentru care corpul nu mai apasă pe planul înclinat şi valoarea corespunzătoare a acceleraţiei

**15.** Un corp cu masa $m$=4 kg este menţinut în repaus pe un plan înclinat cu unghi $\alpha$=30$^0$ cu ajutorul unui fir. Asupra corpului acţionează o forţă orizontală $F$=10$\sqrt{3}$ N ca în figură. Neglijând frecarea dintre corp şi plan, să se afle:




**a.** tensiunea din fir
**b.** acceleraţia cu care coboară corpul pe planul înclinat dacă se taie firul
**c.** forţa maximă pentru care corpul mai rămâne în contact cu suprafaţa planului înclinat

**16.** De tavanul unui vagon care se mişcă în plan orizontal este suspendat un corp cu masa $m$=3 kg, prin intermediul a două fire de aceeaşi lungime aşezate simetric în planul vertical al mişcării ca în figura alăturată. Tensiunea de rupere a firelor este $F$=30 N. Unghiul dintre cele două fire este $\alpha$=60$^0$. Să se afle:

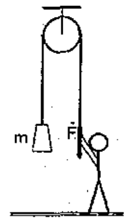



**a.** tensiunile din cele două fire când acceleraţia vagonului este $a$=1 m/s$^2$
**b.** care fir se va rupe primul?
**c.** valoarea acceleraţiei la care se rupe un fir

**17.** Un corp cu masa $m$=1 kg se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=45$^0$, fără frecări. Se împinge accelerat planul înclinat pe orizontală cu acceleraţia $a_0$=2 m/s$^2$. Să se afle:
**a.** acceleraţia cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă planul este deplasat spre dreapta
**b.** acceleraţia cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă planul este deplasat spre stânga
**c.** valoarea maximă acceleraţiei şi sensul deplasării planului, dacă corpul nu mai apasă pe planul înclinat

**18.** Într-un lift care se mişcă cu o acceleraţie $a_0$=4 m/s$^2$ în sus se află pe podeaua acestuia un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30$^0$. Pe acest plan înclinat alunecă fără frecare un corp cu masa $m$=2 kg. Să se afle:
**a.** acceleraţia cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat
**b.** forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului înclinat
**c.** acceleraţia cu care va aluneca liber corpul de-a lungul planului înclinat şi forţa de apăsare exercitată de corp dacă acceleraţia liftului este în jos

**19.** Un muncitor având greutatea $G_1$=1000 N ridică un sac de masă $m$=80 kg prin intermediul unui cablu trecut peste un scripete ca în figura alăturată. Muncitorul acţionează asupra firului cu o forţă constantă $F$=900 N. Să se afle:




**a.** acceleraţia sacului
**b.** forţa de apăsare exercitată de om asupra planului orizontal
**c.** acceleraţia maximă cu care poate fi ridicat sacul fără ca muncitorul să se ridice de pe sol
**d.** forţa de tensiune din cablu ştiind că sacul este ridicat cu aceeaşi acceleraţie ca la punctul **a.**, dacă se înlocuieşte sacul cu un altul a cărui masă este $m'$=40 kg

**20.** Un om cu masa $M$=80 kg susţine un balot cu masa $m$=10 kg cu ajutorul unui fir inextensibil trecut peste un scripete fix ca în figura alăturată. Să se afle:


**a.** tensiunea în firul de susţinere
**b.** valoarea forţei de apăsare normală exercitată de acel om pe suprafaţa de sprijin, dacă firul este înclinat cu $\alpha$=30° faţă de verticală
**c.** valoarea forţei exercitate de om asupra suprafeţei de sprijin

**21.** Pe o masa orizontală se află două corpuri cu masele $M$=4 kg şi $m$=1 kg legate prin intermediul unui fir inextensibil. Se trage corpul $M$ cu o forţă orizontală $F$=15 N, mişcarea corpurilor făcându-se fără frecare. Să se afle:
**a.** acceleraţia sistemului
**b.** tensiunea din fir
**c.** acceleraţia sistemului şi tensiunea din fir, dacă forţa $F$ formează cu orizontala un unghi $\alpha$=60°

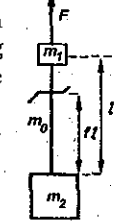
**22.** Un corp cu masa $m_1$=1 kg este prins cu un fir de un alt doilea corp cu masa $m_2$=3 kg. Cele două corpuri sunt ridicate pe verticală în sus cu o acceleraţie $a$=2 m/s² de o forţă $F$ aplicată corpului 1 ca în figura alăturată. Să se afle:


**a.** forţa necesară ridicării celor două corpuri
**b.** tensiunea în firul de susţinere
**c.** forţa necesară ridicării celor două corpuri uniform
**d.** forţa maximă necesară ridicării celor două corpuri, dacă firul se rupe la valoarea tensiunii $T_{max}$=45 N

**23.** De un corp cu masa $m$=1 kg este legat cu un cablu care are masa $m_0$=0,6 kg şi lungimea $\ell$=1 m. Masa cablului se consideră uniform distribuită de-a lungul acestuia. De capătul superior al cablului se trage cu o forţă $F$=20 N ca în figura alăturată. Să se afle:


**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul
**b.** valoarea tensiunii într-un punct aflat la distanţa $x=\ell/3$
**c.** reprezentarea grafică a tensiunii din fir în funcţie de distanţa $x$

**24.** Un corp cu masa $m_1$=1 kg este tras în sus ca în figura alăturată cu o forță $F$=72 N. De corpul $m_1$ este prins un corp cu masa $m_2$=3 kg prin intermediul unui lanț cu masa $m_0$=2 kg şi cu lungimea $\ell$. Să se afle:

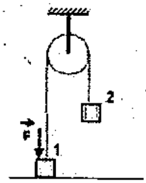



**a.** accelerația cu care se mişcă sistemul
**b.** tensiunea într-un punct aflat la distanța $x=f\ell$, unde $f$=0,6
**c.** forța pentru care sistemul coboară cu accelerația $a$=2 m/s$^2$

**25.** Maimuța din figură are masa $m_1$=6 kg, iar ciorchinele de banane are masa $m_2$=4 kg. Ciorchinele este legat de un capăt al firului, iar maimuța stă nemişcată şi prinsă de fir. Firul şi scripetele sunt inițial imobile. La un moment dat, scripetele se deblochează şi firul începe să se mişte. Să se afle:

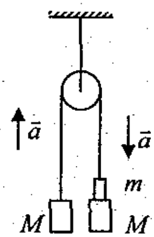
**a.** accelerația cu care se mişcă corpurile şi valoarea tensiunii din fir
**b.** forța exercitată de scripete asupra tavanului de susținere
**c.** viteza maimuței după o secundă de la deblocarea firului
**d.** accelerația ciorchinelui, dacă maimuța coboară de pe fir şi trage de acesta în jos cu greutatea ei

**26.** Un sistem mecanic este alcătuit dintr-un fir la capetele căruia sunt prinse două corpuri de mase $m_1$=100 g, respectiv $m_2$=300 g ca în figură. Pentru a menține corpul 1 pe suprafața orizontală, apăsăm vertical în jos cu o forță de valoare $F$=5 N. Să se afle:




**a.** forța de reacțiune din axul scripetelui
**b.** forța de reacțiune normală care acționează asupra corpului 1 din partea suprafeței
**c.** distanța parcursă de corpuri în timpul $t$=1 s de la lăsarea liberă a sistemului

**27.** Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu mase egale $M$=800 g ținute inițial în repaus. Se aşază pe unul din cele două corpuri un mic corp cu masa $m$. Se lasă liber sistemul şi se constată că sistemul se mişcă accelerat cu accelerația $a$=2 m/s$^2$. Să se afle:



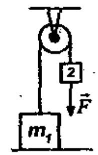

**a.** tensiunea în firul de susținere
**b.** masa corpului mic
**c.** forța cu care corpul $m$ apasă pe corpul cu masa $M$

**28.** De tavanul unui lift este agățat un scripete ideal prin intermediul unui cablu. Peste scripete este trecut un fir cu două corpuri la capete $m_1$=500 g şi $m_2$=300 g. Liftul urcă accelerat cu accelerația $a$=2 m/s$^2$. Să se afle:

**a.** accelerația cu care se mişcă corpurile față de lift
**b.** tensiunea în firul de susținere
**c.** forța din cablu

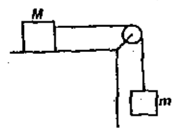
**29.** Un lanţ de lungime $\ell$=20 m şi masă $m$=6 kg este trecut peste un scripete ideal. În momentul în care de o parte a scripetelui atârnă o lungime de lanţ $\ell_0=f\ell$, cu $f$=80% să se afle:
**a.** acceleraţia lanţului în acest moment
**b.** tensiunea din mijlocul lanţului în condiţiile punctului **a.**
**c.** reprezentarea grafică a acceleraţiei lanţului în funcţie de fracţiunea $f$ a lanţului care atârnă

**30.** Fie sistemul din figură. Corpurile de la capetele firului au masele $m_1$=6 kg, $m_2$=2 kg şi $F$=10 N. Să se afle:
**a.** forţa normală de reacţiune din partea suprafeţei orizontale
**b.** forţa verticală cu care trebuie să se tragă de corpul $m_2$, astfel ca sistemul să se mişte accelerat cu $a$=2 m/s²
**c.** forţa cu care sistemul de corpuri acţionează asupra sistemului de prindere în condiţiile punctului **b.**

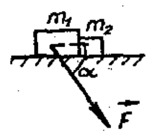



**31.** Pe un plan înclinat cu unghiul α=30° se află un corp cu masa $m$=500 g. Se lasă liber corpul. Se neglijează frecarea dintre corp şi plan. Să se afle:
**a.** acceleraţia cu care coboară liber corpul pe plan şi forţa cu care acesta apasă pe plan
**b.** acceleraţia cu care trebuie împins planul înclinat astfel încât corpul să rămână în repaus faţă de plan
**c.** forţa cu care corpul apasă pe plan în condiţiile punctului **b.**

**32.** De un corp aşezat pe o masă orizontală fără frecări şi cu masa $M$=1 kg se prinde un fir inextensibil care trece peste un scripete ideal şi susţine un corp vertical cu masa $m$=2 kg ca în figură. Se lasă sistemul liber. Să se afle:
**a.** acceleraţia sistemului
**b.** tensiunea în firul de susţinere
**c.** reacţiunea în axul scripetelui




**33.** Pe un plan orizontal fără frecare se află în contact două corpuri cu masele $m_1$=3 kg şi $m_2$=1 kg. Se împinge sub un unghi α=60° faţă de orizontală corpul 1 cu o forţă $F$=40 N ca în figură. Să se afle:
**a.** acceleraţia cu care se deplasează sistemul de corpuri
**b.** forţa cu care apasă corpul 1 asupra planului
**c.** forţa cu care corpul 1 împinge corpul 2



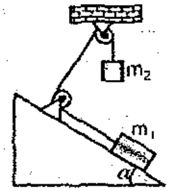

**34.** Două corpuri de mase $m_1$=12 kg respectiv $m_2$=8 kg sunt legate între ele cu un fir inextensibil de masă neglijabilă şi sunt aşezate pe o suprafaţă orizontală. Asupra corpului de masă $m_1$ acţionează forţa $F_1=20\sqrt{3}$ N a cărei direcţie formează cu orizontala unghiul $\alpha_1$=30°, iar asupra corpului de masă $m_2$ acţionează forţa $F_2=20\sqrt{2}$ N a cărei direcţie formează cu orizontala unghiul $\alpha_2$=45°, ca în figura alăturată. Frecarea dintre corpuri şi suprafaţa orizontală se neglijează. Să se afle:

**a.** accelerația corpurilor

**b.** valoarea minimă a forței $F_1$, pentru care apăsarea exercitată pe suprafața orizontală de corpul cu masa $m_1$ este nulă


**c.** raportul dintre valorile forțelor $F_2$ și $F_1$ astfel încât sistemul de corpuri se deplasează orizontal cu viteză constantă

**35.** Fie sistemul mecanic din figură. Se cunosc masele $m_1$=1 kg, $m_2$=0,4 kg, unghiul planului înclinat fix $\alpha$=30° și se neglijează frecarea. Se lasă libere cele două corpuri. Să se afle:




**a.** accelerația corpurilor

**b.** valorile masei $m_2$ pentru care accelerația sistemului este $a$=2 m/s²

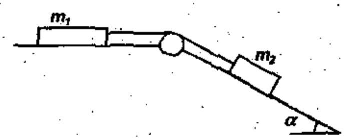
**c.** masa $m_1$ pentru care sistemul rămâne în repaus

**36.** Pe un plan orizontal se află un corp cu masa $m_1$=1 kg prins de un fir de un alt doilea corp cu masa $m_2$=3 kg aflat pe un plan înclinat cu unghi $\alpha$=30° ca în figură. De primul corp se trage cu o forță orizontală $F$=20 N astfel încât corpul al doilea să urce pe planul înclinat. Mișcarea corpurilor se face fără frecare. Să se afle:

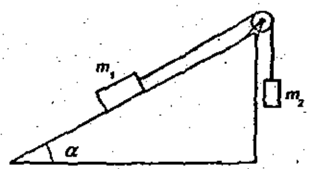
**a.** accelerația corpurilor

**b.** tensiunea în firul de legătură

**c.** forța paralelă cu planul orizontal aplicată corpului cu masa $m_1$ care asigură urcarea uniformă a corpului cu masa $m_2$




**37.** Se așază un corp cu masa $m_1$=3 kg pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30°. Corpul se mișcă fără frecare. De corpul cu masa $m_1$ se leagă cu ajutorul unui fir inextensibil trecut peste un scripete, ca în figură un alt corp cu masa $m_2$=1 kg. Să se afle:

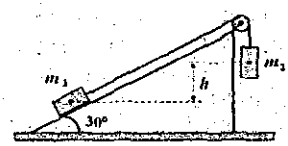



**a.** accelerația sistemului

**b.** tensiunea din fir

**c.** reacțiunea în axul scripetelui

**38.** Fie dispozitivul din figura alăturată. Corpurile cu masele $m_1$ și $m_2$ se află inițial în repaus. Se neglijează frecările. Să se afle:




**a.** raportul $m_1/m_2$

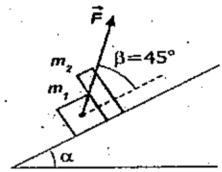
**b.** timpul după care cele două corpuri ajung la același nivel dacă corpurile pornesc din repaus, iar $h$=1,5 m și $m_2$=2$m_1$

**c.** viteza sistemului la momentul de timp calculat la punctul **b.**

**39.** Se consideră dispozitivul din problema precedentă. Corpurile cu masele $m_1$ și $m_2$ se află într-un raport astfel încât sistemul de corpuri se află în repaus. Se neglijează frecările. Se cunosc $m_1$=2 kg și $\alpha$=30°. Să se afle:

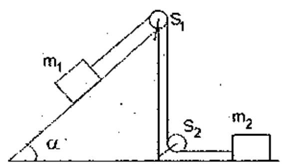
**a.** valoarea masei $m_2$ astfel încât sistemul de corpuri să rămână în echilibru
**b.** valoarea masei adiționale adăugată pe corpul $m_2$ astfel încât acesta să se mişte în jos cu accelerația $a$=2 m/s$^2$
**c.** forța cu care apasă corpul adăugat pe corpul de masă $m_2$

**40.** Pe un plan înclinat cu unghiul α=30$^0$ față de orizontală se află în repaus şi în contact două corpuri de mase $m_1$=2 kg şi $m_2$=1 kg. Atunci când asupra corpului de masă $m_1$ începe să acționeze o forță $F$=50 N, ca în figura alăturată, cele două corpuri încep să se mişte accelerat fără frecare pe planul înclinat. Să se afle:

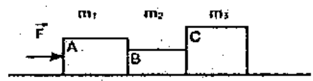



**a.** accelerația cu care urcă cele două corpuri pe planul înclinat
**b.** forța cu care corpul de masă $m_1$ acționează asupra corpului de masă $m_2$
**c.** valoarea forței astfel încât corpurile să urce uniform

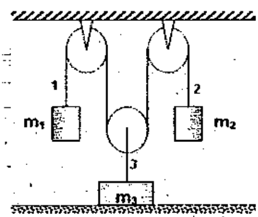
**41.** Masele corpurilor care alcătuiesc sistemul reprezentat în figură sunt $m_1$=6 kg şi $m_2$=2 kg. Planul înclinat fixat formează unghiul α=30$^0$ cu orizontala. Se consideră că efectele frecării sunt neglijabile, firul ideal şi lungime suficientă, iar scripeții sunt ideali. Inițial corpurile sunt menținute în repaus. Să se afle:
**a.** accelerația sistemului
**b.** valoarea tensiunii din fir
**c.** valoarea forței de reacțiune din axul scripetelui $S_2$




**42.** Trei corpuri cu masele $m_1$=5 kg, $m_2$=3 kg şi $m_3$=2 kg sunt împinse ca în figură pe o masă orizontală netedă fără frecări de o forță $F$=15 N. Să se afle:
**a.** accelerația sistemului de corpuri
**b.** forța cu care corpul cu masa $m_2$ împinge corpul cu masa $m_3$
**c.** forța cu care corpul cu masa $m_1$ împinge corpul cu masa $m_2$



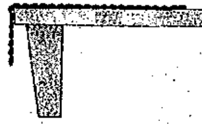

**43.** Prin intermediul unui sistem de scripeți ideali sunt suspendate trei corpuri cu masele $m_1$=$m_2$ şi $m_3$=30 kg ca în figura alăturată. Sistemul se află în repaus. Forța normală de reacțiune este $N$=180 N. Să se afle:
**a.** tensiunea din firul care susține corpul cu masa $m_3$
**b.** tensiunile din firele care susțin corpurile cu masele $m_1$ şi $m_2$
**c.** masele corpurilor $m_1$ şi $m_2$



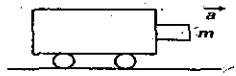

## 2.3. Forța de frecare

**1.** Coeficientul de frecare la alunecare a unui corp pe o suprafață orizontală este $\mu$=0,1. Corpul are masa $m$=1 kg, iar legea de mişcare este $x$=4+2$t$+$t^2$ (m). Să se afle valoarea forței de tracțiune.

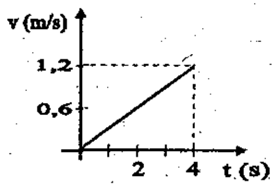
**2.** Un lanţ omogen este aşezat pe o masă, astfel încât o parte a sa atârnă liber ca în figură. Lanţul începe să alunece în momentul partea care atârnă constituie o fracţiune $f$=0,2 din lungimea lanţului. Să se afle coeficientul de frecare la alunecare dintre lanţ şi suprafaţa orizontală.



**3.** Căruciorul din figura alăturată se deplasează cu acceleraţia $a$=20 m/s$^2$. Să se afle valoarea coeficientului de frecare al corpului aflat în contact cu căruciorul, dacă acest corp nu cade.

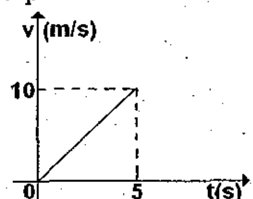



**4.** Pentru a pune în mişcare o maşină cu masa $m$=800 kg, care nu poate porni, acţionează doi oameni care împing cu forţele paralel cu solul $F_1$=330 N şi $F_2$=410 N un interval de timp $t$=4 s. Maşina întâmpină o forţă de frecare cu solul care se consideră constantă. Variaţia vitezei maşinii în funcţie de timp pe durata acestei operaţiuni este redată în graficul alăturat. Să se afle:




**a.** acceleraţia maşinii
**b.** forţa de frecare
**c.** distanţa parcursă de maşină în timpul $t$=4 s
**d.** intervalul de timp scurs din momentul încetării acţiunii celor doi oameni până la oprirea maşinii

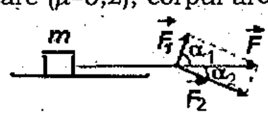
**5.** Un corp de masă $m$=2 kg se deplasează rectiliniu pe un plan orizontal sub acţiunea unei forţe $F$=10 N paralelă cu planul. Viteza corpului variază în timp conform graficului din figura alăturată. Să se afle:




**a.** acceleraţia corpului
**b.** valoarea coeficientului de frecare la alunecare
**c.** valoarea pe care ar trebui să o aibă coeficientul de frecare la alunecare începând din momentul $t_1$=5 s, când acţiunea forţei $F$ încetează, ştiind că la momentul $t_2$=7 s, corpul se opreşte

**6.** Un corp se mişcă pe o suprafaţă orizontală cu frecări, astfel că legea de mişcare este $v$=8-4$t$. Să se afle:
**a.** acceleraţia corpului
**b.** coeficientul de frecare dintre corp şi suprafaţă
**c.** distanţa parcursă de corp până la oprire

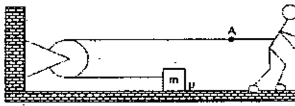
**7.** Un corp cu masa $m$=100 kg se deplasează pe un plan orizontal fiind tras de două forţe concurente $F_1$=150 N şi $F_2$ prin intermediul unui fir. Cele două forţe sunt orientate în plan vertical şi formează între ele un unghi de 90º, ca în figura alăturată. Rezultanta celor două forţe este paralelă cu planul orizontal. Sub acţiunea acestor forţe şi a forţei de frecare ($\mu$=0,2), corpul are o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia $a$=1m/s$^2$. Să se afle:




**a.** modulul rezultantei forţelor $F_1$ şi $F_2$

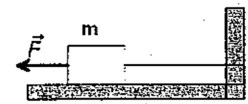
**b.** unghiurile $\alpha_1$ şi $\alpha_2$ formate de forţele $F_1$ şi respectiv $F_2$ cu orizontala şi valoarea forţei $F_2$
**c.** noua valoare a acceleraţiei corpului, dacă la un moment dat acţiunea forţelor $F_1$ şi $F_2$ încetează iar corpul îşi continuă mişcarea pe planul orizontal

**8.** Pe un plan orizontal se află un corp cu masa $m$=20 kg legat de un fir trecut peste un scripete ideal ca în figura alăturată. Un om trage de capătul $A$ al firului. Coeficientul de frecare dintre planul orizontal şi corp este $\mu$=0,2. Să se afle:



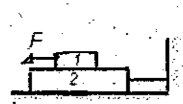

**a.** forţa orizontală cu care trebuie să tragă omul de fir astfel încât corpul să se deplaseze cu viteză constantă
**b.** forţa din axul scripetelui în condiţiile deplasării uniforme a omului
**c.** acceleraţia cu care se deplasează corpul de masă $m$ dacă omul trage de fir astfel încât forţa de tensiune din acesta să devină $T_1$=60 N

**9.** Un corp de masă $m$=50 kg aflat iniţial în repaus pe o suprafaţă orizontală fără frecare, este legat de un suport fix printr-un fir orizontal de masă neglijabilă, întins, netensionat ca în figura alăturată. Forţa ce acţionează asupra corpului de masă $m$ depinde de timp conform relaţiei $F(t)=10t+10$ (N), iar firul se rupe la o forţă de tensiune $T_{max}$=100 N. Imediat după ruperea firului, corpul intră într-o zonă în care coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi plan este $\mu$=0,2. Să se afle:
**a.** momentul de timp la care se rupe firul
**b.** reprezentarea grafică a forţei de tensiune din fir în funcţie de timp, în primele 9 s de la începutul acţiunii forţei $F$

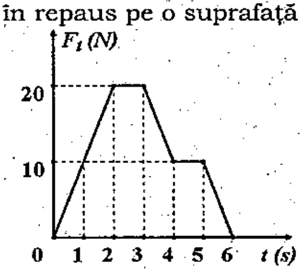



**c.** acceleraţia pe care o are corpul la momentul $t$=10 s

**10.** Se trage orizontal cu forţa $F$ de corpul 1 cu masa $m_1$=10 kg ca în figură. Coeficientul de frecare dintre corpuri este $\mu$=0,75 şi se neglijează frecarea între corpul 2 cu masa $m_2$=20 kg şi suportul orizontal. Firul care leagă corpul 2 de suportul vertical suportă o tensiune maximă $T_{max}$=80 N. Să se afle:
**a.** forţa $F$ necesară deplasării corpului 1 faţă de corpul 2
**b.** tensiunea în fir
**c.** dacă firul rezistă la solicitare şi justificarea acestui fapt

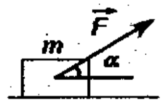



**11.** Un bloc de beton de masă $m$=10 kg, aflat iniţial în repaus pe o suprafaţă plană şi orizontală, este supus unei forţe de tracţiune paralelă cu suprafaţa orizontală. Forţa de tracţiune îşi păstrează direcţia, iar modulul ei se modifică în timp conform graficului din figura alăturată. Coeficientul de frecare dintre blocul de beton şi suprafaţa plană este $\mu$=0,1. Să se afle:
**a.** viteza blocului de beton în intervalul de timp $t\in[0;1]$s
**b.** acceleraţia blocului de beton în intervalul de



timp $t\in[2;3]$s
**c.** forța de frecare dintre blocul de beton și suprafața orizontală în intervalul de timp $t\in[1;6]$s și la momentul $t$=0,3 s
**d.** forța rezultantă ce acționează asupra blocului în intervalul de timp $t\in[4;5]$s

**12.** Pentru a pune în mișcare un corp cu masa $m$=3 kg aflat pe o suprafață orizontală trebuie să tragem cu o forță $F$ care face cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$ ca în figura alăturată. Cunoscând valoarea coeficientului de frecare $\mu$=0,1, să se afle:

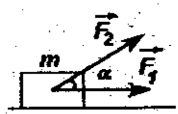



**a.** forța $F$ pentru care corpul pornește accelerat cu accelerația $a$=2 m/s²
**b.** forța cu care corpul apasă pe suprafață
**c.** forța $F$ pentru care corpul se mișcă uniform

**13.** Asupra unui corp de masă $m$=2 kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, acționează o forță constantă $F$=13,56 N care face unghiul $\alpha=60^0$ cu orizontala un timp $t$=15 s, ca în figura precedentă. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și suprafața orizontală este $\mu=1/\sqrt{3}$. Să se afle:
**a.** accelerația corpului:
**b.** viteza corpului imediat după încetarea acțiunii forței
**c.** intervalul de timp $\Delta t_{op}$, măsurat după încetarea acțiunii forței $F$, în care corpul se oprește

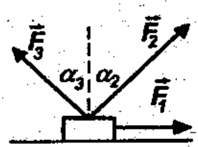
**14.** Pe un plan orizontal se află o sanie cu masa $m$=2 kg. Asupra acesteia un copil apasă cu o forță $F$ sub un unghi $\alpha=60^0$ cu orizontala astfel că sania se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,1. Să se afle:
**a.** forța $F$, dacă sania se mișcă accelerat cu accelerația $a$=1 m/s²
**b.** forța cu care apasă sania pe planul orizontal
**c.** forța $F$, cu care trage copilul sania sub unghiul $\alpha=60^0$ cu orizontala, astfel încât sania să nu apese asupra planului

**15.** Un corp cu masa $m$=6 kg se află pe un plan orizontal pe care se poate deplasa cu frecare. Asupra corpului acționează simultan ca în figură forțele $F_1$=20 N și $F_2=10\sqrt{3}$ N și $\alpha=30^0$. Să se afle:




**a.** forța de apăsare normală
**b.** valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre corp și planul orizontal pentru care corpul mai rămâne în repaus
**c.** accelerația corpului dacă coeficientul de frecare are valoarea $\mu$=0,34

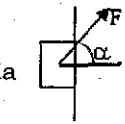
**16.** Asupra unui corp cu masa $m$=2 kg acționează trei forțe $F_1$=12 N, $F_2=4\sqrt{3}$ N $F_3=8\sqrt{2}$ N ca în figură. Cunoscând valoarea unghiului $\alpha_2=30^0$ și $\alpha_3=45^0$ și știind că acest corp are o mișcare accelerată cu $a$=2 m/s², să se afle:




**a.** forța de frecare

**b.** forța normală de reacțiune din partea suprafeței
**c.** coeficientul de frecare la alunecare

**17.** Un corp cu masa $m$=3 kg este menținut în repaus pe un perete vertical cu ajutorul unei forțe care formează un unghi $\alpha=30^0$ cu orizontala ca în figura alăturată. Dacă între corp și plan există frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(2\sqrt{3})$, să se afle:

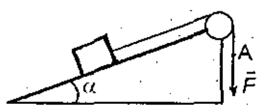



**a.** valoarea minimă a acestei forțe
**b.** forța de apăsare exercitată de corp asupra peretelui
**c.** valoarea forței pentru care corpul urcă accelerat cu accelerația $a$=1 m/s²

**18.** Un snowmobil cu masa $m$=800 kg având inițial viteza $v_0$=10 m/s coboară pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ și atinge viteza $v$=25 m/s după un interval de timp egal cu $t$=5 s. Să se afle:
**a.** accelerația snowmobilului
**b.** forța de frecare
**c.** coeficientul de frecare

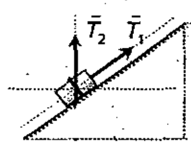
**19.** Pe o scândură orizontală se află un corp cu masa $m$=500 g. Scândura începe să se încline și când unghiul făcut de scândură cu orizontala este de $\alpha=30^0$, corpul începe să alunece uniform. Apoi scândura se înclină cu unghiul $\beta=60^0$. Să se afle:
**a.** valoarea coeficientul de frecare dintre corp și scândură
**b.** forța paralelă cu planul astfel încât corpul să urce accelerat cu accelerația $a$=2 m/s² când $\beta=60^0$
**c.** distanța parcursă de corp în $\Delta t$=2 s sub acțiunea forței de la punctul **b.**, dacă corpul pornește din repaus

**20.** Sub acțiunea forței $F$=15,2 N, care are punctul de aplicație în $A$, corpul de masă $m$=2 kg este ridicat uniform pe planul înclinat față de orizontală cu un unghi $\alpha$, pentru care sin$\alpha$=0,6 ca în figura alăturată. Să se afle:




**a.** coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat
**b.** accelerația cu care coboară corpul dacă forța are valoarea $F$=8 N
**c.** viteza cu care ar ajunge corpul la baza planului înclinat dacă durata coborârii este $\Delta t$=2 s în condițiile puctului **b.** și corpul pornește din repaus

**21.** O ladă cu masa totală $m$=2500 kg este urcată uniform la înălțimea $h$=3 m pe un plan înclinat cu lungimea $\ell$=5 m, cu ajutorul a două cabluri: unul menținut mereu paralel cu planul înclinat și altul menținut mereu vertical, ca în figură. Tensiunile în cabluri au valorile: $T_1$=16 kN, respectiv $T_2$=5 kN. Apoi, după ce este golită, lada este lăsată să alunece liber pe planul înclinat. Să se afle:




**a.** forța de frecare
**b.** coeficientul de frecare la alunecare

**c.** accelerația cu care coboară lada goală pe planul înclinat

**22.** Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=60^0$ cu orizontala se aruncă în sus de-a lungul planului un corp cu viteza inițială $v_0=9,9$ m/s. Mişcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0,25$. Să se afle:
**a.** accelerația cu care urcă corpul pe planul înclinat
**b.** timpul după care se opreşte corpul
**c.** distanța parcursă de corp până la oprire

**23.** Un corp cu masa $m=2$ kg se lasă liber pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$. Corpul se mişcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0,25$. Planul înclinat se continuă cu un plan orizontal pe care mişcarea corpului se face cu acelaşi coeficient de frecare. Să se afle:
**a.** accelerația cu care coboară corpul pe planul înclinat
**b.** accelerația cu care se mişcă corpul pe planul orizontal
**c.** forța paralelă cu planul înclinat cu care se acționează asupra corpului pentru ca acesta să urce uniform pe plan

**24.** Pe o pârtie înclinată cu unghiul $\alpha=30^0$ un copil trage în sus o sanie cu masa $m=2$ kg cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/\sqrt{3}$ un timp $t=6$ s, acționând cu o forță de-a lungul pârtiei $F=21$ N. Apoi acțiunea forței $F$ încetează. Să se afle:
**a.** accelerația saniei când acționează forța $F$
**b.** distanța parcursă de sanie până când forța $F$ încetează să acționeze
**c.** distanța parcursă de sanie până la oprire după încetarea acțiunii forței $F$

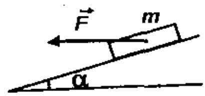
**25.** De un corp cu masa $m=1$ kg, care se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ mişcându-se cu frecare cu coeficientul $\mu=1/\left(2\sqrt{3}\right)$, se trage în sus paralel cu planul prin intermediul unui fir. Să se afle:
**a.** sensul şi accelerația cu care se mişcă corpul dacă tensiunea este $T=15$ N
**b.** sensul şi accelerația cu care se mişcă corpul dacă tensiunea este $T=2$ N
**c.** tensiunile în fir pentru ca acest corp să urce, respectiv să coboare uniform

**26.** Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=45^0$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului $F_1=5$ N, iar pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului trebuie aplicată o forță în sus de-a lungul planului $F_2=15$ N. Să se afle:
**a.** masa corpului
**b.** coeficientul de frecare
**c.** tangenta unghiului de frecare

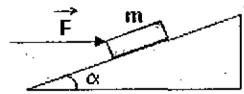
**27.** Pentru a menține în echilibru un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=45^0$ trebuie aplicată corpului o forță minimă normală pe plan de $n=3$ ori mai mare decât o forță minimă orizontală. Să se afle:
**a.** coeficientul de frecare

**b.** viteza atinsă de corp după un interval de timp $t$=2 s, dacă acesta este lăsat liber
**c.** distanța parcursă de corp în condițiile punctului **b.**

**28.** Asupra unui corp cu masa $m$=2 kg aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° se trage orizontal cu o forță $F$=2 N ca în figura alăturată. Mişcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(4\sqrt{3})$. Să se afle:
**a.** accelerația cu care coboară corpul pe planul înclinat
**b.** forța cu care apasă corpul pe plan
**c.** forța $F$ pentru care corpul nu mai apasă pe plan

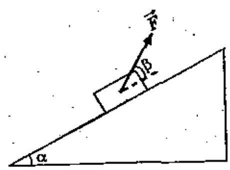



**29.** Sub acțiunea unei forțe orizontale $F=30\sqrt{3}$ N, un corp de masă $m$=4 kg coboară uniform cu frecare pe un plan înclinat fix de unghi $\alpha$=60°, ca în figura alăturată. Să se afle:
**a.** forța de apăsare normală la suprafața planului înclinat
**b.** forța de frecare la alunecare dintre corp şi plan
**c.** coeficientul de frecare la alunecare




**30.** Asupra unui corp cu masa $m$=2 kg aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° acționează o forță orizontală $F$=30 N, ca în figura de la problema precedentă. Coeficientul de frecare pe planul înclinat este $\mu = 1/(2\sqrt{3})$. Să se afle:
**a.** accelerația corpului pe plan
**b.** forța pentru care corpul urcă uniform
**c.** accelerația minimă orizontală cu care trebuie împins planul înclinat pentru ca acest corp să înceapă să urce uniform pe plan în lipsa forței $F$

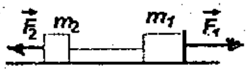
**31.** Un corp cu masa $m$=1 kg este aşezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ şi este tras cu o forță $F$ care formează unghiul $\beta=45^0$ cu planul înclinat ca în figură. Acest corp se mişcă uniform cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 1/\sqrt{3}$. Să se afle:




**a.** forța $F$ şi forța de apăsare normală
**b.** forța $F$ şi forța de apăsare normală dacă corpul se mişcă accelerat în sus de-a lungul planului cu accelerația $a$=1 m/s²
**c.** valoarea forței $F$, astfel încât corpul să nu mai apese pe planul înclinat

**32.** Două corpuri cu masele $m_1$=2 kg şi $m_2$=0,5 kg sunt aşezate pe un plan orizontal cu frecare şi sunt legate între ele printr-un fir inextensibil. De corpul cu masă $m_1$ se trage orizontal cu forța $F$=10 N. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea $\mu$=0,2. Să se afle:
**a.** accelerația cu care se mişcă corpurile
**b.** tensiunea din firul de legătură
**c.** viteza şi distanța parcursă de corp în primele $t$=4 secunde de mişcare

**33.** Asupra sistemului din figura alăturată format din corpurile cu masele $m_1$=8 kg, $m_2$=12 kg încep să acţioneze simultan forţele $F_1$=70 N, $F_2$=20 N. Iniţial sistemul se afla în repaus. Mişcarea corpurilor decurge cu frecare, $\mu$=0,2. După un interval de timp forţa $F_2$ încetează să acţioneze. Să se afle:

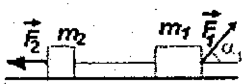



**a.** acceleraţia cu care se mişcă iniţial corpurile

**b.** tensiunea din firul de legătură când acţionează ambele forţe

**c.** tensiunea din firul de legătură imediat când $F_1$ încetează să acţioneze

**34.** Fie sistemul de corpuri din figura alăturată. Se cunosc $m_1$=4 kg, $m_2$=2 kg, $F_1$=30 N, $F_2$=10,95 N, $\alpha$=30$^0$ şi $\mu$=0,2. Să se afle:



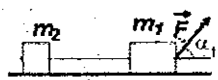

**a.** acceleraţia cu care se mişcă corpurile

**b.** tensiunea din firul de legătură

**c.** forţa $F_1$ pentru care sistemul se mişcă uniform spre dreapta

**35.** Corpurile de mase $m_1$=2 kg şi $m_2$=1 kg se află pe o suprafaţă orizontală cu frecare şi sunt legate printr-un fir inextensibil, ca în figură. Coeficientul de frecare este acelaşi pentru ambele corpuri şi are valoarea $\mu$=0,6. Asupra corpului $m_1$ acţionează o forţă $F$=20 N a cărei direcţie formează cu orizontală unghiul $\alpha$. Dacă forţele normale de apăsare exercitate de cele două corpuri asupra suprafeţei de contact sunt egale, să se afle:

**a.** unghiul $\alpha$




**b.** forţele de frecare care acţionează asupra corpurilor

**c.** acceleraţia sistemului format din cele două corpuri

**d.** forţa de tensiune din firul de legătură

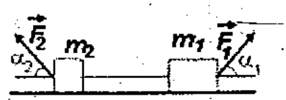
**36.** Un elev transportă pe o săniuţă cu masa $M$=10 kg un colet cu masa $m$=5kg. Sfoara care trage de săniuţă formează cu orizontala un unghi $\alpha$=30$^0$. Săniuţa porneşte din repaus şi se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=1/\sqrt{3}$. Săniuţa parcurge distanţa $d$=400 m într-un timp $t$=20 s. Să se afle:

**a.** acceleraţia săniuţei

**b.** forţa de frecare dintre colet şi sanie

**c.** forţa de tracţiune exercitată de elev

**37.** Două corpuri de mase $m_1$=6 kg respectiv $m_2$=4 kg sunt legate între ele cu un fir inextensibil de masă neglijabilă şi sunt aşezate pe o suprafaţă orizontală. Asupra corpului de masă $m_1$ acţionează

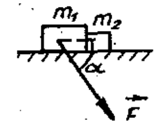



forţa $F_1=30\sqrt{2}$ N a cărei direcţie formează cu orizontala unghiul $\alpha_1$=45$^0$, iar asupra corpului de masă $m_2$ acţionează forţa $F_2$=5 N a cărei direcţie formează cu orizontala unghiul $\alpha_2$=30$^0$, ca în figura alăturată. Coeficienţii de frecare dintre corpuri şi suprafaţa orizontală sunt $\mu_1=1/(2\sqrt{2})$ şi $\mu_2=1/(5\sqrt{3})$. Să se afle:

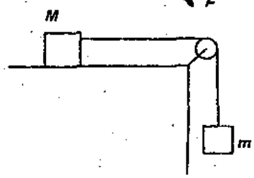
**a.** acceleraţia corpurilor

**b.** distanța parcursă de cele două corpuri în intervalul de timp $t$=10 s
**c.** valoarea forței $F_1$ astfel ca sistemul să se mişte uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**

p.248 **38.** Două corpuri cu masele $m_1$=300 g şi $m_2$=200 g sunt aşezate pe un plan orizontal şi se află în contact. Se împinge în jos asupra corpului cu masa $m_1$ cu o forță $F$=5 N sub un unghi $\alpha$=30$^0$ cu orizontala ca în figură. Corpurile se pot deplasa cu frecare coeficientul de frecare fiind acelaşi $\mu$=0,2. Să se afle:
**a.** accelerația cu care se deplasează sistemul de corpuri
**b.** forța cu care $m_1$ acționează asupra corpului $m_2$
**c.** forța de apăsare normală exercitată de corpul 1 asupra planului orizontal

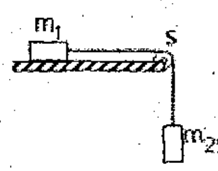



**39.** Un corp cu masa $M$=3 kg este aşezat pe un plan orizontal. De acest corp este legat un fir ideal trecut peste un scripete ideal şi având la capăt un corp cu masa $m$=2 kg ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea $\mu$=0,2. Să se afle:
**a.** accelerația cu care se mişcă corpurile
**b.** tensiunea din firul de legătură
**c.** reacțiunea în axul scripetelui




**40.** Două corpuri identice cu masa $m$=2 kg sunt aşezate ca în figura precedentă. Lăsat liber sistemul din repaus corpurile se mişcă cu accelerația $a$=2 m/s². Pe masa orizontală mişcarea se efectuează cu frecare. Să se afle:
**a.** coeficientul de frecare la alunecare
**b.** forța orizontală care trebuie să acționeze asupra corpului de pe plan, dacă sistemul se mişcă în sens contrar cu aceeaşi accelerație
**c.** tensiunea din firul de legătură în cazul **b.**

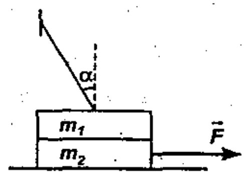
**41.** Un corp cu masa $m_1$ este aşezat pe un plan orizontal. De acest corp este legat un fir ideal trecut peste un scripete şi având la capăt un corp cu masa $m_2$=4$m_1$=4 kg. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea $\mu$=0,1. Sistemul se mişcă accelerat cu accelerația $a_1$. Dacă se schimbă corpurile între ele, sistemul se mişcă cu accelerația $a_2$, în condițiile în care coeficientul de frecare dintre corpul $m_2$ şi plan are aceeaşi valoare. Să se afle:
**a.** raportul accelerațiilor corpurilor
**b.** masa suplimentară care trebuie aşezată deasupra corpului de masă $m_1$, în situația din figură, pentru ca sistemul de corpuri să se deplaseze cu viteză constantă
**c.** forța orizontală care trage de corpul cu masă $m_1$ astfel ca sistemul de copuri să se mişte accelerat cu accelerația $a$=1 m/s² iar $m_2$ să urce
**d.** accelerația sistemului în timpul urcării corpului de masă $m_2$, dacă printr-un impuls, se imprimă corpului de masă $m_1$ o viteză mică $v$ orizontal spre stânga



**42.** Pe o scândură aflată pe un plan orizontal cu masa $m_1$=2,5 kg este aşezat un corp cu masa $m_2$=0,5 kg. Coeficientul de frecare dintre corp şi scândură este $\mu_2$=0,2, iar coeficientul de frecare la alunecare între plan şi scândură este $\mu_1$=0,1. Să se afle care este valoarea minimă a forţei cu care se trage de scândură pentru ca acel corp aflat pe ea să înceapă să alunece.

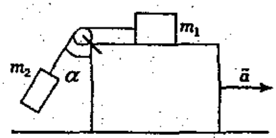
**43.** Un corp cu masa $m_1$=1 kg se află pe o scândură suficient de lungă cu masa $m_2$=4 kg, care la rândul ei se află pe o masă orizontală fără frecări. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi scândură este $\mu$=0,2. Asupra scândurii se exercită o forţă orizontală $F=c\cdot t$, unde $c$=5 N/s, iar $t$ este timpul. Să se afle:
**a.** acceleraţia cu care se mişcă iniţial corpurile
**b.** momentul de timp la care corpurile încep să se mişte independent
**c.** acceleraţiile cu care se mişcă corpurile în final

**44.** Pe un plan orizontal se află două cărămizi, cea inferioară are masa $m_2$=2 kg, iar cea superioară are masa $m_1$=1 kg. Cărămida superioară este legată de un perete vertical cu un cablu care formează cu verticala unghiul α=45⁰ ca în figură. Între cărămizi există frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$=0,2. Se neglijează frecarea dintre cărămida inferioară şi plan. Cărămida inferioară este trasă de o forţă $F$ pentru a o scoate de sub cea superioară. Să se afle:



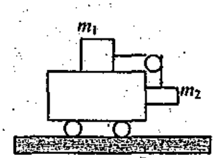

**a.** tensiunea în fir
**b.** forţa $F$ cu care trebuie trasă cărămida inferioară
**c.** forţa cu care apasă cărămida inferioară pe planul orizontal

**45.** Un corp cu masa $m_1$=500 g se află pe o platformă care se poate deplasa fără frecare în plan orizontal cu acceleraţia $a$=4 m/s². Corpul cu masa $m_1$ este legat printr-un fir trecut peste un scripete de corpul $m_2$=100g ca în figură. Corpurile nu se deplasează faţă de platformă. Să se afle:




**a.** tensiunea în firul care leagă cele două corpuri
**b.** cosinusul unghiul cu care deviază corpul $m_2$ faţă de verticală
**c.** coeficientul de frecare dintre corpul $m_1$ şi platformă

**46.** Corpurile din figură sunt legate printr-un fir ideal şi au masele $m_1$=10 kg şi $m_2$=2,5 kg. Ele sunt în repaus pe căruciorul aflat în mişcare rectilinie şi uniformă. Să se afle:



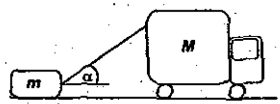

**a.** tensiunea în firul de legătură
**b.** valoarea coeficientului de frecare
**c.** acceleraţia ce trebuie imprimată căruciorului, astfel încât dacă schimbăm locul corpurilor între ele, acestea să rămână în echilibru pe cărucior, dacă coeficientul de frecare $\mu$ este acelaşi pentru ambele corpuri

**47.** O maşină cu masa $M$=1500 kg se deplasează rectiliniu şi uniform pe un drum orizontal tractând o ladă cu masa $m$=100 kg prin intermediul unui cablu orientat la un unghi $\alpha=60^0$ faţă de orizontală ca în figură. Coeficientul de frecare dintre ladă şi şosea este $\mu_1$=0,8. Să se afle:

**a.** tensiunea din cablu

**b.** coeficientul de frecare dintre roţile maşinii şi asfalt

**c.** forţa de frecare care se exercită asupra fiecărei roţii, dacă se consideră că toate roţile sunt motoare şi toate apasă la fel asupra şoselei




**48.** Un autocamion cu masa $M$=4 t de care este legată, printr-o bară rigidă, o remorcă cu masa $m$=1 t, se deplasează uniform cu viteza iniţială $v_0$=16 m/s. La un moment dat este acţionată frâna care blochează numai roţile autocamionului, odată cu încetarea acţiunii forţei de tracţiune dezvoltată de motor. Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu$=0,8. Să se afle:

**a.** acceleraţia cu care se mişcă autocamionul şi remorca, după ce încetează forţa de tracţiune dezvoltată de motor

**b.** forţa cu care este împins autocamionul de remorcă în timpul frânării

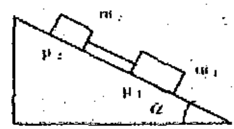
**c.** spaţiul parcurs până la oprire din momentul acţionării frânei

**49.** Două corpuri cu masele $m_1$=4 kg şi $m_2$=8 kg legate printr-o tijă rigidă, alunecă liber pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ faţă de orizontală. Mişcarea se efectuează cu frecare, coeficientul de frecare fiind pentru primul corp $\mu_1 = 1/\left(2\sqrt{3}\right)$, iar pentru al doilea $\mu_2 = 1/(5\sqrt{3})$. Să se afle:

**a.** acceleraţia sistemului de corpuri

**b.** tensiunea din tijă

**c.** tensiunea din tijă în absenţa frecării între corpuri şi suprafaţa planului înclinat

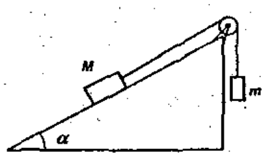



**50.** Un corp cu masa $M$=3 kg este aşezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ ca în figură şi se poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 1/\left(5\sqrt{3}\right)$. De corp este legat printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal aflat în vârful planului înclinat un alt corp cu masa $m$=1 kg. Să se afle:

**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul

**b.** tensiunea din fir

**c.** reacţiunea din axul scripetelui



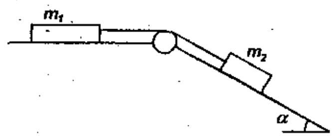

**51.** Un corp cu masa $M$=1 kg este aşezat pe un plan înclinat suficient de ling, cu unghiul $\alpha=60^0$ şi poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu$=0,2. De corp este legat printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal aflat în vârful planului înclinat un alt corp cu masa $m$=5 kg ca în figura precedentă. Sistemul porneşte din repaus. Să se afle:

**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul

**b.** tensiunea din fir
**c.** distanța parcursă de sistemul de corpuri în timpul $t$=2s
**d.** masa $m$ pentru care corpul $M$ urcă uniform pe planul înclinat

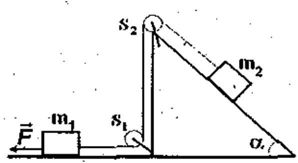
**52.** Pe un plan înclinat cu lungimea $\ell$=10 m și înălțimea $h$=6 m se află un corp cu masa $m$ legat printr-un fir inextensibil de un taler cu masă neglijabilă. Corpul rămâne în echilibru pe planul înclinat dacă pe taler se așază mase cuprinse între $m_1$=10 kg și $m_2$=20 kg. Să se afle:
**a.** masa corpului $m$
**b.** coeficientul de frecare dintre corp și plan
**c.** accelerația cu care coboară corpul cu masa $m$, dacă se dezleagă corpul cu masa $m_1$ și se trage cu o forță egală cu jumătate din greutatea acestui corp

**53.** Pe un plan orizontal se află un corp cu masa $m_1$=100 g care se poate mișca cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$=0,2. De acest corp este prins printr-un fir ideal ce trece peste un scripete ideal un al doilea corp cu masa $m_2$=400 g aflat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° ca în figură. Mișcarea corpului al doilea se face cu același coeficient de frecare. Să se afle:

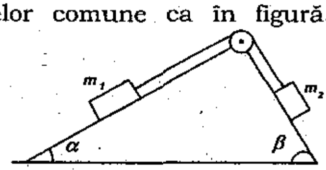



**a.** accelerația cu care se mișcă sistemul
**b.** tensiunea din fir
**c.** masa corpului $m_1$ pentru care sistemul se mișcă uniform

**54.** Un sistem format din două corpuri de mase $m_1$=2 kg și $m_2$=0,5 kg, legate printr-un fir inextensibil și de masă neglijabilă, se poate deplasa cu frecare sub acțiunea forței de tracțiune $F$=10 N, paralelă cu suprafața orizontală, ca în figură. Coeficienții de frecare la alunecare ai celor două corpuri cu suprafața orizontală, respectiv cu suprafața planului înclinat au aceeași valoare, $\mu$=0,2. Unghiul planului înclinat este $\alpha$=45°. Să se afle:
**a.** accelerația sistemului
**b.** forța de tensiune din fir
**c.** forța exercitată asupra axului scripetelui $S_1$
**d.** forța $F$ astfel ca sistemul să se deplaseze uniform în același sens ca la punctul **a.**




**55.** Pe două plane înclinate cu unghiurile $\alpha$=60° și $\beta$=30° se află două corpuri cu masele $m_1$=1 kg și $m_2$=7 kg legate printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal fixat în vârful planelor comune ca în figură. Coeficienții de frecare la alunecare sunt $\mu_1$=0,1 și respectiv $\mu_2$=0,2. Să se afle:
**a.** accelerația cu care se mișcă sistemul
**b.** tensiunea din fir
**c.** reacțiunea din axul scripetelui

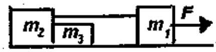


**56.** Corpurile au masele $m_1$=5 kg, $m_2$=1 kg şi $m_3$=2 kg. De corpul $m_1$ se trage cu o forţă $F$=28 N ca în figură. Între toate corpurile şi suprafaţa orizontală coeficientul de frecare are aceeaşi valoare $\mu$=0,25. Să se afle:

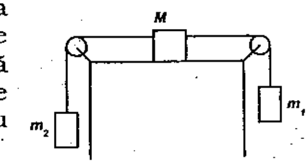
**a.** acceleraţia fiecărui corp

**b.** tensiunea din firul ce leagă corpurile

**c.** forţa cu care corpul $m_2$ împinge corpul $m_3$




**57.** De corpul cu masa $M$=4 kg care se poate deplasa cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$=0,25 sunt prinse două fire ideale ce trec peste câte un scripete ideal. De aceste fire sunt prinse două corpuri verticale cu masele $m_1$=5 kg şi $m_2$=1 kg ca în figură. Să se afle:




**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul

**b.** tensiunile din cele două fire de legătură

**c.** masa $m_1$ pentru care sistemul se mişcă uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**

**58.** Corpul cu masa $M$=4 kg este legat prin intermediul a două fire ideale ca în figura precedentă de corpurile cu masele $m_1$ şi $m_2$=2 kg. Corpul cu masa $M$ se deplasează cu frecare, iar coeficientul de frecare este $\mu$=0,25. Ansamblul de corpuri porneşte din repaus. Sistemul se deplasează spre dreapta cu acceleraţia $a$=2 m/s$^2$. Să se afle:

**a.** masa $m_1$

**b.** raportul tensiunilor din cele două fire în condiţiile punctului **a.**

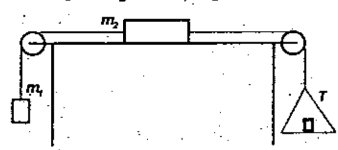
**c.** coeficientul de frecare, dacă $m_1$=4 kg şi sistemul se deplasează spre dreapta cu acceleraţia $a_1$=1,2 m/s$^2$

**59.** Un elev realizează dispozitivul din figură. Corpurile au masele $m_1$=3 kg şi $m_2$=8 kg iar talerul are masa neglijabilă. Elevul observă că dacă pune un cubuleţ pe taler, corpul $m_1$ începe să coboare uniform, iar dacă mai adaugă încă 4 cubuleţe identice pe taler, corpul $m_1$ începe să urce uniform. Să se afle:

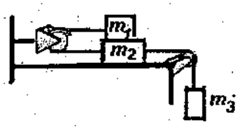
**a.** coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul $m_2$ şi suprafaţa plană

**b.** masa unui cubuleţ

**c.** acceleraţia sistemului dacă pe taler elevul aşază 3 cubuleţe identice fiecare cu masa $m$=200 g




**60.** Fie copurile cu masele $m_1$=2 kg, $m_2$=3 kg şi $m_3$=10 kg din desenul alăturat. Între cele două corpuri aflate pe suprafaţa orizontală este frecare cu $\mu_1$=0,2 şi între corp şi masă este frecare cu $\mu_2$=0,1. Să se afle:

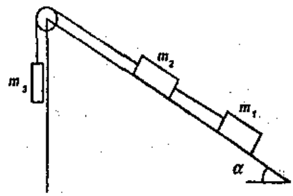



**a.** acceleraţia sistemului de corpuri

**b.** tensiunile din fire

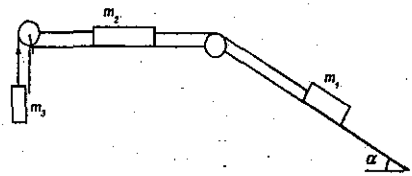
**c.** masa $m_3$ care determină deplasarea uniformă a sistemului în acelaşi sens

**61.** Un plan înclinat formează cu orizontala un unghi $\alpha$=60°. Trei corpuri cu masele $m_1$=1 kg, $m_2$=2 kg şi $m_3$=5 kg sunt legate între ele cu ajutorul unor fire ideale ca în figură. Corpurile aflate pe planul înclinat se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind acelaşi $\mu$=0,2. Să se afle:



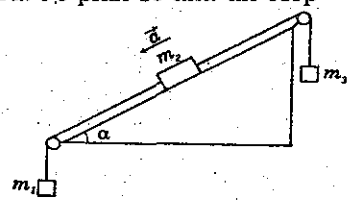

**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul
**b.** tensiunea din firul ce leagă corpul 3 de corpul 2
**c.** tensiunea din firul ce leagă corpul 2 de corpul 1

**62.** Pe un plan orizontal se află un corp cu masa $m_2$=2 kg care se poate deplasa cu frecare, cu coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu_2$=0,2. De acest corp sunt prinse două fire, unul de un corp aflat pe verticală cu masa $m_3$=1 kg trecut peste un scripete ideal şi celălalt de un corp cu masa $m_1$=5 kg aflat pe un plan înclinat cu un unghiul $\alpha$=30° tot cu ajutorul altui scripete ca în figură. Corpul cu masa $m_1$ se deplasasează cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu_1$=0,1. Să se afle:



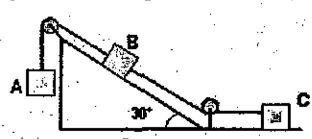

**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul
**b.** tensiunile din cele două fire de legătură

**63.** La capetele unui plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° se află doi scripeţi peste care este trecut câte un fir iar la extremităţile acestor fire sunt atârnate corpurile cu masele $m_1$=4 kg şi $m_3$=2 kg ca în figură. Pe plan se află un corp cu masa $m_2$=2 kg care se poate deplasa cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$=0,2. Să se afle:




**a.** acceleraţia cu care se mişcă sistemul
**b.** tensiunile din cele două fire de legătură
**c.** acceleraţia sistemului de corpuri $m_1$ şi $m_2$ dacă se rupe firul care leagă corpul $m_3$ de corpul $m_2$

**64.** Corpurile *A*, *B* şi *C* sunt plasate ca în figură şi legate prin fire care trec peste doi scripeţi ideali. Atât pe planul înclinat cât şi pe cel orizontal mişcarea se efectuează cu frecare, coeficienţii de frecare la alunecare fiind $\mu_B=1/(2\sqrt{3})$ şi $\mu_C$=0,25. Corpurile *B* şi *C* au fiecare greutatea egală cu 40 N, iar corpul *A* coboară cu viteză constantă. Să se afle:



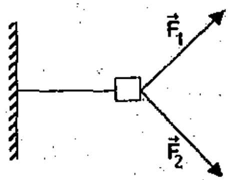

**a.** forţele de tensiune din fire
**b.** masa corpului *A*
**c.** masa corpului *A* pentru care tot sistemul se mişcă accelerat cu acceleraţia $a$=2 m/s²

## 2.4. Legea lui Hooke. Forţa elastică

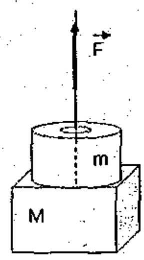
**1.** Un cablu de oţel are lungimea nedeformată $\ell_0$=20 m şi diametrul $d$=1 mm. Modulul de elasticitate al lui Young pentru acest oţel $E$=2,15·$10^{11}$ N/m$^2$. Cablul ridică uniform un corp şi se alungeşte cu $\Delta\ell$=1,77 mm. Se neglijează masa cablului. Să se afle:
**a.** masa corpului suspendat de cablu
**b.** efortul unitar din cablu
**c.** alungirea şi efortul unitar, dacă cablul se ridică vertical cu acceleraţia $a$=2 m/s$^2$

**2.** Un lift cântăreşte $m$=976 kg, iar cablul său de acţionare, din oţel, cu lungimea maximă verticală $\ell$=30 m şi secţiunea $S$=3 cm$^2$ cântăreşte pe fiecare metru $m_0$=1,6 kg. La pornirea accelerată de la parter acceleraţia este $a$=1,5 m/s$^2$. Pentru oţel modulul de elasticitate al lui Young $E$=2·$10^{11}$ N/m$^2$, iar efortul unitar maxim admisibil în cablu este $\sigma$=5,75·$10^7$ N/m$^2$. Să se afle:
**a.** tensiunea maximă apare în cablu la pornirea accelerată a liftului
**b.** alungirea cablului în momentul pornirii
**c.** secţiunea minimă a cablului pentru a nu se depăşi efortul unitar maxim admisibil

**3.** Două forţe de valori egale $F_1=F_2=2\sqrt{2}$ N având direcţii perpendiculare într-un plan orizontal, acţionează asupra unui corp cu masa $m$=2 kg, legat printr-un fir de lungime $\ell_0$=0,5 m şi secţiune $S$=1 mm$^2$ de un perete fix. La un moment dat se taie firul, corpul deplasându-se fără frecare pe planul orizontal sub acţiunea rezultantei forţelor. Să se afle:
**a.** rezultanta celor două forţe
**b.** modulul de elasticitate al firului, ştiind că alungirea sa sub acţiunea forţei rezultante este $\Delta\ell$=20 μm
**c.** viteza corpului după $t$=2 s de la tăierea firului




**4.** Un bloc de lemn cu masa $M$=5 kg este suspendat de un fir de oţel. Peste bloc este aşezat un manşon de fier cu masa $m$=3 kg. De firul de oţel, care traversează manşonul de-a lungul axei acestuia, fără să-l atingă, se trage vertical în sus cu o forţă constantă $F$=96 N. Să se afle:
**a.** forţa cu care blocul împinge manşonul
**b.** intervalul de timp în care viteza sistemului variază cu $\Delta v$=6 m/s
**c.** efortul unitar din fir, dacă secţiunea acestuia are diametrul $d=1/\pi$ mm




**5.** Un corp cu masa $m$=20 kg este tras uniform pe o suprafaţă plană şi orizontală, având coeficientul de frecare la alunecare, $\mu=\sqrt{3}/4$, prin intermediul unui cablu elastic, de masă neglijabilă, ce formează unghiul α=30$^0$ cu orizontala. Diametrul cablului este $d=\sqrt{2/\pi}$ mm, iar alungirea relativă a acestuia este $\varepsilon$=2%. Să se afle:

**a.** forța de tracțiune
**b.** modulul de elasticitate longitudinală al materialului cablului
**c.** forța de reacțiune normală la suprafață

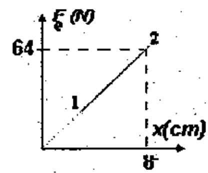
**6.** Două cabluri metalice de oțel cu secțiunile egale $S$=1 cm² sunt fixate de câte un zid, iar capetele libere ale lor se prind împreună în prelungire. Distanța dintre ziduri este $\ell$=15 m, iar lungimile cablurilor nedeformate sunt $\ell_1$=7,25 m și $\ell_2$=7,55 m. Cunoscând modulul de elasticitate al lui Young $E=2\cdot10^{11}$ N/m², să se afle:
**a.** tensiunile din cele două cabluri
**b.** alungirile absolute ale cablurilor
**c.** eforturile unitare la care sunt supuse cablurile

**7.** Datele din tabelul atașat au fost obținute într-un experiment de studiere a deformării unei corzi elastice. Coarda a fost utilizată pentru a trage uniform și orizontal, pe o suprafață orizontală, un corp de masă $m$=2,5 kg cu frecare, ($\mu$=0,2). Se neglijează greutatea corzii. Să se afle:

| $F$(N) | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ell$(cm) | 340 | 340,6 | 341,2 | 341,8 | 342,4 | 343,1 | 344,1 |

**a.** domeniul de valori pentru care este valabilă legea lui Hooke
**b.** constanta elastică a corzii
**c.** alungirea absolută a corzii în timpul deplasării uniforme a corpului

**8.** Graficul din figura alăturată indică dependența forței elastice de alungirea resortului. Un corp cu masa $m$=200 g este suspendat la capătul inferior al resortului elastic vertical fixat la capătul superior. Să se afle:
**a.** constanta elastică a resortului
**b.** alungirea absolută a resortului în situația în care corpul suspendat la capătul resortului este în echilibru
**c.** alungirea resortului, dacă se fixează capătul superior al resortului de tavanul unui cărucior care se deplasează orizontal cu accelerația $a$=4,582 m/s²



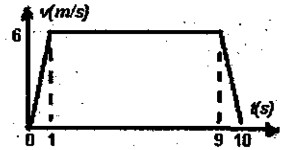

**9.** Un resort suspendat vertical are masa neglijabilă și lungimea în stare nedeformată $\ell_0$=20 cm. Prinzând de capătul liber al resortului o bilă de mici dimensiuni, la echilibru, lungimea acestuia crește cu $f$=5%. Dacă se acționează asupra bilei prinse de resort cu o forță verticală de modul $F_1$=5 N, la echilibru, alungirea resortului se dublează. Să se afle:
**a.** masa bilei
**b.** constanta elastică a resortului
**c.** deformarea resortului, dacă forța $F_1$ este înlocuită de o altă forță orientată orizontal, de modul $F_2$=3,32 N

**10.** De tavanul unui lift este suspendat un dinamometru (resort) cu constanta elastică $k$=200 N/m de care atârnă un corp cu masa $m$=1 kg. Să se afle ce forță indică dinamometrul dacă liftul:
**a.** urcă cu accelerația $a$=0,8 m/s²
**b.** coboară accelerat cu accelerația $a$=0,8 m/s²

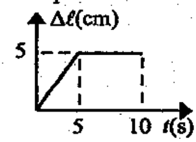
c. se deplasează uniform

11. Când un copil se cântăreşte pe un cântar resortul cântarului se deformează cu $x$=2 cm, iar acul indică $m$=30 kg. Apoi pe cântar se urcă un adult cu masa $M$=90 kg. Să se afle:
a. constanta elastică a resortului cântarului
b. deformaţia resortului dacă în locul copilului pe cântar se urcă adultul
c. masa indicată de acul cântarului când adultul se află pe acesta şi cântarul se află într-un lift care coboară frânat cu acceleraţia $a$=0,6 m/s$^2$

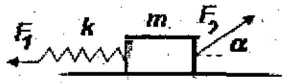
12. De tavanul unui ascensor este suspendat prin intermediul unui resort un corp de iluminat cu masa $m$=500 g. Lungimea nedeformată a resortului este $\ell_0$=20 cm. Graficul alăturat reprezintă viteza ascensorului în timpul mişcării de la parter până la ultimul etaj. Să se afle:
a. constanta elastică a resortului dacă deformarea datorată atârnării corpului de iluminat este $\Delta\ell$=1 cm când $t\in(1,9)$ s
b. lungimea deformată a resortului în cea de-a treia etapă a mişcării
c. numărul de nivele ale clădirii dacă distanţa dintre două etaje succesive este $h_0$=3 m




13. Un corp cu masa $m$=5 kg este tras cu frecare pe o suprafaţă orizontală, prin intermediul unui resort cu constanta elastică $k$=200 N/m, paralel cu suprafaţa. Deformarea resortului în funcţie de timp este reprezentată în figura alăturată. Să se afle:
a. forţa elastică la momentul $t$=2 s
b. forţa de frecare când $\Delta\ell$=2 cm
c. coeficientul de frecare la alunecare

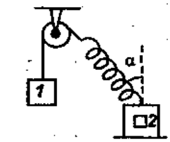



14. Asupra unui corp de masă $m$=1 kg se exercită forţele $F_1$=7 N şi $F_2$=4 N ca în figură. Unghiul dintre direcţia forţei $F_2$ şi orizontală este α=30°. Mişcarea corpului pe planul orizontal se face cu frecare ($\mu$=0,2), iar constanta elastică a resortului este $k$=100 N/m. Să se afle:
a. alungirea resortului
b. valoarea acceleraţiei corpului
c. valoarea minimă a forţei $F_2$ pentru care corpul aflat în situaţia de mai sus nu mai apasă pe planul orizontal, dacă menţine nemodificat unghiul α făcut cu suprafaţa orizontală



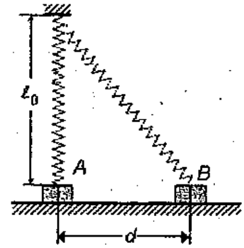

15. Un corp cu masă $m$=500 g aflat pe un plan orizontal este pus în mişcare rectilinie uniformă prin tragere cu ajutorul unui resort orizontal care are constanta elastică $k$=50 N/m şi este întins cu $x_0$=1 cm. Să se afle:
a. coeficientul de frecare
b. acceleraţia corpului când alungirea resortului este $x$=3$x_0$
c. alungirea resortului, dacă corpul este tras accelerat pe acelaşi plan orizontal cu acceleraţia $a_1$=0,83 m/s$^2$ cu ajutorul resortului care formează cu orizontala un unghi α=30°

**16.** Fie sistemul din figură. Se cunosc $m_1$=3 kg, α=60° şi $k$=500 N/m. Corpul 2 este un cub cu densitatea $\rho$=8000 kg/m³ şi latura ℓ=10 cm are un gol de formă cubică cu latura $\ell_1$=4 cm. Să se afle:




**a.** alungirea resortului
**b.** forţa cu care cubul apasă pe suprafaţa plană
**c.** coeficientul de frecare minim dintre corpul 2 şi suprafaţa orizontală, dacă acesta nu alunecă pe suprafaţă

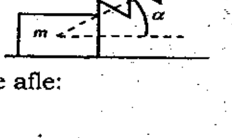
**17.** Un corp cu masa $m$=50 g este suspendat de un resort cu constanta elastică $k$=100 N/m. Să se afle:
**a.** alungirea resortului
**b.** alungirea resortului şi valoarea forţei $F$, dacă se trage de corp cu o forţă orizontală $F$ până când resortul formează cu verticala un unghi α=60°
**c.** alungirea resortului dacă se trage de corp cu forţa cu valoarea de la punctul **b.**, până când resortul devine orizontal şi sinusului unghiului format de forţa $F$ cu orizontala




**18.** Un corp cu masa $m$=1,115 kg este aşezat pe o scândură orizontală şi în acelaşi timp suspendat printr-un resort vertical nedeformat de lungime $\ell_0$=10 cm şi constantă elastică $k$=50 N/m (poziţia $A$). Scândura este suficient de lungă şi este trasă orizontal, iar când resortul deviază cu unghiul α=60° faţă de verticală (poziţia $B$ ) corpul începe să se deplaseze. Să se afle:
**a.** coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi scândură
**b.** forţa cu care corpul apasă asupra scândurii când resortul este deviat
**c.** acceleraţia corpului în momentul trecerii acestuia prin poziţia $A$, dacă scândura este trasă mult iar corpul alunecă spre $A$ depăşind această poziţie

**19.** Un corp de masă $m$=1 kg este aşezat pe o suprafaţă orizontală şi este în acelaşi timp legat de un resort cu masa neglijabilă, vertical, de lungime nedeformată $\ell_0$=12 cm şi de constantă elastică $k$=260 N/m, ca în poziţia $A$ din figura precedentă în care resortul este nedeformat. Corpul este adus în poziţia $B$ din figură ($AB$=$d$=9 cm), de o forţă orizontală, după care este eliberat. Între corp şi suprafaţa orizontală există frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$=0,1. Să se afle:
**a.** valoarea forţei elastice care acţionează asupra corpului în poziţia $B$
**b.** forta orizontală care ţine corpul în repaus în punctul $B$
**c.** acceleraţia corpului în momentul în care este eliberat în poziţia $B$

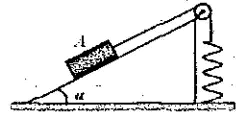
**20.** Un corp cu masa $m$=300 g, aşezat pe un plan orizontal, este împins uniform ca în figură de un resort cu constanta elastică $k$=30 N/m. Axa resortului comprimat formează cu orizontala un unghi α=45°. Coeficientul de frecare dintre corp şi plan este $\mu$=0,2. Să se afle:




**a.** valoarea comprimării resortului
**b.** forţa elastică dacă comprimarea resortului creşte de $\sqrt{2}$ ori

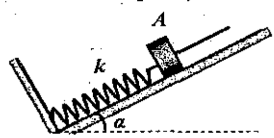
**c.** accelerația corpului în condițiile punctului **b.**

**21.** Corpul $A$ cu masa $m$=2 kg este așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30$^0$ față de orizontală. De corp este prins un fir ideal care la celălalt capăt este legat de un resort ca în figură. Resortul are lungimea nedeformată $\ell_0$=80 cm și constanta elastică $k$=100 N/m. Să se afle:



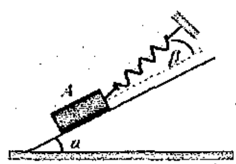

**a.** lungimea resortului, dacă se neglijează frecarea corpului cu planul
**b.** lungimea resortului, dacă coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu$=0,346
**c.** alungirea resortului astfel încât corpul să urce uniform cu frecare $\mu$=0,346, dacă se dezleagă capătul resortului legat de planul orizontal și se trage de acest capăt

**22.** De un resort elastic ideal, suspendat vertical, având constanța elastică $k$ și lungimea nedeformată $\ell_0$=12 cm, se atașează un corp solid $A$ de masă $m$=100 g. La echilibru, lungimea resortului este $\ell_1$=13 cm. Corpul solid $A$, atașat de același resort, este apoi așezat de-a lungul unui plan înclinat de unghi α, ca în figura alăturată. Lungimea resortului în noua poziție de echilibru este $\ell_2$=11,5 cm. Se neglijează forțele de frecare. Să se afle:




**a.** constanta elastică a resortului $k$
**b.** forța elastică din resort
**c.** valoarea unghiului α

**23.** Un corp $A$ cu masa $m$=300 g este menținut în echilibru pe un plan înclinat care formează unghiul α=45$^0$ cu orizontala cu ajutorul unui resort elastic ca în figura alăturată. Se cunosc $\beta$=30$^0$, constanta elastică a resortului $k$=100 N/m și coeficientul de frecare $\mu$=0,141. Să se afle:

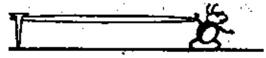



**a.** forța care apare în resort
**b.** alungirea resortului
**c.** forța de apăsare normală

**24.** Două resorturi cu aceeași lungime inițială au constantele elastice $k_1$=10 N/m și $k_2$=30 N/m. Să se afle:
**a.** constanta resortului echivalent, dacă resorturile se leagă în serie
**b.** constanta resortului echivalent, dacă resorturile se leagă în paralel
**c.** reprezentarea grafică a constantei elastice $k$, a sistemului format prin legarea a $n$ părți identice în paralel, dacă aceste părți provin din tăierea primului resort în $n$ părți identice, în funcție de numărul părților tăiate $n$

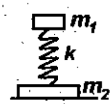
**25.** Un gândăcel se află pe o masă orizontală și trage paralel cu masa de un ineluș elastic foarte fin, agățat de un cui înfipt în masă. Din momentul în care inelușul începe să opună rezistență, gândăcelul mai face $n_1$=10 pași până când începe să alunece pe masă. Dacă trage din nou dar având și un bob de orez în brațe cu masa $m_0$=0,05 g se poate deplasa $n_2$=14 pași până

când începe să alunece. Dacă gândăcelul se lasă să atârne la marginea mesei suspendat de cui prin intermediul ineluşului, acesta se deformează elastic pe o distanţă echivalentă cu $n_0$=25 de paşi ai gândăcelului. Să se afle:
**a.** masa gândăcelului
**b.** coeficientul de frecare dintre gândăcel şi masă
**c.** numărul de paşi făcuţi de gândăcel din momentul tensionării firului elastic până la începerea alunecării, dacă ineluşul elastic este tăiat într-un punct şi ramâne fixat de cui ca în figură



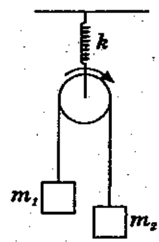
**26.** Două discuri de mase $m_1$=100 g şi $m_2$=300 g sunt prinse între ele cu un resort de masă neglijabilă. Suspendând sistemul de discul superior, de masă $m_2$, resortul are lungimea $\ell_1$=40 cm. Aşezând sistemul vertical pe o masă cu discul cu masa $m_1$ în partea inferioară, lungimea resortului devine $\ell_2$=20 cm. Să se afle:
**a.** tensiunea din firul de care este prins discul $m_2$
**b.** lungimea resortului nedeformat
**c.** constanta elastică a resortului

**27.** Pe un resort vertical aşezat ca în figură se află prins la capătul superior un corp cu masa $m_1$=250 g care comprimă resortul cu $x$=1 cm. Masa corpului prins la capătul inferior este $m_2$=500 g. La un anumit moment se trage vertical de corpul cu masă $m_1$ cu viteza constantă $v$=2 mm/s. Să se afle:



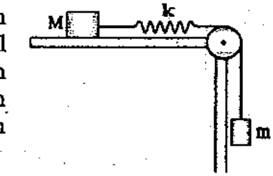

**a.** constanta elastică a resortului
**b.** intervalul de timp măsurat din momentul tragerii după care corpul inferior se desprinde de suprafaţă
**c.** forţa cu care se trage vertical în momentul $t$=10 s

**28.** De un fir trecut peste un scripete ideal sunt legate două corpuri cu masele $m_1$=300 g şi $m_2$=100 g legate prin intermediul unui resort cu masa neglijabilă şi cu constanta elastică $k$=50 N/m ca în figură. Să se afle:
**a.** acceleraţia sistemului de corpuri
**b.** tensiunea din fir
**c.** alungirea resortului



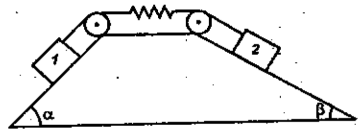

**29.** Pe o suprafaţă orizontală se află două corpuri cu masele $m_1$=200 g şi $m_2$=400 g legate cu ajutorul unui resort cu constanta elastică $k$=100 N/m. Coeficientul de frecare dintre cele două corpuri şi planul orizontal este $\mu$=0,4. Corpul 2 este prins de un perete vertical cu ajutorul unui fir orizontal care poate rezista la o forţă de rupere $F$=2 N. Să se afle:
**a.** forţa minimă orizontală care acţionând asupra primului corp rupe firul
**b.** forţa minimă orizontală care acţionând asupra primului corp asigură deplasarea uniformă a sistemului de corpuri după ruperea firului
**c.** alungirea resortului în condiţiile punctului **b.**

**30.** Un corp cu masa $M$=2 kg se află pe un plan orizontal pe care se poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2. Corpul este prins de un fir cu un alt corp cu masa $m$=4 kg, care este trecut peste un scripete şi atârnă vertical. Dacă în fir este inserat un resort cu constanta elastică $k$=500 N/m. Să se afle:

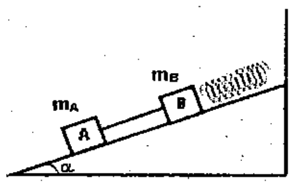



**a.** acceleraţia sistemului de corpuri
**b.** alungirea resortului
**c.** reacţiunea în axul scripetelui

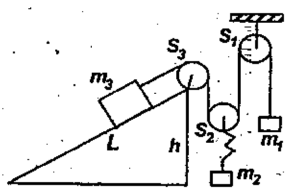
**31.** Fie sistemul din figură. Se cunosc $m_1$=1 kg, lungimea resortului nedeformat $\ell_0$=80 cm, constanta elastică a resortului $k$=100 N/m, $\alpha$=45°, $\beta$=30° şi se neglijează frecările. Să se afle:
**a.** masa corpului 2, astfel ca sistemul să se afle în echilibru
**b.** lungimea finală a resortului
**c.** lungimile finale ale resortului, astfel ca sistemul să se afle în echilibru dacă coeficientul de frecare este $\mu$=0,2



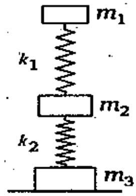

**32.** Două corpuri $A$ şi $B$ cu masele $m_A$=2 kg şi $m_B$=1 kg, legate între ele printr-un fir inextensibil şi de masă neglijabilă, se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° faţă de orizontală, ca în figura alăturată. Corpurile sunt prinse de un perete vertical prin intermediul unui resort fără masă, cu constanta de elasticitate $k$=150 N/m. Între corpuri şi suprafaţa planului există frecări ($\mu$=0,173), iar sistemul se află în echilibru. Să se afle:
**a.** forţa de tensiune din firul ce leagă corpurile
**b.** alungirea resortului ce susţine sistemul de corpuri
**c.** dacă alungirea resortului se modifică dacă se schimbă între ele poziţiile celor două corpuri. Justificaţi răspunsul.




**33.** Fie sistemul mecanic din figură. Lungimea planului înclinat este $L$=4 m şi înălţimea planului înclinat este $h$=2 m. Forţa de frecare dintre corpul $m_3$ şi plan este $F_f$=2 N. Să se afle:
**a.** valorile minime ale maselor $m_1$ şi $m_2$ pentru care sistemul se află în echilibru, dacă $m_3$=3 kg
**b.** constanta elastică a resortului dacă acesta se alungeşte cu $\Delta\ell$=1,3 cm
**c.** valorile maselor $m_1$ şi $m_2$ pentru care corpul $m_3$ urcă uniform pe plan



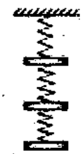
**34.** Un corp cu masa $m_3$=500 g se sprijină pe o suprafaţă plană. De acest corp este prins un resort vertical (2) cu constanta elastică $k_2$=60 N/m peste care se află un alt corp cu masa $m_2$=300 g. De corpul al doilea este prins un al doilea resort vertical (1) cu constanta elastică $k_1$=20 N/m, pe care se aşază un corp cu masa $m_1$=200 g ca în figură. Să se afle:




**a.** raportul comprimărilor $\Delta\ell_1/\Delta\ell_2$
**b.** valoarea forţei cu care trebuie apăsat vertical corpul superior $m_1$ pentru ca acest raport să devină egal cu 2
**c.** valoarea forţei de apăsare exercitată de corpul $m_3$ asupra suprafeţei de sprijin în condiţiile de la punctul precedent

**35.** Trei discuri identice fiecare cu masa $m$=3 kg sunt legate cu două resorturi elastice identice şi se află pe o suprafaţă orizontală ca în figura precedentă. Lungimile resorturilor sunt $\ell_1$=12 cm şi respectiv $\ell_2$=18 cm. Să se afle:
**a.** lungimea nedeformată a unui resort
**b.** constanta elastică a unui resort
**c.** valoarea forţei de reacţiune normală cu care suprafaţa orizontală acţionează asupra discului inferior

**36.** Trei corpuri identice sunt agăţate de trei resorturi elastice identice ideale cu constantele elastice $k$=200 N/m, ca în figura alăturată. Suma alungirilor celor trei resorturi este $\Delta\ell$=12 cm. Să se afle:



**a.** alungirea resortului inferior
**b.** forţa elastică care se exercită în resortul din mijloc
**c.** constanta elastică a resortului echivalent, dacă două resorturi se leagă în paralel şi apoi gruparea lor se leagă în serie cu al treilea

## 2.5. Legea atracţiei universale

*Constante utilizate: constanta atracţiei universale $k$=6,67·10$^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$, raza medie a Pământului $R_P$=6370 km şi acceleraţia gravitaţională medie la suprafaţa Pământului $g_0$=9,8 m/s$^2$.*

**1.** Să se afle valoarea forţei de atracţie dintre două corpuri cu masele $m_1$=$m_2$=80 kg, dacă distanţa dintre centrele lor este $r$=1 m.

**2.** Să se calculeze forţa de atracţie gravitaţională exercitată asupra Pământului de către Soare, dacă masa Soarelui este $M$=2·10$^{30}$ kg, masa Pământului este $m$=6·10$^{24}$ kg şi raza medie a orbitei Pământului faţă de Soare este $R_{P\text{-}S}$=1,5·10$^{11}$ m.

**3.** Se ştie că electronul se roteşte în atomul de hidrogen în jurul protonului pe o orbită cu raza $r$=5,3·10$^{-10}$ m. Se cunosc masa electronului $m_e$=9,1·10$^{-31}$ kg şi iar masa protonului $m$=1840$m_e$. Să se calculeze forţa de atracţie gravitaţională dintre un electron şi proton.

**4.** Să se afle greutatea unui cosmonaut care pe Pământ are masa $m$=80 kg pe o planetă, dacă masa planetei este de nouă ori mai mică decât masa Pământului iar raza planetei este de patru ori mai mică decât raza Pământului..

**5.** Distanța dintre Pământ și Lună este $d$=3,8·$10^5$ km. Masa Pământului este de 81 de ori mai mare decât a Lunii. Să se afle distanța față de Pământ la care un cosmonaut de află în imponderabilitate.

**6.** Să se afle altitudinea față de suprafața Pământului la care accelerația gravitațională se reduce la jumătate din valoarea de la suprafața Pamântului.

**7.** Masa Lunii este de 81 ori mai mică decât masa Pământului. Diametrul Lunii este 3/11 din diametrul mediu al Pământului. Să se afle accelerația gravitațională medie de la nivelul Lunii.

**8.** Să se afle raportul accelerațiilor gravitaționale la suprafețele a două planete $g_1/g_2$, dacă raportul maselor celor două planete este $M_1/M_2$=1/8, iar raportul razelor $R_1/R_2$=1/2.

**9.** Să se afle densitatea medie a Pământului.

**10.** Dacă accelerația gravitațională medie la suprafața unei planete depărtate este de 2,5 ori mai mare decât accelerația gravitațională medie de la suprafața Pământului, să se afle raportul dintre densitatea medie a planetei și cea a Pământului, știind că planeta are un diametru de trei ori mai mare decât diametrul Pământului.

**11*.** Știind că pe o planetă accelerația gravitațională la suprafața planetei este de 15 ori ori mai mică decât la suprafața Pământului, de câte ori este mai înaltă o detentă a aceluiași om pe planetă decât pe Pământ?

**12*.** Să se afle masa Soarelui, dacă viteza liniară de rotație a Pământului în jurul Soarelui este $v$=30 km/s, constanta atracției universale $k$=6,67·$10^{-11}$ Nm²/kg² iar raza orbitei Pământului este $R$=1,5·$10^{11}$ km.

**13*.** Să se afle valoarea vitezei pe o orbită cu raza $r=2R_P$ a unei nave cosmice care se rotește în jurul Pământului. Se cunosc raza medie a Pământului $R_P$=6400 km și accelerația gravitațională medie la suprafața Pământului $g_0$=9,8 m/s².

**14*.** Să se afle la ce distanță de centrul Pământului trebuie plasat un satelit geostaționar, care se mișcă pe o traiectorie circulară în planul ecuatorial al Pământului, dacă se cunosc accelerația gravitațională la suprafața Pământului $g_0$=9,81 m/s², raza Pământului $R_P$=6370 km, perioada de rotație a Pământului $T$=24 h și constanta atracției universale $k$=6,67·$10^{-11}$ Nm²/kg².

## 2.6. Mişcarea circular uniformă. Forţa centripetă*

**1.** O curea de transmisie de la bicicletă antrenează două roţi. O roată mare are raza $R_1$=30 cm, iar cealaltă $R_2$=5 cm. Roata mică este pusă în mişcare de rotaţie de pedalele bicicletei, cu viteza unghiulară $\omega_2$=30 rad/s. Să se afle viteza unghiulară a roţii mari.

**2.** Pământul se roteşte în jurul propriei axe într-un interval de timp $T$=24 h. Cunoscând raza medie a Pământului $R_P$=6400 km, să se afle viteza unghiulară de rotaţie a Pământului şi viteza periferică a acestuia.

**3.** La un spectacol aeronautic, un avion execută un „loop" ( un cerc în plan vertical), cu raza $R$=1 km. Viteza avionului este $v$=800 m/s. Să se afle viteza unghiulară a avionului şi distanţa parcursă de acesta la un „loop" total.

**4.** Un polizor are raza $R$=25 cm. Polizorul se roteşte cu viteza liniară maximă $v$=7,85 m/s. Să se afle frecvenţa maximă cu care se poate roti polizorul.

**5.** Să se afle viteza unghiulară a unei roţi de maşină care efectuează $N$=100 rotaţii într-un timp $t$=50 s.

**6.** Un minutar are lungimea $\ell$=4 cm. Să se afle cu cât s-a deplasat într-un sfert de minut.

**7.** Un avion zboară deasupra ecuatorului spre vest la înălţimea $h$=30 km faţă de suprafaţa Pământului. Să se afle viteza cu care trebuie să zboare acest avion pentru a vedea Soarele staţionar, dacă raza medie a Pământului este $R_P$=6370 km.

**8.** Să se afle viteza maximă cu care poate să efectueze o maşină un viraj cu raza $R$=100 m pentru ca aceasta să nu derapeze, dacă coeficientul de frecare dintre şosea şi anvelope este $\mu$=0,25.

**9.** Să se afle unghiul faţă de verticală cu care trebuie să se incline un motociclist la o curbă cu raza $R$=69,2 m, pentru a nu cădea, dacă acesta intră în curbă cu viteza $v$=72 km/h.

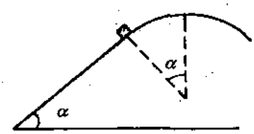
**10.** Într-un vagon care execută o curbă cu raza $R$=50 m, în plan orizontal, cu viteza $v$=54 km/h este cântărit un corp. Să se afle cu cât la sută este mai mare greutatea aparentă decât greutatea reală.

**11.** Pentru determinarea vitezei unui glonţ se ulilizează două discuri de carton, care se aşază pe acelaşi ax la distanţa $d$=25 cm între ele. Se pune sistemul în rotaţie cu turaţia $n$=800 rot/min şi se trage glontele paralel cu axul. Ştiind că orificiul din al doilea disc este deplasat cu $\alpha$=4$^o$ faţă de orificiul din primul disc, să se afle viteza glontelui.

**12.** Pe un disc orizontal care se roteşte în jurul axului central este legat de ax, prin intermediul unui resort, un corp. Lungimea nedeformată a resortului este $\ell_0$=25 cm. Discul se roteşte cu viteza unghiulară $\omega$=4 rad/s. Să se afle raportul alungirilor resortului în cazul când între disc şi corp nu există frecare şi în cazul în care există, dacă coeficientul de frecare la alunecare în acest ultim caz este $\mu$=0,1.

**13.** Un camion cu masa $m$=5 t merge cu viteza $v$=54 km/h peste un pod curbat cu raza $R$=100 m. Să se afle apăsarea exercitată de camion asupra drumului în punctul superior, dacă podul este convex şi în punctul inferior, dacă podul este concav.

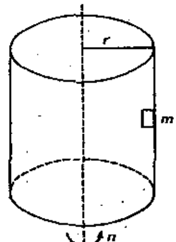
**14.** O bandă rulantă urcă nişte seminţe sub unghiul $\alpha$=60° ca în figură. Să se afle cu ce viteză maximă trebuie să urce banda rulantă astfel încât seminţele să nu se desprindă de bandă în punctul de contact al bandei cu tamburul superior cu raza $R$=20 cm.



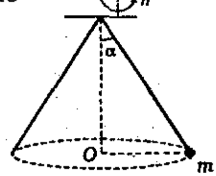

**15.** Un pilot cu masa $m$=80 kg execută un „loop" cu raza $R$=800 m în plan vertical cu viteza $v$=720 km/h. Să se afle forţele cu care apasă pilotul asupra scaunului în punctul inferior şi în punctul superior al traiectoriei.

**16.** La periferia unei platforme orizontale rotunde cu raza $R$=5 m, care se roteşte cu turaţia $n$=10 rot/min, merge un motociclist cu viteza $u$=3,6 km/h faţă de platformă. Să se afle valoarea coeficientul de frecare la alunecare, pentru ca motociclistul să nu alunece.

**17.** Să se afle frecvenţa cu care trebuie rotit un cilindrul din figură cu raza $r$=50 cm în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp aşezat pe peretele interior al cilindrului să rămână în repaus faţă de cilindru, dacă coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi cilindru este $\mu$=0,5.

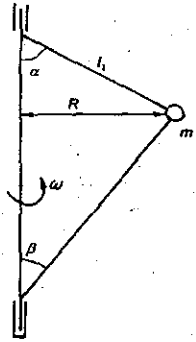



**18.** Un corp punctiform cu masa $m$=100 g este suspendat de un fir cu lungimea $\ell$=30 cm. Corpul este pus să descrie un cerc în plan orizontal ca în figură, unghiul făcut de fir cu verticala în timpul mişcării este $\alpha$=60°. Să se afle:
**a.** perioada de rotaţie a corpului
**b.** tensiunea din fir



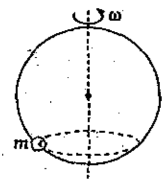

**19.** Un copil roteşte o găleată cu apă cu masa totală $m$=4 kg prinsă de o sfoară cu lungimea $\ell$=50 cm în plan vertical. Să se afle:
**a.** frecvenţa minimă de rotaţie pentru ca apa să nu curgă
**b.** tensiunea din sfoară în punctul inferior al traiectoriei în condiţiile punctului **a.**
**c.** tensiunea în sfoară în punctul superior al traiectoriei, dacă frecvenţa cu care se roteşte sistemul se dublează

**20.** De o tijă verticală cu sunt pinse două cabluri care susţin un corp cu masa $m$=200 g. Primul cablu are lungimea $\ell_1$=30 cm. Se pune sistemul într-o mişcare de rotaţie ca în figura alăturată cu viteza unghiulară $\omega$=10 rad/s, astfel încât cablul superior formează cu tija un unghi $\alpha$=60$^0$ iar cablul inferior formează cu tija un unghi $\beta$=30$^0$. Să se afle tensiunile în cele două cabluri.

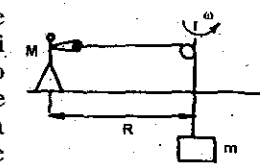



**21.** De un fir elastic cu lungimea nedeformată $\ell_0$=40 cm şi constanta elastică $k$=20 N/m este prins un corp cu masa $m$=100 g. Să se afle viteza unghiulară a sistemului, dacă pus în mişcare de rotaţie firul elastic deviază cu un unghi $\alpha$=60$^0$ faţă de verticală.

**22.** Pe un inel de sârmă cu raza $R$=80 cm aflat în plan vertical ca în figura alăturată, poate aluneca fără frecare o bilă. Inelul este pus în mişcare de rotaţie în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară constantă $\omega$=5 rad/s. Să se afle unghiul pe care îl face în timpul mişcării axa de rotaţie cu direcţia obţinută prin unirea centrului inelului cu bila.

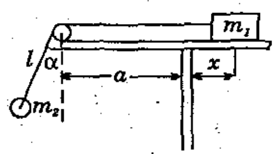



**23.** Un om cu masa $M$=80 kg se află pe o platformă care se roteşte cu viteza unghiulară $\omega$=2 rad/s, în jurul unui ax, la distanţa $R$=50 cm de axa de rotaţie. Omul ridică o masă $m$=4 kg cu ajutorul unei frânghii care trece peste un scripete fix ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare dintre om şi platformă este $\mu$=0,1. Să se afle între ce limite poate să varieze acceleraţia cu care omul ridică masa $m$, pentru ca el să rămână în repaus faţă de platformă.



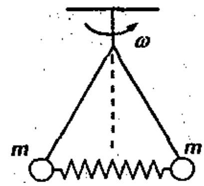

**24.** Pe un „zid al morţii" înclinat faţă de orizontală cu unghiul $\alpha$=45$^0$ se roteşte un motociclist descriind un cerc în plan orizontal cu raza $R$=2 m. Ştiind că mişcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu$=0,2, să se afle viteza unghiulară de rotaţie a motociclistului şi acceleraţia centripetă a acestuia.

**25.** Pe o tijă verticală care se roteşte este aşezată o scândură orizontală pe care se află la distanţa $x$ de axa de rotaţie un corp cu masa $m_1$=200 g. Coeficientul de frecare la alunecare al corpului $m_1$ faţă de scândură este $\mu$=0,2. De corp este prins un fir ideal trecut peste un scripete aflat la distanţa $a$=20 cm de axa de rotaţie. De capătul celălalt al firului este prins un corp cu masa $m_2$=100 g. În timpul rotaţiei firul care susţine corpul cu masa $m_2$ formează cu verticala un unghi $\alpha$=60$^0$ ca în figură. Lungimea firului este $\ell$=40 cm. Să se afle:




**a.** tensiunea în fir şi reacţiunea în axul scripetelui
**b.** viteza unghiulară

**c.** limitele între care poate fi cuprinsă valoarea $x$, astfel ca sistemul să se afle în echilibru




**26.** Două bare verticale care formează între ele un unghi $2\alpha=60^0$ sunt situate simetric față de verticală și se rotesc în jurul verticalei cu viteza unghiulară $\omega=30$ rad/s. Pe fiecare bară alunecă fără frecare două bile identice găurite cu masa $m=50$ g care sunt legate între ele cu ajutorul unui resort cu constanta elastică $k=50$ N/m ca în figura alăturată. Lungimea inițială a resortului nedeformat este $\ell_0=40$ cm. Să se afle la ce înălțime măsurată față de punctul de prindere, se află în echilibru bilele.

**27.** La ce altitudine deasupra unui pol greutatea unui corp este aceeași ca la ecuator, dacă se cunosc raza medie a Pământului $R_P=6370$ km, densitatea Pământului $\rho=5,5$ g/cm$^3$, perioada proprie de rotație $T=24$ h și constanta atracției universale $k=6,67\cdot10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$.

**28.** Să se afle densitatea unui asteroid, dacă perioada de rotație a acestuia este $T=3$ h, iar la ecuatorul asteoidului corpurile nu au greutate. Constanta atracției universale este $k=6,67\ 10^{-11}$ Nm$^2$/kg$^2$.

**29.** Să se afle prima viteză cosmică a unui satelit care se rotește la suprafața Pământului, dacă se cunosc accelerația gravitațională medie la suprafața Pământului $g=9,81$ m/s$^2$ și raza medie a Pământului $R_P=6370$ km.

**30.** O navă cosmică se mișcă cu viteza $v=10$ km/s la altitudinea $h=1000$ km de suprafața unei planete. Să se afle ce valoare are accelerația gravitațională la suprafața planetei, dacă raza ei este $R=8000$ km.

## 3. Teoreme de variaţie şi legi de conservare în mecanică
### 3.1. Lucrul mecanic şi puterea mecanică

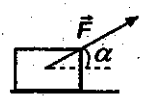
**1.** O maşină de spălat cu masa $m$=80 kg se deplasează orizontal cu frecare, coeficientul de frecare $\mu$=0,1, pe distanţa $d$=30 m sub acţiunea unei forţe orizontale de împingere. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a maşinii
**b.** lucrul mecanic efectuat de forţa de împingere
**c.** lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare şi să se compare cu lucrul mecanic efectuat de forţa de împingere

**2.** Un corp cu masa $m$=500 g se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare $\mu$=0,1 sub acţiunea unei forţe constante $F$=2,5 N paralelă cu planul un timp $t$=2 s. Corpul porneşte din repaus. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forţa $F$
**b.** lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare
**c.** puterea mecanică instantanee a forţei $F$ la momentul $t_1$=2 s

**3.** Două corpuri cu masele $m_1$ şi $m_2=2m_1$ sunt lăsate să cadă liber. Primul corp se află în cădere un timp $t_1$, iar al doilea corp $t_2=2t_1$. Să se afle:
**a.** raportul lucrurilor mecanice $L_1/L_2$, efectuate de greutăţile celor două corpuri în timpul căderilor lor
**b.** raportul puterilor mecanice medii ale celor două greutăţi $P_{m1}/P_{m2}$
**c.** lucrul mecanic total al greutăţii corpului care acţionează asupra corpului $m_1$, dacă în urma contactul cu suprafaţa acesta se întoarce în punctul de unde a plecat

**4.** Un lift cu masa maximă $m$=320 kg prins cu un cablu se mişcă vertical în sus cu acceleraţia $a$=1 m/s$^2$ de la parter până la etajul 5. Înălţimea medie a unui etaj este de $h$=2,5 m. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de tensiunea din cablul care prinde cabina liftului
**b.** lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate a liftului
**c.** puterea medie a tensiunii

**5.** Un corp cu masa $m$=1 kg se deplasează cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,1 sub acţiunea unei forţe constante $F$ care formează cu orizontala un unghi α=30$^0$ ca în figura alăturată, astfel încât corpul va avea acceleraţia $a$=1 m/s$^2$. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic al forţei $F$ pe distanţa $d_1$=5 m
**b.** lucrul mecanic al normalei pe distanţa $d_2$=2 m
**c.** lucrul mecanic al forţei de frecare pe distanţa $d_3$=3 m

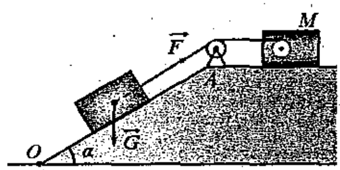



**6.** Asupra unui corp cu masa $m$=4 kg aflat pe o suprafaţă orizontală acţionează o forţă $F$=60 N care îşi deplasează punctul de aplicaţie pe distanţa $d$=4 m, astfel că unghiul făcut de forţă cu direcţia de deplasare este α=30$^0$ (figura precedentă). Corpul porneşte din repaus şi se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de forța $F$
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe aceeași distanță
**c.** puterea medie dezvoltată de forța $F$

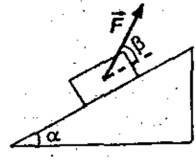
**7.** Un corp cu masa $m$=500 g este aruncat pe un plan înclinat sub un unghi $\alpha=30^0$ cu o viteză inițială. Mișcarea corpului se face cu frecare coeficientul de frecare fiind descrescător în mod uniform de la valoarea $\mu_1$=0,3 până la valoarea $\mu_2$=0,1 când corpul se oprește la o distanță $d$=10 m de punctul de lansare. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de greutate
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de apăsare

**8.** Un bloc de piatră de greutate $G$=3000 N este tras uniform, cu viteza constantă $v$=5 m/s, pe panta $OA$ de unghi $\alpha=30^0$, cu ajutorul unui cablu acționat de motorul $M$, ca în figura alăturată. Cablul exercită asupra blocului forța $F$=4000 N, a cărei direcție de acțiune este paralelă cu planul înclinat format de pantă. Să se afle:
**a.** puterea furnizată de motor
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul deplasării blocului de piatră cu $d$=8 m de-a lungul pantei
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra blocului pe distanța $OA$



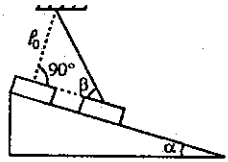

**9.** Un corp cu masa $m$=1 kg se găsește la baza unui plan înclinat care formează unghiul $\alpha=30^0$ cu orizontala. Înălțimea planului înclinat este $h$=50 cm iar coeficientul de frecare la alunecare este $\mu=\sqrt{3}/6$. Să se afle:
**a.** puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă $v$=30 m/min
**b.** lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea corpului până în vârful planului înclinat
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la urcarea corpului până în vârful planului înclinat

**10.** Un corp de masă $m$=2 kg se află la baza unui plan înclinat de unghi $\alpha=30^0$. Sub acțiunea unei forțe constante $F$ orientată sub unghiul $\beta=30^0$ ca în figură față de planul înclinat, corpul este ridicat uniform pe plan pe distanța $d$=0,2 m. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și planul înclinat este $\mu=1/(2\sqrt{3})$. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forța $F$
**b.** lucrul mecanic efectuat de greutate
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe aceeași distanță, în situația în care corpul urcă sub acțiunea unei forțe de tracțiune paralelă cu planul



**11.** Un corp cu masa $m$=2 kg se deplasează cu frecare pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30°, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,1 sub acțiunea unei forțe constante $F$ care formează cu planul un unghi $\beta$=45° ca în figura anterioară. Corpul se deplasează accelerat cu accelerația $a$=2 m/s² pe distanța $d$=5 m în sus. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic al forței de tracțiune $F$
**b.** lucrul mecanic al normalei
**c.** lucrul mecanic al forței de frecare

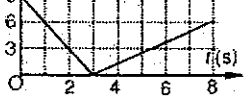
**12.** Un corp cu masa $m$=1 kg este menținut în vârful unui plan înclinat cu unghiul α=30°, poziție în care firul elastic de susținere este nealungit, iar lungimea lui este $\ell_0$=0,5 m. Corpul alunecă spre baza planului, oprindu-se atunci când firul formează unghiul $\beta$=45° cu direcția planului. Cunoscând constanta elastică a resortului $k$=20 N/m, să se afle:
**a.** alungirea firului în poziția de echilibru
**b.** lucrul mecanic al greutății corpului
**c.** reacțiunea normală a planului când corpul se oprește
**d.** coeficientul de frecare



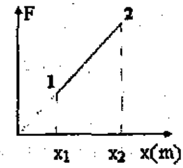

**13.** Pe o rampă înclinată cu unghiul α=30° față de orizontală și având lungimea $\ell$=5 m, este ridicată uniform într-un interval de timp $\Delta t$=20 s cu ajutorul unei forțe paralele cu planul, o ladă de masă $m$=100 kg. Coeficientul de frecare la alunecare dintre ladă și rampă este $\mu = 1/(2\sqrt{3})$. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare la ridicarea lăzii pe rampă
**b.** randamentul rampei
**c.** puterea medie necesară ridicării uniforme a lăzii pe rampă

**14.** Lucrul mecanic util pentru urcarea uniformă a unui corp de masă $m$=10 kg pe planul înclinat din punctul cel mai de jos în punctul cel mai de sus, este $L_u$=2000 J, iar lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_f$=−500J. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic consumat
**b.** randamentul $\eta$ al planului înclinat
**c.** înălțimea la care urcă corpul pe planul înclinat

**15.** Un corp cu masa $m$=100 g este lansat dintr-un punct al planului de-a lungul acestui plan înclinat, alunecă pe acesta mai întâi spre vârful acestuia și apoi revine la baza planului înclinat. Dependența de timp a modulului vitezei corpului este redată în figura alăturată. Să se afle:
**a.** unghiul format de plan cu orizontala
**b.** coeficientul de frecare
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în intervalul de timp $t \in$ (0s, 8s)



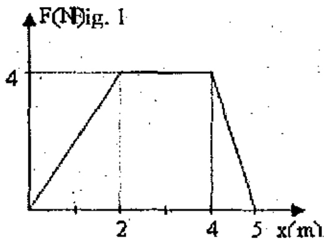
**16.** Să se afle lucrul mecanic efectuat de forța din figura alăturată pentru a-și deplasa punctul de aplicație de la $x_1$=1 cm la $x_2$=5 cm, dacă în poziția cu $x_1$=1 cm valoarea forței este $F_1$=10 N.

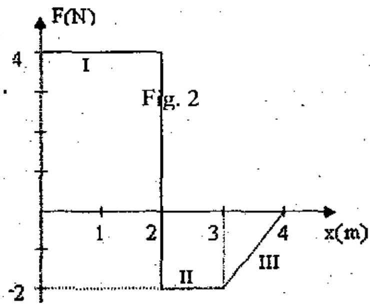



**17.** Asupra unui corp acționează o forță care depinde de coordonată după legea $F$=10-2$x$, unde $F$ și $x$ sunt exprimate în S.I. Să se afle lucrul mecanic al acestei forțe când acest corp își deplasează punctul de aplicație în direcția și sensul forței de la $x_1$=1 m până în punctul $x_2$=4 m.

**18.** Să se afle lucrul mecanic total efectuat de o forță care depinde de coordonată conform graficului din figura 1 când coordonata ia valori de la 0 la 5 m.

**19.** Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de o forță $F$=$f$($x$) reprezentată grafic ca în figura 2 în situația în care coordonata ia valori de la 0 la 4 m.




**20.** O scândură omogenă, de masă $m$=500 g și lungime ℓ=18 cm, este deplasată orizontal, pe gheață ($\mu_g$=0), de către un elev. La un moment dat scândura pătrunde pe asfalt, unde coeficientul de frecare este $\mu$=0,6. Din acest moment, elevul deplasează uniform scândura cu ajutorul unei forțe orizontale. Să se afle lucrul mecanic efectuat de elev din momentul în care scândura atinge asfaltul și până când pătrunde:

**a.** pe o treime în asfalt

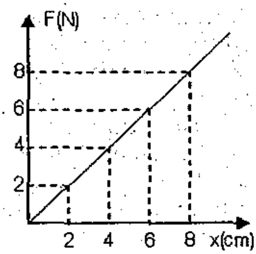
**b.** în întregime pe asfalt

**c.** pe o lungime 2ℓ pe asfalt

**21.** Un corp de masă $m$=2 kg se află inițial în repaus pe o suprafață orizontală. Asupra corpului se aplică, prin intermediul unui resort orizontal, o forță de tracțiune $F$, a cărei valoare crește lent și determină alungirea resortului conform graficului alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare are valoarea $\mu$=0,2. Să se afle:

**a.** constanta elastică a resortului

**b.** valoarea alungirii resortului în timpul deplasării uniforme a corpului



**c.** lucrul mecanic efectuat de forța $F$ care trage de resort, în timpul deformării resortului de la $x_1$=2 cm la $x_2$=4 cm

**22.** Să se afle de câte ori este mai mic lucrul mecanic efectuat la alungirea unui resort pe prima treime din alungire față de lucrul mecanic efectuat pentru alungirea cu restul de două treimi din alungire.

**23.** Să se afle ce lucrul mecanic suplimentar trebuie efectuat pentru a mări alungirea unui resort de la $\Delta\ell$=1 cm la $3\Delta\ell$, dacă pentru a alungi resortul cu $\Delta\ell$ se acționează cu o forță $F$=2 N.

**24.** Un autoturism cu masa $m$=1 t se deplasează pe un drum rectiliniu și orizontal. Puterea dezvoltată de forța de tracțiune este constantă, având valoarea $P$=60 kW. Când viteza autoturismului este $v_1$=36 km/h, rezultanta forțelor care se opun mișcării are valoarea $R_1$=1 kN. Când viteza autoturismului are valoarea $v_2$=54 km/h accelerația autoturismului este $a_2$=2 m/s$^2$, iar când viteza autoturismului atinge valoarea maximă $v_3$, rezultanta forțelor care se opun mișcării devine $R_3$=3 kN. Să se afle:
**a.** accelerația $a_1$ a autoturismului când viteza are valoarea $v_1$
**b.** rezultanta $R_2$ a forțelor care se opun mișcării când viteza autoturismului este $v_2$
**c.** valoarea $v_3$ a vitezei maxime a autoturismului

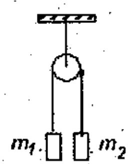
**25.** Un camion având greutatea $G$ se deplasează pe o șosea cu viteza menținută tot timpul constantă $v_0$. Rezistența la înaintare $R$ depinde numai de viteza camionului. Când camionul urcă pe un drum de pantă $p$=sin$\alpha$ (unde $\alpha$ este unghiul făcut de drum cu planul orizontal), puterea camionului este $P_1$=124 kW. Când camionul coboară pe același drum, puterea camionului este $P_2$=112 kW. Să se afle:
**a.** relația dintre rezistența la înaintare $R$, puterea $P_0$ și viteza $v_0$ în cazul în care drumul este orizontal
**b.** relația dintre rezistența la înaintare $R$, puterea $P_1$, greutatea $G$, panta $p$ și viteza $v_0$ în cazul în care camionul urcă drumul de pantă $p$
**c.** relația dintre rezistența la înaintare $R$, puterea $P_2$, greutatea $G$, panta $p$ și viteza $v_0$ în cazul în care camionul coboară drumul de pantă $p$
**d.** puterea camionului pe drum orizontal

**26.** La aceeași putere dezvoltată de un motor, o mașină urcă și coboară o pantă cu unghiul foarte mic, cu vitezele constante $v_1$=10 m/s și respectiv $v_2$=15 m/s și se deplasează pe orizontală cu viteza $v_3$. Considerând că pe tot parcursul mișcării coeficientul de frecare este același, să se afle:
**a.** relația dintre puterea mașinii $P$, masa ei $m$, viteza $v_1$, unghiul pantei $\alpha$ și coeficientul de frecare $\mu$ la urcarea pantei
**b.** relația dintre puterea mașinii $P$, masa ei $m$, viteza $v_1$, unghiul pantei $\alpha$ și coeficientul de frecare $\mu$ la coborârea pantei
**c.** viteza cu care se mișcă mașina pe orizontală

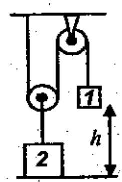
**27.** Un camion tractează pe un drum orizontal o remorcă de masă $m$=1000 kg cu viteza constantă $v$=36 km/h. Forța de tensiune care apare în sistemul de cuplaj are valoarea $T$=600 N. La un moment dat, menținându-și aceeași viteză, camionul începe să urce o pantă înclinată față de orizontală cu unghiul $\alpha$ pentru care $\sin\alpha$=0,1. Să se afle:
**a.** puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență care acționează asupra remorcii în timpul deplasării pe o distanță $d$=10 m pe porțiunea orizontală
**c.** puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă considerând că forța de rezistență la înaintare are aceeași valoare ca și la deplasarea pe drumul orizontal

**28.** Un cal trage o sanie cu masa $m$=10 kg uniform cu viteza $v$=4 m/s pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=45°, cu o forță de tracțiune $F$ paralelă cu planul înclinat și coeficientul de frecare la alunecare $\mu$=0,2. Să se afle:
**a.** puterea activă dezvoltată de cal
**b.** bilanțul puterilor
**c.** cât reprezintă puterea consumată pentru învingerea frecărilor la ridicarea saniei din puterea activă

**29.** Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu mase $m_1$=2 kg și $m_2$=4 kg ținute inițial în repaus la aceeași înălțime față de sol $H$=0,6 m ca îm figură. Se lasă liber sistemul. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de tensiunea din firul care susține corpul cu masa $m_1$, când sistemul se deplasează pe distanța $h$=0,3 m
**b.** lucrul mecanic total al greutăților corpurilor când corpul mai greu ajunge la sol, dacă se consideră firul suficient de lung, astfel încât corpul 1 să nu ajungă la scripete
**c.** puterea mecanică totală medie a sistemului de corpuri calculată între momentul plecării și cel ajungerii pe sol a lui $m_2$




**30.** Fie sistemul de corpuri din figură cu masele $m_2$=100 kg și $m_1$=30 kg aflat inițial în echilibru. Primul corp se află față de sol la înălțimea $h$=2 m. Se acționează vertical în jos asupra corpului 1 cu o forță $F$, astfel că sistemul se mișcă uniform. Coborârea uniformă a corpului 1 până la sol se realizează într-un timp $t$=20 s. Să se afle:
**a.** forța verticală care acționează asupra corpului 1
**b.** puterea dezvoltată de forța $F$
**c.** viteza cu care coboară corpul 1




## 3.2. Energia cinetică și potențială

**1.** Un sportiv cu masa $m_1$ aleargă de două ori mai încet decât un alt sportiv a cărui masă este $m_2$. Să se afle relația dintre masele celor doi sportivi dacă energiile lor cinetice sunt egale.

**2.** Un corp are la un anumit moment viteza $v_0$=20 m/s şi în acelaşi moment energia cinetică a corpului este $E_c$=800 J. Să se afle masa corpului.

**3.** O săgeată cu masa $m$=40 g este lansată dintr-un arc cu viteza $v_0$=20 m/s, pe verticală în sus. Să se afle energia cinetică a săgeţii după o secundă de la lansare.

**4.** Un corp cu masa $m$=1 kg se mişcă uniform accelerat fără viteză iniţială parcurgând în prima secundă distanţa $d_1$=1 m. Să se afle energia cinetică a corpului după două secunde.

**5.** Un corp cu masa $m$=500 g este lansat pe o suprafaţă orizontală cu viteza iniţială $v_0$=20 m/s. Corpul se mişcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,05. Să se afle energia cinetică după $t$=4 s de la lansare.

**6.** Dacă un corp cu masa $m$=100 g cade liber de la înălţimea $h$=20 m. Să se afle energia potenţială gravitaţională la o pătrime din distanţa faţă de sol, dacă la sol $E_P$=0.

**7.** De la aceeaşi înălţime se lasă să cadă două corpuri cu masele $m_1$ şi $m_2=4m_1$. Să se afle raportul energiilor potenţiale ale celor două corpuri $E_{P2}/E_{P1}$.

**8.** Dintr-un punct se aruncă pe verticală în sus un corp cu masa $m$=200 g cu o viteză iniţială $v_0$=20 m/s. Să se afle la jumătatea înălţimii maxime valoarea energiei potenţiale gravitaţionale a corpului, dacă în punctul de aruncare $E_P$=0.

**9.** În graficul din figura 1 este reprezentată energia potenţială gravitaţională a unui corp în funcţie de înălţimea la care se află acesta. Să se afle masa corpului.

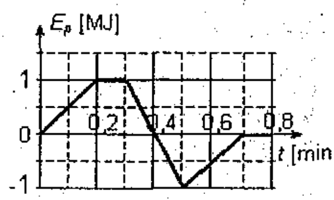
**10.** Un camion cu masa $m$=10 t se deplasează cu viteza constantă $v_0$=45 km/h pe un drum dintr-o regiune deluroasă. În graficul alăturat este reprezentată energia potenţială $E_p$ a sistemului format din camion şi Pământ, în funcţie de durata mişcării în intervalul de timp [0; 0,8]min. Să se afle:

**a.** intervalele de timp în care drumul este orizontal

**b.** diferenţa de nivel dintre punctul din care a plecat camionul şi punctul din care acesta începe să coboare

**c.** reprezentarea grafică a energiei potenţiale $E_p$ a camionului, în funcţie de distanţa parcursă $d$

**d.** variaţia energiei potenţiale a camionului din momentul plecării şi până în momentul în care se află la 375 m de punctul de pornire




**11*.** Un resort este comprimat cu $x$=5 cm fiind menţinut în această stare de o forţă $F$=20 N. Să se afle energia potenţială a sistemului corp-resort.

**12*.** În graficul din figura 2 este reprezentată energia potențială elastică în funcție de pătratul deformației. Să se afle ce reprezintă panta graficului din figură.

Fig..1

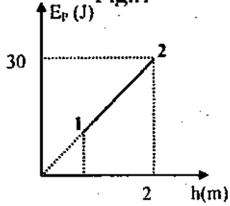



Fig.2

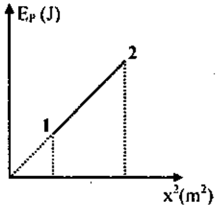
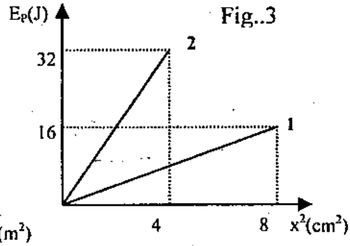



Fig..3




**13*.** Două resorturi cu constantele elastice $k_1$=40 N/m și, respectiv, $k_2$=80 N/m legate în serie susțin un corp. Să se afle raportul energiilor potențiale de deformare ale resorturilor $E_{P1}/E_{P2}$.

**14*.** Două resorturi cu aceeași lungime inițială se leagă în paralel și sunt alungite de o forță $F$. Știind că cele două constante elastice ale celor două resorturi sunt $k_1$=20 N/m și $k_2$=60 N/m să se afle raportul energiilor potențiale elastice $E_{P1}/E_{P2}$.

**15*.** În graficul din figura 3 este reprezentată energia potențială de deformare a unui resort în funcție de $x^2$, unde $x$ reprezintă deformația resortului. Să se afle:

**a.** constantele elastice ale resorturilor

**b.** alungirea resortul 2, dacă resorturile se leagă în serie și se alungesc cu $x$=20 cm

### 3.3. Teorema de variație a energiei cinetice

**1.** O mașină cu masa $m$=500 kg se deplasează pe un drum orizontal cu viteza $v$=20 m/s. După începerea frânării în mod uniform, mașina se oprește în timpul $\Delta t$=20 s. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de frânare până la oprirea mașinii

**b.** forța de frânare

**c.** distanța parcursă de mașină până la oprire

**2.** Un pescar împinge o barcă aflată inițial în repaus cu o forță orizontală de valoare $F$=180 N. În barcă se află un prieten cu masa de $m_1$=90 kg, fetița sa cu masa de $m_2$=20 kg și soția cu masa de $m_3$=65 kg. Masa bărcii goale este de $m_4$=75 kg. Forța de rezistență întâmpinată de barcă este de $F_r$=80 N. Barca se deplasează orizontal, pe distanța $d$=1 m, după care acțiunea forței încetează. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanța $d$

**b.** viteza atinsă de barcă imediat după încetarea acțiunii forței

**c.** distanța parcursă de barcă până la oprire, după încetarea acțiunii forței $F$

**3.** Asupra unui corp, aflat inițial în repaus pe un plan orizontal pe care se poate mişca fără frecare, acționează pe direcție orizontală o forță constantă $F$=4 N. După un timp $\Delta t$=2 s energia cinetică a corpului are valoarea $E_c$=8 J. La momentul $t$=2 s asupra corpului începe să acționeze o forță orizontală suplimentară care determină oprirea corpului. Din momentul aplicării forței şi până la oprire corpul parcurge distanța $D$=0,5 m. Să se afle:

**a.** distanța parcursă de corp în intervalul de timp $\Delta t$

**b.** viteza corpului la momentul $t$=2 s

**c.** masa corpului

**d.** valoarea forței suplimentare

**4.** Asupra unui corp de masă $m$=2 kg care se deplasează cu frecare de-a lungul unei suprafețe orizontale acționează, un timp $\Delta t$, pe direcție orizontală, o forță de tracțiune. Viteza corpului creşte de la valoarea $v_1$=2 m/s la valoarea $v_2$=6 m/s în timpul $\Delta t$, distanța parcursă de corp în acest timp fiind $d$=20 m. Forța de frecare la alunecare dintre corp şi suprafața orizontală are valoarea $F_f$=2 N. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat forța de tracțiune în timpul $\Delta t$

**b.** puterea medie dezvoltată de forța de tracțiune şi intervalul de timp $\Delta t$

**c.** coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi suprafața orizontală

**5.** Un autoturism având masa $m$=800 kg se deplasează cu viteza constantă $v$=54 km/h pe o şosea orizontală, dezvoltând o putere $P$=15 kW. La un moment dat motorul se opreşte şi autoturismul îşi continuă deplasarea cu motorul oprit, fără a frâna. Considerând că forțele de rezistență la înaintare sunt constante să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență la înaintare din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului

**b.** distanța parcursă din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului

**c.** intervalul de timp în care autoturismul se opreşte

**6.** Un tren de masă totală $m$=200 t se deplasează orizontal cu viteză constantă. Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este $P$=400 kW iar forțele de rezistență care acționează asupra trenului reprezintă o fracțiune $f$=0,01 din greutatea acestuia. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență la deplasarea trenului pe distanța $d$=1200 m

**b.** viteza trenului şi lucrul mecanic efectuat de locomotivă într-un interval de timp $\Delta t$=2 min

**c.** La un moment dat este decuplat ultimul vagon. Considerând că forțele de rezistență care acționează asupra acestuia reprezintă o fracțiune $f$=0,01 din greutatea acestuia, calculați distanța parcursă de vagon din momentul desprinderii până în momentul opririi

**7.** O camionetă de masă $m$=1,6 t se deplasează pe un drum orizontal, astfel încât viteza acesteia creşte liniar în timp. La momentul $t_1$ viteza sa este $v_1$=18 km/h, iar la un moment ulterior $t_2$, devine $v_2$=20 m/s. În intervalul de

timp $\Delta t=t_2-t_1$, forța de tracțiune produsă de motorul camionetei efectuează un lucru mecanic $L$=375 kJ, dezvoltând o putere medie $P$=75 kW. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în intervalul de timp $\Delta t$
**b.** forța de tracțiune dezvoltată de motor și forța de rezistență
**c.** distanța parcursă de camionetă în intervalul de timp $\Delta t$

**8.** Un tren cu masa $m$=100 t care se deplasează cu viteza $v_0$=108 km/h se apropie de o stație în care urmează să se oprească. Mecanicul mai întâi oprește alimentarea cu energia electrică la distanța $d$=900 m de stație, apoi este pus în funcțiune sistemul de frânare. Rezistența la înaintare opusă de-a lungul drumului este permanent $f_1$=1/100 din greutatea trenului, iar forța de frânare este $f_2$=1/8 din greutatea trenului. Să se afle:
**a.** distanța față de stație de la care începe frânarea
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de frânare din momentul punerii în acțiune a sistemului de frânare până la oprire
**c.** viteza trenului după ce acesta parcurge distanța $d_1$=800 m după oprirea alimentării cu energia electrică

**9.** Un avion de masă $m$=2,5 t, cu motorul oprit, planează cu viteza constantă $v$=144 km/h într-o atmosferă liniștită și coboară de la înălțimea $h_1$=2 km până la înălțimea $h_2$=1 km, între două puncte $A$ și $B$ aflate la distanța $d=AB$=10 km unul de altul. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în timpul planării
**b.** lucrul mecanic dezvoltat de motor la întoarcerea avionului pe același drum cu aceeași viteză, dacă lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență are valoarea de la **a.**
**c.** puterea dezvoltată de motor în situația descrisă la punctul **b.**

**10.** O jucărie-elicopter telecomandată, cu masa $m$=50 g, poate dezvolta, datorită motorașului electric, o forță de tracțiune verticală constantă $F$=1 N. La înălțimea $H$=9 m față de nivelul solului se suspendă de aceasta o altă jucărie cu masa $M$=150 g, iar sistemul nou format va începe să zboare vertical, pornind din repaus. După un astfel de zbor pe distanța $h$=4 m, jucăria-elicopter scapă obiectul suspendat. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate pe toată durata mișcării ei până la căderea pe sol
**b.** viteza pe care o are elicopterul în momentul în care scapă jucăria suspendată
**c.** energia potențială minimă a elicopterului, dacă se consideră la nivelul solului energia potențială nulă

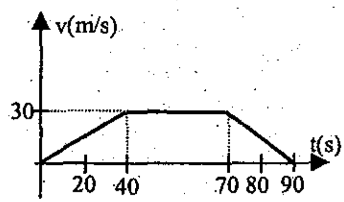
**11.** Un glonte cu masa $m$=50 g se trage dintr-o armă cu viteza inițială $v_0$=500 m/s. Glontele străbate un bloc cubic de lemn cu lungimea $\ell$=2 m și întâmpină o forță de frecare $F_f$=1124,5 N. Să se afle viteza cu care iese glontele:
**a.** dacă glontele este tras pe verticală de jos în sus
**b.** dacă glontele este tras pe verticală de sus în jos
**c.** dacă glontele este tras pe orizontală

**12.** Asupra unei bile de masă $m$=0,4 kg, aflată inițial în repaus la înălțimea $h_0$=1 m deasupra solului, acționează o forță constantă $F$ orientată vertical în sus. Acțiunea forței încetează în momentul în care bila atinge viteza $v$=4 m/s. Știind că forța $F$ efectuează un lucru mecanic $L$=16 J, să se afle:
**a.** înălțimea la care se află bila față de sol în momentul în care încetează acțiunea forței $F$
**b.** înălțimea maximă față de sol la care ajunge bila
**c.** viteza cu care trece bila în cădere prin punctul în care s-a aflat inițial

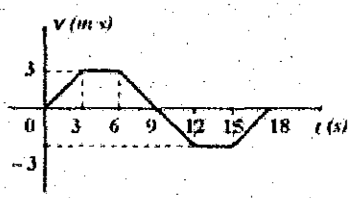
**13.** Două corpuri cu masele $m_1$=2 kg, respectiv $m_2$=4 kg se află la momentul inițial deasupra solului la înălțimile $h_1$=10 m, respectiv $h_2$=5 m. Corpurile sunt lăsate să cadă simultan fără viteză inițială. Presupunând că frecarea cu aerul este neglijabilă, să se afle:
**a.** variația energiei potențiale a corpului 2 la căderea corpului de la înălțimea $h_2$ până la atingerea solului
**b.** raportul $v_1/v_2$ al vitezelor cu care cele două corpuri ating solul
**c.** raportul $\Delta t_1/\Delta t_2$ al intervalelor de timp după care cele două corpuri ating solul

**14.** Dintr-un turn cu înălțimea $H$=100 m este lăsat să cadă vertical, fără viteză inițială, un corp cu masa $m$=3 kg. Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul reprezintă o fracțiune $f$=90% din energia mecanică inițială. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență la înaintare în timpul căderii corpului
**b.** viteza corpului la atingerea solului
**c.** forța medie de rezistență la înaintare întâmpinată de corp în timpul căderii

**15.** Un mobil cu masa $m$=10 kg se mișcă rectiliniu. Viteza sa la diferite momente de timp este redată în graficul din figura alăturată. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic total efectuat asupra mobilului pe durata primelor 40 s
**b.** forța medie care se exercită asupra mobilului în primele 40 s
**c.** lucrul mecanic total efectuat asupra mobilului pe durata celor 90 s

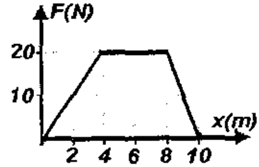



**16.** Un corp cu masa $m$=100 g pornește din originea axei $Ox$ și descrie o mișcare rectilinie, astfel că viteza acestuia depinde de timp ca în figură. Să se afle:
**a.** reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mișcări
**b.** distanța parcursă de corp pe durata întregii mișcări



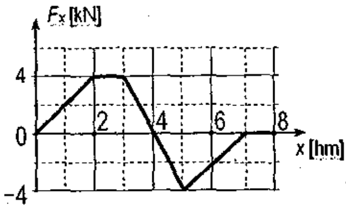
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă ce acționează asupra corpului în intervalul de timp $t \in (3, 9)$s

**17.** Un corp cu masa $m$=2 kg se află în repaus în originea axei $Ox$, orientate în lungul unui plan orizontal fără frecări. Asupra punctului material acționează, pe direcția axei $Ox$, o forță orizontală variabilă conform graficului alăturat. Să se afle:



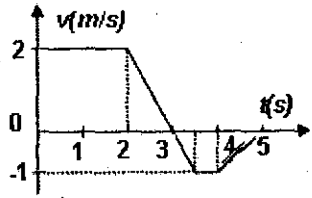

**a.** lucrul mecanic efectuat de forța $F$ pe primii 10 m
**b.** forța medie pe primii 10 m
**c.** viteza corpului în punctul de coordonată $x_1$=4 m
**d.** intervalul de timp necesar deplasării corpului din punctul $x_1$=4 m în punctul $x_2$=8 m

**18.** Un automobil cu masa $m$=1000 kg pornește din repaus și se deplasează rectiliniu pe o autostradă orizontală. În graficul alăturat este reprezentată proiecția forței rezultante care se exercită asupra automobilului pe direcția mișcării, $F_x$ în funcție de coordonata $x$. Să se afle:



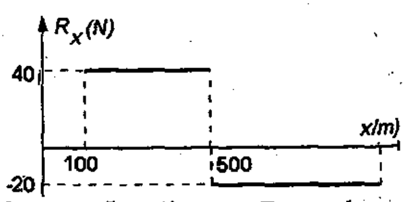

**a.** reprezentarea grafică a proiecției accelerației $a_x$ pe direcția mișcării automobilului, în funcție de coordonata $x$, pentru primii 200 m
**b.** coordonata $x_m$ a automobilului în momentul în care viteza sa a atins valoarea maximă și justificați răspunsul
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă în timpul în care automobilul parcurge primii 300 m
**d.** valoarea $v_1$ a vitezei automobilului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată $x_1$=300 m

**19.** În figură este reprezentată variația dependenței de timp a vitezei unui corp cu masa $m$=10 kg. Să se afle:



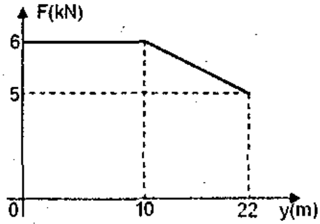

**a.** viteza medie în intervalul $t \in [0,5)$s
**b.** reprezentarea grafică a accelerației în funcție de timp în intervalul $t \in (0,6)$s
**c.** lucrul mecanic al rezultantei forțelor ce au acționat asupra corpului între momentele de timp $t_1$=2 s și $t_2$=3,5 s

**20.** Un corp cu masa $m$=5 kg, aflat inițial în repaus, începe să alunece cu frecare de-a lungul axei $Ox$, din punctul de coordonată $x_0$=100 m, sub acțiunea unei forțe de tracțiune orientate în lungul acestei axe. Când corpul ajunge în punctul de coordonată $x_1$=500 m, forța de tracțiune își încetează acțiunea. Forța de frecare este constantă în tot cursul mișcării. În figura alăturată este reprezentată dependența de coordonata $x$ a rezultantei $R_x$ a forțelor ce acționează pe direcția mișcării. Să se afle:



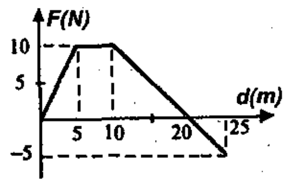
**a.** forța de tracțiune dezvoltată de motor
**b.** viteza $v_1$ a corpului în momentul încetării acțiunii forței de tracțiune
**c.** puterea medie dezvoltată de motor
**d.** durata acțiunii forței de tracțiune
**e.** viteza $v_2$ a corpului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată $x_2$=850 m

**21.** În figura alăturată este reprezentată dependența de înălțime a modulului forței cu care acționează cablul de tracțiune asupra cabinei unui ascensor cu masa $m$=500 kg aflat într-o clădire de înălțime mare. Ascensorul urcă de-a lungul axei verticale $Oy$. La momentul inițial $t_0$=0 cabina ascensorului se afla în repaus în originea axei $Oy$. Să se afle:



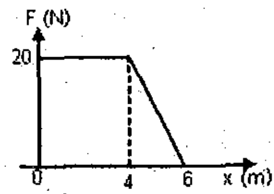

**a.** lucrul mecanic cheltuit de motorul care ridică ascensorul până când acesta atinge înălțimea $y_1$=10 m
**b.** viteza cabinei ascensorului când ascensorul se află la $y_1$=10 m
**c.** puterea instantanee a motorului în momentul în care ascensorul se află la înălțimea $y_2$=22 m

**22.** Asupra unui corp cu masa $m$=2 kg acționează o forță rezultantă a cărei dependență de coordonata $x$ este redată în graficul alăturat. Să se afle:




**a.** lucrul mecanic total efectuat de forță când $x \in (0,25)$ m
**b.** forța când coordonata este $x_1$=12 m
**c.** puterea instantanee în condițiile punctului **b.**, dacă în punctul de coordonată $x_0$=0, corpul are viteza $v_0$=2,645 m/s

**23.** Un corp de masă $m$=5 kg pornește din repaus și se deplasează cu frecare, pe o suprafață orizontală, sub acțiunea unei forțe de tracțiune orizontale $F$. Dependența valorii forței $F$ de coordonata corpului este reprezentată în graficul alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu$=0,2, să se afle:



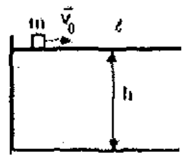

**a.** lucrul mecanic efectuat de forța $F$ pe distanța de 6m
**b.** viteza corpului în punctul de coordonată $x$=6 m
**c.** distanța parcursă de corp din momentul încetării acțiunii forței $F$ până la oprire

**24.** O scândură cu lungimea $\ell$=1 m și masa $m$=2 kg este lansată pe asfalt, ca în figura alăturată, cu viteza $v_0$=1 m/s orientată pe lungimea ei, de pe gheață unde frecarea este neglijabilă, astfel că pătrunde parțial pe asfalt, oprindu-se din cauza frecării. Coeficientul de frecare pe asfalt este $\mu$=0,4. Să se afle:


**a.** lucrul mecanic al forței de frecare la pătrunderea pe asfalt
**b.** distanța pe care pătrunde scândura pe asfalt

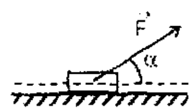
**c.** viteza cu care trebuie lansată o scândură din acelaşi material dar de două ori mai lungă, pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeaşi distanţă ca şi prima

**25.** Un corp de masă $m$=4 kg, este aşezat la o distanţă $\ell$=1,1 m de capătul liber al unei platforme orizontale fixe, aflată la înălţimea $h$=1,2 m faţă de sol. Corpului i se imprimă o viteza iniţială orizontală $v_0$=6 m/s, orientată către capătul liber al platformei, ca în figura alăturată. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi platformă este $\mu$=0,5. Să se afle:



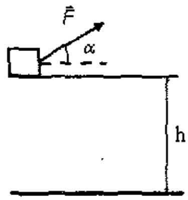

**a.** energia cinetică a corpului în momentul iniţial
**b.** viteza corpului în momentul în care se află la capătul liber al platformei
**c.** viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

**26.** Pe un plan orizontal se află iniţial în repaus un corp cu masa $m$=2 kg supus acţiunii unei forţe $F$=15 N, care acţionează ca în figură sub un unghi $\alpha$=30°. Mişcarea se face cu frecare coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2. Să se afle utilizând teorema de variaţie a energiei cinetice, după parcurgerea distanţei $d$=2 m:




**a.** viteza corpului
**b.** energia cinetică a corpului în condiţiile punctului **a.**
**c.** puterea medie dezvoltată de forţă în timpul mişcării

**27.** Asupra unui corp cu masa $m$=2 kg, care se află iniţial în repaus pe o masă orizontală la înălţimea $h$=1 m faţă de podea, începe să acţioneze o forţă constantă $F=10\sqrt{2}$ N, care face un unghi $\alpha$=45° cu direcţia mişcării, ca în figura alăturată. Corpul se deplasează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2, iar când ajunge la capătul mesei acţiunea forţei încetează şi corpul cade de la înălţimea $h$.




Pentru a deplasa corpul pe toată lungimea mesei, forţa efectuează lucrul mecanic $L$=20 J. Să se afle:
**a.** distanţa parcursă de corp pe suprafaţa mesei
**b.** lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe durata mişcării
**c.** puterea medie dezvoltată de forţa $F$ şi intervalul de timp cât se deplasează corpul pe masă
**d.** energia cinetică a corpului când acesta ajunge la suprafaţa Pământului

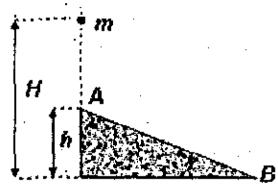
**28.** Un corp este lansat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° cu o viteză iniţială $v_0$. Acest corp urcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/\left(3\sqrt{3}\right)$, astfel încât corpul se opreşte după ce parcurge pe plan o lungime $\ell$=15 m. Să se afle:
**a.** viteza iniţială cu care porneşte corpul de la baza planului înclinat
**b.** viteza cu care revine corpul la baza planului înclinat
**c.** distanţa parcursă de corp până la oprire pe un plan orizontal cu care se continuă planul înclinat, dacă se consideră că mişcarea se efectuează pe planul orizontal cu coeficientul de frecare $\mu'$=0,1

**29.** O sanie cu masa $m$=4 kg coboară liber pe o pârtie înclinată şi îşi continuă apoi drumul pe un plan orizontal până la oprire. Înălţimea pârtiei este $h$=10 m, iar proiecţia pe orizontală a întregii traiectorii a saniei este $d$=50 m. Coeficientul de frecare la alunecare are aceeaşi valoare pe tot parcursul mişcării. Să se afle:
**a.** coeficientul de frecare la alunecare
**b.** viteza saniei la baza pârtiei, dacă unghiul $\alpha=14^0$ ($tg\,\alpha\approx0{,}25$)
**c.** puterea medie a forţei de frecare la coborârea saniei pe pârtie, dacă $\alpha=14^0$

**30.** O cărămidă cu masa $m$=2 kg alunecă accelerat pe o scândură înclinată faţă de planul orizontal cu unghiul $\alpha=45^0$. Dacă cărămida este lansată de jos în sus de-a lungul scândurii cu viteza $v_0$=4 m/s, aceasta urcă cu o acceleraţie dublă în modul. Să se afle:
**a.** coeficientul de frecare la alunecare
**b.** spaţiul parcurs de cărămidă până la oprirea pe scândură
**c.** randamentul scândurii înclinate

**31.** Un corp, lansat în sus de la baza unui plan înclinat cu unghiul $\alpha=14^0$ ($tg\,\alpha\approx0{,}25$) faţă de orizontală, are în momentul lansării energia cinetică $E_{c0}$=500 J. După ce parcurge o anumită distanţă pe planul înclinat, corpul se opreşte şi apoi revine la baza planului. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corp şi suprafaţa planului este $\mu$=0,15. Considerând că energia potenţială gravitaţională a sistemului corp-Pământ este nulă în punctul din care este lansat corpul, să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare
**b.** energia potenţială gravitaţională a sistemului corp-Pământ în momentul opririi corpului pe planul înclinat
**c.** lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare la alunecare între momentul lansării şi momentul opririi corpului pe planul înclinat
**d.** energia cinetică pe care o are corpul în momentul revenirii sale în poziţia din care a fost lansat

**32.** De la înălţimea $H$=10 m cade liber un corp de masă $m$=2 kg, ca în figura alăturată. La înălţimea $h$=2 m faţă de sol corpul ciocneşte un plan înclinat de lungime $\ell=AB$=4 m, de-a lungul căruia alunecă, fără să se desprindă de acesta. În urma ciocnirii, corpul pierde $f$=75% din energia cinetică pe care o avea înainte de ciocnire. Forţa de frecare la alunecarea pe planul înclinat este $F_f$=4 N. Se consideră nulă energia potenţială la baza planului. Să se afle:




**a.** energia cinetică a corpului imediat înainte de ciocnirea cu planul înclinat
**b.** energia mecanică totală a corpului la înălţimea $h$, imediat după ciocnirea acestuia cu planul înclinat
**c.** viteza corpului în punctul $B$
**d.** coeficientul de frecare

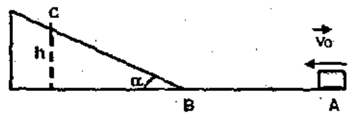
**33.** Un corp de masă $m$=5 kg este lansat cu viteza inițială $v_0$=10 m/s din punctul $A$, pe o suprafață orizontală, ca în figura alăturată. După ce parcurge distanța $AB$=$d$=5 m pe planul orizontal, corpul intră pe un plan înclinat care face unghiul $\alpha$=30° cu orizontala şi urcă pe acesta până în punctul $C$, unde se opreşte. Atât pe planul orizontal cât şi pe cel înclinat mişcarea are loc cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu_1$=0,5 pe planul orizontal şi $\mu_2=1/\sqrt{3}$ pe planul înclinat. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe distanța $AB$

**b.** energia cinetică în punctul $B$

**c.** înălțimea maximă la care ajunge corpul pe planul înclinat

**d.** randamentul planului înclinat



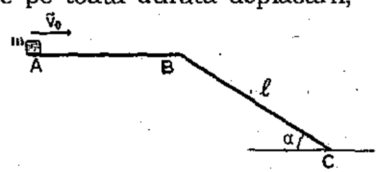

**34.** Pe o suprafață orizontală $AB$ se lansează din punctul $A$, cu viteza inițială $v_0$=20 m/s, un corp cu masa $m$=2 kg (vezi figura). Corpul ajunge în punctul $B$ cu o viteză egală cu jumătate din valoarea vitezei inițiale, după care începe să coboare pe o pantă de lungime $\ell$=$BC$=30 m, care formează un unghi $\alpha$ ($\sin\alpha$=0,6) cu orizontala. Corpul ajunge la baza pantei cu viteza $v_0$, egală cu viteza inițială. Pe toată distanța mişcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare având aceeaşi valoare peste tot. Să se afle:

**a.** lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare pe toată durata deplasării, între punctul de lansare şi baza pantei

**b.** coeficientul de frecare

**c.** lungimea porțiunii $AB$

**d.** variația energiei mecanice totale a corpului între punctele $B$ şi $C$. Justificați valoarea.

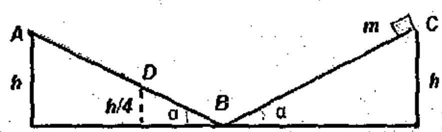



**35.** Un corp cu masa $m$=2 kg este lansat din punctul $C$ în jos cu o viteză inițială de la înălțimea $h$=4 m pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° ca în figură. Ştiind că deplasarea corpului se realizează cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=\sqrt{3}/10$ peste tot, să se afle:

**a.** lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din $C$ în $A$

**b.** viteza minimă a corpului în punctul $C$ astfel încât acesta să ajungă la aceeaşi înălțime pe al doilea plan înclinat identic cu primul

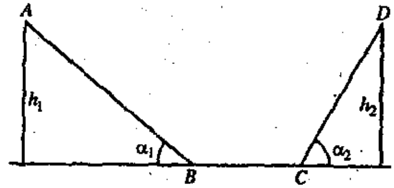
**c.** variația energiei mecanice a corpului între punctele $A$ şi $D$, dacă punctul $D$ este situat la înălțimea $h/4$



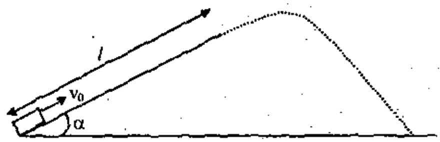

**36.** O sanie alunecă liber din vârful unui derdeluş de înălțime $h_1$=7,2 m. Mişcarea pe primul derdeluş se face fără frecare. Sania parcurge apoi o suprafață orizontală cu lungimea $\ell$=23 m pe care se deplasează cu frecare, $\mu$=0,05, după care sania urcă până la înălțime $h_2$=5 m pe un alt derdeluş cu unghiul $\alpha$=45°. Să se afle:

**a.** viteza saniei la baza primului derdeluş

**b.** viteza saniei la baza celui de-al doilea derdeluş
**c.** coeficientul de frecare pe al doilea derdeluş
**d.** viteza cu care revine la baza primului derdeluş

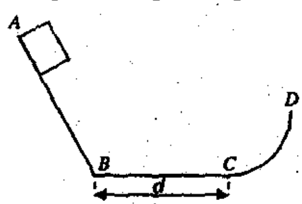



**37.** Un corp cu masa $m$=2 kg este aruncat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30° şi lungimea $\ell$=3 m, cu viteza iniţială $v_0$=10 m/s. Mişcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/\left(5\sqrt{3}\right)$. Să se afle utilizând teorema de variaţie a energiei cinetice:




**a.** viteza cu care ajunge corpul în vârful planului înclinat
**b.** lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare pe planul înclinat
**c.** viteza cu care ajunge corpul în planul orizontal al punctului de lansare

**38.** Un corp cu masa $m$=2 kg coboară fără frecare pe un plan înclinat cu înălţimea $h$=1 m ca în figura alăturată. Ajungând la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafaţă plană până într-un punct $C$ parcurgând distanţa $d$=2 m. Coeficientul de frecare este $\mu$=0,3. Din punctul $C$, corpul urcă fără frecare pe o suprafaţă curbă $CD$. Să se afle:

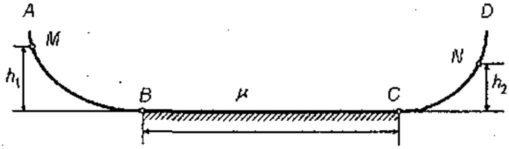



**a.** viteza corpului la baza planului înclinat
**b.** viteza corpului în punctul $C$
**c.** înălţimea la care urcă corpul pe suprafaţa $CD$
**d.** distanţa faţă de punctul $B$ la care se opreşte corpul pe porţiunea $BC$

**39.** La o competiţie de schi, sportivul aflat în poziţia $A$ trebuie să aibă o viteză minimă pentru a putea ajunge până în poziţia $B$ (vezi figura alăturată) situată la înălţimea $H$=3,2 m faţă de porţiunea orizontală a pistei. Masa sistemului sportiv-schiuri este $M$=90 kg. Să se afle:


**a.** viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul $A$ pentru a ajunge în $B$, dacă s-ar neglija forţele de rezistenţă la înaintare
**b.** înălţimea $h$ la care se află punctul $C$ în care sportivul se opreşte, dacă viteza sportivului în punctul $A$ este $v_A$=8 m/s iar lucrul mecanic efectuat de rezultanta forţelor de rezistenţă întâmpinate de sportiv în deplasarea sa reprezintă o fracţiune $f$=10% din lucrul mecanic al greutăţii sportiv-schiuri la deplasarea din $A$ în $C$
**c.** lucrul mecanic efectuat de forţele de rezistenţă până când sportivul ajunge la înălţimea $h_D$=2 m, unde viteza sa devine $v_D$=4 m/s dacă sportivul are în punctul $A$ viteza $v_A$=8 m/s

**40.** O pistă de snowboard are forma din figură: două porțiuni curbe $AB$ şi $CD$, separate de o porțiune orizontală $BC=d=12$ m. Un sportiv cu masa $m=70$ kg coboară liber pe un snowboard, din punctul $M$ al porțiunii curbe $AB$ a pistei, punctul $M$ aflându-se la înălțimea $h_1=2,45$ m. Admițând că mişcarea pe cele două porțiuni curbe $AB$ şi $CD$ se face fără frecare, că pe porțiunea orizontală $BC$ coeficientul de frecare la alunecare dintre snowboard şi zăpadă este $\mu=0,1$. Să se afle:




**a.** viteza $v_C$ cu care trece prima dată sportivul prin punctul $C$

**b.** înălțimea $h_2$ a punctului $N$ în care se opreşte prima dată sportivul pe porțiunea $CD$ a pistei

**c.** lucrul mecanic efectuat de forțele de frecare de la începutul mişcării sportivului şi până la oprirea sa definitivă

**d.** distanța dintre punctul $B$ şi punctul în care se va opri definitiv sportivul

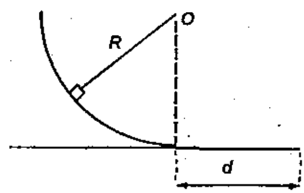
**41.** Un corp cu masa $m=200$ g se prinde de un fir inextensibil de lungime $\ell=40$ cm. Se scoate corpul din poziția de echilibru până când firul formează un unghi $\alpha=60^0$ cu verticala şi se lasă liber corpul. Să se afle:

**a.** viteza cu care trece corpul prin poziția verticală

**b.** energia cinetică când firul formează un unghi $\beta=30^0$ cu verticala

**c*.** tensiunea maximă pe care o suportă firul, dacă acesta nu se rupe

**42.** De la marginea superioară a unui jgheab circular vertical de forma uni sfert de cerc cu raza $R=30$ cm se lasă liber un corp cu masa $m=100$ g ca în figură. Pe jgheab mişcarea se face cu frecare iar lucrul mecanic total al acestor forțe de frecare este $L_{Ff}=-0,1$ J. Mişcarea corpului continuă pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0,1$. Să se afle:

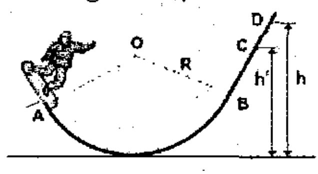



**a.** viteza corpului la marginea inferioară a jgheabului

**b*.** forța cu care apasă corpul pe jgheab în poziția inferioară a traiectoriei

**c.** distanța parcursă de corp pe planul orizontal până la oprire

**43.** Pe o pistă de snowboard se află un sportiv cu masa $M=70$ kg care are o placă cu masa $m=5$ kg. În partea inferioară arcul $AB$ este egal cu $1/3$ dintr-un cerc cu raza $R=4$ m. Să se afle:

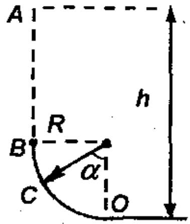



**a.** viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul $A$ pentru a putea ajunge în punctul $D$ situat la înălțimea $h=3$ m dacă mişcarea decurge fără frecare

**b.** viteza minimă pe care trebuie să o aibă sportivul în punctul $A$ pentru a putea ajunge în punctul $B$ aflat la acceaşi înălțime, dacă lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{Ff}=-2400$ J

**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare dintre talpa snowboardului și zăpadă la deplasarea din punctul $A$ până în punctul $C$, dacă în punctul $A$ sportivul are viteza inițială $v_0$=8 m/s și se oprește într-un punct $C$ situat la înălțimea $h'$=2,5 m

**44.** Un corp cu masa $m$=1 kg cade liber de la înălțimea $h$=1,5 m, măsurată față de sol pe care se află un jgheab circular $BO$ de forma unui sfert de cerc cu raza $R$=50 cm ca în figură. Să se afle:

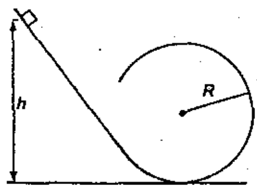



**a.** viteza cu care ajunge corpul pe jgheab, dacă mișcarea corpului se face fără frecare

**b*.** forța cu care apasă corpul asupra jgheabului când poziția corpului formează unghiul $\alpha$=60° cu verticala și valoarea maximă a foței de apăsare, dacă mișcarea corpului pe jgheab se face fără frecare

**c.** lucrul mecanic al forței de frecare pe jgheab, astfel că în punctul $O$ al jgheabului corpul se oprește

**45*.** Se lasă liber un corp cu masa $m$=200 g pe un jgeab ca în figură. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Bucla circulară are raza $R$=50 cm. Să se afle:




**a.** viteza corpului în punctul cel mai de sus al buclei, dacă acesta nu apasă asupra jgheabului

**b.** înălțimea minimă de unde trebuie lăsat liber corpul pentru a putea descrie bucla

**c.** lucrul mecanic al unor forțe de frecare dacă corpul se lasă liber de la înălțimea $H$=2,5 m, iar în punctul superior corpul nu apasă asupra jgheabului

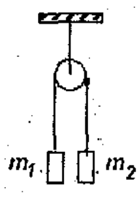
**46.** Un corp cu masa $m$=800 kg se deplasează fără frecare sub acțiunea unei forțe $F$, orientată pe direcția și în sensul vitezei inițiale $v_0$=10 m/s a corpului. Puterea dezvoltată de forța $F$ rămâne constantă, egală cu $P$=4 kW. Să se afle:

**a.** timpul după care viteza corpului crește de $n$=4 ori

**b.** valoarea forței $F$ în acel moment

**c.** reprezentările grafice ale dependențelor forței de viteză, respectiv a vitezei de timp

**47.** Două corpuri cu masele $m_1$=400 g și $m_2$=600 g se află la aceeași înălțime $h$=1 m față de sol fiind prinse cu un fir inextensibil cu lunginea $\ell$=2,5 m trecut peste un scripete ca în figură. Se lasă sistemul de corpuri liber. Să se afle:

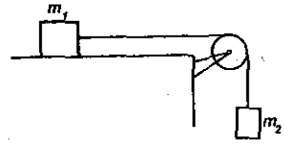



**a.** energia cinetică a sistemului de corpuri, dacă sistemul se mișcă pe distanța $h_1$=40 cm

**b.** viteza cu care corpul de masă $m_2$ lovește solul

**c.** înălțimea maximă măsurată față de sol la care ajunge corpul cu masa $m_1$

**48.** Pe o suprafață orizontală se deplasează cu frecare ($\mu$=0,2) un corp cu masa $m_1$=5 kg. Corpul cu masă $m_1$ se leagă printr-un fir inextensibil trecut peste un scripete ca în figură de un corp cu masă $m_2$=3 kg. Cele două corpuri se mişcă împreună pornind din repaus pe distanţa $d$=0,5 m şi apoi firul care le leagă se rupe. Să se afle:




**a.** viteza sistemului înainte de ruperea firului

**b.** distanţa parcursă până la oprire de corpul $m_1$ măsurată din momentul pornirii, dacă distanţa de la el până la scripete este suficient de mare

**c.** viteza cu care ajunge la sol corpul $m_2$, dacă în momentul ruperii firului, acesta se află la înălţimea $h$=1,2 m faţă de sol

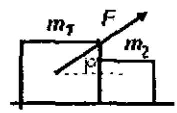
**49.** Fie sistemul din figura anterioară. Dacă se imprimă o viteză sistemului de corpuri printr-un impuls aplicat corpului cu masa $m_2$=20 g în jos, acesta coboară pe distanţa $h_1$=25 cm. Dacă imprimăm sistemului aceeaşi viteză, imprimând un impuls corpului cu masa $m_1$=100 g spre stânga, corpul cu masa $m_2$ urcă pe distanţa $h_2$=5 cm. Scripetele se consideră ideal ca şi firul de prindere al corpurilor Să se afle:

**a.** coeficientul de frecare la alunecare

**b.** raportul lucrurilor mecanice ale forţelor de frecare

**c.** spaţiul până la oprire, dacă viteza iniţială imprimată sistemului este $v_0$=5m/s iar $m_1$ se mişcă spre stânga

**50.** Asupra unui corp cu masa $m_1$=2 kg aflat iniţial în repaus, pe un plan orizontal, acţionează o forţă constantă $F$, a cărei direcţie formează unghiul $\alpha$=30$^0$ cu suprafaţa planului. Corpul se găseşte în contact cu un al doilea corp, de masă $m_2$=0,5 kg ca în figura alăturată. Pentru deplasarea sistemului pe o distanţă $d$=10 m lucrul mecanic efectuat de forţa de tracţiune este de $L_F$=173 J, iar cel al forţelor de frecare este egal cu $L_{Ff}$=−15J. Se consideră că ambele corpuri au acelaşi coeficient de frecare la alunecare cu planul orizontal. Să se afle:



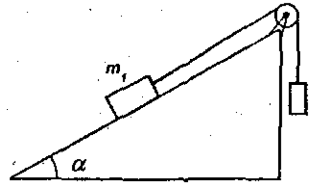

**a.** valoarea forţei de tracţiune

**b.** coeficientul de frecare la alunecare dintre corpuri şi suprafaţa orizontală

**c.** puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa $m_2$ pe distanţa $d$

**d.** viteza sistemului de corpuri după parcurgerea unei distanţe $D$=20 m din momentul aplicării forţei $F$

**51** Fie sistemul de corpuri cu masele $m_1$=2 kg şi $m_2$=4 kg din figură. Iniţial corpul $m_2$ se află la înălţimea $h$=60 cm de sol, iar planul cu unghiul $\alpha$=30$^0$ se consideră suficient de lung. Corpurile pornesc din repaus, mişcarea corpului $m_1$ făcându-se cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/\left(3\sqrt{3}\right)$. Să se afle:



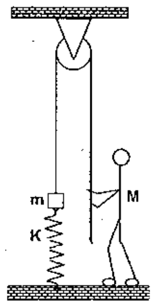

**a.** viteza corpurilor când corpul $m_2$ ajunge la sol

**b.** distanţa parcursă până la oprire de corpul aflat pe planul înclinat după ce corpul $m_2$ ajune pe sol măsurată faţă de punctul de pornire

**c.** lucrul mecanic total efectuat de forța de frecare ce acționează asupra corpului $m_1$ până la oprire

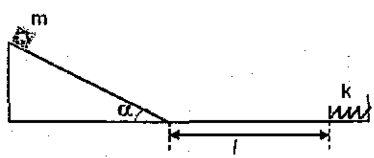
**52.** Fie sistemul de corpuri cu masele $m_1$=4 kg și $m_2$=2 kg aflat inițial în repaus pe planul înclinat cu unghiul $\alpha$=60$^0$ ca în figura precedentă. Corpul $m_1$ se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2. Lăsat liber sistemul se mișcă pe o distanță $\ell$=2 m. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de frecare
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului $m_2$ în timpul mișcării sistemului pe distanța $\ell$
**c.** viteza corpurilor după parcurgerea distanței $\ell$

**53.** Un om cu masa $M$=80 kg menține în repaus o ladă cu masa $m$=20 kg prin intermediul unui fir ideal trecut peste un scripete fix, ca în figură. Între ladă și podeaua pe care stă omul este legat un resort nedeformat având constanta de elasticitate $k$=200 N/m. Omul trage de sfoară în jos cu scopul de a ridica lada cât mai sus. Să se afle:



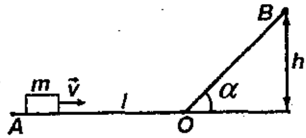

**a.** variația energiei potențiale gravitaționale a sistemului ladă-Pământ când aceasta este ridicată pe verticală pe o distanță $h$=0,5 m
**b**. lucrul mecanic efectuat de forța elastică la alungirea resortului cu $h$
**c.** lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada legată de resort, cu viteză constantă, pe distanța $h$=0,5 m
**d.** deformarea maximă a resortului considerând că lada este ridicată cu viteză constantă foarte mică, omul nu se desprinde de sol și scripetele se află suficient de sus, iar deformațiile se consideră elastice. Interpretați rezultatul practic.

**54.** Un corp de masă $m$=1 kg, aflat inițial în repaus, alunecă fără frecare din vârful unui plan înclinat de unghi $\alpha$=30$^0$ și lungime $d$=10 m. Mișcarea se continuă cu frecare pe un plan orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,25. După ce corpul parcurge distanța $\ell$=10 m, lovește un resort de constantă de elasticitate $k$=5000 N/m pe care îl comprimă și se oprește. Să se afle:
**a.** energia cinetică a corpului la baza planului înclinat
**b.** viteza corpului imediat înainte ca acesta să atingă resortul
**c.** comprimarea maximă a resortului, neglijând frecarea pe timpul comprimării

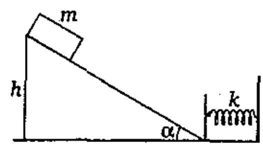



**55.** Un resort cu constanta elastică $k$=4 kN/m comprimat cu $x$=5 cm se decomprimă și lansează un corp cu masa $m$=100 g. Corpul își continuă mișcarea pe un plan orizontal cu lungimea $\ell$=3 m și apoi pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha$=30$^0$. Mișcarea se face cu frecare după decomprimarea resortului, coeficientul de frecare fiind peste tot $\mu$=0,6. Să se afle:

**a.** viteza cu care porneşte corpul după decomprimarea resortului
**b.** înălţimea la care urcă corpul pe planul înclinat
**c.** lucrul mecanic total al forţei de frecare

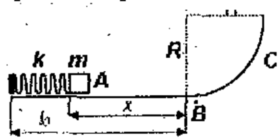



**56.** Pe un plan înclinat cu un unghi $\alpha$=30⁰ faţă de orizontală alunecă liber un corp cu masa $m$=200 g, de la o înălţime $h$=2 m faţă de sol. Mişcarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 1/(2\sqrt{3})$. La baza planului înclinat se află un resort, iniţial nedeformat cu constanta elastică $k$=400 N/m. Să se afle:
**a.** viteza corpului la baza planului înclinat
**b.** comprimarea maximă a resortului, dacă nu se consideră frecare pe planul orizontal
**c.** lucrul mecanic al forţei elastice



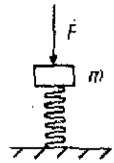

**57.** Un vagon de masă $m$=5 t se desprinde de trenul care mergea cu viteza $v_0$=4 m/s. După un anumit timp el se ciocneşte cu tamponul unui opritor al cărui resort se comprimă cu $x$=10 cm. Cunoscând constanta elastică $k$=2 MN/m a resortului şi coeficientul de frecare între şine şi roţile vagonului $\mu$=0,01, să se afle:
**a.** distanţa totală parcursă de vagon de la desprindere până la oprire
**b.** viteza corpului imediat înaintea ciocnirii resortului
**c.** viteza imprimată vagonului după decomprimarea resortului

**58.** Un resort elastic orizontal cu constanta elastică $k$=100 N/m este comprimat cu $x$=20 cm de corpul cu masa $m$=2 kg ca în figura alăturată. Se lasă liber sistemul şi se neglijează toate frecările. Suprafaţa sferică are raza $R$=20 cm. Să se afle:
**a.** viteza imprimată corpului când resortul se destinde complet
**b.** unghiul format cu verticala de raza construită în punctul până la care urcă corpul pe suprafaţa sferică
**c.** valoarea coeficientului de frecare cu suprafaţa orizontală, dacă corpul urcă fără frecare numai pe suprafaţa sferică pe înălţimea $h$=5 cm




**59.** De pe podul de peste un râu un adept al sporturilor extreme cade liber de la înălţimea $H$=30 m, fiind legat de picioare cu o coardă elastică care are celălalt capăt fixat de pod. Sportivul îşi alege coarda elastică astfel încât viteza lui să fie nulă la înălţimea $h_1$=2 m deasupra apei şi să fie în echilibru după amortizarea oscilaţiilor la înălţimea $h$=10 m. Să se afle:
**a.** lungimea coardei în stare nedeformată
**b.** viteza maximă pe care o atinge sportivul
**c.** constanta elastică a coardei, dacă sportivul are masa $m$=60 kg

**60.** Un resort ideal are constanta elastică $k$=500 N/m şi lungimea nedeformată $\ell_0$=1 m. Resortul este comprimat de un corp cu masa $m$=1 kg aşezat peste el ca în figură şi de o forţă verticală $F$=30 N. Să se afle:

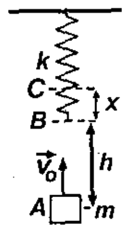



**a.** forţa elastică exercitată în resort
**b.** lungimea resortului comprimat
**c.** înălţimea maximă faţă de sol la care va urca corpul dacă acţiunea forţei $F$ încetează

**61.** O bilă cu masa $m$=200 g se află pe un resort vertical ca în figura de la problema precedentă. Resortul este comprimat cu $x$=2 cm. Dacă se apasă resortul cu o forţă verticală $F$ comprimarea resortului devine de două ori mai mare decât la început. Să se afle:
**a.** constanta elastică a resortului
**b.** valoarea forţei $F$
**c.** înălţimea la care se va ridica bila după încetarea acţiunii forţei $F$ faţă de poziţia cea mai joasă

**62.** Un corp cu masa $m$=100 g se lasă să cadă liber de la o înălţime $h$=40 cm pe un resort vertical şi ideal cu constanta elastică $k$=30 N/m. Să se afle:
**a.** viteza cu care loveşte corpul resortul
**b.** comprimarea maximă a resortului
**c.** lucrul mecanic al forţei elastice

**63.** Un corp cu masa $m$=1 kg este aruncat din punctul $A$ cu viteza iniţială $v_0$=7 m/s pe verticală în sus. În punctul $B$ aflat la înălţimea $h$=2 m faţă de punctul $A$, corpul ciocneşte un resort elastic, nedeformat şi cu constanta elastică $k$=200 N/m, pe care îl comprimă. Neglijând frecările, să se afle:




**a.** lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului pe distanţa $AB$
**b.** timpul în care corpul a străbătut distanţa $AB$
**c.** comprimarea maximă a resortului în urma ciocnirii

### 3.4. Conservarea energiei mecanice

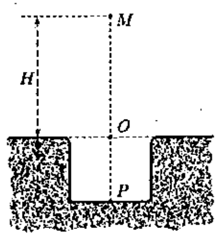
**1.** Un lanţ de lungime $\ell$=96 cm şi cu masa $m$=2 kg se află ţinut pe o masă orizontală, astfel că o pătrime din lungimea lui atârnă. Să se afle, dacă se lasă liber lanţul şi se neglijează frecările lanţului cu masa:
**a.** viteza cu care părăseşte lanţul masa
**b.** lucrul mecanic necesar urcării porţiunii de lanţ care atârnă

**2.** Un corp cade liber fără frecare de la înălţimea $h$=100 m. Să se afle:
**a.** înălţimea la care energia sa cinetică este de patru ori mai mică decât energia potenţială a corpului în punctul respectiv
**b.** viteza corpului când acesta se află la înălţimea $h_C$=20 m
**c.** înălţimea la care se ridică din nou corpul, dacă imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracţiune $f$=40% din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire

**3.** O minge cu masa $m$=500 g aruncată vertical în sus de la sol, ajunge la înălţimea maximă $h$=1 m. Se neglijează efectul forţelor de frecare. Să se afle:
**a.** viteza iniţială a mingii
**b.** energia mecanică a mingii la 1/4 din înălţimea maximă $h$, dacă la sol $E_P$=0
**c.** cu cât se va ridica mai mult mingea, dacă viteza sa iniţială creşte de 2 ori?

**4.** Un copil aruncă pe verticală, de jos în sus cu viteza iniţială $v_0$=4 m/s o minge cu masa $m$=100 g de la înălţimea $h$=5 m. Se neglijează efectul forţelor de frecare. Considerând că energia potenţială gravitaţională este nulă la nivelul solului, să se afle:
**a.** înălţimea maximă măsurată faţă de sol la care se ridică mingea
**b.** valoarea energiei cinetice a corpului la o pătrime din înălţimea maximă la care se ridică corpul
**c.** viteza cu care corpul ajunge pe sol

**5.** O piatră de masă $m$=200 g, lansată vertical în sus din punctul $O$ aflat la nivelul solului, atinge în punctul $M$ înălţimea maximă $H$=20 m, iar apoi cade într-o groapă de adâncime $h$=10 m, ca în figura alăturată. Frecările cu aerul se neglijează. Considerând că energia potenţială gravitaţională este nulă la nivelul solului (în punctul O) să se afle:




**a.** viteza pietrei în momentul lansării
**b.** viteza pietrei atunci când piatra atinge punctul $P$
**c.** lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate pe toată durata deplasării pietrei

**6.** Un corp de masă $m$=0,5 kg este lansat de la nivelul solului, vertical în sus, cu viteza iniţială $v_0$=8 m/s. Frecarea cu aerul se consideră neglijabilă. Energia potenţială gravitaţională este considerată nulă la nivelul solului. Să se afle:
**a.** înălţimea maximă măsurată faţă de sol atinsă de corp
**b.** viteza corpului în momentul în care energia sa cinetică este de trei ori mai mică decât cea potenţială în punctul respectiv
**c.** dacă viteza cu care corpul ar atinge solul la coborâre ar fi mai mare, mai mică, sau egală cu viteza iniţială $v_0$, dacă frecarea cu aerul nu ar fi neglijabilă şi să se justifice răspunsul

**7.** Un om aruncă unui copil un ghiojdan cu masa $m$=4 kg de la înăţimea $h$=7 m pe verticală de sus în jos cu viteza iniţială $v_0$=2 m/s. Neglijând frecarea cu aerul şi considerând la sol $E_p$=0, să se afle:
**a.** energia mecanică a ghiojdanului
**b.** viteza cu care ajunge ghiojdanul la sol
**c.** înălţimea de la care ar trebui să fie lăsat liber ghiojdanul dacă ajunge la sol cu aceeaşi viteză

**8.** Din vârful unui turn cu înălţimea $h$=75 m este aruncat în sus un corp cu masa $m$=2 kg şi cu viteza iniţială $v_0$=10 m/s. Considerând nivelul de

referință al sistemului corp-Pământ pe sol şi neglijând efectul forţelor de frecare, să se afle:
**a.** energia potențială corespunzătoare înălțimii maxime
**b.** înălțimea la care energia cinetică a corpului este de 3 ori mai mare decât energia sa potențială
**c.** viteza cu care corpul va atinge solul

**9.** Un elicopter zboară deasupra solului la înălțimea $h$=160 m cu viteza orizontală $v_0$=20 m/s. Din elicopter se lasă să cadă vertical un pachet cu masa $m$=1 kg. Se neglijează efectul forțelor de frecare. Să se afle:
**a.** reprezentarea grafică a dependenței energiei potențiale gravitaționale a pachetului în funcție de înălțimea $h$, dacă la sol $E_p$=0
**b.** viteza cu care loveşte pachetul solul
**c.** viteza cu care loveşte pachetul solul, dacă pachetul se aruncă oblic în jos sub unghiul $\alpha$=30$^0$ față de orizontală

**10.** În graficul 1 este reprezentată energia cinetică a unui corp în funcție de înălțimea corpului lansat pe verticală de la sol de jos în sus. Să se afle, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare:
**a.** energia potențială maximă a corpului
**b.** masa corpului
**c.** viteza corpului la înălțimea de $h_1$=5,2 m

**11.** În graficul 2 este reprezentată energia potențială a unui corp în funcție de înălțimea corpului lansat pe verticală de la sol de jos în sus. Să se afle, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare:
**a.** valoarea energiei cinetice la sol
**b.** înălțimea la care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potențiale în acel punct
**c.** viteza corpului la înălțimea de la punctul **b.**

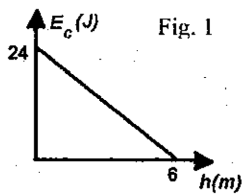


Fig. 1

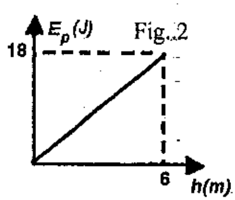


Fig. 2

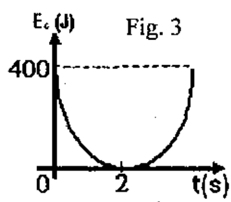
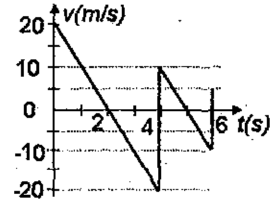


Fig. 3

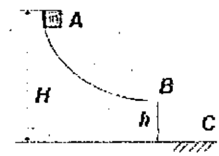
**12.** Un corp de masă $m$ este lansat vertical în câmp gravitațional, de jos în sus, de la nivelul solului. Energia sa cinetică variază în timp conform graficului din figura 3. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la nivelul solului. Să se afle în lipsa frecărilor cu aerul:
**a.** viteza inițială a corpului
**b.** masa corpului
**c.** înălțimea maximă la care urcă corpul
**d.** viteza la care energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune $f$=20% din energia sa potențială în punctul respectiv

**13.** O bilă cu masa $m$=400 g este lăsat să cadă fără viteza inițială de la o înălțime $h_0$=1 m. Neglijăm frecările cu aerul. La ciocnirea cu o suprafață plană de oțel bila pierde $f$=10% din energia sa mecanică. Să se afle:
**a.** înălțimea $h_1$ la care se ridică bila după prima ciocnire
**b.** viteza $v_2$ a bilei imediat după cea de-a doua ciocnire
**c.** energia mecanică după cea de-a treia ciocnire

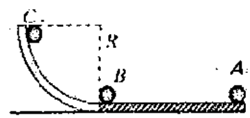
**14.** În figura alăturată este reprezentată grafic viteza unui corp cu masa $m$=200 g aruncat vertical de jos în sus de timp. La revenire corpul ciocnește o suprafață. Se neglijează frecările cu aerul. Să se afle:
**a.** înălțimea la care ajunge corpul prima dată
**b.** fracțiunea din energia mecanică pierdută după prima ciocnire
**c.** pierderea de energie mecanică după cea de-a de-a doua ciocnire



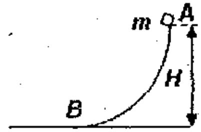

**15.** Pe un jgheab lucios este lăsat liber de la înălțimea $H$=8 m un corp cu masa $m$=2 kg ca în figură. În punctul cel mai coborât al jgeabului corpul părăsește jgheabul la înălțimea $h$=3 m. Să se afle:
**a.** viteza corpului în punctul cel mai coborât al jgeabului
**b.** viteza corpului la sol
**c.** viteza corpului la o înălțime egală cu $f$=20% din înălțimea $H$




**16.** O bilă cu masa $m$=200 g este lansată din punctul $A$ cu viteza inițială $v_0$=6 m/s pe o pistă ca în figura alăturată. Pe porțiunea orizontală $AB$=$\ell$=3 m mișcarea decurge cu frecare, $\mu$=0,1. Pe porțiunea circulară $BC$ cu raza $R$=50 cm mișcarea se face fără frecare. Să se afle:
**a.** viteza bilei în punctul $B$
**b.** viteza cu care bila ajunge în punctul $C$
**c.** înălțimea măsurată față de punctul $B$ la care se ridică bila




**17.** Un corp de masă $m$=1 kg, aflat inițial în repaus la înălțimea $H$=5 m, este lăsat să alunece liber fără frecare pe o suprafață curbă $AB$, ca în figura alăturată. Începând din punctul $B$ el își continuă mișcarea cu frecare pe planul orizontal, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2. Să se afle:
**a.** viteza corpului în punctul $B$
**b.** lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului între punctele $A$ și $B$
**c.** distanța $BC$, astfel încât în punctul de pe suprafața orizontală $C$ energia mecanică totală a acestuia este egală cu un sfert din energia mecanică totală inițială



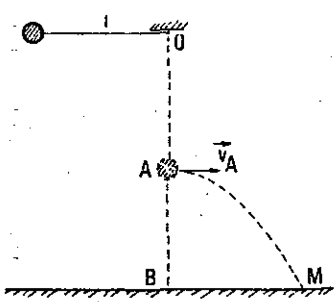
**18.** O minge este aruncată sub unghiul $\alpha=45^0$ şi are energia cinetică în punctul cel mai înalt al traiectoriei $E_C=45$ J. Neglijând efectul forţelor de frecare, să se afle:
**a.** energia cinetică în punctul de lansare
**b.** energia cinetică când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta=30^0$
**c.** energia potenţială când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta=30^0$

**19.** Un corp este aruncat în câmp gravitaţional cu viteza iniţială $v_0=6$ m/s sub un unghi $\alpha=60^0$. Presupunând că mişcarea se produce fără frecare, să se afle atunci când energia cinetică reprezintă fracţiunea $f=0,64$ din energia cinetică iniţială:
**a.** înălţimea la care se află corpul
**b.** cosinusul unghiului $\beta$ făcut de vectorul viteză cu orizontala
**c.** energia potenţială maximă, dacă masa corpului este $m=500$ g

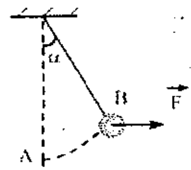
**20.** De la înălţimea $h=30$ m se aruncă orizontal un corp cu masa $m=200$ g şi viteza iniţială $v_0=10$ m/s. Neglijând efectul forţelor de frecare cu aerul şi considerând la sol valoarea zero pentru energia potenţială, să se afle:
**a.** energia totală a corpului
**b.** energia cinetică şi energia potenţială când viteza corpului formează cu orizontala un unghi $\alpha=60^0$
**c.** viteza cu care corpul loveşte solul

**21.** Dintr-un turn cu înălţimea $h=15$ m se lansează un corp cu masa $m=500$ g şi viteza iniţială $v_0=10$ m/s sub un unghi $\alpha=30^0$ faţă de orizontală şi deasupra acesteia. Să se afle, dacă neglijăm efectul forţelor de frecare cu aerul şi dacă se consideră la sol valoarea zero pentru energia potenţială:
**a.** energia totală a corpului
**b.** înălţimea maximă la care urcă corpul
**c.** viteza cu care corpul loveşte solul
**d.** cosinusul unghiului format de vectorul viteză şi orizontală când corpul ajunge la sol

**22.** Un corp cu masa $m=1$ kg este legat de un fir inextensibil cu lungimea $\ell=80$ cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi $\alpha=90^0$ ca în figură, după care se lasă liber. Se neglijează efectul forţelor de frecare. Punctul de suspensie a firului se află lá înălţimea $h=1,8$ m faţă de sol. În momentul trecerii prin poziţia verticală $OA$ firul se rupe. Să se afle, dacă se consideră că la sol corpul nu are energie potenţială:
**a.** energia mecanică a corpului
**b.** energia cinetică la trecerea prin poziţia verticală
**c.** viteza cu care loveşte corpul solul
**d*.** tensiunea de rupere



**23.** La capătul unui fir inextensibil de lungime $\ell$=20 cm este fixată o bilă cu masa $m$=50 g. Se acționează asupra bilei cu o forță $F$ orizontală, astfel încât bila este adusă din poziția $A$, în poziția $B$ conform figurii alăturate. În poziția $B$ bila este în repaus iar firul formează cu verticala unghiul $\alpha$=60$^0$. Să se afle:




**a.** forța $F$ necesară menținerii bilei în poziția $B$
**b.** tensiunea din firul de care este legată bila în poziția $B$
**c.** viteza cu care trece bila prin poziția $A$, după ce este lăsată liber din poziția $B$

**24.** De un fir inextensibil cu lungimea $\ell$=45 cm este prins un corp cu masa $m$=200 g care se află inițial în poziție verticală. Se imprimă corpului o viteză perpendiculară pe fir $v_0$=5 m/s. Neglijând efectul forțelor de frecare, să se afle:
**a.** viteza avută de corp când firul devine orizontal
**b.** înălțimea la care se ridică corpul dacă firul se rupe când firul devine orizontal, măsurată față de poziția inițială
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de tensiune și de forța de greutate în timpul mișcării corpului

**25.** Un corp cu masa $m$=100 g este suspendat de un fir cu lungimea $\ell$=40 cm și deviat față de verticală cu un unghi $\alpha$=60$^0$. I se imprimă corpului în acel punct o viteză perpendiculară pe fir astfel încât corpul să se poată ridica până în dreptul punctului de suspensie. Neglijând efectul forțelor de frecare, să se afle:
**a.** viteza imprimată corpului inițial
**b.** viteza cu care trece corpul prin poziția verticală
**c.** energia inițială a corpului

**26.** Un corp punctiform cu masa $m$=100 g este suspendat de un fir inextensibil cu lungimea $\ell$=40 cm. Firul este menținut deviat față de verticală cu unghiul $\alpha$=60$^0$. Pe verticala de susținere se așază o piedică. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** înălțimea măsurată față de punctul de susținere la care trebuie pusă piedica, pentru ca atunci când se eliberează corpul, firul să poată să devină orizontal
**b.** viteza cu care trece corpul prin poziția verticală
**c.** lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pe parcursul mișcării corpului

**27.** Un corp cu masa $m$=1 kg, aflat inițial în repaus, este suspendat de un fir inextensibil și de masă neglijabilă având lungimea $\ell$=1 m. Firul este scos din poziția de echilibru și adus sub un unghi $\alpha$=60$^0$ față de verticală, după care este lăsat liber. Se consideră că energia potențială gravitațională este nulă în poziția de echilibru. Să se afle:
**a.** lucrul mecanic efectuat de forța de greutate în timpul revenirii corpului în poziția de echilibru
**b.** valoarea vitezei corpului la trecerea prin poziția de echilibru

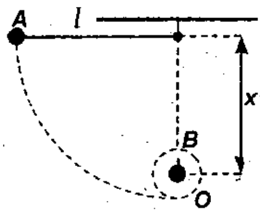
**c.** înălţimea faţă de poziţia de echilibru la care energia cinetică a corpului este egală cu energia sa potenţială gravitaţională

**28.** O bilă cu masa $m$=100 g suspendată pe un fir vertical cu lungimea $\ell$=90 cm este deviată cu un unghi $\alpha$=60° faţă de verticală. Se lasă liberă bila şi se neglijează efectul forţelor de frecare. Să se afle:
**a.** viteza cu care trece bila prin poziţia de echilibru
**b.** viteza bilei când firul formează cu verticala unghiul $\beta$=30°
**c*.** tensiunea în fir atunci când firul formează cu verticala unghiul $\beta$ şi să se particularizeze pentru $\beta$=60°, 30° şi 0°

**29*.** De cablul unei macarale se află suspendat un corp cu masa $m$=20 kg. Neglijăm efectul forţelor de frecare. Dacă începe să bată vântul, să se afle:
**a.** viteza maximă a corpului în poziţia verticală, dacă tensiunea de rupere este dublul greutăţii corpului şi lungimea cablului este $\ell$=10 m
**b.** unghiul maxim format de cablul care susţine corpul cu verticala în condiţiile punctului **a.**
**c.** tensiunea minimă în cablul de susţinere când firul trece prin poziţia de echilibru, dacă corpul reuşeşte să realizeze o mişcare circulară în planul vertical

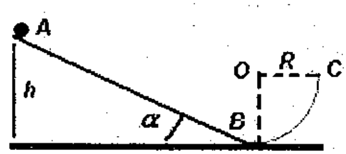
**30.** Unui fir cu lungimea $\ell$=50 cm aflat în poziţie verticală de care este suspendat un corp cu masa $m$=200 g i se imprimă perpendicular pe fir o viteză $v_0$=10 m/s. Corpul este capabil să descrie un cerc în plan vertical. Se neglijează frecarea cu aerul şi se consideră nulă energia potenţială în poziţia iniţială. Să se afle:
**a.** energia iniţială a corpului
**b.** viteza corpului în poziţia verticală superioară a traiectoriei
**c*.** tensiunea în fir în poziţia superioară a traiectoriei

**31*.** Un corp de masă $m$=1 kg este suspendat de un fir inextensibil de lungime $\ell$=45 cm. Se scoate corpul din poziţia de echilibru şi se aduce firul orizontal ca în figura alăturată. Apoi se lasă liber corpul. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:



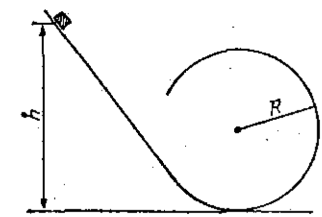

**a.** viteza cu care corpul trece prin poziţia verticală
**b.** la ce distanţă $x$, măsurată pe verticală faţă de punctul de suspensie, trebuie imobilizat firul, astfel încât corpul să fie capabil să descrie un cerc cu raza $\ell$-$x$ în plan vertical
**c.** lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate din punctul de plecare până când corpul ajunge în punctul superior al traiectoriei circulare

**32.** Un corp de masă $m$=500 g parcurge traseul din figura alăturată, format dintr-o porţiune rectilinie $AB$, înclinată faţă de orizontală sub un unghi α=45°, racordată lin cu o porţiune circulară $BC$ de rază $R$=1 m.



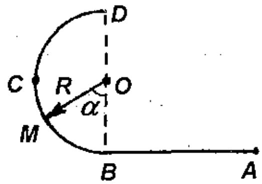
Corpul pornește din repaus, mișcarea are loc fără frecare, lungimea porțiunii liniare este $AB=4\sqrt{2}$ m, iar porțiunea circulară are forma unui sfert de cerc. Energia potențială gravitațională se consideră nulă în punctul $B$. Să se afle:
**a.** viteza $v_B$ a corpului în punctul $B$
**b.** lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele $A$ și $C$
**c.** energia cinetică a corpului când acesta ajunge în punctul $C$
**d.** înălțimea, măsurată față de punctul $B$, la care energia cinetică este egală cu energia potențială

**33*.** Un montagne-rousse cu masa $m$=820 kg ajunge în vârful unui dâmb. De acolo coboară fără frecare pe un jgheab și descrie o buclă în plan vertical cu raza $R$=4 m mișcându-se fără frecare ca în figură. Să se afle:



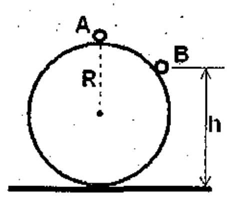

**a.** înălțimea minimă de la care trebuie să coboare corpul pentru ca să poată să descrie jgeabul
**b.** viteza montagne-rousse-ului în punctul cel mai înalt al traiectoriei circulare, dacă în vârful dâmbului viteza acestuia este $v$=3 m/s
**c.** apăsarea exercitată de montagne-rousse în punctul superior al traiectoriei circulare, în condițiile punctului **b.**

**34*.** Un jgheab orizontal se continuă cu un alt jgheab semicircular vertical $BCD$ de rază $R$=50 cm, situat în plan vertical. Se trimite din punctul $A$, ca în figura alăturată, în direcție orizontală un corp de masă $m$=200 g. Mișcarea se face fără frecare. Să se afle:




**a.** viteza pe care trebuie să o aibă corpul în $A$ pentru a fi capabil să descrie semicercul $BCD$
**b.** forța de apăsare exercitată de corp asupra jgheabului într-un punct în care poziția corpului formează unghiul $\alpha=60^0$ cu verticala
**c.** viteza cu care lovește corpul jgheabul orizontal după desprinderea de jgheabul semicircular
**d.** cosinusul unghiului pe care vectorul viteză îl formează cu orizontala când corpul lovește jgheabul orizontal

**35.** Un corp de mici dimensiuni, cu masa $m$=20 g, este lăsat să alunece liber, din punctul cel mai înalt $A$ al unei sfere fixe cu raza de $R$=48 cm, ca în figura alăturată. În punctul $B$, situat la înălțimea $h$=80 cm față de sol, corpul încetează să mai apese asupra sferei și își continuă căderea spre suprafața solului. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la nivelul solului. Neglijând frecările, să se afle:

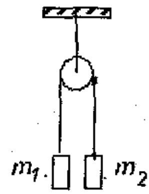



**a.** lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din $A$ în $B$
**b.** viteza corpului în momentul desprinderii de sferă
**c.** viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

**d.** energia totală a corpului când acesta se află față de sol la o înălțime egală cu raza sferei

**36*.** Din vârful unei sfere care se sprijină pe sol, cu raza $R$=1,2 m se lasă liber un corp de mici dimensiuni care alunecă pe sferă fără frecare ca în figura precedentă. La un moment dat corpul se desprinde de pe sferă. Să se afle:
**a.** viteza corpului în momentul desprinderii de pe sferă
**b.** înălțimea față de suprafața de sprijin a sferei la care se desprinde corpul
**c.** viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul

**37.** Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu masele $m_1$=4 kg și $m_2$=6 kg ținute inițial în repaus la aceeași înălțime față de sol $H$=1 m ca în figură. Se lasă liber sistemul și se consideră firul suficient de lung, astfel încât corpul 1 să nu ajungă la scripete. Să se afle:




**a.** energia inițială a sistemului dacă se consideră că la nivelul solului energia potențială este nulă
**b.** viteza sistemului în momentul când corpul mai greu atinge solul
**c.** înălțimea la care se oprește corpul 1 față de sol, dacă din momentul atingerii solului de către corpul 2, corpul 1 își continuă mișcarea pe verticală după ce firul ce-l prinde se desface

**38.** Sub acțiunea unei forțe elastice $F_1$=50 N un resort se comprimă cu $x_1$=10 cm. Să se afle:
**a.** constanta elastică a resortului
**b.** lucrul mecanic efectuat de forța elastică în procesul comprimării cu $x_1$
**c.** viteza unui corp cu masa $m$=50 g, dacă acest corp este pus în mișcare pe o suprafață fără frecări prin destinderea completă a resortului

## 3.4. Impulsul punctului material. Teorema de variație a impulsului

**1.** Un corp are energia cinetică este $E_c$=8 J și impulsul $p$=1,6 Ns. Să se afle masa corpului și viteza acestuia.

**2.** O particulă în mișcare are impulsul $p$ și energia cinetică $E_C$. Să se afle de câte ori crește energia cinetică a particulei dacă se triplează impulsul particulei.

**3.** Viteza unui corp cu masa $m$=500 g depinde de timp după legea $v$=20-5$t$, unde timpul $t$ este în secunde și viteza $v$ în m/s. Să se afle după $t_1$=2 s de la începerea mișcării impulsul corpului și variația corespunzătoare a impulsului acestuia.

**4.** Legea de mișcare a unui corp cu masa $m$=1 kg este $x$(m)=4−8$t$+6$t^2$, iar $t$ în secunde. Să se afle variația impulsului după $t$=2 s de la începerea mișcării.

**5.** Un corp cu masa $m$=200 g porneşte cu viteza iniţială $v_0$=2 m/s într-o mişcare uniform accelerată cu accceleraţia a=2 m/s$^2$. Să se afle impulsul corpului după $t$=4 s de la începerea mişcării.

**6.** O minge cu masa $m$=400 g cade liber de la înălţimea $h$=5 m. Să se afle impulsul cu care loveşte mingea solul. Se neglijează frecarea cu aerul.

**7.** O minge de pinpong cu masa $m$=14,1 g este lansată vertical în sus cu viteza iniţială $v_0$=17,3 m/s. Să se afle impulsul mingii la 1/3 din înălţimea maximă la care poate ajunge aceasta. Se neglijează frecarea cu aerul.

**8.** De pe o masă orizontală cade un pahar cu masa $m$=200 g împins de un copil cu viteza $v_0$=2 m/s. Să se afle impulsul corpului după $t$=0,1 s de la desprinderea de masă.

**9.** O ventuză jucărie cu masa $m$=50 g este trasă sub un unghi α=60° faţă de orizontală de la sol cu viteza iniţială $v_0$=10 m/s. Să se afle impulsul ventuzei după trecerea unei secunde de la începerea mişcării.

**10.** Un atlet cu masa $m$=80kg aleargă cu viteza $v$=8 m/s pe o pistă circulară. Să se afle variaţia impulsului său între două puncte diametral opuse ale pistei şi între două puncte după ce atletul a parcurs un sfert de pistă.

**11.** Asupra unui corp cu masa $m$=1 kg aflat pe o suprafaţă pe care se poate mişca fără frecare, acţionează o forţă care depinde de timp conform graficului din figura 1. Să se afle viteza corpului la sfârşitul celei de-a patra secunde de la începerea mişcării dacă corpul porneşte din repaus.

**12.** În graficul din figura.2 forţa depinde de timp. Această forţă acţionează asupra unui corp cu masa $m$=2 kg şi care are viteza iniţială $v_0$=5 m/s. Să se afle valoarea finală a vitezei după trecerea timpului $t$=5 s.

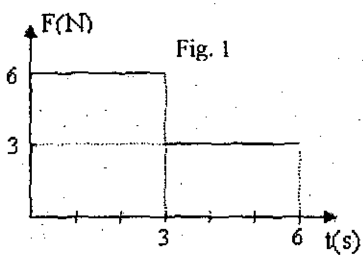


Fig. 1

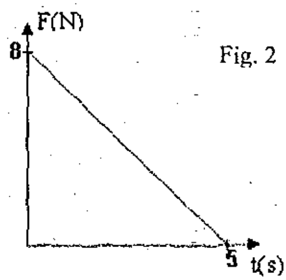


Fig. 2

**13.** Asupra unui corp se produce o variaţie de impuls de $\Delta p$=800 kgm/s sub acţiunea unei forţe $F$=50 N. Să se afle timpul în care trebuie să acţioneze această forţă pentru a se produce această variaţie de impuls.

**14.** O minge aflată iniţial în repaus, cu masa $m$=1 kg are după lovire o viteză $v$=10 m/s. Să se afle forţa medie de lovire, dacă durata lovirii este $\Delta t$=0,1 s.

**15.** Un glonte cu masa $m$=50 g se trage dintr-o armă cu viteza inițială $v_0$=400 m/s. Să se afle forța medie de rezistență întâmpinată de glonte, dacă glontele străbate substanța pe orizontală și iese cu viteza $v$=100 m/s după un timp $t$=20 ms.

**16.** Să se afle forța de frânare ce trebuie aplicată unui tren cu masa $m$=800t, care se mișcă cu viteza $v_0$=54 km/h pentru a-l opri în timpul $\Delta t$=60 s.

**17.** O mașină cu masa $m$=800 kg frânează într-un interval de timp $\Delta t$=20 s, pornind de la viteza inițială $v_0$=108 km/h și ajungând la viteza $v$=36 km/h pentru a intra într-o curbă. Să se afle valoarea medie a forței de frânare.

**18.** Un corp cu masa $m$=400 g este lansat pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,1, cu viteza inițială $v_0$=10 m/s. Să se afle impulsul corpului după $t$=6 s de la începerea mișcării.

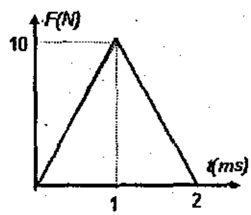
**19.** Un corp cu masa $m$=100 g cade liber un sfert de minut de la o înălțime convenabilă. Să se afle variația impulsului corpului.

**20.** O broască cu masa $m$=200 g stă pe o scândură care plutește pe un lac liniștit. La un moment dat broasca sare cu viteza $v_0$=10 m/s sub un unghi $\alpha$=30$^o$ față de orizontală. Să se afle forța cu care apasă broasca pe scândură atunci când broasca sare, dacă durata săriturii broaștei este $\Delta t$=1 ms.

**21.** Asupra unui corp care se deplasează cu viteza constantă $v_0$=1 m/s pe un plan orizontal fără frecare începe să acționeze pe direcția vitezei și în sensul mișcării forța constantă $F$=1 N. După intervalul de timp $\Delta t$=2 s energia cinetică a corpului crește cu $\Delta E_c$=4 J. Să se afle:
**a.** viteza corpului după $\Delta t$ de la începerea mișcării
**b.** masa corpului
**c.** variația impulsului corpului în intervalul de timp $\Delta t$ după începerea acțiunii forței

### 3.6. Ciocniri

**1.** Un corp cu masa $m$=1 kg și viteza $v$=15 m/s lovește un corp cu masa $M$=5 kg aflat inițial în repaus. Ciocnirea este unidimensională, iar forța de interacțiune dintre corpuri este reprezentată în figura alăturată. Să se afle:




**a.** energia cinetică inițială a sistemului
**b.** vitezele corpurilor imediat după ciocnire
**c.** piederea de energie cinetică

**2.** Două corpuri cu masele $m_1$=4 kg și $m_2$=2 kg se mișcă unul spre celălalt cu vitezele imediat înainte de ciocnire $v_1$=4 m/s și $v_2$=2 m/s. După ciocnire corpurile se mișcă împreună până la oprire, mișcarea făcându-se cu frecare ($\mu$=0,1). Să se afle:
**a.** viteza corpului format imediat după ciocnire

**b.** căldura degajată în ciocnirea plastică
**c.** timpul de deplasare până la oprire măsurat din momentul formării corpului

**3.** Două corpuri cu mase egale $m$=4 kg se deplasează de-a lungul aceleaşi drepte orizontale unul spre celălalt cu viteze egale. Energia cinetică a mişcării lor relative este $E_{Crel}$=100 J. Corpurile se ciocnesc plastic. Să se afle:
**a.** viteza comună a corpului nou format după ciocnire
**b.** vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire
**c.** căldura degajată la ciocnirea corpurilor

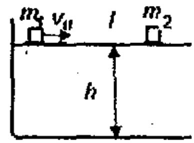
**4.** Un glonte cu masa $m$=10 g care se deplasează pe orizontală cu viteza $v_0$=200 m/s intră şi rămâne într-un bloc de lemn cu masa $M$=990 g aflat iniţial în repaus. Coeficientul de frecare dintre bloc şi suprafaţa orizontală este $\mu$=0,1. Să se afle:
**a.** viteza sistemului imediat după ciocnire
**b.** căldura degajată în urma ciocnirii
**c.** distanţa parcursă de sistem până la oprire

**5.** Un proiectil cu masa $m_1$=2 g deplasându-se pe orizontală cu viteza $v_1$=500 m/s străbate un bloc de lemn cu masa $m_2$=1 kg aflat iniţial în repaus pe o suprafaţă orizonatală şi iese din acesta cu viteza $v'_1$=100 m/s. Considerând neglijabilă deplasarea blocului în timpul interacţiunii cu proiectilul şi ştiind că blocul alunecă până la oprire pe distanţa $d$=20 cm, să se afle:
**a.** coeficientul de frecare dintre bloc şi suprafaţă
**b.** energia cinetică pierdută de proiectil
**c.** energia cinetică a blocului imediat după trecerea proiectilului

**6**. Un vagon cu masa $m_1$=10 t se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza iniţială $v_0$=7 m/s. După un timp $\Delta t$=10 s, vagonul se ciocneşte şi se cuplează cu un al doilea vagon cu masa $m_2$=20 t, aflat în repaus. În timpul mişcării, atât inainte cât şi după ciocnire, asupra vagoanelor se exercită forţe de frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,01. Să se afle:
**a.** viteza primului vagon înainte de ciocnire
**b.** viteza comună a vagoanelor după culpare şi căldura degajată prin ciocnire
**c.** spaţiul parcurs de vagoane până la oprire

**7**. Două corpuri cu masele $m_1$=8 kg şi $m_2$=2 kg se află la distanţa $d$=112,5m unul de celălalt. Corpurile se deplasează unul spre celălalt pe o suprafaţă orizontală, cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,2. Se imprimă corpurilor simultan vitezele $v_{01}$=20 m/s şi $v_{02}$=30 m/s. Să se afle:
**a.** timpul după care se ciocnesc
**b.** distanţa parcursă de corpul nou format, dacă ciocnirea corpurilor a fost plastică
**c.** variaţia energiei cinetice produsă la ciocnirea corpurilor

**8.** Două corpuri cu masele $m_1$=1 kg şi $m_2$=250 g sunt aşezate la o distanţă $\ell$=2,4 m unul de altul pe o platformă fixă, aflată la înălţimea $h$=$\ell$ de suprafaţa Pământului. Corpul cu masa $m_2$ se află exact la marginea platformei ca în figura alăturată. Primul corp porneşte cu viteza iniţială $v_0$=7 m/s spre corpul aflat la marginea platformei şi îl ciocneşte plastic. Coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul 1 şi platformă este $\mu$=0,5. Să se afle:



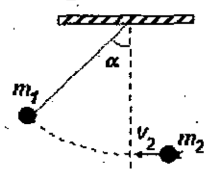

**a.** viteza primului corp imediat înainte de ciocnire
**b.** viteza corpului nou format prin ciocnire
**c.** impulsul noului corpul în momentul în care acesta atinge suprafaţa pământului

**9**. Mişcările rectilinii a două corpuri de mase $m_1$=1 kg şi $m_2$=3 kg sunt descrise de legile $x_1$=2+$t$ şi $x_2$=4−3$t$, unde coordonata $x$ este exprimată în metri şi timpul $t$ este în secunde. Considerând că în momentul întâlnirii celor două corpuri acestea suferă o ciocnire plastică, să se afle:
**a.** vitezele corpurilor în momentul întâlnirii
**b.** energia cinetică a sistemului imediat după ciocnire
**c.** legea de mişcare a corpului nou format

**10.** Legile de mişcare rectilinii a două corpuri cu masele $m_1$=$m_2$=$m$=500 g sunt $x_1$=10+2$t$ şi $x_2$=-10+2$t$+5$t^2$. Ştiind că cele două corpuri se ciocnesc plastic, să se afle:
**a.** vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire
**b.** viteza corpului nou format imediat după ciocnire
**c.** căldura degajată în ciocnire

**11**. Una din metodele utilizate în practică de măsurare a vitezei proiectilelor constă în folosirea unui pendul balistic. Acesta este un corp de lemn cu masa $M$ suspendat cu ajutorul unui fir lung şi inextensibil. Iniţial pendulul se află în repaus. Un proiectil cu masa $m$ loveşte orizontal corpul din lemn şi rămâne încastrat, făcând ca pendulul şi proiectilul să se ridice la înălţimea $h$. Dacă $M$=2 kg, $m$=10 g, $h$=20 cm şi negjijăm frecarea cu aerul, să se afle:
**a.** viteza sistemului imediat după ciocnirea proiectilului cu corpul
**b.** viteza iniţială a proiectilului
**c.** căldura care se degajă în procesul ciocnirii

**12**. Un corp cu masa $m_1$=1 kg este legat de un fir inextensibil cu lungimea $\ell$=40 cm şi deviat faţă de verticală cu un unghi $\alpha$=60°, după care se lasă liber. Când trece prin poziţia verticală primul corp este ciocnit plastic de un corp cu masa $m_2$=0,5 kg, care se deplasează în sens opus ca în figură, astfel că după ciocnire corpul nou format rămâne în echilibru în poziţia verticală. Să se afle:

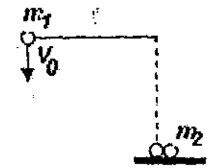



**a.** viteza cu care trece primul corp prin poziţia verticală
**b.** viteza corpului al doilea
**c.** căldura cedată în procesul ciocnirii plastice

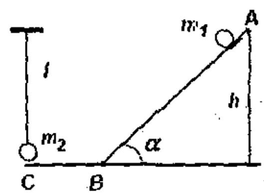
**13**. Un corp cu masa $m_1$=2 kg este suspendat de un fir cu lungimea $\ell$=1,6 m. Firul este deviat cu unghiul $\alpha$=60° faţă de verticală şi apoi este lăsat liber. Neglijăm efectul forţelor de frecare. Când sfera trece prin poziţia de echilibru

ea se ciocneşte plastic cu un alt corp cu masa $m_2$=100 g care se deplasează în sens opus primului corp. După ciocnirea plastică corpurile deviază cu un unghi $\beta$=30$^0$ faţă de verticală. Să se afle:
**a.** viteza cu care trece primul corp prin poziţia verticală
**b.** viteza iniţială a celui de-al doilea corp
**c.** căldura degajată în procesul de ciocnire

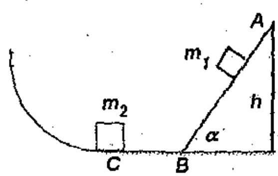
**14.** Un corp cu masa $m_1$=800 g este suspendat de un fir inextensibil întins şi de lungime $\ell$=1,6 m, aflat iniţial în poziţie orizontală ca în figură. După ce corpului cu masă $m_1$ i se imprimă o viteză iniţială verticală în jos, $v_0$=2 m/s acesta ciocneşte perfect plastic un corp cu masa $m_2$=400 g. Să se afle:
**a.** viteza primului corp imediat înainte de ciocnire
**b.** unghiul pe care-l face firul cu verticala atunci când corpul format prin ciocnire ajunge la înălţimea maximă
**c.** raportul dintre energilor mecanice ale sistemului înainte şi după ciocnire




**15.** Din punctul de înălţime maximă al unui plan înclinat $AB$ cu înălţimea $h$=0,8 m şi cu unghiul $\alpha$=45$^0$ se lasă liber un corp cu masa $m_1$=2 kg ca în figură. Din punctul $B$ corpul îşi continuă mişcarea pe suprafaţa orizontală până întâlneşte corpul $C$ aflat în repaus şi cu masa $m_2$=3 kg. Ciocnirea corpurilor este perfect plastică. Cunoscând lungimea firului $\ell$=50 cm şi neglijând efectele forţelor de frecare, să se afle:
**a.** viteza corpului imediat înainte de ciocnire
**b.** viteza corpului format imediat după ciocnire
**c.** cosinusul unghiului maxim la care este deviat firul faţă de verticală după ciocnire




**16.** Din punctul de înălţime maximă al unui plan înclinat $AB$ cu înălţimea $h$=3 m şi cu unghiul $\alpha$=30$^0$, se lasă liber un corp cu masa $m_1$=2 kg. Coeficientul de frecare la alunecare pe plan este $\mu_1=1/(2\sqrt{3})$. Din punctul $B$ corpul $m_1$ îşi continuă mişcarea cu frecare pe planul orizontal $BC$=2 m, coeficientul de frecare la alunecare pe plan fiind $\mu_2$=0,35. În punctul $C$ ciocnirea corpului cu un alt corp cu masa $m_2$=3 kg aflat la baza unui jgheab circular cu raza $R$=2 m este perfect plastică. Mişcarea sistemului de corpuri pe jgheab se face fără frecare. Să se afle:
**a.** viteza corpului imediat înainte de ciocnire
**b.** căldura degajată la ciocnirea celor două corpuri
**c.** înălţimea maximă la care se ridică sistemul de corpuri pe jgheab

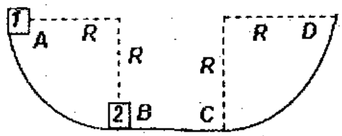



**17**. Un corp cu masa $M$=0,2 kg este lansat pe o suprafaţă orizontală cu viteza iniţială $v_0$=8 m/s, având coeficientul de frecare la alunecare $\mu$=0,1 După ce parcurge distanţa $d$=387,5 cm, corpul ciocneşte plastic un corp cu

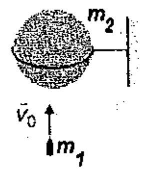
masa $m$=0,1 kg, atârnat de un fir vertical de lungime $\ell$=2,5 m şi aflat în repaus. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:
**a.** viteza $v_C$ a corpurilor imediat după ciocnirea plastică
**b.** unghiul maxim $\alpha$, făcut de fir cu verticala, după ciocnirea corpurilor
**c.** tensiunea din fir când unghiul de deviere dintre fir şi verticală este $\beta$=30°

**18.** Un corp mic cu masa $m$=20 g alunecă pornind din repaus fără frecare în interiorul unui jgheab ca în figură. Jghebul este de forma unui sfert de cilindru cu raza $R=\sqrt{2}$ m. În punctul $A$ se află în repaus un corp identic. Corpurile se ciocnesc plastic. Să se afle:
**a.** viteza corpului în punctul $A$ imediat înainte de ciocnire
**b.** înălţimea maximă la care se ridică corpul nou format
**c.** căldura degajată în urma ciocnirii corpurilor


**19.** În jgheabul din figură se cunosc $R$=1 m şi $m$=20 g. În absenţa frecărilor se lasă liber corpul din $A$. Acesta ciocneşte perfect plastic corpul identic $B$ aflat iniţial în repaus. Să se afle:
**a.** viteza cu care ajunge corpul în $B$
**b.** viteza corpurilor după ciocnire
**c.** înălţimea la care ajunge sistemul format pe porţiunea ascendetă $CD$




**20.** O bilă cu masa $m_1$=1 kg este aruncată vertical în sus cu viteza iniţială $v_0$=60 m/s de la sol. După două secunde de la începerea mişcării bila ciocneşte plastic un corp cu masa $m_2$=3 kg aflat pe un suport inelar. Se neglijează forţele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** viteza comună a corpurilor după ciocnirea plastică
**b.** căldura degajată în procesul ciocnirii
**c.** înălţimea maximă la care urcă corpurile măsurată faţă de sol




**21.** Un corp cu masa $m_1$=100 g este aruncat de jos în sus pe verticală cu viteza iniţială $v_0$=40 m/s. În acelaşi moment de la înălţimea maximă la care poate ajunge primul corp este lăsat liber pe verticala primului corp cu masa $m_2$=60 g. Neglijând frecările, să se afle:
**a.** timpul după care se întâlnesc corpurile
**b.** viteza corpului format după ciocnirea plastică
**c.** căldura degajată în procesul ciocnirii

**22.** Un corp cu masa $m$=100 g este aruncat vertical în sus de la nivelul solului cu viteza $v_0$=20 m/s După $\Delta t$=2 s este aruncat din acelaşi punct un al doilea corp identic cu primul cu aceeaşi viteză iniţială. Neglijând frecările să se afle:
**a.** timpul după care se întâlnesc corpurile
**b.** viteza corpului nou format dacă corpurile se ciocnesc plastic
**c.** căldura degajată în procesul ciocnirii plastice

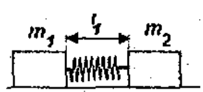
**23.** Un corp cu masa $m$=2 kg şi cu viteza iniţială $v_0$=4 m/s este aruncat vertical în sus de la nivelul solului. Când acest corp ajunge la înălţimea maximă $h$, el este ciocnit perfect plastic de un alt corp identic cu el care a căzut de la înălţimea $2h$ faţă de sol. Neglijând frecările, să se afle:
**a.** viteza $v_2$ a corpului al doilea imediat înainte de ciocnire
**b.** viteza corpului nou format imediat după ciocnire
**c.** energia cinetică a corpului nou format în momentul atingerii solului

**24.** Se lasă liber un corp cu masa $m_1$=5 kg de la înălţimea $h$=80 m. În acelaşi moment de la sol se aruncă pe aceeaşi verticală în sus un alt corp cu masa $m_2$=3 kg. Se neglijează forţele de frecare cu aerul. Să se afle:
**a.** viteza iniţială a celui de-al doilea corp astfel încât în urma ciocnirii plastice cu primul corp viteza corpului rezultat să fie nulă
**b.** raportul energiilor cinetice ale mobilelor în momentul anterior ciocnirii
**c.** înălţimea la care s-a produs ciocnirea

**25.** Un corp cu masa $m_1$=3 kg este aruncat vertical în sus cu viteza iniţială $v_0$=30 m/s. Se neglijează forţele de frecare cu aerul. Când corpul ajunge la 3/4 din înălţimea maximă acesta este ciocnit plastic de un alt corp care are masa $m_2=m_1/3$, astfel că imediat după ciocnire corpurile se opresc. Să se afle:
**a.** viteza primului corp înainte de ciocnire
**b.** timpul de mişcare al primului corp până la ciocnire
**c.** viteza corpului al doilea înainte de ciocnire

**26.** De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată de un cablu o scară pe care se află în repaus un om. Masa aerostatului cu scară este $M$=720 kg, iar a omului $m$=80 kg. Dacă omul începe să urce pe scară cu viteza $u$=0,4 m/s faţă de scară, să se afle:
**a.** viteza omului faţă de sol
**b.** viteza aerostatului faţă de sol
**c.** energia cinetică dezvoltată de om prin punerea acestuia în mişcare

**27.** Un patinator cu masa $M$=80 kg ţine în mâini un rucsac cu masa $m$=4 kg şi se află în repaus. La un moment dat patinatorul aruncă rucsacul cu viteza $v$=10 m/s faţă de sol. Mişcarea patinatorului pe gheaţă se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,001. Să se afle:
**a.** viteza patinatorului imediat după ce acesta aruncă rucsacul
**b.** lucrul mecanic efectuat de patinator la aruncarea rucsacului
**c.** distanţa parcursă de patinator până la oprire




**28.** De un resort care în stare nedeformată are lungimea $\ell$=10 cm se agaţă un corp cu masa $m$=0,5 kg care îi produce o alungire $x_0$=1 cm. Acest resort este prins între corpuri cu masele $m_1$=1 kg şi $m_2$=2 kg aflate pe o masă orizontală fără frecări ca în figură. Iniţial corpurile sunt în repaus şi resortul este comprimat şi are lungimea $\ell_1$=2 cm. Se lasă liber sistemul. Să se afle:
**a.** constanta elastică a resortului

**b.** energia potențială a resortului comprimat
**c.** vitezele corpurilor după destinderea resortului

**29.** Un obuz cu masa $M$=100 kg zboară cu viteza $v$=400 m/s. La un moment dat el explodează în două fragmente. Unul dintre ele de masă $m_1$=20 kg continuă să se mişte înainte cu viteza $v_1$=500 m/s. Să se afle:
**a.** viteza celui de-al doilea fragment
**b.** energia degajată prin explozia obuzului
**c.** fracțiunea din energia inițială pierdută prin explozie

**30.** Pe un plan orizontal se lansează un corp care se mişcă cu frecare. Legea de mişcare a corpului este $x$=10+20$t$–2,5$t^2$ unde coordonata $x$ este exprimată în metri şi timpul $t$ este în secunde. Să se afle:
**a.** valoarea coeficientului de frecare
**b.** vitezele celor două fragmente, dacă după o secundă de la lansare corpul explodează în două fragmente a căror masă se află în raportul $m_1/m_2$=1/3, iar fragmentul mai mic se mişcă în sens contrar sensului inițial de mişcare a corpului, cu viteza relativă $v_r$=24 m/s față de fragmentul mare
**c.** spațiul dintre fragmente când acestea se opresc, dacă coeficientul de frecare la alunecare este acelaşi ca la punctul **a.**

**31.** Trei vagoane de tren $W_1$, $W_2$ şi $W_3$ cu masele $m_1$=30 t, $m_2$=20 t şi $m_3$=50 t se deplasează unul după altul pe aceeaşi linie cu vitezele $v_1$=2 m/s, $v_2$=4,5 m/s şi $v_3$=5 m/s orientate în acelaşi sens ca în figură. Se neglijează toate frecările. Să se afle:
**a.** energia cinetică inițială a sistemului de vagoane
**b.** viteza comună a vagoanelor care se ciocnesc primele
**c.** viteza comună a sistemului de vagoane


**32.** Două bile cu masele $m_1$=100 g şi $m_2$=300 g se mişcă pe direcții perpendiculare cu vitezele $v_1$=10 m/s, respectiv $v_2$=5 m/s. După ciocnire bila a doua se opreşte. Să se afle:
**a.** energia cinetică a sistemului imediat înainte de ciocnire
**b.** viteza primei bile imediat după ciocnire
**c.** variația energiei cinetice

**33.** De la înălțime $H$=10 m cade liber o sferă cu masa $M$=900 g. Când sfera ajunge la altitudinea $h$=6 m, ea este lovită plastic, orizontal cu viteza $v_0$=10 m/s de o bilă cu masa $m$=100 g. Se neglijează frecările cu aerul. Să se afle:
**a.** viteza sferei imediat înainte de ciocnire
**b.** viteza corpului format imediat după ciocnire
**c.** viteza cu care corpul nou format loveşte solul

**34.** Un corp cu masa $m_1$=2,5 kg se mişcă de-a lungul axei $Ox$ după legea $x$=–$t^2$+10$t$, unde coordonata se măsoară în metrii şi timpul în secunde. După un timp egal cu $t_1$=3 s el ciocneşte central şi perfect elastic un al doilea corp cu masa $m_2$=1,5 kg aflat în repaus. Să se afle:

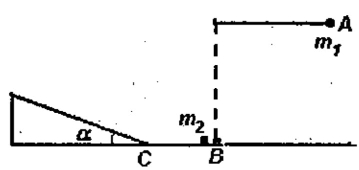
**a.** impulsul primului corp după timpul $t_1$
**b.** viteza primului corp imediat după ciocnire
**c.** energia cinetică a celui de-al doilea corp imediat după ciocnire

**35.** Două particule cu masele $m_1$ şi $m_2$=3$m_1$ se deplasează pe aceeaşi direcţie una spre cealaltă. Particula cu masa $m$ are viteza $v_1$=20 m/s. Particulele se ciocnesc perfect elastic. Să se afle:
**a.** vitezele particulelor imediat după ciocnire, dacă viteza paticulei cu masa $m_2$ este $v_2$=4 m/s
**b.** viteza particulei cu masa $m_2$ dacă prima particulă se opreşte imediat după ciocnire
**c.** cu cât la sută se modifică energia cinetică a sistemului prin ciocnire dacă după ciocnire particula cu masa $m_1$ se deplasează în sensul vitezei iniţiale cu viteza $v'_1$ =5 m/s
**d.** fracţiunea din energia cinetică iniţială a primei particule care este transferată particulei a doua, dacă particula a doua se afla iniţial în repaus

**36.** Un corp cu masa $m$=500 g se deplasează cu viteza $v_0$=5 m/s pe o suprafaţă orizontală şi ciocneşte central şi perfect elastic un alt corp cu masa $m$=500 g aflat în repaus. Considerând că valoarea coeficientului de frecare la alunecare dintre corpuri şi suprafaţa orizontală este $\mu$=0,1, să se afle:
**a.** vitezele corpurilor imediat după ciocnire
**b.** căldura degajată prin frecare până când mişcarea încetează
**c.** distanţele parcurse de corpuri după ciocnire până la oprirea lor pe suprafaţa orizontală

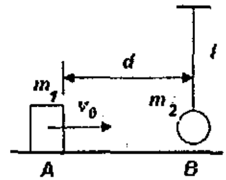
**37.** Un corp cu masa $m_1$=400 g şi viteza $v$=5 m/s loveşte perfect elastic şi central un al doilea corp cu masa $m_2$=100 g, aflat iniţial în repaus. Corpurile se mişcă cu frecare pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare $\mu$=0,1. Să se afle:
**a.** vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică şi să se interpreteze rezultatul
**b.** energia cinetică a sistemului de corpuri imediat după ciocnire
**c.** distanţa dintre corpuri când acestea se opresc

**38.** Un corp cu masa $m_1$=4$m_2$ este legat la capătul unui fir inextensibil cu lungimea $\ell$=0,8 m şi este lăsat liber din poziţia orizontală $A$ ca în figura alăturată. Când ajunge în poziţia verticală, acesta ciocneşte perfect elastic un al doilea corp cu masa $m_2$=1 kg aflat în repaus. Se cunosc distanţa $BC$=1 m, $\alpha$=30°, coeficienţii de frecare la alunecare $\mu_1$=0,048 pe porţiunea $BC$ şi $\mu_2$=1/$\sqrt{3}$ pe planul înclinat. Să se afle:
**a.** viteza corpului $m_1$ în poziţia $B$
**b.** înălţimea maximă la care va ajunge corpul al doilea pe planul înclinat
**c.** cosinusul unghiului maxim format cu verticala de firul ce susţine primul corp, după



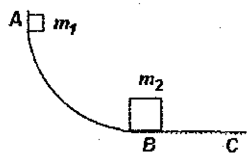
ciocnire

**39.** Un corp de mici dimensiuni şi cu masa $m_1$=1 kg eate lansat din punctul $A$ cu viteza $v_0$=2 m/s către o bilă cu masa $m_2$=3 kg suspendată de un fir inextensibil şi aflată la punctul $B$ în repaus, ca în figua alăturată. Lungimea firului este $\ell$=20 cm iar distanţa $AB$ este $d$=50 cm. Coeficientul de frecare la alunecare pe porţiunea $AB$ este $\mu$=0,3. Să se afle:



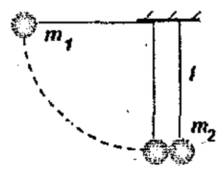

**a.** viteza corpului $m_1$ imediat înaintea ciocnirii cu bila $m_2$
**b.** viteza bilei imediat după ciocnirea elastică
**c.** înălţimea la care urcă bila după ciocnire

**40.** Două corpuri cu masele $m_1$=5 kg şi $m_2$=10 kg pot aluneca pe suprafaţa $ABC$, unde $AB$ are forma unui cerc cu raza $R$=2 m. Iniţial corpurile sunt în repaus şi se află situate ca în figură. Se lasă liber corpul $m_1$. Când ajunge în punctul $B$, acesta ciocneşte perfect elastic corpul cu masă $m_2$. Pe suprafaţa $AB$ nu există frecare, iar pe $BC$, coeficientul de frecare la alunecare este $\mu$=0,2. Să se afle:



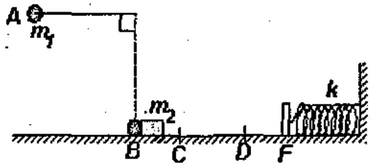

**a.** vitezele corpurilor după ciocnirea elastică
**b.** înălţimea la care urcă primul corp pe suprafaţa curbă după ciocnire
**c.** distanţa parcursă de corpul $m_2$ până la oprire

**41.** Fie două bile de fildeş cu masele $m_1$=40 g şi $m_2$=80 g suspendate prin două fire ideale cu lungimea $\ell$=1 m fiecare. Bila cu masa $m_1$ este depărtată astfel încât firul de care este prinsă formează unghiul $\alpha$=90$^0$ cu verticala ca în figură. Se lasă liberă bila. Bilele se ciocnesc perfect elastic. Neglijând frecările cu aerul, să se afle:




**a.** viteza primei bile imediat înainte de ciocnire
**b.** înălţimile la care se ridică bilele după ciocnire
**c.** raportul maselor $m_1/m_2$ astfel încât după ciocnire bilele să se ridice la aceeaşi înălţime

**42.** O bilă cu masa de $m_1$=100 g este legată la unul din capetele unui fir inextensibil cu lungimea $\ell$=0,8 m şi având celălalt capăt fixat. Firul întins este adus în poziţie orizontală şi lăsat liber ca în figură.. Când firul ajunge în poziţie verticală, bila ciocneşte perfect elastic un corp de masă $m_2$=300 g aflat iniţial în repaus. Corpul este pus în mişcare şi alunecă fără frecare pe porţiunile $BC$ şi $DF$ şi cu frecare coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,1 pe porţiunea $CD$, care are lungimea $\ell'$=0,3 m şi ciocneşte în punctul $F$ un resort ideal. Resortul suferă o deformaţie maximă $\Delta\ell$=1 cm. Să se afle:




**a.** vitezele corpurilor imediat după ciocnire
**b.** cosinusul unghiului maxim cu care deviază firul după ciocnire
**c.** constanta elastică a resortului ideal

**43.** Un corp $A$ cu masa $m$ si viteza $v_0$ ciocneşte perfect elastic şi central un corp $B$ cu masa $2m$, fixat la capătul unui resort elastic nedeformat. Considerând că deplasările corpurilor se fac pe o suprafață orizontală fără frecare, să se afle:

**a.** raportul vitezelor corpurilor imediat după ciocnire

**b.** raportul energiilor cinetice $E_{cA}/E_{cB}$ ale celor două corpuri, imediat după ciocnire

**c.** valoarea maximă a comprimării resortului, cunoscând energia cinetică a corpului $A$ înainte de ciocnire $E_0$=36 mJ şi constanta elastică a resortului $k$=40 N/m

**44**. Două bile cu masele $m_1=3m_2$=3 kg şi $m_2$ sunt suspendate pe două fire paralele, astfel încât bilele se ating. Prima bilă este deviată până la o înălțime $h$=20 cm şi lăsată liber. Se neglijează forțele de frecare cu aerul. Să se afle:

**a.** raportul înălțimilor la care se ridică bilele dacă ciocnirea este perfect elastică

**b**. înălțimea la care se ridică bilele dacă ciocnirea este perfect plastică

**c.** căldura degajată în cazul ciocnirii plastice

**45.** O particulă cu masa $m_1$ loveşte o altă particulă cu masa $m_2=3m_1$ aflată în repaus. Ciocnirea este unidimensională. Să se afle fracțiunea din energia cinetică inițială a primei particulei care:

**a.** este transferată particulei a doua, dacă:ciocnirea este perfect elastică

**b.** este transferată particulei a doua, dacă:ciocnirea este plastică

**c.** se transformă în căldură în cazul ciocnirii plastice

**46**. O moleculă cu masa $m=5\cdot10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston, se mişcă cu viteza $v_1$=502 m/s şi ajunge din urmă pistonul care se mişcă cu viteza $v_2$=2 m/s şi de care se ciocneşte frontal şi perfect elastic. Să se afle în urma ciocnirii:

**a.** viteza moleculei imediat după ciocnire

**b.** variația impulsului moleculei

**c.** variația energiei cinetice a moleculei

**47.** Un corp cu masa $m$=2 kg se mişcă cu viteza $v_1$=3 m/s şi ajunge din urmă un perete cu masa $M$ foarte mare ($m<<M$ şi $M\rightarrow\infty$) care se deplasează cu o viteză $v_2$=1 m/s şi de care se ciocneşte perfect elastic. Durata ciocnirii este $\Delta t$=1 ms. Să se afle:

**a.** viteza corpului imediat după ciocnirea cu peretele

**b.** forța medie cu care peretele acționează asupra corpului în timpul ciocnirii

**c.** raportul $v_1/v_2$ pentru ca după ciocnire corpul cu masă $m_1$ să se oprească

**48.** Un copil loveşte podeaua cu o minge cu masa $m$=2 kg şi cu viteza $v_0$=5 m/s perpendicular pe ea. Considerând că ciocnirea cu podeaua este perfect elastică şi că durează un timp $\Delta t$=0,5 ms, să se afle:

**a.** viteza mingii după ciocnirea cu podeaua

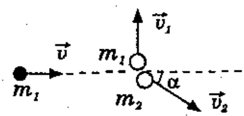
**b.** forța medie cu care podeaua acționează asupra mingii în timpul ciocnirii

**c.** forța medie cu care podeaua acționează asupra mingii în timpul ciocnirii, dacă mingea loveşte oblic podeaua sub un unghi față de ea de $30^0$

**49**. O particulă cu masa $m_1$ ciocneşte perfect elastic o particulă cu masa $m_2$ aflată inițial în repaus. Să se afle $m_1/m_2$, dacă:
**a.** ciocnirea este centrală iar particulele au viteze egale şi de sensuri opuse
**b.** direcțiile particulelor după ciocnire formează un unghi $2\alpha=60^0$ şi sunt simetrice în raport cu direcția inițială de mişcare a particulei cu masa $m_1$

**50.** Un neutron ciocneşte un alt neutron aflat inițial în repaus. Să se afle:
**a.** unghiul format de direcțiile de mişcare ale celor doi neutroni după ciocnire, dacă cicocnirea este centrală şi perfect elastică
**b.** vitezele celor doi neutroni după ciocnire, dacă viteza neutronului incident este $v_1=3{,}46\cdot10^4$ m/s şi după ciocnire viteza lui formează un unghi $\alpha_1=30^0$ cu direcția inițială de mişcare

**51**. O particulă cu masa $m_1$ ciocneşte perfect elastic o particulă cu masa $m_2=4m_1$ aflată inițial în repaus. Să se afle:




**a.** viteza particulelor imdediat după ciocnirea perfect elastică dacă viteza primei particule este $v_1=20$ m/s
**b.** a câta parte din energia cinetică inițială a particulei cu masa $m_1$ este pierdută prin ciocnirea particulelor, dacă viteza ei după ciocnire formează un unghi drept cu direcția inițială de mişcare ca în figură.

**52**. Un corp cu masa $m_1=1$ kg loveşte cu viteza $v=10$ m/s un alt corp cu masa $m_2=2$ kg aflat în repaus. După ciocnire direcțiile de mişcare ale corpurilor formează unghiurile $\alpha_1=30^0$ şi respectiv $\alpha_2=45^0$ cu direcția inițială de mişcare a primului corp. Să se afle:
**a.** vitezele corpurilor după ciocnire
**b.** raportul energiilor cinetice ale corpurilor după ciocnire $E_{C1}/E_{C2}$
**c.** căldura degaja tă prin ciocnirea corpurilor

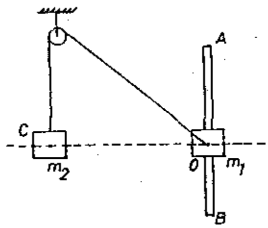
# 4. Elemente de statică
## 4.1. Echilibrul de translaţie

**1.** Un corp cu masa $m$ = 500 g este suspendat de un fir ideal. Se acţionează cu o forţă orizontală până când corpul deviază faţă de verticală cu unghiul $\alpha=60^0$. Să se afle:
**a.** valoarea tensiunii în fir
**b.** valoarea forţei

**2.** Un plug este tras uniform de două tractoare, astfel încât unghiul format dintre cablurile ce leagă cele două tractoare este $\alpha=60^0$. Tensiunea din fiecare cablu este $T$=15 kN. Să se afle forţa de rezistenţă exercitată de sol.

**3.** Pentru a menţine constantă viteza unei sănii pe un drum orizontal trebuie să se acţioneze cu o forţă $F_1$ = 120 N sub un unghi $\alpha=60^0$ faţă de orizontală sau cu o forţă $F_2 = 50\sqrt{3}$ N sub un unghi $\beta=30^0$. Să se afle:
**a.** coeficientul de frecare dintre sanie şi plan
**b.** masa saniei

**4.** Un cursor cu masa $m_1$ poate aluneca fără frecare de-a lungul unei bare verticale $AB$. De cursor este prins un fir trecut peste un scripete ideal, iar la capătul firului este prins un corp cu masa $m_2$. Ştiind că sistemul este în echilibru atunci când cele două mase se află pe acelaşi nivel orizontal, iar lungimea firului este de două ori mai mare decât distanţa $OC$ între corpuri să se afle raportul $m_1/m_2$.




**5.** Un corp cu greutatea $G=100\sqrt{2}$ N este suspendat ca în figura 1. Să se afle valoarea greutăţii $G_1$ care asigură echilibrul sistemului, dacă se cunoaşte unghiul $\alpha=45^0$.

**6.** Un corp cu masa $m$ =4 kg este suspendat prin intermediul a trei fire ca în fig. 2. Se cunosc valorile unghiurilor $\alpha_1=30^0$ şi $\alpha_2=60^0$. Să se afle tensiunile din cele trei fire.

**7.** Un corp cu masa $m$ =12 kg este suspendat de două grinzi ca în fig.3. Dacă se cunoaşte unghiul $\alpha=30^0$ să se afle tensiunile din grinzi.

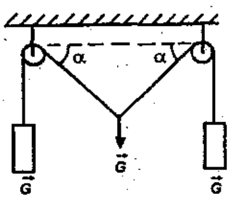



Fig. 1

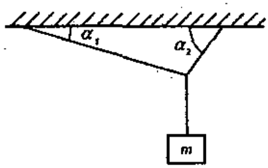



Fig. 2

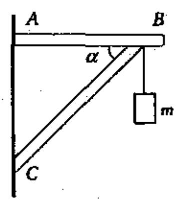



Fig..3

**8.** Un corp cu masa $m$=2 kg este suspendat de tavan ca în figura 4 printr-un cablu oblic care formează cu orizontala un unghi $\alpha$=30$^0$. Corpul este prins şi de o grindă orizontală. Să se afle tensiunea din cablu şi forţa de reacţiune din grindă.

**9.** Un om cu masa $m$=80 kg se află pe o platformă cu masa $M$=40 kg ca în figura 5. Să se afle:

**a.** forţa cu care trage omul sfoara pentru a se menţine în echilibru

**b.** forţa de apăsare exercitată de om asupra platformei pe care se află

**10.** De firul $ACB$ este prinsă o masă $m$=16 kg ca în figura 6. În poziţia de echilibru cablul $CB$ este orizontal, iar cablul $AC$ formează cu verticala un unghi $\alpha$=30$^0$. Să se afle valorile celor două tensiuni din cele două cabluri.

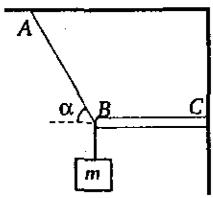



Fig. 4.

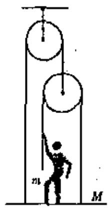



Fig..5

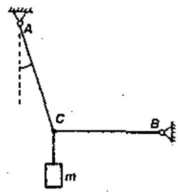


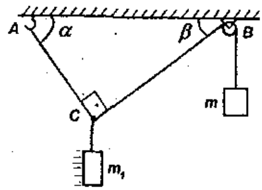

Fig. 6

**11.** Un cablu este prins de cârligul $A$ şi este trecut peste un scripete fix $B$. La capătul liber al firului se suspendă un corp cu masa $m$=2 kg, iar în punctul $C$ un alt un alt corp cu masa $m_1$ ca în figură. Firele $AC$ şi $CB$ sunt perpendiculare Sistemul se află în echilibru. Să se afle:

**a.** valoarea masei $m_1$, astfel încât tensiunea din firul $AC$ este de două ori mai mare decât tensiunea din firul $BC$

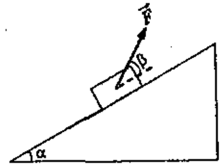
**b.** valoarea tensiunii din firul $AC$

**c.** forţa care acţionează asupra scripetelui $B$




**12.** Un corp cu masa $m$=1 kg se află pe un plan orizontal, unde se poate mişca cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,3. Să se afle cu ce forţă trebuie să se tragă de corp sub unghiul $\alpha$=45$^0$ faţă de orizontală, astfel încât corpul să se mişte uniform.

**13.** Pe un plan înclinat sub unghiul $\alpha$ =30$^0$ se pune un corp cu masa $m$=1 kg. Mişcarea corpului se face cu frecare coeficientul de frecare fiind $\mu$=0,3. Asupra acestuia se trage cu o forţă $F$ sub un unghi $\beta$=30$^0$ ca în figură, astfel încât corpul să rămână în repaus pe plan. Să se afle:



**a.** forța $F$
**b.** forța de apăsare exercitată de corp asupra planului
**c.** forța $F_1$ care aplicată corpului sub același unghi $\beta$, determină urcarea uniformă a corpului pe plan
**d.** forța de apăsare exercitată de corp asupra planului, în condițiile de la punctul **c.**

**14.** Un lanț omogen cu masa $m$=1 kg și cu lungimea $\ell$=1 m este așezat pe o masă orizontală, astfel încât o bucată $\ell_1$=60 cm atârnă vertical la capătul masei. Mișcarea lanțului se face cu frecare, coeficientul de frecare este $\mu$=0,2. Să se afle cu ce forță orizontală trebuie să acționăm asupra lanțului, astfel încât acesta să se afle în echilibru pe masă.

**15.** Două corpuri cu masele $m_1$=200 g și $m_2$=300 g legate printr-un fir ideal și aflate pe un plan orizontal se pot mișca cu frecare, coeficienții de frecare fiind $\mu_1$=0,2 și respectiv $\mu_2$=0,4. Să se afle cu ce forță orizontală trebuie să tragem de primul corp astfel încât sistemul să se miște uniform.

**16.** Peste un scripete ideal prins cu ajutorul unui cablu de tavan se suspendă pe verticală prin intermediul unui fir inextensibil două corpuri cu masele $m_1$=5 kg și $m_2$=3 kg. Să se afle:
**a.** masa adițională care trebuie pusă pe un corp, astfel ca sistemul să se miște uniform
**b.** forța de apăsare a corpului adițional
**c.** forța de reacțiune în cablu în condițiile de la punctul **a.**

**17.** Să se afle masa $m_1$ ce trebuie suspendată, astfel încât masa $m_2$=10 kg din sistemul din figura 7 să rămână în echilibru.

**18.** Fie sistemul din figura 8. Se cunoaște $m_1$=8 kg. Să se afle valoarea masei $m_2$ care este menținută în repaus.

**19.** Un corp cu masa $m_1$=1 kg este tras vertical în sus uniform cu ajutorul unei forțe $F$ ca în figura 9. De acest corp este prins un alt corp cu masa $m_2$=2 kg prin intermediul unui cablu omogen cu masa $m_0$=200 g și cu lungimea $\ell$=1 m. Să se afle:
**a.** forța care sigură ridicarea uniformă a sistemului de corpuri
**b.** tensiunea în cablu la distanța $\ell_0$=0,4 m de corpul cu masa $m_2$

**20.** Două corpuri cu masele $m_1$=3 kg și $m_2$=5 kg se află în contact ca în figura 10. Asupra corpului cu masa $m_1$ se trage cu o forță $F$ sub un unghi $\alpha$=30$^0$ față de orizontală. Mișcarea corpurilor se poate efectua cu frecare coeficienții de frecare ai corpurilor cu planul orizontal sunt $\mu_1$=0,1 și respectiv $\mu_2$=0,2. Să se afle:
**a.** forța maximă $F$ cu care se trage pentru ca sistemul de corpuri să se mai afle în repaus
**b.** forța de apăsare exercitată de fiecare corp asupra planului orizontal
**c.** forțele de frecare care acționează asupra fiecărui corp

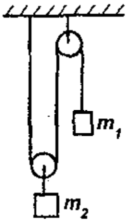


Fig. 7

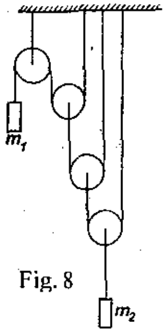


Fig. 8

Fig. 9

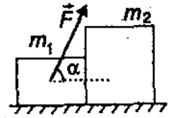
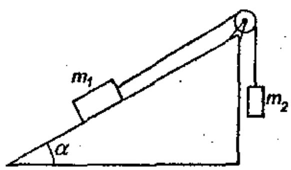


Fig. 10

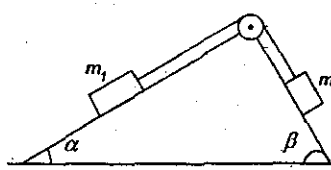
**21.** Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=60^0$ se aşază un corp cu masa $m_1=2$ kg legat de un al doilea corp cu masa $m_2=4$ kg prin intermediul unui fir ideal trecut peste un scripete aflat în vârful planului înclinat. Corpul aflat pe planul înclinat se poate mişca cu frecare cu coeficientul de frecare $\mu_1=0,2$. Să se afle:




**a.** forța orientată de-a lungul planului înclinat cu care trebuie să se acționeze asupra corpului $m_1$ pentru ca sistemul să rămână în repaus pe plan
**b.** tensiunea din fir
**c.** reacțiunea în axul scripetelui

**22.** Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha=30^0$ se aşază un corp cu masa $m_1=1$ kg legat de un al doilea corp cu masa $m_2$ prin intermediul unui fir ideal trecut peste un scripete aflat în vârful planului înclinat ca în figura precedentă. Corpul aflat pe planul înclinat se poate mişca cu frecare cu coeficientul de frecare $\mu_1=0,1$. Să se afle:
**a.** limitele între care trebuie cuprinsă masa $m_2$ pentru ca sistemul de corpuri să se afle în repaus
**b.** valorile tensiunilor în fire în cele două cazuri extreme
**c.** reacțiunile din axul scripetelui în cele două cazuri extreme

**23.** Două corpuri cu masele $m_1=5$ kg şi $m_2$ sunt legate printr-un fir care trece peste un scripete ideal fixat în vârful comun a două plane înclinate ca în figură. Coeficienții de frecare ale celor două corpuri sunt $\mu_1=0,1$ şi respectiv $\mu_2=0,2$. Unghiurile planelor sunt $\alpha=30^0$ şi $\beta=45^0$. Să se afle




**a.** limitele între care trebuie cuprinsă masa $m_2$ pentru ca sistemul de corpuri să se afle în repaus
**b.** valorile tensiunilor în fire în cele două cazuri
**c.** reacțiunile din axul scripetelui în cele două cazuri

## 4.2. Echilibrul de rotaţie

**1.** O bară este menţinută în poziţie orizontală prin acţiunea unei forţe $F$=20 N la distanţa $d$=5 cm faţă de axa de rotaţie. Dacă direcţia forţei nu se schimbă, să se afle valoarea valoarea unei forţe $F_1$ aplicată la distanţa $d_1$=1 cm faţă de axa de rotaţie, pentru a menţine echilibrul barei.

**2.** O scândură cu masa neglijabilă se sprijină pe un punct $O$ în jurul căruia se poate roti. La capătul $A$ al barei aflat la distanţa $\ell_1$=0,8 m faţă se punctul $O$ se trage cu o forţă $F_1$=30 N aplicată normal pe scândură. Să se afle ce forţă normală trebuie aplicată la celălalt capăt $B$ al scândurii aflat la la distanţa $\ell_2$=1,2 m faţă se punctul $O$ pentru ca acesta să rămână în echilibru.

**3.** O bară cu lungimea $\ell$=1 m se sprijină în două puncte $A$ şi $B$. La distanţa $d$=20 cm de capătul $A$ se aşază un corp cu masa $m$=1 kg. Se neglijează greutatea barei. Să se afle cu ce forţe apasă bara asupra punctelor de sprijin.

**4.** O grindă omogenă $AC$ orizontală cu masa $m$=10 kg se sprijină în două puncte $A$ şi $B$ aflate la distanţa $d$=0,8 m unul de celălalt. La capătul $C$ al grinzii, aflat la distanţa $\ell$=1 m de punctul $A$ se atârnă o greutate cu masa $m_1$=4 kg. Să se afle forţele cu care grinda acţionează asupra punctelor de sprijin.

**5.** O scândură subţire şi fără masă $AC$ cu lungimea $\ell$=1,6 m se sprijină pe un suport O aflat la distanţa $\ell_1$=0,6 m de capătul $A$. De capătul $A$ al scândurii se prinde o masă $m_1$=800 g, iar la distanţa $\ell_2$=1 m de capătul $A$ se prinde o masă $m_2$=400 g. Să se afle valoarea masei $m_3$ ce trebuie prinsă de capătul $C$ al scândurii pentru ca aceasta să fie orizontală.

**6.** Un muncitor ridică o scândură cu masa $m$=5 kg până când scândura formează cu orizontala unghiul $\alpha$=30$^0$ acţionând cu o forţă perpendiculară pe scândură. Să se afle valoarea acestei forţei.

**7.** Un scripete dublu are razele $R_1$=15 cm şi $R_2$=3 cm. Se prinde de scripetele cu raza $R_2$ un corp cu masa $m_1$=2 kg ca în figura 1. Iniţial scripetele este blocat. Să se afle valoarea masei corpului $m_2$, astfel încât scripetele să nu se rotească după prinderea acestui corp şi deblocarea scripetelui.

**8.** Un corp prismatic cu baza un pătrat cu latura $a$=2 cm, înălţimea $h$=10 cm şi cu masa $m$=1 kg se află pe un plan orizontal (fig 2). Să se afle:
**a.** valoarea minimă a forţei orizontale care aplicată în partea superioară a corpului determină răsturnarea acestuia
**b.** valoarea minimă a unei forţei care formează cu orizontala un unghi $\alpha$=60$^0$ care aplicată în partea superioară a corpului determină răsturnarea acestuia (fig 3)

**9.** Să se afle valoarea minimă a forței $F$ orizontale care trebuie aplicată unei roți cu masa $m$=5 kg și cu raza $R$=30 cm, pentru ca roata să urce treapta cu înălțimea $h$=10 cm. (fig.4)

Fig. 1

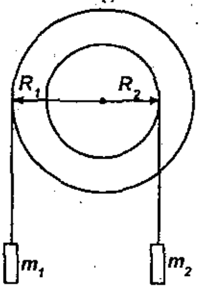



Fig. 2

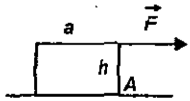



Fig. 3

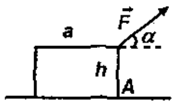
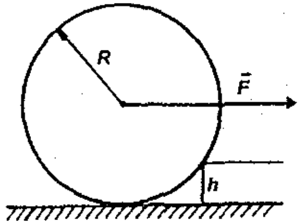


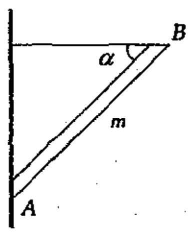

Fig. 4




**10.** O bară cilindrică cu lungimea $\ell$=1 m este confecționată o pătrime din oțel cu densitatea $\rho_1$=7800 kg/m$^3$ și restul din aluminiu cu densitatea $\rho_2$=2700 kg/m$^3$. Să se afle unde trebuie suspendată bara pentru ca ea să rămână în echilibru dacă bara are peste tot aceeeași secțiune.

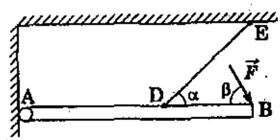
**11.** La volanul cu raza $R$=15 cm al unei mașini se aplică un moment $M$=4,5 Nm prin mânuirea volanului cu mâinile aflate în două puncte diametral opuse. Să se afle forța dezvoltată de mâna omului, dacă se presupune că omul trage cu aceeași forță cu ambele mâini, tangente pe volan.

**12.** O bară omogenă $AB$, cu masa $m$=200 kg se poate roti în jurul unui punct de sprijin $A$ aflat pe sol. Bara este susținută sub un unghi cu orizontala $\alpha$=30$^0$ în repaus cu ajutorul unui cablu orizontal care este prins de capătul $B$ al barei ca în figură. Să se afle:



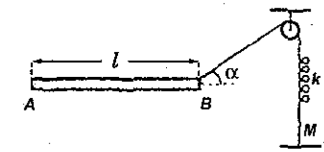

**a.** tensiunea în cablu
**b.** reacțiunea în articulație
**c.** tangenta unghiul format de reacțiunea din punctul $A$ cu orizontala

**13.** O scândură orizontală $AB$ cu lungimea $\ell$=4 m și masa $m$=20 kg este articulată în $A$ și legată cu ajutorul cablului $DE$, care face un unghi $\alpha$=30$^0$ cu orizontala. Punctul $D$ se află la distanța $d$=1,5 m de capătul $B$. Pentru a menține scândura în poziție orizontală în punctul $B$ acționează o forță $F$=300 N, a cărei direcție formează cu orizontala un unghi $\beta$=45$^0$ ca în figură. Să se afle:



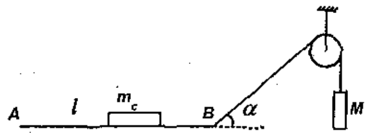

**a.** tensiunea din cablul $DE$
**b.** forța de reacțiune în articulația $A$

**14.** O scândură orizontală $AB$ cu lungimea $\ell$=2 m şi masa $m$=20 kg este articulată în punctul $A$, iar celălalt capăt este prins cu ajutorul unui fir inextensibil trecut peste un scripete ideal, prin intermediul unui resort, de punctul $M$ ca în figură. Constanta elastică a resortului este $k$=2 $10^3$ N/m, iar unghiul făcut de firul care leagă capătul $B$ cu orizontala este $\alpha$=60$^0$. Ştiind că scândura este orizontală, să se afle:

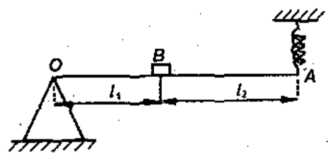



**a.** forţa de întindere a resortului şi alungirea acestuia
**b.** reacţiunea din articulaţia $A$
**c.** unghiul făcut de reacţiune cu orizontala

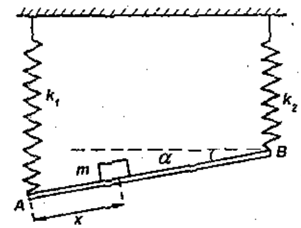
**15.** O bară cu masa $m$=1 kg şi lungimea $\ell$=20 cm care se poate roti în jurul capătului $A$ este ţinută în poziţie orizontală prin prinderea la celălalt capăt a unui corp cu masa $M$=5 kg cu ajutorul unui fir ideal trecut peste un scripete ca în figură. Firul formează cu orizontala un unghi $\alpha$=30$^0$. Să se afle distanţa faţă de capătul $A$ al scândurii la care se află un corp cu masa $m_c$=10 kg aşezat pe scândură.




**16.** Pe o bară orizontală cu greutate neglijabilă se află un corp cu masa $m$=10 kg. Bara este prinsă cu un resort care se alungeşte cu $x$=2 cm. Se cunosc $\ell_1$=1 m şi $\ell_2$=3 m. Să se afle constanta elastică a resortului.

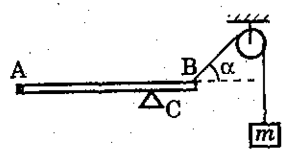



**17.** O scândură $AB$ cu lungimea $\ell$=20 cm şi cu greutatea neglijabilă este prinsă la capete cu ajutorul a două resorturi cu constantele elastice $k_1$=50 N/m şi $k_2$=150 N/m de tavan ca în figură. Iniţial resorturile au lungimi egale. Pe scândură se aşază un corp cu masa $m$=1 kg, astfel încât scândura se înclină faţă de orizontala cu unghiul $\alpha$=30$^0$. Să se afle:



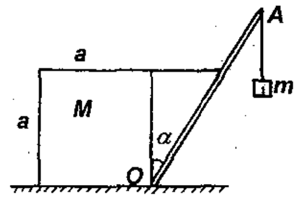

**a.** deformaţiile resorturilor
**b.** forţele elastice în cele două resorturi
**c.** distanţa măsurată faţă de capătul $A$ la care se aşază corpul
**d.** distanţa măsurată faţă de de capătul $A$ la care se aşază corpul astfel încât scândura să rămână orizontală

**18.** O bară cu lungimea $\ell$=2 m şi masa $m_b$=32 kg este articulată în punctul $A$ şi sprijinită în punctul $C$ aflat faţă de capătul $A$ la 3/4 din lungimea barei. Bara se află în poziţie orizontală prin prinderea capătului $B$ al barei cu un corp cu masa $m$=2 kg cu ajutorul unui fir inextensibil ce trece peste un scripete ideal ca în figură. Firul formează cu orizontala un unghi $\alpha$=30$^0$. Să se afle:



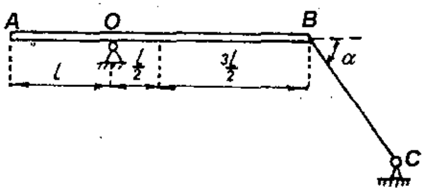
**a.** reacţiunea în reazemul $C$
**b.** forţa dezvoltată în articulaţie

**19.** O bară omogenă cu masa $m$=0,2 kg şi lungimea $OA$=$\ell$=2 m este articulată de muchia unui bloc de forma unui cub cu latura $a$=10 cm şi cu masa $M$=5 kg. În punctul $A$ este fixată greutatea $G$=4 N. Sistemul este ţinut în echilibru sub un unghi α cu ajutorul unui fir prins în punctul $B$ care are direcţie orizontală ca în figură. Să se afle:



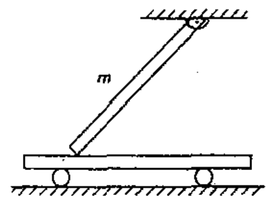

**a.** tensiunea din firul de legătură
**b.** sinusul unghiul α pentru care cubul nu se răstoarnă în jurul muchiei care trece prin punctul $O$

**20.** O bară omogenă $AB$=3$\ell$ are masa pe unitatea de lungime $m/\ell$=1/3 kg/m. Bara este articulată în punctul $O$ şi se află în echilibru în poziţie orizontală sub acţiunea unei forţe $F$=10 N aplicată vertical la capătul $A$ al barei. Dacă la capătul $B$ bara se prinde de un fir $BC$ care formează cu orizontala unghiul α=30⁰ ca în figură, să se afle:



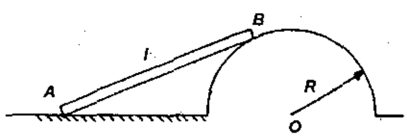

**a.** tensiunea din firul $BC$
**b.** valoarea pe care trebuie să o aibă masa barei $m$, astfel ca tensiunea din fir să fie nulă, pentru cazul în care bara este orizontală

**21.** O bară omogenă cu masa $m$=2 kg este articulată la un capăt, iar celălalt capăt se sprijină pe un cărucior. Să se afle forţa necesară deplasării căruciorului, când bara formează cu verticala unghiul α=30⁰, iar coeficientul de frecare dintre bară şi cărucior este $\mu$=0,4. Se neglijează frecarea dintre cărucior şi suprafaţa orizontală.



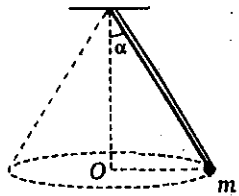

**22.** O scară neuniformă cu lungimea $\ell$=1 m poate sta în echilibru sprijinită de un perete vertical până la un unghi maxim α=30⁰, format cu podeaua. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare cu peretele şi podeaua $\mu$=0,4, să se afle înălţimea la care se află centrul de masă al scării.

**23.** O bară omogenă cu lungimea $\ell$=1 m şi cu masa $m$=2 kg se sprijină cu frecare cu capătul $A$ pe un plan orizontal şi cu capătul $B$ tangent pe o suprafaţă circulară cu raza $R$=0,5 m cu centrul în $O$, fără frecare ca în figură. Să se afle coeficientul de frecare dintre bară şi sol dacă bara se află în echilibru.



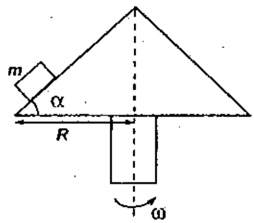
**24*.** Să se afle viteza minimă pe care trebuie să o aibă un autoturism care intră într-o curbă cu raza $R$=50 m pentru ca acesta să nu se răstoarne. Cunoaştem distanţa dintre roţile autoturismului $d$=1,2 m şi înălţimea la care se află centrul de greutate al autoturismului faţă de sol $h$=0,3 m.

**25*.** O tijă subţire rigidă cu lungimea $\ell$=1 m este articulată rigid, sub un unghi $\alpha$=30⁰, de un ax vertical. La capătul tijei este prinsă o bilă cu masa $m$=200 g. Sistemul se roteşte cu turaţia $n$=120 rot/min ca în figură ($\pi^2=10$). Să se afle:

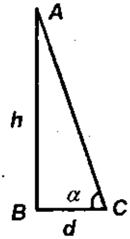



**a.** reacţiunea bilei asupra tijei
**b.** tangenta unghiul format de reacţiunea din tijă cu orizontala
**c.** momentul reacţiunii faţă de punctul de fixare de pe ax
**d.** valoarea perioadei de rotaţie astfel încât momentul calculat la punctul **c.**, se anulează

**26*.** În partea inferioară a unei suprafeţe conice care formează cu orizontala unghiul $\alpha$=30⁰ se află un corp cu masa $m$=1 kg ca în figură. Conul se roteşte în jurul axei sale cu viteza unghiulară $\omega=\sqrt{5}$ rad/s. Raza la baza conului este $R$=30 cm. Să se afle coeficientul de frecare la alunecare pentru care corpul nu părăseşte suprafaţa conică.



## 1.1. Principiile opticii geometrice, reflexie, refracţie




**1.** Conform desenului din figură, ţinând cont că razele de lumină se propagă rectiliniu: $tg\,\alpha = \frac{h}{d} = 1{,}73 = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$, faţă de Pământ razele cad sub un unghi de 60°.

**2.** Razele de lumină se propagă rectiliniu şi, utilizând un desen ca la problema $1 \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{H}{L} \Rightarrow L = \frac{H\ell}{h} \Rightarrow L$=45 cm.

**3.** Omul se deplasează rectiliniu cu viteza $v$ şi parcurge distanţa $AC = vt$. Pe baza propagării rectilinii a razelor de lumină, umbra omului este $CE = v_1 t$. Asemănăm triunghiurile $DCE$ cu $BAE$ (fig. 1):şi obţinem.

$$\frac{h_0}{h} = \frac{CE}{AE} \Rightarrow \frac{h_0}{h} = \frac{v_1 t}{vt + v_1 t} = \frac{v_1}{v + v_1} \Rightarrow v_1 = \frac{h_0 v}{h - h_0} = 29\ \text{cm/s}.$$

**4.** Deoarece lumânarea se consumă şi umbra flăcării se deplasează, utilizăm asemănarea triunghiurilor $AB'C'$ cu $ABC$ (fig. 2):

$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{h - v_1 \cdot t}{h} = \frac{\ell - v_2 \cdot t}{\ell}$, unde $v_2$ este viteză cu care se deplasează umbra flăcării $\Rightarrow h \cdot v_2 = \ell \cdot v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{\ell \cdot v_1}{h} = 0{,}5$ cm/min.

**5.** Razele de lumină se propagă rectiliniu şi pe tavan se va forma o pată luminoasă de aceeaşi formă cu fanta pătratică, conform desenului din fig. 3. Asemănăm laturile şi înălţimile piramidelor:

$$\frac{h}{H} = \frac{\ell}{L} \Rightarrow L = \frac{H\ell}{h} = 50\ \text{cm}.$$

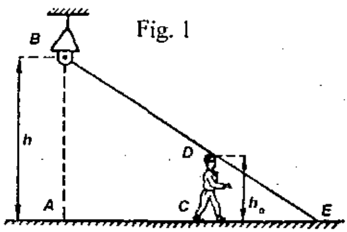



Fig. 1

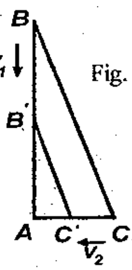



Fig. 2

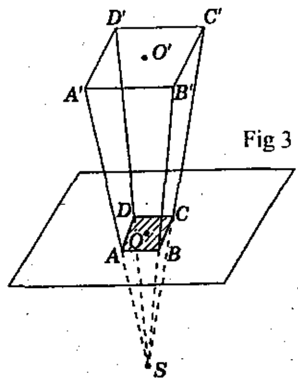
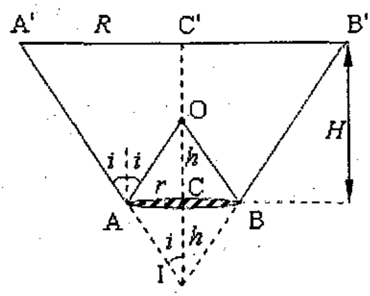


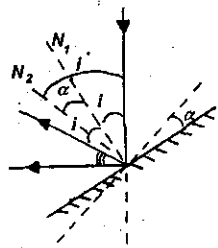

Fig 3

**6.** Lampa de lumină emite un fascicul divergent de lumină. Razele de lumină cad pe oglinda plană şi se reflectă cu respectarea legii reflexiei $i$=$r$. Razele reflectate cad apoi pe tavan producând o pată circulară asemănătoare cu oglinda. Razele de lumină reflectate de oglindă par a proveni dintr-o sursă $I$, care reprezintă imaginea virtuală a lampei obţinută de oglindă, imagine situată simetric în raport

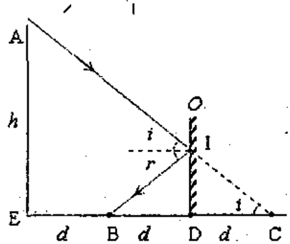


cu oglinda. Utilizăm asemănarea triunghiurilor:

$$IAC \text{ cu } IA'C' \Rightarrow \frac{h}{h+H} = \frac{r}{R} \Rightarrow R = \frac{r(h+H)}{h} = 1{,}1\text{m}.$$

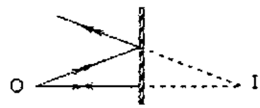



**7.a.** Dacă oglinda plană se roteşte cu unghiul α faţă de poziţia anterioară şi normala $N_2$ se roteşte faţă de vechea normală $N_1$ tot cu unghiul α. Din desen se observă că $i$ creşte la $i' = i + \alpha$ astfel că unghiul dintre raza incidentă şi cea reflectată $2i$ creşte la $2i' = 2i + 2\alpha$ şi, prin urmare, raza reflectată se roteşte cu 2α în acelaşi sens cu oglinda atunci când oglinda se roteşte cu unghiul α.



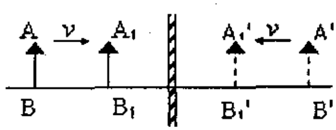

**b.** Raza de lumină care cade pe oglinda plană suferă fenomenul de reflexie, cu respectarea legii: $\hat{i} = \hat{r}$. Triunghiurile *IBD* şi *IDC* sunt egale. Asemănând triunghiurile *IDC* şi *AEC*$\Rightarrow \frac{ID}{h} = \frac{d}{3d} \Rightarrow ID = \frac{h}{3} = 0{,}5$ m

Prin urmare raza de lumină cade pe oglindă la înălţimea de 50 cm faţă de podea.

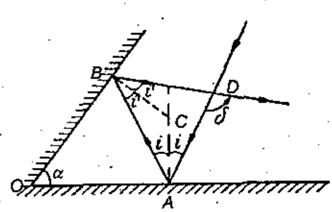



**c.** Într-o oglindă plană, imaginea unui obiect real este situată simetric faţă de oglindă şi este virtuală. Pentru a construi imaginea unui punct într-o oglindă plană trebuie să utilizăm două raze de lumină. Acestea se reflectă pe oglindă iar prelungirile lor se întâlnesc într-un punct în care se formează imaginea obiectului. Pe baza modului de construcţie al imaginilor în oglinzi plane se observă că dacă obiectul se roteşte cu unghiul α faţă de o oglindă plană, imaginea virtuală a acestuia se va roti în sens opus cu acelaşi unghi α. Astfel, unghiul dintre noua imagine şi noua poziţie a obiectului este $2\alpha = 60°$.

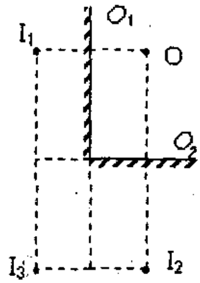

**d.** Imaginea persoanei se formează în oglinda plană simetric şi din această cauză imaginea se apropie de oglinda plană cu aceeaşi viteză cu care se apropie se apropie persoana de oglindă, adică cu viteza $v$=4 m/s. Imaginea se apropie de obiect cu viteza $2v$=8 m/s.




**8.a.** Conform legii reflexiilor $i = D\hat{A}C = C\hat{A}B$ şi $A\hat{B}C = C\hat{B}D = i'$. Deoarece *OBCA* este patrulater inscriptibil, astfel că $\alpha + A\hat{C}B = 180°$. În triunghiul CAB, $i + i' + A\hat{C}B = 180^0 \Rightarrow i + i' = \alpha$. Unghiul de deviaţie $\delta$ este exterior triunghiului *DBA*, şi deci $\delta = 2i + 2i' = 2(i+i') = 2\alpha$.



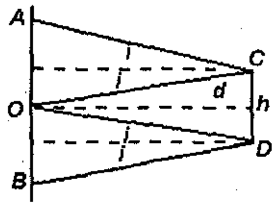
**b.** Conform desenului când $\alpha = 90^\circ$ se formează $N$=3 imagini. Se poate demonstra prin desene, că dacă două oglinzi plane formează între ele un unghi α care este divizor al unghiului de 360°, numărul de imagini ale unui punct obiect situat între cele două oglinzi este $N = \frac{360^0}{\alpha} - 1$.



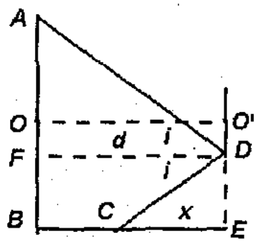

Observație: toate imaginile se află pe un cerc care are raza egală cu distanța de la obiect la punctul de intersecție al oglinzilor cu un plan ce conține punctul obiect și este situat perpendicular pe cele două oglinzi

**c.** În cazul când α=15⁰ se formează $N$=23 imagini.

**9.a.** Razele de lumină care pornesc din punctele $A$ și $B$ se reflectă pe oglindă și ajung la aparatul de fotografiat. Prin urmare se fotografiază porțiunea $AB$. Din legea reflexiei triunghiurile $ACO$ și $BDO$ sunt isoscele și egale, astfel că $AC=OC=OD=BD$. Deoarece $OC=OD$ înseamnă că și $\Delta COD$ este isoscel. Din geometrie observăm că $\Delta ACO=\Delta COD=\Delta ODB$, astfel că $AO=CD=OB=h \Rightarrow AB=2h$. Fracțiune din înălțimea omului care apare pe fotografie este $f = \frac{AB}{H} = \frac{2h}{H}$=66,66%.



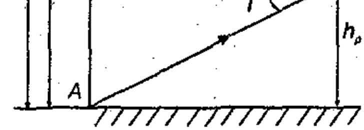

**b.** Raza de lumină pleacă de pe podea din punctul $C$, se reflectă pe oglindă la marginea ei inferioară $D$ ca în figură și ajunge la ochiul observatorului în punctul $A$.




Din geometrie în $\Delta AFD$ $\quad tgi = \frac{AF}{FD} = \frac{H+h}{2d}$, iar în

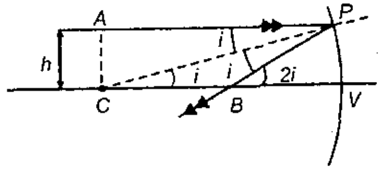
$\Delta DCE$ $tgi = \frac{DE}{CE} = \frac{H-h}{2x}$, astfel că $x = \frac{d(H-h)}{H+h}$=30 cm

**c.** Pentru ca să se vadă în întregime în oglindă, omul trebuie să-și vadă picioarele și creștetul. Pentru ca omul să-și vadă picioarele, o rază de lumină pornește din punctul $A$, se reflectă pe oglindă la marginea ei inferioară $D$ și ajunge la ochiul omului în $B$. Pentru ca omul să-și vadă creștetul, o rază de lumină pornește din punctul $C$, se reflectă pe oglindă la marginea ei superioară $E$ și ajunge la ochiul omului în $B$. Astfel înălțimea minimă a oglinzii pentru ca omul să se privească în întregime este $ED=EF+FD$. Pe baza fenomenului de reflexie a luminii, $\Delta ADB$ este isoscel, iar $FD=BN=AB/2$.



Deoarece $\Delta BEC$ este isoscel, $EF=BC/2 \Rightarrow ED=\dfrac{AB+BC}{2}=\dfrac{H}{2}$. Înălţimea minimă a oglinzii este jumătate din înălţimea omului, astfel că $h_o=H/2=90$ cm. Din figură rezultă că pentru a se forma în întregime imaginea omului în oglindă, trebuie ca marginea inferioară a oglinzii să se afle faţă de podea la înălţimea $h_P=85$ cm, adică la jumătatea distanţei dintre podea şi ochi.
Observăm că dacă cele două condiţii sunt îndeplinite simultan, omul se poate vedea în întregime în oglindă indiferent de poziţia lui faţă de oglindă.

**10.a.** Pe baza legii reflexiei raza $AP$, paralelă cu axul optic principal al oglinzii după reflexia pe oglindă taie axul optic principal în punctul $B$.




$\Delta CBP$ este isoscel, iar $V B\hat{P}=2i$ deoarece este unghi exterior triunghiului. Aplicăm teorema sinusurilor în triunghi.

$\dfrac{CP}{\sin(180-2i)}=\dfrac{CB}{\sin i} \Rightarrow CB=\dfrac{R\sin i}{\sin 2i}=\dfrac{R}{2\cos i}$. Dar în $\Delta CAP$, $\sin i=\dfrac{h}{R} \Rightarrow$

$\cos i=\sqrt{1-\dfrac{h^2}{R^2}} \Rightarrow CB=\dfrac{R}{2\sqrt{1-\dfrac{h^2}{R^2}}}$. Pentru prima rază $h_I=0{,}5$ cm astfel că

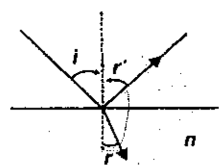
$CB_1 \approx 2{,}5$ cm. Raza puţin depărtată de axul optic principal este o rază paraxială şi în urma reflexiei pe oglinda concavă, raza reflectată trece prin focarul oglinzii.

**b.** Pentru raza a doua $h_2=3$ cm astfel că $CB_2 \approx 3{,}125$ cm. Raza depărtată de axul optic principal după reflexia pe oglinda concavă taie acet ax mai departe decât focarul principal al oglinzii.

**c.** Distanţa dintre punctele în care cele două raze taie axul optic principal este $CB_2-CB_1=6{,}25$ mm.

**11.a.** Aplicăm legea refracţiei: $n_1\sin i=n_2\sin r$ şi obţinem indicele de refracţie relativ al celui de-al doilea mediu faţă de primul mediu: $n_{r_{21}}=\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{\sin i}{\sin r}\approx 1{,}41$.

**b.** Din legea refracţiei: $\sin i=n\sin r \Rightarrow \sin r=\dfrac{\sin i}{n} \Rightarrow r=30°$.

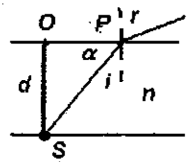



Astfel unghiul dintre raza reflectată şi cea refractată este $180°-i-r=180°-45°-30°=105°$.

**c.** Deoarece raza reflectată este perpendiculară pe raza refractată, atunci $i+r=90^0 \Rightarrow r=90^0-i$. Conform legii refracţiei $n_1\sin i=n_2\sin r \Rightarrow n_1\sin i=n_2\sin(90^0-i) \Rightarrow n_1\sin i=n_2\cos i \Rightarrow$

$n_{r_{21}}=\dfrac{n_2}{n_1}=tg\, i\approx 1{,}73$.

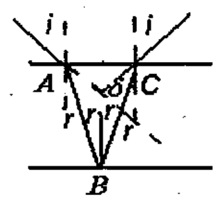
**d.** Conform legii refracției $n_1 \sin i = n_2 \sin r \Rightarrow n_2 = \dfrac{n_1 \sin i}{\sin r}$. Deoarece din grafic $\sin i = 0{,}8$ și $\sin r = 0{,}6$ obținem $n_2$=2



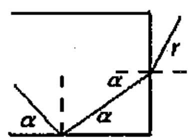

**12.a.** În graficul alăturat este reprezentat mersul razei de lumină care ajunge la un observator plasat în aer deasupra feței superioare a plăcii.
**b.** Unghiul de incidență este $i$=90⁰-α=30⁰. Din legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \dfrac{\sin i}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ unghiul de refracție este $r$=60⁰. Deoarece raza de lumină trece dintr-un mediu mai dens într-un mediu mai puțin dens es se depărtează de normală.
**c.** Distanța de la punctul $O$ până la punctul $P$ este:

$$tg\alpha = \frac{d}{OP} \Rightarrow OP = \frac{d}{tg\alpha} = 2 \text{ cm}$$

**13.a.** Aplicăm legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \dfrac{\sin i}{n} \Rightarrow r = 30^0$




**b.** Raza de lumină pătrunde în apă sub unghiul $r$, cade pe oglinda plană aflată pe fundul lichidului tot sub unghiul $r$ și se reflectă în punctul $B$ sub același unghi $r$ ca în figura alăturată. Raza de lumină cade pe fața lichidului în punctul $C$ sub unghiul de incidență $r$ și iese în aer sub unghiul $i$. Unghiul de deviație al razei emergente față de raza incidentă este $\delta = 180 - 2i$=60⁰, deoarece deviația razei δ este unghi exterior triunghiului isoscel cu unghiurile egale 90-$i$.
**c.** Din $\sin i = n \sin r = 1$ obținem unghiul de incidență $i$=90⁰.




**14.a.** Conform legii reflexiei raza se reflectă sub un unghi egal ca în figură. Raza reflectată cade pe fața laterală a cubului sub un unghi de incidență egal cu α. Cum $\alpha < \alpha_{max}$ raza iese în apă sub un unghi de emergență $r$ mai mare decât α, astfel că raza este mai depărtată de normală.
**b.** Când unghiul de incidență devine $\alpha_{min}$ lumina nu mai intră în apă deși întâlnește fața laterală a cubului ceea ce înseamnă că pe fața laterală a cubului apare fenomenul de reflexie totală. Din legea refracției $n_s \sin \alpha_m = n_a$, deoarece $r$=90⁰ obținem indicele de refracție al sticlei $n_s = \dfrac{n_a}{\sin \alpha_{max}} = 1{,}54$
**c.** Dacă apa se scoate din vas, raza iese din cubul de sticlă în aer. Pentru ca raza să nu mai poată să iasă în aer trebuie ca unghiul de refracție să devină $r$=90⁰, astfel că $n_s \sin \alpha'_m = n_a \Rightarrow \sin \alpha'_m = \dfrac{1}{n_a} \approx 0.65$

**15.a.** Deoarece raza trece din aer în soluție, perpendicular pe suprafața de separare atunci $i$=0 și din legea refracției $\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin r = 0 \Rightarrow r$=0, iar din legea reflexiei $i = r'$=0

**b.** Conform legii refracției $n\sin i = \sin 90 \Rightarrow \sin i = 1/n \approx$=0,714. Unghiul limită pentru care raza se refractă sub un unghi de 90⁰ este sinℓ=0,714.

**c.** Deoarece cos$r$=0,8 atunci $\sin r = \sqrt{1-\cos^2 r}$ =0,6 și din legea refracției $\sin i = n\sin r$ =0,84

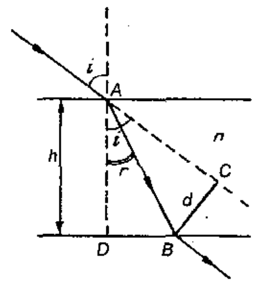
**d.** Pentru tg$x$ și din $tgx = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ sinusul unghiului de incidență este

$\sin x = \dfrac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} \approx$0,768. Cum sin$x$>sinℓ⇒$x$>ℓ, deoarece ungiul de incidență la suprafața de separare soluție-apă, este mai mare decât unghiul limită raza fasciculului laser suferă fenomenul de reflexie totală.

**16.a.** Conform legii refracției scrisă pentru prima față a lamei: $\sin i = n\sin r \Rightarrow \sin r = \dfrac{\sin i}{n} \Rightarrow r$=30⁰

**b.** Raza de lumină care cade pe fața superioară a lamei suferă fenomenul de refracție și se apropie de normală, pentru ca la refracția pe fața inferioară să emeargă din lamă sub același unghi sub care a intrat. Raza emergentă este paralelă cu cea incidentă, dar va fi deplasată față de aceasta. În

$\Delta ABC: \sin(i-r) = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB\sin(i-r)$, iar în

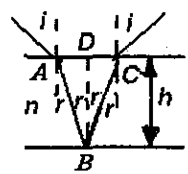



$\Delta ADB: \cos r = \dfrac{h}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{h}{\cos r} \Rightarrow BC = \dfrac{h\sin(i-r)}{\cos r}$

Din $\sin i = n\sin r \Rightarrow \cos r = \sqrt{1-\dfrac{\sin^2 i}{n^2}} = \dfrac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n}$.

$$BC = h\frac{(\sin i\cos r - \cos i\sin r)}{\cos r} = h\left(\sin i - \frac{\cos i\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right).$$

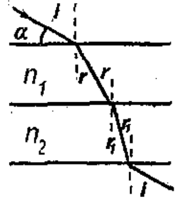
$$BC = h\sin i\left(1-\frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right) \approx 4{,}5 \text{ mm}.$$




**c.** Raza de lumină care cade pe fața inferioară a lamei se reflectă deoarece această față este argintată. Conform legii reflexiei raza se reflectă sub un unghi de reflexie egal cu unghiul de incidență pe fața inferioară $r$, ca în figura alăturată. Această rază cade pe fața superioară sub unghiul $r$ și emerge sub unghiul $i$. Din geometrie $AC$=2$AD$. În $\Delta ABD$:

$$tgr = \frac{AD}{h} \Rightarrow AD = htgr \Rightarrow AC = 2htgr \approx 1{,}73 \text{ cm}$$

**17.a.** Din legea refracţiei: $\sin i = n_1 \sin r \Rightarrow \sin r = \dfrac{\sin i}{n_1}$.




Deoarece $i$=90°-α=60°, astfel că obţinem sin$r$≈0,65

**b.** Din legea refracţiei: scrisă la feţele de separaţie aer-apă, apă-sticlă şi sticlă-aer obţinem:

$\sin i = n_1 \sin r = n_2 \sin r_1 = \sin i' \Rightarrow i = i'$. Prin urmare raza emergentă la ieşirea din cuvă prin faţa inferioară este paralelă cu raza incidentă pe suprafaţa apei ca în figură.

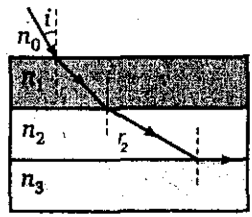
**c.** Pe baza legii refracţiei scrisă la suprafaţa de separare sticlă-sticlă flint $n_2 \sin r_1 = n_3 \sin r_3$ şi din $\sin i = n_2 \sin r_1$ obţinem $\sin i = n_3 \sin r_3 \Rightarrow$

$\sin i = n_3 \sin r_3 \Rightarrow \sin r_3 = \dfrac{\sin i}{n_3} \Rightarrow r_3$=30°

**18.a.** Din legea refracţiei pentru suprafaţa de separaţie dintre aer şi regiunea cu indicele de refracţie $n_1$ obţinem: $\sin i = n_1 \sin r_1 \Rightarrow \sin r_1 = \dfrac{\sin i}{n_1} \Rightarrow r_1$=30°

**b.** Din legea refracţiei pentru suprafaţa de separaţie dintre regiunile 1 şi 2 obţinem $n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 \Rightarrow n_1 \sin r_1 = \dfrac{n_1}{k} \sin r_2 \Rightarrow k = \dfrac{\sin r_2}{\sin r_1} \approx 1{,}73$

**c.** Aplicăm legea refracţiei succesiv, astfel că: $n_0 \sin i = n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 = n_3 \sin 90°$.

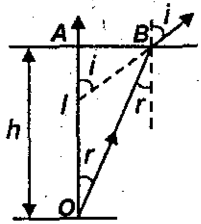



Cum $n_3 = \dfrac{n_2}{k} = \dfrac{n_1}{k^2}$ obţinem :

$n_0 \sin i = \dfrac{n_1}{k^2} \Rightarrow n_0 = \dfrac{n_1}{k^2 \sin i} \approx 1{,}81$

**19.a.** Pentru a construi imaginea punctului obiect $O$, sunt necesare două raze de lumină. O rază cade perpendicular pe suprafaţa apei şi părăseşte apa pe aceeaşi direcţie şi o altă rază de lumină care cade pe suprafaţa apei sub unghiul $r$ şi apoi se depărtează de normală în aer (deoarece raza iese în aer, un mediu mai puţin dens decât apa). Imaginea punctului obiect se formează în punctul $I$, unde se întâlnesc prelungirile razelor de lumină şi este o imagine virtuală, fiind situată mai aproape de suprafaţa apei.

La suprafaţa de separare aer–apă legea refracţiei este:




$n \sin r = \sin i$. În $\Delta AOB$: $tg\, r = \dfrac{AB}{h} \Rightarrow AB = h \cdot tg\, r$

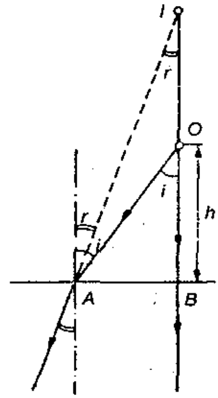
$tgr = \dfrac{\sin r}{\cos r} = \dfrac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}} = \dfrac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \Rightarrow AB = \dfrac{h \sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$

În $\Delta AIB$: $tg\, i = \dfrac{AB}{AI} \Rightarrow AI = \dfrac{AB}{tg\, i} = \dfrac{h \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \approx 1{,}97$ m.

**b.** Distanța dintre piatră și imaginea ei este $OI=AO-AI$

$$OI = h\left(1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right) = 2{,}03 \text{ m}.$$

**c.** Dacă omul privește perpendicular pe suprafața apei $i=0 \Rightarrow r=0 \Rightarrow AI=\frac{h}{n}$, iar $OI = h\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$ m. În cazul incidenței normale stratul de apă cu grosimea $h$ și indicele de refracție $n$ apropie imaginea de suprafața de separare aer–apă cu $d = h\left(1-\frac{1}{n}\right)$.



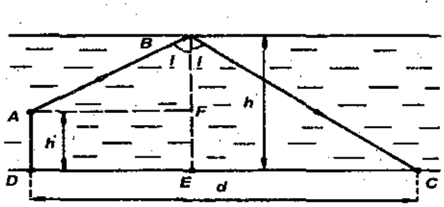

**20.a.** Pentru a construi imaginea ochilor observatorului se utilizează două raze: o rază perpendiculară pe suprafața apei pătrunde în apă pe aceeași direcție și o rază care cade sub un unghi de incidență $i$ și se refractă apropiindu-se de normală. Prelungirile celor două raze se întâlnesc, formând o imagine virtuală în punctul $I$.

În $\Delta IAB$: $tgr = \frac{AB}{IB} \Rightarrow IB = \frac{AB}{tgr}$ și în $\Delta OAB$: $tgi = \frac{AB}{h_1} \Rightarrow AB = h_1 tgi$ și astfel $IB = h_1 \frac{tgi}{tgr}$

Cum scafandrul privește perpendicular, unghiurile sunt mici și putem aproxima tangenta cu sinusul unghiului, astfel încât $IB \approx h_1 \frac{\sin i}{\sin r}$.

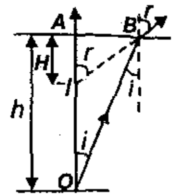
Din legea refracției $\sin i = n \sin r \Rightarrow IB = nh_1$ și deci imaginea virtuală a ochilor observatorului se va forma mai departe decât sunt în realitate ochii acestuia

**b.** Deoarece observatorul vede ochii scafandrului atunci când privește normal imaginea acestora se află față de suprafața apei la distanța $h'_{om} = h_{om} / n$ =45 cm, deoarece ochii scafandrului se află situați față de suprafața apei la distanța $h_{om}$=$h$-$h'$=60 cm. Astfel distanța dintre observator și adâncimea la care vede observatorul ochii scafandrului este $d$=$h_1$+$h_{om}$=93 cm




**c.** Scafandrul vede imaginile obiectelor mai intens prin reflexie totală. Dacă un obiect se află la distanța $d$ de scafandru raza de lumină se propagă ca în figură. Astfel $d = DE + EC$. În $\Delta ABF$: $tg\ell = \frac{AF}{h-h'}$, iar în $\Delta BEC$: $tg\ell = \frac{EC}{h}$, unde $\ell$ reprezintă este unghiul limită, astfel că $d = (2h-h')\cdot tg\ell$.

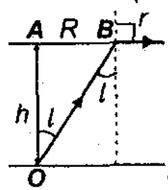
Conform legii refracției, ținând cont că $n\sin \ell = 1$, atunci $tg\,\ell = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \Rightarrow d = \dfrac{2h-h'}{\sqrt{n^2-1}} \approx 3{,}4$ m.

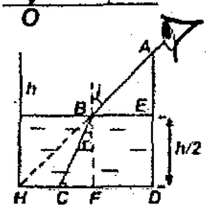


**21.a.** Imaginea sursei de lumină în situația când sursa este privită din afara bazinului, pe verticala ce trece prin sursă este virtuală ca în figură. Deoarece $tgr = \dfrac{AB}{H}$ și $tgi = \dfrac{AB}{h}$ prin împărțirea relațiilor obținem $\dfrac{tgi}{tgr} = \dfrac{H}{h} \approx \dfrac{\sin i}{\sin r}$, deoarece unghiurile $i$ și $r$ sunt foarte mici și se aproximează tangenta cu sinusurile. Din legea refracției $n\sin i = \sin r \Rightarrow n = \dfrac{h}{H} = \dfrac{4}{3}$

**b.** Din legea refracției $n\sin i = \sin r \Rightarrow \sin i = \dfrac{\sin r}{n} = 0{,}6$

**c.** Dacă unghiul de refracție devine $r=90°$, raza de lumină se refractă paralel cu suprafața apei. Orice rază de lumină care cade pe suprafața apei sub un unghi de incidență mai mic decât unghiul limită iese din apă, în timp ce razele incidente sub unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită suferă fenomenul de reflexie totală și nu pot ieși prin suprafața apei. Astfel pe suprafața apei se va observa un cerc luminos cu centrul pe verticala sursei. Din legea refracției la suprafața apei cu $r=90°$ obținem: $n\sin \ell = \sin 90° = 1 \Rightarrow \sin \ell = \dfrac{1}{n}$, astfel că $tg\ell = \dfrac{\sin \ell}{\sqrt{1-\sin^2 \ell}}$. Din geometrie $tg\ell = \dfrac{R}{h} \Rightarrow R = htg\ell = \dfrac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 1{,}36$ m

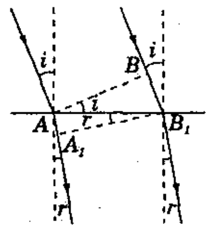




**22.a.** Privind sub unghiul de incidență $i$, copilul vede fundul vasului în punctul $H$ și nu în punctul $C$ unde se află moneda. Când se toarnă apă, raza de lumină se propagă ca în figură, astfel că: $DC=DF+FC=BE+FC$. În $\Delta BCF$: $tgr = \dfrac{CF}{DE} \Rightarrow CF = \dfrac{htgr}{2}$ și în $\Delta ABE$: $tgi = \dfrac{BE}{AE} \Rightarrow$ $BE = AEtgi = \dfrac{htgi}{2}$, astfel că obținem $DC = \dfrac{h}{2}(tgi + tgr)$.

Cum $\sin i = n\sin r$, conform legii refracției $\sin r = \dfrac{\sin i}{n}$. Cum $\mathrm{tg}\, r = \dfrac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$ obținem $DC = \dfrac{h}{2}\left(\mathrm{tg}\, i + \dfrac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}\right) \approx 1{,}73$ cm.

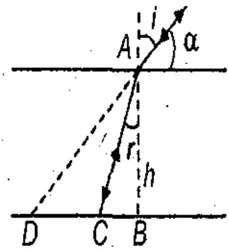
**b.** Din desen, pe baza legii refracției se observă că diametrul fasciculului în mediul optic mai dens (apă) este mai mare decât diametrul fasciculului în mediul optic mai puțin dens (aer). Din geometrie în $\Delta ABC$: $\cos i = \frac{d_{aer}}{AB}$ şi în $\Delta ADB$: $\cos r = \frac{d_{apă}}{AB}$. Prin împărţirea celor două relații obținem: $\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{d_{aer}}{d_{apa}} \Rightarrow d_{apa} = d_{aer}\frac{\cos r}{\cos i}$.




Pe baza legii refracției $\sin i = n \sin r$, astfel că $\cos r = \sqrt{1-\sin^2 r} = \sqrt{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n}$. Obținem :

$$d_{apa} = \frac{d_{aer}\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n\cos i} \approx 4{,}28 \text{ cm}.$$

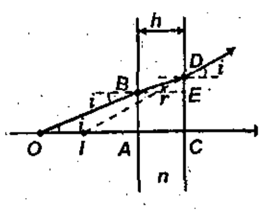
**c.** Bețişorul atinge fundul vasului în punctul $D$, deoarece copilul introduce bețişorul spre monedă sub unghiul sub care vede el moneda. Raza de lumină îşi schimbă direcția de propagare atunci când atinge suprafața apei datorită fenomenului de refracție. Prin urmare raza de lumină atinge fundul vasului în punctul $C$. Conform legii refracției $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n}$, cu $i$=30°. În $\Delta ABC$: $tg\ r = \frac{CB}{h_1} \Rightarrow CB = h_1 \cdot tgr$ cu $h_1=h/2$ şi în $\Delta ADB$: $tg\ i = \frac{DB}{h_1} \Rightarrow DB = h_1 \cdot tgi$. Astfel distanța dintre punctul unde va atinge un bețişor fundul vasului şi monedă este: $DC = DB - CB = h_1(tg\ i - tg\ r)$.




$tgr = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\sin r}{\sqrt{1-\sin^2 r}} = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$. Distanța dintre punctul unde va atinge un bețişor fundul vasului şi monedă este $DC = h_1(tg\ i - \frac{\sin i}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}) \approx 1{,}735$ cm

**23.a.** Pentru a construi imaginea punctului obiect utilizăm două raze de lumină. O rază cade perpendicular pe lamă şi se refractă pe aceeaşi direcție, în timp ce a doua rază cade sub un unghi de incidență $i$ şi emerge din lamă sub acelaşi unghi. Prelungirile cele două raze se intersectează în punctul $I$, unde se va forma imaginea virtuală a obiectului $O$.

Din desen: $OI=OC-IC=OA+h-IC$.




În $\Delta OBA$: $tgi = \frac{AB}{OA} \Rightarrow OA = \frac{AB}{tgi}$ şi în $\Delta IDC$: $tgi = \frac{DC}{IC} \Rightarrow IC = \frac{DC}{tgi} \Rightarrow OI = h - \frac{DC-AB}{tgi} = h - \frac{DE}{tgi}$

Dar în $\Delta BED$: $tgr = \frac{DE}{h} \Rightarrow DE = h \cdot tg\, r \Rightarrow$

$OI = h\left(1 - \frac{tg\, r}{tg\, i}\right)$. Deoarece unghiurile $i$ şi $r$ sunt mici, putem aproxima tangenta cu sinusul, astfel că $OI \approx h\left(1 - \frac{\sin r}{\sin i}\right)$. Conform legii refracţiei $\sin i = n \sin r$ obţinem $OI = h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ cm. Deci o lamă cu feţe plan paralele de grosime $h$ şi indice de refracţie $n$, apropie obiectul de lamă cu $h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, formându-i o imagine virtuală. Apropierea imaginii este independentă de poziţia obiectului.

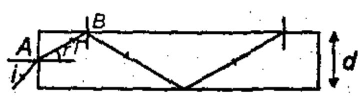
**b.** Lama cu feţe plan.paralele formează pentru obiectul situat pe faţa ei inferioară o imagine virtuală situată mai aproape de faţa inferioară cu $h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, astfel că imaginea finală se formează faţă de faţa superioară la distanţa $h - h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{h}{n} = 2$ cm

**c.** Prima lamă apropie obiectul de faţa superioară a sistemului de lame cu $h_1\left(1 - \frac{1}{n_1}\right)$, iar această imagine joacă rol de obiect pentru cea de-a doua lamă, care la rândul ei apropie noua imagine cu $h_2\left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$ şi aşa mai departe, astfel încât apropierea finală va fi $d = h_1\left(1 - \frac{1}{n_1}\right) + h_2\left(1 - \frac{1}{n_2}\right) + \cdots + h_n\left(1 - \frac{1}{n_n}\right)$.

Cum obiectul se află faţă de suprafaţa lamei "$n$" la distanţa $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, imaginea se va forma faţă de suprafaţă lamei "$n$" la: distanţa $h - d = \frac{h_1}{n_1} + \frac{h_2}{n_2} + \cdots + \frac{h_n}{n_n}$.

**24.a.** Conform legii refracţiei $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow r = 30^\circ$

**b.** Unghiul de incidenţă pe suprafaţa cilindrică este $\alpha = 90^\circ - r = 60^\circ$.

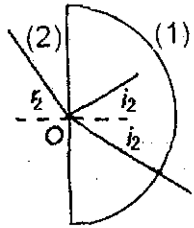



**c.** Deoarece unghiul limită se află din:

$n \sin \ell = 1 \Rightarrow \sin \ell = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell = 45^\circ$. Cum $\alpha > \ell$, înseamnă că pe feţele cilindrice raza de lumină suferă fenomenul de reflexie totală. Distanţa parcursă de rază de-a lungul fibrei optice între două reflexii consecutive este

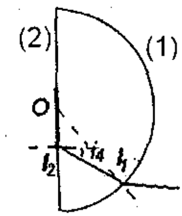
$2d_1$ atunci după $N$-1 reflexii, distanța parcursă va fi $2(N-1)d_1$ şi cum după prima reflexie este parcursă distanța $d_1$ atunci în total distanța parcursă de-a lungul fibrei este $D = d + (N-1)2d_1 = d_1(2N-1)$.

În $\Delta ABC$: $tgr = \frac{d}{2d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{d}{2tgr} \Rightarrow D = \frac{d\sqrt{3}}{2}(2N-1) \approx 67{,}47$ cm.




**25.a.** Raza de lumină pătrunde în cilindru pe direcția incidentă deoarece $i_1$=0 şi din legea refracției $\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow r_1$=0.

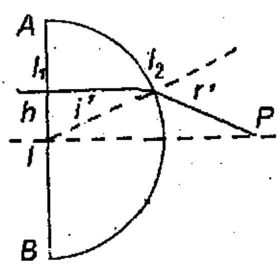
**b.** Din desen se observă că unghiul dintre raza incidentă şi cea reflectată pe fața (2) este $\alpha=2i_2$. Pe baza legii refracției: $n \sin i_2 = \sin r_2 \Rightarrow \sin i_2 = \frac{\sin r_2}{n} \Rightarrow i_2 = 30^0 \Rightarrow \alpha = 60^0$




**c.** Din desen pe baza legii refracției la fața a doua (2) obținem: $n \sin i_4 = \sin 90 \Rightarrow \sin i_4 = \frac{1}{n}$. Unghiul de incidență $i_4$ pe suprafața (2) este $i_4$=45$^0$

**d.** Mersul razei de lumină prin semicilindru în condițiile punctului **c.** este redată în figura alăturată.

**26.a.** Unghiul de incidență este format de rază cu normala construită în punctul de contact, astfel că $i_1$=60$^0$. Din legea refacției scrisă la suprafața plană obținem $\sin i_1 = n \sin r_1 \Rightarrow r_1$=30$^0$. Deoarece raza refractată se propagă pe direcția razei semicilindrului, ea cade pe suprafața sferică sub un unghi de incidență $i_2$=0 şi pe baza legii refacției scrisă la fața sferică $n \sin i_2 = \sin r_2 \Rightarrow r_2$=0. Prin urmare raza iese din semicilindru pe direcția razei din acesta.



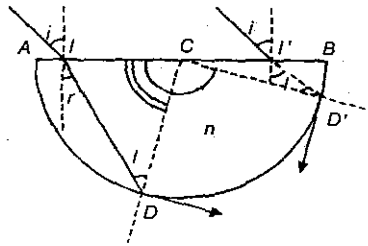

**b.** Raza normală pe suprafața $AB$ pătrunde pe aceeaşi direcție în semicilindru deoarece $i$=0$\Rightarrow r$=0. Această rază cade pe fața cilindrică sub unghiul $i'$ astfel că $\sin i' = \frac{h}{R} = 0{,}5 \Rightarrow i' = 30^0$. Din legea refracției la suprafața cilindrică $n \sin i' = \sin r' \Rightarrow r' = 60^0$

**c.** Din geometrie $I_2PI = r' - i' = 30^0$ şi cum $I_2IP = i'$ atunci se observă că $I_2PI = I_2IP$. Astfel $\Delta I_2IP$ este isoscel. Din geometrie obținem $IP = 2I_1I_2$. Dar $\cos i' = \frac{I_1I_2}{R} \Rightarrow I_1I_2 = R\cos i' \Rightarrow$

$IP = 2R\cos i' \approx 8{,}66$ cm

**27.a.** Aflăm unghiul sub care intră raza de lumină în semicilindru, utilizând legea refracției: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 30°$

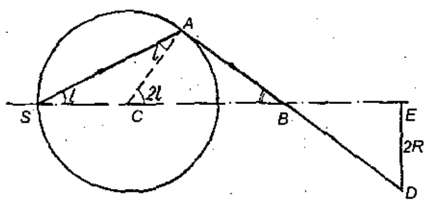
**b.** Raza de lumină $ID$ poate emerge din semicilindru dacă unghiul sub care iese în aer este $r$=90. Conform legii refracției la fața cilindrică $n\sin\ell = \sin 90^\circ$ obținem unghiul limită $\sin\ell = \frac{1}{n} \Rightarrow \ell = 45^\circ$




**c.** Considerăm raza care cade pe suprafața plană în punctul $I$ și se refractă ca în figură, ieșind pe suprafața cilindrică sub un unghi de 90⁰. Astfel unghiul $IDC=\ell \Rightarrow$ $ICD = 180^\circ - \ell - CID = 75^0$. Razele de lumină care pătrund în semicilindru și cad pe porțiunea $AD$ au unghiul de incidență mai mare decât valoarea unghiului limită și prin urmare nu ies din suprafața cilindrică, pentru că suferă fenomenul de reflexie totală.

Considerăm raza care cade pe suprafața plană în punctul $I'$ și se refractă ca în figură, ieșind pe suprafața cilindrică sub un unghi de 90⁰. Astfel unghiul $I'D'C = \ell \Rightarrow I'CD' = 180 - \ell - CI'D' = 15^0 \Rightarrow ICD' = 165^0$.

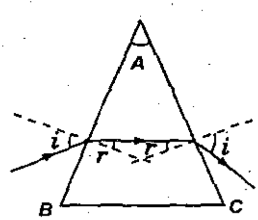
Razele de lumină care cad pe suprafața cilindrică $BD'$, suferă fenomenul de reflexie totală, deoarece razele cad sub un unghi de incidență mai mare decât valoarea unghiului limită. Deci razele de lumină pot emerge din semicilindru dacă $75^0 \le ICD \le 165^0$




**28.a.** La trecerea razei din sferă în aer unghiul limită se obține când $r$=90. Conform legii refracției: $n\sin\ell = \sin 90^\circ$ obținem unghiul limită $\ell$=30⁰

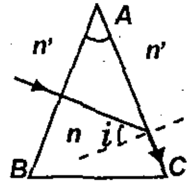
**b.** Raza de lumină care poate emerge din sferă cade pe suprafața sferei sub unghiul limită $\ell$. Razele emergente se stâng în dreapta sferei în punctul $B$. Triunghiul $SCA$ este isoscel, astfel că $SAC = CSA = \ell \Rightarrow$ unghiul $ACB = 2\ell$ =60⁰. În $\Delta ABC$ $\cos(2\ell) = \frac{R}{CB} \Rightarrow CB = \frac{R}{\cos(2\ell)} = 2R = 20$ cm. Distanța este $SB=SC+CB=3R$=30 cm

**c.** Deoarece raza fascicului emergent din sferă, este egală cu dublul razei sferei atunci din $\Delta DBE$ $tg\alpha = \frac{2R}{BE} \Rightarrow BE = \frac{2R}{tg\alpha}$, unde $\alpha=EBD$=30⁰ obținem $BE = 2R\sqrt{3}$, astfel că $CE = CB + BE = 2R(1+\sqrt{3}) \approx 54{,}6$ cm




**29.a.** Deoarece deviația razei de lumină este minimă, înseamnă că propagarea razei prin prismă este simetrică, astfel că $r' = r$, iar cum $A = r + r' \Rightarrow A = 2r \Rightarrow r = \frac{A}{2} = 30^\circ$ deoarece triunghiul $ABC$ este echilateral. Conform legii refracției la fața $AB$: $\sin i = n\sin r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow i = 60^\circ$.

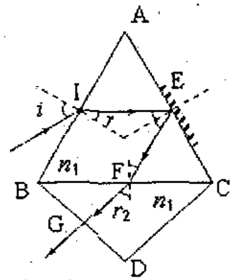
**b.** Unghiul de deviație minimă este $\delta_{min} = 2i - A = 60°$.




**c.** Deoarece raza de lumină cade perpendicular pe fața $AB$ ca în figură ea pătrunde în prismă pe aceeași direcție pentru că din legea refracției $n' \sin i = n \sin r$, cum $i=0 \Rightarrow r=0$. Pe fața $AC$ raza cade sub un unghi de incidență $i=A=60°$. Pe baza legii refracției $n \sin A = n'$ obținem $n' = 1{,}5$

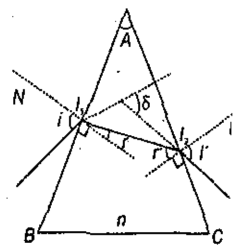
**30.a.** Deoarece raza de lumină se propagă prin prismă simetric, atunci $r = \dfrac{A}{2} = 30°$. Cunoscând valoarea $i = 60°$ și scriind legea refracției la prima

față: $\sin i = n_1 \sin r \Rightarrow n_1 = \dfrac{\sin i}{\sin r} \approx 1{,}73$




**b.** Raza de lumină cade pe $AC$ sub un unghi $r = 30°$ și se reflectă sub același unghi, astfel că raza $EF$ cade pe $BC$ sub un unghi de incidență $i_1 = 30°$ deoarece $EF$ este paralelă cu $AB$. Din legea refracției la fața $BC$ $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin r_2 \Rightarrow \sin r_2 = \dfrac{n_1 \sin i_1}{n_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r_2 = 45°$ și deci raza $FG$ va fi paralelă cu latura $CD$ a prismei $BCD$ și cade perpendicular pe fața $BD$ ieșind din această prismă tot perpendicular pe $BD$.

**c.** Mersul razelor de lumină prin ansamblul prismelor este redat în figura alăturată.




**31.a.** Pentru ca o rază să emeargă din prismă trebuie ca $i' \leq 90° \Rightarrow r' \leq \ell$, unde $\ell$ este unghiul limită. Cum $A = r + r'$ $\Rightarrow r' = A - r \Rightarrow A - r \leq \ell \Rightarrow A - \ell \leq r \Rightarrow \sin(A - \ell) \leq \sin r$.

Conform legii refracției la prima față $AB$, obținem: $\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \dfrac{\sin i}{n} \Rightarrow \sin(A - \ell) \leq \dfrac{\sin i}{n}$, relație valabilă pentru orice valoare a unghiului de incidență, deci și pentru $i = 0 \Rightarrow \sin(A - \ell) \leq 0 \Rightarrow A \leq \ell$.

Determinăm valoarea unghiului limită din $n \sin \ell = 1 \Rightarrow \sin\ell = 1/n = 1/2 \Rightarrow$ $\ell = 30° \Rightarrow$ dacă unghiul prismei este mai mic sau cel mult egal cu $30°$, orice rază de lumină incidentă pe fața $AB$ emerge din prismă pe fața $AC$.

**b.** Pentru ca nici o rază de lumină să nu iasă din prismă, trebuie ca

$r' > \ell \Rightarrow A - r > \ell \Rightarrow A - \ell > r \Rightarrow \sin(A - \ell) > \sin r \Rightarrow \sin(A - \ell) > \dfrac{\sin i}{n}$,

pentru orice valoare a unghiului $i$, deci și pentru $i=90°$, astfel că

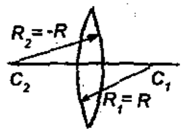
$\sin(A - \ell) > \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sin(A - \ell) > \sin \ell \Rightarrow A - \ell > \ell \Rightarrow A > 2\ell \Rightarrow A > 60° \Rightarrow$ dacă

unghiul prismei este mai mare decât $60°$, atunci nici o rază incidentă pe fața $AB$ nu va emerge din prismă pe fața $AC$.

## 1.2. Lentile

**1.a.** Pe baza formulei convergența este $C=\frac{1}{f}=3{,}33\ \text{m}^{-1}$

**b.** Aplicăm formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=90\ \text{cm}\Rightarrow$ imaginea este reală.

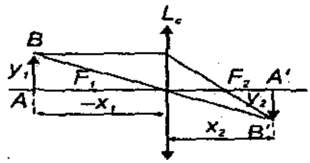



**c.** Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{f+x_1}=-2.$

**d.** $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}=\frac{1}{f}\Rightarrow |R|=2f(n-1)=30\,\text{cm}.$

**2.a.** Calculăm unde formează lentila imaginea obiectului inițial. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$. Cum $x_1=-d=-40$ cm obținem $x_2$=40 cm. Inițial ecranul trebuie așezat la 40 cm în spatele lentilei.

**b.** Când obiectul se apropie cu 10 cm de lentilă aflăm unde formează lentila imaginea noului obiect. Pentru $x_1'=-30$ cm $\Rightarrow x_2'=60$ cm $\Rightarrow$ ecranul se va depărta de lentilă cu $\Delta x_2=x_2'-x_2=20$ cm.

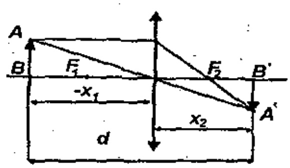



**c.** Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta\cdot y_1$ iar din $\beta'=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{y_2'}{y_1'}\Rightarrow y_2'=\beta'\cdot y_1\Rightarrow\frac{y_2'}{y_2}=\frac{\beta'}{\beta}.$

Cum $\beta'=-2$ și $\beta=-1\Rightarrow\frac{y_2'}{y_2}=2\Rightarrow$ imaginea se mărește de 2 ori când obiectul se apropie.

**3.a.** Deoarece lentila formează o imagine reală și de 3 ori mai mare decât obiectul, atunci $\beta$=−3. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=\beta\cdot x_1$ și

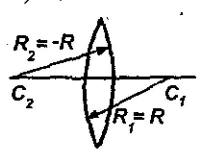
$d=x_2-x_1=x_1(\beta-1)\Rightarrow x_1=\frac{d}{\beta-1}\Rightarrow$ distanța de la lentilă la imagine este $x_2=\frac{\beta\cdot d}{\beta-1}$=60 cm



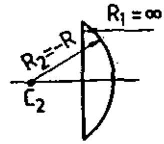

**b.** Pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\Rightarrow f=-\frac{\beta d}{(\beta-1)^2}$=15 cm

**c.** Din formula convergenței obținem:

$C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}=\frac{1}{f}\Rightarrow n=1+\frac{|R|}{2f}\approx 1{,}67$

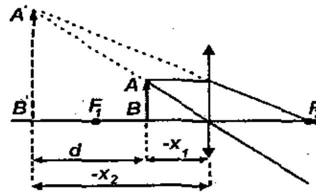


**4.a.** Lentila fiind plan-convexă are convergența:




$C=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$ şi cum $R_1\to-\infty$ şi $R_2=-|R|\Rightarrow C=\dfrac{n-1}{|R|}$

$\Rightarrow n=C|R|+1$. Din grafic $C=2$ m$^{-1}$ şi $|R|=30$ cm. Obținem indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila $n$=1,6.




**b.** Distanța focală a lentilei este $f$=1/$C$=50 cm. Deoarece $x_1=-30$ cm şi din formula lentilelor subțiri $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}=-75$ cm.

Deoarece $x_2$<0 imaginea obiectului se formează în fața lentilei şi este virtuală

**c.** Mărirea liniară transversală este $\beta=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{f}{f+x_1}$=2,5

**5.a.** Din grafic se observă că $\beta=-3$ când $x_1=-1$ m. Cum mărirea liniară transversală este $\beta=\dfrac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=\beta x_1$ şi din formula lentilelor subțiri

$\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow\dfrac{1}{\beta\cdot x_1}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow f=\dfrac{\beta\cdot x_1}{1-\beta}=75$ cm.

**b.** Din formula convergenței $C=\left(\dfrac{n}{n'}-1\right)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$ cum lentila se introduce într-un mediu cu indicele de refracție egal cu cel al ei, $n=n'$, atunci $C$=0 şi prin urmare distanța focală a lentilei devine infinită

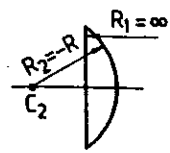
**c.** Cum $x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}$ atunci $\beta=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{f}{f+x_1}$=−0,5

**6.a.** Mărirea liniară transversală a lentilei este $\beta=\dfrac{x_2}{x_1}$ şi din formula lentilelor subțiri $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $f=\dfrac{\beta\cdot x_1}{1-\beta}$. Din grafic $x_1$=−1 m şi 1/$\beta$=−3 determinăm $f$=25 cm

**b.** Deoarece $x_1$=-75 cm iar $x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}$, mărirea liniară transversală a lentilei este $\beta=\dfrac{f}{f+x_1}=-\dfrac{1}{2}$

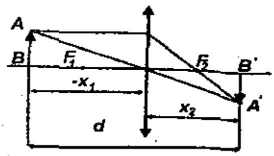
**c.** Deoarece lentila este plan-convexă atunci pe baza formulei convergenței $C=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$, cum $R_1\to-\infty$ şi $R_2=-|R|\Rightarrow C=\dfrac{n-1}{|R|}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow n=1+\dfrac{|R|}{f}$=1,6

**7.a.** Utilizăm formulele convergenţei: $C=\dfrac{1}{f}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$.




Cum $R_1\to-\infty$ şi $R_2=-|R|\Rightarrow\dfrac{1}{f}=\dfrac{n-1}{|R|}\Rightarrow n=1+\dfrac{|R|}{f}=1{,}6$.

**b.** Deoarece imaginea se obţine pe ecran, este o imagine reală şi răsturnată Astfel din datele problemei $\beta$=-1/3.




Cum $\beta=\dfrac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=\beta x_1$. Pe baza formulei lentilelor

subţiri obţinem: $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow\dfrac{1}{\beta x_1}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow$

$x_1=\dfrac{f(1-\beta)}{\beta}$ şi $x_2=f(1-\beta)$. Din desen $d=-x_1+x_2=-\dfrac{f(\beta-1)^2}{\beta}=40\,\text{cm}$

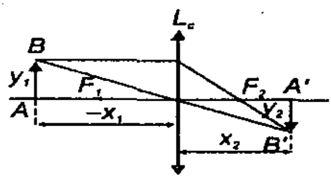
**c.** Dacă lentila se scufundă într-un mediu cu indice de refracţie $n_a$ atunci convergenţa lentilei devine $C=\left(\dfrac{n}{n_a}-1\right)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)=\dfrac{(n-n_a)}{n_a|R|}\approx 4{,}44\ \text{m}^{-1}$

**8.a.** Din formula distanţei focale a lentilei: $\dfrac{1}{f}=(n-1)\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$ obţinem

$f=\dfrac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}$=15 cm, deoarece $R_1$=3 cm şi $R_2$=5 cm. Întrucât distanţa focală este pozitivă, lentila este convergentă.

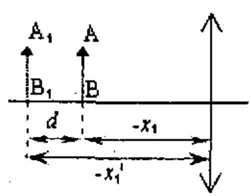
**b.** Aplicăm formula lentilelor subţiri: $\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}\Rightarrow x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}=22{,}5$ cm.

**c.** Mărirea liniară transversală este $\beta=\dfrac{x_2}{x_1}=-\dfrac{1}{2}$




şi cum $\beta=\dfrac{y_2}{y_1}$ înălţimea $y_2$ a imaginii este $y_2=\beta\cdot y_1=-2\,\text{cm}$. Imaginea este reală, răsturnată şi mai mică decât obiectul de două ori.

**9.a.** Deoarece măririle liniare transversale sunt negative, imaginile formate de lentilă sunt reale şi prin urmare lentila este convergentă. Mărirea liniară transversală este: $\beta_1=\dfrac{x_2}{x_1}$. Conform formulei

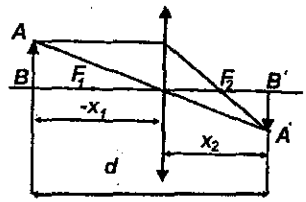



lentilelor subţiri: $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow\ x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}$ şi din

$\beta=\dfrac{f}{f+x_1}$ obţinem $x_1=\dfrac{f(1-\beta)}{\beta}$. Conform datelor problemei: $x_1=\dfrac{f(1-\beta_1)}{\beta_1}$ şi

$x_1' = \frac{f(1-\beta_2)}{\beta_2}$. Conform relațiilor între segmente obținem: $-x_1' = d - x_1 \Rightarrow$

$$-x_1' = d - x_1 \Rightarrow d = x_1 - x_1' = \frac{f(1-\beta_1)}{\beta_1} - \frac{f(1-\beta_2)}{\beta_2} \Rightarrow$$




$$d = \frac{f(\beta_2 - \beta_1)}{\beta_1\beta_2} \Rightarrow f = \frac{d\beta_1\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = 40 \text{ cm}.$$

Deoarece $f > 0$ lentila este convergentă.

**b.** Din desen $d = -x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = d + x_1$.

Conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow$

$$\frac{1}{d + x_1} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow -df = x_1(d + x_1) \Rightarrow x_1^2 + x_1 d + df = 0 \Rightarrow \Delta = d^2 - 4df = d(d - 4f).$$

Pentru a obține soluții reale pentru $x_1$, trebuie ca $\Delta \geq 0 \Rightarrow d - 4f \geq 0 \Rightarrow d \geq 4f \Rightarrow$ distanța minimă dintre obiect și imaginea sa reală este $d_{min} = 4f = 160$ cm. În acest caz ecuația de gradul doi admite o singură soluție $x_1 = -\frac{d}{2} = -2f$. Dacă obiectul se află în fața lentilei convergente, la dublul distanței focale, imaginea va fi reală, răsturnată la fel de mare ca obiectul și situată în spatele lentilei la dublul distanței focale. În acest caz se obține distanța minimă de la obiect la imaginea sa reală care este de patru ori mai mare decât distanța focală a lentilei convergente.

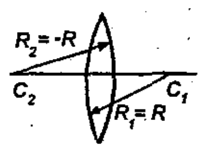
**c.** Deoarece $x_2 = 2f \Rightarrow \beta = \frac{x_2}{x_1} = -1$.

**10. a.** Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2} = 12$ cm

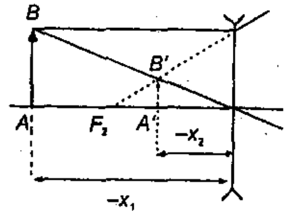
**b.** Din $\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y_2 = \frac{y_1 x_2}{x_1} = -2$ cm, deoarece imaginea obținută cu ajutorul lentilei este reală și răsturnată

**c.** Deoarece obiectul trebuie să fie îndepărtat foarte mult de lentila introdusă în cuvă, atunci $x'_1 \to \infty$, astfel că din $\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = x'_2 = 20$ cm, deoarece imaginea se formează în același loc ca înainte. Convergența lentilei introdusă în cuvă este $C' = 1/f' = 5$ m$^{-1}$

**d.** Din formula convergenței a unei lentile $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f}$, deoarece $R_1 = -R$ și $R_2 = R$, obținem $|R| = 2f(n-1) = 12$ cm



**11.a.** Convergența lentilei este $C=1/f \approx 14{,}285\ \text{m}^{-1}$




**b.** Din formula lentilelor subțiri: $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}\Rightarrow$

$x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}=-5{,}6$ cm. Imaginea obiectului obținută cu lentila divergentă este virtuală ca în figură.

**c.** Din formula măririi liniare transversale

$\beta=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{f}{f+x_1}$ și cum $\beta=\dfrac{y_2}{y_1}$ obținem înălțimea $y_2$ a imaginii

$$y_2=\beta\cdot y_1=\frac{f\cdot y_1}{f+x_1}=1\ \text{cm}$$

**12.a.** Din formula măririi liniare transversale $\beta=\dfrac{y_2}{y_1}=0{,}5$, deoarece imaginea fiind virtuală este dreaptă.

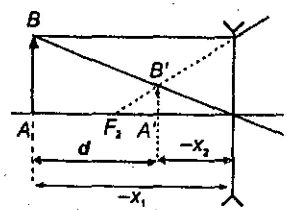
**b.** Deoarece mărirea liniară transversală este: $\beta_1=\dfrac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri: $\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $x_2=\dfrac{fx_1}{f+x_1}$ astfel că $\beta=\dfrac{f}{f+x_1}$. În final obținem $x_1=\dfrac{f(1-\beta)}{\beta}=-40$ cm

**c.** Dacă $x'_1=-60$ cm obținem $x'_2=\dfrac{fx'_1}{f+x'_1}=-24$ cm, deci imaginea se formează în fața lentilei la 24 cm de aceasta

**13.a.** Distanța focală a lentilei este $f=1/C=-20$ cm

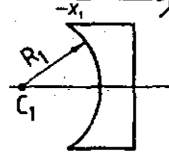
**b.** Din desen $-x_1=d-x_2\Rightarrow x_2=d+x_1$ și din formula lentilelor subțiri:

$\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0\Rightarrow$




$$x_1^2+x_1d+df=0\Rightarrow x_1=\frac{-d-\sqrt{d^2-4df}}{2}=-30\ \text{cm}$$

**c.** Utilizăm formulele convergenței



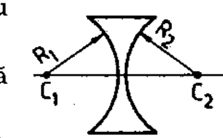

$$C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow\frac{1}{f}=-\frac{n-1}{|R|}\Rightarrow|R|=-f(n-1)$$

$\Rightarrow|R|=10$ cm, deoarece $R_1=-|R|$ și $R_2\to\infty$

**14.a.** Lentila divergentă formează pentru un obiect aşezat în fața sa o imagine virtuală şi mai mică de 5 ori decât obiectul, deci $\beta = \frac{1}{5}$. Cum $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ $\Rightarrow x_2 = \beta \cdot x_1$. Utilizând formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f(1-\beta)}{\beta}$

$x_1 = -120$ cm $\Rightarrow$ obiectul este aşezat la 120 cm în faţa lentilei

**b.** Aplicăm formula convergenței $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ cu $R_2 = -R_1 = |R|$ deoarece lentila biconcava este simetrică astfel că obţinem $C = -\frac{2(n-1)}{|R|}$ şi cum $C = \frac{1}{f} \Rightarrow$

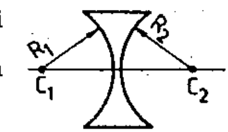



$|R| = -2f(n-1)$=30 cm

**c.** Prin introducerea lentilei într-un mediu optic transparent convergența acesteia devine $C = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f_1} \Rightarrow -\frac{2}{|R|}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right) = \frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = -\frac{n_1|R|}{2(n-n_1)} \Rightarrow$

$f_1 = \frac{n_1(n-1)f}{n-n_1}$=2,4 m. Deoarece lentila se scufundă într-un mediu optic transparent mai dens decât mediul lentilei se schimbă natura lentilei, aceasta devenind convergentă

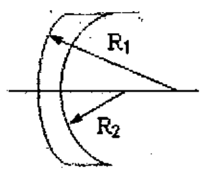
**15.a.** Aplicăm formula convergenței $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{2(n-1)}{|R|} = -5$ m$^{-1}$ deoarece lentila biconcavă este simetrică astfel că $R_2 = -R_1 = |R|$.




**b.** Din $C=1/f$ obţinem distanța focală a lentilei $f=1/C=-20$ cm şi pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{f \cdot x_1}{f + x_1} \approx -14{,}28$ cm

**c.** Dacă lentila se îndepărtează de obiect, atunci $x'_1 = -100$ cm, astfel că $x'_2 = \frac{f \cdot x'_1}{f + x'_1} \approx -16{,}67$ cm, astfel că distanța dintre obiect şi noua sa imagine este $d = -x'_1 + x'_2 \approx 83{,}33$ cm

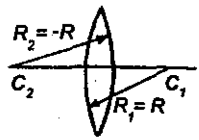
**16.a.** Pe baza formulei $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ şi ţinând cont că $R_1$=60 cm şi $R_2$=30 cm pe baza convenţiei de semne, obţinem: $f = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_2 - R_1)} = -120$ cm (1). Deoarece $f < 0$, lentila este divergentă.



**b.** Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=-40$ cm

**c.** Dacă lentila se introduce într-un mediu optic cu indicele de refracție $n'$, distanța focală a acesteia devine: $\frac{1}{f'}=\left(\frac{n}{n'}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ (2). Împărțind relația (1) la (2) obținem: $\frac{f}{f'}=\frac{\frac{n}{n'}-1}{n-1}\Rightarrow f'=\frac{f(n-1)n'}{n-n'}=360$ cm. Deoarece distanța focală își schimbă semnul, lentila devine în mediul cu indicele $n'>n$ (mediu optic mai dens), o lentilă convergentă.

**17.a.** Din grafic constatăm că atunci când $C=1$ m$^{-1}$, $n_r=9/8$. Pe baza formulei convergenței: $C=(n_r-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n_r-1)}{|R|}\Rightarrow |R|=\frac{2(n_r-1)}{C}=25$ cm.




Lentila fiind simetrică, conform convenției de semne, obținem $R_1=|R|=25\,\text{cm}$ și $R_2=-|R|=-25\,\text{cm}$

**b.** Din $C=1/f$ obținem distanța focală a lentilei $f=1/C=100$ cm. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=-100$ cm, deoarece $x_1=-50$ cm. Imaginea este virtuală și se formează în fața lentilei.

**c.** Deoarece imaginea este reală și de două ori mai mare decât obiectul, atunci $\beta=-2$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow x_2=\beta\cdot x_1$ și pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-150$ cm. Obiectul se așază la 150 cm în fața lentilei.

**18.a.** Din grafic, când $x_1=-40$ cm, $y_2=-8$ cm, iar când $x_1'=-60$ cm, $y_2'=-4$ cm. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$, și a măririi liniare transversale $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{f+x_1}=\frac{y_2}{y_1}$. Analog pentru $x'_1$ $\beta'=\frac{f}{f+x_1'}=\frac{y_2'}{y_1}$. Împărțim cele două relații și obținem: $\frac{f+x_1'}{f+x_1}=\frac{y_2}{y_2'}\Rightarrow f=\frac{y_2'x_1'-y_2x_1}{y_2-y_2'}=20$ cm.

**b.** Mărimea liniară a obiectului este $y_1=\frac{(f+x_1)y_2}{f}=8$ cm.

**c.** Utilizăm formulele convergenței $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. Lentila fiind biconvexă, conform convenției de semne $R_1=|R|$ și $R_2=-3|R|$ obținem:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{|R|}+\frac{1}{3|R|}\right)=\frac{4(n-1)}{3|R|}\Rightarrow n=1+\frac{3|R|}{4f}=1{,}5625.$$

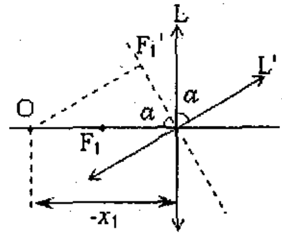
**19.a.** Deoarece obiectul se află la $x_1=-2f$ imaginea se va forma la $x_2$, care se calculează din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}=2f\Rightarrow$

$\beta=\frac{x_2}{x_1}=-1$. Când $x_1'=-\frac{3f}{2}\Rightarrow x_2'=3f\Rightarrow\beta'=\frac{x_2'}{x_1'}=-2\Rightarrow\frac{\beta'}{\beta}=2\Rightarrow$ imaginea se mărește de 2 ori când lentila se apropie de obiect.

**b.** Dacă lentila se depărtează cu $f$ de obiect atunci $x_1'=-3f\Rightarrow x_2'=3f/2\Rightarrow$

$\beta'=\frac{x_2'}{x_1'}=-\frac{1}{2}\Rightarrow y'_2=\beta'\cdot y_1$. Din $\beta=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta\cdot y_1\Rightarrow\frac{y'_2}{y_2}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ raportul mărimilor liniare transversale ale imaginilor este raportul măririlor liniare transversale ale imaginilor

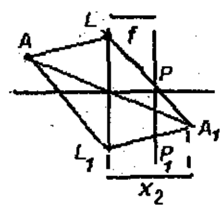
**c.** Deoarece obiectul se află în fața lentilei la $x_1=-2f$, când lentila se rotește cu $\alpha=60°$, acest obiect se va afla față de lentilă la $x_1'=x_1\cos\alpha=-f$, adică în planul focal obiect și, prin urmare, utilizând formula $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow\frac{1}{x_2}=0\Rightarrow x_2\to\infty\Rightarrow$ imaginea se formează la infinit.




**20.a.** Punctul imagine $A_1$ are coordonatele (8, −2) cm, astfel că $x_2$=8 cm și $B_1A_1$=-2 cm. Din formula lentilelor subțiri obținem coordonata punctului $A$, astfel că $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{fx_2}{f-x_2}=-8$ cm. Din $\beta=\frac{x_2}{x_1}=-1$ și din $\beta=\frac{A_1B_1}{AB}$ obținem $A_1B_1=\beta AB$ =2 cm, astfel că punctului $A$ are coordonatele (−8, 2) cm

**b.** Punctul $C$ se află la $x'_1=-6$ cm de lentilă, astfel că imaginea lui se formează la distanța $x'_2=\frac{fx'_1}{f+x'_1}$=12 cm de lentilă, astfel $B_1C_1=x'_2-x_2$=4 cm

**c.** Pentru a determina diametrul $d_1$ al petei luminoase care se obține pe un ecran așezat în planul focal imagine al lentilei atunci când în punctul $A$ se așază o sursă punctiformă de lumină utilizăm desenul alăturat. Asemănăm triunghiurile $LL_1A_1$ cu $PP_1A_1$, astfel că: $\frac{d}{d_1}=\frac{x_2}{x_2-f}\Rightarrow d_1=\frac{d(x_2-f)}{x_2}$=5 cm



**21.a.** Punctul $A$ se află la distanța de 32 cm de lentilă, astfel că $x_1$=−32 cm, iar imaginea se formează la $x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$ =53,33 cm. Punctul $B$ se află la 28 cm de lentilă, astfel că $x'_1=-28$ cm, iar imaginea se formează la $x'_2=\frac{fx'_1}{f+x'_1}\Rightarrow$ $x'_2$ =70 cm. Lungimea imaginii segmentului $AB$ este $A'B'=x'_2-x_2$=16,67 cm

**b.** Mărirea longitudinală este $\gamma=\frac{A'B'}{AB}\approx 4,17$

**c.** Dacă în punctul $A$ se aşază un obiect transveral atunci mărirea liniară transversală este $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f}{f+x_1}$, iar dacă în punctul $B$ se aşază un obiect transveral atunci mărirea liniară transversală este $\beta_2=\frac{x'_2}{x'_1}=\frac{f}{f+x'_1}$. Dar

$$A'B'=x'_2-x_2=\frac{fx'_1}{f+x'_1}-\frac{fx_1}{f+x_1}=\frac{f^2(x'_1-x_1)}{(f+x'_1)(f+x_1)}=\beta_1\beta_2(x'_1-x_1)$$ şi cum $\gamma=\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'B'}{x'_1-x_1}$ obținem relația dintre mărirea longitudinală şi măririle transversale pentru obiectele transversale aflate în punctele $A$ şi $B$ $\gamma=\beta_1\beta_2$

**22.a.** Utilizăm formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ iar când introducem lentila în apă cu indicele de refracție $n_a$, se modifică distanța focală a lentilei şi se schimbă poziția imaginii, astfel încât: $\frac{1}{x'_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f'}$. Scădem relațiile şi obținem: $\frac{1}{x'_2}-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}$. Pe baza formulei convergenței obținem în aer $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ şi în apă $\frac{1}{f'}=\left(\frac{n}{n_a}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. Prin împărțirea celor două relații obținem: $\frac{f'}{f}=\frac{(n-1)\cdot n_a}{n-n_a}\Rightarrow f'=\frac{(n-1)\cdot n_a\cdot f}{n-n_a}\Rightarrow$

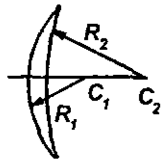
$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x'_2}=\frac{1}{f}-\frac{n-n_a}{f(n-1)\cdot n_a}=\frac{1}{f}\cdot\frac{n\cdot(n_a-1)}{(n-1)\cdot n_a}\Rightarrow f=\frac{(n_a-1)\cdot n}{(n-1)\cdot n_a}\cdot\frac{x_2x'_2}{x'_2-x_2}=9\text{ cm}.$$

**b.** $x_1=\frac{fx_2}{f-x_2}=-90$ cm

**c.** În apă distanța focală este $f'=\frac{(n-1)\cdot n_a f}{n-n_a}$=36 cm.

**23.a.** Calculăm distanța focală a lentilei utilizând formulele convergenței:

$$C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow f=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=40 \text{ cm}.$$

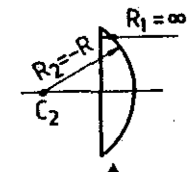



**b.** Din $d=-x_1+x_2$ și din $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0$. Cum $\Delta=d^2-4df$ și din $\Delta=0$ obținem distanța minimă dintre obiect și ecran pentru ca pe acesta să se formeze imagini reale. Astfel $d_{min}=4f=160$ cm

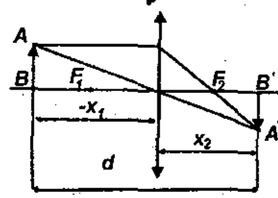
**c.** Dacă distanța dintre obiect și ecran este inițial $d=4f$, obiectul se află la dublul distanței focale, astfel încât imaginea sa reală să se formeze pe ecran. În acest caz: $x_1=-2f=-80$ cm iar $x_2=2f=80$ cm

Deoarece ecranul se depărtează cu $d$=10 cm față de poziția anterioară a lui, atunci $x_2'=x_2+d$=90 cm. Aflăm pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f}$, unde trebuie poziționat obiectul $x_1'=\frac{fx_2'}{f-x_2'}=-72$ cm. Obiectul se deplasează spre dreapta apropiindu-se de lentilă cu $|\Delta x_1|=-x_1'+x_1$=8 cm $\Rightarrow$ distanța dintre obiect și ecran devine $d'=-x_1'+x_2'$=162 cm și deci $d'>d$, deoarece $d$ este distanța minimă dintre obiect și ecran.

**24.a.** Din formula convergenței $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{n-1}{|R|}$, deoarece $R_2=-|R|$ și $R_1\to\infty$ obținem $|R|=\frac{n-1}{C}$=25 cm




**b.** Din $C$=1/$f\Rightarrow f$=1/$C$=50 cm. Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ aflăm la ce diatanță de lentilă se formeată imaginea: $x_2=\frac{fx_1}{f+x_1}$=300 cm, astfel că distanța obiect-ecran este $d=-x_1+x_2$=360 cm




**c.** Din $d=-x_1+x_2$ și din $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ obținem $x_1^2+x_1d+df=0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $x_1=\frac{-d\pm\sqrt{d^2-4df}}{2}\Rightarrow x_1=-60$ cm și $x'_1=-300$ cm. lentila se deplasează spre dreapta cu $\Delta x_1=x_1-x'_1$=240 cm pentru a se obține o nouă imagine pe ecran

**25.a.** Deoarece distanța dintre obiect și ecran este mai mare decât 4$f$, există două poziții ale lentilei situate între obiect și ecran pentru care pe ecran se formează imagini clare ale obiectului (desen problema precedentă, punctul b)

Cum $d=-x_1+x_2$ şi $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1^2+x_1d+df=0$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt: $x_1=\frac{-d-\sqrt{d^2-4df}}{2}$ şi $x_1'=\frac{-d+\sqrt{d^2-4df}}{2}$.

Când $x_1=\frac{-d-\sqrt{d^2-4df}}{2}\Rightarrow x_2=d+x_1=\frac{d-\sqrt{d^2-4df}}{2}$ şi mărirea liniră transversală este: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{d-\sqrt{d^2-4df}}{-d-\sqrt{d^2-4df}}$. Când $x_1'=\frac{-d+\sqrt{d^2-4df}}{2}\Rightarrow$

$x_2=\frac{d+\sqrt{d^2-4df}}{2}\Rightarrow\beta_2=\frac{d+\sqrt{d^2-4df}}{-d+\sqrt{d^2-4df}}\Rightarrow\beta_1\beta_2=1\Rightarrow$ dacă distanţa dintre obiect şi ecran este mai mare decât patru distanţe focale, produsul măririlor liniare transversale corespunzătoare celor două poziţii distincte ale lentilei pentru care pe ecran se formează imagini clare este 1. Cum $\beta_1=\frac{y_2}{y_1}$ şi

$\beta_2=\frac{y_2'}{y_1}\Rightarrow\frac{y_2y_2'}{y_1^2}=1\Rightarrow|y_1|=\sqrt{y_2y_2'}=6$ cm. În acest caz mărimea obiectului reprezintă media geometrică a mărimilor celor două imagini obţinute în cele două situaţii distincte.

**b.** Măririle liniare transversale sunt $\beta_1=y_2/y_1=-0{,}66$ şi $\beta_2=y_2'/y_1=-1{,}5$ deoarece imaginile obţinute pe ecran în cele două cazuri sunt reale şi răsturnate

**c.** Din $\frac{\beta_2}{\beta_1}=\frac{y_2'}{y_2}=\left(\frac{d+\sqrt{d^2-4df}}{d-\sqrt{d^2-4df}}\right)^2$ şi din $-x_1=-x_1'+D\Rightarrow D=x_1'-x_1=\sqrt{d^2-4df}$.

Raportul dimensiunilor corespunzătoare a celor două imagini: $\frac{y_2'}{y_2}=\left(\frac{d+D}{d-D}\right)^2$

**26.a.** Pe baza demonstraţiei din problema precedentă înălţimea obiectului este $|y_1|=\sqrt{h_1h_2}=4$ cm

**b.** Măririle imaginilor în cele două situaţii sunt $\beta_1=\frac{y_2}{y_1}=-\frac{h_1}{y_1}=-2$ şi $\beta_2=\frac{y'_2}{y_1}=-\frac{h_2}{y_1}=-\frac{1}{2}$, deoarece imaginile reale obţinute pe ecran sunt răsturnate

**c.** Cum $D=-x_1+x_2$ şi $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1^2+x_1D+Df=0\Rightarrow x=\frac{-D\pm\sqrt{D^2-4Df}}{2}$

Mărirea $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{D-\sqrt{D^2-4Df}}{-D-\sqrt{D^2-4Df}} = \frac{D-\sqrt{\Delta}}{-D-\sqrt{\Delta}} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{D(1+\beta_1)}{1-\beta_1}$=30 cm. Cum

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2-4Df} \Rightarrow f = \frac{D^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4D}$=20 cm

**27.a.** $D=-x_1+x_2$ şi $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_1^2+x_1D+Df=0 \Rightarrow x_1 = \frac{-D-\sqrt{D^2-4Df}}{2}$ şi

$x'_1 = \frac{-D+\sqrt{D^2-4Df}}{2}$, astfel că $-x_1=-x'_1+d \Rightarrow d=\sqrt{D^2-4Df} \Rightarrow f=\frac{D^2-d^2}{4D}$

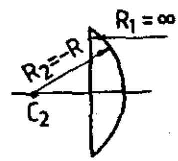
Distanţa focală a lentilei este $f$=18,75 cm

**b.** Când $x_1 = \frac{-D-d}{2} \Rightarrow x_2 = D+x_1 = \frac{D-d}{2}$ şi mărirea linira transversală este:

$\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{D-d}{-D-d} = -\frac{1}{3}$ şi când $x'_1 = \frac{-D+d}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{D+d}{2} \Rightarrow \beta_2 = \frac{D+d}{-D+d} = -3$.

Astfel mărimile imaginilor sunt $y_2 = \beta_1 y_1 = -1$ cm şi $y'_2 = \beta_2 y_1 = -9$ cm

**c.** Din formula convergenţei $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{n-1}{|R|}$,



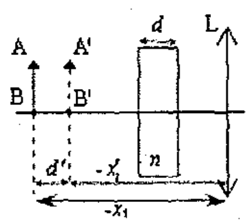

deoarece $R_2=-|R|$ şi $R_1 \to \infty$ obţinem $n = 1+\frac{|R|}{f} \approx 1,533$

**28.a.** Utilizăm formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 \cdot f}{f-x_2} = -66$ cm.

Obiectul se aşază la 66 cm în faţa lentilei

**b.** Mărirea liniară transversală este $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f-x_2}{f} \approx -0,833$

**c.** O lamă cu feţe plan - paralele apropie obiectul de lentilă cu $d' = d\left(1-\frac{1}{n}\right)$, unde $d$ este grosimea lamei, iar $n$ este indicele de refracţie al lamei, astfel că imaginea virtuală a lamei joacă rol de obiect real pentru lentilă. Lentila formează pentru obiectul real o imagine reală, egală cu obiectul, astfel că mărirea liniară transversală este $\beta=-1$. Dar $\beta = \frac{x'_2}{x'_1} \Rightarrow x'_2 = \beta \cdot x'_1 = -x'_1$. Din formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x'_1}=\frac{1}{f}$ obţinem $x'_1 = -2f = -60$ cm. Obiectul virtual trebuie să se afle în faţa lentilei la dublul distanţei focale. Din desen $-x_1 = d'-x'_1 \Rightarrow d' = x'_1 - x_1 = 6$ cm. Din $d' = d\left(1-\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$

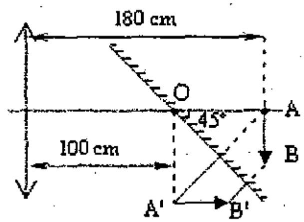


$d = \frac{nd'}{n-1} = 18$ cm. Grosimea lamei este de 18 cm.

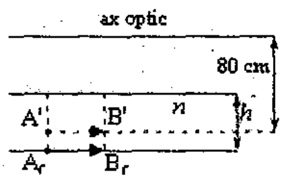
**29.a.** Deoarece imaginea prinsă pe ecran este o imagine reală şi de trei ori mai mare decât obiectul atunci $\beta = -3$. Cum $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ şi pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_1 = \frac{f(1-\beta)}{\beta} = -40$ cm, iar $x_2 = f(1-\beta) = 120$ cm. Ecranul se aşază la 120 cm în spatele lentilei.

**b.** Poziţionând o lamă cu feţe plan – paralele între obiect şi lentilă, lama formează pentru obiect, o imagine virtuală situată mai aproape de lamă cu $e\left(1-\frac{1}{n}\right) = 4$ cm. Această imagine virtuală este situată în faţa lentilei şi joacă rol de obiect real pentru aceasta, astfel că $x_1' = -36$ cm. Lentila va forma imaginea noului obiect la: $x_2' = \frac{f \cdot x_1'}{f + x_1'} = 180$ cm de lentilă. Ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu $x_2' - x_2 = 60$ cm.

**c.** Deoarece oglinda se aşază în spatele lentilei la 1 m de aceasta, imaginea reală formată de lentilă va fi situată în spatele oglinzii jucând rol de obiect virtual pentru aceasta. Cum oglinda reflectă toate razele de lumină, pe baza legilor reflexiei, imaginea formată de oglindă va fi reală şi situată simetric faţă de aceasta. Cum $OA$=80 cm, din geometrie $\Delta OAA'$ este dreptunghic şi isoscel, astfel că: $OA = OA' = 80$ cm. Imaginea formată de oglindă este reală şi egală cu obiectul, dar este situată sub axul optic principal al lentilei la 80 cm de acesta, paralel cu acesta, ca în figură.

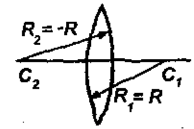



**d.** Deoarece imaginea finală este reală şi situată pe fundul cuvei, înseamnă că imaginea formată de oglindă se află în apă şi este obiect virtual pentru stratul de apă. Când razele de lumină pătrund din aer în apă, ele se refractă şi se apropie de normală formând în final o imagine mai departe decât obiectul. Cum razele de lumină sunt reversibile putem considera $A_f B_f$ obiect pe fundul apei şi $A'B'$ imaginea virtuală a obiectului situată mai aproape de suprafaţa apei cu $A'A_f = h\left(1-\frac{1}{n}\right)$=5 cm. Fundul cuvei se va situa sub axul optic principal al lentilei la distanţa $OA' + A'A_f = 85$ cm de acesta.




**30.a.** Deoarece raza din figură este paralelă cu axul optic principal după refracţia prin lentilă aceasta trece prin focarul imagine, astfel că $f$=20 cm

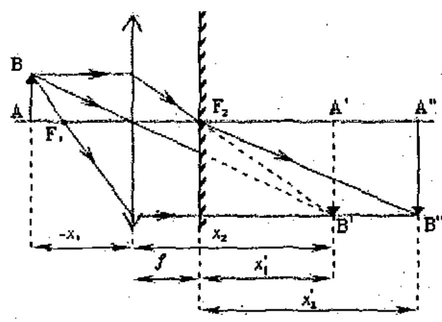
**b.** $C=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}=\frac{1}{f}\Rightarrow |R|=2f(n-1)=20$ cm.




**c.** O placă transparentă cu fețe plane și paralele, apropie obiectul de lentilă și depărtează imaginea de lentilă cu $d'=d\left(1-\frac{1}{n}\right)$=0,75 cm. Imaginea se depărtează de lentilă cu 0,75 cm.

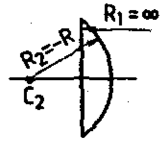
**31.a.** Aflăm distanța focală a lentilei utilizând formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\Rightarrow f=\frac{R_1\cdot R_2}{(n-1)(R_2-R_1)}=8$ cm, deoarece $R_2$=−20 cm și $R_1$=5 cm. Deoarece imaginea se obține pe ecran, ea este reală și răsturnată și din datele problemei $\beta=-4$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și conform formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f(1-\beta)}{\beta}=-10$ cm. Obiectul se așază la 10 cm în fața lentilei și la $d=-x_1+x_2=(\beta-1)x_1=-\frac{f(1-\beta)^2}{\beta}$=50 cm de ecran

**b.** Lama cu fețe plan-paralele apropie obiectul de lentilă cu $d=e\left(1-\frac{1}{n}\right)=$ 1cm. Această imagine virtuală, joacă rol de obiect real pentru lentilă, fiind situat în fața lentilei la $x_1'=-9$ cm. Astfel imaginea se formează la $x_2'=\frac{fx_1'}{f+x_1'}=72$ cm în spatele lentilei și este reală. Ecranul trebuie depărtat cu $x_2'-x_2=32$ cm de lentilă pentru a prinde imaginea pe acesta.

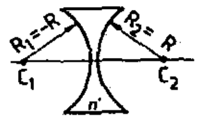



**c.** Dacă în planul focal imagine al lentilei se află un mediu optic transparent, razele de lumină se refractă prin acest mediu și imaginea reală se va forma mai departe ca în figură. Lentila convergentă formează o imagine reală $A'B'$ la $x_2$=40 cm față de ea în mediul cu indicele de refracție *n*. Imaginea finală se formează, pe baza legii refracției, în $A''B''$. Folosind principiul reversibilității razelor de lumină, putem considera $A''B''$ obiect real și $A'B'$ imaginea sa virtuală, fiind situată față de suprafața de separație a mediului la $x_1'=\frac{x_2'}{n}$. Cum $x_1'=x_2-f=32$ cm atunci $x_2'=n\cdot x_1'=51{,}2$ cm. Imaginea finală se formează față de lentilă în spatele acesteia la distanța $D=f+x_2'=59{,}2$ cm și este reală.

**32.a.** Aflăm raza feței convexe, utilizând formulele convergenței: $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. Conform convenției de semne, $R_1\to\infty$ și $R_2=-|R|\Rightarrow\frac{1}{f}=\frac{n-1}{|R|}\Rightarrow|R|=f(n-1)=30$ cm.




**b.** Lipind cele două lentile plan–convexe și umplând spațiul dintre cele două lentile cu un lichid cu indicele de refracție $n'$ se formează o a treia lentilă biconcavă lipită de celelalte două. Cum $\frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n'-1)}{|R|}\Rightarrow\frac{1}{f'}=-\frac{2(n'-1)}{f(n-1)}$,




deoarece conform convenției de semne $R_1=-|R|$ și $R_2=|R|$. Sistemul este format din trei lentile acolate. Pentru lentile alipite convergența este:

$$C=C_1+C_2+C_3\Rightarrow\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=\frac{2}{f}+\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{1}{F}-\frac{2}{f}=\frac{f-2F}{Ff}\Rightarrow$$

$$\frac{f-2F}{Ff}=-\frac{2(n'-1)}{f(n-1)}\Rightarrow n'=1-\frac{(n-1)(f-2F)}{2F}=1{,}4.$$

**c.** Deoarece imaginea obținută cu ajutorul lentilei echivalente este reală și de două ori mai mare decât obiectul, atunci $\beta=-2$. Cum $\beta=\frac{x_2}{x_1}$ și din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}\Rightarrow x_1=\frac{F(1-\beta)}{\beta}=-2{,}43$ m

**33.a.** Din datele problemei $x_1=-20$ cm și $x_2=60$ cm. Pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$, se obține distanța focală a sistemului echivalent format din cele trei lentile alipite: $F=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}=15$ cm

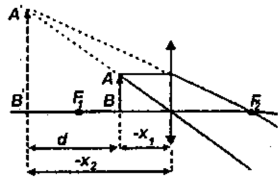
**b.** Din $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\frac{x_2y_1}{x_1}=-18$ cm

**c.** Convergența sistemului este $C=C_1+C_2+C_3=\frac{2}{f}+\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{f'}=\frac{f-2F}{Ff}$.

Dar pe baza formulelor convergenței: $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2(n-1)}{|R|}$ și $\frac{1}{f'}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{2(n'-1)}{|R|}$. Prin împărțirea relațiilor se obține:

$$\frac{f'}{f}=-\frac{n-1}{n'-1}\Rightarrow n'=1-\frac{f(n-1)}{f'}\Rightarrow n'=1-\frac{(n-1)(f-2F)}{F}=1{,}33\Rightarrow$$ lichidul este apă.

**34.a.** Deoarece imaginea este virtuală şi mai mare decât obiectul înseamnă că lentila utilizată este convergentă. Mărirea liniară transversală este $\beta=\frac{y_2}{y_1}=2$ şi $\beta=\frac{x_2}{x_1}$. Din geometrie $d-x_1=-x_2 \Rightarrow x_1=\frac{d}{1-\beta}=-50$ cm, iar $x_2=\frac{\beta d}{1-\beta}$.




Utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$, aflăm distanţa focală a lentilei $\frac{1}{f}=\frac{1-\beta}{\beta \cdot d}-\frac{1-\beta}{d}=\frac{(1-\beta)^2}{\beta \cdot d} \Rightarrow f=\frac{\beta \cdot d}{(1-\beta)^2}=100$ cm.

**b.** Utilizăm formulele convergenţei $C=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$.

Introducând lentila într-un mediu optic cu indicele de refracţie $n'$ se modifică distanţa focală a lentilei, astfel că:

$\frac{1}{f'}=(\frac{n}{n'}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \frac{f'}{f}=\frac{n-1}{\frac{n}{n'}-1} \Rightarrow n'=\frac{n \cdot f'}{(n-1)f+f'}$. Cum $f'=2f \Rightarrow n'=1,2$

**c.** Deoarece imaginea devine virtuală şi de două ori mai mică decât obiectul, $\beta'=\frac{1}{2}$ şi lentila trebuie să fie divergentă. Din $\beta'=\frac{x_2'}{x_1}$ şi utilizând formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{F}$ aflăm distanţa focală $F$ a lentilei echivalente

$F=\frac{\beta' x_1}{1-\beta'}=-50$ cm. Cum în cazul lentilelor alipite $C=C_1+C_2 \Rightarrow \frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$.

obţinem $f'=\frac{Ff}{f-F}=-33,33$ cm. Lentila lipită de lentila convergentă este divergentă, deoarece $f'<0$.

**35.a.** Utilizăm formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow f_1=\frac{x_2 x_1}{x_1-x_2}$ =30 cm.

Convergenţa primei lentile este $C_1=1/f_1 \approx 3,33$ $m^{-1}$

**b.** Aflăm distanta focală a sistemului echivalent $F=\frac{x'_2 x_1}{x_1-x'_2}$ =40 cm. Pentru un sistem format din două lentile lipite $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$, astfel distanţa focală a celei de a doua lentile este $f_2=\frac{Ff_1}{f_1-F}=-120$ cm

**c.** Din $\beta = \frac{h'}{h} = \frac{x'_2}{x_1}$ obținem înălțimea imaginii formate de sistemul celor două lentile alipite $|h'| = \frac{\beta \cdot x_1}{x'_2} = 4{,}8$ cm

**36.a.** Deoarece imaginea este virtuală ea este și dreaptă, astfel că $\beta$=5. Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$ și din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ obținem distanța focală a lentilei $f = \frac{\beta \cdot x_1}{1-\beta} = 12{,}5$ cm

**b.** Convergența lentilei este $C = 1/f = 8$ dioptrii

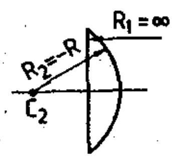
**c.** Aflăm distanța focală a sistemului echivalent de lentile din $\frac{1}{F} = \frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x_1}$, astfel că $F = \frac{x_1 x'_2}{x_1 - x'_2} = 8$ cm și convergența sistemului echivalent este $C_S = 1/F = 12{,}5$ dioptrii. Deoarece în cazul lentilelor lipite $C_S = C + C'$ obținem convergența celei de-a doua lentile este $C' = C_S - C = 4{,}5$ dioptrii

**37.a.** Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a primei lentilei $f_1 = \frac{x_2 x_1}{x_1 - x_2} = 12$ cm

**b.** Distanța focală a sistemului format din cele două lentile este $F = \frac{x_1 x'_2}{x_1 - x'_2}$ $\Rightarrow F = -60$ cm, deoarece $x'_2 = -30$ cm pentru că imaginea este virtuală

**c.** Deoarece în cazul lentilelor acolate $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ obținem distanța focală a lentilei a doua, astfel că $f_2 = \frac{F f_1}{f_1 - F} = -10$ cm. Convergența celei de-a doua lentile este $C_2 = 1/f_2 = -10$ $m^{-1}$

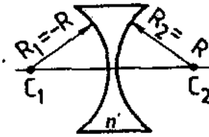
**d.** Din $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}$ și $\beta_s = \frac{x'_2}{x_1} = \frac{y'_2}{y_1} \Rightarrow y'_2 = \frac{x'_2 y_1}{x_1}$ raportul dintre înălțimea imaginii formate de prima lentilă și înălțimea imaginii formate de sistemul de lentile este $\frac{y_2}{y'_2} = \frac{x_2}{x'_2} = -0{,}5$




**38.a.** Se formează un sistem de 6 lentile acolate. Lentilele 1, 2, 3 și 4 sunt plan-convexe și identice, iar lentilele 5 și 6 biconcave sunt și ele identice. Convergența sistemului echivalent: $C_e = 4C_1 + 2C_5$. Dar $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{(n-1)}{|R|}$, deoarece $R_1 \to \infty$

şi $R_2 = -|R|$, conform convenţiei de semne pentru lentila plan-convexă.

şi $C_5 = (n'-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{-2(n'-1)}{|R|}$, deoarece $R_1 = -|R|$ şi $R_2 = |R|$, conform convenţiei de semne pentru lentila biconcavă.



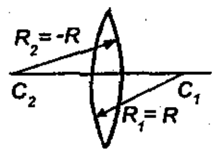

Pentru sistemul echivalent: $C_e = \frac{4(n-1)}{|R|} - \frac{4(n'-1)}{|R|} = \frac{4(n-n')}{|R|}$.

Cum $C_1 = \frac{1}{f} = \frac{n-1}{|R|} \Rightarrow |R| = f(n-1) \Rightarrow C_e = \frac{4(n-n')}{f(n-1)} = 1{,}6\ \text{m}^{-1}$

**b.** Deoarece raza de lumină cade pe sistem sub un unghi de incidenţă şi iese paralel cu ea însăşi, înseamnă că întreg sistemul reprezintă o lamă cu feţe plan - paralele. Din această cauză mediul optic trebuie să fie omogen şi deci lichidul care umple spaţiul dintre lentile trebuie să aibă acelaşi indice de refracţie cu cel al lentilei, astfel că $n' = n = 1{,}5$

**c.** În lipsa lichidului transparent sistemul este format din patru lentile lipite, astfel că $C'_e = 4C_1 = 4/f = 8$ dioptrii

**39.a.** Distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D=4f$, astfel că distanţa focală a lentilei este $f=D/4=10$ cm. Din formulele convergenţei:




$C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f}$, deoarece $R_1 = -R_2 = |R|$

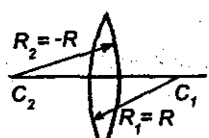
obţinem $|R| = 2f(n-1) = 10$ cm

**b.** Prin introducerea lentilei în apă se modifică distanţa focală a ei, astfel că $C' = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2}{|R|}\left(\frac{n}{n_a} - 1\right) = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{fn_a(n-1)}{n-n_a} = 40$ cm.

Distanţa minimă dintre obiect şi imaginea sa reală este $D' = 4f' = 160$ cm

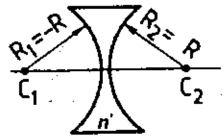
**c.** Prin alipirea lentilelor obţinem o lentilă cu distanţa focală $F$, astfel că $\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 6$ cm. Imaginea se formează faţă de sistem la distanţa $x_2 = \frac{Fx_1}{F + x_1} = 7{,}5$ cm, iar faţă de obiect la $d = -x_1 + x_2 = 37{,}5$ cm

**40.a.** Aflăm distanţa focală a lentilei biconvexe simetrice.




Deoarece $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f_1}$ pentru că $R_1 = |R|$ şi $R_2 = -|R|$, obţinem $f_1 = \frac{|R|}{2(n-1)} = 20$ cm.

Calculăm distanţa focală a lentilei biconcave simetrice din apă formată între feţele convexe aflate în contact ale celor două lentile biconveve. Convergenţa acestei lentile este $C_2 = (n_a - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{2(n_a - 1)}{|R|} = \frac{1}{f_2}$,




deoarece $R_2 = -R_1 = |R|$. Obținem $f_2 = -\frac{|R|}{2(n_a - 1)} = -30$ cm

Prin lipirea celor trei lentile se obține un sistem echivalent cu convergența $C_s = 2C_1 + C_2 \Rightarrow \frac{1}{F} = \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow F = \frac{f_1 f_2}{2f_2 + f_1}$ =15 cm

**b.** Din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{F}$ obținem distanța la care se formează imaginea față de lentilă $x_2 = \frac{F x_1}{F + x_1}$ =24 cm, astfel distanța dintre obiect şi imaginea acestuia prin sistem este $d = -x_1 + x_2 = 64$ cm

**c.** Din $\beta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = -6$ cm, deoarece imagimea formată de sistemul echivalent este reală şi răsturnată

**d.** Dacă întregul sistem se introduce în apă se modifică distanța focală a acestuia, astfel că sistemul este echivalent cu cele două lentile biconvexe lipite. Distanța focală a unei lentile biconvexe introdusă în apă este $C_a = \left(\frac{n}{n_a} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n - n_a)}{n_a |R|} = \frac{1}{f_a} \Rightarrow f_a = \frac{n_a |R|}{2(n - n_a)}$ =80 cm. Convergența sistemului de lentile este $C' = 2C_a \Rightarrow F' = f_a / 2$ =40 cm. Deoarece $x_1 = -40$ cm imaginea se formează la infinit deoarece $x_2 = \frac{F' x_1}{F' + x_1} \to \infty$

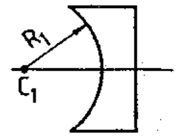
**41.a.** Deoarece imaginea este reală, de două ori mai mică decât obiectul atunci $\beta = -1/2$. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ şi din formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a primei lentile $f_1 = \frac{x_2}{1 - \beta}$ =30 cm

**b.** Deoarece înălțimea imaginii obiectului este cu 20% mai mică decât înălțimea obiectului atunci $\beta' = -0{,}8$. Obiectul se află față de lentilă în punctul de coordonată $x_1 = x_2 / \beta = -90$ cm. Convergența sistemului format din cele două lentile alipite este $C' = \frac{1}{f'} = \frac{1 - \beta'}{\beta' x_1} = 2{,}5$ dioptrii

**c.** Convergența sistemului de lentile este $C' = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1 - \beta'}{\beta' x_1} - \frac{1 - \beta}{\beta x_1} \Rightarrow$ distanța focală a lentilei a doua este $f_2 = \frac{\beta \beta' x_1}{\beta - \beta'}$ =120 cm

**d.** Înălțimea imaginii date de sistemul de lentile alipite este $h_i = |\beta'|h$ =8 mm

**42.a.** Deoarece $R_1 = -|R|$ şi $R_2 \to \infty$, distanța focală a lentilei este $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{n-1}{|R|} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -\frac{|R|}{n-1} = -20$ cm

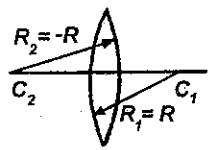



Pe baza formulei lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f'}$ imaginea se formează la $x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = -10$ cm, deci este o imagine virtuală. Mărimea imaginii este $y_2 = \beta y_1 = \frac{fy_1}{f + x_1} = 1$ cm

**b.** Prin alăturarea celei de-a doua lentile cu fețele plane în contact se formează o lentilă echivalentă cu convergența $C' = 2C$, astfel că distanța focală a lentilei echivalente este $f' = f/2 = -10$ cm. Imaginea se formează la $x'_2 = \frac{f'x'_1}{f' + x'_1} = -\frac{20}{3}$ cm, deci este tot o imagine virtuală. Mărimea imaginii este

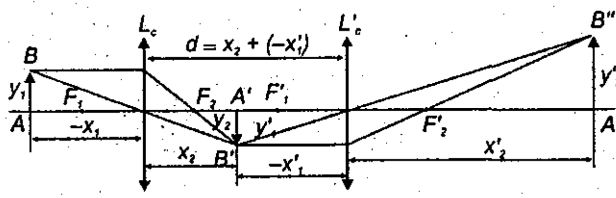
$y'_2 = \beta y_1 = \frac{f'y_1}{f' + x_1} \approx 0,666$ cm

**c.** Dacă între cele două lentile alipite cu fețele curbe în contact se umple spațiul dintre lentile cu apă se formează un sistem de trei lentile: două plan-concave şi una biconvexă din apă. Convergența lentilei biconvexe este $C' = (n_a - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n_a - 1)}{|R|} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{|R|}{2(n_a - 1)} = 15$cm




Convergența sistemului de lentile este $C_S = 2C + C'$, iat distanța focală a sistemului echivalent devine $\frac{1}{F} = \frac{2}{f} + \frac{1}{f'} \Rightarrow F = \frac{f \cdot f'}{2f' + f}$ =−30 cm.

**43.a.** $AB$ este obiect real pentru prima lentilă. Calculăm unde formează imaginea prima lentilă pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow$

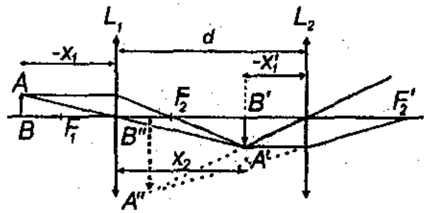



$x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 30$ cm. Cum mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} \Rightarrow$ $\beta$=−0,5, imaginea $A'B'$ este reală, răsturnată şi de două ori mai mică decât obiectul. Această imagine reală este situată în fața lentilei a doua şi prin urmare $A'B'$ joacă rol de obiect real pentru aceasta, astfel că a doua lentilă, va forma o imagine la $x_2' = \dfrac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 30\,\text{cm}$ față de ea, deoarece din geometrie, $d = x_2 - x_1'$ și $x_1' = x_2 - d = -10\,\text{cm}$. Deoarece $x_2' = 30\,\text{cm}$, imaginea finală este reală și este situată în spatele lentilei a doua la 30 cm de aceasta.

**b.** Mărirea liniară transversală produsă de lentila a doua este $\beta_2 = \dfrac{x_2'}{x_1'} = \dfrac{f_2}{f_2 + x_1'} = -3$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = 1{,}5$. Imaginea finală este dreaptă în raport cu obiectul inițial și de 1,5 ori mai mare decât acesta.

**c.** Cum $\beta_s = \dfrac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = 3$ cm, imaginea $A_f B_f$ are înălțimea de 3 cm.

**44.a.** Din formula lentilelor subțiri: $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{f_1}$ aflăm unde formează prima lentilă imaginea: $x_2 = \dfrac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 6{,}25$ cm. Deoarece prima lentilei formează imaginea obiectului la distanța de 6 cm în fața lentilei, atunci $d = x_2 - x'_1 = 12{,}25$ cm

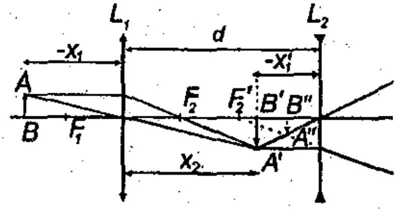



**b.** Lentila a doua formează imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \dfrac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = -15$ cm ca în figură.

**c.** Măririle liniare transversale produse de lentile sunt $\beta_1 = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{f_1}{f_1 + x_1} = -\dfrac{1}{4}$ și $\beta_2 = \dfrac{x_2'}{x_1'} = \dfrac{f_2}{f_2 + x_1'} = 2{,}5$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obține cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -0{,}625$. Astfel înălțimea imaginii formate de sistemul de lentile este $y_f = |\beta|_s y_1 = 7{,}5$ cm

**45.a.** Deoarece imaginea formată de prima lentilă este reală, răsturnată și la fel de mare ca obiectul, atunci $\beta_I = -1$. Astfel cum $\beta = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = -x_1 = 20$ cm și din formula lentilelor subțiri: $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{f_1} \Rightarrow -\dfrac{2}{x_1} = \dfrac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = -\dfrac{x_1}{2} = 10$ cm

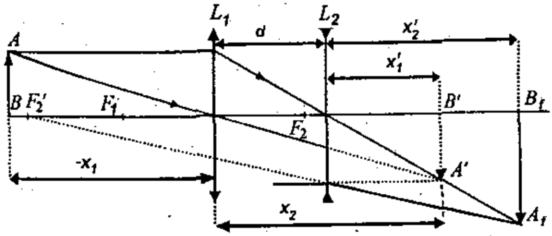
**b.** Imaginea formată de prima lentilă se află în fața celei de-a doua lentilă, astfel că $d = x_2 - x'_1 \Rightarrow x'_1 = x_2 - d = -10$ cm. Lentila a doua are distanța focală $f_2 = 1/C_2 = -10$ cm. Imaginea finală este



virtuală şi se formează în faţa lentilei a doua în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -5$ cm

**c.** Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile se obţine cu formula: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2$. Măririle liniare transversale produse de lentile sunt $\beta_1 = -1$ şi $\beta_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{f_2}{f_2 + x'_1} = 0{,}5$, astfel că $\beta_S = -0{,}5$

**46.a.** Prima lentilă este convergentă şi are distanţa focală $f_1 = 1/C_1 = 25$ cm. Pentru obiectul real aflat în faţa sa la $x_1 = -30$ cm, lentila va forma o imagine reală la $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 150$ cm de ea.




**b.** Deoarece lentila a doua este divergentă şi are distanţa focală $f_2 = 1/C_2 = -80$ cm, iar imaginea reală $A'B'$ a primei lentile se formează în spatele lentilei divergente la $x'_1 = x_2 - d = 30$ cm. Această imagine $A'B'$ joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă. Lentila divergentă va forma în final o imagine la $x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = 48$ cm de ea, deoarece $x'_2 > 0$. Imaginea finală este reală şi se formează mai departe decât vechea imagine cu $x'_2 - x'_1 = 18$ cm. Ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu 18 cm spre dreapta

**c.** Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -5$ şi $\beta_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{f_2}{f_2 + x'_1} = 1{,}6$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -8$. Imaginea finală este răsturnată şi de opt ori mai mare decât obiectul Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = 1{,}6$ cm înălţimea imaginii finale este 1,6 cm.

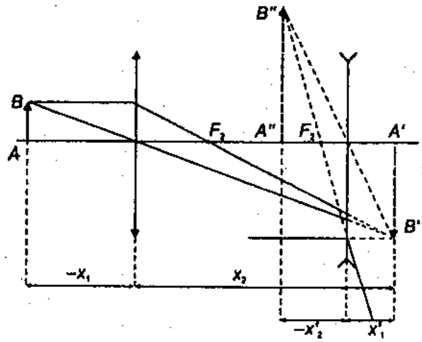
**47.a.** Prima lentilă este convergentă deoarece $C_1 > 0$, iar a doua este o lentilă divergentă, deoarece $C_2 < 0$. Pentru sistemul echivalent de lentile acolate obţinem $C = C_1 + C_2 = 8$ m$^{-1}$ iar $F = 1/C = 12{,}5$cm.

**b.** Utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{F}$, aflăm unde formează lentila echivalentă imaginea obiectului, astfel că $x_2 = \frac{F \cdot x_1}{F + x_1} = 25$ cm, deoarece $x_1 = -25$ cm. Imaginea este reală deoarece se formează în spatele lentilei echivalente.

**c.** Calculăm unde formează lentila convergentă imaginea obiectului. Cum $f_1=1/C_1=10$ cm obținem $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=\frac{50}{3}$ cm, deoarece $x_1=-25$ cm. Această imagine este obiect pentru cea de-a doua lentilă. Cum $x_1'=x_2-d=10$ cm, $A'B'$ este obiect virtual pentru lentila divergentă, deoarece se află în spatele acestaia ca în figura de la problema precedentă. Lentila divergentă cu distanța focală $f_2=1/C_2=-50$ cm, va forma o imagine finală la $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=12{,}5$ cm de ea. Imaginea finală este reală, deoarece se formează în spatele lentilei divergente.

**48.a.** Alipind cele două lentile obținem o nouă lentilă cu convergența $C=C_1+C_2=0$ dioptrii.

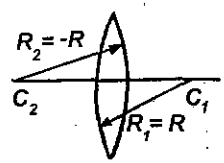
**b.** Deoarece $C_1=10$ m$^{-1}$ și $C_2=-10$ m$^{-1}$ distanțele focale ale celor două lentile sunt: $f_1=1/C_1=10$ cm și $f_2=1/C_2=-10$ cm. Pe baza formulelor lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}$ aflăm unde formează imaginea obiectului prima lentilă: $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}=20$ cm, deoarece $x_1=-20$ cm. Lentila convergentă formează o imagine reală a obiectului, imagine care joacă rol de obiect pentru lentila divergentă. Cum $x_1'=x_2-d=15$ cm, înseamnă că $A'B'$ este obiect virtual pentru lentila divergentă, deoarece se află în spatele acesteia. Lentila divergentă formează imaginea finală a obiectului în punctual de coordonată $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}=-30$ cm. Imaginea finală se formează în fața lentilei divergente la 30 cm de aceasta și este o imagine virtuală, conform figurii.




**c.** Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=-1$ și $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=-2$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=2$. Imaginea finală este dreaptă și de două ori mai mare decât obiectul Cum $\beta_s=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow y_2=\beta_s\cdot y_1=8$ cm, înălțimea imaginii finale este 8 cm.

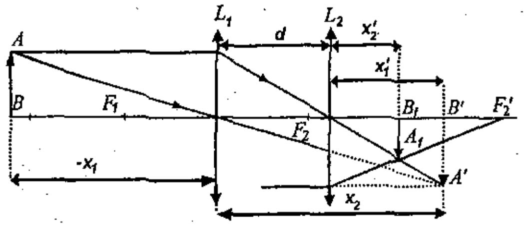
**49.a.** Din formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ obținem distanța focală a lentilei $L_1$ $f_1=\frac{x_1x_2}{x_1-x_2}$=50 cm

**b.** Deoarece $C_1 = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{|R|} = \frac{1}{f_1}$ pentru că $R_1 = |R|$ şi $R_2 = -|R|$, obţinem $|R| = 2(n-1)f_1 = 45$ cm




**c.** Imaginea reală formată de lentila convergentă este reală şi situată în spatele lentilei divergente, astfel că joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă. Cum $x'_1 = x_2 - d = 25$ cm, din formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_2}$ obţinem coordonata imaginii dată de sistem, măsurată faţă de lentila $L_2$ $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} \approx -33{,}33$ cm (desen problema precedentă)

**50.a.** Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului real pe baza formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 120$ cm. Imaginea reală formată de prima lentilă joacă rol de obiect pentru cea de-a doua lentilă. Cum $x'_1 = x_2 - d = 20$ cm, această imagine este obiect virtual pentru lentila a doua, deoarece $A'B'$ se formează în spatele lentilei a doua. Calculăm unde se formează imaginea finală cu ajutorul lentilei a doua:




$x'_2 = \frac{f_2 \cdot x'_1}{f_2 + x'_1} = 15$ cm. Imaginea finală este reală deoarece se formează în spatele lentilei.

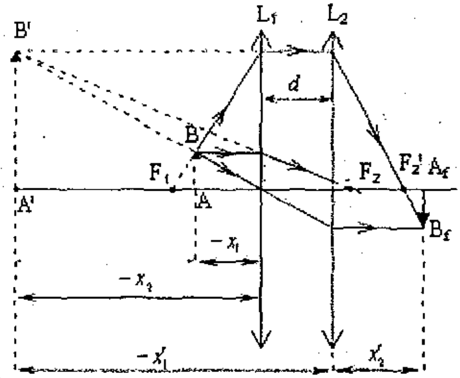
**b.** Calculăm măririle liniare transversale produse de cele două lentile: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -3$ şi $\beta_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{f_2}{f_2 + x'_1} = 0{,}75$ şi prin urmare mărirea liniară transversală produsă de sistemul de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -2{,}25$. Imaginea finală este răsturnată faţă de obiectul iniţial şi de 2,25 ori mai mare decât obiectul.

**c.** Imaginea finală are mărimea $y_2 = |\beta_s| y_1 = 13{,}5$ cm

**51.a.** Utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ şi a măririi liniare transverale $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1}$ obţinem $x_1 = \frac{f_1(1-\beta_1)}{\beta_1}$ şi $x_2 = f_1(1-\beta_1)$. Cum

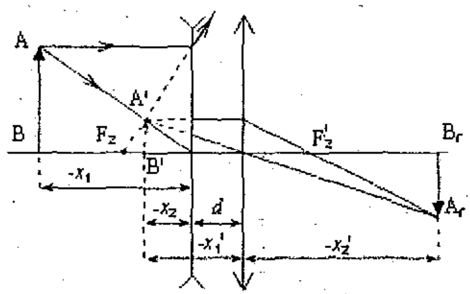
$$d = -x_1 + x_2 = \frac{f(1-\beta_1)^2}{\beta_1} \Rightarrow f_1 = \frac{d \cdot \beta_1}{(1-\beta_1)^2} = 36 \text{ cm}.$$

**b.** Imaginea formată de prima lentilă convergentă este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei și de aceea imaginea $A'B'$ este dreaptă și mai mare decât obiectul. Această imagine se formează față de a doua lentilă în fața acesteia și din această cauză joacă rol de obiect real pentru această lentilă. Cum $x_2 = f_1(1-\beta_1) = -72$ cm $\Rightarrow$ $x_1' = x_2 - d = -96$ cm. Aflăm unde se formează imaginea finală cu ajutorul celei de-a doua lentile $x_2' = \dfrac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 32$ cm. Lentila a doua formează în final o imagine reală, situată în spatele lentilei a doua la 32 cm de aceasta.




**c.** Mărirea produsă de a doua lentilă: $\beta_2 = \dfrac{x_2'}{x_1'} = \dfrac{f_2}{f_2 + x_1'} = -\dfrac{1}{3}$, astfel că mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este: $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1$. Imaginea finală este la fel de mare ca obiectul, dar este răsturnată. Cum $y_2 - \beta_s \cdot y_1 = -10$ cm, imaginea finală are înălțimea de 10 cm.

**52.a.** Distanțele focale ale lentilelor sunt:
$f_1 = 1/C_1 = -10$cm și $f_2 = 1/C_2 = 12{,}5$ cm
**b.** Aflăm unde formează lentila divergentă imaginea obiectului. Utilizăm formula lentilelor subțiri:
$\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = -7{,}5$cm.
Imaginea formată de prima lentilă este virtuală, deoarece se formează în fața lentilei ca în figură. Această imagine joacă rol de obiect real pentru lentila convergentă, deoarece $x_1' = x_2 - d = -15$ cm. Lentila convergentă formează imaginea finală la $x_2' = \dfrac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 75$ cm de ea. Pelicula se așază la 75 cm de lentila convergentă.




**c.** Calculăm măririle liniare transversale ale celor două lentile: $\beta_1 = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{f_1}{f_1 + x_1} = \dfrac{1}{4}$ și $\beta_2 = \dfrac{x_2'}{x_1'} = \dfrac{f_2}{f_2 + x_1'} = -5$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1{,}25$. Imaginea finală este răsturnată și de 1,25 ori mai mare decât obiectul.

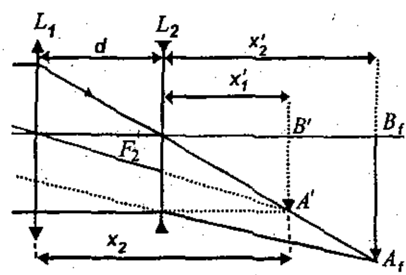
**53.a.** Aflăm coordonata punctului unde formează lentila divergentă imaginea obiectului utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$. Astfel că $x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}\approx-26{,}66$ cm. Imaginea virtuală formată de lentila divergentă joacă rol de obiect real pentru lentila convergentă, astfel că $x_1'=x_2-d=-66{,}66$ cm. Lentila convergentă formează imaginea la distanţa $x'_2=\frac{f_2\cdot x'_1}{f_2+x'_1}=100$ cm de ea. Mersul razelor de lumină este redat în figura de la problema precedentă.

**b.** Măririle liniare transversale ale celor două lentile sunt: $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f_1}{f_1+x_1}=\frac{1}{3}$ şi $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=-\frac{3}{2}$. Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s=\beta_1\cdot\beta_2=-0{,}5$.

**c.** Convergenţa sistemului obţinut prin alipirea lentilelor este $C_s=C_1+C_2$, astfel că $C_S=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=0$

**54.a.** Deoarece imaginea se formează pe ecran, aceasta este reală şi prin urmare $\beta_1=-4$, deoarece imaginea este de patru ori mai mare decât obiectul. Utilizând formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ şi a măririi liniare transversale $\beta_1=\frac{x_2}{x_1}$ aflăm distanţa focală a primei lentile: $f_1=\frac{\beta_1\cdot x_1}{1-\beta_1}=\frac{x_2}{1-\beta}$.
Deoarece $f_1$=4 cm convergenţa lentilei este $C_1=1/f_1$=25 m$^{-1}$.

**b.** Din datele problemei $x_1'=\frac{x_2}{2}=10$ cm, astfel că imaginea reală formată de lentila convergentă se formează în spatele lentilei divergente jucând rolul de obiect virtual pentru aceasta. Deoarece ecranul trebuie depărtat pentru a se prinde imaginea de acesta, înseamnă că imaginea finală este reală. Din geometrie, $x_2'=d+\frac{x_2}{2}=30$ cm.




Distanţa focală a lentilei a doua se află utilizând formula lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow f_2=\frac{x_1'\cdot x_2'}{x_1'-x_2'}=-15$ cm.

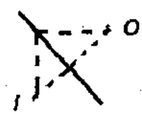
**c.** Mărirea liniară transversală formată de lentila divergentă este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = 3$.

Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -12$.

Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow y_2 = \beta_s \cdot y_1 = -12$ cm, imaginea finală este răsturnată şi de 12 ori mai mare decât obiectul.

**55.a.** Distanţa focală a primei lentile este $f_1 = 1/C_1 = 20$ cm, Această lentilă formează imaginea obiectului aflat în punctul de coordonată $x_1 = -25$ cm la distanţa $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 100$ cm de ea

**b.** Această imagine se formează în spatele oglinzii plane la $d = 50$ cm de aceasta şi joacă rol de obiect virtual pentru oglindă. Datorită faptului că oglinda este înclinată cu unghiul $\alpha = 45^0$ faţă de axa optică principală a primei lentilei, aceasta va forma pentru obiectul virtual o imagine reală situată la 50 cm de oglindă sub axul optic ca în figură. Aceată imagine reală $I$ se află în faţa lentilei a doua. Această lentilă va forma în final o imagine reală situată la distanţa $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = 150$ cm de ea, deoarece $x'_1 = -30$ cm




**c.** Datorită primei lentile $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -4$, iar datorită lentilei a doua $\beta_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{f_2}{f_2 + x'_1} = -5$. Oghinda întoarce doar razele de lumină fără să modifice dimensiunile obiectului, astfel că mărirea liniară transversală a sistemului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = 20$

**56.a.** Deoarece imaginea obţinută cu lentila convergentă este reală şi de trei ori mai mare decât obiectul, atunci $\beta = -3$. Din $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ şi din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obţinem distanţa focală a lentilei convergente $f_1 = \frac{\beta \cdot x_1}{1 - \beta} = 3$ cm. Înlocuind lentila convergentă cu o lentilă divergentă obţinem distanţa focală a lentilei divergente $f_2 = \frac{\beta' \cdot x_1}{1 - \beta'} = -2$ cm cu $\beta' = 1/3$

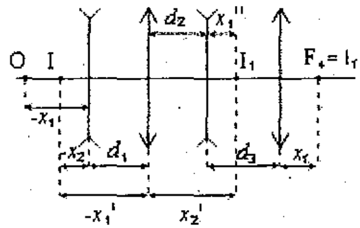
**b.** Lentila convergentă formează imaginea obiectului la distanţa $x_2 = \beta x_1 = 12$ cm de ea. Această imagine se formează în faţa lentilei divergente, astfel că $x_1' = x_2 - d = -4$ cm. Lentila divergentă va forma imaginea în punctul de coordonată $x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = -\frac{4}{3}$ cm

Mărirea liniară transversală formată de lentila divergentă este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{1}{3}$.

Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2 = -1$

**c.** Pentru ca lentila divergentă să formeze o imagine care se prinde pe un ecran, această imagine trebuie să fie reală. Acest lucru se întâmplă dacă obiectul este virtual şi situat între lentilă şi focarul obiect al acesteia, astfel că $x'_1 \in [0,2]$ cm. Pentru distanţa $d = x_2 - x'_1$ dintre lentile obţinem $d_{min}=x_2+f_2=10$ cm şi $d_{max}=x_2=12$ cm. Lentila divergentă de deplasează pe o distanţă cuprinsă între 4 cm şi 6 cm spre lentila convergentă.

**57.a.** Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului aflat în faţa lentilei la $x_1=-10$ cm de aceasta. Aplicăm formula lentilelor subţiri:



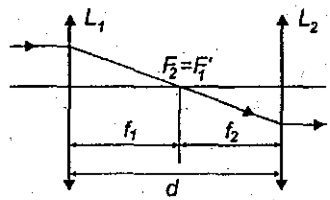

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = -\frac{10}{3}\text{cm}.$$

Imaginea este virtuală, deoarece se formează în faţa lentilei.

**b.** Această imagine $I$ este obiect real pentru a doua lentilă convergentă, deoarece $x_1' = x_2 - d_1 = -10\,\text{cm}$. A doua lentila convergentă va forma o imagine la $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 10$ cm de ea, deci imaginea $I_1$ este reală, dar se formează în spatele lentilei a treia şi deci joacă rol de obiect virtual pentru această lentilă.

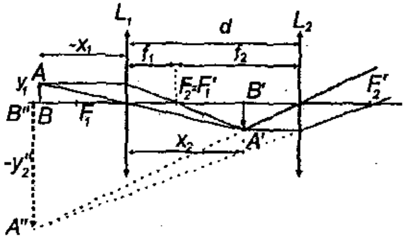
**c.** Din geometrie, $x_1'' = x_2 - d_2 = 5$ cm şi aflăm unde formează imaginea a treia lentila divergentă, pentru obiectul virtual $I_1$: $x_2'' = \frac{f_3 \cdot x_1''}{f_2 + x_1''} \to \infty$. Razele de lumină emerg paralel cu axul optic principal, după refracţia prin lentila divergentă. Aceste raze cad pe a patra lentila convergentă şi aceasta va forma imaginea finală reală în focarul ei principal imagine, adică la $x_f = f_4 = 5$ cm de ea şi în spatele ei.

**58.a.** Un sistem afocal are proprietatea că o rază paralelă cu axul optic principal după refracţia prin cele două lentile iese din sistem paralel cu axul optic principal ca în figură. Un astfel de sistem are proprietatea că distanţa dintre lentile este suma distanţelor focale ale lentilelor componente: $d = f_1 + f_2$.




**b.** Mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta_s = \beta_1 \cdot \beta_2$. Aflâm măririle produse de fiecare din cele două lentile componente. Pentru prima lentilă: $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1}$, deoarece conform formulei lentilelor subţiri:

$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}\Rightarrow x_2=\frac{f_1\cdot x_1}{f_1+x_1}$. Imaginea formată de prima lentilă este obiect pentru cea de-a doua lentilă. Din geometrie: $x_1'=x_2-d$ şi cum sistemul de lentile este afocal $d=f_1+f_2\Rightarrow$ $x_1'=x_2-f_1-f_2$. Lentila a doua formează în final o imagine la $x_2'=\frac{f_2\cdot x_1'}{f_2+x_1'}$ faţă de




ea şi cu o mărire liniară transversală $\beta_2=\frac{x_2'}{x_1'}=\frac{f_2}{f_2+x_1'}=\frac{f_2}{x_2-f_1}$. Introducând $x_2$ în $\beta_2$, obţinem $\beta_2=-\frac{f_2(f_1+x_1)}{f_1^2}\Rightarrow\beta_s=-\frac{f_2}{f_1}$. Observăm că mărirea sistemului afocal nu depinde de poziţia obiectului în raport cu sistemul afocal, dar depinde de distanţele focale ale lentilelor componente ale acestuia.

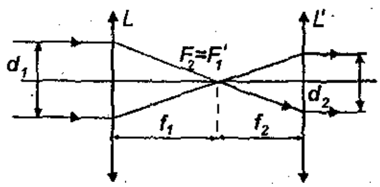
**c.** Prin particulerizare obţinem $d$=70 cm şi $\beta$=−2,5.

**59.a.** Cum sistemul este afocal, pe baza proprietăţiilor sistemului afocal: $d=f_1+f_2$ şi cum măriea liniară transversală a sistemului afocal este: $\beta=-\frac{f_2}{f_1}$ obţinem distanţele focale ale celor două lentile $f_1=\frac{d}{1-\beta}$=30 cm şi $f_2=-\frac{\beta\cdot d}{1-\beta}$=10 cm

**b.** Pe baza mersului razelor de lumină, utilizând asemănarea triunghiurilor formate aflăm diametrul fasciculului de lumină emergent: $\frac{d_2}{d_1}=\frac{f_2}{f_1}\Rightarrow d_2=\frac{f_2}{f_1}d_1=1$ cm.

**c.** Când acolăm cele două lentile se obţine o singură lentilă cu convergenţa: $C=C_1+C_2\Rightarrow$

$$C=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=-\frac{(\beta-1)^2}{d\cdot\beta}.$$

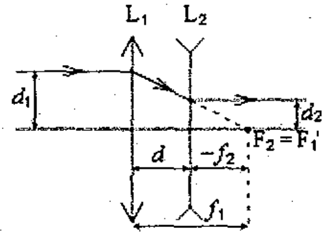



**60.a** Deoarece obiectul se află la o distanţă infinit de mare în faţa primei lentile imaginea lui se va forma pe baza formulei lentilelor subţiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ în focarul imagine al primei lentile, deoarece $x_1\to-\infty$. Această imagine punctiformă se află în faţa lentilei divergente în punctul de coordonată $x'_1=f_1-d=-3$ cm. Lentila convergentă va forma imaginea în punctul de coordonată $x'_2=\frac{f_2x'_1}{f_2+x'_1}=-12$ cm

**b.** Dacă din situația inițială lentila a doua se îndepărtează cu 1 cm de prima lentilă atunci distanța dintre ele devine $d$=24 cm. Aflăm unde formează prima lentilă imaginea obiectului utilizând formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$. Obținem $x_2=\frac{f_1x_1}{f_1+x_1}$=40 cm. Deoarece $x'_1=x_2-d=16$ cm înseamnă că imaginea formată de prima lentilă se află în spatele celei de-a doua lentilă şi joacă rol de obiect virtual pentru aceasta. Lentila a doua formează imaginea în punctul $x'_2=\frac{f_2x'_1}{f_2+x'_1}=3{,}2$ cm. Imaginea finală este reală deoarece se formează în spatele lentilei a doua.

**c.** Deoarece observăm că $d=f_1+f_2$ înseamnă că sistemul de lentile este afocal. Astfel mărirea liniară transversală a sistemului de lentile este $\beta=-\frac{f_2}{f_1}$=–0,2.

**61.a.** Deoarece un fascicul paralel cu axul optic principal părăseşte sistemul tot paralel cu axul optic principal, sistemul de lentile este afocal. Razele de lumină se propagă ca în figură. Astfel:




$d=f_1+f_2$=–10 cm

**b.** Deoarece mărirea liniară transversală a sistemului afocal este $\beta=-\frac{f_2}{f_1}=\frac{y_2}{y_1}\Rightarrow$

$y_2=-\frac{f_2y_1}{f_1}=3$ cm. Imaginea finală obținută se formează de aceeaşi parte cu obiectul şi este de trei ori mai mică decât obiectul

**c.** Când acolăm cele două lentile se obține o singură lentilă cu convergența:

$$C=C_1+C_2\Rightarrow C=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{f_1+f_2}{f_1f_2}\approx-13{,}33\ \text{m}^{-1}$$

**62.a.** Deoarece sistemul este afocal $d=f_1+f_2\Rightarrow f_2=d-f_1=-10$ cm

**b.** Mărirea liniară transversală a sistemului afocal este $\beta=-\frac{f_2}{f_1}=\frac{1}{3}$

**c.** Când sistemul de lentile se introduce în apă se schimbă distanțele focale ale lentilelor. Pe baza formulelor convergenței obținem convergențele lentilelor în apă şi respectiv în aer:

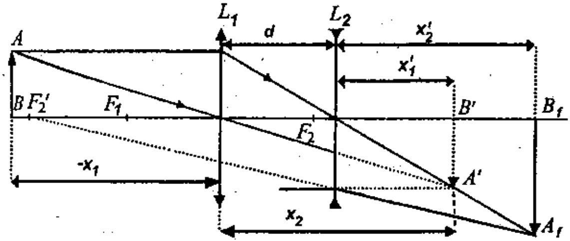
$$C_{apa}=\frac{1}{f_{apă}}=\left(\frac{n}{n_a}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\text{ şi }C_{aer}=\frac{1}{f_{aer}}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Prin împărțirea celor două relații, obținem distanța focală a primei lentile la introducerea în apă: $\frac{f_{1apă}}{f_{1aer}}=\frac{(n-1)n_a}{(n-n_a)}\Rightarrow f_{1apă}=\frac{f_{1aer}(n-1)n_a}{n-n_a}$. Analog distanța focală a celei de-a doua lentilă la introducerea în apă devine: $f_{2apă} = \frac{f_{2aer}(n-1)n_a}{n-n_a}$. Cum sistemul de lentile trebuie să rămână afocal şi în apă, distanţa dintre lentile devine:

$$d_{apă} = f_{1apă} + f_{2apă} = \frac{(n-1)n_a}{n-n_a}(f_1+f_2) = 80\,\text{cm}.$$

**63.a.** Aflăm unde formează lentila convergentă imaginea obiectului real pe baza formulei $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 120$ cm, deoarece $x_1 = -40$ cm $\Rightarrow$ ecranul se aşază în spatele lentilei convergente la 120 cm de aceasta.

**b.** Imaginea obţinută cu ajutorul lentilei convergente, se formează în spatele lentilei divergente şi joacă rol de obiect virtual pentru aceasta, deoarece $x_1' = x_2 - d_1$ =10 cm ca în figură. Aflăm unde formează lentila divergentă imaginea obiectului virtual



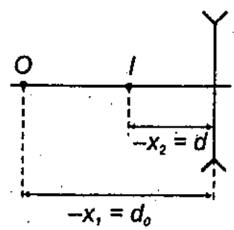

cu ajutorul formulei lentilelor subţiri: $\frac{1}{x_2'} - \frac{1}{x_1'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 20$ cm.

Deoarece $x_2' > 0$, înseamnă că lentila divergentă formează o imagine reală situată mai departe de ea. Prin urmare ecranul se va depărta de lentila divergentă cu $\Delta x = x_2' - x_1' = 10$ cm, pentu a se putea prinde imaginea finală formată de sistemul de lentile pe el.

**c.** Dacă se formează un sistem afocal cu cele două lentile, atunci $d = f_1 + f_2 = 10$ cm reprezintă distanţa dintre cele două lentile. Mărirea sistemului afocal este $\beta_s = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{3}$.

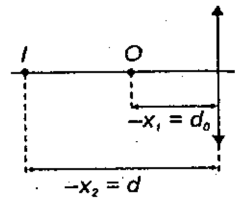
## 1.3. Instrumente optice

**1.** Ochiul uman se comportă ca o lentilă convergentă ce formează pentru obiecte reale imagini reale pe retină. Lentila aşezată în faţa ochiului şi lipită de acesta (lentilă de contact) formează pentru un obiect aşezat la distanţa optimă de citire o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul. Cum $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d = -20$ cm, utilizând formula lentilelor subţiri obţinem:




$\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \Rightarrow f = \frac{d_0 d}{d - d_0} = -100$ cm. Prin urmare vederea miopului se corectează cu o lentilă divergentă cu convergenţa $C = -1$ dioptrie.

2. Lentila aşezată în faţa ochiului şi lipită de acesta (lentilă de contact) formează pentru un obiect aşezat la distanţa optimă de citire o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul. Pentru hipermetrop $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d = -30$ cm şi din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}$ obţinem distanţa focală a lentilei:



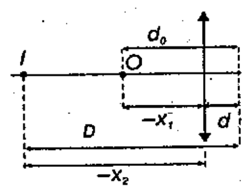

$f = \frac{d_0 d}{d - d_0} = 150$ cm. Vederea la apropiere a hipermetropului se corectează cu o lentilă convergentă cu convergenţa $C = \frac{1}{f} = 0{,}66$ dioptrii.

3. Punctul remotum reprezintă distanţa cea mai mare la care vede ochiul. Pentru a putea distinge obiectele aflate la infinit se utilizează o lentilă de contact care să formeze pentru obiectele aflate la infinit o imagine virtuală situată în punctul remotum. Astfel $x_1 \to -\infty$ şi $x_2 = -d$ şi din formula lentilelor subţiri $\frac{1}{f} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{d}$ obţinem $f = -d = -1$ m. Corecţia vederii la distanţă se face cu o lentilă divergentă cu convergenţa $C = -1$ dioptrie.

4. Corecţia vederii prezbitului la apropiere se face cu ajutorul unei lentile mici aflată în partea de jos a ochelarului. Calculăm convergenţa acestei lentile, ţinând cont că $x_1 = -d_0 = -25$ cm şi $x_2 = -d_1 = -40$ cm, astfel că $C_1 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1} = \frac{d_1 - d_0}{d_0 d_1} = 1{,}5$ dioptrii. Lentila care corectează vederea la apropiere este convergentă.

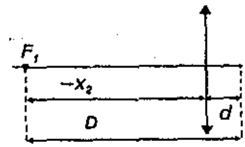
Corecţia vederii prezbitului la distanţă se face cu ajutorul unei lentile mari aflate în partea superioară a ochelarului. Ţinând cont că $x_1 \to -\infty$ pentru că obiectul se află la infinit şi $x_2 = -d_2 = -50$ cm pentru că imaginea virtuală se formează în punctul remotum, obţinem $C_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{d_2} = -2$ dioptrii. Lentila care corectează vederea la depărtare este divergentă.

5. Persoana distinge obiectele aflate între 40 cm şi punctul de infinit. Calculăm distanţa minimă la care vede persoana când utilizează ochelari cu distanţa focală $f = 1/C = 100$ cm.



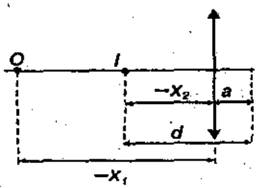

Lentila convergentă formează pentru un obiect aşezat la $d_0$ de ochi, o imagine virtuală în punctul în care vede ochiul, astfel cî $d_0 = -x_1 + d$. Dar cum $D = -x_2 + d \Rightarrow x_2 = d - D = -39$ cm, astfel că pe baza formulei lentilelor subţiri

$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f\cdot x_2}{f-x_2}=-28{,}05$ cm. Obținem $d_0$=29,05 cm. Aflăm distanța maximă la care vede ochiul când se utilizează lentila. Pentru obiectele aflate la infinit, lentila formează o imagine virtuală în focarul ei obiect, astfel că din $x_1\to-\infty\Rightarrow$ $x_2=-f=-100$ cm. Astfel $D=-x_2+d=101$ cm reprezintă distanța maximă la care se pot distinge obiectele cu ajutorul lentilei. Limitele vederii distincte sunt 29,05 cm și 101 cm.




**6.** Calculăm distanța focală a lentilei ce corectează vederea la distanță a celui de-al doilea miop. Conform relației $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$, pentru obiectul aflat la infinit, imaginea se formează în fața lentilei la $x_2=-d_2\Rightarrow f=x_2=-4$ m. Calculăm distanța până la care vede primul miop utilizând ochelarii celuilalt miop pe baza formulei: $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}$. Cum această lentilă formează pentru un obiect o imagine în punctul în care vede ochiul și deci $x_2'=-d_1=-2$ m atunci $x_1'=\frac{f\cdot x_2'}{f-x_2'}=-4$ m. Distanța până la care vede primul miop cu ochelarii celui de-al doilea miop este de 4 m, deci poate vedea la televizor!

**7.** Calculăm distanța focală a lentilelor care permit omului să vadă la distanță. Pentru obiectele aflate la infinit, lentila va forma o imagine virtuală în puntul remotum. Astfel $x_1\to-\infty$ și $x_2=-D$ și pr baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$ obținem $f=x_2=-D=-3$ m. Aflăm distanța minimă a vederii clare, când miopul utilizează lentilele de distanță. Cum $x_2'=-d=-20\,\text{cm}$ obținem $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_2'}-\frac{1}{x_1'}\Rightarrow-\frac{1}{D}=-\frac{1}{d}-\frac{1}{x_1'}\Rightarrow x_1'=\frac{D\cdot d}{d-D}\approx21{,}4$ cm. Distanța minimă a vederii clare este 21,4 cm.




**8.** Lentila utilizată are distanța focală $f$=1/$C$=2 cm. Aflăm limita minimă a vederii clare. Din desen $-x_2+a=d\Rightarrow x_2=a-d=-8$ cm, deoarece imaginea se formează în punctul proximum. Pe baza formulei lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f\cdot x_2}{f-x_2}=-1{,}6\,\text{cm}$.

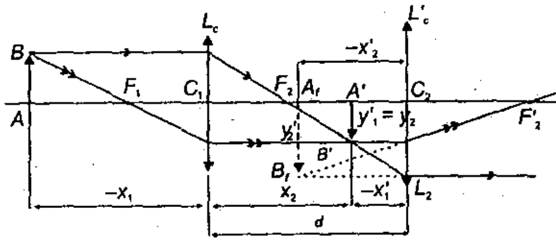
Obiectul se află față de ochi la distanța $d_{min}=-x_1+a\Rightarrow d_{min}=3{,}6$ cm.

Aflăm limita maximă a vederii clare. Cum imaginea trebuie să se formeze în punctul remotum $-x_2'+a=D\Rightarrow x_2'=a-D=-198$ cm, obiectul se află față de lentilă la $x_1'=\frac{f\cdot x_2'}{f-x_2'}=-1{,}98$ cm, astfel că distanța maximă la care se află obiectul față de ochi este $D_{max} = -x_1' + a = 3{,}98$ cm. Prin urmare observatorul poate să deplaseze obiectul față de lentilă fără a înceta să vadă clar linia pe distanța $D_{max} - d_{min} = 3{,}8$ mm.

**9.** Deoarece razele de lumină care vin de la Soare și care cad pe lentilă formează un fascicul paralel de lumină, după ce traversează lentila se strâng în focarul imagine. Pentru ca hârtia să se carbonizeze, aceasta trebuie așezată în planul focal imagine al lentilei convergente.

Cum $\beta = \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \beta \cdot x_1 = -d_0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{d_0}{\beta}$. Din formula lentilelor subțiri $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}$ obținem $f = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{d_0}{\beta - 1} = 5$ cm. Hârtia se așază față de lentilă la 5 cm în spatele lentilei, în planul focal imagine al lentilei.

**10.** Aflăm unde formează obiectivul imaginea obiectului din formula lentilelor subțiri $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1}$

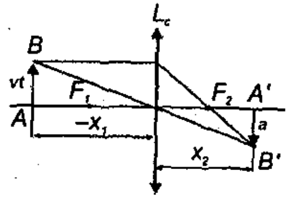



$x_2$=6m, deoarece $x_1$=−3 mm. Imaginea formată de obiectiv este reală. Această imagine joacă rol de obiect pentru lentila ocular, care formează o imagine virtuală la distanța optimă de citire. Această imagine virtuală este preluată de ochi.

Deoarece $x_2' = -25\,\text{cm}$, din $\dfrac{1}{x_2'} - \dfrac{1}{x_1'} = \dfrac{1}{f_2} \Rightarrow x_1' = \dfrac{x_2' \cdot f_2}{f_2 - x_2'} \approx -2{,}678$ cm. Distanța dintre cele două lentile este: $d = x_2 - x_1' \approx 32{,}78$ mm.

**11.** Aparatul de fotografiat este format din mai multe lentile, astfel că sistemul este echivalent cu o lentilă convergentă. Aflăm unde trebuie pusă pelicula fotografică în primul caz, pentru a se prinde imaginea pe peliculă. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \dfrac{f \cdot x_1}{f + x_1}$. Mărirea liniară transversală este $\beta_1 = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{f}{f + x_1}$. Cum $\beta_1 = \dfrac{h_1}{o} \Rightarrow \dfrac{f}{f + x_1} = \dfrac{h_1}{o}$ (1), unde $o$ este înălțimea obiectului și analog $\beta_2 = \dfrac{f}{f + x_1'} = \dfrac{h_2}{o}$ (2). Prin împărțirea relațiilor (1) la (2), obținem $\dfrac{f + x_1'}{f + x_1} = \dfrac{h_1}{h_2} \Rightarrow \dfrac{f - d_2}{f - d_1} = \dfrac{h_1}{h_2}$ deoarece $x_1 = -d_1 = 20$ m și $x_1' = -d_2 = -15$ m. Obținem distanța focală $f = \dfrac{d_2 h_2 - d_1 h_1}{h_2 - h_1} = 10$ m.

**12.** Deoarece $x_1=-5$ m, imaginea pe peliculă a patinatorului dacă nu s-ar deplasa s-ar forma față de lentilă la distanța $x_2=\frac{f\cdot x_1}{f+x_1}=10{,}2$ cm.

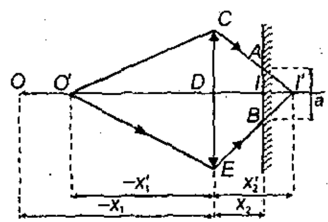



Pe baza asemănării triunghiurilor din figura alăturată obținem: $-\frac{x_2}{x_1}=\frac{a}{v\cdot t}\Rightarrow t=-\frac{a(f+x_1)}{v\cdot f}\approx 2$ ms.

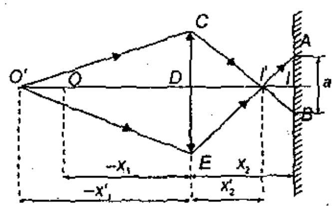
**13.** Deoarece cunoaştem $x_1=-15$ cm şi $x_2=20$ cm aflăm distanța focală a sistemului de lentile: $\frac{1}{F}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\Rightarrow F=\frac{x_2x_1}{x_1-x_2}=\frac{60}{7}$ cm. Când acolăm două lentile, convergența sistemului se calculează cu formula $C=C_1+C_2\Rightarrow$ $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\Rightarrow f_2=\frac{Ff_1}{f_1-F}=30$ cm. Astfel lentila alipită este convergentă.

**14.a.** Aflăm unde trebuie să aşezăm pelicula fotografică când obiectul $O$ se află la $x_1=-4$ m. Din formula lentilelor subțiri obținem $x_2=\frac{f\cdot x_1}{f+x_1}\approx 26{,}66$cm.

Dacă obiectul $O'$ se află față de aparatul de fotografiat la $x_1'=-3$ m, atunci imaginea se formează în $I'$ la $x_2'=\frac{f\cdot x_1'}{f+x_1'}\approx 27{,}27$ cm. Pe baza asemănării triunghiurilor $CEI'$ cu $ABI'$ obținem: $\frac{x'_2}{x_2'-x_2}=\frac{D}{d}\Rightarrow D=\frac{x'_2\,d}{x_2'-x_2}\approx 4{,}47$ mm.

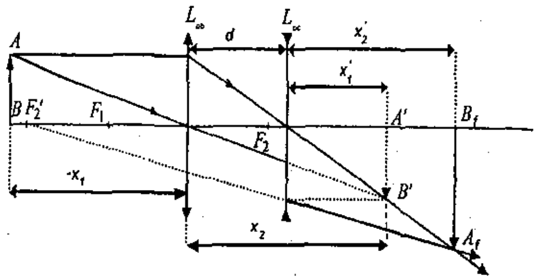



**b.** Dacă obiectul $O'$ se află față de aparatul de fotografiat la $x_1'=-6$ m, atunci imaginea se formează în $I'$ la $x_2'=\frac{f\cdot x_1'}{f+x_1'}\approx 26{,}09$ cm. Pe baza asemănării triunghiurilor $CEI'$ cu $ABI'$ obținem: $\frac{x'_2}{x_2-x'_2}=\frac{D}{d}\Rightarrow D=\frac{x'_2\,d}{x_2-x'_2}\approx 4{,}57$ mm




**15.** Aflăm unde trebuie aşezat diapozitivul față de lentila de proiecție. Utilizăm formula lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow x_1=\frac{f\cdot x_2}{f-x_2}=-21$ cm. Cum mărirea aparatului de proiecție este $\beta=\frac{x_2}{x_1}=\frac{f-x_2}{f}=-19$. Dimensiunile laturilor imaginii pe ecranul de proiecție sunt $y_2 = \beta \cdot y_1 = 57$ cm și $y_2' = \beta \cdot y_1' = 76$ cm.

**16.a.** Calculăm unde formează obiectivul imaginea obiectului real. Cum $x_1 = -30$ cm atunci $x_2 = \frac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 7{,}5$ cm. Imaginea obținută cu ajutorul lentilei obiectiv este reală. Această imagine joacă rol de obiect virtual pentru lentila ocular divergentă, deoarece $x_1' = d - x_2 = 6$ cm, imaginea formată de obiectiv aflându-se în spatele lentilei ocular. Aflăm



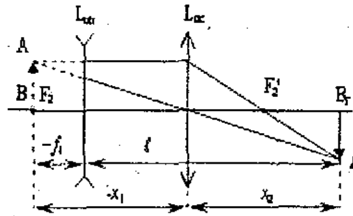

unde formează ocularul imaginea finală, astfel că $x_2' = \frac{f_2 \cdot x_1'}{f_2 + x_1'} = 15$ cm.

Imaginea finală este reală și se prinde pe pelicula fotografică.

**b.** Mărirea produsă de obiectiv este $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -\frac{1}{4}$ iar cea produsă de ocular este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2}{f_2 + x_1'} = \frac{5}{2}$. Mărirea teleobiectivului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = -0{,}625$. Semnul minus arată că imaginea finală este răsturnată ca în figură.

**c.** Cum $\beta_s = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow |y_2| = |\beta_s| y_1 = -6{,}25$ cm

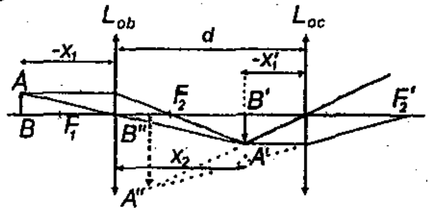
**17.** Deoarece obiectul se află la infinit $x_1 \to -\infty$ și prin urmare cum $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ obținem $x_2 = f_1 = -5$ cm, adică lentila obiectiv formează o imagine virtuală, în




fața ei și în focarul principal imagine. Această imagine fiind situată în fața lentilei ocular, joacă rol de obiect real pentru aceasta. Pe baza relației între segmente: $-x_1 + x_2 = -f_1 + \ell \Rightarrow x_1 = f_1 - \ell + x_2$ și pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_2}$ obținem $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2 - 50} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_2^2 - 50x_2 + 400 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $x_2$=10 cm și $x_2$=40 cm. Pentru a putea forma imagini clare ale obiectului pe peliculă, aceasta se poate așeza față de lentila convergentă la 10 cm sau 40 cm. Soluția practică este $x_2$=10 cm față de lentila convergentă.

**18.a.** Aflăm unde formează obiectivul imaginea obiectului. Utilizăm formula lentilelor subțiri cu $x_1 = -5/8$ cm:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 15\,\text{cm}.$$




Imaginea formată de obiectiv este reală.

**b.** Această imagine joacă rol de obiect real pentru lentila ocular, care va forma o imagine virtuală preluată direct de ochi şi aflată în fața lentilei ocular la distanța optimă de citire, astfel că $x_2' = -d_0 = -25\,\text{cm}$.

Cum $\dfrac{1}{x_2'} - \dfrac{1}{x_1'} = \dfrac{1}{f_2} \Rightarrow x_1' = \dfrac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -\dfrac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = -1{,}85$ cm. Lungimea tubului microscopului este: $d = x_2 - x_1' = 16{,}85$ cm.

**c.** Mărirea liniară transversală a obiectivului este $\beta_1 = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{f_1}{f_1 + x_1} = -24$ şi mărirea ocularului este $\beta_2 = \dfrac{x_2'}{x_1'} = \dfrac{f_2 - x_2'}{f_2} = \dfrac{f_2 + d_0}{f_2} = 13{,}5$, astfel că mărirea microscopului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = -324$.

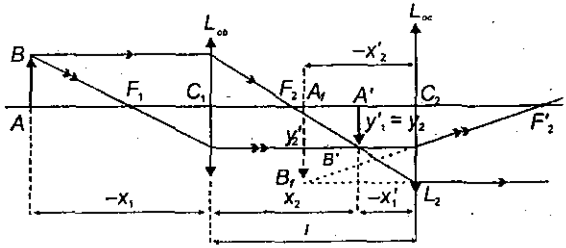
**19.a.** Obiectivul va forma o imagine reală la $x_2 = \dfrac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} = 15{,}12$ cm de el.

Calculăm lungimea tubului microscopului când omul priveşte imaginea finală la distanța optimă de citire $d_0$=25 cm. Conform desenului de la problema precedentă $d = x_2 - x_1'$, aflăm la ce distanță este obiectul față de ocular $x_1' = \dfrac{f_2 \cdot x_2'}{f_2 - x_2'} = -\dfrac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = -0{,}96\ \text{cm} \Rightarrow d = \dfrac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} + \dfrac{f_2 \cdot d_0}{f_2 + d_0} = 16{,}08$ cm.

**b.** Aflăm lungimea tubului microscopului când omul priveşte imaginea finală neacomodat, adică când imaginea se formează la infinit $x_2' \to -\infty \Rightarrow$ $x_1' = f_2 = 1$ cm. Astfel obținem $d' = x_2 - x_1' = \dfrac{f_1 \cdot x_1}{f_1 + x_1} + f_2 = 16{,}12$ cm.

**c.** Pentru a putea privi imaginea, observatorul poate deplasa ocularul în raport cu obiectivul prin operația de punere la punct cu $\Delta d = d' - d = 0{,}4\,\text{mm}$.

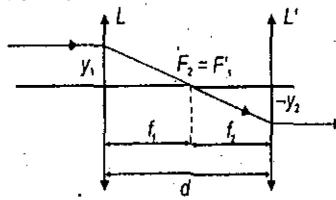
**20.a.** Imaginea reală va fi formată de obiectiv la $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 13$ cm în spatele lentilei şi va avea mărirea $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{f_1}{f_1 + x_1} = -25$.



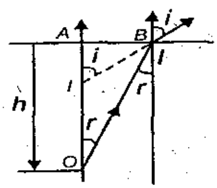

Această imagine este obiect real pentru lentila ocular care va forma o imagine virtuală la distanţa $-x_2' = 15$ cm de lentilă şi în faţa ei la $x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -1{,}76$ cm. Lungimea tubului microscopului pentru miop este $\ell = x_2 - x_1' = 14{,}76$ cm şi aceasta este distanţa dintre lentile.

**b.** Mărirea ocularului este $\beta_2 = \frac{x_2'}{x_1'} = \frac{f_2 - x_2'}{f_2} = 8{,}5$. Mărirea microscopului este $\beta_s = \beta_1 \beta_2 = 212{,}5$.

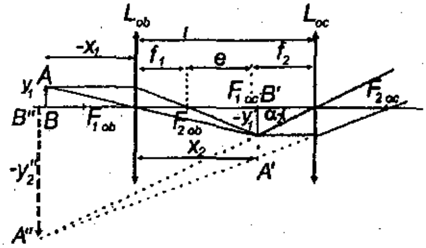
**c.** Deoarece un fascicul paralel incident pe ambele lentile părăseşte sistemul tot paralel, înseamnă că cele două lentile formează un sistem afocal, astfel că distanţa dintre cele două lentile este $d = f_1 + f_2 = 2{,}5$ cm. Deoarece fasciculul emergent va avea dimensiunile mai mari, atunci $\beta = -\frac{f_2}{f_1} = -4$, astfel că faţă de prima lentilă cu distanţa focală $f_1 = 0{,}5$ cm se aşază a doua lentilă cu distanţa focală $f_2 = 2$ cm la $d = 2{,}5$ cm de aceasta şi în spatele ei ca în figură.




**21.** Dacă se pune la punct microscopul pentru observarea feţei superioare a lamei (punctul $A$), când observatorul priveşte faţa inferioară a lamei (punctul $O$), măsuţa trebuie deplasată în jos până în punctul unde se formează prin refracţie datorită lamei imaginea feţei inferioare. Aceată imagine virtuală $I$ este preluată direct de ochi. Din desen: $AI = \frac{AB}{tg\, i} = h\frac{tg\, r}{tg\, i}$. Cum unghiurile sunt mici $tg i \approx \sin i$ şi $tg r \approx \sin r$ atunci $AI = h\frac{\sin r}{\sin i}$ şi conform legii refracţiei $\sin i = n \sin r$ obţinem $AI = \frac{h}{n}$. Indicele de refracţie al lamei este $n = \frac{h}{D} = 1{,}43$.



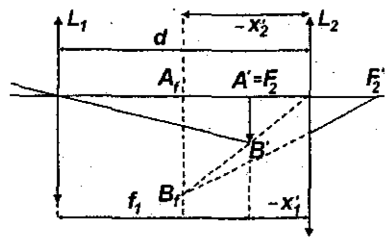

**22.a.** Deoarece punerea la punct se face pentru infinit, imaginea formată de obiectiv se află în focarul obiect al lentilei ocular. Prin definiţie grosismentul $G = \frac{tg\, \alpha_2}{tg\, \alpha_1}$ unde $\alpha_2$ este unghiul sub care se vede observatorul prin instrument obiectul (de fapt imaginea) astfel că $tg\alpha_2 = -\frac{y_1'}{f_2}$, iar $\alpha_1$ este unghiul sub care se vede observatorul obiectul cu ochiul liber, dacă obiectul se află la distanța optimă de citire, astfel că $tg\alpha_1 = \frac{y_1}{d_0}$, unde $d_0$=25cm. Obținem pentru grosisment: $G = -\frac{y_1'}{f_2}\frac{d_0}{y_1}$. Lentila obiectiv formează pentru obiectul real o imagine reală ca în figură. Utilizând asemănarea triunghiurilor: $\frac{e}{f_1} = -\frac{y_1'}{y_1} \Rightarrow G = \frac{ed_0}{f_1 f_2} = 300$.




**b.** Prin definiție puterea microscopului este $P = \frac{tg\alpha_2}{y_1} = -\frac{y_1'}{y_1 f_2} = \frac{e}{f_1 f_2} = 1200\ \text{m}^{-1}$

**c.** Din desen lungimea tubului microscopului este $\ell = f_1 + e + f_2 = 14{,}5$ cm.

**23.a.** O lunetă astronomică formează imagini virtuale ale obiectelor foarte îndepărtate, adică aflate din punct de vedere fizic la infinit. Cum $x_1 \to -\infty$, pe baza formulei lentilelor subțiri $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_1}$ obținem $x_2 = f_1 = 80$ cm Imaginea obiectelor aflate la infinit se formează în focarul imagine al lentilei obiectiv. Lentila ocular va forma pentru imaginea reală a lentilei obiectiv o imagine virtuală, care va fi preluată de ochi. Dacă imaginea virtuală se formează la distanța optimă de citire atunci $x_2' = -d_0 = -25$ cm astfel că $x_1' = \frac{f_2 x_2'}{f_2 - x_2'} = -\frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} - 7{,}14$ cm. Distanța dintre cele două lentile este: $d = f_1 - x_1' = f_1 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 87{,}14$ cm. Dacă ochiul privește neacomodat înseamnă că imaginea virtuală formată de ocular se află la infinit. Cum $x_2' \to -\infty \Rightarrow x_1' = -f_2 = -10$ cm și distanța dintre cele două lentile este $d' = f_1 - x_1' = f_1 + f_2 = 90$ cm. Lungimea minimă a lunetei se obține când ochiul privește imaginea formată de lunetă la distanța optimă de citire, iar lungimea maximă a lunetei se obține când imaginea formată de lunetă este la infinit, deci când luneta este un sistem afocal. În ambele situații, ochiul se află lângă ocular.




**b.** În cazul miopului:

$d'_{min} = f_1 - \frac{x_2 f_2}{f_2 - x_2} = f_1 + \frac{d_1 f_2}{f_2 + d_1} = 86{,}15\,\text{cm}$, deoarece $x_2 = -d_1 = -16\,\text{cm}$ şi

$d'_{max} = f_1 - \frac{x'_2 \cdot f_2}{f_2 - x'_2} = f_1 + \frac{d_2 f_2}{f_2 + d_2} = 89{,}52\,\text{cm}$, deoarece $x'_2 = -d_2 = -200\,\text{cm}$.

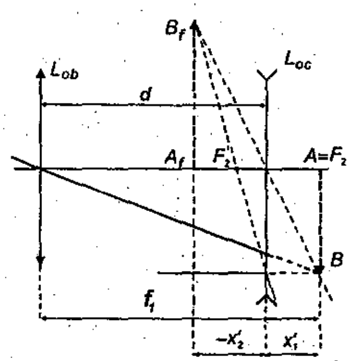
**c.** În cazul unui ochi normal pentru a vedea imaginea formată de lunetă, ocularul trebuie să se deplaseze în raport cu obiectivul pe distanţa:

$d = d_{max} - d_{min} = \frac{f_2^2}{f_2 + d_0} = 2{,}86$ cm, iar în cazul unui ochi miop: $d = d'_{max} - d'_{min} = 3{,}37\,\text{cm}$.

**24.** Dacă cu luneta se observă Luna, imaginea acesteia se formează în planul focal imagine al lentilei obiectiv, deoarece $x_1 \to -\infty$ şi $x_2 = f_1 = 80\,\text{cm}$. Această imagine joacă rol de obiect pentru lentila ocular. Cum ochiul priveşte fără acomodare $x'_2 \to -\infty$ şi deci $x'_1 = -f_2$. Prin urmare lungimea lunetei este $\ell = f_1 - x'_1 = f_1 + f_2$, adică luneta este un sistem afocal.

Deoarece se observă cu luneta un obiect, obiectivul va forma imaginea acestuia la $x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 86{,}95$ cm de lentilă. Deoarece ochiul priveşte neacomodat, lungimea lunetei este: $\ell' = x_2 + f_2$ Ocularul lunetei trebuie depărtat de obiectiv cu $\Delta\ell = \ell' - \ell = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} - f_1 = -\frac{f_1^2}{f_1 + x_1} = 6{,}95\,\text{cm}$.

**25.** Cu binoclul de teatru se observă imagini foarte îndepărtate, astfel că $x_1 \to -\infty$ şi lentila obiectiv va forma o imagine reală în planul ei focal imagine, deci la $x_2 = f_1 = 8$ cm. Această imagine este obiect virtual pentru lentila divergentă, ocular, iar lentila ocular va forma o imagine virtuală şi mărită a obiectului iniţial. Această imagine finală este observată cu ochiul liber lipit de ocular. Dacă imaginea se formează la distanţă optimă de citire $x_2 = -d_0 = -25$ cm atunci $x_1 = \frac{f_2 \cdot x_2}{f_2 - x_2} = -4{,}76\,\text{cm}$.




Lungimea binoclului este:

$d_{min} = f_1 - x_1 = f_1 + \frac{f_2 d_0}{f_2 + d_0} = 3{,}24$ cm. Dacă imaginea se formează la infinit, adică ochiul priveşte neacomodat, $x_2 \to -\infty$ atunci $x_1 = -f_2 = -4$ cm, iar lungimea binoclului este $d_{max} = f_1 + f_2 = 4\,\text{cm}$. Distanţa dintre obiectiv şi ocular este cuprinsă între 3,24 cm şi 4 cm.

## 2.1. Mişcarea mecanică

**1.a.** Din formula vectorului de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, prin identificare obţinem $x=4t-2$ şi $y=-3t+1$. Ecuaţia traiectoriei se obţine eliminând timpul $t$ din cele două ecuaţii: $t = \frac{x+2}{4} \Rightarrow y = -\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow$ deoarece $y$ este funcţie de gradul întâi de $x$, înseamnă că punctul material are o mişcare rectilinie şi uniformă.

**b.** Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx}=v_x=4$ m/s şi din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow v_{my}=v_y=-3$ m/s. Acestea reprezintă componentele vitezei pe axele de coordonate (coeficienţii din faţa lui $t$ din ecuaţiile parametrice $x$ şi $y$), astfel că $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

**c.** Modulul vitezei punctului material este $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 5$ m/s.

**d.** $a = 0$, deoarece vectorul viteză este constant ($\vec{v}$ =ct).

**2.a.** Ecuaţiile parametrice ale mişcării pe axele de coordonate sunt $x=t^2/2$ şi $y=t$, astfel că eliminând timpul din ecuaţii obţinem $y = \sqrt{2x}$

**b.** Din $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{2\Delta t} = t - \frac{\Delta t}{2}$. Viteza instantanee se obţine din $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_x=t$. Din $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t) - t}{\Delta t} = 1$ m/s $\Rightarrow v_y=1$ m/s, astfel $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{t^2+1}$. Când $t=2$ s obţinem $v=2{,}236$ m/s

**c.** Cum $a_{mx} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Rightarrow a_{mx}=a_x=1$ m/s² iar $a_y=a_{my}=0$, deoarece $v_y$=ct, atunci punctul material are o mişcare uniform accelerată cu acceleraţia momentană $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 1$ m/s² indiferent de intervalul de timp

**3.a.** Din $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, prin identificare obţinem $x=1$ m/s, $y=2t$ şi $z=t^2$. Cum $v_{mx} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{mx}=v_x=0$ m/s, $v_{my} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{2(t+\Delta t) - 2t}{\Delta t} = 2$ m/s şi din $v_{mz} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t$ când $\Delta t \to 0$ obţinem $v_z=2t$. Astfel vectorul viteză este $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = 2\vec{j} + 2t\vec{k}$

**b.** La momentul $t_1=2$ s, $v_z=4$ m/s, astfel $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \approx 4{,}47$ m/s

**c.** Deoarece $v_x=0 \Rightarrow a_x=0$, iar $a_{my} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0 \Rightarrow a_y=0$. Cum $a_{mz} = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} = 2$ m/s² $\Rightarrow$ $a_{mz}=a_z=2$ m/s², obţinem $\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = 2\vec{k}$

**4.a.** Eliminăm timpul $t$ din cele două ecuații pentru a determina ecuația traiectoriei. Astfel $t=\frac{x+4}{3} \Rightarrow y=\frac{20-x}{3} \Rightarrow$ punctul material are o mișcare rectilinie și uniformă.

**b.** Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt coeficienții din fața lui $t$ din ecuațiile parametrice $x$ și $y$, astfel $v_x$=3 m/s și $v_y$=−1 m/s $\Rightarrow$ vectorul viteză al punctului material $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=3\vec{i}-\vec{j}$.

**c.** Modulul vitezei punctului material este $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$=3,16 m/s

**5.a.** În intervalul de timp $\Delta t=t_2-t_1$=1 s variația coordonatei pe axa $Ox$ este $\Delta x=x_2-x_1$=2 m iar pe axa $Oy$ variația coordonatei este $\Delta y=y_2-y_1=(2x_2+1)-(2x_1+1)$ astfel $\Delta y=2\Delta x$=4 m $\Rightarrow$ deplasarea mobilului este $d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$=4,47 m

**b.** Viteza medie a punctului material este $v_m=d/\Delta t$=4,47 m/s

**c.** Deoarece mobilul se mișcă uniform pe axele de coordonate componentele vectorului viteză pe axele de coordonate sunt $v_x=\frac{\Delta x}{\Delta t}$=2 m/s și $v_y=\frac{\Delta y}{\Delta t}$=4 m/s, astfel că vectorului viteză este $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=2\vec{i}+4\vec{j}$.

**d.** Deoarece $\vec{v}$=ct vectorul accelerație este $\vec{a}=\Delta\vec{v}/\Delta t$=0

**6.a.** Modulul vitezei punctului material este $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$=5 m/s iar vectorul viteză este $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=-4\vec{i}+3\vec{j}$

**b.** Vectorul de poziție este $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}t=2\vec{i}-\vec{j}+\left(-4\vec{i}+3\vec{j}\right)\cdot t=(2-4t)\vec{i}+(3t-1)\vec{j}$

**c.** Cum $\vec{r}(t)=x\vec{i}+y\vec{j} \Rightarrow x=2-4t$ și $y=3t-1$. Pentru $t_1$=2 s, $x_1$=−6 m și $y_1$=5 m, iar pentru $t_2$=4 s, $x_2$=−14 m și $y_2$=11 m astfel că $\Delta x=x_2-x_1$=−8 m și $\Delta y=y_2-y_1$=6 m. Deplasarea mobilului este $d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=10\,\text{m}$

**d.** Ecuația traiectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații parametrice $x$ și $y \Rightarrow t=\frac{2-x}{4} \Rightarrow y=\frac{2-3x}{4}$.

**7.a.** Din grafic coordonatele mobilului atunci când acesta se află în punctul $C$ sunt $x_C$=4 m și $y_C$=−2 m

**b.** $r_A=\sqrt{x_A^2+y_A^2}\approx 2{,}82$ m, deoarece $x_A$=−2 m și $y_A$=2 m

**c.** Vectorului viteză medie este $\vec{v}_{mAD}=\frac{\Delta\vec{r}_{AD}}{\Delta t}$. Cum $\Delta r_{AD}=\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2}$ deoarece $x_D$=8 m și $y_D$=−1 m $\Rightarrow \Delta r_{AD}\approx$ 10,44 m și $v_{mAD}$=0,174 m/s

**8.a.** Conform definiției vitezei medii: $v_m=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$.

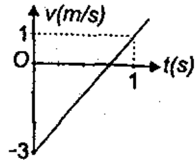
Cum $x(t+\Delta t)=2(t+\Delta t)^2-3(t+\Delta t)+5 \Rightarrow$

$\Delta x=2(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)-3(t+\Delta t)+5-(2t^2-3t+5) \Rightarrow$

$\Delta x=4t\Delta t+2\Delta t^2-3\Delta t \Rightarrow v_m=4t+2\Delta t-3$

Viteza instantanee se obține când $\Delta t\to 0 \Rightarrow v=4t-3$

**b.** Pentru $t_1$=0 s, $v_1$=–3 m/s şi pentru $t_2$=1 s, $v_2$=1 m/s. Reprezentarea grafică a legii vitezei este redată în figura alăturată.




**c.** Conform definiţiei acceleraţiei medii:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) = 4(t+\Delta t) - 3 - (4t-3) = 4\Delta t \Rightarrow a_m = a = 4\text{m/s}^2 \Rightarrow$ mişcarea mobilului este uniform accelerată.

**9.a.** Conform definiţiei acceleraţiei medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + at \Rightarrow$

$v = 10 - 2t$ deoarece $a$–2 m/s², astfel că la $t_1$=3 s $\Rightarrow v_1$=4 m/s

**b.** Când mobilul de opreşte $v$=0 $\Rightarrow t_{op}$=5 s

**c.** Deoarece viteza depinde liniar de timp, valoarea medie a vitezei se calculează prin media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului studiat astfel că $v_m$=($v_0$+0)/2=$v_0$/2=5 m/s

**d.** Distanţa parcursă până la oprire se calculează cu relaţia $d$=$v_m t_{op}$=25 m

**10.a.** Conform definiţiei acceleraţiei medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t} = 2{,}5$ m/s², deoarece $v$=0 m/s şi $\Delta v$=$v$.

**b.** Viteza medie este $v_m$=($v_i$+$v_f$)/2=12,5 m/s

**c.** Distanţa parcursă de mobil este $d$=$v_m\Delta t$=125 m

**11.a.** Conform definiţiei acceleraţiei medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v}{\Delta t} = -\frac{v}{\Delta t} = -1$ m/s².

Semnul "–" arată că mişcarea mişcarea maşinii este frânată.

**b.** Viteza medie este $v_m$=($v_i$+$v_f$)/2=$v$/2=7,5 m/s

**c.** Distanţa parcursă până la oprire $d$=$v_m\Delta t$=125 m

**12.a.** Conform definiţiei acceleraţiei medii şi cum $a_m = a$, deoarece viteza creşte uniform cu 1 m/s în fiecare secundă, atunci $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 1$ m/s²

**b.** Deoarece depăşirea durează $\Delta t$, atunci din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} \Rightarrow v_f = v_0 + a\Delta t$.

După $\Delta t$=20 s $\Rightarrow v_f$=40 m/s, astfel că viteza medie este $v_m$=($v_0$+$v_f$)/2=30 m/s

**c.** Distanţa parcursă de mobil este $d$=$v_m\Delta t$=600 m

**13.a.** Conform definiţiei acceleraţiei medii $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = -0.1$ m/s²

**b.** Viteza medie este $v_m$=($v$+$v_0$)/2=1,5 m/s

**c.** Distanţa parcursă până la oprire $d$=$v_m\Delta t$=15 m

**d.** Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{0 - v_0}{\Delta t'} = -\frac{v_0}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v_0}{a}$=20 s, deoarece $v$=0 m/s şi $\Delta v = -v_0 \Rightarrow$ distanţa totală parcursă de biciclist până la oprire este $d = v'_m \Delta t'$, unde $v'_m = v_0/2 \Rightarrow d = -v_0^2/2a$=20 m.

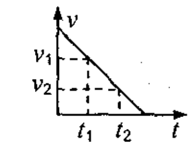
**14.a.** Momentul de timp la care corpul se opreşte se obţine din $v$=0 $\Rightarrow t_{op}$=3 s

**b.** Din $a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} \Rightarrow v = v_0 + at$, iar din identificarea coeficienţilor acceleraţia instantanee este $a$=–4 m/s$^2$ şi viteza iniţială este $v_0$=12 m/s

**c.** Distanţa parcursă până la oprire $d=v_m t_{op}$, unde $v_m=(v_0+0)/2$, astfel că $d=v_0 t_{op}/2$=18 m

**15.a.** Conform definiţiei $a=\Delta v/\Delta t$=–2 m/s$^2 \Rightarrow$ mişcarea mobilului este uniform încetinită, deoarece $a<0$ şi $v_0>0$.

**b.** Din $a = \Delta v/\Delta t = (v - v_0)/t \Rightarrow v = v_0 + at = 10 - 2t$. Când $t_1$=2 s$\Rightarrow v_1$=6 m/s, iar când $t_2$=4 s$\Rightarrow v_2$=2 m/s. Spaţiul parcurs de mobil reprezintă fizic, aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului şi cele două ordonate duse prin punctele cu $t_1$ şi $t_2$. Această figură geometrică este un trapez, astfel că: $d = A = \frac{(v_1+v_2)(t_2-t_1)}{2}$




$d$=8 m.

**c.** Viteza medie este $v_m=(v_1+v_2)/2$=4 m/s

**d.** Din grafic, timpul până la oprire este $t_{op}$=5 s, deoarece $v$=0 şi spaţiul până la oprire reprezintă aria triunghiului $s_{op}=A_{triunghi}$=25 m

**16.a.** Când $t\in(0,2)$s $v$=2 m/s=ct, astfel acceleraţia este $a_1$=0. Când $t\in(2, 4)$s, acceleraţia este $a_2=\Delta v/\Delta t$=1 m/s$^2$, iar când $t\in(4,8)$s acceleraţia este $a_3=\Delta v/\Delta t$=–0,75 m/s$^2$. Modulului maxim al acceleraţiei este $a$=1 m/s$^2$

**b.** Distanţa parcursă în intervalul $t\in(0, 4)$s reprezintă aria cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului şi ordonata construită la $t$=4 s$\Rightarrow d$=10 m

**c.** Distanţa parcursă în intervalul $t\in(0, 8)$s este aria cuprinsă cuprinsă între graficul vitezei, axa timpului şi ordonata construită la $t$=4 s$\Rightarrow d_t$=20 m, astfel că viteza medie a corpului este $v_m=d_t/\Delta t$=2,5 m/s

**17.a.** Calculăm spaţiul parcurs de mobil în primele trei secunde de la începerea mişcării. Acest spaţiu este aria de sub curba vitezei şi axa timpului, astfel că $s_3$=25 m. Viteza medie este $v_m=s_3/\Delta t_3$=8,33 m/s, cu $\Delta t$=3 s

**b.** Calculăm acceleraţiile pe fiecare porţiune distinctă de mişcare. Deoarece $a_1=\Delta v_1/\Delta t_1$=10 m/s$^2\Rightarrow$ în intervalul de timp $t\in(0, 1)$s mobilul are o mişcare uniform accelerată. În intervalul de timp $t\in(1, 3)$s, $a_2=\Delta v_2/\Delta t_2$=0$\Rightarrow$ mobilul se mişcă uniform. În intervalul de timp $t\in(3, 7)$s, $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3$=–4 m/s$^2\Rightarrow$ mobilul are o mişcare uniform încetinită. În intervalul de timp $t\in 7, 8)$s, $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$=4 m/s$^2\Rightarrow$ mobilul se mişcă uniform accelerat. Modulul maxim al acceleraţiei se obţine pe prima porţiune de mişcare când acceleraţia este $a_1$=10 m/s$^2$

**c.** Prin definiţie viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$. Calculăm coordonata finală $x_f$, ştiind că cea iniţială este nulă ($x_0$=0). Din graficul vitezei observăm că la un anumit moment $v$=0, iar apoi $v<0$, ceea ce înseamnă că mobilul se întoarce. Pe porţiunea când $t\in 3,7)$s, din $a_3=\Delta v_3/\Delta t_3$, legea vitezei este $v$=10–4($t$–3) şi când $v$=0$\Rightarrow t_{op}$=5,5 s. Calculăm coordonata maximă când mobilul se opreşte cu aria trapezului $x_{max}$=37,5 m. Calculăm spaţiul parcurs de mobil în intervalul de timp de la 5,5 s până la 8 s, cu aria cuprinsă între curba vitezei şi axa timpului, astfel că $s$=8,5 m. După ce viteza devine nulă mobilul se întoarce pe distanța 8,5 m, astfel coordonata finală este $x_f=x_{max}$=29 m $\Rightarrow v_m$=3,625 m/s

**d.** Viteza în modul medie se calculează împărțind distanța totală parcursă de mobil în intervalul de timp $t\in(0,8)$s $d=x_{max}+s$=46 m la valoarea intervalului de timp $\Delta t$=8 s şi obținem $|v_m|=d/\Delta t=5{,}75$ m/s. Observăm că există o diferență între viteza medie şi viteza în modul medie, deoarece pe parcursul mişcării mobilul se opreşte şi se întoarce.

**18.a.** În intervalul $t\in(0,1)$s deoarece viteza creşte liniar cu timpul, viteza medie este media aritmetică a valorilor de la extremitățile intervalului, astfel că $v_m=(v_0+v_1)/2$=1 m/s

**b.** Din definiție viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t$, unde $\Delta x=x_f-x_0$. Deoarece în intervalul de timp de la 0 la 6 s, $v>0$, mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei de coordonate$\Rightarrow x_f=s$, unde $s$ este spațiul parcurs de mobil şi reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului şi ordonata construită la $t$=6 s. Obținem $x_f$=12 m$\Rightarrow v_m$=2 m/s, deoarece $\Delta t$=6 s

**c.** Deoarece $v_4$=4 m/s când $t_4$=4 s şi $v_6$=0 m/s când $t_6$=6 s, atunci $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$ $a_4=-2$ m/s$^2\Rightarrow$ mişcarea mobilului este uniform încetinită

**d.** Din $a_4=\Delta v_4/\Delta t_4$ obținem $v_4=v_{04}+a_4(t-t_4)$. Din $v_{04}$=4 m/s şi $t_4$=4 s obținem $v_4=12-2t$. La momentul $t_7$=7 s, viteza mobilului va fi $v_7=-2$ m/s

## 2.1.1. Mişcarea rectilinie şi uniformă a punctului material

**1.** Sonarul emite o undă sonoră care se propagă rectiliniu cu viteza $v$ spre obiect, se loveşte de acesta şi se întoarce pe aceeaşi direcție. Intervalul de timp detectat între momentul emiterii şi momentul recepției este $\Delta t$, iar distanța parcursă dus-întors este $2d$, astfel că $\Delta t=2d/v\Rightarrow d=v\Delta t/2$=7,5 km.

**2.** Undele radio se propagă de la emițător spre obiectul de detectat, se reflectă, se întorc pe aceeaşi direcție şi apoi sunt recepționate. Distanța $d$ de la sursa de unde la obiect este parcursă dus – întors cu viteza $c$ astfel că $2d=c\cdot\Delta t\Rightarrow d=c\cdot\Delta t/2$ =$18\cdot10^6$ km

**3.a.** Deoarece elevul aude tunetul după $\Delta t$, iar sunetul se propagă prin aer cu viteza $v$, locul unde a fulgerat este la distanța $d=v\Delta t$=1020 m.

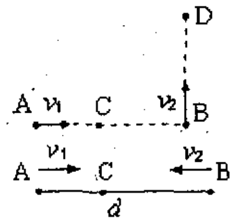
**b.** Dacă apoi elevul aude tunetul după $\Delta t'$, distanța la care a fulgerat este $d'=v\Delta t'=680$ m $\Rightarrow$centrul furtunii se apropie de locul unde se află elevul.

**4.a.** Deoarece distanța $d$ este parcursă în intervalul de timp $t$, atunci $d=vt$, obținem viteza autoturismului $v=d/t$=30 m/s=108 km/h. Cum în afara localităților viteza legală este 90 km/h, automobilul a depăşit viteza legală maximă admisă.

**b.** Prin definiție viteza medie este $v_m=\dfrac{AB}{t}=\dfrac{AB}{t_{AC}+t_{CB}}$. Cum $t_{AC}=\dfrac{AC}{v_1}=\dfrac{AB}{2v_1}$ şi $t_{CB}=\dfrac{CB}{v_2}=\dfrac{AB}{2v_2}$, deoarece $AC=CB=\dfrac{AB}{2}$. Obținem $v_m=\dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\approx22{,}22$ m/s.

**c.** Aplicăm definiția vitezei medii $v_m = \frac{d}{t} = \frac{d}{t_1 + t_2 + t_3}$ unde $t_1 = \frac{d}{8v}$, deoarece prima jumătate de drum $\frac{d}{2}$ a fost parcursă cu viteza $4v$; $t_2 = \frac{d}{8v}$, deoarece următorul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza $2v$ și $t_3 = \frac{d}{4v}$, deoarece ultimul sfert de drum $\frac{d}{4}$ a fost parcurs cu viteza $v$. Obținem $v_m = 2v$.

**5.a.** Aflăm distanțele parcurse de cele două mobile în timpul $t$: $AC = v_1 t$ și $BD = v_2 t$, astfel că din desen $CD = \sqrt{(AB - v_1 t)^2 + (v_2 t)^2} \approx 94{,}25$ km.




**b.** Din desen $d = AC + CB$. Deoarece mișcările sunt rectilinii și uniforme $AC = v_1 t$ și $CB = v_2 t \Rightarrow d=(v_1+v_2)t$ $\Rightarrow t=d/(v_1+v_2)$ reprezintă timpul după care se întâlnesc automobilele. Astfel $AC=v_1 d/(v_1+v_2) \approx 44{,}44$ km

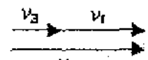
**c.** Alegem origine de timp momentul când pornește primul automobil. Astfel $d = v_1 t \Rightarrow t = \frac{d}{v_1}$ reprezintă timpul parcurs de primul mobil din punctul de plecare *A* până în punctul de sosire *B*. Al doilea mobil pornește mai târziu cu $\Delta t$, astfel că el parcurge aceeași distanță $d$, în intervalul de timp $t - \Delta t$. Atunci: $d = v_2(t - \Delta t) \Rightarrow \Delta t = \frac{v_2 t - d}{v_2} = t - \frac{d}{v_2} = \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} = \frac{d(v_2 - v_1)}{v_1 v_2} = 1000$ s.

**6.a.** În cazul a, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul *C* și ajunge în punctul *B*, astfel că acesta ajunge din *A* în *B* în $t' = \frac{AC + CB}{c} = \frac{2AC}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \frac{D^2}{4}}$. Sunetul se poate propaga direct de la *A* la *B*, astfel că $t = \frac{D}{c}$. Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către *B* este $\Delta t = t' - t = \frac{1}{c}\left(\sqrt{4d^2 + D^2} - D\right) \approx 0{,}235$ s

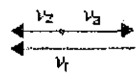
**b.** În cazul b, sunetul care se propagă spre zid, se reflectă pe acesta în punctul *C* și ajunge în punctul *B*, astfel că acesta ajunge din *A* în *B* în $t' = \frac{AC + CB}{c} = \frac{D + 2d}{c}$. Sunetul se poate propaga direct de la *A* la *B*, astfel că $t = \frac{D}{c}$. Intervalul de timp dintre momentele recepționării sunetelor de către *B* este $\Delta t = t' - t = \frac{2d}{c} \approx 0{,}47$ s

**c.** Sunetul emis din $A$ ajunge în $B$ după $t = \frac{x}{c}$. Dar acest sunet se poate reflecta pe zid, astfel că ajunge în $B$ după $t' = \frac{AC + CB}{c} = \frac{2d - D}{c}$. Intervalul de timp care separă sosirea sunetelor în $B$ reprezintă durata unui semnal lung emis de copilul din $A$, astfel că $\tau = t' - t = \frac{2(d - x)}{c} \approx 0{,}235$ s

**7.a.** Corpul de studiat este şalupa. Sistemul de referinţă mobil este apa, iar cel fix solul. Notăm cu: $v_a$-viteza apei faţă de sol (viteză de transport) şi cu $v_r$-viteza şalupei faţă de apă (viteză relativă).



Studiem mişcarea şalupei în sensul curgerii râului. $v_1$ este viteza absolută a şalupei faţă de sol. Cum $\vec{v}_1 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi din desen $v_1 = v_a + v_r$, iar cum $v_1 = \frac{d}{t_1}$ obţinem $v_a + v_r = \frac{d}{t_1}$.



Studiem mişcarea şalupei în sens contrar sensului de curgere al râului, $v_2$ fiind în acest caz viteza şalupei faţă de sol.

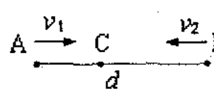
Cum $\vec{v}_2 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi din desen $v_2 = v_r - v_a$, iar cum $v_2 = \frac{d}{t_2}$ obţinem $v_r - v_a = \frac{d}{t_2}$. Prin scăderea relaţiilor obţinem: $v_a = \frac{d(t_2 - t_1)}{2t_2t_1}$=5 km/h

**b.** Prin adunarea relaţiilor obţinem: $v_r = \frac{d(t_2 + t_1)}{2t_2t_1}$=15 km/h

**c.** Dacă motorul şalupei nu funcţionează atunci aceasta se deplasează cu vitteza apei $v_a$, astel că $t = d/v_a$=16 h

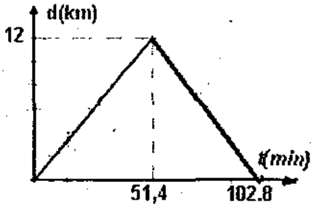
**8.a.** Studiem mişcarea şalupei de la $A$ la $B$, adică în sens contrar curgerii râului, astfel că din grafic $v_1 = d/t_1 = 10$ km/h. Cum $\vec{v}_1 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi scalar $v_1 = v_r - v_a$, unde $v_r$ este viteza şalupei faţă de apă şi $v_a$ este viteza apei faţă de sol, obţinem $v_r - v_a = v_1$. Studiem mişcarea şalupei de la $B$ la $A$, adică în sensul curgerii râului, astfel că din grafic $v_2 = d/t_2 = 18$ km/h. Cum $\vec{v}_2 = \vec{v}_a + \vec{v}_r$ şi scalar $v_2 = v_r + v_a$, obţinem $v_r + v_a = v_2$. Prin adunarea relaţiilor obţinem: $v_r = (v_2 + v_1)/2$=14 km/h

**b.** Dacă şalupa nu ar staţiona în $B$ atunci durata deplasării şalupei pe drumul $A$-$B$-$A$ este $\Delta t$=112 min, deoarece şalupa staţionează 28 min.



**c.** Pentru şalupa care porneşte din $A$: $AC = v_1 t$ şi pentru cea care porneşte din $B$ : $BC = v_2 t$. Deoarece $d = AC + BC = (v_1 + v_2)t = 2v_r t$ obţinem timpul după care şalupele se întâlnesc: $t = d/(2v_r)$. Astfel distanţa faţă de portul $B$ la care se întâlnesc cele două şalupe este $BC = v_2 d/(2v_r)$=7,71 km

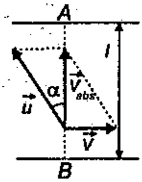
**d.** Dacă apa ar fi stătătoare şi şalupa nu ar staţiona în *B*, atunci aceata s-ar deplasa cu viteza $v_r$ astfel că timpul de dus este egal cu cel de întors şi este $t_{dus}=d/v_r$=51,428 s.
Reprezentarea grafică a dependenţei de timp a coordonatei *d* a şalupei de timp la deplasările *A*→*B* şi *B*→*A* este redată în figura alăturată.




**9.a.** Pe scara imobilă timpul de urcare al omului este $t_2=\ell/v_2$, unde $v_2$ este viteza omului faţă de scară, adică viteza relativă. Obţinem $v_2=\ell/t_2$=0,125 m/s
**b.** Corpul de studiat este omul, sistemul mobil este scara iar sistemul fix este solul. Notăm cu $v_1$ viteza scării faţă de sol adică viteză de transport. Iniţial faţă de un observator aflat pe sol omul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, iar scalar $v_{abs}=v_1+v_2$, astfel că $t_1=\ell/(v_1+v_2)$. Din cele $(v_1+v_2)=\dfrac{\ell}{t_1}$ şi $v_2=\dfrac{\ell}{t_2}$ obţinem $v_1=\dfrac{\ell}{t_1}-\dfrac{\ell}{t_2}=\dfrac{\ell(t_2-t_1)}{t_1t_2}$=0,375 m/s.
**c.** Aflăm timpul în care este urcat omul de scară, dacă acesta nu se deplasează pe scară: $t_3=\dfrac{\ell}{v_1}=\dfrac{t_1t_2}{t_2-t_1}\approx 26{,}66$ s.

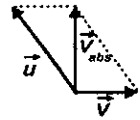
**10.a.** Studiem mişcarea ceferistului în sensul mişcării platformei. Notăm cu $v_1$ viteza ceferistului faţă de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_1=\vec{v}_0+\vec{v}$ şi scalar $v_1=v_0+v$=12 m/s. Studiem mişcarea ceferistului în sensul contrar mişcării platformei. Notăm cu $v_2$ viteza ceferistului faţă de sol, astfel că vectorial $\vec{v}_2=\vec{v}_0+\vec{v}$ şi scalar $v_2=v_0-v$=10 m/s.
**b.** Timpul în care ceferistul revine la capătul platformei de unde a plecat este
$$t=t_{dus}+t_{intors}=\frac{2\ell}{v}=14\text{ s}$$
**c.** Distanţa parcursă de ceferist faţă de sol în situaţia de la punctul b. este
$$d=v_1t_{dus}+v_2t_{intors}=(v_1+v_2)\frac{\ell}{v}=\frac{2v_0\ell}{v}=168\text{ m}$$

**11.a.** Corpul studiat este vâslaşul, sistemul mobil este apa, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei *v* este viteza de transport, iar *u* este viteza relativă. Pentru a ajunge pe malul opus pe drumul cel mai scurt, vâslaşul orientează barca ca în figură. Cum $\vec{v}_{abs}=\vec{u}+\vec{v}$, din desen:
$$\sin\alpha=\frac{u}{v}=\frac{3}{5}\Rightarrow\alpha\cong 37°$$

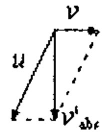



**b.** Deoarece viteza vâslaşului faţă de sol este $v_{abs}=\sqrt{u^2-v^2}$ = 0,4m/s, atunci timpul necesar pentru traversarea râului este $t_{AB}=\ell/v_{abs}$=125 s
**c.** Dacă viteza vâslaşului se păstrează timpul necesar pentru traversarea unui lac cu aceeaşi lăţime este $t=\ell/u$=100 s

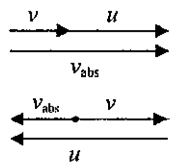
**12.a.** Corpul studiat este avionul, sistemul mobil este vântul, iar sistemul fix este solul. Din datele problemei $v$ este viteza de transport iar $u$ este viteza relativă. Studiem cazul în care vântul suflă perpendicular pe direcția parcursă de avion. Față de sol, avionul se deplasează cu viteza absolută $\vec{v}_{abs}$. Conform desenului $v_{abs} = \sqrt{u^2 - v^2}$, astfel că $t_{dus} = \dfrac{d}{v_{abs}} = \dfrac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$. La întors din desen




$v'_{abs} = \sqrt{u^2 - v^2}$ și obținem $t'_{întors} = \dfrac{d}{v'_{abs}} = \dfrac{d}{\sqrt{u^2 - v^2}}$. Timpul total de zbor este $t = t_{dus} + t_{întors} = \dfrac{2d}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 2010\ s \approx 33{,}5$ min.



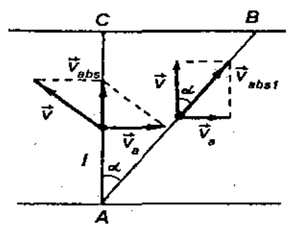

**b.** Studiem cazul în care vântul suflă pe direcția de zbor a avionului. Presupunem că la dus vântul suflă în sensul înaintării avionului. Cum $\vec{v}_{abs} = \vec{u} + \vec{v}$, din desen $v_{abs} = u + v$, este viteza cu care avionul se deplasează față de sol, astfel că timpul de dus este $t_{dus} = \dfrac{d}{u+v}$. La întors, vântul suflă în sens contrar sensului de zbor al avionului. În acest caz viteza cu care se deplasează avionul față de sol este $v'_{abs} = u - v$, iar timpul de întoarcere este




$t_{întors} = \dfrac{d}{u - v}$. Obținem: $t_{zbor} = t_{dus} + t_{întors} = \dfrac{d}{u+v} + \dfrac{d}{u-v} = \dfrac{2du}{u^2 - v^2} \approx 33{,}67$ min.

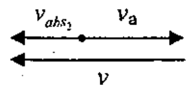
**c.** Dacă vântul nu suflă viteza cu care se deplasează avionul față de sol este $u$, atât la dus cât și la întors, astfel că $t_{zbor} = \dfrac{2d}{u} = 2000\ s \approx 33{,}33$ min.

**13.a.** Studiem vâslașul care traversează râul perpendicular pe maluri. Viteza de transport este $v_a$, iar viteza relativă este $v$. Viteza absolută cu care se deplasează vâslașul față de mal este $\vec{v}_{abs} = \vec{v} + \vec{v}_a$. Iar scalar din desen: $v_{abs} = \sqrt{v^2 - v_a^2}$. Timpul necesar primului vâslaș să treacă râul este



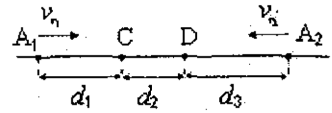

$t_1 = \dfrac{\ell}{\sqrt{v^2 - v_a^2}} \approx 11{,}56$ s

**b.** Studiem mișcarea celui de-al doilea vâslaș. Deoarece vâslașul orientează barca perpendicular pe maluri, el se va deplasa pe direcția $AB$ și apoi el trebuie să se întoarcă de la $B$ la C. Astfel timpul total de mișcare este $t_2 = t_{AB} + t_{BC}$. Dar $t_{AB} = \dfrac{AB}{v_{abs_1}} = \dfrac{AC}{v} = \dfrac{\ell}{v}$ (din asemănarea triunghiurilor vitezei și cel al distanțelor). La întoarcere $v_{abs_2} = v - v_a$, astfel că $t_{BC} = \dfrac{BC}{v_{abs_2}} = \dfrac{BC}{v - v_a}$. Cum $\dfrac{\ell}{v} = \dfrac{BC}{v_a} \Rightarrow$

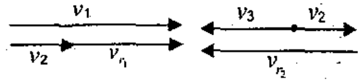


$BC=\frac{\ell v_a}{v}\Rightarrow t_{BC}=\frac{\ell v_a}{v(v-v_a)}$. Obținem $t_2=\frac{\ell}{v}+\frac{\ell v_a}{v(v-v_a)}=\frac{\ell}{v-v_a}=20$ s

**c.** Intervalul de timp care desparte sosirea vâslașilor în punctul de pe malul opus este $\Delta t=t_2-t_1=\frac{\ell}{v-v_a}-\frac{\ell}{\sqrt{v^2-v_a^2}}\approx 8{,}44$ s




**14.a.** Considerăm că observatorul se află în autocamion. Față de acesta autoturismul și autobuzul se deplasează cu viteze relative. Viteza relativă a autoturismului este $\vec{v}_{r_1}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$, iar conform figurii alăturate obținem $v_{r_1}=v_1-v_2$. Viteza relativă a autobuzului este $\vec{v}_{r_2}=\vec{v}_3-\vec{v}_2$ și conform figurii alăturate obținem $v_{r_2}=v_3+v_2$. Autoturismul după ce depășește autocamionul trebuie să treacă pe banda lui în momentul în care în acel loc ajunge pe banda opusă autobuzul. Astfel autoturismul parcurge față de autocamion distanța $d_1+d_2$, astfel că $d_1+d_2=v_{r_1}t=(v_1-v_2)t$, iar autobuzul parcurge față de autocamion distanța $d_3=d_{\min}-d_1-d_2=v_{r_2}t=(v_3+v_2)t$. Eliminând timpul $t$ din cele două relații obținem: $d_{\min}=\frac{(v_3+v_1)(d_1+d_2)}{v_1-v_2}=225$ m.



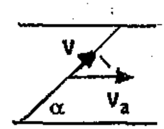

**b.** Timpul necesar depășirii este $t=\frac{d_1+d_2}{v_1-v_2}=5$ s

**c.** În timpul manevrei de depășire distanțele parcurse față de sol de fiecare vehicul sunt: $d_1=v_1t=125$ m, $d_2=v_2t=75$ m și $d_{31}=v_3t=100$ m

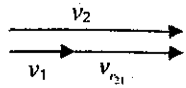
**15.a.** Fie $v_a$ viteza apei și $v$ viteza pescarului față de apă. Pescarul se deplasează din dreptul podului din punctul $A$ până în punctul $B$ când pescarul își dă seama că a scăpat colacul. Deoarece pescarul se deplasează în sens contrar sensului de curgere al râului viteza acestuia față de sol este $\vec{v}_{abs}=\vec{v}+\vec{v}_a$, iar scalar $v_{abs}=v-v_a$, astfel că $AB=(v-v_a)\cdot\Delta t$ (1). La întoarcere pescarul se deplasează în sensul de curgere al râului cu viteza $v'_{abs}=v+v_a$. Distanța parcursă de pescar la întoarcere este $d+AB=(v+v_a)\cdot(\Delta t+t)$ (2), unde $t$ reprezintă timpul cât se deplasează colacul. Din mișcarea colacului obținem $d=v_at$ (3). Introducând relațiile (1) și (3) în relația (2) obținem: $v_at+(v-v_a)\Delta t=(v+v_a)(t+\Delta t)\Rightarrow t=\Delta t$. Timpul după care pescarul recuperează colacul din momentul pierderii acestuia este $t_t=\Delta t+t=2\Delta t=1$ h

**b.** Astfel din $d=2v_a\Delta t$ obținem viteza apei $v_a=d/(2\Delta t)=5$ km/h

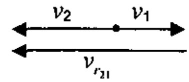
**c.** Deoarece colacul este barat de un cablu rigid $AB$ legat între cele două maluri și care formează cu un mal un unghi $\alpha$ ca în figură, colacul se va mișca de-a lungul cablului cu viteza $v=v_a\cos\alpha=2{,}5$ km



**16.a.** Considerăm că observatorul se află în trenul 1. Un observator din trenul 2 va înregistra o viteză relativă a trenului 2 față de trenul 1 $\vec{v}_{r_{21}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Deoarece trenurile se deplasează în acelaşi sens, $v_{r_{21}} = v_2 - v_1$. Pentru ca trenurile să se depăşească, distanța parcursă de trenul 2 este $d = \ell_1 + \ell_2$ şi deci timpul de depăşire este $t = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{v_2 - v_1} = 15$ s.




**b.** Dacă trenurile se deplasează în sens contrar, observatorul din trenul 2 va înregistra viteza relativă $\vec{v}_{r_{21}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Conform figurii alăturate obținem $v_{r_{21}} = v_1 + v_2$ şi timpul de depăşire este $t = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{v_1 + v_2} = 3{,}75$ s.




**c.** Observatorul din primul tren vede trecând prin fața lui trenul 2 cu viteza relativă $v_{r_{21}} = v_2 - v_1$ care are lungimea $\ell_2$. Timpul cât vede trecând observatorul trenul 2 este $t = \dfrac{\ell_2}{v_2 - v_1} = 9$ s. Deoarece $v_2 > v_1$, omul din primul vede întâi locomotiva şi apoi ultimul vagon al trenului 2.

**17.a.** Picăturile de ploaie cad față de tren cu viteza relativă $\vec{v}_r = \vec{v}_p - \vec{v}_1$. Din figura alăturată obținem: $tg\alpha = \dfrac{v_1}{v_p}$, astfel că viteza picăturilor de ploaie este $v_p = v_1 / tg\alpha \approx 86{,}5$ km/h


**b.** Deoarece trenurile se deplasează în acelaşi sens. viteza relativă a trenului 2 față de trenul 1 este $\vec{v}_{r_{21}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, iar scalar $v_{r21} = |v_2 - v_1|$. Timpul în care călătorul din primul tren vede trecând trenul al doilea cu lungimea $\ell$ este $t = \dfrac{\ell}{|v_2 - v_1|}$. Astfel viteza celui de-al doilea tren este $v_2 = v_1 \pm \dfrac{\ell}{t}$. Soluțiile sunt $v_2$=86 km/h când trenul al doilea prinde din urmă primul tren şi îl depăşeşte şi respectiv $v_2$=14 km/h când trenul al doilea este prins din urmă de primul tren şi depăşit de acesta.

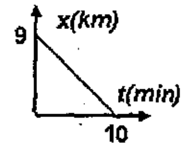
**c.** Timpul cât un om aflat în al doilea tren vede trecând prin fața lui trenul 1 cu lungimea $\ell_1$ şi cu viteza relativă $v_{r21} = v_2 + v_1$ este $t = \dfrac{\ell_1}{v_2 + v_1}$ =90 s

**18.a.** Viteza $v_1$ cu care scade distanța dintre *M* şi *N* este viteza relativă a automobilului *M* față de automobilul *N*, astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}_M - \vec{v}_N$, iar scalar $v_1 = v_M - v_N = 2v_M / 3$=72 km/h

**b.** Deoarece $d/2 = v_1 t$, automobilul *M* va ajunge din urmă automobilul *N* după timpul $t = d/(2v_1)$=225 s=3min45s. Astfel ora la care se întâlnesc automobilele este 12:02:40

**c.** Fiecare automobilul parcurge în timpul $t$ distanțele: $d_M=v_Mt=6750$ m, $d_N=v_Nt=2250$ m şi $d_P=v_Pt=3375$ m

**d.** Cum $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x_P-x_0}{t}$ atunci coordonata punctului $P$ este $x_P=x_0+v_Pt=9-54t$, unde timpul este exprimat în în ore şi coordonata în km. Automobilul $P$ ajunge în originea $O$ atunci când $x_P=0$, astfel că $t=1/6$ h=10 min. Reprezentarea grafică a dependenței de timp a coordonatei automobilului $P$ este redată în figura alăturată.



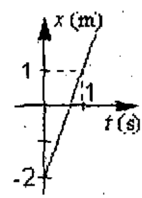

**19.a.** Înotătorii se întâlnesc prima oară când cel mai rapid întoarce iar cel lent încă nu a ajuns. Astfel primul sportiv a parcurs $AB+BC$, astfel că $AB+BC=v_1\cdot t$ (C este punctul în care se întâlnesc sportivii). Al doilea sportiv parcurge doar $AC$, astfel că $AC=v_2\cdot t$. În final obținem:

$$AB+BC+AC=(v_1+v_2)t \Rightarrow 2\ell=(v_1+v_2)t \Rightarrow t=\frac{2\ell}{v_1+v_2}=15{,}625 \text{ s.}$$

**b.** Distanța unde se vor întâlni prima dată față de punctul de plecare este $AC=v_2\dfrac{2l}{v_1+v_2}=43{,}75$ m.

**c.** Primul sportiv parcurge de o distanță cu $\ell$ mai mare decât al doilea sportiv, astfel că $\ell=v_1t-v_2t$. Timpul după care primul înotător va parcurge mai mult decât al doilea o lungime de bazin este $t=\dfrac{\ell}{v_1-v_2}=62{,}5$ s.

**20.a.** Pentru a reprezenta grafic legea de mişcare trebuie să considerăm două valori pentru timpul $t$.
Pentru $t_1=0 \Rightarrow x_1=-2$ m. şi pentru $t_2=1$ s$\Rightarrow x_2=1$ m.



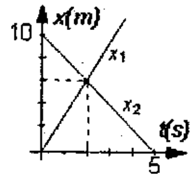

**b.** Punctul de intersecție cu axa coordonatelor $Ox$, reprezintă coordonata inițială a mobilului $x_0=-2$ m. Punctul de intersecție cu axa timpului reprezintă momentul de timp când mobilul trece prin originea axei de coordonate, astfel că pentru $x=0$ obținem $t\approx 0{,}666$ s

**c.** Viteza medie a mobilului coincide cu viteza instantanee în cazul mişcării rectilinii şi uniforme, astfel că $v=v_m=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=3$ m/s.

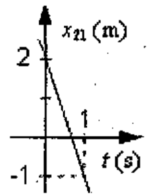
**21.a.** Cum $v=v_m=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x-x_0}{t-t_0}\Rightarrow x=x_0+v(t-t_0)$. Alegem originea de timp $t_0=0$ s. Din datele problemei $x_0=4$ m şi $v=-2$ m/s obținem ecuația coordonatei a mobilului $x=-2t+4$.

**b.** Momentul când trece prin originea axei de coordinate $Ox$ se obține din condiția $x=0$. Obținem $t=2$ s.

**c.** Distanța parcursă în primele 10 s se aslă cu $d = |x_f - x_0|$, unde $x_0$=4 m reprezintă coordonata inițială iar $x_f$=−16 m este coordonata la momentul $t$=10 s. Obținem $d$=20 m.




**22.a.** Pentru a reprezenta grafic legile de mişcare trebuie sa alegem câte două valori distincte pentru timpul $t$ pentru fiecare mobil şi apoi trasăm dreptele. Astfel pentru primul mobil când $t_0=0 \Rightarrow x_{01}=0$ şi când $t_1=1$s$\Rightarrow x_1=3$ m, iar pentru al doilea mobil când $t_0=0 \Rightarrow x_{02}=10$ m şi când $t_2=5$s$\Rightarrow x_2=0$.
**b.** Pentru ca mobilele să se întâlnească trebuie ca cele două coordonate să fie egale, astfel că $x_1 = x_2 \Rightarrow 3\cdot t = 10 - 2\cdot t \Rightarrow t = 2$ s. Mobilele se întâlnesc după 2 s, când coordonata este $x_1$=6 m.
**c.** Cum legea de mişcare în mişcarea rectilinie uniformă este $x = x_0 + v\cdot t$ prin identificarea coeficienților în cele două ecuații obținem: $v_1$=3 m/s; $v_2$=−2 m/s şi $x_{02}$=10 m. Deoarece $v_1$ şi $v_2$ au semne contrare, cele două mobile se deplasează unul spre celălalt, astfel că viteza relativă a primului mobil față de cel de-al doilea este: $v_{r_{12}} = v_1 - v_2 = 5$ m/s. Viteza relativă a mobilului 2 față de primul este $v_{r21} = v_2 - v_1 = -5$ m/s. Observăm că în modul vitezele relative sunt egale, dar au sensuri contrare.
**d.** Calculăm coordonatele la momentul $t$=6 s. Obținem $x_1$=18 m şi $x_2$=−2 m; distanța dintre mobile este: $d = |x_1 - x_2| = 20$ m.




**23.a.** Alegând sistemul de referință legat de mobilul 1, ecuația de mişcare a mobilului 2 față de acesta este: $x_{21} = x_2 - x_1 = -3\cdot t + 2$. Pentru $t_1$=0 s$\Rightarrow x_{21}$=2 m şi pentru $t_2$=1 s$\Rightarrow x_{21}$=−1 m. Reprezentarea grafică a legii de mişcare a mobilului (2) în raport cu un sistem de referință legat de mobilul (1) este redată în figura alăturată.
**b.** Pentru a determina momentul întâlnirii mobilelor impunem condiția ca $x_{21}$=0. Obținem momentul întâlnirii celor două mobile $t \approx 0{,}666$ s
**c.** Cum coeficientul din fața timpului $t$ în ecuația coordonatei reprezintă viteza mobilului. Astfel $v_1$=2 m/s şi $v_2$=−1 m/s, viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 este $v_{r_{12}} = v_1 - v_2 = 3$ m/s. Această viteză relativă are întotdeauna aceeaşi valoare, iar $v_{r_{21}} = -3$ m/s

**24.a.** Din reprezentarea grafică a legii coordonatei în funcție de timp, putem calcula viteza mobilului: $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = tg\,\alpha = -2$ m/s. unde $tg\,\alpha$ se numeşte panta dreptei ($\alpha$ este unghiul făcut de dreaptă cu axa timpului şi $\alpha$>90°).
**b.** Cum din grafic la $t=0 \Rightarrow x_0$=10m, iar ecuația coordonatei $x = x_0 + v\cdot t$ devine $x = 10 - 2t$ deoarece am considerat momentul inițial de timp momentul pornirii mobilului.
**c.** La momentul $t$=3 s coordonata mobilului este $x$=4 m.

**25.a.** Pe baza reprezentării grafice a legii coordonatei în funcție de timp, viteza mobilului în intervalul de timp (0,7)s este:

$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1} = \frac{-4-10}{7} = -2$ m/s, Prin urmare mobilul se mişcă rectiliniu şi uniform în sens contrar axei $Ox$.

**b.** În intervalul de timp de la 7s la 10 s, deoarece $x=-4$ m, mobilul se află în repaus.

**c.** Viteza medie a mobilului pe parcursul întregii mişcări este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -1$m/s deoarece la $t_0=0$, $x_0=10$ m, iar la $t_f=12$ s, $x_f=-2$ m.

**d.** Mobilul trece prin originea axei de coordonate când $x=0$. Cum în intervalul $t\in(0,7)$ s legea de mişcare este $x = 10-2t$, atunci după $t_1=5$ s mobilul trece prin originea axei $Ox$.

**e.** Pentru $t\in(0,7)$ s mobilul are o mişcare rectilinie uniformă în sens contrar axei $Ox$ şi la $t=5$ s trece prin originea axei. Pentru $t\in(7,10)$ s mobilul se află în repaus. Pentru $t\in(10,12)$ s mobilul are o mişcare uniformă în sensul axei de coordonate $Ox$.

**26.a.** Mobilul are pe prima porțiune de mişcare când $t\in(0,4)$s viteza $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=0,5$ m/s, pe a doua porțiune când $t\in(4,5)$s viteza $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = -4$ m/s, pe a treia porțiune când $t\in(5,6)$s mobilul se află în repaus, deoarece $x=-2$ m şi pe ultima porțiune când $t\in(6,8)$s mobilul are viteza $v_4 = \frac{\Delta x_4}{\Delta t_4}=2$ m/s

**b.** Distanța totală parcursă este $d=d_1+d_2+d_3+d_4=10$ m, deoarece pe prima porțiune $d_1=2$ m, pe a doua porțiune $d_2=4$ m, pe a treia $d_3=0$ şi pe a patra $d_4=4$ m

**c.** Viteza medie pe întregul interval de timp este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}=0,25$ m/s, deoarece $\Delta x=x_f-x_0=2$ m şi $\Delta t=8$ s

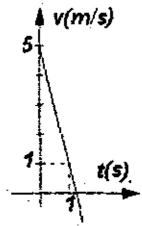
## 2.1.2. Mişcare rectilinie uniform variată a punctului material

**1.a.** Cum legea de mişcare a unui mobil care efectuează o mişcare rectilinie uniform variată este: $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin identificarea coeficienților obținem $x_0 = 4$ m, $v_0 = 3$ m/s şi $a = -2$ m/s².

**b.** Când $t = 1$ s coordonata mobilului este $x = 6$ m.

**c.** Când mobilul trece prin originea axelor de coordonate $x = 0 \Rightarrow 0 = -t^2 + 3t + 4$, iar soluțiile ecuației sunt: $t_1=-1$ s şi $t_2=4$ s. Cum valoarea $t_1=-1$ s înseamnă în trecut, soluția acceptabilă din punct de vedere fizic este $t_2=4$ s, ceea ce înseamnă că mobilul trece prin originea axei $Ox$ după 4 secunde de la ănceperea mişcării.

**2.a.** Din legea de mişcare prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 3$ m, $v_0 = 5$ m/s, $a = -4$ m/s². Ecuaţia vitezei este $v = v_0 + at = 5 - 4t$. Pentru a reprezenta grafic ecuaţia vitezei vom atribui două valori timpului $t$.




Astfel pentru $t_0$=0$\Rightarrow$ $v_0$=5 m/s şi pentru $t_1 = 1$ s$\Rightarrow$ $v_1 = 1$ m/s

**b.** Intersecţia graficului vitezei cu axa vitezei reprezintă fizic valoarea vitezei iniţiale $v_0$=5 m/s, iar intersecţia graficului vitezei cu axa timpului reprezintă fizic momentul de timp în care viteza mobilului se anulează şi acesta se opreşte, astfel că: $v = 0 \Rightarrow t_{op} = -\dfrac{v_0}{a} = 1{,}25$ s

**c.** Aria cuprinsă între curba vitezei, axa vitezei şi axa timpului este aria triunghiului $A = \dfrac{v_0 \cdot t_{op}}{2} = v_m \cdot t_{op} = 3{,}125$ m şi reprezintă fizic spaţiul parcurs de mobil până la oprire.

**3.a.** Din legea coordonatei prin identificarea coeficienţilor obţinem $x_0 = 0$ m, $v_0 = 3$ m/s şi $a = 2$ m/s², astfel că legea vitezei este: $v = v_0 + at = 3 + 2t$. Când $t_1 = 3$ s obţinem $v_1$=9 m/s.

**b.** A cincea secundă de la lansare este cuprinsă între $t_2$ =4 s şi $t_3 = 5$ s. Calculăm coordonatele corespunzătoare celor două momente de timp şi obţinem: $x_2 = 28$ m şi $x_3 = 40$ m. Distanţa parcursă în a cincea secundă de la lansare este: $d = x_3 - x_2 = 12$ m.

**c.** Conform principiului al doilea al dinamicii $F = ma = 0{,}4$ N

**4.a.** Utilizăm ecuaţia lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2x} = -1$ m/s².

**b.** Calculăm momentul de timp la care mobilul trece prin punctul de coordonată $x$ din legea vitezei $v = v_0 + at \Rightarrow t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{2x}{v + v_0} = 30$ s.

**c.** Viteza medie în acest timp interval de timp este $v_m = \dfrac{v + v_0}{2} = 5$ m/s.

**d.** Deoarece $v < 0$ şi $v_0 > 0$ înseamnă că în acest interval de timp mobilul s-a oprit şi apoi s-a întors, astfel că distanţa parcursă este: $d = x_{op} + (x_{op} - x) = 2x_{op} - x$. Din ecuaţia lui Galilei aflăm coordonata în momentul opririi $x_{op}$. $0 = v_0^2 + 2ax_{op} \Rightarrow x_{op} = -\dfrac{v_0^2}{2a} = \dfrac{v_0^2 x}{v_0^2 - v^2} = x\dfrac{v_0^2 + v^2}{v_0^2 - v^2}$=250 m.

**e.** Viteza în modul medie este: $|v_m| = \dfrac{d}{t} = \dfrac{v_0^2 + v^2}{2(v_0 - v)} = 8{,}33$ m/s.

**5.a.** Pe baza legii lui Galilei $v_1^2 = 2ad_1 \Rightarrow a = \dfrac{v_1^2}{2d_1} = 1{,}25$ m/s², iar din legea vitezei $v_1 = at_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{v_1}{a} = \dfrac{2d_1}{v_1} = 4$ s.

**b.** $v_2^2 = 2ad_2 \Rightarrow d_2 = \dfrac{v_2^2}{2a} = \dfrac{v_2^2}{v_1^2}d_1 = 160$ m.

**c.** Din legea coordonatei: $d_3 = \dfrac{at_3^2}{2} \Rightarrow t_3 = \sqrt{\dfrac{2d_3}{a}} = \dfrac{2\sqrt{d_1 d_3}}{v_1}$ viteza medie este:

$v_m = \dfrac{d_3}{t_3} = \dfrac{v_1}{2}\sqrt{\dfrac{d_3}{d_1}} = 5$ m/s.

**6.a.** Din legea vitezei $v = v_0 + a\Delta t$, când $v = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{v_0}{\Delta t} = -1$ m/s².

**b.** Din ecuația lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2as$, când $v = 0$, obținem spațiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\dfrac{v_0^2}{2a} = \dfrac{v_0 \Delta t}{2} = 450$ m.

**c.** Viteza medie este: $v_m = \dfrac{v_0 + 0}{2} = 15$ m/s.

**7.a.** Din legea coordonatei: $\ell = \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2\ell}{t^2} = 1{,}2$ m/s².

**b.** Din legea vitezei: $v = at = \dfrac{2\ell}{t} = 12$ m/s.

**c.** Pe planul orizontal sania are o mişcare uniform încetinită cu accelerația $a_1$ şi cu viteza inițială $v$ cea de la baza dealului. Pe baza relației lui Galilei şi din condiția de oprire $v_f=0 \Rightarrow 0 = v^2 + 2a_1 d \Rightarrow d = \dfrac{v^2}{2a_1} = 8$ m.

**8.a.** Utilizăm ecuația coordonatei: $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$ cu $x_0 = 0$, astfel obținem:

$x = v_0 t + \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2(x - v_0 t)}{t^2} = 0{,}3$ m/s².

**b.** Din legea vitezei: $v = v_0 + at$ obținem viteza mobilului la momentul de timp $t$, $v=16$ m/s.

**c.** Aflăm pe baza ecuației coordonatei la ce moment de timp se află mobilul în punctul de coordonată $x_1$, astfel că $x_1 = v_0 t_1 + \dfrac{at_1^2}{2} \Rightarrow \dfrac{at_1^2}{2} + v_0 t_1 - x_1 = 0 \Rightarrow$

$t_1 = \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2ax_1}}{a} = 15$ s, iar în acest moment viteza mobilului este:

$v_1 = v_0 + at_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ax_1} = 8{,}5$ m/s. Viteza medie este: $v_m = \dfrac{v_0 + v_1}{2} = 6{,}25$ m/s

**9.a.** Aplicăm legea lui Galilei: $v^2 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2d} = -4 \cdot 10^5$ m/s².

**b.** Din legea vitezei: $v = v_0 + at \Rightarrow t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{2d}{v + v_0} = 0{,}5$ ms.

**c.** Pentru a afla grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul impunem condiția de oprire a proiectilului, $v$=0, astfel că: $0 = v_0^2 + 2ad_{max} \Rightarrow d_{max} = -\dfrac{v_0^2}{2a} = \dfrac{v_0^2 d}{v_0^2 - v^2} = 31{,}25$ cm.

**10.a.** Aplicăm legea lui Galilei și punând condiția ca $v$=0 obținem spațiul până la oprire $0 = v_0^2 - 2as_{op} \Rightarrow s_{op} = \dfrac{v_0^2}{2a} = 100$ m și din legea vitezei cu $v$=0 obținem timpul până la oprire $0 = v_0 - at_{op} \Rightarrow t_{op} = \dfrac{v_0}{a} = 20$ s.

**b.** Pe baza legii coordonatei: $x = v_0 t - \dfrac{at^2}{2}$ când $t = 5$ s obținem $x = 43{,}75$ m.

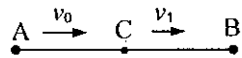
**c.** A patra secundă de la începerea mișcării este cuprinsă între secundele $t_3$ =3 s și $t_4$ =4 s, astfel coordonatele mobilului sunt: $x_3$=27,75 m și $x_4$=36 m. Distanța parcursă în a patra secundă de la începerea mișcării este: $d_{3\to4} = x_4 - x_3$ =8,25 m.

**11.a.** Notăm cu $v_0$ valoarea inițială a mașinii și cu $a$, accelerația acesteia. Aplicăm ecuația lui Galilei: $v_1^2 = v_0^2 + 2ad_1$ și $v_2^2 = v_0^2 + 2ad_2$. Scădem cele 2 relații și obținem $a = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2(d_1 - d_2)} = -8$ m/s², iar $v_0 = \sqrt{\dfrac{v_2^2 d_1 - v_1^2 d_2}{d_1 - d_2}} \approx 17{,}43$ m/s.

**b.** Timpul necesar mașinii să parcurgă distanța dintre cele două puncte este $\Delta t = t_2 - t_1$, unde $t_2$ și $t_1$ reprezintă momentele de timp la care vitezele mobilului au valorile $v_2$ și $v_1$. Din legea vitezei: $v_2 = v_0 + at_2$ și $v_1 = v_0 + at_1$ obținem $v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta t = \dfrac{v_2 - v_1}{a} = \dfrac{2(d_2 - d_1)}{v_1 + v_2} = 0{,}5$ s.

**c.** La oprire $v = 0$ și din ecuația lui Galilei: $0 = v_0^2 + 2as_{op}$ obținem spațiul parcurs de corp până la oprire: $s_{op} = -\dfrac{v_0^2}{2a} \Rightarrow s_{op} = \dfrac{v_1^2 d_2 - v_2^2 d_1}{v_1^2 - v_2^2} = 19$ m, iar din legea vitezei $0 = v_0 + at_{op}$ obținem valoarea timpului de oprire: $t_{op} = -\dfrac{v_0}{a} \approx 2{,}18$s

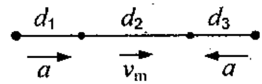
**12.a.** Notăm cu $v_0$ viteza iniţială a mobilului şi cu $a$, acceleraţia acestuia. Aplicăm ecuaţia coordonatei pentru fiecare jumătate de drum. Astfel: $AC = \frac{d}{2} = v_0 t_1 + \frac{a}{2} t_1^2$ (1) şi $CB = \frac{d}{2} = v_1 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$, unde $v_1 = v_0 + a t_1$. Obţinem: $\frac{d}{2} = (v_0 + a t_1) t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$ (2). Eliminând $v_0$ din ecuaţiile (1) şi (2) obţinem: $a = \frac{d(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 0{,}1\ \mathrm{m/s^2}$.




**b.** Viteza iniţială a mobilului este $v_0 = \frac{d - a t_1^2}{2 t_1} = 7{,}75\ \mathrm{m/s}$.

**c.** Viteza medie a mobilului este $v_m = \frac{d}{t_m} = \frac{d}{t_1 + t_2} = 10\ \mathrm{m/s}$.

**13.a.** Notăm cu $d$ distanţa dintre cele două staţii. Din $v_m = a t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_m}{a} = 30$ s, iar distanţa parcursă la accelerare este $d_1 = \frac{a t_1^2}{2} = 450$ m.




**b.** Deoarece acceleraţia la accelerare este egală în modul cu acceleraţia la frânare mişcarea este simetrică, astfel că distanţa $d_1$ pe care accelerează metroul este egală cu distanţa $d_3$ pe care frânează metroul, astfel că timpul de accelerare $t_1$ este egal cu cel de frânare $t_3$: $t_1 = t_3$. La frânare metroul parcurge aceeaşi distanţă, astfel că $d_3 = d_1$. Cum metroul accelerează şi frânează într-un timp $t = t_1 + t_3 = 1$ min, înseamnă că restul de timp $t'$ de un minut metroul se mişcă uniform cu viteza $v_m$, astfel că $d_2 = v_m \cdot t' = 1800$ m.

**c.** Distanţa dintre staţii este: $d = d_1 + d_2 + d_3 = 2700$ m.

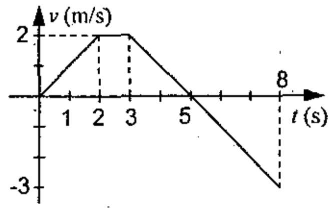
**14.a.** Viteza maximă atinsă de metrou se obţine la momentul $t_a$=18 s, astfel că din legea acceleraţiei $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t} \Rightarrow v_m = a_1 t_a$ =18 m/s, deoarece $a_1$=1 m/s²

**b.** Durata totală a călătoriei este $t=t_a+t_u+t_i$, unde $t_u$ reprezintă timpul cât metroul se mişcă uniform, iat $t_i$ reprezintă timpul cât metroul se mişcă încetinit. Aflăm din legea vitezei $v = v_m + a_3(t - t_{03}) = 18 - 0{,}5(t - 54)$ şi din condiţia de oprire $v$=0 timpul după care metroul se opreşte. Astfel obţinem $t_i$=36 s şi $t_t$=90 s.

**c.** Distanţa totală parcursă de metrou între cele două staţii este $d_t=d_1+d_2+d_3$, unde $d_1=v_m t_a/2$=162 m reprezintă distanţa parcursă de metrou la accelerare, $d_2=v_m t_u$=648 m reprezintă distanţa parcursă de metrou când acesta se mişcă uniform şi $d_3=v_m t_i/2$=324 cm reprezintă distanţa parcursă de metrou când frânează. Astfel obţinem $d_t$=1134 m.

**15.a.** Studiem mişcarea mobilului pe fiecare porţiune. În intervalul de timp $t\in(0,2)$s, $a_1 = 1$ m/s², $x_{01} = 0$ m şi $v_0 = 0$ m/s astfel că legea vitezei este: $v = a_1 t = t$, iar legea coordonatei este: $x = \frac{a_1 t^2}{2} = \frac{t^2}{2}$. Aflăm la finalul primei porţiuni de mişcare, când $t_1 = 2$ s, viteza mobilului este $v_1 = 2$ m/s şi coordonata este $x_1 = 2$ m. Când $t\in(2,3)$s, $a_2 = 0$ şi prin urmare pe a doua porţiune de mişcare mobilul are o mişcare rectilinie şi uniformă iar viteza rămâne constantă la valoarea $v_1 = 2$ m/s, iar legea coordonatei este: $x_2 = x_1 + v_1(t - t_1)$ $x_2 = 2t - 2$, iar după $t_2 = 3$ s coordonata este $x_{2f} = 4$ m

Studiem mişcarea mobilului pe porţiunea a treia, în care $a_3 = -1$ m/s². Mobilul are o mişcare uniform încetinită cu viteza iniţială $v_1 = 2$ m/s, $x_{03} = x_{2f} = 4$ m, $a_3 = -1$ m/s² când $t\in(3,8)$s. Legea vitezei este: $v_3 = v_1 + a_3(t - t_2) = 2 - (t - 3) = 5 - t$, iar cea a coordonatei este: $x_3 = x_{03} + v_1(t - t_2) + \frac{a_3}{2}(t - t_2)^2$




$\Rightarrow x_3 = 4 + 2(t - 3) - \frac{(t-3)^2}{2}$, deoarece $t_2$=3 s.

Aflăm la ce moment de timp de la începerea mişcării mobilul se opreşte. Din $v = 0 \Rightarrow t_{op} = 5$ s.

În final când $t_f = 8$ s $\Rightarrow v_f = -3$ m/s.

**b.** Pentru $t_f = 8$ s, aflăm din $x_3$, coordonata finală $x_{3f} = 1{,}5$ m.

**c.** Deoarece mobilul se opreşte şi apoi se întoarce, distanţa parcursă de mobil nu coincide cu valoarea coordonatei finale. Aflăm la ce distanţă de punctul de plecare se opreşte mobilul. Pentru $t_{op} = 5$ s se obţine $x_{3op} = 6$ m. Distanţa parcursă de mobil până la oprire este $d = x_{3op} + (x_{3op} - x_{3f}) = 10{,}5$ m

**16.a.** Pentru ca două mobile care se deplasează pe aceeaşi axă de coordonate, să se întâlnească, ele trebuie să se afle în acelaşi punct. Condiţia de întâlnire este: $x_1 = x_2$. Cum $x_1 = t^2 - 10t + 8$ şi $x_2 = -3t^2 + 4t + 2$ obţinem $t^2 - 10t + 8 = 2 + 4t - 3t^2 \Rightarrow 4t^2 - 14t + 6 = 0$. Soluţiile sunt $t_1 = 0{,}5$ s şi $t_2 = 3$ s, adică mobilele se întâlnesc de două ori, deoarece mobilul al doilea se opreşte. Din legea vitezei mobilului 2, $v_2 = 6 - 4t \Rightarrow t_{op_2} \approx 0{,}66$ s, iar apoi mobilul 2 se întoarce şi îl întâlneşte din nou pe primul mobil.

**b.** Coordonatele la care se întâlnesc mobilele sunt: $x = 3{,}25$ m, când primul mobil se deplasează în sens contrar axei *Ox* iar al doilea în acelaşi sens, respectiv $x' = -13$ m, când ambele mobile se deplasează în sens contrar axei *Ox* (după ce mobilul 2 s-a oprit şi s-a întors, dar înainte ca primul mobil să se oprească $t_{op_1} = 5$ s).

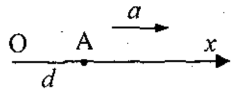
**c.** Legile vitezelor celor două mobile sunt:

$v_1 = v_{01} + a_1 t = -10 + 2t$, deoarece $v_{01} = 10$ m/s şi $a_1 = 2$ m/s$^2$.

$v_2 = v_{02} + a_2 t = 4 - 6t$, deoarece $v_{02} = 4$ m/s şi $a_2 = -6$ m/s$^2$.

Cum $v_1 = v_2 \Rightarrow t = 1{,}75$ s $\Rightarrow$ mobilele au viteze egale după ce mobilul 2 s-a oprit. Valoarea vitezei $v = v_1 = v_2 = -6{,}5$ m/s arată că ambele mobile se deplasează în sens contrar axei *Ox*.

**17.a.** Alegem origine a axei de coordonate *Ox*, punctul unde se află maşina care are o mişcare rectilinie şi uniformă. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două mobile: $x_1 = d + \frac{at^2}{2} = 8 + \frac{t^2}{2}$, iar $x_2 = 5t$.




Impunem condiţia de întâlnire a mobilelor: $x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 5t + 8 = 0$, iar soluţiile ecuaţiei sunt $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 8$ s, adică maşina ce are o mişcare uniformă o prinde din urmă pe cea care pleacă de la stop accelerat după $t_1 = 2$ s, pentru ca la $t_2 = 8$ s, maşina care se mişcă accelerat o prinde din urmă pe cea care se mişcă uniform şi o depăşeşte.

**b.** Calculăm distanţele la care se întâlnesc maşinile, atribuind pe rând valorile $t_1$ şi $t_2$ în ecuaţia coordonatei. Obţinem: $x = 10$ m şi $x' = 40$ m.

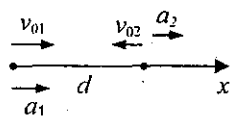
**c.**. Aflăm vitezele maşinii care se mişcă accelerat la cele două momente de timp $t_1$ şi $t_2$. Obţinem: $v_1 = at_1 = 2$ m/s şi $v_2 = at_2 = 8$ m/s. Cum viteza relativă este $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, în primul moment $t_1$, $v_{r_1} = v_1 - v = -3$ m/s, deoarece maşina care se mişcă accelerat este depăşită de maşina care se mişcă uniform, iar în momentul $t_2$, $v_{r_2} = v_2 - v = 3$ m/s, deoarece maşina care se mişcă accelerat depăşeşte maşina care se mişcă uniform.

**18.a.** Alegem origine a axei de coordonate stopul şi origine a timpului, momentul când prima maşină trece prin dreptul stopului. Scriem ecuaţiile de mişcare ale celor două maşini: $x_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 5t + t^2$, iar $x_2 = v(t - \Delta t) = 15(t-1)$, deoarece maşina a doua merge un timp mai mic cu $\Delta t$ decât prima maşină întrucât porneşte mai târziu. Impunem condiţia de întâlnire: $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15t - 15 \Rightarrow t^2 - 10t + 15 = 0$, iar soluţiile sunt $t_1 = 1{,}838$ s şi $t_2 = 8{,}162$ s. Maşinile se întâlnesc de două ori, prima dată când maşina care se mişcă uniform o prinde din urmă pe cea care se mişcă accelerat şi a doua oară când maşina care se mişcă uniform este prinsă din urmă de maşina care se mişcă accelerat.

**b.** Distanţele măsurate de la stop la care se întâlnesc maşinile se află din ecuaţia coordonatelor în care introducem pe rând cele două valori ale timpului aflate $t_1$ şi $t_2$ şi obţinem: $x \approx 12{,}57$ m şi $x' \approx 107{,}43$ m.

**c.** Pentru a se întâlni o singură dată, ecuația de gradul doi trebuie să aibă o singură soluție $\Delta = 0$, astfel că din $x_1 = x_2 \Rightarrow 5t + t^2 = 15(t - \Delta t) \Rightarrow$ $t^2 - 10t + 15\Delta t = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 60\Delta t$. Se obține $\Delta t \approx 1{,}666$ s.
Dacă $\Delta t < 5/3$ s, mașinile se întâlnesc de 2 ori, dacă $\Delta t = 5/3$ s, mașinile se întâlnesc o singură dată, iar dacă $\Delta t > 5/3$ s, mașinile nu se mai întâlnesc.

**19.a.** Alegem origine a axei de coordonate punctul de unde pornește primul mobil într-o mișcare accelerată. Considerăm origine de timp, momentul în care pornește primul mobil. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile. Pentru primul mobil ecuația coordonatei este:




$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} = 40t + t^2$. Pentru mobilul al doilea ecuația coordonatei este:

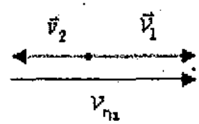
$x_2 = d - v_{01}(t - \Delta t) + \frac{a_2}{2}(t - \Delta t)^2$, deoarece acesta pornește cu întârziere $\Delta t$ față de primul mobil, din alt punct și deci are coordonata inițială $x_{02} = d$, se mișcă în sens contrar axei și încetinit ceea ce înseamnă că viteza lui este negativă, iar accelerația este pozitivă ($a_2$ are sensul axei) Astfel $x_2 = 426 - 10(t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2 = 448 - 10t + \frac{t^2}{2}$. Impunem condiția de întâlnire a mobilelor $x_1 = x_2$: și obținem: $40t + t^2 = 448 - 12t + \frac{t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} + 52t - 448 = 0$, iar soluția acceptabilă din punct de vedere fizic este pozitivă și este $t_i = 8$ s. Valoarea $t_1$ reprezintă momentul de timp la care se întâlnesc mobilele.

**b.** Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii acestora utilizând ecuațiile vitezelor: $v_1 = v_{01} + a_1 t_i = 56$ m/s și $v_2 = -v_{02} + a_2(t_i - \Delta t) = -4$ m/s deoarece al doilea mobil se deplasează în sens contrar axei de coordonate.

**c.** Calculăm vitezele medii ale mobilelor utilizând definiția vitezei medii: $v_{m_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{x_i}{t_i}$, unde $x_i$ reprezintă coordonata la care se întâlnesc mobilele.

Coordonata la care se întâlnesc mobilele se obține introducând timpul de întâlnire în oricare din ecuațiile de coordonate. Prin urmare: $x_i = 384$ m. Obținem vitezele medii ale celor două mobile, Astfel:

$v_{m_1} = 48$ m/s, iar $v_{m_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{x_i - d}{t_i - \Delta t} = -7$ m/s.

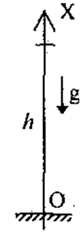



Calculăm viteza relativă a mobilului 1 față de mobilul 2 în momentul întâlnirii. Cum $\vec{v}_{r12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, scalar $v_{r_{12}} = v_1 + |v_2| = 60$ m/s.

**d.** Calculăm după cât timp se oprește mobilul 2, din ecuația vitezei punând condiția ca $v_2 = 0$. Din $v_2 = -v_{02} + a_2(t - \Delta t) = -12 + t$ obținem: $t_{op} = 12$ s. Calculăm la acest moment de timp valorile coordonatelor celor două mobile:

$x_1' = 624$ m şi $x_2' = 376$ m. Astfel distanţa dintre cele două mobile la acel moment de timp este: $d = x_1' - x_2' = 248$ m.

### 2.1.3. Mişcarea punctului material sub acţiunea greutăţii




**1.a.** Studiem căderea liberă a pietrei. Alegem originea axei *Ox* pe sol. Legea de mişcare a pietrei este: $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Când piatra ajunge la sol $x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 4$ s.

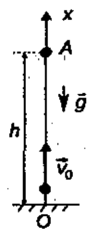
**b.** Utilizăm ecuaţia lui Galilei pentru a afla viteza cu care piatra loveşte solul. Din $v^2 = v_0^2 + 2gh$ cu $v_0 = 0$ obţinem $v = \sqrt{2gh} = 40\text{m/s}$

**c.** Calculăm valoarea coordonatei când $t_1 = t_c - 1 = 3$ s $\Rightarrow x = 35$ m $\Rightarrow$ în ultima secundă piatra a coborât pe distanţa de 35 m.

**2.a.** Deoarece originea axei de coordonate este pe sol, legea de mişcare a corpului este $x = h - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm timpul de cădere punând condiţia ca $x = 0$: $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20$ s. Aflăm după cât timp corpul ajunge în punctul în care $x = h_1 \Rightarrow h_1 = h - \frac{gt_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2(h-h_1)}{g}} = 16$ s$\Rightarrow \Delta t = t_c - t_1 = 4$ s.

**b.** Calculăm coordonatele la momentele de timp $t_2 = 1$ s şi $t_3 = 2$ s, deoarece a doua secundă de mişcare este cuprinsă între $t_2$ şi $t_3$.

Cum $x_2 = 1995$ m şi $x_3 = 1980$ m$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_3 = 15$ m reprezintă distanţa parcursă de mobil în a doua secundă de la lansare.




**3.a.** Utilizăm ecuaţia lui Galilei, ţinând cont că mobilul are o mişcare uniform încetinită cu acceleraţia *a=g*. În momentul atingerii înălţimii maxime, corpul se opreşte, astfel că din $v = 0$ $\Rightarrow 0 = v_0^2 - 2gh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 61{,}25$ m.

**b.** Din legea coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, considerând originea axei pe sol, punând condiţia ca mobilul să reajungă pe sol, $x = 0$, determinăm timpul de mişcare al mobilului, astfel că $0 = v_0 t_m - \frac{gt_m^2}{2} \Rightarrow t_m = \frac{2v_0}{g} = 7$ s.

**c.** Calculăm timpul de urcare al mobilului până la înălţimea maximă din legea vitezei $v = v_0 - gt$ punând condiţia ca $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = 3{,}5$ s.

Observăm că $t_c = t_m - t_u = \frac{v_0}{g} = t_u \Rightarrow$ timpul de urcare este egal cu timpul de coborâre. A patra secundă de mişcare este cuprinsă între secundele 3 şi 4. Deoarece $t_u \in (3,4)$s înseamnă că în secunda a patra mobilul urcă, se opreşte şi apoi coboară. Aflăm valoarea coordonatelor la momentele $t_3 = 3$ s şi $t_4 = 4$ s şi observăm că $x_3 = x_4 = 60$ m. Astfel mobilul urcă pe distanţa $h_{max} - x_3 = 1{,}25$ m şi coboară pe distanţa $h_{max} - x_4 = 1{,}25$ m. Distanţa parcursă este $d = 2(h_{max} - x_3) = 2{,}5$ m.

**4.a.** Corpul are o mişcare uniform încetinită cu viteza iniţială $v_0$ şi acceleraţia $g$. Din grafic se determină timpul de urcare $t_u = 2$ s. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ şi când $v = 0 \Rightarrow v_0 = gt_u = 20$ m/s. Viteza iniţială a corpului este $v_0 = 20$ m/s.

**b.** Din legea lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pentru $v = 0$ aflăm înălţimea maximă la care urcă corpul $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g \cdot t_u^2}{2} = 20$ m.

**c.** Din punctul de înălţime maximă corpul coboară accelerat cu acceleraţia $g$. Timpul de coborâre se obţine din ecuaţia coordonatei $x = h - \frac{gt^2}{2}$ cu $x = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = \frac{v_0}{g} = t_u$. Timpul total de mişcare este $t_m = t_u + t_c = 2t_u = 4$s

Conform legii vitezei $v = -gt$, deoarece la coborâre corpul cade liber şi cum $v_0 = 0$ atunci $v = -gt_c = -gt_u = -v_0 = -20$ m/s$\Rightarrow$corpul revine în punctul de lansare cu viteza cu care a fost lansat.

**5.a.** Un corp aruncat vertical de la sol urcă şi coboară astfel că $\Delta t = t_u + t_c = 2t_u$, deoarece $t_u = t_c$. Din legea vitezei $v = v_0 - gt$ şi când $v = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow v_0 = \frac{g\Delta t}{2} = 30$ m/s.

**b.** Din ecuaţia lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ şi pentru $v = 0$ aflăm înălţimea maximă la care urcă corpul, astfel că $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g\Delta t^2}{8} = 45$ m.

**6.a.** Pe baza ecuaţiei lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ si din condiţia $v = 0$ în punctul de înălţime maximă obţinem înălţimea maximă la care ajunge corpul $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 5$ m.

Cum $h = \frac{h_{max}}{2} = \frac{v_0^2}{4g}$, pe baza ecuaţiei coordonatei $x = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$ $\frac{v_0^2}{4g} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow \frac{gt^2}{2} - v_0 t + \frac{v_0^2}{4g} = 0$, iar cele două soluţii sunt: $t_{1,2} = \frac{v_0}{g}(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ $\Rightarrow t_1$=0,29 s şi $t_2$=1,71 s. Se obţin două valori care corespund momentelor când mingea trece prin punctul aflat la jumătate din înălţimea maximă la care ajunge corpul la urcare şi respectiv la coborâre.

**b.** Pe baza ecuaţiei lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $h=h_{max}/2$ obţinem cele două valori ale vitezei mingii: $v^2 = v_0^2 - 2g\frac{h_{max}}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v = \pm\frac{v_0\sqrt{2}}{2} = \pm 7{,}05$ m/s, unde valoarea pozitivă se obţine la urcarea mingii iar cea negativă la coborârea acesteia.

**c.** Cum definiţia vitezei medii este $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, iar $\Delta x = x_f - x_0 = \frac{h_{max}}{2}$ şi $\Delta t = t_2 \Rightarrow v_m = \frac{v_0\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 1{,}463$ m/s.

Prin definiţie viteza în modul medie este $|v|_m = \frac{d}{\Delta t}$, unde $d$ reprezintă distanţa parcursă de minge în intervalul de timp $\Delta t$. Dar $d = h_{max} + \frac{h_{max}}{2} = \frac{3h_{max}}{2} = \frac{3v_0^2}{4g}$, deoarece mingea urcă până la înălţimea maximă şi apoi coboară pe distanţa $\frac{h_{max}}{2} \Rightarrow |v|_m = \frac{3v_0\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+1)} \approx 4{,}388$ m/s.

**7.a.** Conform legii vitezei $v = v_0 - gt$ iar cum $v = \frac{v_0}{2}$ obţinem $t = \frac{v_0}{2g} = 2$ s.

**b.** Utilizăm ecuaţia lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ cu $v = \frac{v_0}{2}$ obţinem $h = \frac{3v_0^2}{8g} = 60$ m.

**c.** Observăm că $t_u = \frac{v_0}{g} = 4$ s şi din această cauză cum a treia secundă de lansare este cuprinsă între secundele $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 3$ s înseamnă că în a treia secundă corpul se află în urcare. Calculăm din legea coordonatei valorile coordonatelor la momentele $t_1$ şi $t_2$ si obţinem: $x_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$ =60 m şi $x_2 = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 75$ m. Distanţa parcursă de mobil eate $d = x_2 - x_1 = 15$ m.

**8.a.** Omul aflat pe platforma orizontală superioară vede coborând corpul după timpul $\Delta t_1$ măsurat din momentul urcării prin fața lui, astfel că $\Delta t_1 = t_{1u} + t_{1c} = 2t_{1u}$, deoarece $t_{1u} = t_{1c}$. Notăm cu $v_{01}$ viteza cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma orizontală superioară. Din legea vitezei $v = v_{01} - gt$ și din condiția de oprire $v = 0$ obținem: $t_{1u} = \frac{v_{01}}{g} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2v_{01}}{g} \Rightarrow v_{01} = \frac{g\Delta t_1}{2} = 10$ m/s.

**b.** Notăm cu $v_{02}$ viteza cu care trece corpul prin fața omului aflat pe platforma orizontală inferioară. Analog $v_{02} = \frac{g\Delta t_2}{2} = 30$ m/s.

Aflăm distanța dintre cele două platforme, pe baza ecuației lui Galilei $v_{01}^2 = v_{02}^2 - 2gd \Rightarrow d = \frac{v_{02}^2 - v_{01}^2}{2g} = 40$ m.

**9.a.** Ambele picături cad liber, într-o mișcare uniform accelerată cu accelerația $g$. Alegem origine de timp, momentul când prima picătură se desprinde. Axa $Ox$ este orientată în jos. Legile vitezelor celor două picături sunt $v_1 = gt$ și respectiv $v_2 = g(t - \Delta t)$. Prin definiție viteza relativă $v_r = v_1 - v_2 = g\Delta t \Rightarrow \Delta t = v_r / g = 1$ s reprezintă intervalul de timp care separă lansările celor două picături.

**b.** Cum $v_1 = 2v_2 \Rightarrow gt_1 = 2g(t_1 - \Delta t) \Rightarrow t_1 = 2\Delta t = 2$ s.

**c.** Distanțele parcurse de cele două picături în intervalul de timp $t_1$ sunt $d_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 2g\Delta t^2$ și $d_2 = \frac{g}{2}(t_1 - \Delta t)^2 = \frac{g}{2}\Delta t^2$. Distanța care desparte picăturile $d = d_1 - d_2 = \frac{3}{2}g\Delta t^2 = 15$ m.

**10.a.** Alegem originea axei de coordonate $Ox$, punctul de unde circarul lansează bilele. Alegem origine de timp momentul când este lansată prima bilă. Scriem legile de mișcare ale celor două bile: $x_1 = v_{01}t - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2$. Condiția ca cele două bile să se întâlnească este

$$x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01}t - \frac{gt^2}{2} = v_{02}(t - \Delta t) - \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2 \Rightarrow t_i = \frac{2v_{02} + g\Delta t^2}{2(v_{02} + g\Delta t - v_{01})} = 1{,}25\text{s}$$

reprezintă timpul după care bilele se întâlnesc.

**b.** Introducând valoarea timpul după care bilele se întâlnesc în oricare din ecuațiile coordonatelor obținem coordonata la care se întâlnesc bilele: $x_i \approx 4{,}6875$ m.

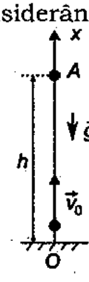
**c.** Calculăm după cât timp din momentul aruncării primei bile ajung corpurile pe sol. Pentru aceasta impunem condițiile: $x_1 = 0$ și $x_2 = 0$ și obținem $t_{m_1}=\frac{2v_{01}}{g}=2$ s și $t_{m_2}=\frac{2v_{02}}{g}+\Delta t=5$ s, iar intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este $\Delta t=t_{m_2}-t_{m_1}=3$ s.

**d.** Cele două bile se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când prima bilă coboară după $t_{m_1}=\frac{2v_{01}}{g}=2$ s iar a doua bilă începe să urce. Dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t>t_{m_1}$ bilele nu se mai pot întâlni în aer și prin urmare intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mare decât două secunde.

Cum $t_{m_2}=\frac{2v_{02}}{g}=1$ s, bilele se pot întâlni în aer în imediata vecinătate a punctului de lansare când ambele coboară iar intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare $\Delta t_{min}=t_{m_1}-t_{m_2}=\frac{2(v_{01}-v_{02})}{g}=1$ s. Dacă $\Delta t<\Delta t_{min}$, bila a doua ajunge în punctul de lansare mai repede decât prima bilă și bilele nu se întâlnesc în aer. Prin urmare dacă intervalul de timp ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este mai mic decât o secundă bilele nu se mai pot întâlni în aer. Deci intervalul de timp $\Delta t$ ce desparte sosirea bilelor în punctul de lansare este cuprins între (1s,2s) pentru ca bilele să se întâlnescă în aer.

**11.a.** Calculăm înălțimea maximă la care ajunge corpul lansat vertical de jos în sus din ecuația lui Galilei $v^2=v_0^2-2gh$ punând condiția ca în momentul opririi $v=0$ și obținem $h_{max}=\frac{v_0^2}{2g}=80$ m. Aflăm timpul de urcare al primului corp la înălțimea maximă din legea vitezei $v=v_0-gt$ cu $v=0\Rightarrow t_u=\frac{v_0}{g}=4$ s

**b.** Calculăm înălțimea de la care se lasă liber cel de-al doilea corp pe baza datelor problemei și obținem: $h=\frac{3}{4}h_{max}=\frac{3v_0^2}{8g}$. Alegem origine de timp momentul când se aruncă corpurile. Originea axei de coordonate $Ox$ o alegem pe sol. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile considerând că primul mobil este cel aruncat de pe sol. Astfel $x_1=v_{01}t-\frac{gt^2}{2}$ și




$x_2=h-\frac{gt^2}{2}=\frac{3v_0{}^2}{8g}-\frac{gt^2}{2}$.

Impunem condiția de întâlnire și aflăm timpul după care corpurile se întâlnesc: $x_1=x_2\Rightarrow v_0t-\frac{g\cdot t^2}{2}=\frac{3v_0^2}{8g}-\frac{gt^2}{2}\Rightarrow t_i=\frac{3v_0}{8g}=1{,}5$ s și înlocuind această valoare în oricare din ecuațiile coordonatei obținem: $x_1 = 48,75$ m.

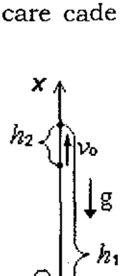
**c.** Calculăm vitezele mobilelor în momentul întâlnirii din ecuația vitezei prin introducerea timpului de întâlnire. Obținem $v_1 = v_0 - gt_1 = 25$ m/s și $v_2 = -gt_1 = -15$ m/s, deoarece în momentul întâlnirii primul mobil urcă, iar al doilea coboară. Viteza relativă cu care mobilul care urcă trece prin dreptul mobilului care coboară este $v_r = v_1 - v_2 = 40$ m/s.

**12.a.** Alegem originea axei de coordonate *Ox* pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două corpuri, considerând primul corp cel care cade liber. Astfel: $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm timpul după care primul corp ajunge la sol din $x_1 = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \sqrt{2h/g} = 2$s. Impunem condiția de întâlnire $x_1 = x_2$ și obținem $h - \frac{g \cdot t^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow v_0 = \frac{h}{t_i}$. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_i = t_{c_1}$ viteza inițială cu care se aruncă corpul al doilea este $v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 10$ m/s.

**b.** Din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$ calculăm înălțimea maximă la care ajunge corpul de pe sol, punând condiția ca în momentul opririi $v = 0$. Obținem: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{4} = 5$ m.

**c.** Calculăm pe baza ecuației lui Galilei vitezele cu care ajung corpurile pe sol, ambele având căderi libere de la înălțimile $h$ și respectiv $h_{max}$ după ce corpul al doilea s-a orpit. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh} = 20$ m/s și $v_2 = \sqrt{2gh_{max}} = v_1/2 = 10$ m/s.

**13.a.** Alegem originea axei de coordonate *Ox* pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp, cel care cade liber. Ecuația de mișcare a acestuia este $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și când ajunge la sol din $x_1 = 0$ aflăm timpul de coborâre al primului corp $t_{c_1} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 3,16$ s.



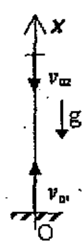

**b.** Ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp este $x_2 = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Impunem condiția de întâlnire a corpurilor $x_1 = x_2 \Rightarrow h_1 - \frac{g \cdot t^2}{2} = h_1 - h_2 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ Viteza inițială cu care a fost lansat corpul al doilea este $v_0 = h_2 / t_1$. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol $t_i = t_{c_1}$ atunci $v_0 \approx 3{,}16$ m/s.

**c.** Calculăm pe baza ecuației lui Galilei $v^2 = v_0^2 + 2gh$ viteza cu care ajunge primul corp la sol din $v_0=0$ și $h=h_1$. Obținem $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 31{,}62$ m/s. Aplicăm ecuația lui Galilei pentru cel de-al doilea corp, ținând cont că $h = h_1 - h_2$ când corpul ajunge la sol. Obținem $v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)} = 28{,}46$ m/s, deoarece la întoarcere corpul al doilea are o mișcare accelerată cu accelerația $g$ și revine în punctul de lansare cu viteza $v_0$ cu care a fost aruncat, dar această viteză este orientată în jos.


**14.a.** Alegem originea axei de coordonate $Ox$ pe sol și originea de timp, momentul când se aruncă vertical în sus corpul aflat la înălțimea $h$. Scriem ecuația de mișcare a acestui corp: $x_1 = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ și aflăm după cât timp ajunge acest corp pe sol din condiția ca $x_1 = 0 \Rightarrow \frac{g \cdot t^2}{2} - v_0 t - h = 0 \Rightarrow t_{c_1} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 4$ s.

**b.** Scriem ecuația de mișcare a celui de-al doilea corp: $x_2 = h - \frac{g(t - \Delta t)^2}{2}$, deoarece acesta cade liber de la înălțimea $h$, dar mai târziu cu $\Delta t$. Deoarece corpurile se întâlnesc la sol concomitet atunci $x_2 = 0$ când $t = t_{c_1} \Rightarrow 0 = h - \frac{g(t_{c_1} - \Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = t_{c_1} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1{,}18$ s.

**c.** Aflăm viteza cu care ajunge corpul al doilea la sol, aplicând ecuația lui Galilei și ținând cont că acesta cade liber de la înălțimea $h$. Obținem $v_2 = \sqrt{2gh} \approx 28{,}28$ m/s. Scriem ecuația vitezei pentru primul corp când acesta ajunge pe sol și $t = t_{c1}$. Obținem $v_1 = v_0 - gt_{c_1} = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} = -30$ m/s, iar semnul minus apare deoarece corpul 1 se mișcă în sens contrar axei $Ox$.




**15.a.** Alegem originea axei de coordonate $Ox$ pe sol și origine de timp momentul când pornesc corpurile. Considerăm primul corp cel lansat de pe sol vertical în sus. Scriem ecuațiile de mișcare ale celor două mobile: $x_1 = v_{01} t - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = h - v_{02} t - \frac{gt^2}{2}$. Din condiția de întâlnire $x_1 = x_2$ obținem $v_{01} t - \frac{gt^2}{2} = h - v_{02} t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_i = \frac{h}{v_{01} + v_{02}}$.

Ecuațiile vitezelor celor două mobile sunt: $v_1 = v_{01} - gt$ și

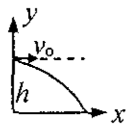
$v_2 = -v_{02} - gt$. În momentul întâlnirii vitezele celor două corpuri sunt egale, dar opuse, deoarece mobilele se deplasează în sens contrar, astfel că $v_1 = -v_2 \Rightarrow v_{01} - gt_{\hat{i}} = v_{02} + gt_{\hat{i}} \Rightarrow t_{\hat{i}} = \dfrac{v_{01} - v_{02}}{2g} \Rightarrow h = \dfrac{v_{01}^2 - v_{02}^2}{2g} = 100$ m.

**b.** Calculăm după cât timp din momentul lansării corpurile ajung pe sol, punând condiția ca $x$=0. Pentru primul corp: $x_1 = 0 \Rightarrow t_{m_1} = \dfrac{2v_{01}}{g} = 9$ s. Pentru cel de-al doilea corp: $x_2 = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{gt_{m_2}^2}{2} + v_{02}t_m - h \Rightarrow t_{m_2} = \dfrac{-v_{02} + \sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{g} \Rightarrow$

$t_{m_2} = \dfrac{v_{01} - v_{02}}{g} = 4$ s. Intervalul de timp care desparte sosirea corpurilor la sol este $\Delta t = t_{m_1} - t_{m_2} = 5$ s.

**c.** Utilizăm ecuația vitezei $v = v_0 - gt$ pentru a afla vitezele cu care cad corpurile pe sol. Pentru primul corp $v_1 = v_{01} - gt_{m_1} = -v_{01} = -45$ m/s, deoarece acesta se întoarce cu viteza cu care a plecat. Pentru corpul al doilea $v_2 = -v_{02} - gt_{m_2} = -v_{01} = -45$ m/s. Semnele „–" apar deoarece corpurile se deplasează în sens contrar axei *Ox*.

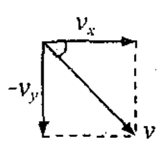
**16.a.** Studiem mişcarea cărţii pe două axe de coordonate *Ox* şi *Oy*, cu originea pe sol. Pe *Ox* cartea are o mişcare rectilinie uniformă cu viteza $v_x = v_0$, iar ecuația de mişcare este $x = v_0 t$ iar pe *Oy* cartea are o mişcare uniform accelerată cu accelerația *g* şi fără viteză inițială pe axa *Oy* $v_{0y} = 0$ (cădere liberă), astfel că ecuația de mişcare este $y = h - \dfrac{gt^2}{2}$. Ecuația traiectoriei se obține eliminând timpul din cele două ecuații. Obținem $t = \dfrac{x}{v_0} \Rightarrow y = h - \dfrac{g}{2}\dfrac{x^2}{v_0^2}$. Traiectoria este o parabolă deoarece *y* este o funcție de gradul doi de $x$.




**b.** Cartea ajunge la sol când $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}4$ s.

**c.** Cartea cade față de marginea masei la distanța: $d = v_0 t_c = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 40$ m

**17.a.** Studiem aruncarea pietrei pe orizontală pe axele de coordonate *Ox* şi *Oy*. Pe *Ox* mişcarea pietrei este rectilinie şi uniformă cu $v_x = v_0$, iar ecuația de mişcare este $x = v_0 t$ iar pe *Oy* piatra cade liber de la înălțimea *h*, astfel că legea de mişcare este $y = h - \dfrac{gt^2}{2}$, iar legea vitezei este $|v_y| = gt$. Cum vectorul



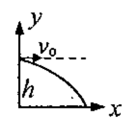
viteză este tangent la traiectorie, îl descompunem în două componente $v_x$ şi $v_y$ astfel că $tg\,\alpha = \frac{|v_y|}{v_x} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{gt_m}{v_0} \Rightarrow t_m = \frac{v_0 tg\,\alpha}{g} \approx 2{,}595$ s.

Calculăm înălţimea casei din condiţia ca $y = 0 \Rightarrow h = \frac{gt_m^2}{2} = \frac{v_0^2 tg^2\alpha}{2g} = 33{,}75$ m.

**b.** Din desen $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{v} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\cos\alpha} = 30$ m/s.

**c.** Distanţa unde cade piatra se află din ecuaţia de mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_0$ pe axa $Ox$, astfel că $d = v_0 t_m = \frac{v_0^2}{g} tg\,\alpha \approx 38{,}9$ m.

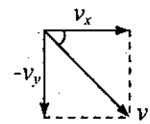
**18.a.** Studiem aruncarea pe orizontală a unui corp. Astfel pe axa $Ox$ corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_0$, astfel că $x = v_0 t$ iar pe axa $Oy$ corpul are o cădere liberă, astfel că $y = h - \frac{gt^2}{2}$. Timpul de cădere se obţine când corpul ajunge la sol astfel că $y = 0 \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Deoarece corpurile cad de la aceeaşi înălţime



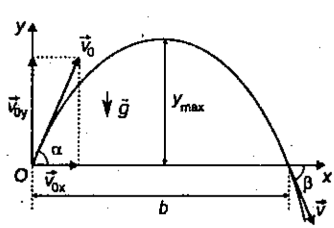

$h_1 = h_2 = h \Rightarrow t_{c_1} = t_{c_2} = t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \frac{t_{c_2}}{t_{c_1}} = 1$. Prin urmare corpurile cad în acelaşi interval de timp.

**b.** Deoarece $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_{02} t_{c_2}}{v_{01} t_{c_1}} = 4$ înseamnă că bătaia corpului al doilea este de patru ori mai mare decât bătaia primului corp.

**c.** Viteza la sol se calculează din geometrie ţinând cont că vectorul viteză este tangent la traiectorie, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, iar $v_x = v_0$ şi $v_y = -gt_c = -\sqrt{2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$




Raportul vitezelor corpurilor când acestea ajung la sol este: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{v_{02}^2 + 2gh}}{\sqrt{v_{01}^2 + 2gh}} = 2$.




**19.a.** Studiem aruncarea pietrei sub un unghi pe cele două axe de coordonate cu originea pe sol $Ox$ şi $Oy$. Astfel că pe $Ox$ piatra are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, iar legea de mişcare este: $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$ iar pe $Oy$ piatra are o mişcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, iar legea de mişcare este $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Pentru a obţine ecuaţia traiectoriei, eliminăm timpul *t*, din cele două ecuaţii.

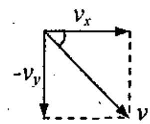
Astfel $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow y = xtg\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$ redă dependenţa coordonatei *y* în funcţie de coordonata *x*. Cum funcţia lui *y* de *x* este de gradul doi, traiectoria este o parabolă cu vârful în sus, deoarece coeficientul lui $x^2$ este negativ.

**b.** Pentru a determina unde loveşte piatra solul punem condiţia ca y=0 şi obţinem $x_m = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 25{,}95$ m.

**c.** Aflăm timpul de urcare până la înălţimea maximă din legea vitezei pe axa *Oy*: $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$ şi din condiţia de oprire $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

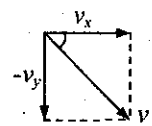
Prin introducem timpului în ecuaţia coordonatei pe axa *Oy* obţinem $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$=11,25 m.

**d.** Cum viteza corpului este tangentă la traiectorie o descompunem în două componente pe cele două axe, astfel că $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Cum $v_x = v_0 \cos\alpha$, deoarece pe *Ox* corpul se mişcă rectiliniu uniform, iar $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ obţinem




$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2 t^2}$ =10 m/s.

**20.a.** Studiem aruncarea proiectilului pe axele de coordonate *Ox* şi *Oy* cu originea pe sol. Astfel pe *Ox* $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, deoarece pe această axă proiectilul are o mişcare rectilinie şi uniformă iar pe *Oy* $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, deoarece pe această axă proiectilul are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Aflăm timpul de zbor al proiectilului din condiţia ca acesta să ajungă la sol, astfel că




$y = 0 \Rightarrow t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow$ bătaia proiectilului se obţine înlocuind timpul de mişcare în ecuaţia coordonatei pe axa *Ox*. Obţinem $b = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$ şi înlocuind timpul de mişcare în ecuaţia coordonatei pe axa *Oy*, obţinem înălţimea maximă a proiectilului $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Cum $b = h_{max} \Rightarrow \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \Rightarrow 4\cos\alpha = \sin\alpha \Rightarrow 16\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ şi $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

**b.** Înălţimea maximă la care urcă proiectilul este $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ =80 m.

**c.** Timpul de zbor este $t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ =8 s.

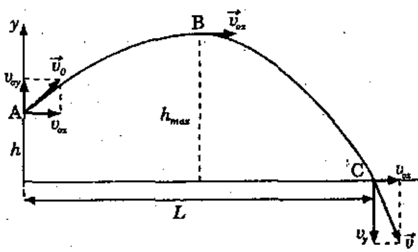
**21.a.** Mingea este aruncată de un copil sub un unghi $\alpha$ şi cu viteza iniţială $v_0$. Pe axa *Oy*, mingea are o aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza iniţială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, astfel că $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$. În momentul opririi $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Timpul total de mişcare este $t = t_u + t_c = 2t_u = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, deoarece timpul de urcare este identic cu cel la coborâre. Aplicând ecuaţia lui Galilei la mişcarea pe verticală de jos în sus obţinem:
$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh = v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh$.

În momentul opririi $v_y$=0$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{gt^2}{8}$=5 m şi înălţimea maximă faţă de sol până la care ridică mingea este $H_{max} = h_{max} + h$ =6,2 m.

**b.** Pe axa *Ox* mingea are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, astfel că distanţa la care se află copii pentru a prinde mingea este $d = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Deoarece această distanţă este maximă atunci $\sin 2\alpha = 1$, adică α=45⁰ şi în acest caz $d = \frac{v_0^2}{g} = 10$ m.

**c.** Timpul de zbor al mingii când α=45⁰ este $t_m = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \approx 1{,}41$ s

**22.a.** Studiem mişcarea corpului alegând originea axelor *Ox* şi *Oy* pe sol, la baza turnului. Pe axa *Ox*, corpul se mişcă rectiliniu şi uniform cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, astfel că legea de mişcare este $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$.




Pe axa *Oy*, corpul are o mişcare de aruncare pe verticală de jos în sus cu viteza $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, astfel că legea de mişcare este $y = h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Aflăm din legea vitezei pe axa $Oy$ $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$, timpul de urcare până la înălțimea maximă punând condiția ca $v_y = 0 \Rightarrow t_u = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Astfel înălțimea maximă la care urcă corpul este $h_{max} = h + \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 15$ m

**b.** Aflăm timpul de zbor al corpului, punând condiția ca:

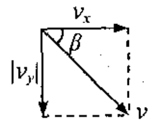
$$y = 0 \Rightarrow \frac{gt_m^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t_m - h = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} \approx 2{,}73 \text{ s}.$$

**c.** Distanța la care cade corpul față de baza turnului este $d = v_0 \cos\alpha \cdot t_m \approx 47{,}23$ m.

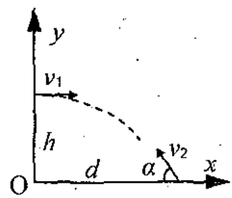
**d.** Din desen $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ unde $v_x = v_0 \cos\alpha$ iar $v_y = v_{0y} - gt_m \Rightarrow$

$v_y = v_{0y} \sin\alpha - gt_m = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \Rightarrow$

$v \approx 24{,}5$ m/s.




$$tg\,\beta = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt_m}{v_0 \cos\alpha} = 1 \Rightarrow \beta = 45°.$$




**23.a.** Deoarece piatra lovește pasărea, impunem condiția de întâlnire față de cele două axe de coordonate $Ox$ și $Oy$, astfel că $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.

Originea axelor de coordonate se alege pe sol la baza stâlpului. Studiem mișcarea păsării pe cele două axe de coordonate: pe $Ox$: $x_1 = v_1 t$ și pe $Oy$: $y_1 = h$.

Deoarece piatra este aruncată simultan cu zborul păsării, legile de mișcare ale pietrei pe cele două axe de coordinate sunt:

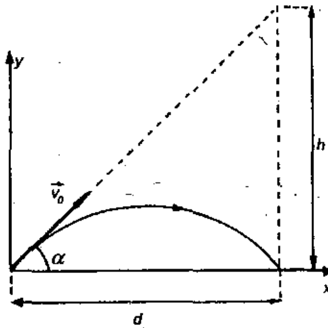
pe $Ox$: $x_2 = d - v_2 \cos\alpha \cdot t$ și pe $Oy$: $y_2 = v_2 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}$.

Din $y_1 = y_2 \Rightarrow h = v_2 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{v_2 \sin\alpha \pm \sqrt{v_2^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{g}$. Momentele de timp după care piatra lovește pasărea sunt $t_1$=1 s, când piatra lovește pasărea în urcare, și $t_2$=2 s, când piatra lovește pasărea în coborâre.

**b.** Din $x_1 = x_2 \Rightarrow v_1 t = d - v_2 \cos\alpha \cdot t \Rightarrow d = (v_2 \cos\alpha + v_1)t$. Obținem valorile la care se poate afla pasărea de locul unde copilul lansează piatra: $d_1$=40 m și $d_2$=80 m corespunzătoare valorilor $t_1$ și $t_2$.

**c.** Descompunem viteza pietrei în cele două componente $v_x$ și $v_y$ imediat înainte de ciocnire, astfel că în momentul lovirii păsării viteza pietrei este $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Deoarece $v_x = v_2 \cos\alpha$ și $v_y = v_2 \sin\alpha - gt$ obținem $v = \sqrt{v_2^2 + g^2 t^2 - 2gtv_2 \sin\alpha}$. Pentru $t_1$ și $t_2$ obținem aceeași valoare a vitezei $v \approx 26{,}46$ m/s

**24.** Arătăm că glontele loveşte întotdeauna ţinta. Alegem originea axelor *Ox* şi *Oy* pe sol unde se află puşca. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiţia de întâlnire $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. Scriem legile de mişcare pentru glonte pe cele două axe: pe *Ox*: $x_1 = v_0 \cos\alpha \cdot t$ şi pe *Oy*: $y_1 = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Ţinta se află la distanţa $d$ de puşcă, astfel că $tg\,\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{tg\,\alpha}$ şi legile de mişcare pentru ţintă pe cele două axe sunt: pe *Ox* $x_2 = d = \frac{h}{tg\,\alpha}$ şi pe *Oy*: $y_2 = h - \frac{gt^2}{2}$.



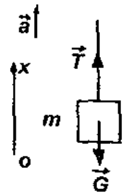

Cum $x_1 = x_2 \Rightarrow v_0 \cos\alpha \cdot t_i = \frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha}$ obţinem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin\alpha}$ =0,25s şi din

$y_1 = y_2 \Rightarrow v_0 \sin\alpha \cdot t_i - \frac{gt_i^2}{2} = h - \frac{gt_i^2}{2}$ obţinem $t_i = \frac{h}{v_0 \sin\alpha}$.

Deoarece se obţine aceeaşi formulă pentru timpul de întâlnire, înseamnă că glontele loveşte întotdeauna ţinta.

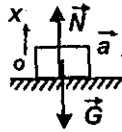
## 2.2. Principiile mecanicii

**1.a.** Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului: greutatea $G$ ca rezultat al interacțiunii corp–Pământ și tensiunea $T$ ca rezultat al interacțiunii corp–fir. Se aplică principiul al II-lea al dinamicii: $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Se alege o axă $Ox$ în sensul de mișcare și se proiectează relația vectorială. Scalar se obține: $T-mg=ma \Rightarrow T=m(g+a)=3mg$ =60 N




**b.** $a_{max}=T_{max}/m-g=30$ m/s²

**2.a.** Omul apasă asupra podelei liftului cu o forță egală cu reacțiunea normală, astfel că pe baza principiilor mecanicii $\vec{N}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Prin proiecție pe $Ox$ se obține: $N-mg=-ma \Rightarrow N=m(g-a)=900$ N



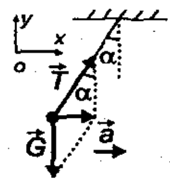

**b.** Deoarece $N\geq 0 \Rightarrow m(g-a)\geq 0 \Rightarrow g\geq a \Rightarrow$ accelerația maximă cu care poate coborî liftul pentru ca omul să mai apese pe podea este accelerația gravitațională $g$=10 m/s².

**3.** După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al II-lea al dinamicii. Vectorial se obține: $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Alegem un sistem de axe $Ox$ și $Oy$ și proiectăm pe aceste axe relația vectorială:

pe $Ox$: $T\sin\alpha=ma$ și pe $Oy$: $T\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow$

$T\cos\alpha=mg \Rightarrow tg\,\alpha=a/g \Rightarrow a=g\cdot tg\,\alpha=5{,}76$ m/s²

Din $\cos\alpha=G/T \Rightarrow T=mg/\cos\alpha=5{,}78$ N.

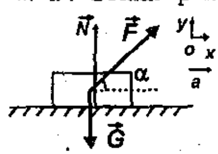



**4.** Pe baza desenului de la problema precedentă, proiectând relația vectorială $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$ pe axele $Ox$ și $Oy$ obținem: $T\sin\alpha=ma$ și $T\cos\alpha=mg$. Împărțim cele două relații și obținem: $tg\alpha=a/g \Rightarrow \alpha=30^0$, iar din teorema lui Pitagora $T^2=m^2a^2+m^2g^2 \Rightarrow T=m\sqrt{a^2+g^2}$ =2,31 N

**5.** Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{T}+\vec{G}+\vec{F}=m\cdot\vec{a}$. Scalar prin proiecția pe axele de coordonate se obține:

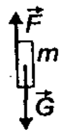
pe $Ox$: $F\cos\alpha=ma \Rightarrow F=\dfrac{ma}{\cos\alpha}=4$ N.

pe $Oy$: $N+F\sin\alpha=mg \Rightarrow N=mg-F\sin\alpha=16{,}54$ N.

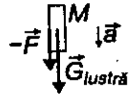



**6.** Deoarece pisica rămâne în permanență la aceeași înălțime față de sol, ea se află în repaus, astfel că rezultanta forțelor este nulă. Asupra pisicii acționează atât greutatea $G$, ca rezultat al interacțiunii cu Pământul, cât și forța $F$, ca rezultat al interacțiunii pisicii cu lustra. Lustra împinge pisica în sus, iar pisica împinge lustra în jos, conform principiului acțiunii și reacțiunii. Studiem repausul pisicii, astfel că rezultanta forțelor care acționează asupra acesteia este nulă. Vectorial: $\vec{F}+\vec{G}=0$ și scalar: $F=mg=20$ N

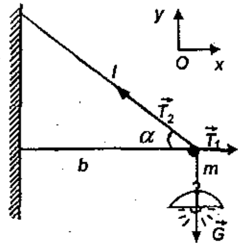
Reprezentăm forțele ce acționează asupra lustrei şi aplicăm principiul al II-lea al dinamicii, astfel că vectorial obținem: $\vec{G}' + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Scalar obținem:




$$G' + F = Ma \Rightarrow Mg + mg = Ma \Rightarrow a = \frac{(M+m)g}{M} = 15 \text{ m/s}^2.$$




**7.** Deoarece lampa se află în repaus, rezultanta forțelor este nulă, conform principiului 1. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$ Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $T_1 - T_2 \cos\alpha = 0$ şi pe *Oy*: $T_2 \sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow T_2 = \frac{mg}{\sin\alpha}$.




Din geometrie $\sin\alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\ell} = \frac{3}{5} \Rightarrow T_2 = \frac{mg\ell}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 100$ N

şi $T_1 = T_2 \cos\alpha = mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{mgb}{\sqrt{\ell^2 - b^2}} = 80$ N.

**8.a.** Pentru $t \in (0,5)$s, $F_1=10$ N $\Rightarrow$ accelerația este $a_1 = F_1/m = 2$ m/s². Conform definiției accelerației: $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}$, deoarece la momentul inițial $t_0=0$, $v_0=0 \Rightarrow v = a_1 t = 2t$, astfel că atunci când $t_1=5$ s $v_1 = a_1 t_1 = 10$ m/s.

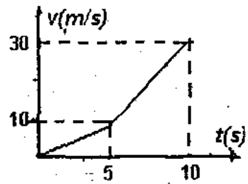
Pentru $t \in (5,10)$s $\Rightarrow F_1=20$N $\Rightarrow a_2 = F_2/m = 4$ m/s²

Cum $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_{02}}{t - t_{02}} \Rightarrow v = v_{02} + a_2(t - t_{02})$, unde

$v_{02} = v_{1max} = 10$ m/s şi $t_{02} = 5$ s $\Rightarrow v = 4t - 10$.

Când $t_f = 10$ s $\Rightarrow v_f = 30$ m/s.

Reprezentarea grafică a dependenței vitezei în raport cu timpul este redată în figura alăturată.




**b.** Distanța parcursă de corp în timpul este

$$d = v_m t_1 \text{, deoarece } v_m = \frac{0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2} \Rightarrow d = \frac{v_1 t_1}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 25 \text{ m}$$

**c.** Prin definiție $v_m = \frac{D}{\Delta t}$, unde $D$ reprezintă distanța totală parcursă. Pe baza interpretării grafice, deoarece viteza este reprezentată în funcție de timp, distanța parcursă se calculează prin aria de sub curba vitezei, astfel că:

$D = A_{triunghi} + A_{trapez} = 25$ m$+100$ m$=125$ m $\Rightarrow v_m = 12{,}5$ m/s.

**9.a.** Când $t \in (0,10)$s, $a_1=0{,}2$ m/s², astfel că liftul are o mişcare uniform accelerată pornind din repaus. Pe baza reprezentării fortelor obținem $T_1 - mg = ma_1 \Rightarrow T_1 = m(g + a_1) = 5100$ N. Când $t \in (10,20)$s, $a_2=0$ m/s², astfel că liftul are o mişcare rectilinie şi uniformă şi $T_2 = mg = 5000$ N. Când $t \in (20,25)$s, $a_3=-0{,}4$ m/s², astfel că liftul are o mişcare uniform frânată $T_3 = m(g + a_3) \Rightarrow$

$T_3$=4800 N.

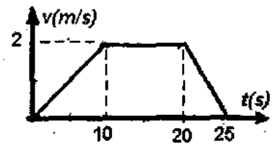
**b.** $a_1=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t}\Rightarrow v=a_1t$ =0,2$t$ când, $t\in(0,10)$s $\Rightarrow v_1$=2 m/s când $t_1$=10 s

Când $t\in(10,20)$ s corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă cu $v_1$=2 m/s

Când $t\in(20,25)$s, $a_2=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v-v_{02}}{t-t_{02}}\Rightarrow v=v_{02}+a_2(t-t_{02})$ unde $v_{02}$=2 m/s şi $t_{02}$=20 s, astfel că $v$=10−0,4$t$.

Viteza finală se obţine când $t$=25 s$\Rightarrow v$=0 m/s, adică liftul se opreşte.

Reprezentarea grafică a vitezei liftului în funcţie de timp în intervalul de timp $t\in(0;25)$s este redată în figura alăturată.



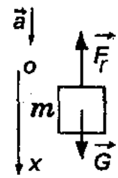

**c.** Când $t$=15 s, liftul are o mişcare uniformă cu viteza $v$=2 m/s

**d.** Deoarece când $t\in(0,10)$s, $v$=0,2$t$, viteza medie reprezintă media aritmetică a valorilor de la capetele intervalului, astfel că $v=\dfrac{0+v_1}{2}$=1 m/s

**10. a.** Din grafic pe baza definiției accelerației se obține $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t}$=9 m/s$^2$

**b.** Pe baza acțiunii forțelor şi a principiului II obținem:

$mg-F_r=ma\Rightarrow F_r=m(g-a)$=0,1 N



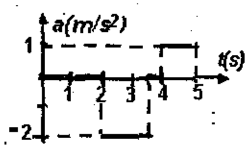

**c.** Cum $d=v_m\Delta t$, iar cum $v=at$, viteza medie reprezintă media aritmetică a vitezelor $v_1=at_1$=4,5 m/s şi $v_2=at_2$=13,5 m/s, astfel că $v_m=\dfrac{v_1+v_2}{2}$=9 m/s$\Rightarrow d$=9 m

**11.a.** Deoarece viteza este reprezentată în funcție de timp, distanța parcursă de corp în primele $t_1$=3 s reprezintă aria cuprinsă între curba vitezei şi axa timpului, astfel că $d_1=A_{trapez}$=5 m

**b.** În intervalul $t\in(3,5)$s corpul a parcurs distanța $d_2$=1,25 m, adică aria trapezului de sub axa timpului. Distanța totală percursă de corp este $d=d_1+d_2$=6,25 m, astfel că modulul vitezei medii este $v_m=d/t$=1,25 m/s

**c.** Deoarece $F=ma$, atunci când $t\in(0;2)$s şi când $t\in(3,5;4)$s $a$=0 deoarece mobilul are o mişcare rectilinie şi uniformă. Când $t\in(2;3,5)$s accelerația este $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=-2$ m/s$^2$ şi când $t\in(4;5)$s accelerația este $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=1$ m/s$^2$

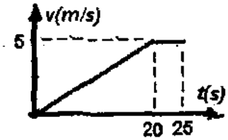
Reprezentarea grafică a forței rezultante care se exercită asupra corpului este redată în figura alăturată.




**12. a.** Cum $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{t}\Rightarrow t=\dfrac{v}{a}$=20 s

**b.** Pe baza acțiunii forțelor şi a principiului II obținem: $F-F_r=(M+m)a$. Cum $F_r=F/n\Rightarrow F=n(M+m)/(n-1)$=31,25 N

**c.** În primele $t$=20 s ciclistul are o mişcare accelerată şi porneşte din repaus, astfel că $v=at=0{,}25t$, iar după $t$=20 s, $v$=5 m/s. Apoi ciclistul are o mişcare uniformă. Reprezentarea grafică a vitezei ciclistului este redată în figura alăturată.

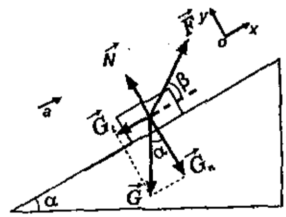



**d.** Considerăm biciclistul observator şi calculăm viteza relativă cu care se deplasează camionul față de el, $\bar{v}_r = \bar{v}_C - \bar{v}$. Scalar obținem $v_r=v_C+v$ deoarece camionul se deplasează în sens contrar. Intervalul de timp $\Delta t$ în care camionul depăşeşte ciclistul este $\Delta t=(\ell+\ell_1)/(v_C+v)$=0,6 s

**13.a.** În imediata vecinătate a Pământului, parasutistul are o mişcare uniformă astfel că: $\vec{G}+\vec{F}_r=0 \Rightarrow mg=kv_0 \Rightarrow k=mg/v_0$=200 Ns/m


**b.** $\vec{G}+\vec{F}_r=m\vec{a}$, iar scalar $mg-kv=ma \Rightarrow a=g\left(1-\dfrac{v}{v_0}\right)$=5 m/s$^2$

**14.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate şi obținem: pe $Ox$: $F\cos\beta - mg\sin\alpha = ma$ şi pe $Oy$:




$$N+F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow F=\frac{m(a+g\sin\alpha)}{\cos\beta}\approx 9{,}92\text{N}$$

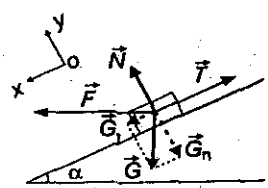
**b)** $N=mg\cos\alpha - F\sin\beta = mg\cos\alpha - \dfrac{m(a+g\sin\alpha)}{\cos\beta}\sin\beta$

$$N=m\frac{g\cos(\alpha+\beta)-a\sin\beta}{\cos\beta}=1{,}65\text{ N}$$

**c.** Deoarece corpul nu mai apasă pe plan înseamnă că $N$=0$\Rightarrow$ $F=\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\beta}\approx 12{,}27$ N. Din $N=0 \Rightarrow a=g\cos(\alpha+\beta)/\sin\beta = 3{,}65$ m/s$^2$

**15.a.** Impunem condiția de echilibru corpului şi proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}=0$. Obținem pe axa $Ox$: $F\cos\alpha + mg\sin\alpha - T = 0 \Rightarrow T = F\cos\alpha + mg\sin\alpha$ =35 N

**b.** Dacă se taie firul, corpul se mişcă accelerat, astfel că pe baza principiului al II-lea al dinamicii obținem $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}=m\vec{a}$, iar prin proiecție pe axa $Ox$ obținem:

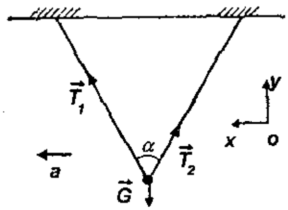



$$F\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a=\frac{F\cos\alpha}{m}+g\sin\alpha \Rightarrow$$

$a$=8,75 m/s$^2$

**c.** Prin proiecția ecuației pe axa $Oy$ obținem: $N+F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha$. Deoarece corpul mai rămâne în contact cu planul înclinat, trebuie ca $N\geq 0$, astfel că $F\leq mgctg\alpha \Rightarrow$ $F_{max}=mgctg\alpha$=69,2 N

**16.a.** Reprezentăm forțele și studiem mișcarea corpului pe baza principiului II al dinamicii: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm relația pe axele de coordonate: pe $Ox$:




$T_1\sin\frac{\alpha}{2}-T_2\sin\frac{\alpha}{2}=m\cdot a\Rightarrow T_1-T_2=\frac{m\cdot a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (1) și pe $Oy$:

$T_1\cos\frac{\alpha}{2}+T_2\cos\frac{\alpha}{2}-mg=0\Rightarrow T_1+T_2=\frac{mg}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ (2)

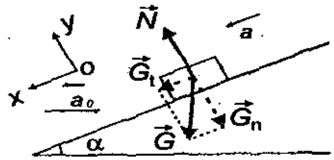
Adunăm cele două relații și apoi le scădem. Obținem:

$T_1=\frac{m(a\cos\frac{\alpha}{2}+g\sin\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\approx 20{,}34$ N și $T_2=\frac{m(g\sin\frac{\alpha}{2}-a\cos\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}\approx 14{,}34$ N.

**b.** Primul se va rupe firul în care tensiunea este mai mare, adică firul 1.

**c.** $T_1=F\Rightarrow F\sin\alpha-mg\sin\frac{\alpha}{2}=ma\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow a=\frac{2F}{m}\sin\frac{\alpha}{2}-g\cdot tg\frac{\alpha}{2}\approx 4{,}22\ \text{m/s}^2$

**17.a.** Aplicăm principiul al doilea al mecanicii, după reprezentarea forțelor corpului și vectorial se obține $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$, deoarece corpul se deplasează față de un observator de pe sol cu o accelerație compusă din accelerația lui față de plan $\vec{a}$ și accelerația planului față de sol $\vec{a}_0$.

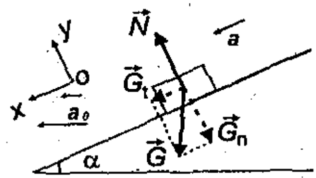



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe $Ox$: $mg\sin\alpha=ma-ma_0\cos\alpha\Rightarrow a=g\sin\alpha+a_0\cos\alpha$ =8,46 m/s²

pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=-ma_0\sin\alpha\Rightarrow N=m(g\cos\alpha-a_0\sin\alpha)$=5,64 N

**b.** Dacă planul este împins spre stânga, accelerația $\vec{a}_0$ are sens contrar. Relația vectorială se păstrează: $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$. Proiecția relației pe $Ox$ devine:



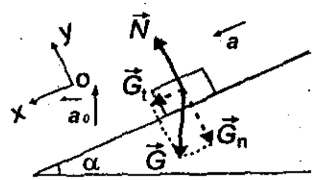

$mg\sin\alpha=ma+ma_0\cos\alpha\Rightarrow a=g\sin\alpha-a_0\cos\alpha$

$a$=5,64 m/s²

pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=ma_0\sin\alpha\Rightarrow N=m(g\cos\alpha+a_0\sin\alpha)$=8,46 N.

**c.** Pentru ca acest corp să nu apese pe planul înclinat, $N=0$, iar acest lucru se poate realiza doar în cazul în care planul se deplasează spre dreapta când $a_0=gctg\alpha$=10 m/s²

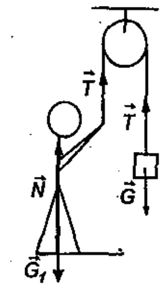
**18.a.** Aplicăm corpului principiul al doilea al mecanicii după reprezentarea forțelor: $\vec{N}+\vec{G}=m(\vec{a}+\vec{a}_0)$, unde $\vec{a}+\vec{a}_0$ reprezintă accelerația corpului față de un observator aflat pe sol și este formată din accelerația corpului față de plan $\vec{a}$ și din accelerația $\vec{a}_0$ a planului față de sol.



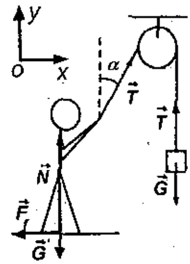
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.
Pe $Ox$: $mg\sin\alpha = ma - ma_0\sin\alpha \Rightarrow a = (g + a_0)\sin\alpha$ =7 m/s²

**b.** pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = ma_0\cos\alpha \Rightarrow N = m(g + a_0)\cos\alpha$ =24,22 N.

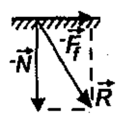
**c.** Proiectăm relația vectorială $\vec{N} + \vec{G} = m(\vec{a} + \vec{a}_0)$ pe axele de coordonate când accelerația liftului este în jos:
pe $Ox$: $mg\sin\alpha = ma + ma_0\sin\alpha \Rightarrow a = (g - a_0)\sin\alpha$ =3 m/s²
pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = -ma_0\cos\alpha \Rightarrow N = m(g - a_0)\cos\alpha$ =10,38 N



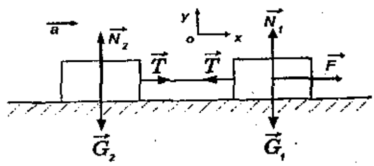

**19.a.** Tensiunea în fir este forța $F$, astfel că $T$=$F$. Reprezentăm forțele care acționează asupra sacului și pe baza principiului II obținem: $T - mg = ma \Rightarrow a$=$F/m$−$g \Rightarrow a$=1,25 m/s²
**b.** Reprezentăm forțele care acționează asupra omului și impunem condiția de echilibru $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{N} = 0$. Scalar obținem: $T + N - G_1 = 0 \Rightarrow N = G_1 - F$ =100 N
**c.** Deoarece sacul este ridicat fără ca muncitorul să se ridice de pe sol atunci, $N$=0 ⇒ $F$=$G_1$, astfel ca $a_{max}$=$G_1/m$−$g$=2,5m/s²
**d.** $T' - m'g = m'a \Rightarrow T' = m'(g+a)$=450 N




**20.a.** Deoarece bălotul $m$ de află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă, astfel că: $\vec{T} + \vec{G} = 0 \Rightarrow T = mg$ =100 N
**b.** Impunem condiția de echilibru omului $M$ și vectorial obținem: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar prin proiecție pe axele de coordonate se obține:
pe $Ox$: $T\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = T\sin\alpha = mg\sin\alpha$ =50 N
pe $Oy$: $T\cos\alpha + N = Mg \Rightarrow N = (M - m\cos\alpha)g$ =713,5 N



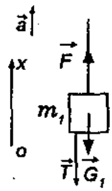

**c.** Asupra suprafeței omul exercită două forțe conform principiului acțiunii și reacțiunii: o forță normală și forța de frecare. Rezultanta acestor forțe este:
$R = \sqrt{N^2 + F_f^2} = g\sqrt{m^2 + M^2 - 2mM\cos\alpha} \approx 715{,}25$ N



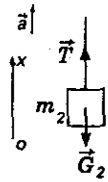

**21. a.** Studiem separat mișcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecăruia și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axele de coordonate. Pentru corpul $M$: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 = M\vec{a}$ și prin proiecție pe axa $Ox$: $F - T = Ma$ (1), iar pentru corpul $m$: $\vec{T} = m \cdot \vec{a}$ și scalar $T = ma$ (2). Adunăm relațiile (1) și (2) ⇒ $F = (M + m)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{M + m}$ =3 m/s²

**b.** $T = ma = \dfrac{mF}{M + m}$ =3 N.

**c.** Dacă forța $F$ formează cu orizontala un unghi $\alpha$=30$^0$, obținem prin proiecție pe axa $Ox$: $F\cos\alpha - T = Ma$ (3). Adunăm relațiile (2) și (3) și obținem $F\cos\alpha = (M+m)a \Rightarrow a = \dfrac{F\cos\alpha}{M+m}$ =1,5 m/s$^2$



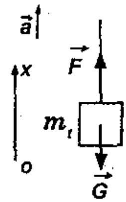
**22.a.** Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecăruia și aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Proiectăm relațiile vectoriale pe axa de coordonate $Ox$. Pentru corpul $m_1$: $F - m_1 g - T = m_1 a$ (1) și pentru corpul $m_2$: $T - m_2 g = m_2 a$ (2). Adunând relațiile (1) și (2) obținem $F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a+g)$=48 N.



**b.** $T = m_2(a+g)$=36 N.

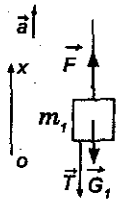
**c.** Dacă corpurile urcă rectiliniu și uniform, accelerația corpului este $a$=0$\Rightarrow F = (m_1 + m_2)g$ = 40 N.

**d.** Dacă tensiunea în fir atinge valoarea maximă, accelerația sistemului este $a' = \dfrac{T_{\max}}{m_2} - g$ =5 m/s$^2\Rightarrow F = (m_1 + m_2)(a'+g) = 60$ N.



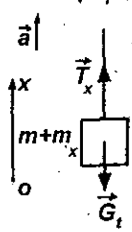
**23.a.** Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m_t = m + m_0$ și apoi reprezentăm forțele care acționează asupra acestui corp. Reprezentăm forțele și proiectăm pe axa $Ox$. Obținem: $F - (m+m_0)g = (m+m_0)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{m+m_0} - g$ = 2,5 m/s$^2$

**b.** Împărțim firul în două porțiuni: porțiunea superioară de lungime 2ℓ/3 și masă $m_1 = 2m_0/3$ și o porțiune inferioară de lungime ℓ/3 și masă $m_2 = m_0/3$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa $m_1$: $\vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}$ și scalar se obține:



$$F - m_1 g - T = m_1 a \quad \Rightarrow F - \frac{2}{3}m_0 g - T = \frac{2}{3}m_0 a \ (1)$$

Porțiunea inferioară de fir împreună cu masa $m$ constituie un nou corp de studiu cu masa $M = m + m_2 = m + \dfrac{m_0}{3}$. Reprezentăm forțele și aplicăm principiul al doilea al dinamicii pentru corpul cu masa $M$: $\vec{T} + \vec{G}_t = M \cdot \vec{a}$ și scalar: $T - (m + \dfrac{m_0}{3})g = (m + \dfrac{m_0}{3})a$ (2).



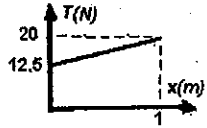
Adunăm relațiile (1) și (2) și obținem $F - (m+m_0)g = (m+m_0)a$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m+m_0} - g \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})(g+a) \Rightarrow T = (m + \frac{m_0}{3})\frac{F}{m+m_0} = 15\text{N}$$

**c.** Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_x = m_0 x/\ell$ formează împreună cu corpul suspendat $m$ un nou corp cu masa $m + m_0 x/\ell$, astfel că:

$$T - (m + \frac{m_0 x}{l})g = (m + \frac{m_0 x}{l})a \Rightarrow T = (m + \frac{m_0 x}{l})(g+a) = (m + \frac{m_0 x}{l})\frac{F}{m+m_0}$$

Când $x$=0 se obține valoarea minimă a tensiunii $T_{min} = \frac{mF}{m+m_0}$=12,5 N, în partea inferioară a firului și când $x$=ℓ se obține valoarea maximă a tensiunii în fir $T_{max}$=$F$=20 N, în partea superioară a firului. Tensiunea în fir depinde liniar de $x$, iar reprezentarea grafică a lui $T$=$f$($x$) este o dreaptă.




**24.a.** Putem considera întreg sistemul un punct material cu masa $m_t$=$m_1$+$m_0$+$m_2$ și apoi reprezentăm forțele care acționează asupra acestui corp. Reprezentăm forțele și proiectăm $\vec{F}+\vec{G}_t = m_t\vec{a}$ pe axa $Ox$ (desen 23.a).

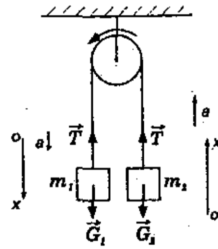
Obținem: $F-(m_1+m_0+m_2)g=(m_1+m_0+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F}{m_1+m_0+m_2}-g=2\ \mathrm{m/s^2}$

**b.** Porțiunea inferioară de fir cu masa $m_x$=$m_0 \cdot x/\ell$=$fm_0$ împreună cu corpul cu masa $m_2$ constituie un nou corp cu masa $M$=$fm_0$+$m_2$. Pe baza proiecției relației vectoriale $\vec{T}+\vec{G}=M\cdot\vec{a}$ pe axa $Ox$: $T-Mg=Ma \Rightarrow T=M(a+g) \Rightarrow$

$T=\frac{(fm_0+m_2)F}{m_1+m_0+m_2}$=50,4 N

**c.** Dacă sistemul coboară cu accelerația $a$, proiectăm relația $\vec{T}+\vec{G}_t=M_t\cdot\vec{a}$ pe axa $Ox$: $(m_1+m_0+m_2)g-F=(m_1+m_0+m_2)a \Rightarrow F=(m_1+m_0+m_2)(g-a)$=48 N

**25.a.** Deoarece $m_1>m_2$, maimuța coboară accelerat, iar ciorchinele urcă cu aceeași accelerație. Pentru maimuță $\vec{T}+\vec{G}_1=m_1\cdot\vec{a}$ și scalar $m_1g-T=m_1a$ (1).



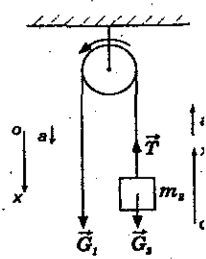

Pentru ciochinele de banane $\vec{T}+\vec{G}_2=m_2\cdot\vec{a}$ și scalar $T-m_2g=m_2a$ (2). Din adunarea relațiilor (1)+(2) obținem:

$g(m_1-m_2)=a(m_1+m_2) \Rightarrow a=g\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2}$=2 m/s² și

$T=m_2(a+g)=\frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}$=48 N.


**b.** Impunem condiția de echilibru scripetului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0 \Rightarrow$ scalar $F=2T=\frac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$=96 N.

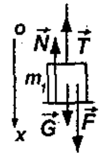
**c.** Din $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t} \Rightarrow v=at$ =2 m/s




**d.** Deoarece de maimuța trage de fir cu o forță egală cu greutatea corpului ei, tensiunea în fir este egală cu $G_1$, astfel că $T$=$G_1$. Studiem mișcarea uniform accelerată a ciorchinelui de banane. Vectorial $\vec{T}+\vec{G}_2=m_2\vec{a}'$, iar scalar:

$$T - m_2 g = m_2 a' \Rightarrow m_1 g - m_2 g = m_2 a' \Rightarrow a' = g\frac{(m_1 - m_2)}{m_2} = 5\text{m/s}^2$$

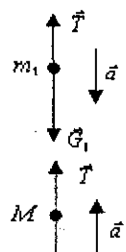
**26.a.** Deoarece sistemul se află în repaus impunem condiția de echilibru corpurilor. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa $m_2$, astfel că $T=m_2g$. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{F}+\vec{T}+\vec{T}=0 \Rightarrow F=2T=2m_2g=6$ N




**b.** Din condiția de echilibru impusă corpului cu masa $m_1$: $\vec{T}+\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{F}=0$, astfel că scalar $F+m_1g-T-N=0 \Rightarrow$ $N=F+(m_1-m_2)g=3$ N

**c.** Lăsând liber sistemul de corpuri acesta se va mişca accelerat cu accelerația $a$. Deoarece corpul cu masă $m_2$ coboară şi corpul $m_1$ urcă, pe baza demonstației de la 25.a din $T - m_1 g = m_1 a$ şi din $m_2 g - T = m_2 a$ obținem $a = g\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$=5 m/s². Cum $a=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at$, iar viteza medie este $v_m=v/2=at/2$, astfel că distanța parcursă de corpuri este $d=v_m t=at^2/2=2{,}5$ m

**27.a.** Deoarece corpul $m$ se aşază peste un corp $M$, noul corp cu masa $m_1 = m + M$ va coborî accelerat cu accelerația $a$, iar $M$ va urca accelerat cu aceeaşi accelerație. Reprezentăm forțele asupra corpurilor de mase $m_1$ şi $M$ apoi studiem mişcarea fiecărui corp. Aplicăm principiul al doilea al dinamicii şi vectorial obținem pentru fiecare corp $\vec{T}+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Scalar se obține:pentru corpul $m_1$:

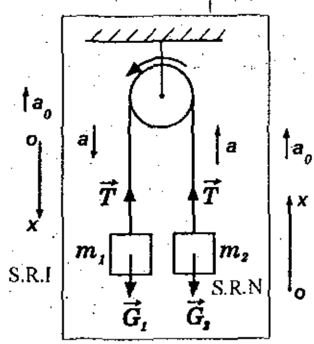



$m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow (m+M)g - T = (m+M)a \Rightarrow T = (m+M)(g-a)$ (1)

Pentru corpul $M$ : $T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(g+a)$=9,6 N (2)

**b.** Din (1) şi (2) $\Rightarrow (m+M)(g-a) = M(g+a) \Rightarrow m = \frac{2Ma}{g-a}$=400 g

**c.** Studiem mişcarea corpului cu masa $m$: $\vec{G}+\vec{N}=m\cdot\vec{a}$, astfel că scalar $mg - N = ma \Rightarrow N = m(g-a) \Rightarrow N = 2Ma$=3,2 N




**28.a.b.** Pentru un observator aflat în lift corpurile se deplasează cu accelerația $\vec{a}$. Pentru un observator aflat pe sol, liftul se deplasează cu accelerația $\vec{a}_0$ în sus. Fiecare corp se va deplasa față de observatorul de pe sol cu accelerația formată din accelerația liftului față de sol şi din accelerația corpului față de lift, adică cu accelerația $\vec{a}_0+\vec{a}$. Studiem mişcarea fiecărui corp. Pentru corpul $m_1$ vectorial: $\vec{T}+\vec{G}_1 = m_1(\vec{a}+\vec{a}_0)$ şi scalar $m_1 g - T = m_1(a - a_0)$ (1)

Pentru corpul $m_2$: vectorial $\vec{T}+\vec{G}_2 = m_2(\vec{a}+\vec{a}_0)$ şi scalar $T - m_2 g = m_2(a_0 + a)$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2) obținem $(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a - (m_1 - m_2)a_0 \Rightarrow$

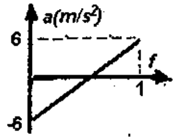
$$a = \frac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2} = 3 \text{ m/s}^2 \text{ și } T = m_2 g + m_2(a_0 + a) = 2\frac{m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2} = 4{,}5 \text{ N.}$$

**c.** Impunem condiția de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{F} = \vec{T} + \vec{T}$ iar scalar: $F = 2T = \dfrac{4m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2} = 9$ N.

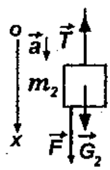
**29.** Calculăm masele porțiunilor de lanț care atârnă pe cele două părți. Astfel porțiunea de lanț cu lungimea $\ell_0$, are masa $m_0 = m\ell_0/\ell = fm$, iar cealaltă porțiune are masa $m_1 = (1-f)m$. Din condițiile de mișcare ale celor două porțiuni de lanț obținem $m_0 g - T = m_0 a$ și $T - m_1 g = m_1 a$. Prin adunarea celor două relații obținem $a = g\dfrac{(m_0 - m_1)}{m_1 + m_0} = g(2f - 1)$=6 m/s²

**b.** Considerăm jumătatea de lanț cu masa $m_2 = m/2$ și impunând condiția de mișcare acestei porțiuni de lanț obținem $m_2 g - T = m_2 a$, astfel că $T = m_2(g - a) \Rightarrow T = mg(1-f)$=12 N

**c.** Reprezentarea grafică a accelerației lanțului în funcție de fracțiunea $f$ este redată în figura alăturată.




**30.a.** Impunem condiția de echilibru corpului cu masa $m_2$, astfel că vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = 0$, deoarece $a=0 \Rightarrow$ scalar $F + m_2 g = T$. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa $m_1$. Obținem vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$, iar scalar $N + T - m_1 g = 0 \Rightarrow$ $N = (m_1 - m_2)g - F = 30$ N

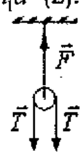



**b.** Dacă sistemul se mișcă accelerat, atunci pentru corpul $m_2$ vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a} \Rightarrow$ scalar $F + m_2 g - T = m_2 a$ (1).

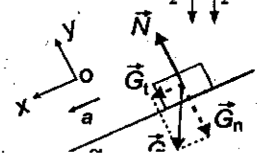
Pentru corpul cu masă $m_1$ vectorial $\vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$, iar scalar $T - m_1 g = m_1 a$ (2).

Din (1)+(2) obținem $F = (m_1 - m_2)g + (m_2 + m_1)a \Rightarrow F$=56 N

**c.** Impunem condiția de echilibru scripetului. Rezultanta forțelor este nulă. Vectorial $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow$ scalar $F = 2T = 2m_1(g + a)$=144N



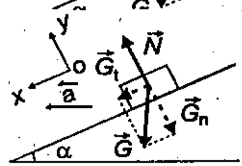

**31.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului. Vectorial $\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Obținem pe *Ox* $mg\sin\alpha = ma \Rightarrow a = g\sin\alpha$ $\Rightarrow a$=5 m/s² și pe *Oy* $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$



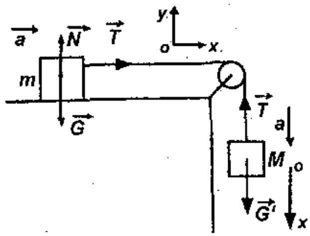

**b.** Pentru un observator de pe sol, corpul se deplasează împreună cu planul cu accelerația acestuia $\vec{a}$. Vectorial pentru corp: $\vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$ și prin proiecții obținem:

Pe *Ox*: $mg\sin\alpha = ma\cos\alpha \Rightarrow a = g\,tg\,\alpha = 5{,}78$ m/s²

**c.** Pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \Rightarrow N = mg/\cos\alpha$ =5,78 N



**32.a** Studiem separat mişcarea fiecărui corp, reprezentând forţele ce acţionează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare. Proiectăm relaţiile vectoriale pe axele de coordonate. Pentru corpul $m$: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$: $T=m\cdot a$ (1)

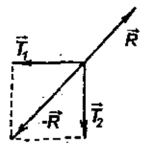


Pentru corpul $M$: $\vec{G}'+\vec{T}=M\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$: $Mg-T=Ma$ (2). Din (1)+(2) $\Rightarrow$

$$Mg=(m+M)a \Rightarrow a=\frac{Mg}{M+m}=6{,}66 \text{ m/s}^2$$

**b.** $T=ma=\dfrac{mMa}{m+M}=6{,}66$ N.

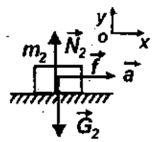
**c.** Impunem condiţia de echilibru scripetului. $\vec{R}$ este reacţiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni $\vec{T}_1$ şi $\vec{T}_2$ reprezintă forţele de interacţiune dintre scripete şi cele două părţi ale firului (cea orizontală şi cea verticală). Astfel $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow$



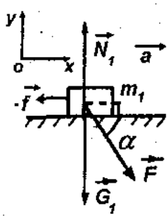
$R^2=T_1^{\,2}+T_2^{\,2}=2T^2$, deoarece $T_1=T_2=T \Rightarrow$

$$R=T\sqrt{2}=\frac{mMa}{m+M}\sqrt{2}\approx 9{,}4 \text{ N}.$$

**33.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp. Reprezentăm forţele ce acţionează asupra fiecărui corp şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul cu masa $m_2$: vectorial $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{f}=m_2\vec{a}$ şi scalar $f=m_2a$ (1), unde $f$ este forţa cu care corpul 1 îl împinge pe al doilea.



Pentru corpul cu masa $m_1$: vectorial $\vec{F}+\vec{N}_1+\vec{G}_1-\vec{f}=m_1\vec{a}$ deoarece asupra corpului $m_1$ acţionează o forţă $(-\vec{f})$ cu care $m_2$ reacţionează asupra corpului $m_1$ conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Prin proiecţia pe axa de coordonate $Ox$ obţinem $F\cos\alpha-f=m_1a$ (2)

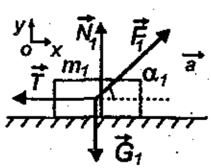


Din (1)+(2) $\Rightarrow F\cos\alpha=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\dfrac{F\cos\alpha}{m_1+m_2}$=5 m/s²

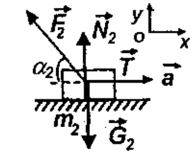
**b.** Forţa cu care corpul 1 apasă asupra planului este reacţiunea normală. Din proiecţia pe axa $Oy$: $N_1-m_1g-F\sin\alpha=0 \Rightarrow N_1=F\sin\alpha+m_1g$=64,6 N

**c.** Forţa cu care primul corp împinge corpul al doilea este $f=m_2a$=5 N

**34.a.** Stabilim sensul în care se deplasează sistemul de corpuri comparând componentele celor două forţe pe orizontală. Cum $F_1\cos\alpha_1>F_2\cos\alpha_2$ sistemul se deplasează spre dreapta accelerat. Pentru corpul $m_1$, vectorial $\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{T}=m_1\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$ $F_1\cos\alpha_1-T=m_1a$ (1)



Pentru corpul $m_2$, vectorial obținem $\vec{F}_2+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$ $T-F_2\cos\alpha_2=m_2a$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$



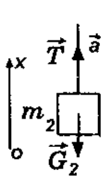

$$F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2}{m_1+m_2}\Rightarrow$$

$a$=0,5 m/s²

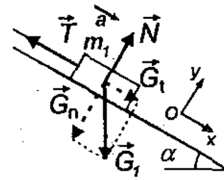
**b.** Din proiecția pe axa $Oy$: $N_1+F_1\sin\alpha_1-m_1g=0\Rightarrow N_1=m_1g-F_1\sin\alpha_1$. Deoarece apăsarea exercitată pe suprafața orizontală de către corpul de masă $m_1$ este nulă, atunci $N_1$=0$\Rightarrow F_1=m_1g/\sin\alpha_1$=240 N

**c.** Deoarece sistemul de corpuri se deplasează orizontal cu viteză constantă, $a$=0$\Rightarrow F_1\cos\alpha_1=F_2\cos\alpha_2\Rightarrow F_2/F_1=\cos\alpha_1/\cos\alpha_2\approx 1{,}22$

**35.a.** Deoarece componenta tangențială a greutății corpului 1 este mai mare decât greutatea corpului 2, corpul 2 urcă iar corpul 1 coboară de-a lungul planului înclinat. Reprezentăm forțele ce acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare dintre aceste corpuri. Pentru corpul $m_2$: vectorial $\vec{T}+\vec{G}_2=m_2\vec{a}$ şi scalar pe $Ox$ $T-m_2g=m_2a$ (1), iar




pentru corpul $m_1$: vectorial $\vec{T}+\vec{G}_1+\vec{N}=m_1\vec{a}$ şi scalar pe $Ox$ obținem $m_1g\sin\alpha-T=m_1a$ (2). Din(1)+(2)$\Rightarrow$




$$m_1g\sin\alpha-m_2g=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\frac{g(m_1\sin\alpha-m_2)}{m_1+m_2}=0{,}71\ \text{m/s}^2$$

**b.** Dacă sistemul se deplasează în acelaşi sens atunci din

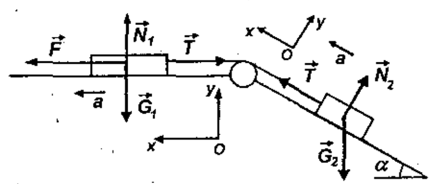
$$m_1g\sin\alpha-m_2g=(m_1+m_2)a\Rightarrow m_2=m_1\frac{g\sin\alpha-a}{g+a}=0{,}25\ \text{kg}$$

Dacă sistemul se deplasează în sens contrar atunci pentru corpul $m_2$: $m_2'g-T=m_2'a$ şi pentru corpul $m_1$: $T-m_1g\sin\alpha=m_1a$. Prin adunarea celor două relații obținem $m_2'g-m_1g\sin\alpha=(m_1+m_2')a\Rightarrow m_2'=m_1\dfrac{g\sin\alpha+a}{g-a}$=0,875kg

**c.** Dacă sistemul rămâne în repaus atunci $a$=0$\Rightarrow m_1\sin\alpha=m_2\Rightarrow$

$m_1=m_2/\sin\alpha$=0,8 kg

**36.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp, reprezentând forțele ce acționează asupra fiecăruia şi aplicăm apoi principiul al II-lea al dinamicii pentru fiecare corp. Pentru corpul $m_1$ vectorial: $\vec{F}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{T}=m_1\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$: $F-T=m_1a$ (1). Pentru corpul $m_2$ vectorial: $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$ obținem: $T-m_2g\sin\alpha=m_2a$ (2).

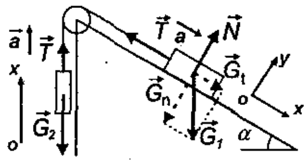



Din (1)+(2) obținem: $F-m_2g\sin\alpha=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\dfrac{F-m_2g\sin\alpha}{m_1+m_2}$=1,25 m/s²

**b.** $T = m_2(a + g\sin\alpha) = m_2\dfrac{F + m_1 g\sin\alpha}{m_1 + m_2} = 18{,}75$ N.

**c.** Deoarece sistemul se deplasează uniform$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow F = m_2 g\sin\alpha = 15$ N

**37.a.** Pentru corpul $m_1$ vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$ și scalar pe $Ox$: $m_1 g\sin\alpha - T = m_1 a$ (1)



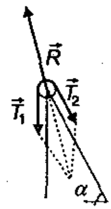

Pentru corpul $m_2$ vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$ și scalar pe $Ox$: $T - m_2 g = m_2 a$ (2).

Din (1)+(2)$\Rightarrow g(m_1\sin\alpha - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow$

$a = \dfrac{g(m_1\sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2} = 1{,}25\ \mathrm{m/s^2}$ și $T = m_2(a + g) = \dfrac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} = 11{,}25$ N

**b.** Pentru ca sistemul de corpuri să rămână în echilibru trebuie ca $a = 0 \Rightarrow m_1\sin\alpha = m_2 \Rightarrow m_2 = 1{,}5$ kg.

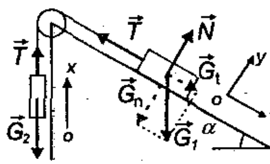
**c.** Calculăm reacțiunea în axul scripetelui impunând acestuia condiția de echilibru: $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$




$\Rightarrow R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(90 - \alpha)$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow$

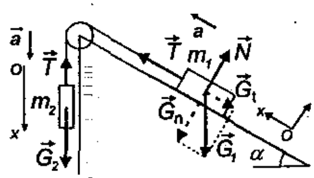
$R^2 = 2T^2 + 2T^2\sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1 + \sin\alpha)} = 19{,}46$ N.

**38.a.** Pentru corpul $m_1$ vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = 0$ și scalar pe $Ox$: $m_1 g\sin\alpha - T = 0$ (1). Pentru corpul $m_2$ vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$ și scalar pe $Ox$: $T - m_2 g = 0$ (2).




Din (1)+(2)$\Rightarrow m_1\sin\alpha = m_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{\sin\alpha} = 2$

**b.** Deoarece $m_2 = 2m_1$ corpul cu masă $m_2$ coboară accelerat iar corpul $m_1$ urcă pe plan. Pentru corpul $m_1$ vectorial $\vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$ și scalar pe $Ox$: $T - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$ (1). Pentru corpul $m_2$ vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$ și scalar pe $Ox$: $m_2 g - T = m_2 a$ (2). Din

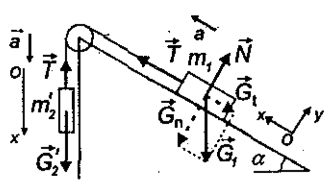



(1)+(2)$\Rightarrow g(m_2 - m_1\sin\alpha) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow a = \dfrac{g(m_2 - m_1\sin\alpha)}{m_1 + m_2} = 5/3\ \mathrm{m/s^2}$

Corpul $m_2$ coboară pe distanța $x$, iar corpul $m_1$ urcă pe plan pe aceeași distanță $x$. Din geometrie $h = x + x\sin\alpha \Rightarrow x = h/(1 + \sin\alpha) = 1$ m. Cum $x = v_m t$ și $v_m = v/2 \Rightarrow x = vt/2$. Din $a = \Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v = at \Rightarrow x = at^2/2 \Rightarrow t = \sqrt{2x/a} \approx 1{,}09$ s

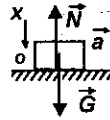
**c.** Viteza sistemului este $v = at = 1{,}81$ m/s

**39.a.** Deoarece sistemul de corpuri este în echilibru atunci conform demonstrației de la problema precedentă de la punctul **a.**, obținem $m_1\sin\alpha = m_2 \Rightarrow m_2 = 1$ kg



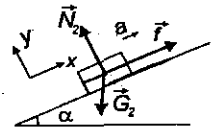
**b.** Dacă pe corpul 2 se adaugă o masă adițională $m$, noua masă a corpului devine $m_2' = m_2 + m$. Pentru corpul $m_1$ vectorial $\vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{T} = m_1\vec{a}$ şi scalar pe $Ox$ $T - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$ (1). Pentru corpul $m_2'$ pe $Ox$: vectorial $\vec{G}_2' + \vec{T} = m_2'\vec{a}$ şi scalar pe Ox $m_2' g - T = m_2' a$ (2). Adunând (1)+(2) $\Rightarrow m_2' g - m_1 g \sin\alpha = a(m_1 + m_2') \Rightarrow m_2'(g - a) = m_1(g\sin\alpha + a)$

$$\Rightarrow m_2' = \frac{m_1(g\sin\alpha + a)}{g - a} \Rightarrow m = \frac{m_1(g\sin\alpha + a)}{g - a} - m_2 = 0{,}75 \text{ kg}$$

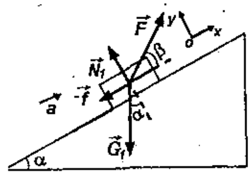



**c.** Studiem mişcarea corpului adițional $m$. Vectorial $\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}$ şi scalar: $mg - N = ma \Rightarrow N = m(g - a) = 6$ N.

**40.a.** Deoarece sistemul se mişcă accelerat spre vârful planului înclinat, trebuie ca asupra corpului cu masa $m_2$ corpul cu masa $m_1$ să exercite o forță $f$ la contactul dintre cele două corpuri.




Pentru $m_2$ vectorial: $\vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{f} = m_2\vec{a}$ şi scalar: $f - m_2 g \sin\alpha = m_2 a$ (1). Pentru $m_1$ vectorial: $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 - \vec{f} = m_1\vec{a}$, deoarece asupra corpului $m_1$ acționează o forță $-\vec{f}$ cu care $m_2$ reacționează asupra corpului $m_1$ conform principiului acțiunii şi reacțiunii. Scalar pe $Ox$: $F\cos\beta - f - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$ (2)



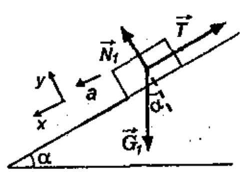

Adunând relațiile (1) şi (2) obținem: $F\cos\beta - (m_1 + m_2) g \sin\alpha = (m_1 + m_2) a$.

$$\Rightarrow a = \frac{F\cos\beta}{m_1 + m_2} - g\sin\alpha = 18{,}5 \text{ m/s}^2$$

**b.** $f = m_2(a + g\sin\alpha) = \dfrac{m_2 F\cos\beta}{m_1 + m_2} = 23{,}5$ N

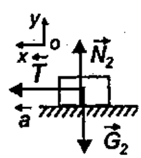
**c.** Deoarece două corpuri urcă uniform, $a = 0 \Rightarrow F = \dfrac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha}{\cos\beta} \approx 21{,}28$ N

**41.a.** Corpul cu masa $m_1$ va coborî şi va trage corpul cu masă $m_2$. Pentru $m_1$ vectorial: $\vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T} = m_1\vec{a}$ şi scalar pe $Ox$: $m_1 g \sin\alpha - T = m_1 a$ (1).

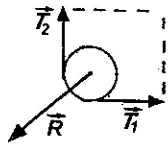



Pentru $m_2$ vectorial $\vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2\vec{a}$, iar scalar $T = m_2 a$ (2). Din (1) şi (2) obținem prin adunare

$$m_1 g \sin\alpha = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2} = 3{,}75 \text{ m/s}^2$$

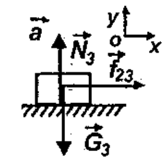



**b.** $T = \dfrac{m_1 m_2 g \sin\alpha}{m_1 + m_2} = 7{,}5$ N

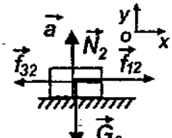


**c.** Impunem condiția de echilibru scripetului. $\vec{R}$ este reacțiunea în axul scripetului, iar cele două tensiuni $\vec{T}_1$ și $\vec{T}_2$ reprezintă forțele de interacțiune dintre scripete și cele două părți ale firului (cea orizontală și cea verticală).
$\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2) \Rightarrow R^2=T_1^{\,2}+T_2^{\,2}=2T^2$, deoarece $T_1=T_2=T \Rightarrow R=T\sqrt{2}\approx 10{,}575$ N.

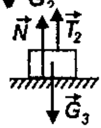
**42.a.** Considerâm sistemul un corp cu masa $m=m_1+m_2+m_3$, astfel că asupra acestuia acționează forța $F$. Accelerația sistemului de corpuri este $a=F/(m_1+m_2+m_3)=1{,}5\ \mathrm{m/s^2}$



**b.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă $m_3$ și obținem vectorial $\vec{G}_3+\vec{N}_3+\vec{f}_{23}=m_3\vec{a}$. Scalar pe $Ox$: $f_{23}=m_3a=3$ N, unde $f_{23}$ reprezintă forța cu care corpul cu masa $m_2$ împinge corpul cu masa $m_3$



**c.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului cu masă $m_2$ și obținem vectorial $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{f}_{32}+\vec{f}_{12}=m_2\vec{a}$. Scalar pe $Ox$: $f_{12}-f_{32}=m_3a$, unde $f_{12}$ reprezintă forța cu care corpul cu masa $m_1$ împinge corpul cu masa $m_2$. $f_{12}=(m_3+m_2)a=7{,}5$ N



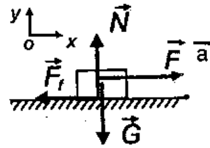
**43.a.** Impunem condiția de echilibru corpului $m_3$:
$\vec{G}_3+\vec{N}+\vec{T}_2=0$ și scalar $N+T_2-m_3g=0 \Rightarrow T_2=m_3g-N=120$ N.

**b.** Din condiția de echilibru impusă scripetelui mobil obținem $2\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, astfel că $T_2=2T_1 \Rightarrow T_1=T_2/2=60$ N

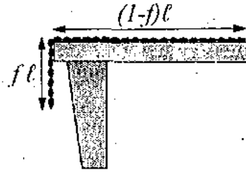
**c.** Impunem condiția de echilibru corpurilor $m_1$ și $m_2$: $\vec{G}_1+\vec{T}_1=0$. Scalar obținem $m_1g=T_1 \Rightarrow m_1=T_1/g=6$ kg

## 2.3. Forţa de frecare

**1.** Metoda conform materiei obligatorii. Pe baza formulei vitezei medii: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \Rightarrow v_m = \dfrac{4-2(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-(4-2t+t^2)}{\Delta t} \Rightarrow$ $v_m=-2+2t+\Delta t$. Viteza instantanee se obţine pentru $\Delta t \to 0 \Rightarrow v_0=2t-2$. Pe baza formulei acceleraţiei medii $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \dfrac{2(t+\Delta t)-2-(2t-2)}{\Delta t}=2$ m/s$^2 \Rightarrow$ acceleraţia medie coincide cu acceleraţia instantanee, deoarece $a=2$ m/s$^2$ este constantă şi atunci corpul are o mişcare rectilinie uniform accelerată. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii şi obţinem vectorial: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$. Proiectând pe axele de coordonate obţinem pe $Ox$: $F-F_f=ma$ şi pe $Oy$: $N-mg=0$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F=m(a+\mu g)=3$ N.



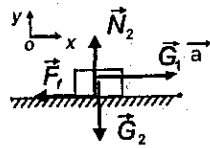

**2.** Împărţim lanţul omogen în două bucăţi: una de lungime $f\ell$ cu masa aferentă $m_1 = fm$, unde $m$ reprezintă masa întregului lanţ şi alta de lungime $(1-f)\ell$ cu masa $m_2=(1-f)m$. Forţa care trage bucata orizontală de lanţ cu masa $m_2$, este greutatea bucăţii verticale de lanţ cu masa $m_1$: $G_1 = m_1 g = fmg$. Considerăm că bucata orizontală $m_2$ începe să se mişte uniform, deci rezultanta forţelor este nulă. Vectorial $\vec{G}_1+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f=0$ şi scalar prin proiecţia pe axele de coordonate obţinem: pe $Ox$: $G_1-F_f=0$ şi pe $Oy$:




$N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = G_2 = m_2 g = (1-f)mg$

$F_f = \mu N_2 = \mu(1-f)mg \Rightarrow fmg = \mu(1-f)mg \Rightarrow$

$\mu = f/(1-f)=0{,}25$

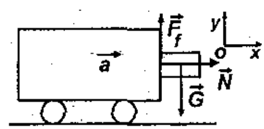



**3.** Deoarece corpul cu masa $m$ nu cade, el se deplasează odată cu căruciorul, adică cu acceleraţia $\vec{a}$ pe care căruciorul o are faţă de un observator de pe sol. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului $m$ şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f = m\cdot\vec{a}$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate şi obţinem: pe $Ox$: $N = ma$ şi pe $Oy$:

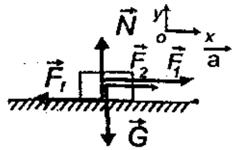
$mg - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg$.

Dar conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu ma$. Din cele două relaţii obţinem $mg = \mu ma \Rightarrow \mu = g/a = 0{,}5$. Deoarece $\mu < 1$, problema este posibilă numai dacă $a > g \Rightarrow a > 10$ m/s$^2$.




**4.a.** Pe baza relaţiei $a=\Delta v/\Delta t=v_1/t_1=0{,}3$ m/s$^2$, deoarece din grafic $v_1=1{,}2$ m/s şi $t_1=4$ s

**b.** Reprezentăm forțele care acționează asupra mașinii și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $F_1 + F_2 - F_f = m \cdot a \Rightarrow$ $F_f = F_1 + F_2 - ma$ =500 N, astfel că $\mu = F_f/mg = 0{,}0625$

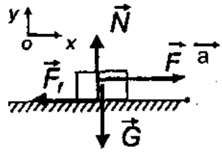


**c.** Distanța parcursă de mașină este $d = v_m t = v_1 t/2 = 2{,}4$ m cu $v_1 = 1{,}2$ m/s

**d.** Din momentul încetării acțiunii celor doi oameni mașina va avea o mișcare uniform încetinită cu accelerația imprimată de forța de frecare, astfel că $a_1 = -F_f/m = -\mu g$. Cum $a_1 = \Delta v/\Delta t = -v_1/t_{op} \Rightarrow t_{op} = v_1/\mu g = 1{,}92$ s

**5.a.** Accelerația corpului este $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v_1/t_1 = 2$ m/s$^2$, deoarece din grafic $v_1 = 10$ m/s și $t_1 = 5$ s

**b.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $F - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N - mg = 0$, astfel că din $F_f = \mu N = \mu mg$, obținem $\mu = (F - ma)/mg = 0{,}3$



**c.** Din momentul încetării acțiunii forței *F*, corpul va avea o mișcare uniform încetinită cu accelerația imprimată de forța de frecare, astfel că $a_1 = -F_{f1}/m = -\mu_1 g$. Cum $a_1 = \Delta v/\Delta t = -v_1/\Delta t = -5$ m/s$^2$, deoarece corpul se oprește în $\Delta t = t_2 - t_1 = 2$ s, atunci $\mu_1 = -a_1/g = 0{,}5$

**6.a.** Cum $a = \Delta v/\Delta t = (v - v_0)/t \Rightarrow v = v_0 + at$, din identificarea coeficienților obținem $v_0 = 8$ m/s și $a = -4$ m/s$^2$

**b.** Din $a = -F_f/m$ și $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a = -\mu g$, obținem $\mu = -a/g = 0{,}4$

**c.** Corpul are o mișcare rectilinie uniform încetinită, astfel că distanța parcursă de corp până la oprire este $d = v_m t_{op} = v_0\, t_{op}/2$. În momentul opririi $v = 0 \Rightarrow t_{op} = -v_0/a \Rightarrow d = -v_0^2/2a = 8$ m

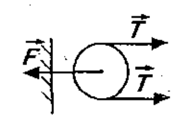
**7.a.** Deoarece rezultanta celor două forțe este paralelă cu planul orizontal, asupra corpului acționează forțele ca în figura 5.b., astfel că $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Scalar obținem: pe *Ox*: $F - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N - mg = 0$ și cum din legea forței de frecare $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = m(a + \mu g) = 300$ N

**b.** Din geometrie $\cos\alpha_1 = F_1/F = 0{,}5 \Rightarrow \alpha_1 = 60^0$ și cum $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0 \Rightarrow \alpha_2 = 30^0$. Din $\mathrm{tg}\alpha_1 = F_2/F_1 \Rightarrow F_2 = F_1 \mathrm{tg}\,\alpha_1 = 259{,}5$ N

**c.** Dacă acțiunea forțelor $F_1$ și $F_2$ încetează iar corpul va avea o mișcare rectilinie uniform încetinită, astfel că $a_1 = -F_f/m$ și din $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow$ $a_1 = -\mu g = -2$ m/s$^2$

**8.a.** Forța orizontală cu care trebuie să tragă omul de fir este $F = T$. Deoarece corpul se deplasează cu viteză constantă, rezultanta forțelor este nulă, astfel că $\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Pe axa *Ox*: $T - F_f = 0$ și pe *Oy*: $N - mg = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg$, obținem $T = \mu mg = 40$ N

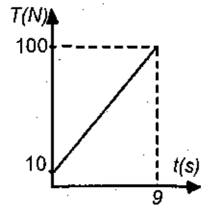
**b.** Impunem condiția de echilibru axului scripetelui și obținem: $\vec{F} + \vec{T} + \vec{T} = 0$, iar scalar $F = 2T = 80$ N



**c.** Pe baza relației vectoriale $\vec{T}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$ obținem scalar pe axa $Ox$: $T_1-F_f=ma$ şi cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem $a=(T_1-\mu mg)/m=1$ m/s$^2$

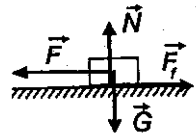
**9.a.** Firul se rupe când $F=T_{max}$, astfel că $10t+10=100 \Rightarrow t=9$ s

**b.** Cum $T=F=10t+10$, atunci când $t=0 \Rightarrow F=10$ N, iar când $t=9$ s $\Rightarrow F=100$ N. Dependența forței de tensiune din fir în funcție de timp, în primele 9 s de la începutul acțiunii forței $F$ este redată în graficul alăturat.



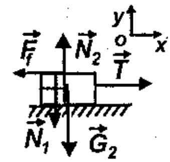

**c.** Pe baza relației vectoriale $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$ obținem scalar pe axa $Ox$: $F-F_f=ma$ şi cum $F_f=\mu N=\mu mg$ obținem $a=(F-\mu mg)/m=0{,}2$ m/s$^2$, deoarece la $t=10$ s forța $F=110$ N

**10.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului 1 .şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii, astfel că $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Scalar obținem: $F=F_f=\mu N=\mu m_1 g=75$ N



**b.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului 2. Ținând cont că asupra corpului 2 forta de frecare exercitată de primul corp este îndreptată spre stânga (conform principiului acțiunii şi reacțiunii) şi presupunând că firul nu se rupe, atunci $T=F_f=\mu m_1 g=75$ N

**c.** Firul rezistă la solicitare deoarece $T<T_{max}$

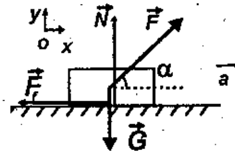


**11.a.** Asupra blocului de beton acționează forța de tracțiune $F_t$ şi o forță de frecare statică. Valoarea forței de frecare la alunecare este $F_{fa}=\mu mg=10$ N. Când $t\in[0;1]$s $F_t<F_{fa}$, înseamnă că forța de tracțiune este insuficientă pentru a scoate corpul din repaus $\Rightarrow$ viteza blocului de beton este nulă.

**b.** Când $t\in[2;3]$s din grafic $F_t=20$ N. Obținem $F_t-F_{fa}=ma \Rightarrow F_t-\mu mg=ma \Rightarrow a=(F_t-\mu mg)/m=1$ m/s$^2$

**c.** În intervalul de timp $t\in[1;6]$s corpul se mişcă şi prin urmare forța de frecare dintre blocul de beton şi suprafața orizontală este cea de alunecare $F_{fa}=\mu mg=10$ N. La momentul $t=0{,}3$ s corpul se află în repaus iar forța de frecare statică este egală cu cea de tracțiune, astfel că $F_{fs}=F_{t1}$. Deoarece forța de tracțiune în intervalul de timp $t\in[0;1]$s creşte direct proporțional cu timpul, după $t=0{,}3$ s va avea valoarea $F_{t1}=3$ N $\Rightarrow F_{fs}=3$ N

**d.** Asupra blocului în intervalul de timp $t\in[4;5]$s acționează simultan forța de tracțiune şi forța de frecare la alunecare, astfel că forța rezultantă este $F=F_t-F_{fa}=0$ N $\Rightarrow$ corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă



**12.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe $Ox$: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe $Oy$: $N+F\sin\alpha-mg=0 \Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$. Conform legii frecării $F_f=\mu N \Rightarrow$

$$F_f=\mu(mg-F\sin\alpha) \Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=ma \Rightarrow F=\frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=15{,}35\text{N}$$

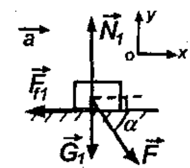
**b.** $N=mg-F\sin\alpha=10{,}28$ N

**c.** Deoarece corpul se mişcă uniform cu viteza, acceleraţia corpului este nulă $\Rightarrow a=0 \Rightarrow F=\dfrac{\mu \cdot mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}=5{,}11$ N

**13.a.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$, iar prin proiecţia pe axele de coordonate (desen 12.a.) obţinem: pe $Ox$: $F\cos\alpha - F_f = ma$ şi pe $Oy$: $N+F\sin\alpha-mg=0 \Rightarrow N=mg-F\sin\alpha$. Din $F_f=\mu N \Rightarrow F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow$
$F_f=\mu(mg-F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=ma\Rightarrow\Rightarrow a=1$ m/s$^2$

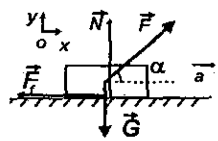
**b.** Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at=15$ m/s

**c.** După încetarea acţiunii forţei $F$, asupra corpului acţionează numai forţa de frecare, astfel că că acceleraţia corpului este $a_1=-F_f/m$ şi din $F_f=\mu N=\mu mg$ $\Rightarrow a_1=-\mu g$. Cum $a_1=\Delta v/\Delta t=-v/\Delta t_{op} \Rightarrow \Delta t_{op}=v/\mu g=2{,}595$ s



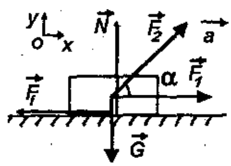
**14.a.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe $Ox$: $F\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe $Oy$: $N-mg-F\sin\alpha=0\Rightarrow N=mg+F\sin\alpha\Rightarrow F_f=\mu N\Rightarrow$
$F_f=\mu(mg+F\sin\alpha)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg+F\sin\alpha)=ma\Rightarrow$

$$F=\frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}=9{,}68\text{ N}$$



**b.** $N=mg+F\sin\alpha\approx 28{,}37$ Na

**c.** Dacă de corp se trage cu forţa $F$, pentru ca acest corp să nu apese asupra planului orizontal trebuie ca $N=0$. Cum pe $Oy$: $N+F\sin\alpha-mg=0\Rightarrow F=mg/\sin\alpha=23{,}12$ N şi în acest caz acceleraţia saniei este: $a'=F\cos\alpha/m=g\cdot ctg\,\alpha\approx 5{,}78$ m/s$^2$



**15.a.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi deoarece acest corp se află în repaus, rezultanta forţelor este nulă: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe $Oy$: $N-mg+F_2\sin\alpha=0\Rightarrow N=mg-F_2\sin\alpha\approx 51{,}35$ N

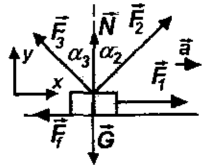
**b.** Pe $Ox$: $F_1+F_2\cos\alpha-F_f=0$ şi cum $F_f=\mu N\Rightarrow F_f=\mu(mg-F_2\sin\alpha)$, astfel că $F_1+F_2\cos\alpha=\mu(mg-F_2\sin\alpha)\Rightarrow$

$$\mu=\frac{F_1+F_2\cos\alpha}{mg-F_2\sin\alpha}\approx 0{,}68$$

**c.** Deoarece valoarea coeficientului de frecare scade corpul se va mişca accelerat, astfel că $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relaţia pe axa $Ox$:

$F_1+F_2\cos\alpha-F_f=ma$ şi $F_f=\mu(mg-F_2\sin\alpha)\Rightarrow a=\dfrac{F_1+F_2(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{m}-\mu g$

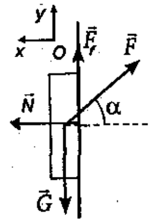
$a \approx 2{,}95$ m/s$^2$



**16.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe *Ox*: $F_1 + F_2 \sin\alpha_2 - F_3 \sin\alpha_3 - F_f = ma \Rightarrow F_f = F_1 + F_2 \sin\alpha_2 - F_3 \sin\alpha_3 - ma$ =3,46 N

**b.** pe *Oy*: $N + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_2 \cos\alpha_2 - F_3 \cos\alpha_3$ =6 N.

**c.** Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = F_f/N \approx 0{,}576$

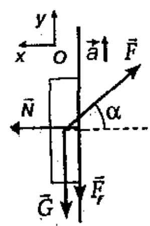


**17.a.** După reprezentarea forțelor, impunem condiția ca acest corp să se afle în repaus. În acest caz, rezultanta forțelor este nulă: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_F + \vec{F} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe *Ox*: $N - F\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = F\cos\alpha$ și pe *Oy*: $F_f + F\sin\alpha - mg = 0$.

Cum $F_f = \mu N = \mu F \cos\alpha \Rightarrow mg = F(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Rightarrow$

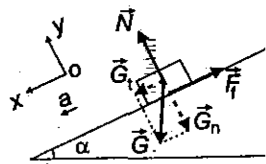
$$F = \frac{mg}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 40 \text{ N}$$

**b.** Forța de apăsare normală este: $N = \dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 34{,}6$ N.



**c.** Deoarece corpul urcă accelerat, pe baza principiului al doilea al dinamicii $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_F + \vec{F} = m\vec{a}$ și prin proiecție pe axa *Ox* obținem: $F\sin\alpha - mg - F_f = ma$ și pe *Oy* $N - F\cos\alpha = 0$, astfel că $F_f = \mu N = \mu F\cos\alpha$. Astfel $F\sin\alpha - mg - \mu F\cos\alpha = ma \Rightarrow$

$$F = \frac{m(a+g)}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = 132 \text{ N}$$

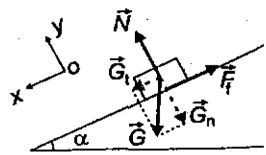


**18.a.** Reprezentăm forțele ce acționează asupra snowmobilului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $mg\sin\alpha - F_f = m \cdot a$ și pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$.

Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow$ $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ =const$\Rightarrow$ snowmobilul are o mișcare rectilinie uniform accelerată. Din $a = a_m = \Delta v/\Delta t = (v - v_0)/t \Rightarrow a = 3$ m/s$^2$

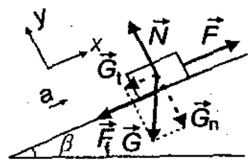
**b.** $F_f = m(g\sin\alpha - a)$ =160 kN

**c.** Din $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \dfrac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} \approx 0{,}231$



**19.a.** Deoarece corpul începe să alunece pe planul înclinat, mișcarea acestuia este uniformă și rezultanta forțelor este nulă, conform principiului 1 al mecanicii. $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = mg\sin\alpha$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$ $\Rightarrow$ tg$\alpha$=0,578. Unghiul $\alpha$ pentru care corpul lunecă uniform pe planul înclinat se numeşte unghi de frecare, astfel încât tangenta unghiului de frecare reprezintă fizic coeficientul de frecare la alunecare

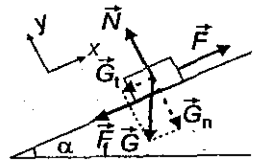
**b.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$.




Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe $Ox$: $F - mg\sin\beta - F_f = ma$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\beta = 0$
$\Rightarrow N = mg\cos\beta$ Conform legii frecării:
$F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\beta \Rightarrow F - mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = ma$
$\Rightarrow F = m(g\sin\beta + \mu g\cos\beta + a)$=6,77 N

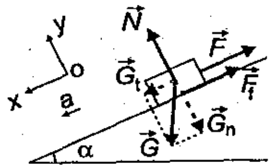
**c.** Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/\Delta t \Rightarrow v=a\Delta t$. Deoarece viteza corpului creşte direct proporţional cu timpul, viteza medie este $v_m=v/2=a\Delta t/2$, astfel că distanţa parcursă de corp este $d=v_m\Delta t=a\Delta t^2/2$=4 m

**20.a.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului ca în figură şi impunem condiţia ca acest corp să mişte uniform ($a$=0) astfel că: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia pe axele de coordonate. Obţinem pe $Ox$:




$F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$
$N = mg\cos\alpha$ şi din $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$
$F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \mu = \dfrac{F - mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}$=0,2

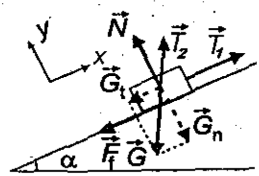
**b.** Deoarece forţa cu care se trage de fir este mai mică decât cea iniţială corpul coboară, astfel că $\vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, iar scalar prin proiecţia pe $Ox$:




$mg\sin\alpha - F - F_f = ma$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$
$N = mg\cos\alpha$ şi din $F_f = \mu N = \mu \cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$
$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - F/m$ =0,4 m/s²

**c.** Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/\Delta t \Rightarrow v=a\Delta t$=0,8 m/s

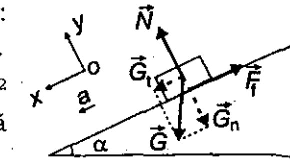
**21.a.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului ca în figură şi impunem condiţia ca acest corp să mişte uniform ($a$=0) astfel că: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.




Proiectăm relaţia pe axele de coordonate: Pe $Ox$: $T_1 + T_2\sin\alpha - mg\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = T_1 + (T_2 - mg)\sin\alpha$
$F_f$=4 kN, ($\sin\alpha=h/\ell$=0,6 şi $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ =0,8) şi pe $Oy$: $N + T_2\cos\alpha - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = (mg - T_2)\cos\alpha$

**b.** Pe baza legii frecării obţinem: $\mu = \dfrac{F_f}{N} = \dfrac{T_1 + (T_2 - mg)\sin\alpha}{(mg - T_2)\cos\alpha}$ =0,25

**c.** Accelerația cu care coboară liber lada goală pe planul înclinat se află reprezentând forțele şi scriind principiul fundamental al dinamicii, astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate şi obținem: pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_f = m\cdot a$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0$. Pe baza legii frecării $F_f=\mu N$ $\Rightarrow$ $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$=4 m/s² $\Rightarrow$ observăm că accelerația cu care coboară lada goală nu depinde de masa acesteia

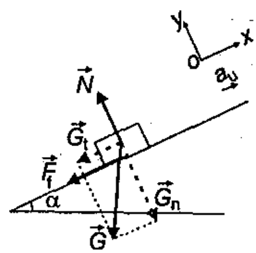



**22.a.** Calculăm accelerația cu care urcă corpul pe planul înclinat, după reprezentarea forțelor şi aplicarea principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}_u$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe $Ox$: $-F_f - mg\sin\alpha = m\cdot a_u$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0$

Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

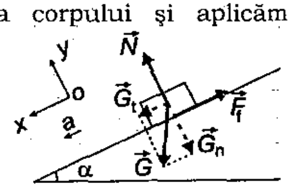
$-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \Rightarrow$ $a_u$=−9,9 m/s². Semnul "−" al accelerației ne arată că acest corp are o mişcare uniform frânată.




**b.** Pe baza formulei accelerației medii: $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t - t_0}$ şi ținând cont că $a_m=a$, iar $t_0=0 \Rightarrow v=v_0+at$. Calculăm timpul până la oprire din condiția $v=0 \Rightarrow 0=v_0+at_{op} \Rightarrow t_{op}=-v_0/a$=1 s.

**c.** Distanța pe care o parcurge corpul până la oprire este $s_{op}=v_m t_{op}$, unde viteza medie se obține ca fiind media aritmetică a valorilor inițială şi finală deoarece corpul are o mişcare uniform încetinită, astfel că $v_m=v_0/2 \Rightarrow$ $s_{op}=-v_0^2/2a$=4,95 m.

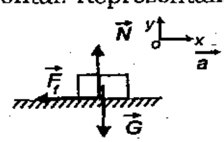
**23.a.** Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Vectorial: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_f = m\cdot a$ şi pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$.




Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 2{,}84$ m/s².

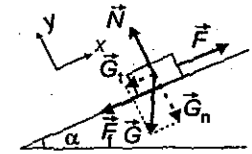
**b.** La baza planului corpul are o viteză cu care se mişcă în continuare pe planul orizontal. Aflăm accelerația corpului pe planul orizontal. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe $Ox$: $-F_f = m\cdot a$ şi pe $Oy$: $N - G = 0 \Rightarrow N = mg$.



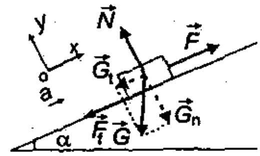

Conform legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g = -2{,}5$ m/s², iar semnul minus ne arată că acest corp are o mişcare încetinită.

**c.** Pentru ca acest corp să urce uniform pe planul înclinat, trebuie ca $\vec{a}=0$, deci rezultanta forțelor care acționează asupra lui să fie nulă: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe $Ox$: $F-mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$F=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=14{,}325$ N



**24.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra saniei și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F-mg\sin\alpha-F_f=ma$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=mg\cos\alpha$.
Conform legii frecării: $F_f=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha \Rightarrow$



$$F-mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \Rightarrow a=\frac{F}{m}-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=0{,}5\ \text{m/s}^2$$

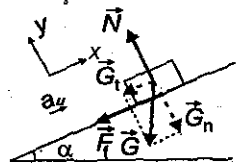
**b.** Deoarece sania se mişcă accelerat distanța parcursă de sanie este $d=v_m t$. Deoarece viteza corpului crește direct proporțional cu timpul, viteza medie este $v_m=v/2$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at$, astfel că $v_m=at/2 \Rightarrow d=at^2/2=9$ m

**c.** După încetarea acțiunii forței $F$, sania va avea o mișcare uniform încetinită, astfel că $\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}_u$

Pe $Ox$: $-mg\sin\alpha-F_f=m\cdot a$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0$.

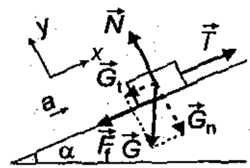
Pe baza legii frecării $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$-mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma \Rightarrow a=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$



Distanța parcursă de corp până la oprire este $d_{op}=v_m t_{op}$, unde $v_m=v/2$, astfel că $d_{op}=vt_{op}/2$. Cum $a_u=\Delta v/\Delta t=-v/t_{op} \Rightarrow t_{op}=-v/a_u$ $\Rightarrow d_{op}=-v^2/2a_u=v^2/2g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=0{,}45$ m, unde $v=at=3$ m/s

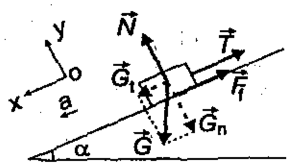
**25.a.** Deoarece $T>mg\sin\alpha$ corpul se va deplasa pe planul înclinat în sus. Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.
Pe $Ox$: $T-mg\sin\alpha-F_f=ma$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0 \Rightarrow N=mg\cos\alpha \Rightarrow F_f=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha$

$$\Rightarrow a=\frac{T-mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m}=7{,}5\ \text{m/s}^2$$

**b.** Deoarece $T<mg\sin\alpha$, corpul se va mişca în jos pe planul înclinat. Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii:

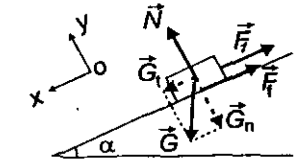


$\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\cdot\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:
pe $Ox$: $mg\sin\alpha-T-F_f=ma$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=mg\cos\alpha$.

Cum $F_f=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha\Rightarrow a=\dfrac{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-T}{m}$ =0,5 m/s²

**c.** Dacă corpul urcă uniform în situația de la punctul **a.**, impunem condiția ca $a$=0$\Rightarrow T=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$=7,5 N. Dacă corpul coboară uniform în situația de la **b.**, impunem condiția ca $a$=0$\Rightarrow T=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$=2,5 N

**26.a.** Deoarece corpul este menținut în repaus, rezultanta forțelor ce acționează asupra corpului este nulă, iar forța $F_1$ este aplicată de-a lungul planului în sus, la fel ca și forța de frecare. Utilizăm principiul al doilea al dinamicii, după reprezentarea orțelor care acționează asupra corpului. Obținem: $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $mg\sin\alpha-F_1-F_f=0$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0$.

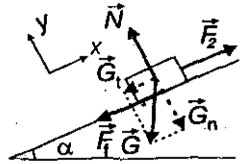



Cum $F_f=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha\Rightarrow mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=F_1$ (1). Studiem mișcarea uniformă în sus pe planul înclinat a corpului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii, după reprezentarea forțelor care acționează asupra corpului, obținem vectorial: $\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F_2-mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0$.

$F_f=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha\Rightarrow F_2=mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha$ (2).

Adunăm relațiile (1) și (2): $F_1+F_2=2mg\sin\alpha\Rightarrow$

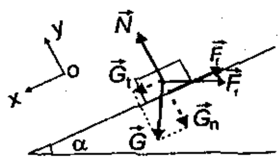
$m=\dfrac{F_1+F_2}{2g\sin\alpha}$=1,41 kg




**b.** Împărțim relația (1) la (2) și obținem:
$\dfrac{F_1}{F_2}=\dfrac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}\Rightarrow\mu=\dfrac{(F_2-F_1)}{(F_1+F_2)}tg\alpha=0{,}5.$

**c.** Unghiul de frecare este unghiul planului înclinat pentru care un corp lăsat liber pe plan coboară uniform, astfel că $\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=0$. Pe axe obținem prin proiecții: pe $Ox$: $mg\sin\alpha-F_f=0$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0$, astfel că din $F_f=\mu N=\mu\cdot mg\cos\alpha\Rightarrow mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=0\Rightarrow tg\alpha=\mu$=0,5

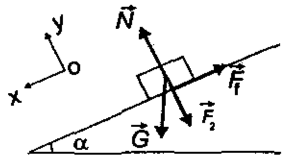
**27.a.** Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță orizontală. După reprezentarea forțelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii și obținem $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_1+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe $Ox$: $mg\sin\alpha-F_f-F_1\cos\alpha=0$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha-F_1\sin\alpha=0$.



$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F_1\sin\alpha) \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_1\sin\alpha - F_1\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow F_1 = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$.

Studiem echilibrul corpului în situația în care asupra corpului se aplică o forță normală. Reprezentăm forțele și ținem cont că în repaus, rezultanta forțelor este nulă $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_2 + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm pe axele de coordonate ecuația vectorială și obținem pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha - F_2 = 0$



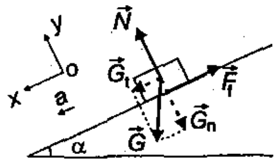

$\Rightarrow N = mg\cos\alpha + F_2 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F_2)$

$\Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu}$

Cum $F_2 = nF_1 \Rightarrow \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu} = n\dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \Rightarrow \mu = \dfrac{\cos\alpha}{n - \sin\alpha} \approx 0{,}31$

**b.** Dacă corpul este lăsat liber pe planul înclinat din condiția vectorială $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$, prin proiecția pe axele de coordonate, obținem: pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_f = m \cdot a$ și pe $Oy$: $N - mg\cos\alpha = 0$. Pe baza legii frecării $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

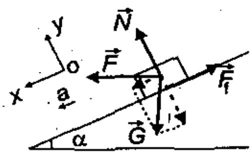
$\Rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 4{,}87$ m/s²




Din $a = a_m = \Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v = at = 9{,}74$ m/s

**c.** Distanța parcursă de corp este $d = v_m t$, unde $v_m = v/2$, astfel că $d = vt/2 = at^2/2$ $\Rightarrow d = 9{,}74$ m

**28.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem: pe $Ox$: $F\cos\alpha + mg\sin\alpha - F_f = ma$ și pe $Oy$: $N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0$. Din legea frecării $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\alpha) \Rightarrow$

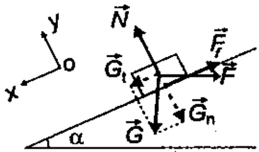



$F\cos\alpha + mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - F\sin\alpha) = ma \Rightarrow$

$a = \dfrac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{m} + g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 4{,}7$ m/s²

**b.** Apăsarea corpului pe planul înclinat este $N = mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 16{,}3$ N

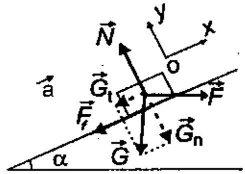
**c.** Pentru ca acest corp să nu mai apese pe planul înclinat, trebuie ca $N=0$ $\Rightarrow F = mg\,ctg\,\alpha = 34{,}6$ N




**29.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe $Oy$: $N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\sin\alpha+mg\cos\alpha$ =65N

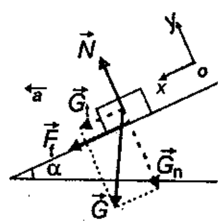
**b.** Proiectând pe axa $Ox$: $mg\sin\alpha-F\cos\alpha-F_f=0\Rightarrow F_f=mg\sin\alpha-F\cos\alpha\approx 8{,}65$ N

**c.** Din legea frecării: $F_f=\mu N\Rightarrow \mu=\dfrac{F_f}{N}=\dfrac{mg\sin\alpha-F\cos\alpha}{mg\cos\alpha+F\sin\alpha}\approx 0{,}133$




**30.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Deoarece $F\cos\alpha\geq mg\sin\alpha$, corpul va urca acclerat. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F\cos\alpha-F_f-mg\sin\alpha=ma$ și pe $Oy$: $N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0\Rightarrow N=F\sin\alpha+mg\cos\alpha$. Din legea frecării $F_f=\mu N\Rightarrow a=\dfrac{F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{m}-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\approx 3{,}33$ m/s²

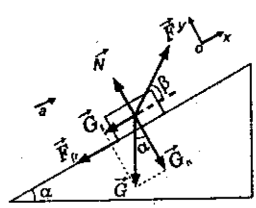
**b.** Deoarece corpul urcă uniform, $a$=0$\Rightarrow F=\dfrac{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 20{,}76$ N




**c.** Reprezentăm forțele ce acționează asupra corpului. Impunem condiția ca rezultanta forțelor să fie egală cu $m\cdot\vec{a}$, deoarece față de un observator aflat pe sol corpul se deplasează odată cu planul, adică cu accelerația orizontală $\vec{a}$ a planului. Pe baza principiului al doilea al dinamicii se obține: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe axa $Ox$: $mg\sin\alpha+F_f=ma\cos\alpha$ și pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=ma\sin\alpha$

$\Rightarrow N=mg\cos\alpha+ma\sin\alpha$. Cum $F_f=\mu N\Rightarrow F_f=\mu(mg\cos\alpha+ma\sin\alpha)\Rightarrow$

$mg\sin\alpha+\mu mg\cos\alpha+\mu ma\sin\alpha=ma\cos\alpha\Rightarrow a=\dfrac{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx 10{,}38$ m/s²




**31.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Deoarece corpul se mișcă uniform, vectorial obținem $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, deoarece $\vec{a}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe $Ox$: $F\cos\beta-F_f-mg\sin\alpha=0$ și pe $Oy$:

$N+F\sin\beta-mg\cos\alpha=0$. Din legea forței de frecare:

$F_f=\mu N=\mu(mg\cos\alpha-F\sin\beta)\Rightarrow F\cos\beta-\mu mg\cos\alpha+\mu F\sin\beta-mg\sin\alpha=0$

$\Rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} = 8{,}935$ N.

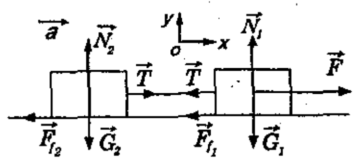
Forța de apăsare normală este: $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = \dfrac{mg\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} = 2{,}35$ N

**b.** Dacă corpul se mişcă accelerat cu accelerația $\vec{a}$, atunci relația vectorială devine: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe *Ox*: $F\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = ma$ şi pe *Oy*: $N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Din $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

$F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta - mg\sin\alpha = ma \Rightarrow F = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + ma}{\cos\beta + \mu\sin\beta} = 9{,}83$N

Forța de apăsare normală este: $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = 1{,}72$ N

**c.** Pentru ca acest corp să nu mai apese pe plan, trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă $\Rightarrow N = 0 \Rightarrow F = \dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\beta} \approx 12{,}2$ N



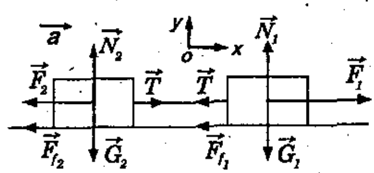
**32.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Pentru corpul $m_1$ vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1\vec{a}$. Pe *Oy*: $N_1 - G_1 = 0$ şi pe *Ox*: $F - F_{f1} - T = m_1 a$. Cum $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow F - \mu m_1 g - T = m_1 a$ (1)

Pentru corpul $m_2$: $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Pe *Ox*: $T - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe *Oy*: $N_2 - G_2 = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$. Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow F - \mu(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 2$ m/s$^2$

**b.** $T = m_2(a + \mu g) = \dfrac{m_2 F}{m_1 + m_2} = 2$ N

**c.** Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t \Rightarrow v=at=8$ m/s şi distanța parcursă de corp $d=v_m t$, unde $v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2=16$ m



**33.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1>F_2$, sistemul se mişcă spre dreapta. Pentru corpul $m_1$: $\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{T} = m_1\vec{a}$.

Pe *Ox*: $F_1 - F_{f1} - T = m_1 a$ şi pe *Oy*: $N_1 - G_1 = 0$

Pe baza legii frecării $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow F_1 - \mu m_1 g - T = m_1 a$ (1)

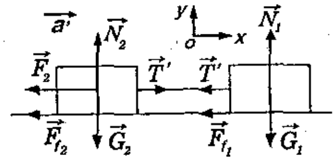
Pentru corpul $m_2$: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}$ . Pe $Ox$: $T-F_{f2}-F_2=m_2a$ (1)

Pe $Oy$: $N_2-G_2=0 \Rightarrow N_2=m_2g$ . $F_{f2}=\mu N_2=\mu m_2 g \Rightarrow T-\mu m_2 g-F_2=m_2a$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow F_1-F_2-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\dfrac{F_1-F_2}{m_1+m_2}-\mu g=0,5$ m/s²

**b.** $T=m_2(a+\mu g)+F_2=\dfrac{m_1F_2+m_2F_1}{m_1+m_2}=50$ N

**c.** Imediat cum $F_1$ încetează să acționeze sistemul se va mişca ca şi inainte spre dreapta, până ce sistemul de corpuri se va opri. Astfel, pentru corpul $m_1$: $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}'=m_1\vec{a}'$.



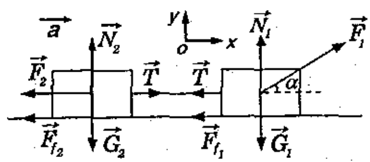

Pe $Ox$: $-F_{f1}-T'=m_1\vec{a}'$ şi pe $Oy$: $N_1-G_1=0$

$F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1 g \Rightarrow -\mu m_1 g-T'=m_1a'$ (1)

Pentru corpul $m_2$: $\vec{T}'+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}'$. Pe $Ox$: $T'-F_{f_2}-F_2=m_2a'$ şi pe $Oy$: $N_2-G_2=0 \Rightarrow N_2=m_2g$ . Cum $F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2 g \Rightarrow T'-\mu m_2 g-F_2=m_2a'$ (2)

Din(1)+(2)$\Rightarrow -F_2-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a' \Rightarrow a'=-\dfrac{F_2}{m_1+m_2}-\mu g \Rightarrow$ tensiunea din fir devine $T'=m_2(a'+\mu g)+F_2=\dfrac{m_1F_2}{m_1+m_2}=8$ N

**34.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Proiectăm pe axele de coordonate relațiile vectoriale. Deoarece $F_1\cos\alpha>F_2$, sistemul se mişcă spre dreapta.




Pentru corpul $m_1$: $\vec{F}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}+\vec{N}_1=m_1\vec{a}$.

Proiectăm pe $Ox$: $F_1\cos\alpha-F_{f1}-T=m_1a$ şi pe $Oy$: $N_1+F_1\sin\alpha-m_1g=0$.

Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu(m_1g-F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1\cos\alpha-\mu m_1 g+\mu F_1\sin\alpha-T=m_1a$ (1)

Pentru corpul $m_2$: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{F}_2=m_2\vec{a}$.

Proiectăm pe $Ox$:: $T-F_{f2}-F_2=m_2a$ şi pe $Oy$: $N_2-m_2g=0$.

Cum $F_{f2}=\mu N_2 \Rightarrow T-\mu m_2 g-F_2=m_2a$ (2). Adunând relațiile (1) şi (2) obținem:

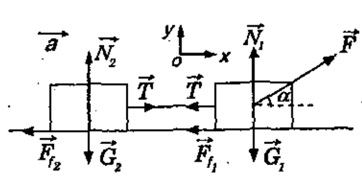
$$F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-\mu g(m_1+m_2)-F_2=(m_1+m_2)a \Rightarrow a=\frac{F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)-F_2}{m_1+m_2}-\mu g$$

$\Rightarrow a=1$ m/s²

**b.** $T=m_2(a+\mu g)+F_2=16,95$ N

**c.** Deoarece sistemul se mişcă uniform spre dreapta, atunci $a=0$, astfel că forța $F_1=\dfrac{F_2+\mu g(m_1+m_2)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 23,78$ N

**35.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii şi apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul $m_1$: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f_1}+\vec{T}+\vec{N}_1=m_1\vec{a}$.




Proiectăm pe *Ox*: $F\cos\alpha-F_{f1}-T=m_1a$ şi pe *Oy*: $N_1+F\sin\alpha-m_1g=0$

Pentru corpul $m_2$: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$. Proiectăm pe *Ox*: $T-F_{f2}=m_2a$ şi pe *Oy*: $N_2-m_2g=0$. Deoarece $N_1=N_2=0{,}5\Rightarrow m_1g-F\sin\alpha=m_2g\Rightarrow\alpha=30^0$

**b.** Deoarece $N_1=N_2$, atunci $F_{f1}=F_{f2}=F_f=\mu m_2g=6$ N

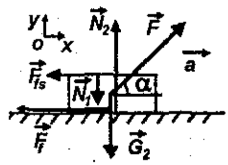
**c.** Din $F\cos\alpha-F_{f1}-T=m_1a$ (1) şi $T-F_{f2}=m_2a$ (2) prin adunarea relațiilor (1) şi (2) obținem: $F\cos\alpha-2F_f=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=\dfrac{F\cos\alpha-2F_f}{m_1+m_2}$=1,76 m/s²

**d.** Din $T-F_{f2}=m_2a\Rightarrow T=m_2a+F_f$=7,76 N

**36.a.** Distanța parcursă de corp $d=v_mt$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at\Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2\Rightarrow a=2d/t^2=2$ m/s²

**b.** Deoarece coletul se află pe sanie se deplasează împreună cu sania, el va avea aceeaşi accelerație. Din reprezentarea forțelor $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{fs}=m\vec{a}$, scalar forța de frecare statică dintre colet şi sanie este $F_{fs}=ma=10$ N (1)

**c.** Reprezentăm forțele saniei. Coletul acționează asupra saniei pe verticală cu forța de apăsare $N_1=mg$ în jos şi pe orizontală cu forța de frecare $F_{fs}$ în sens contrar sensului de deplasare al saniei. Vectorial obținem:
$\vec{F}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_f+\vec{F}_{fs}+\vec{N}_1=M\vec{a}$ şi scalar:



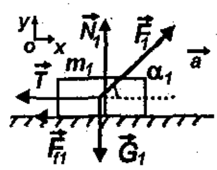

Pe *Ox*: $F\cos\alpha-F_f-F_{fs}=Ma\Rightarrow F\cos\alpha-F_f-ma=Ma$

Pe *Oy*: $F\sin\alpha+N_2-N_1-Mg=0\Rightarrow N_2=(m+M)g-F\sin\alpha$, $F_f=\mu N_2\Rightarrow$

$F\cos\alpha-\mu(m+M)g+\mu F\sin\alpha-ma=Ma$ (2)

Din (1) şi (2) obținem: $F=\dfrac{(m+M)(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx57{,}68$ N

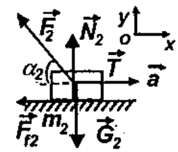
**37.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp, scriem legile vectoriale pe baza principiului 2 al dinamicii şi apoi proiectăm pe axele de coordonate. Pentru corpul $m_1$, vectorial $\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{T}+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$, iar scalar pe *Ox* $F_1\cos\alpha_1-T-F_{f1}=m_1a$ şi pe *Oy*:




$N_1+F_1\sin\alpha_1-m_1g=0\Rightarrow N_1=m_1g-F_1\sin\alpha_1$

$\Rightarrow F_{f1}=\mu_1N_1=\mu_1(m_1g-F_1\sin\alpha_1)\Rightarrow F_1\cos\alpha_1-T-\mu_1(m_1g-F_1\sin\alpha_1)=m_1a$ (1)

Pentru corpul $m_2$, vectorial $\vec{F}_2+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$, iar scalar pe $Ox$ $T-F_2\cos\alpha_2-F_{f2}=m_2a$ şi pe $Oy$: $N_2+F_2\sin\alpha_2-m_2g=0\Rightarrow F_{f2}=\mu_2N_2=\mu_2(m_2g-F_2\sin\alpha_2)\Rightarrow$
$T-F_2\cos\alpha_2-\mu_2(m_2g-F_2\sin\alpha_2)=m_2a$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$



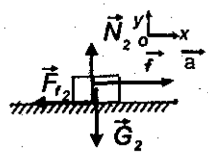
$F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-\mu_1(m_1g-F_1\sin\alpha_1)-\mu_2(m_2g-F_2\sin\alpha_2)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

$$a=\frac{F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-\mu_1(m_1g-F_1\sin\alpha_1)-\mu_2(m_2g-F_2\sin\alpha_2)}{m_1+m_2}\approx 1{,}07\ \mathrm{m/s}$$

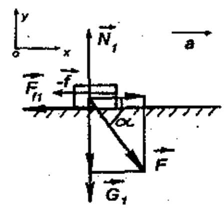
**b.** Distanţa parcursă de corp $d=v_mt$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t=v/t\Rightarrow v=at\Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2=53{,}51$ m

**c.** Deoarece sistemul se mişcă uniform în acelaşi sens ca la punctul **a.**, atunci $F_1\cos\alpha_1-F_2\cos\alpha_2-\mu_1(m_1g-F_1\sin\alpha_1)-\mu_2(m_2g-F_2\sin\alpha_2)=0\Rightarrow$

$$F_1=\frac{F_2(\cos\alpha_2-\mu_2\sin\alpha_2)+g(\mu_1m_1+\mu_2m_2)}{\cos\alpha_1+\mu_1\sin\alpha_1}\approx 31{,}35\ \mathrm{N}$$



**38.a.** Studiem echilibrul corpului în situaţia în care asupra corpului se aplică o forţă orizontală. După reprezentarea forţelor, aplicăm principiul al doilea al dinamicii, ţinând cont că $\vec{a}=0$. Pentru corpul $m_2$: $\vec{f}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$, unde $\vec{f}$ este forţa cu care corpul de masă $m_1$ împinge corpul de masă $m_2$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. pe $Ox$: $f-F_{f_2}=m_2a$ şi pe $Oy$: $N_2-m_2g=0\Rightarrow F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2g\Rightarrow f-\mu m_2g=m_2a$ (1)



Pentru corpul $m_1$: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f_1}+\vec{N}_1-\vec{f}=m_1\vec{a}$, unde $-\vec{f}$ este forţa de reacţiune cu care corpul de masă $m_2$ împinge corpul de masă $m_1$, conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Prin proiecţie pe axele de coordonate obţinem pe $Ox$: $F\cos\alpha-F_{f_1}-f=m_1a$ şi pe $Oy$: $N_1-m_1g-F\sin\alpha=0\Rightarrow N_1=m_1g+F\sin\alpha$

$F_{f_1}=\mu N_1=\mu(F\sin\alpha+m_1g)\Rightarrow F\cos\alpha-\mu F\sin\alpha-\mu m_1g-f=m_1a$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)-\mu g(m_1+m_2)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

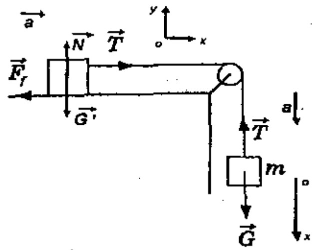
$$a=\frac{F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{m_1+m_2}-\mu g=5{,}65\ \mathrm{m/s^2}$$

**b.** Forţa dintre cele două corpuri este $f=m_2(\mu g+a)=1{,}524$ N.

**c.** Forţa de apăsare normală exercitată de corpul 1, este $N_1=F\sin\alpha+m_1g=5{,}5$ N.

**39.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii. Pentru corpul $m$: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$ şi pe axa $Ox$ şi obţinem: $mg-T=ma$ (1)

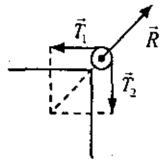
Pentru corpul $M$: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}'=M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $T-F_f=Ma$ şi pe $Oy$: $N-Mg=0$. Conform legii frecării $F_f=\mu N=\mu Mg \Rightarrow T-\mu Mg=Ma$ (2)




Din(1)+(2) $g(m-\mu M)=(m+M)a \Rightarrow a=\dfrac{g(m-\mu M)}{m+M}$

$a$=2,8 m/s².

**b.** $T=m(g-a)=\dfrac{mM(1+\mu)g}{M+m}=14{,}4$ N.




**c.** Impunem condiția de echilibru scripetelui: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Din geometrie scalar se obține: $R^2=T_1^{\,2}+T_2^{\,2}$. Cum $T_1=T_2=T \Rightarrow R=T\sqrt{2}=20{,}3$ N, unde $R$ este reacțiunea în axul scripetelui.

**40.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii.

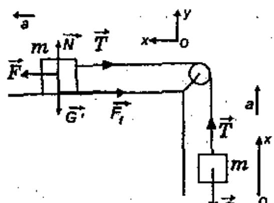
Studiem mişcarea corpului vertical: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$ şi scalar $Ox$: $mg-T=ma$ (1)

Studiem mişcarea corpului aflat pe planul orizontal: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $T-F_f=ma$ şi pe Oy: $N-mg=0 \Rightarrow N=mg$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow T-\mu mg=ma$ (2)

Din(1)+(2)$\Rightarrow mg-\mu mg=2ma \Rightarrow \mu=(g-2a)/g=0{,}6$.

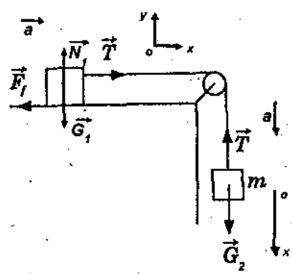
**b.** Dacă sub acțiunea forței $F$, corpurile se mişcă în sens contrar cu aceeaşi accelerație. Pentru corpul vertical vectorial: $\vec{G}+\vec{T}=m\vec{a}$, iar scalar prin proiecție pe axa verticală obținem: $T-mg=ma$ (1).




Pentru corpul care se deplasează pe orizontală: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F-F_f-T=ma$ şi pe $Oy$: $N-mg=0 \Rightarrow F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow F-\mu mg-T=ma$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow F-\mu mg-mg=2ma \Rightarrow F=m(2a+\mu g+g)=2mg=40$ N

**c.** Tensiunea în fir este $T=m(a+g)=24$ N




**41.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Studiem mişcarea corpului cu masa $m_2$. Relația vectorială este: $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}_1$ şi scalar prin proiecție pe axa de coordonate $Ox$: $m_2g-T=m_2a_1$ (1)

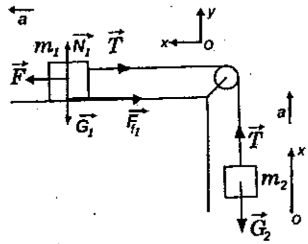
Studiem mişcarea corpului cu masa $m_1$. Relația vectorială este: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_f=m_1\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe $Ox$: $T-F_f=m_1a_1$ şi pe $Oy$: $N_1-m_1g=0\Rightarrow F_f=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow$
$T-\mu m_1g=m_1a_1$ (2)
Din (1)+(2)$\Rightarrow m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a_1\Rightarrow g(m_2-\mu m_1)=(m_1+m_2)a_1$.
Cum $m_2=4m_1\Rightarrow a_1=g(4-\mu)/5$ (3). Schimbând corpurile între ele se obţine analog: $g(m_1-\mu m_2)=(m_1+m_2)a_2\Rightarrow a_2=g(1-4\mu)/5$ (4)

Împărţind relaţia (3) la (4) se obţine: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{4-\mu}{1-4\mu}=6{,}5\Rightarrow a_1=6{,}5a_2$

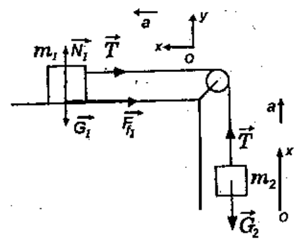
**b.** Pentru ca sistemul de corpuri să se deplaseze cu viteză constantă $a_1=0\Rightarrow m_{1tot}=m_2/\mu$=40 kg$\Rightarrow m_{1x}=m_{1tot}-m_1=m_2/\mu-m_1$=39 kg

**c.** Pentru corpul $m_2$ $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar $T-m_2g=m_2a$ (1), iar pentru corpul $m_1$ $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$.

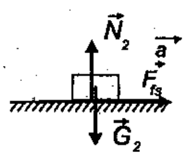



Pe $Ox$ $F-T-F_{f1}=m_1a$ şi pe $Oy$ $N_1-m_1g=0\Rightarrow$
$F_{f1}=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow F-T-\mu m_1g=m_1a$ (2).
Adunăm (1)+(2): $F-m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a$
$F=(m_2+\mu m_1)g+(m_1+m_2)a$ =46 N

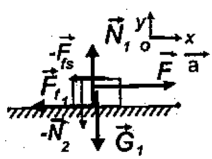
**d.** Studiem mişcarea corpului cu masa $m_2$. $\vec{G}_2+\vec{T}=m_2\vec{a}$ şi scalar prin proiecţie pe axa de coordonate $Ox$: $T-m_2g=m_2a$ (1)
Studiem mişcarea corpului cu masa $m_1$: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Pe $Ox$ $-T-F_f=m_1a$ şi $Oy$
$N_1-m_1g=0\Rightarrow F_f=\mu N_1=\mu m_1g\Rightarrow -T-\mu m_1g=m_1a$
$-m_2g-\mu m_1g=(m_1+m_2)a\Rightarrow a=-\dfrac{g(m_2+\mu m_1)}{m_1+m_2}$
$a$=-8,2 m/s$^2$




**42.a.** Studiem corpul cu masa $m_2$. Dacă corpul cu masă $m_2$ nu alunecă pe scândură, forţa de frecare ce apare la contactul corp-scândură este o forţă de frecare statică $F_{f_s}$. Conform principiului al doilea al dinamicii forţa de frecare statică $F_{f_s}$ imprimă corpului cu masa $m_2$ o acceleraţie identică cu cea a scândurii şi în acelaşi sens. Vectorial $\vec{F}_{f_s}=m_2\vec{a}\Rightarrow$scalar $F_{f_s}=m_2a$ (1)




Studiem mişcarea scândurii:
$\vec{F}+\vec{N}_1-\vec{F}_{f2}-\vec{N}_2+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F-F_{f_s}-F_{f_1}=m_1a$ şi pe $Oy$:
$N_1-N_2-G_1=0\Rightarrow N_1=m_1g+N_2=(m_1+m_2)g$, deoarece



$N_2 = G_2 \Rightarrow F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1(m_1+m_2)g \Rightarrow F - F_{f_s} - \mu_1(m_1+m_2)g = m_1 a$ (2).

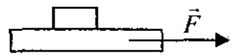
Din (1)+(2) obţinem

$$F - m_2 a - \mu_1(m_1+m_2)g = m_2 a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1+m_2} - \mu_1 g \Rightarrow F_{f_s} = m_2\left(\frac{F}{m_1+m_2} - \mu_1 g\right).$$

Condiţia de nealunecare a corpului $m_2$ pe scândură este ca forţa de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forţa de frecare la alunecare $\Rightarrow F_{f_s} \le F_{f_l} \Rightarrow F_{f_s} \le \mu_2 m_2 g \Rightarrow m_2\left(\frac{F}{m_1+m_2} - \mu_1 g\right) \le \mu_2 m_2 g$

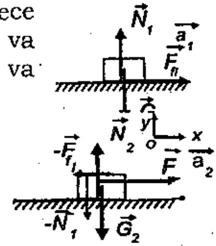
$\Rightarrow F \le (m_1+m_2)(\mu_1+\mu_2)g \Rightarrow F \le 9$ N.

Dacă $F > 9$ N, corpul $m_2$ începe să alunece pe scândură.




**43.a.** Iniţial forţa $F$ este mică şi prin urmare corpurile se mişcă împreună formând un corp cu masa $m_t = m_1 + m_2$. Cum $F = c \cdot t = (m_1+m_2)a \Rightarrow a = \frac{F}{m_1+m_2} = \frac{c \cdot t}{m_1+m_2} = t$, adică acceleraţia sistemului de corpuri creşte direct proporţional cu timpul.

**b.** La un anumit moment de timp $t_0$, corpul începe să lunece pe scândură, iar forţa de frecare la alunecarea este cea care va imprima corpului o acceleraţie. Deoarece iniţial corpul se va mişca sub acţiunea forţei $\vec{F}$ într-un sens, forţa de frecare la alunecare va acţiona în acelaşi sens cu forţa $\vec{F}$. Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului $m_1$. Conform principiului al doilea prin proiecţia pe axa $Ox$, scalar obţinem: $F_{f_l} = m_1 a_1$. Cum $F_{f_l} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow$



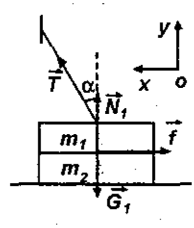

$a_1 = \mu g = 2$ m/s² şi din momentul $t_0$ când corpul alunecă pe scândură, acceleraţia acestuia ramâne constantă. Reprezentăm forţele care acţionează asupra scândurii: $F - F_{f_l} = m_2 a_2 \Rightarrow c \cdot t - \mu m_1 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{c \cdot t - \mu m_1 g}{m_2} = \frac{5t-2}{4}$, deci acceleraţia scândurii continuă să crească liniar cu trecerea timpului.

**c.** Momentul de timp $t_0$ la care corpurile încep să se mişte independent se poate afla din condiţia ca $a_1 = a_2 \Rightarrow \mu g = \frac{ct_0 - \mu m_1 g}{m_2} \Rightarrow t_0 = \frac{\mu g(m_1+m_2)}{c} = 2$ s

**44.a.** Reprezentăm forţele ce acţionează asupra cărămidei superioare şi impunem condiţia ca aceasta să se afle în repaus:

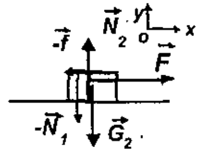
Vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{f} = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $T\sin\alpha - f = 0$ şi pe $Oy$: $T\cos\alpha + N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g - T\cos\alpha$.

$f = \mu N_1 = \mu(m_1 g - T\cos\alpha) \Rightarrow T\sin\alpha - \mu(m_1 g - T\cos\alpha) = 0$



$\Rightarrow T = \dfrac{\mu m_1 g}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 2{,}35$ N

**b.** Obținem $f = T\sin\alpha = \dfrac{\mu m_1 g\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1{,}67$ N

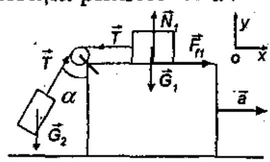


Reprezentăm forțele care acționează asupra cărămidei inferioare şi impunem condiția ca aceasta să iasă uniform de sub cea superioară, adică rezultanta forțelor să fie nulă. Vectorial: $\vec{F} + \vec{N}_2 - \vec{f} - \vec{N}_1 + \vec{G}_2 = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F - f = 0 \Rightarrow F = f = \dfrac{\mu m_1 g\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \approx 1{,}67$ N.

**c.** Pe *Oy*: $N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + m_2 g$.

Cum $N_1 = \dfrac{f}{\mu} = \dfrac{m_1 g\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \Rightarrow N_2 = \dfrac{m_1 g\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + m_2 g \approx 28{,}35$ N, unde $N_2$ reprezintă forța cu care cărămida inferioară apasă asupra planului

**45.a.** Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus în raport cu platforma, ele se deplasează față de un observator de pe sol cu accelerația platformei $\vec{a}$.



Studiem mişcarea corpului de masă $m_2$. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T\sin\alpha = m_2 a$ (1) şi pe *Oy*: $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = m_2 g$ (2). Ridicăm la pătrat cele două ecuații şi apoi le adunăm. Obținem

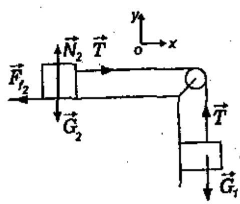
$T^2 = m_2^2(a^2 + g^2) \Rightarrow T = m_2\sqrt{a^2 + g^2} \approx 1{,}077$ N

**b.** $\cos\alpha = \dfrac{m_2 g}{T} = \dfrac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \approx 0{,}928$

**c.** Studiem mişcarea corpului cu masa $m_1$. Vectorial: $\vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f_1} = m_1\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_{f1} - T = m_1 a$ şi

pe *Oy*: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g - m_2\sqrt{a^2 + g^2} = m_1 a \Rightarrow$

$\mu = \dfrac{m_1 a + m_2\sqrt{a^2 + g^2}}{m_1 g} \approx 0{,}615$



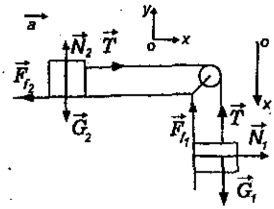
**46.a.** Deoarece sistemul de corpuri se află în repaus pe căruciorul care se mişcă rectiliniu şi uniform, înseamnă că şi ele se vor mişca rectiliniu şi uniform față de un observator aflat pe sol. Pentru corpu $m_2$: $\vec{T} + \vec{G}_2 = 0 \Rightarrow T = m_2 g$ =25 N

**b.** Pentru corpul $m_1$: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = 0$

Pe *Ox*: $T - F_f = 0 \Rightarrow T = F_f \Rightarrow F_f = m_2 g$

şi pe $Oy$: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_f = \mu m_1 g \Rightarrow \mu m_1 g = m_2 g \Rightarrow \mu = m_2 / m_1 = 0{,}25$

**c.** Schimbăm locul corpurilor pe cărucior şi imprimăm căruciorului o mişcare accelerată, astfel încât sistemul de corpuri să se afle în repaus faţă de cărucior şi să se deplaseze faţă de un observator de pe sol cu acceleraţia căruciorului $\vec{a}$. Pentru corpul de masă $m_2$:



$\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f_2} + \vec{G}_2 = m_2\vec{a}$. Pe $Ox$: $T - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe $Oy$: $N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f_2} = \mu m_2 g \Rightarrow T - \mu m_2 g = m_2 a$ (1)

Pentru $m_1$ vectorial: $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$ şi scalar pe $Ox$: $N_1 = m_1 a$ şi pe $Oy$: $T + F_{f_1} - m_1 g = 0$.

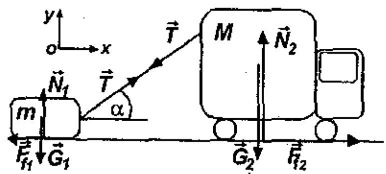
Cum $F_{f_1} = \mu N_1 = \mu m_1 a \Rightarrow T + \mu m_1 g - m_1 g = 0$ (2)

Introducem relaţia (2) în (1) şi obţinem:

$$T = m_1 g - \mu m_1 a \Rightarrow m_1 g - \mu m_1 a - \mu m_2 g = m_2 a \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_2 + \mu m_1} = \frac{g(m_1^2 - m_2^2)}{2 m_1 m_2} \Rightarrow$$

$a = 18{,}75$ m/s²

**47.a.** Studiem mişcarea lăzii. Deoarece lada se mişcă rectiliniu şi uniform, atunci vectorial $\vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Scalar pe $Ox$:



$T\cos\alpha - F_{f1} = 0$ şi pe $Oy$: $T\sin\alpha + N_1 - mg = 0$

$F_{f1} = \mu_1 N_1 = \mu_1(mg - T\sin\alpha) \Rightarrow$

$$T = \frac{\mu_1 mg}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} \approx 671{,}14 \text{ N}$$

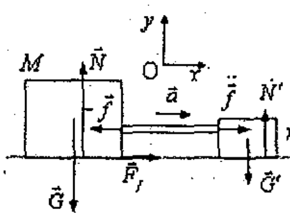
**b.** Studiem mişcarea maşinii. Astfel $\vec{T} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f_2} + \vec{G}_2 = 0$, forţa de frecare se pune în sensul de mers pentru că Pământul împinge maşina inainte. Pe $Ox$:

$$F_{f2} - T\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{f2} = \frac{\mu_1 mg\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha} \approx 335{,}8\text{N} \text{ şi pe } Oy\text{: } N_2 - T\sin\alpha - Mg = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = g\frac{M\cos\alpha + \mu_1(M+m)\sin\alpha}{\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha} \Rightarrow \mu_2 = \frac{F_{f2}}{N_2} = \frac{\mu_1 m\cos\alpha}{M\cos\alpha + \mu_1(M+m)\sin\alpha} \approx 0{,}021$$

**c.** Dacă se consideră că toate roţile sunt motoare şi toate apasă la fel asupra şoselei, atunci forţa de frecare care se exercită asupra fiecărei roţii este $F_f = F_{f2}/4 \approx 83{,}9$ N

**48.a.** Deoarece frâna blochează numai roţile autocamionului, numai asupra acestuia se exercită o forţă de frecare. Bara rigidă împinge remorca cu forţa $\vec{f}$ astfel ca şi aceasta să frâneze cu acceleraţia autocamionului. Studiem mişcarea remorcii: $\vec{N}' + \vec{G}' + \vec{f} = m\vec{a}$, iar prin proiecţia pe axa $Ox$: $f = m \cdot a$ (1)



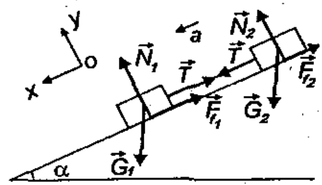
Studiem mişcarea autocamionului. Remorca împinge prin intermediul barei rigide autocamionul cu o forţă $\left(-\vec{f}\right)$ pe aceeaşi direcţie, dar în sens contrar, conform principiului acţiunii şi reacţiunii astfel că: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f-\vec{f}=M\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F_f-f=Ma$ şi pe $Oy$: $N-Mg=0\Rightarrow N=Mg$, iar $F_f=\mu N=\mu Mg\Rightarrow \mu Mg-f=Ma$ (2).

Adunăm cele două relaţii (1) şi (2)$\Rightarrow \mu Mg-ma=Ma\Rightarrow a=\dfrac{\mu Mg}{M+m}=6{,}4\ \mathrm{m/s^2}$

**b.** $f=ma=\dfrac{\mu mMg}{M+m}=6{,}4\ \mathrm{kN}$

**c.** Sistemul are o mişcare rectilinie uniform încetinită cu $a=-6{,}4\ \mathrm{m/s^2}$, astfel că $s_{op}=v_m t_{op}$, unde $v_m$ reprezintă viteza medie şi $t_{op}$ timpul până la oprire. Cum $a=a_m=\Delta v/\Delta t=(v-v_0)/t$, în momentul opririi $v=0\Rightarrow t_{op}=-v_0/a$. Deoarece viteza depinde liniar de timp $v_m=v_0/2\Rightarrow s_{op}=-v_0^2/2a=20\ \mathrm{m}$

**49 a.** Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă $m_1$: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$




Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $m_1 g\sin\alpha-T-F_{f1}=m_1 a$ şi pe $Oy$: $N_1-m_1 g\cos\alpha=0$. Cum $F_{f1}=\mu_1 N_1$, obţinem:

$m_1 g\sin\alpha-T-\mu_1 m_1 g\cos\alpha=m_1 a$ (1)

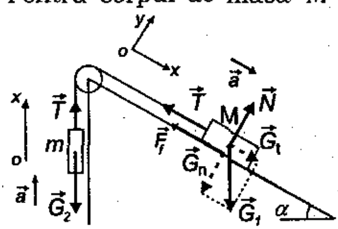
Pentru corpul de masă $m_2$: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_2+\vec{F}_{f_2}=m_2\vec{a}$. Proiectăm pe $Ox$: $m_2 g\sin\alpha+T-F_{f2}=m_2 a\Rightarrow m_2 g\sin\alpha+T-\mu_2 m_2 g\cos\alpha=m_2 a$ (2)

Adunăm (1) cu (2): $a=g\sin\alpha-g\dfrac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\cos\alpha=3{,}5\ \mathrm{m/s^2}$

**b.** $T=m_1\left(g\sin\alpha-\mu_1 g\cos\alpha-a\right)=-4\ \mathrm{N}\Rightarrow$ sensul tensiunilor în tijă sunt invers

**c.** În absenţa frecării între corpuri şi suprafaţa planului înclinat $\mu_1=0$ şi $\mu_2=0$, astfel că sistemul de corpuri va coborî accelerat cu acceeraţia $a=g\sin\alpha\Rightarrow$ tensiunea din tijă este $T=0$

**50.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă $M$: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe $Ox$: $Mg\sin\alpha-T-F_f=Ma$ şi pe $Oy$: $N-Mg\cos\alpha=0\Rightarrow F_f=\mu N=\mu Mg\cos\alpha$




$\Rightarrow Mg\sin\alpha-T-\mu Mg\cos\alpha=Ma$ (1)

Pentru corpul de masă $m$: $\vec{G}_2+\vec{T}=m\cdot\vec{a}$. Scalar prin proiecţia relaţiei vectoriale pe axa $Ox$: $T-mg=ma$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2)$\Rightarrow g(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha - m) = (m+M)a \Rightarrow$

$$a = g\frac{(M\sin\alpha - \mu M\cos\alpha - m)}{M+m} = 0{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

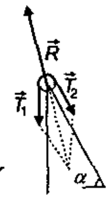
**b.** $T = m(a+g) = \dfrac{mMg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1)}{M+m} = 10{,}5\ \mathrm{N}$

**c.** Impunem condiția de echilibru scripetelui (fig. R2.3.38):

$\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)$. Pe baza teoremei Pitagora generalizată obținem:

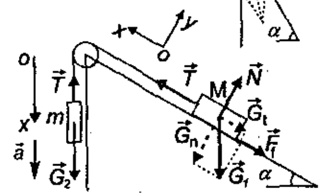
$R^2 = T_1^{\,2} + T_1^{\,2} + 2T_1T_2\cos(90-\alpha)$.

$T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2\sin\alpha \Rightarrow R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} \approx 18{,}165\ \mathrm{N}$




**51.a.** Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Pentru corpul de masă $m$: $\vec{G}_2 + \vec{T} = m\vec{a}$ și scalar prin proiecția pe axa $Ox$: $mg - T = ma$ (1)

Pentru corpul de masă $M$, relația vectorială este: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe $Ox$: $T - F_f - Mg\sin\alpha = Ma$ și pe $Oy$: $N - Mg\cos\alpha = 0$.



Cum $F_f = \mu N = \mu Mg\cos\alpha \Rightarrow T - \mu Mg\cos\alpha - Mg\sin\alpha = Ma$ (2)

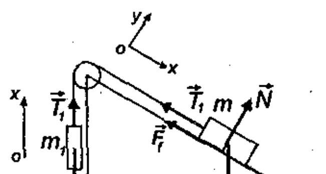
Prin adunarea relațiilor (1) cu (2)$\Rightarrow g(m - \mu M\cos\alpha - M\sin\alpha) = (m+M)a \Rightarrow$

$$a = \frac{g(m - \mu M\cos\alpha - M\sin\alpha)}{m+M} \approx 6{,}725\ \mathrm{m/s^2}$$

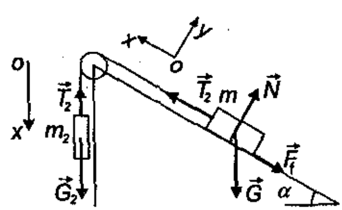
**b.** $T = m(g-a) = \dfrac{mMg(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m+M} \approx 16{,}375\ \mathrm{N}$.

**c.** Distanța parcursă de corp $d=v_m t$. Din $a=a_m=\Delta v/\Delta t = v/t \Rightarrow v=at \Rightarrow v_m=v/2$, astfel că $d=vt/2=at^2/2=13{,}45$ m

**52.a.** Când pe taler se așază corpul cu masa $m_1$ corpul cu masa $m$ are tendința să coboare. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul $m_1$: $T_1=m_1g$ și pentru corpul $m$: $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar prin proiecția pe axa $Ox$: $mg\sin\alpha - T_1 - F_f = 0$. Cum $N = mg\cos\alpha$ și $F_f=\mu N \Rightarrow m_1 = m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (1)



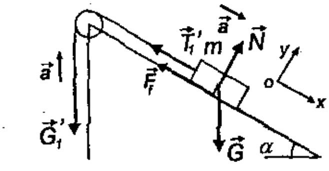
Când pe taler se așază corpul cu masa $m_2$ corpul cu masa $m$ are tendința să urce. Deoarece sistemul este în echilibru, atunci pentru corpul $m_2$: $T_2=m_2g$ și pentru corpul $m$: $\vec{T}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$ și prin proiecția pe axa $Ox$: $T_2 - mg\sin\alpha - F_f = 0$. Cum $N = mg\cos\alpha$ și



$F_f = \mu N \Rightarrow m_2 = m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)(2)$. Din (1)+(2) obținem: $m = \dfrac{m_1 + m_2}{2\sin\alpha}$=25 kg, $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell}$=0,6

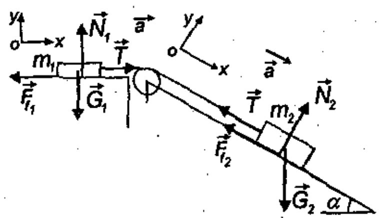
**b.** Din (2)-(1) obținem: $\mu = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} tg\alpha$=0,25, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$=0,8

**c.** Deoarece se trage cu o forță egală cu jumătate din greutatea corpului cu masa $m_1$ atunci $T_1'=m_1g/2$. Corpul cu masă $m$ coboară accelerat cu accelerația $a$, astfel că $\vec{T}'_1+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe $Ox$:



$mg\sin\alpha - F_f - T'_1 = ma$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$, astfel că $a = g[\sin\alpha - \mu\cos\alpha - m_1/(2m)]$=2 m/s²

**53.a.** Studiem mişcarea corpului $m_1$: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$. Pe $Ox$: $T - F_{f_1} = m_1 a$ şi pe $Oy$: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow F_{f_1} = \mu N_1$. Obținem: $T - \mu m_1 g = m_1 a$ (1). Studiem mişcarea corpului $m_2$: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Pe $Ox$: $m_2 g\sin\alpha - F_{f_2} - T = m_2 a$ şi pe $Oy$: $N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow$



$F_{f_2} = \mu N_2 \Rightarrow m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha - T = m_2 a$ (2). Din (1)+(2)$\Rightarrow$

$$g(m_2\sin\alpha - \mu m_2\cos\alpha - \mu m_1) = (m_1+m_2)a \Rightarrow a = g\frac{m_2\sin\alpha - \mu m_2\cos\alpha - \mu m_1}{m_1 + m_2}$$

**b.** $a$=0,62 m/s² şi $T = m_1(a+\mu g)$ = 0,262 N.

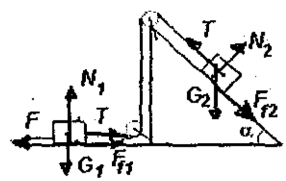
**c.** Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform, atunci $a$=0, astfel că $m_1 = m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/\mu$=654 g

**54.a.** Studiem mişcarea corpului $m_1$: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}$.

Pe $Ox$: $F - T - F_{f_1} = m_1 a$ şi pe $Oy$: $N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow$

$F_{f_1} = \mu N_1 \Rightarrow F - T - \mu m_1 g = m_1 a$ (1)

Studiem mişcarea corpului $m_2$: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Obținem pe $Ox$:



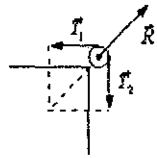
$T - F_{f2} - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ şi pe $Oy$: $N - m_2 g\cos\alpha = 0$.

Cum $F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g\cos\alpha \Rightarrow T - \mu m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2): $F - \mu m_1 g - m_2 g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = (m_1+m_2)a \Rightarrow a \approx 0{,}71$ m/s²

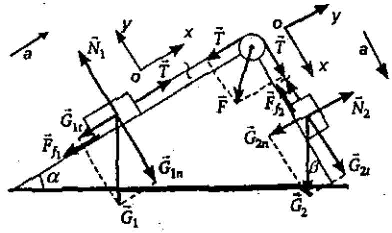
**b.** $T = F - m_1(\mu g + a) \approx 4{,}58$ N

**c.** Reprezentăm forțele care acționează asupra scripetelui $S_1$ și impunem condiția de echilibru acestuia. $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0 \Rightarrow \vec{R}=-\left(\vec{T}_1+\vec{T}_2\right)$. Din geometrie se obține scalar: $R^2 = T_1^{\,2}+T_2^{\,2}$. Cum $T_1=T_2=T \Rightarrow R=T\sqrt{2}\approx 6{,}46$ N, unde $R$ este reacțiunea în axul scripetelui.



**d.** Deoarece sistemul se deplasează uniform în același sens ca la punctul **a.**, atunci $a$=0$\Rightarrow F=\mu m_1 g+m_2 g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\approx 8{,}23$ N

**55.a.** Studiem mișcarea fiecărui corp separat. Studiem mișcarea corpului $m_2$. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$.



Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$ $m_2 g\sin\beta-T-F_{f_2}=m_2 a$, pe $Oy$: $N_2-m_2 g\cos\beta=0\Rightarrow N_2=m_2 g\cos\beta$.

Cum $F_{f_2}=\mu_2 N_2=\mu_2 m_2 g\cos\beta \Rightarrow m_2 g\sin\beta - T-\mu_2 m_2 g\cos\beta=m_2 a$ (1)

Studiem mișcarea corpului $m_1$. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$. Obținem:

Pe $Ox$: $T-F_{f_1}-m_1 g\sin\alpha=m_1 a$ și pe $Oy$: $N_1-m_1 g\cos\alpha=0$

Cum $F_{f_1}=\mu_1 N_1=\mu_1 m_1 g\cos\alpha \Rightarrow T-\mu_1 m_1 g\cos\alpha-m_1 g\sin\alpha=m_1 a$ (2)

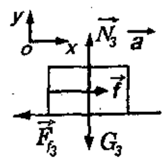
Din (1)+(2) $\Rightarrow m_2 g(\sin\beta-\mu_2\cos\beta)-m_1 g(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)=(m_1+m_2)a\Rightarrow$

$$a=g\frac{m_2(\sin\beta-\mu_2\cos\beta)-m_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)}{m_1+m_2}\approx 1{,}72\ \mathrm{m/s^2}$$

**b.** $T=m_1(a+g\sin\alpha+\mu_1 g\cos\alpha)\approx 10{,}87$ N

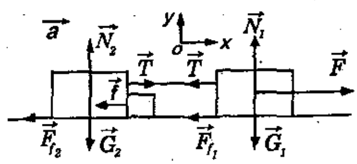
**c.** Studiem echilibrul scripetelui. $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{R}=0$, $\vec{R}=-\left(\vec{T}_1+\vec{T}_2\right)$. Din geometrie se obține scalar: $R^2=T_1^{\,2}+T_2^{\,2}=2T^2\Rightarrow R=T\sqrt{2}\approx 15{,}32$ N

**56.a.** Corpurile se deplasează spre dreapta uniform accelerat. Studiem mișcarea corpului cu masa $m_3$: $\vec{f}+\vec{G}_3+\vec{N}_3+\vec{F}_{f3}=m_3\vec{a}$. Scalar $f-\mu m_3 g=m_3 a$ (1).



Pentru corpul cu masa $m_1$: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{f1}+\vec{T}=m_1\vec{a}$, iar scalar: $F-T-\mu m_1 g=m_1 a$ (2)

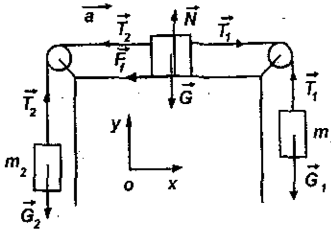
Pentru corpul cu masa $m_2$: $\vec{T}+\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{F}_{f2}+\vec{f}=m_2\vec{a}$, scalar pe axa $Ox$: $T-\mu m_2 g-f=m_2 a$ (3). Din (1)+(2)+(3)



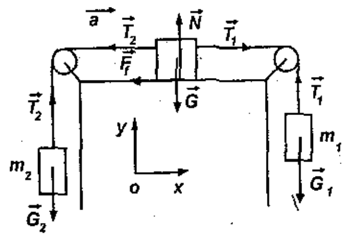
obținem: $F-\mu(m_1+m_2+m_3)=(m_1+m_2+m_3)a\Rightarrow a=\dfrac{F}{m_1+m_2+m_3}-\mu g=1\ \mathrm{m/s^2}$

**b.** Din (2) obținem $T = F - m_1(a + \mu g) = \dfrac{F(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}$ =10,5 N

**c.** Forța cu care corpul $m_2$ împinge corpul cu masa $m_3$ este $f = m_3(a + \mu g)$=7N




**57.a.** Studiem mișcarea corpului cu masa $m_1$: $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$. Scalar obținem prin proiecția pe axa de coordonate: $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)
Studiem mișcarea corpului cu masă $m_2$. Vectorial $\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$ și scalar obținem prin proiecția pe axa de coordonate: $T_2 - m_2 g = m_2 a$ (2). Studiem mișcarea corpului cu masă $M$: $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{F}_f = M\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $T_1 - T_2 - F_f = Ma$ și pe $Oy$: $N - Mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu Mg = Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:
$g(m_1 - \mu M - m_2) = (m_1 + m_2 + M)a \Rightarrow 3\ \mathrm{m/s^2}$
**b.** $T_1 = m_1(g - a)$ =35 N și $T_2 = m_2(a + g)$ = 13 N
**c.** Deoarece sistemul se mișcă uniform în același sens ca la punctul **a.**, atunci $a = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 + \mu M$ =2 kg

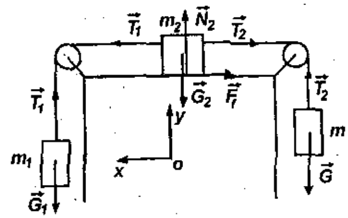



**58.a.** Pentru corpul cu masa $m_1$: $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$, iar scalar obținem: $m_1 g - T_1 = m_1 a$ (1)
Pentru corpul cu masa $m_2$. $\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}$ și scalar obținem: $T_2 - m_2 g = m_2 a$ (2). Pentru corpul cu masa $M$: $\vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{G} + \vec{F}_f = M\vec{a}$.
Pe $Ox$: $T_1 - T_2 - F_f = Ma$ și pe $Oy$: $N - Mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg \Rightarrow T_1 - T_2 - \mu Mg = Ma$ (3). Adunând cele trei relații obținem:

$$g(m_1 - \mu M - m_2) = (m_1 + m_2 + M)a \Rightarrow m_1 = \frac{(m_2 + M)a + (\mu M + m_2)g}{g - a} \text{=5,25 kg}$$

**b.** $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_1(g - a)}{m_2(g + a)}$=1,75

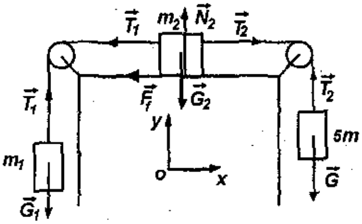
**c.** $g(m_1 - \mu M - m_2) = (m_1 + m_2 + M)a_1 \Rightarrow \mu = \dfrac{g(m_1 - m_2) - (m_1 + m_2 + M)a_1}{Mg}$=0,2




**59.a.** Dacă elevul pune un cubuleț pe taler corpul $m_1$ începe să coboare uniform, atunci pentru corpul cu masă $m_1$: $m_1g=T_1$, iar pentru corpul cu masă $m$: $mg=T_2$. Impunând condiția de mișcare uniformă corpului cu masă $m_2$: $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = 0$, scalar $T_1 - T_2 - \mu m_2 g = 0 \Rightarrow$

$m_1 - m - \mu m_2 = 0$ (1)

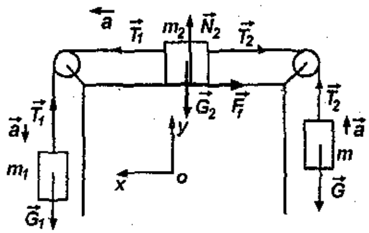
Dacă elevul pune cinci cubulețe pe taler corpul $m_1$ începe să urce uniform, astfel că pentru corpul cu masă $m_1$: $m_1 g = T_1$, iar pentru corpul cu masă $5m$: $5mg = T_2$. Din condiția de echilibru impusă corpului cu masă $m_2$: $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = 0$, scalar $T_2 - T_1 - \mu m_2 g = 0 \Rightarrow 5m - m_1 - \mu m_2 = 0$ (2)




Din (1) $m = m_1 - \mu m_2$, astfel că introducând în (2) $\Rightarrow \mu = 2m_1/(3m_2)$=0,25

**b.** Masa unui cubuleț este $m = m_1 - \mu m_2$ =1kg

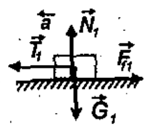
**c.** Sistemul se mişcă accelerat, asrfel încât corpul cu masa $m_1$ coboară, iar corpul cu masă $m_2$ urcă. Pentru corpul $m_1$: $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$, scalar $m_1 g - T_1 = m_1 a$, iar pentru corpul $m$: $\vec{G} + \vec{T}_2 = 3m\vec{a}$, scalar $T_2 - 3mg = 3ma$




Pentru corpul cu masa $m_2$: $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_f = m_2\vec{a}$, iar scalar obținem: pe Ox $T_1 - T_2 - \mu m_2 g = m_2 a$. Adunând cele trei relații obținem:

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2 - 3m}{m_1 + m_2 + 3m} \approx 0{,}345 \text{ m/s}^2$$

**60.a.** Sistemul de corpuri se deplasează accelerat cu accelerația $a$. Pentru corpul $m_1$. $\vec{G}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}$, iar scalar $T_1 - \mu_1 m_1 g = m_1 a$ (1), deoarece $F_{f1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$.

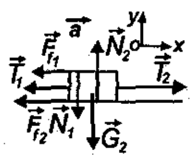



Pentru corpul $m_2$: $\vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f1} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}$,

scalar pe $Ox$ $T_2 - T_1 - F_{f1} - F_{f_2} = m_2 a$ şi

pe $Oy$: $N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \Rightarrow F_{f2} = \mu_2(m_1 + m_2)g \Rightarrow$

$T_2 - T_1 - \mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = m_2 a$ (2)




Pentru corpul $m_3$: $\vec{G}_3 + \vec{T}_2 = m_3\vec{a}$. Scalar $m_3 g - T_2 = m_3 a$ (3)

(1)+(2)+(3) $m_3 g - 2\mu_1 m_1 g - \mu_2(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2 + m_3)a \Rightarrow$

$$a = g\frac{m_3 - 2\mu_1 m_1 - \mu_2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 5{,}8 \text{ m/s}^2$$

**b.** $T_1 = m_1(a + \mu_1 g) = 15{,}6$ N şi $T_2 = m_3(g - a)$ =52 N

**c.** Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform în acelaşi sens, $a$=0$\Rightarrow$ $m_3 = 2\mu_1 m_1 + \mu_2(m_1 + m_2)$=1,3 kg

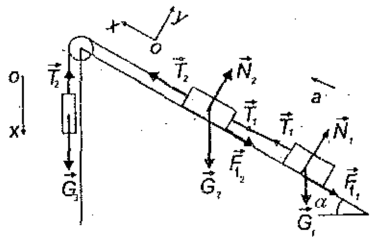
**61.a.** Studiem mişcarea corpului $m_3$.

$\vec{G}_3+\vec{T}_2=m_3\vec{a}$. Prin proiecţia pe axa de coordonate $Ox$: $m_3g-T_2=m_3a$ (1)

Studiem mişcarea corpului $m_2$. Vectorial: $\vec{T}_2+\vec{N}_2+\vec{T}_1+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$.

pe $Ox$: $T_2-m_2g\sin\alpha-F_{f_2}-T_1=m_2a$ şi

pe $Oy$: $N_2-m_2g\cos\alpha=0\Rightarrow$



$F_{f_2}=\mu N_2=\mu m_2g\cos\alpha\Rightarrow T_2-m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha-T_1=m_2a$ (2)

Studiem mişcarea corpului $m_1$. Vectorial: $\vec{T}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$

Proiectăm pe $Ox$: $T_1-m_1g\sin\alpha-F_{f_1}=m_1a$ şi pe $Oy$: $N_1-m_1g\cos\alpha=0$.

Cum $F_{f_1}=\mu N_1=\mu m_1g\cos\alpha\Rightarrow T_1-m_1g\sin\alpha-\mu m_1g\cos\alpha=m_1a$ (3)

Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow g[m_3-(m_1+m_2)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]=(m_1+m_2+m_3)a$

$$\Rightarrow a=g\frac{m_3-(m_1+m_2)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2+m_3}=2{,}63\ \mathrm{m/s^2}$$

**b.** $T_2=m_3(g-a)=36{,}85$ N

**c.** $T_1=m_1(g\sin\alpha+\mu g\cos\alpha+a)=12{,}28$ N

**62.a.** Studiem mişcarea corpului $m_1$. Vectorial: $\vec{T}_1+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=m_1\vec{a}$.

pe $Ox$: $m_1g\sin\alpha-T_1-F_{f_1}=m_1a$

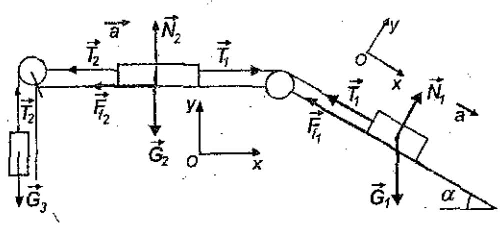
pe $Oy$: $N_1-m_1g\cos\alpha=0$

Cum $F_{f1}=\mu_1N_1=\mu_1m_1g\cos\alpha\Rightarrow$

$m_1g\sin\alpha-T_1-\mu_1m_1\cos\alpha=m_1a$ (1)

Studiem mişcarea corpului $m_2$.

$\vec{T}_2+\vec{N}_2+\vec{T}_1+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$



pe $Ox$: $T_1-T_2-F_{f_2}=m_2a$ şi pe $Oy$: $N_2-m_2g=0$

Cum $F_{f_2}=\mu_2N_2\Rightarrow T_1-T_2-\mu_2m_2g=m_2a$ (2)

Studiem mişcarea corpului $m_3$: $\vec{T}_2+\vec{G}_3=m_3\vec{a}$ şi scalar $T_2-m_3g=m_3a$ (3)

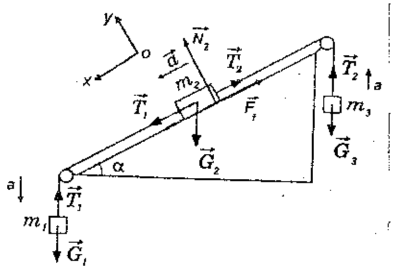
Din (1)+(2)+(3) $\Rightarrow g(m_1\sin\alpha-\mu_1m_1\cos\alpha-\mu_2m_2-m_3)=(m_1+m_2+m_3)a$

$$\Rightarrow a=g\frac{m_1\sin\alpha-\mu_1m_1\cos\alpha-\mu_2m_2-m_3}{m_1+m_2+m_3}=0{,}834\ \mathrm{m/s^2}$$

**b.** $T_1=m_1(g\sin\alpha-\mu_1g\cos\alpha-a)\approx16{,}5$ N şi $T_2=m_3(g+a)=10{,}83$ N

**63.a.** Studiem mişcarea corpului $m_1$. $\vec{T}_1+\vec{G}_1=m_1\vec{a}$ şi $m_1g-T_1=m_1a$ (1)

Studiem mişcarea corpului $m_2$: $\vec{T}_2+\vec{N}_2+\vec{T}_1+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=m_2\vec{a}$. Proiectăm pe $Ox$: $T_1 + m_2 g \sin\alpha - T_2 - F_{f_2} = m_2 a$ şi pe $Oy$:




$N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{f_2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \cos\alpha$

$T_1 + m_2 g \sin\alpha - T_2 - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a$ (2)

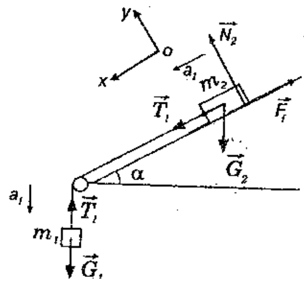
Pentru corpul $m_3$: $\vec{T}_2 + \vec{G}_3 = m_3\vec{a}$ şi scalar $T_2 - m_3 g = m_3 a$ (3). Din(1)+(2)+(3)$\Rightarrow$

$$g(m_1 + m_2\sin\alpha - \mu m_2\cos\alpha - m_3) = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$\Rightarrow a = g\frac{m_1 + m_2\sin\alpha - \mu m_2\cos\alpha - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \approx 3{,}32 \text{ m/s}^2$$

**b.** $T_1 = m_1(g - a) = 26{,}72$ N şi $T_2 = m_3(g + a) = 26{,}64$ N

**c.** Dacă se rupe firul care leagă corpul $m_3$ de corpul $m_2$ sistemului de corpuri se mişcă accelerat cu acceleraţia $a_1$. Pentru corpul $m_1$: $m_1 g - T_1 = m_1 a_1$ (1), iar pentru corpul $m_2$: $T_1 + m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a_1$ (2).

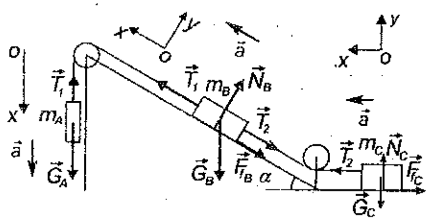



Din (1)+(2) obţinem:

$$m_1 g + m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha = (m_1 + m_2)a_1 \Rightarrow$$

$$a_1 = g\frac{m_1 + m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}76 \text{ m/s}^2$$

**64.a.** Deoarece sistemul de corpuri se mişcă uniform $a$=0. Pentru corpul $A$:




$\vec{G}_A + \vec{T}_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_A g$

Pentru corpul $C$: $\vec{G}_C + \vec{T}_2 + \vec{N}_C + \vec{F}_{fC} = 0$

$\Rightarrow T_2 = F_{fC} = \mu_C G_C = 10$ N

Pentru corpul $B$:

$\vec{G}_B + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{N}_B + \vec{F}_{fB} = 0$. Astfel pe $Ox$: $T_1 - T_2 - G_B\sin\alpha - F_{fB} = 0$ şi pe $Oy$: $N_B = G_B\cos\alpha$ şi $F_{fB} = \mu_B N_B \Rightarrow T_1 = \mu_C G_C + G_B(\sin\alpha + \mu_B\cos\alpha)$=40 N

**b.** $m_A = T_1 / g$ =4 kg

**c.** Sistemul se mişcă accelerat în acelaşi sens ca la punctul **a.**, astfel că pentru $m_A$: $\vec{G}_A + \vec{T}_1 = m_A\vec{a}$ şi scalar pe $Ox$: $m_A g - T_1 = m_A a$ (1)

Pentru $m_B$: $\vec{G}_B + \vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{N}_B + \vec{F}_{fB} = m_B\vec{a}$. Pe $Ox$: $T_1 - T_2 - G_B\sin\alpha - F_{fC} = m_B a$

Pe$Oy$: $N_B - G_B\cos\alpha = 0$ şi $F_{fB} = \mu_B N_B \Rightarrow T_1 - T_2 - G_B\sin\alpha - \mu_B G_B\cos\alpha = m_B a$ (2)

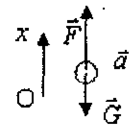
Pentru $m_C$: $\vec{G}_C + \vec{T}_2 + \vec{N}_C + \vec{F}_{fC} = m_C a \Rightarrow$ pe $Ox$: $T_2 - \mu_C G_C = m_C a$ (3)

Din (1)+(2)+(3)$\Rightarrow$ $G_A - G_B(\sin\alpha + \mu_B\cos\alpha) - \mu_C G_C = (m_A + m_B + m_C)a \Rightarrow$

$$G_A = \frac{[G_B(\sin\alpha + \mu_B\cos\alpha) + \mu_C G_C]g + (G_B + G_C)a}{g - a} = 70 \text{ N} \Rightarrow m_A = G_A/g = 7 \text{ kg}$$

## 2.4. Legea lui Hooke. Forţa elastică.

**1.a.** Din legea lui Hooke $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow F=SE\frac{\Delta\ell}{\ell_0}$. Cum forţa de întindere este greutatea corpului $F=mg\Rightarrow m=\frac{SE\Delta\ell}{g\ell_0}=\frac{\pi\cdot d^2E\Delta\ell}{4g\ell_0}\approx 1{,}5$ kg.




**b.** Efortul unitar din cablu este $\sigma=\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\approx 1{,}9\cdot 10^7$ N/m²

**c.** Impunem condiţia de mişcare accelerată a corpului: $\vec{F}+\vec{G}=m\vec{a}$. Pe *Ox*: $F-mg=ma\Rightarrow F=m(a+g)$.

Cum $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell_1}{\ell_0}\Rightarrow\Delta\ell_1=\frac{m(a+g)\ell_0}{S\cdot E}$. Cum $S=\frac{\pi\cdot d^2}{4}\Rightarrow$

$\Delta\ell_1=\frac{4m(a+g)\ell_0}{\pi\cdot d^2\cdot E}=\frac{(a+g)\Delta\ell}{g}=2{,}124\text{mm}$. Efortul unitar din cablu este:

$\sigma_1=\frac{F}{S}=\frac{4m(a+g)}{\pi\cdot d^2}=\frac{\sigma(a+g)}{g}=2{,}27\cdot 10^7$ N/m²

**2.a.** Aflăm masa cablului de susţinere $m_c=m_0\ell=48$ kg şi masa totală ridicată de cablu este: $m_t=m+m_c=1024$ kg. Conform principiului al doilea al dinamicii, scalar obţinem tensiunea maximă care apare în cablu la pornirea accelerată a liftului.: $T_{max}-m_tg=m_ta\Rightarrow T_{max}=m_t(a+g)=11{,}776$ kN

**b.** În momentul pornirii cablul este alungit atât de greutatea lui cât şi de a liftului suspendat. Datorită distribuţiei uniforme a masei cablului de-a lungul acestuia forţa de întindere datorită numai greutăţii acestuia este 1/2 din greutatea cablului. Astfel cablul poate fi considerat un punct material cu masa concentrată în centrul de greutate. Deoarece liftul şi cablul pornesc accelerat, atunci forţa maximă de întindere a firului se obţine când liftul se află la parter: $F-\left(\frac{m_c}{2}+m\right)g=\left(\frac{m_c}{2}+m\right)a\Rightarrow F=\left(\frac{m_c}{2}+m\right)(g+a)=11{,}5$ kN

Conform legii lui Hooke $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow\Delta\ell=\frac{F\cdot\ell_0}{S\cdot E}=5{,}75$ mm.

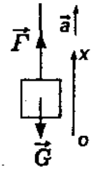
**c.** Deoarece efortul unitar nu depăşeşte pe cel maxim admisibil $\sigma_a$, atunci $S_{min}=F/\sigma_a=2$ cm²

**3.a.** Conform compunerii vectorilor, forţa rezultantă este $R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\Rightarrow$ $R=F\sqrt{2}=4$ N

**b.** Cum forţa de întindere a firului este *R*, din $\frac{R}{S}=E\frac{\Delta\ell}{\ell_0}\Rightarrow E=\frac{R\ell_0}{S\Delta\ell}=10^{11}$ N/m²

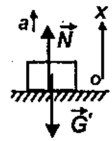
**c.** După tăierea firului, corpul se va mişca uniform accelerat cu acceleraţia $a=R/m$, astfel că $v=at=4$ m/s

**4.a.** Considerăm sistemul un corp cu masa $m_t$=$M$+$m$. Acest corp se va mişca accelerat, astfel că $\vec{F}+\vec{G}=(M+m)\vec{a}$, iar scalar $F-(M+m)g=(M+m)a \Rightarrow a=\dfrac{F}{M+m}-g$ =2 m/s². Impunem condiţia de mişcare manşonului: $\vec{N}+\vec{G}'=m\vec{a}$ şi scalar $N-mg=ma \Rightarrow N=m(a+g)$=36 N



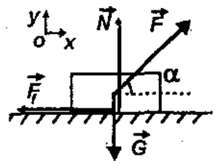

**b.** Cum $a=\Delta v/\Delta t \Rightarrow \Delta t=\Delta v/a$=3 s

**c.** Prin definiţie efortul unitar este $\sigma=\dfrac{F}{S}=\dfrac{4F}{\pi\cdot d^2}\approx 1{,}2\ 10^9$ N/m²




**5.a.** Impunem condiţia de mişcare rectilinie uniformă corpului, astfel $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Pe $Ox$: $F\cos\alpha-F_f=0$ iar pe $Oy$: $N+F\sin\alpha-mg=0 \Rightarrow F_f=\mu N=\mu(mg-F\sin\alpha)$

$$F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=0 \Rightarrow F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\text{=80 N}$$




**b.** Conform legii lui Hooke: $\dfrac{F}{S}=E\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0}$ şi $\varepsilon=\dfrac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow E=\dfrac{4F}{\pi\cdot d^2\varepsilon}$ =8 10⁹ N/m²

**c.** Reacţiune normală la suprafaţă este $N=\dfrac{mg\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$ =160 N

**6.a.** Deoarece distanţa dintre cele două ziduri este mai mică decât suma lungimilor cablurilor nedeformate, ambele cabluri sunt întinse, iar forţele de întindere sunt egale. Pe baza principiului acţiunii şi reacţiunii, tensiunile din cele două cabluri sunt egale, astfel că $F_1=F_2=F$. Conform legii lui Hooke

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} \Rightarrow \Delta\ell_1=\frac{F\ell_1}{SE}, \Delta\ell_2=\frac{F\ell_2}{SE} \Rightarrow \ell=\ell_1+\Delta\ell_1+\ell_2+\Delta\ell_2=\ell_1+\frac{F\ell_1}{SE}+\ell_2+\frac{F\ell_2}{SE}$$

$$\Rightarrow \frac{F(\ell_1+\ell_2)}{SE}=\ell-\ell_1-\ell_2 \Rightarrow F=\frac{SE(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}=270\text{ kN}$$

**b.** Alungirile absolute ale cablurilor sunt:

$$\Delta\ell_1=\frac{F\ell_1}{SE}=\frac{\ell_1(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}\text{=9,8 cm şi } \Delta\ell_2=\frac{F\ell_2}{SE}=\frac{\ell_2(\ell-\ell_1-\ell_2)}{\ell_1+\ell_2}\text{=10,2 cm}$$

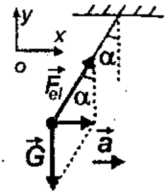
**c.** Eforturile unitare la care sunt supuse cablurile sunt egale cu $\sigma_1=\sigma_2=\sigma=\dfrac{F}{S}=2{,}7\cdot 10^9$ N/m²

**7.a.** Legea lui Hooke este valabilă atât timp cât alungirea este direct proporţională cu forţa de întindere. Observăm că o creştere a alungirii cu $\Delta\ell$=6 mm se obţine atunci când forţa de întindere creşte cu $\Delta F$=5 N. Acest lucru este valabil până ce resortul se alungeşte cu $\Delta\ell$=2,4 mm, deci până când forţa de întindere devine $F$=20 N. După ce forţa de întindere depăşeşte valoarea de 20 N, când aceasta creşte alungirea coardei creşte mai mult ca înainte, astfel nu se mai respectă legea $F=k\Delta\ell$. Domeniul de valori ale forțelor de întindere pentru care este valabilă legea lui Hooke este $F\in[0,20]$N.

**b.** Din $F=k\Delta\ell \Rightarrow k=F/\Delta\ell$=833,33 N/m, deoarece $F$=5 N şi $\Delta\ell$=6 mm

**c.** Studiem mişcarea uniformă a coardei. $F-F_f=0 \Rightarrow F=\mu N=\mu mg=k\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell=\mu mg/k$=6 mm

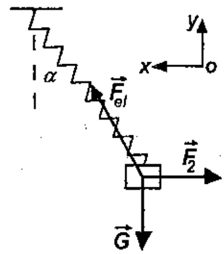
**8.a.** Din grafic se observă că atunci când $x$=8 cm, forța elastică corespunzătoare este $F$ =64 N. Atunci constanta elastică a resortului este $k=F/x$=800 N/m




**b.** Din condiția de echilibru impusă corpului $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, scalar obținem $G=F_{el} \Rightarrow mg=kx \Rightarrow x=mg/k$ =2,5 mm

**c.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului. Vectorial $\vec{F}_{el}+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm pe axa $Ox$: $F_{el}\sin\alpha=ma$ şi pe $Oy$: $F_{el}\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow F_{el}=m\sqrt{a^2+g^2}=kx_1 \Rightarrow x_1$=2,75 mm

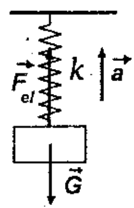
**9.a.** Impunem condiția de echilibru corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar $G=F_{el} \Rightarrow$ $mg=k\Delta l=k(\ell-\ell_0)=k\ell_0 f$, deoarece lungimea resortului devine $\ell=\ell_0(1+f)$. Dacă se acționează asupra bilei prinse de resort cu o forță verticală, atunci $\vec{G}+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_1=0$, iar scalar $G+F_1=F_{el}' \Rightarrow mg+F_1=k2\Delta\ell \Rightarrow mg+F_1=2mg \Rightarrow m=F_1/g$ $\Rightarrow m$=0,5 kg




**b.** Din $mg=k\ell_0 f \Rightarrow k=\dfrac{mg}{f\cdot\ell_0}=\dfrac{F_1}{f\cdot\ell_0}$=500 N/m

**c.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}+\vec{F}_2=0$. Scalar pe $Ox$. $F_{el}\sin\alpha-F_2=0$ şi pe $Oy$: $F_{el}.\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow F_{el}=\sqrt{F_2^2+(mg)^2}=kx \Rightarrow$

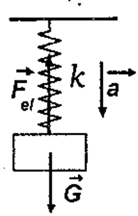
$$x=\frac{\sqrt{F_2^2+(mg)^2}}{k}=1{,}2 \text{ cm}$$




**10.a.** Studiem mişcarea accelerată a liftului în sus: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}$. Scalar $F_{el}-mg=ma \Rightarrow F_{el}=m(a+g)=10{,}8$ N

Deformația resortului este $x_1=\dfrac{F_{el}}{k}=5{,}4$ cm

**b.** Studiem coborârea accelerată a liftului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}$




Scalar $mg-F_{el}=ma \Rightarrow F_{el}=m(g-a)=9{,}2$ N, iar deformația resortului este $x_2=\dfrac{F_{el}}{k}=\dfrac{m(g-a)}{k}=4{,}6$ cm

**c.** În cazul mişcării uniforme a liftului, accelerația acestuia este zero. $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0 \Rightarrow F_{el}=G=mg=10$ N, iar $x_3=\dfrac{F_{el}}{k}=\dfrac{mg}{k}=5$ cm.

**11.a.** Studiem echilibrul corpului aflat pe cântar $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar $G=F_{el} \Rightarrow mg=kx \Rightarrow k=\frac{mg}{x}=1{,}5\cdot 10^4$ N/m

**b.** Dacă în locul copilului pe cântar se urcă adultul, atunci $G_a=F'_{el} \Rightarrow Mg=kx' \Rightarrow x'=\frac{Mg}{k}=\frac{M}{m}x=6$ cm

**c.** Pentru adultul aflat pe cântarul din liftul care coboară frânat $\vec{G}+\vec{F}_{el}=M\vec{a}$. Viteza liftului este orientată în jos, iar accelerația acestuia este orientată în sus, astfel că $F_{el}-Mg=Ma \Rightarrow F_{el}=M(a+g)$. Forța elastică determină acul cântarului să arate eronat mai mult, astfel că masa indicată este $M_1=F_{el}/g$=95,4 kg

**12.a.** În intervalul de timp $t\in(1,9)$s, $a$=0 m/s și prin urmare corpul de iluminat se mişcă rectiliniu şi uniform, astfel că $\vec{G}+\vec{F}_{el}=0 \Rightarrow G=F_{el} \Rightarrow mg=k\Delta\ell \Rightarrow k=mg/\Delta\ell$=500 N/m

**b.** În cea de-a treia etapă a mişcării accelerația corpului este $a_3=\Delta v/\Delta t \Rightarrow a_3$=-6 m/s². Studiem mişcarea corpului: $\vec{G}+\vec{F}_{el}=m\vec{a}_3$, iar scalar $mg-k\Delta\ell_3=m|a_3| \Rightarrow \Delta\ell_3=m(g-|a_3|)/k=4$ mm$\Rightarrow \ell=\ell_0+\Delta\ell_3$=20,4 cm

**c.** Calculăm distanța parcursă de ascensor cu ajutorul ariei cuprinse între curba vitezei şi axa timpului. Astfel $d$=54 m. Numărul de etaje ale clădirii este $N=\frac{d}{h_0}+1=19$, deoarece la numărul de nivele ale clădirii se obține adunând parterul la numărul de etaje parcurse de lift.

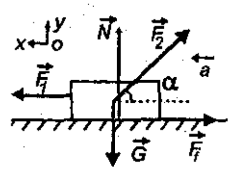
**13.a.** Din grafic se observă că $\Delta\ell=kt$, astfel că $\frac{\Delta\ell}{\Delta\ell_m}=\frac{t}{t_m} \Rightarrow \Delta\ell=\frac{\Delta\ell_m t}{t_m}$=3 cm, astfel că forța elastică este $F_{el}=k\Delta\ell$=6 N, deoarece la momentul $t_m$=5 s, deformația maximă a resortului este $\Delta\ell_m$=5 cm

**b.** Când $\Delta\ell$=2 cm, corpul se află în repaus, deoarece până când deformația resortului devine $\Delta\ell_m$=5 cm alungirea şi forța elastică cresc. Astfel vectorial $\vec{G}+\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$. Scalar $F_{el}-F_f=0 \Rightarrow F_f=k\Delta\ell$=4 N

**b.** Corpul începe să alunece când forța de frecare devine maximă şi egală cu forța elastică maximă. Astfel $F_{el}'=F_f' \Rightarrow k\Delta\ell_m=\mu mg \Rightarrow \mu=\frac{k\Delta\ell_m}{mg}$=0,2

**14.a.** Din $F_1=k\Delta\ell \Rightarrow k=F_1/\Delta\ell$=7 cm

**b.** Impunem condiția de echilibru corpului cu masă $m$. Vectorial $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=m\vec{a}$. Deoarece $F_1>F_2\cos\alpha$, corpul se va deplasa spre stânga accelerat. Proiectăm pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F_1-F_2\cos\alpha-F_f=ma$ şi pe $Oy$: $F_2\sin\alpha+N-mg=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu(mg-F_2\sin\alpha) \Rightarrow$

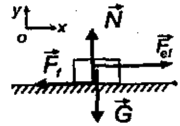


$F_1 - F_2(coa\alpha - \mu \sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a$=1,94 m/s²

**c.** Pentru ca acest corp să nu apese pe planul orizontal trebuie ca $N = 0 \Rightarrow$

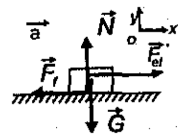
$F_2 = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$=20 N

**15.a.** Studiem mişcarea rectilinie uniformă a corpului: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F_{el} - F_f = 0 \Rightarrow F_{el} = F_f$ şi pe $Oy$:



$N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow kx_0 = \mu mg \Rightarrow \mu = \dfrac{kx_0}{mg}$ =0,1

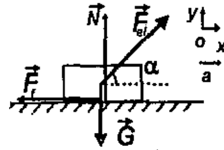
**b.** Studiem mişcarea accelerată a corpului când alungirea resortului este de trei ori mai mare decât în cazul mişcării uniforme. În acest caz: $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Pe $Ox$: $F_{el}' - F_f = ma$ şi pe $Oy$:



$N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow 3kx_0 - \mu mg = ma$

Cum $kx_0 = \mu mg \Rightarrow 2kx_0 = ma \Rightarrow a = \dfrac{2kx_0}{m} = 2$ m/s²

**c.** Reprezentăm forțele asupra corpului şi aplicăm principiul al doilea al dinamicii: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Proiectăm pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F_{el}\cos\alpha - F_f = ma$ şi pe $Oy$: $N + F_{el}\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow$



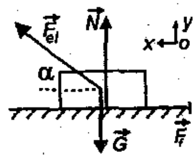
$N = mg - F_{el}\sin\alpha \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\sin\alpha) \Rightarrow$

$F_{el}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow x = \dfrac{m(a + \mu g)}{k(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$ =2 cm

**16.a.** Impunem condiția de echilibru corpului suspendat $m_1$: $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0 \Rightarrow$

$G_1 = F_{el} \Rightarrow m_1 g = kx \Rightarrow x = m_1 g / k$ =6 cm

**b.** Impunem condiția de echilibru cubului cu masa $m_2 = \rho V = \rho(\ell^3 - \ell_1^3)$=7,488 kg. Vectorial $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm pe axa $Oy$: $N + F_{el}\sin\alpha - m_2 g = 0 \Rightarrow$



$N = g(m_2 - m_1\sin\alpha) \approx 59{,}88$ N

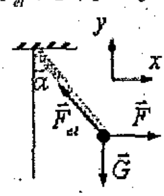
**c.** Pe $Ox$: $F_{el}\cos\alpha - F_f = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \dfrac{m_1\cos\alpha}{m_2 - m_1\sin\alpha} \approx 0{,}43$

**17.a.** Deoarece corpul se află în echilibru, rezultanta forțelor este nulă. Scalar $G = F_{el} \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k} = 5$ mm

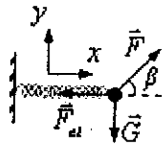
**b.** Studiem echilibrul corpului, după reprezentarea forțelor: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$.
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

pe $Ox$: $F - F_{el}\sin\alpha = 0$

pe $Oy$: $F_{el}\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow kx\cos\alpha = mg \Rightarrow x = \dfrac{mg}{k\cos\alpha} = 1$ cm



$F = kx\sin\alpha = m\cdot g\cdot tg\,\alpha = 0{,}865$ N

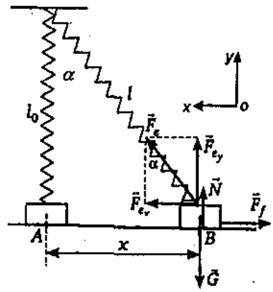



**c.** Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G} = 0$.

pe *Ox*: $F\cos\beta - F_{el} = 0 \Rightarrow F\cos\beta = kx$ şi

pe *Oy*: $F\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{mg}{F} = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{F\cos\beta}{k} = 7{,}06$ mm




**18.a.** Studiem mişcarea corpului. Deoarece corpul începe să se deplaseze, considerăm că în acel moment mişcarea corpului este uniformă, iar rezultanta forţelor este nulă: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe *Ox*: $F_{el}\sin\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F_{el}\sin\alpha$;

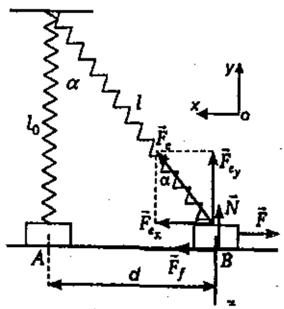
pe *Oy*: $F_{el}\cos\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_{el}\cos\alpha$.

$F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\cos\alpha) \Rightarrow \mu = \dfrac{F_{el}\sin\alpha}{mg - F_{el}\cos\alpha}$.

Dar $F_{el} = k\Delta l = k(\ell - \ell_0)$ şi cum

$\cos\alpha = \dfrac{\ell_0}{\ell} \Rightarrow \ell = \dfrac{\ell_0}{\cos\alpha} \Rightarrow F_{el} = \dfrac{k\ell_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha} \Rightarrow \mu = \dfrac{k\ell_0(1-\cos\alpha)tg\alpha}{mg - k\ell_0(1-\cos\alpha)} = 0.5$

**b.** $N = mg - F_{el}\cos\alpha = mg - k\ell_0(1-\cos\alpha) = 8{,}65$ N



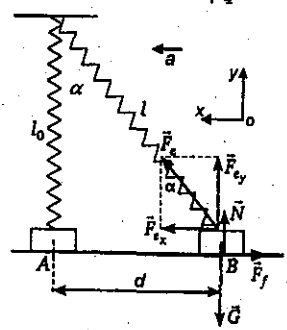

**c.** Când trece prin poziţia verticală $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$, deoarece forţa elastică este nulă pentru că resortul este nedeformat. Scalar $-\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu\cdot g \Rightarrow a = -5$ m/s²

**19.a.** $F_{el} = k(\ell - \ell_0) = k\left(\sqrt{\ell_0^2 + d^2} - \ell_0\right) = 7{,}8$ N

**b.** Impunem condiţia de echilibru corpului în poziţia *B*. Vectorial $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe *Ox*: $F_{el}\sin\alpha - F + F_f = 0$ şi pe *Oy*: $F_{el}\cos\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow F_f = \mu N = \mu(mg - F_{el}\cos\alpha)$

$\Rightarrow F = F_{el}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \mu mg \approx 5{,}056$N,

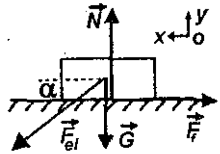
$\sin\alpha = \dfrac{d}{\sqrt{d^2 + \ell_0^2}} = 0{,}6$ şi $\cos\alpha = \dfrac{\ell_0}{\sqrt{d^2 + \ell_0^2}} = 0{,}8$




**c.** În momentul în care este eliberat în poziţia *B* corpul se va mişca accelerat, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Vectorial obţinem pe *Ox*:

$F_{el}\sin\alpha - F_f = ma \Rightarrow F_{el}\sin\alpha - \mu(mg - F_{el}\cos\alpha) = ma \Rightarrow$

$a = \dfrac{F_{el}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m} - \mu \cdot g \approx 4{,}304\ \text{m/s}^2$



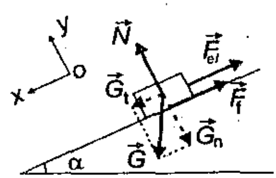

**20.a.** Considerăm că acest corp porneşte într-o mişcare uniformă şi prin urmare rezultanta forţelor care acţionează asupra corpului este nulă. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $F_{el}\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow kx\cos\alpha = F_f$ şi pe $Oy$: $N - mg - F_{el}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = mg + kx\sin\alpha$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow kx\cos\alpha = \mu mg + \mu kx\sin\alpha \Rightarrow x = \dfrac{\mu mg}{k(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = 3{,}525$ cm.

**b.** $F_{el}' = kx' = kx\sqrt{2} = 1{,}5$ N

**c.** Impunem condiţia de mişcare corpului $\vec{F}_{el}' + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$. Scalar pe $Ox$: $F_{el}'\cos\alpha - F_f = ma \Rightarrow kx\sqrt{2}\cos\alpha - F_f = ma$. Înlocuind $x$ şi forţa de frecare $F_f = \mu N = \mu(mg + kx\sqrt{2}\sin\alpha)$, obţinem $a = \mu g(\sqrt{2} - 1) = 0{,}82\ \text{m/s}^2$

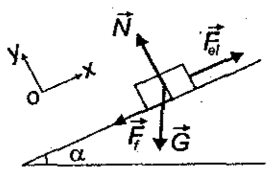
**21.a.** Deoarece corpul este în repaus, atunci $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} = 0$, iar scalar pe $Ox$: $mg\sin\alpha = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow \ell = \ell_0 + mg\sin\alpha / k = 90$ cm




**b.** În prezenţa forţelor de frecare $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$

Pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_f - k(\ell' - \ell) = 0$ şi pe $Oy$: $N = mg\cos\alpha \Rightarrow F_f = \mu mg\cos\alpha$.

Astfel $\ell' = \ell_0 + mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k = 84$ cm

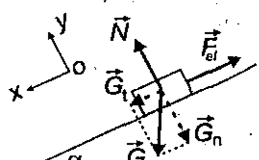



**c.** Impunem condiţia de mişcare rectilinie şi uniformă corpului, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0$. Pe $Ox$: $k\Delta\ell = mg\sin\alpha + F_f$. Cum $F_f = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow$

$\Delta\ell = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/k = 16$ cm

**22.a.** Din condiţia de echilibru impusă corpului suspendat obţinem: $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow mg = k(\ell - \ell_0) \Rightarrow k = mg/(\ell - \ell_0) = 100$ N/m

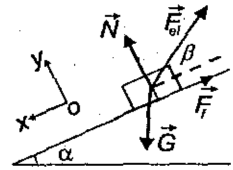
**b.** Resortul este comprimat, iar corpul se află în echilibru, astfel că $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{N} = 0$.




Forţa elastică este $F_{el} = k(\ell_0 - \ell_1) = 0{,}5$ N

**c.** Proiectăm pe $Ox$ relaţia vectorială:şi obţinem: $mg\sin\alpha - k(\ell_0 - \ell_1) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = F_{el}/mg = 0{,}5 \Rightarrow$ $\alpha = 30^0$

**23.a.** Impunem condiția de echilibru corpului. $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectăm pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - F_f = 0$ și pe $Oy$:



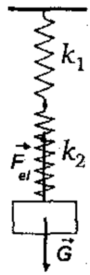

$N+F_{el}\sin\beta - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_f=\mu N \Rightarrow$

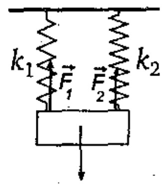
$F_f=\mu(mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta) \Rightarrow F_{el}=\dfrac{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{\cos\beta-\mu\sin\beta}\approx 2{,}3\text{N}$

**b.** Alungirea resortului este $\Delta\ell = F_{el}/k = 2{,}28$ cm

**c.** Forța de apăsare normală este $N = mg\cos\alpha - F_{el}\sin\beta \approx 0{,}126$ N

**24.a.** Legăm cele două resorturi în serie. Suspendăm de resortul de jos un corp cu masa $m$, astfel ca forța de întindere este $F=mg=k_2x_2$, deoarece corpul se află în echilibru. Cum resorturile sunt alungite cu $x_1$ și respectiv $x_2$, forțele de întindere în cele două resorturi sunt egale (conform principiului acțiunii și reacțiunii), astfel că $F=k_1x_1=k_2x_2 \Rightarrow x_1=\dfrac{F}{k_1}$ și $x_2=\dfrac{F}{k_2}$. Înlocuind cele două resorturi trebuie să obținem un singur resort cu constanta elastică $k_s$, astfel ca la aceeași forță de întindere alungirea finală să fie $x_s=x_1+x_2$.



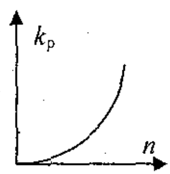

Cum $F=k_sx_s \Rightarrow x_s=\dfrac{F}{k_s} \Rightarrow \dfrac{F}{k_s}=\dfrac{F}{k_1}+\dfrac{F}{k_2} \Rightarrow k_s=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}=7{,}5\ \text{N/m}$

**b.** Legăm cele două resorturi în paralel și suspendăm un corp cu masa $m$, astfel că cele două resorturi se vor întinde identic deformându-se la fel cu $x$, astfel că $F=F_1+F_2=k_1x+k_2x=(k_1+k_2)x$.

Înlocuim cele două resorturi cu un singur resort, acesta se va alungi identic sub acțiunea aceleiași forțe de întindere $F$.

$F=k_px \Rightarrow k_p=k_1+k_2=40\ \text{N/m}$

**c.** Putem considera resortul inițial ca o legare în serie a "$n$" resorturi identice, cu constanta elastică $k$. Cum $\dfrac{1}{k_1}=\sum\dfrac{1}{k}=\dfrac{n}{k} \Rightarrow k=nk_1$. Legăm apoi cele "$n$" resorturi identice în paralel și se va obține un resort cu constanta elastică: $k_p=\sum k = nk = n^2k_1$. Reprezentarea grafică a lui $k_p$ în funcție de "$n$" este o parabolă.




**25.a.** Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta face $n_1$ pași din momentul în care inelușul începe să opună rezistență. Astfel $\vec{F}_{el}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe $Ox$: $F_{el}-F_f=0 \Rightarrow kn_1p=\mu mg\ (1)$, unde $p$ reprezintă lungimea unui pas, iar $m$ este masa gândăcelului.

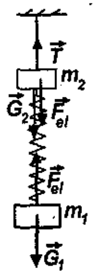
Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta trage din nou dar având și un bob de orez în brațe; $\vec{F}_{el}'+\vec{G}'+\vec{N}'+\vec{F}_f'=0$. Scalar pe *Ox*: $F_{el}'-F_f'=0 \Rightarrow kn_2p=\mu(m+m_0)g$ (2). Din împărțirea relației (2) la (1) obținem;

$m=\dfrac{n_1m_0}{n_2-n_1}$ =0,125 g

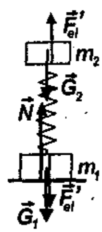
**b.** Impunem condiția de echilibru gândăcelului când acesta atârnă la marginea mesei suspendat de cui prin intermediul inelușului. Astfel $\vec{F}_{el0}+\vec{G}=0$, iar scalar $mg=kn_0p$ (3). Din (1) și (3) obținem; $\mu=n_1/n_0$=0,25

**c.** Dacă inelușul se taie și ramâne fixat de cui atunci cele două jumătăți ale inelușului vor fi legate în serie. Constanta elastică a firului este $k'$, astfel că $\dfrac{1}{k'}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{2}{k_1} \Rightarrow k'=\dfrac{k_1}{2}$, unde $k_1$ reprezintă constanta elastică a unei jumătăți de ineluș. Cum inițial cele două jumătăți de ineluș erau legate în paralel, atunci $k=k_1+k_1=2k_1 \Rightarrow k_1=k/2 \Rightarrow k'=k/4$.

Impunem condiția de echilibru gândăcelului când începe să alunece. $F_{3/3}-F_f=0 \Rightarrow k'n_3p=\mu mg \Rightarrow kn_3p/4=\mu mg$ (4). Din (1) și (4) obținem; $n_3=4n_0$=40 pași



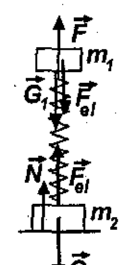

**26.a.** Considerăm cazul în care corpul $m_2$ este suspendat și de el este prins corpul $m_1$. În acest caz resortul este alungit. Impunem condiția de echilibru corpului cu masa $m_1$. $\vec{G}_1+\vec{F}_{el}=0$. Scalar $m_1g=k(\ell_1-\ell_0)$ (1). Din condiția de echilibru pentru corpul $m_2$ $\vec{T}+\vec{F}_{el}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T=m_2g+k(\ell_1-\ell_0)=(m_1+m_2)g$ =4 N




**b.** Considerăm cazul în care corpul cu masa $m_1$ este așezat pe masă iar corpul $m_2$ comprimă resortul. Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa $m_2$ $\vec{F}_{el}'+\vec{G}_2=0$. Scalar $m_2g=k(\ell_0-\ell_2)$ (2). Împărțind relația (1) la (2) obținem:

$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\ell_1-\ell_0}{\ell_0-\ell_2} \Rightarrow \ell_0=\dfrac{m_1\ell_2+m_2\ell_1}{m_1+m_2}$ =35 cm

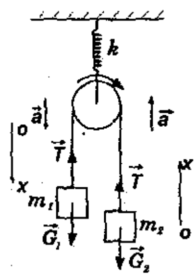
**c.** Din $m_1g=k(\ell_1-\ell_0)$ și $\ell_0=\dfrac{m_1\ell_2+m_2\ell_1}{m_1+m_2}$ obținem valoarea constantei elastice $k=\dfrac{(m_1+m_2)g}{\ell_1-\ell_2}$ =20 N/m




**27.a.** Impunem condiția de echilibru corpului cu masa $m_1$: $\vec{G}_1+\vec{F}_{el}=0$ și scalar $m_1g=kx \Rightarrow k=m_1g/x$ =250 N/m

**b.** Pentru ca $m_2$ să se desprindă de suprafață trebuie ca forța de apăsare normală să fie nulă $N$=0. Acest lucru se poate întâmpla numai dacă resortul este alungit. Astfel pentru corpul cu masa $m_2$ $\vec{F}_{el}+\vec{G}_2=0 \Rightarrow kx'=m_2g \Rightarrow x'=m_2g/k$. Corpul cu masa $m_1$ se deplasează pe verticală pe distanța $d = x + x' = (m_1 + m_2)g/k$. Deoarece corpul cu masă $m_1$ se deplasează uniform intervalul de timp după care corpul $m_2$ se desprinde de suprafață este $\Delta t = \frac{(m_1 + m_2)g}{vk} = 15$ s

**c.** La momentul $t$=10 s sistemul de corpuri se află aşezat pe suprafață. Deplasarea resortului este $d_1 = vt$=2 cm. Resortul se deplasează în sus pe distanța $x$ pentru a se decomprima, iar apoi se alungeşte cu $x_1 = d_1 - x$=1 cm. Impunem condiția de echilibru corpului $m_1$, astfel că $\vec{F} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{el} = 0$. Scalar $F = m_1 g + kx_1$ =5 N



**28.a.** Studiem mişcarea fiecărui corp. Deoarece $m_1 > m_2$, $m_1$ coboară iar $m_2$ urcă cu aceeaşi accelerație.

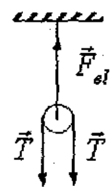
Pentru $m_1$ pe axa $Ox$ obținem: $m_1 g - T = m_1 a$ (1)

Pentru $m_2$ pe axa $Ox$ obținem : $T - m_2 g = m_2 a$ (2)

Din (1)+(2) obținem $g(m_1 - m_2) = a(m_1 + m_2) \Rightarrow$

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m/s}^2$$

**b.** Tensiunea din fir este $T = m_2(a+g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 1{,}5$ N

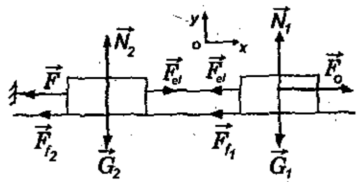


**c.** Impunem condiția de echilibru scripetelui.

$$\vec{F}_{el} + \vec{T} + \vec{T} = 0 \Rightarrow F_{el} = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

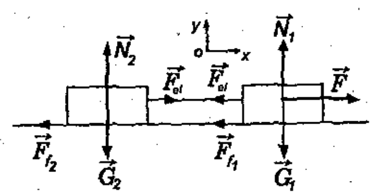
Cum $F_{el} = kx \Rightarrow x = \frac{4m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)k} = 6$ cm

**29.a.** Studiem echilibrul corpurilor. Pentru corpul 1 $\vec{F}_o + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe $Ox$:



$F_0 - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1). Pentru corpul 2: $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe $Ox$: $F_{el} - F - \mu m_2 g = 0$ (2). Din (1)+(2) obținem: $F_o = F + \mu(m_1 + m_2)g$ =4,4 N

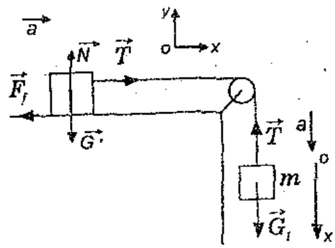
**b.** Studiem mişcarea rectilie uniformă a sistemului de corpuri. Pentru corpul 1: $\vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$, iar scalar pe $Ox$:



$F - F_{el} - \mu m_1 g = 0$ (1). Pentru corpul 2: $\vec{F}_{el} + \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$, iar scalar pe $Ox$: $F_{el} - \mu m_2 g = 0$ (2). Din (1)+(2) obținem: $F = \mu(m_1 + m_2)g$ =2,4 N

**c.** Din $F_{el} = F_{f_2} = \mu m_2 g$ şi $F_{el} = kx \Rightarrow \mu m_2 g = kx \Rightarrow x = \frac{\mu m_2 g}{k} = 1{,}6$ cm

**30.a.** Studiem mişcarea corpului cu masa $m$: $\vec{G}+\vec{T}=m\cdot\vec{a}$, iar scalar: $mg-T=ma$ (1)



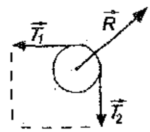
Studiem mişcarea corpului cu masa $M: \vec{T}+\vec{G}'+\vec{N}+\vec{F}_f=M\vec{a}$. Proiectăm pe $Ox$: $T-F_f=Ma$, şi pe $Oy$: $N-Mg=0$.

$F_f=\mu N=\mu Mg \Rightarrow T-\mu Mg=Ma$ (2)

Din (1)+(2)$\Rightarrow g(m-\mu M)=(m+M)a\Rightarrow$

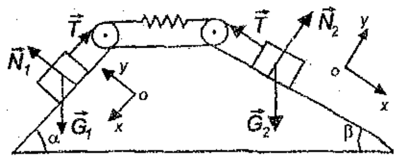
$a=\dfrac{g(m-\mu M)}{m+M}$)=6 m/s²

**b.** $T=m(g-a)=\dfrac{mM(1+\mu)g}{M+m}=16$ N. Deoarece resortul este întins chiar de tensiunea din fir, $T=kx\Rightarrow x=\dfrac{mM(1+\mu)g}{(M+m)k}=3{,}2$ cm.

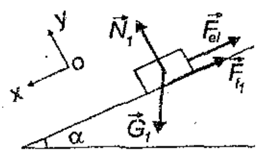


**c.** Impunem condiţia de echilibru scripetelui. Vectorial $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, iar scalar $R=T\sqrt{2}\approx 22{,}56$ N, deoarece $T_1=T_2=T$

**31.a.** Studiem echilibrul sistemului de corpuri. Pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar pe axa $Ox$: $m_1g\sin\alpha=F_{el}$ (1). Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{N}_2+\vec{F}_{el}=0$, iar scalar pe axa $Ox$: $m_2g\sin\beta=F_{el}$ (2). Din (1) şi (2) obţinem: $m_2=\dfrac{m_1\sin\alpha}{\sin\beta}$=1,41 kg

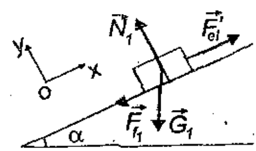


**b.** Cum $m_1g\sin\alpha=F_{el}=kx\Rightarrow x=m_1g\sin\alpha/k$ lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x$=87,05 cm

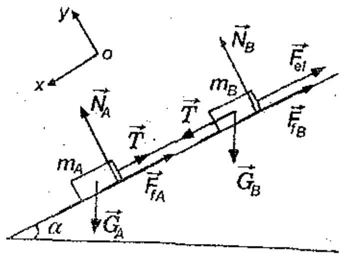


**c.** Studiem situaţia în care sistemul de corpuri are tendinţa ca $m_1$ să coboare şi $m_2$ să urce. Din condiţia de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_{f1}=0$ pe $Ox$: $m_1g\sin\alpha-\mu m_1g\cos\alpha=F_{el}'=kx'\Rightarrow x'=m_1g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)/k\Rightarrow x'$=5,64 cm iar lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x'$=85,64 cm

Studiem situaţia în care sistemul de corpuri are tendinţa ca $m_2$ să coboare şi $m_1$ să urce. Din condiţia de echilibru pentru corpul 1 $\vec{G}_1+\vec{N}_1+\vec{F}_{el}'+\vec{F}_{f1}=0$ iar scalar pe $Ox$: $m_1g\sin\alpha+\mu m_1g\cos\alpha=F_{el}'=kx'\Rightarrow$ $x'=m_1g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)/k$=8,46 cm, iar lungimea finală a resortului este $\ell=\ell_0+x'$=88,46 cm.

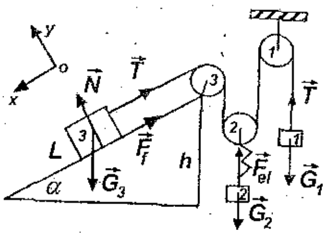


**32.a.** Studiem echilibrul fiecărui corp. Pentru corpul $m_A$ $\vec{G}_A + \vec{N}_A + \vec{F}_{fA} + \vec{T} = 0$. Prin proiecția pe axele de coordonate obținem pe *Ox*: $m_A g \sin\alpha - F_{fA} - T = 0$, iar pe *Oy*: $N_A - m_A g\cos\alpha = 0$. Cum $F_{fA} = \mu N_A \Rightarrow$
$m_A g\sin\alpha - \mu \cdot m_A g\cos\alpha - T = 0 \Rightarrow$
$T = m_A g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$=7 N




**b.** Pentru corpul $m_B$ $\vec{G}_B + \vec{N}_B + \vec{F}_{fB} + \vec{T} + \vec{F}_{el} = 0$. Prin proiecția pe axele de coordonate obținem pe *Ox*: $m_B g\sin\alpha - F_{fB} + T - F_{el} = 0$, iar pe *Oy*: $N_B - m_B g\cos\alpha = 0$. Cum $F_{fB} = \mu N_B \Rightarrow m_B g\sin\alpha - \mu m_B\cos\alpha + T - F_{el} = 0$ (2)
$F_{el} = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = kx \Rightarrow x = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k$=7cm
**c.** Dacă se schimbă între ele pozițiile celor două corpuri alungirea resortului nu se modifică, deoarece pe baza calculului de la punctul **b.** alungirea resortului este $x = (m_A + m_B)g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/k$, independentă de poziția corpurilor pe plan

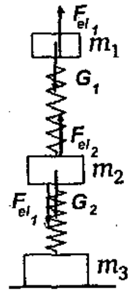
**33.a.** Valorile minime ale maselor $m_1$ și $m_2$ pentru care sistemul se află în echilibru se obțin pentru situația în care corpul cu masa $m_3$ are tendința să coboare. Din condiția de echilibru pentru $m_3$ $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, scalar pe axa *Ox*: $m_3 g\sin\alpha - T - F_f = 0$, unde sinα=*h*/*L*=0,5 Din condiția de echilibru pentru $m_1$: $T=m_1g \Rightarrow m_1=m_3\sin\alpha - F_f/g$=1,3 kg, iar din condiția de echilibru pentru $m_2$: $m_2g=F_{el}$. Cum scripetele mobil 2 este în echilibru $F_{el}=2T \Rightarrow m_2=2(m_3\sin\alpha - F_f/g)$=2,6 kg




**b.** $F_{el} = 2T = kx \Rightarrow 2(m_3 g\sin\alpha - F_f) = k\Delta\ell \Rightarrow k = 2(m_3 g\sin\alpha - F_f)/\Delta\ell$=2000 N/m
**c.** Deorece corpul $m_3$ urcă uniform pe plan forța de frecare are sens contrar astfel că vectorial $\vec{G}_3 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe *Ox*: $T - F_f - m_3 g\sin\alpha = 0$
Din condiția de echilibru pentru corpul $m_1$ $m_1 g = T \Rightarrow m_1 = m_3\sin\alpha + F_f/g$ =1,7 kg
Din condiția de echilibru pentru corpul $m_2$ $m_2 g = F_{el} = 2T = 2(m_3 g\sin\alpha + F_f) \Rightarrow m_2 = 2(m_3 g\sin\alpha + F_f)/g$ =3,4 kg

**34.a.** Studiem echilibrul corpului 1 $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} = 0$, iar scalar $m_1 g = k_1\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{m_1 g}{k_1}$ (1)

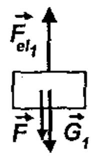
Studiem echilibrul corpului 2. Asupra corpului 2, forța elastică exercitată de primul resort este orientată în jos conform principiului acțiunii şi reacțiunii, deoarece corpul 2 îl împinge pe primul corp prin intermediul resortului 1 în sus: $\vec{G}_2+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar



$$m_2g+k_1\Delta\ell_1=k_2\Delta\ell_2 \Rightarrow \Delta\ell_2=\frac{(m_1+m_2)g}{k_2} \quad (2)$$

Prin împărțirea relației (1) la (2) obținem: $\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot\frac{k_2}{k_1}=1{,}2.$

**b.** Studiem echilibrul corpului 1 după aplicarea forței $F$. Vectorial: $\vec{F}+\vec{G}_1+\vec{F}_{el1}=0$, iar scalar $k_1\Delta\ell_1=F+m_1g \Rightarrow \Delta\ell_1=\frac{F+m_1g}{k_1}$.

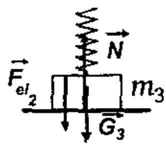


Studiem echilibrul corpului 2. Vectorial: $\vec{G}_2+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0$,

iar scalar $m_2g+k_1\Delta l_1=k_2\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2=\frac{(m_1+m_2)g+F}{k_2}$.

$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}=\frac{F+m_1g}{F+(m_1+m_2)g}\cdot\frac{k_2}{k_1}$. Cum $\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}=2 \Rightarrow F=4$ N.

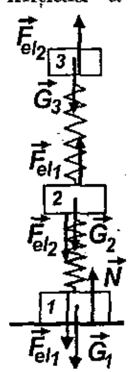
**c.** Studiem echilibrul corpului 3. Vectorial:



$\vec{N}+\vec{F}_{el2}+\vec{G}_3=0$, iar scalar $N=m_3g+k_2\Delta l_2=m_3g+m_2g+k_1\Delta l_1$

$\Rightarrow N=(m_1+m_2+m_3)g+F=14$ N.

**35.a.** Studiem echilibrul corpurilor. Notăm cu $\ell_0$ lungimea inițială a resorturilor. Resorturile sunt comprimate, cel inferior 1 este mai comprimat decât cel superior 2. Pentru corpul 3 $\vec{G}_3+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar $mg=k(\ell_0-\ell_2)$ (1)



Pentru corpul 2 $\vec{G}_2+\vec{F}_{el1}+\vec{F}_{el2}=0$, iar scalar $mg+F_{el2}+F_{el1}=0$

$mg+k(\ell_0-\ell_2)=k(\ell_0-\ell_1)$ (2). Din (1) şi (2) obținem $2mg=k(\ell_0-\ell_1)$ (3). Împărțind relația (3) la relația (1 ) obținem

$$2=\frac{\ell_0-\ell_1}{\ell_0-\ell_2} \Rightarrow \ell_0=2\ell_2-\ell_1=24 \text{ cm}$$

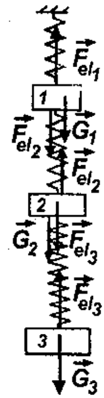
**b.** Constanta elastică a unui resort este $k=\frac{mg}{\ell_2-\ell_1}$ =500 N/m

**c.** Din condiția de echilibru impusă corpului 1 aşezat pe masă, $\vec{N}+\vec{F}_{el1}+\vec{G}_1=0$, scalar obținem $N=mg+k(\ell_0-\ell_1)$. Utilizând relația 3 obținem $N=3mg$ =90 N

**36.a.** Resorturile se alungesc cu $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ şi $\Delta\ell_3$. Alungirea totală este $\Delta\ell=\Delta\ell_1+\Delta\ell_2+\Delta\ell_3$. Studiem echilibru corpurilor 1, 2 şi 3. Pentru corpul 3 $\vec{G}_3+\vec{F}_{el3}=0$, iar scalar $mg=k\Delta\ell_3$ (1). Pentru corpul 2

$\vec{G}_2 + \vec{F}_{el3} + \vec{F}_{el2} = 0 \Rightarrow mg + k\Delta\ell_3 = k\Delta\ell_2 \Rightarrow k\Delta\ell_2 = 2mg$ (2), iar pentru corpul 1 $\vec{G}_1 + \vec{F}_{el1} + \vec{F}_{el2} = 0 \Rightarrow mg + k\Delta\ell_2 = k\Delta\ell_1 \Rightarrow k\Delta\ell_1 = 3mg$ (3)

Din (1), (2) şi (3) obţinem $\Delta\ell = 6mg/k \Rightarrow \Delta\ell_3 = \Delta\ell/6$ =2 cm




**b.** $F_{el2} = k\Delta\ell_2 = 2mg = k\Delta\ell/3$ =8 N

**c.** Dacă două resorturi se leagă în paralel, se formează un nou resort cu constanta elastică $k_p = 2k$. Acest nou resort se leagă în serie cu cel de-al treilea resort, se formează un resort cu constanta echivalentă $k_e$, astfel că $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_p} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_e = \frac{kk_p}{k+k_p} \Rightarrow$

$k_e$=2$k$/3=133,33 N/m²

## 2.5 Legea atracţiei universale

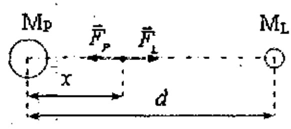
**1.** Conform legii atracţiei universale: $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2} \approx 4{,}27 \cdot 10^{-7}$ kg.

**2.** Aplicăm legea atracţiei universale $F = k\frac{mM}{R_{rs}^2} = 3{,}557 \cdot 10^{22}$ N.

**3.** Pe baza legii atracţiei universale $F = k\frac{m_l m_p}{r^2} = \frac{1840k \cdot m_l^2}{r^2} = 3{,}618 \cdot 10^{-49}$ N.

**4.** Conform datelor problemei $M = \frac{M_P}{9}$, iar $R = \frac{R_P}{4}$. Forţa de atracţie exercitată de planetă asupra cosmonautului este $F = k\frac{Mm}{R^2} = 16\frac{kM_P m}{9R_P^2} = \frac{16}{9} \cdot G$, unde $G$ reprezintă greutatea corpului pe Pământ. Deoarece $G$ este forţa cu care Pământul atrage corpul aflat pe suprafaţa sa, atunci $G = k\frac{M_P m}{R_P{}^2} = mg_0 \Rightarrow F = \frac{16}{9}mg_0 \Rightarrow$

$F$=1393,77 N.




**5.** Deoarece cosmonautul este în imponderabilitate înseamnă că rezultanta forţelor care se exercită asupra acestuia este nulă. Asupra cosmonautului se exercită forţe de atracţie atât de către Pământ, cât şi de către Lună, astfel că cele două forţe sunt opuse: $\vec{F}_P + \vec{F}_L = 0 \Rightarrow F_P = F_L \Rightarrow k\frac{mM_P}{x^2} = k\frac{mM_L}{(d-x)^2}$, unde cu $m$ am notat masa corpului. Astfel $81M_L(d-x)^2 = M_L x^2 \Rightarrow 9(d-x) = x \Rightarrow$

$x$=9d/10=3,42·10⁵ km

**6.** Prin definiție accelerația gravitațională este $g = \frac{F}{m} = k\frac{M_P}{r^2} = k\frac{M_P}{(R_P + h)^2}$.

La suprafața Pământului $h = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{kM_P}{R_P^2}$. Cum $g = \frac{g_0}{2} \Rightarrow k\frac{M_P}{(R_P + h)^2} = \frac{kM_P}{2R_P^2}$

$\Rightarrow h = R_P(\sqrt{2} - 1) = 2611$ km

**7.** Pe baza definiției accelerației gravitaționale: $g_L = k\frac{M_L}{R_L^2} = \frac{kM_P}{81R_L^2}$.

Cum $d_L = \frac{3}{11}d_P \Rightarrow R_L = \frac{3}{11}R_P \Rightarrow g_L = \frac{121kM_P}{729R_P^2} = \frac{121}{729}g_0 \approx 1{,}63$ m/s²

**8.** Conform definiției: $g_1 = \frac{kM_1}{R_1^2}$ și $g_2 = \frac{kM_2}{R_2^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{1}{2}$

**9.** Prin definiție densitatea unui corp este $\rho = \frac{m}{V}$. Conform definiției: $g_0 = k\frac{m}{R^2} \Rightarrow m = \frac{g_0R^2}{k}$. Considerând Pământul o sferă, volumul acestuia este $V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3g_0}{4\pi kR} = 5483$ kg/m³

**10.** Conform problemei precedente $\rho = \frac{3g}{4\pi kR}$ la suprafața planetei, iar pe Pământ $\rho_P = \frac{3g_0}{4\pi kR_P} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_P} = \frac{g}{g_0}\cdot\frac{R_P}{R}$. Cum $g = 2{,}5\cdot g_0$ și $R = 3R_P \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_P} = 0{,}833$

**11.** Dacă un om sare pe verticală cu viteza inițială $v_0$, mişcarea corpului este uniform frânată cu accelerația gravitațională a planetei. Înălțimea maximă la care se ridică corpul se obține din ecuația lui Galilei: $v^2 = {v_0}^2 - 2gh$ şi din $v$=0 $\Rightarrow h = \frac{{v_0}^2}{2g}$. Pe planetă $h' = \frac{{v_0}^2}{2g'} = \frac{15{v_0}^2}{2g} = 15h \Rightarrow \frac{h'}{h} = 15 \Rightarrow$ detenta omului pe planetă în condițiile în care viteza inițială este tot $v_0$, este de 15 ori mai mare decât detenta aceluiaşi om pe Pământ.

**12.** În timpul mişcării Pământului în jurul Soarelui, forța de atracție exercitată de Soare joacă rol de forță centripetă, astfel că $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_SM_P}{R^2} = \frac{M_Pv^2}{R} \Rightarrow M_S = \frac{v^2R}{k} = 2\cdot10^{30}$ kg

**13.** Nava cosmică execută o mişcare de rotație în jurul Pământului, deoarece forța de atracție exercitată de Pământ joacă rol de forță centripetă.

$F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{M_P\cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k\cdot M_P}{r}} = \sqrt{\frac{k\cdot M_P}{2R_P}}$, deoarece $r$ =2 $R_p$.

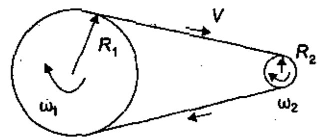
Cum $g_0 = \dfrac{kM_P}{R_P^{\,2}} \Rightarrow kM_P = g_0 R_P^{\,2} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{g_0 R_P}{2}} = 5{,}6$ km/s

**14.** Satelitul geostaţionar execută o mişcare de rotaţie cu perioada de rotaţie egală cu cea proprie a Pământului. Forţa de atracţie exercitată de Pământ joacă rol de forţă centripetă.

Astfel $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\dfrac{M_P \cdot m}{r^2} = m\omega^2 r$. Cum $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ iar

$$g_0 = \frac{kM_P}{R_P^{\,2}} \Rightarrow kM_P = g_0 R_P^{\,2} \Rightarrow \frac{g_0 R_P^{\,2}}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow r = \left(\frac{g_0 R_P^{\,2} T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42222 \text{ km}$$

## 2.6 Mişcarea circular uniformă




**1.** Deoarece lanţul leagă cele două roţi, roata mare aflată în mişcare de rotaţie va antrena şi roata mică tot în mişcare de rotaţie. Viteza liniară a lanţului este aceeaşi, astfel că: $v_1=v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1=\omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_1=\omega_2 R_2/R_1=5$ rad/s.

**2.** Pe baza relaţiei dintre perioada de rotaţie $T$ şi viteza unghiulară $\omega$, obţinem: $\omega=2\pi/T=72{,}68\cdot10^{-6}$ rad/s. Pe baza relaţiei dintre viteza liniară $v$ şi viteza unghiulară $\omega$: $v=\omega R=2\pi R/T=465{,}18$ m/s.

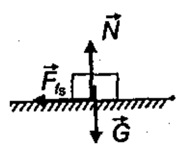
**3.** Pe baza relaţiei dintre viteza liniară $v$ şi viteza unghiulară $\omega$: $v=\omega R \Rightarrow \omega=v/R=0{,}8$ rad/s. La efectuarea unui cerc întreg, distanţa parcursă de avion este $s=2\pi R=6{,}28$ km.

**4.** Aflăm viteza unghiulară cu care se roteşte polizorul: $\omega=v/R$. Cum relaţia dintre viteza unghiulară şi frecvenţă este $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{v}{2\pi R}=5$ rot/s.

**5.** Aflăm perioada de rotaţie împărţind timpul $t$ la numărul de rotaţii $N$ astfel că: $T=t/N=0{,}5$ s. Cum $T=2\pi/\omega \Rightarrow \omega=2\pi/T=12{,}56$ rad/s.

**6.** Minutarul efectuează o rotaţie completă într-un interval de timp $T$=1h=60min. Dacă într-o perioadă $T$, vârful minutarului descrie un cerc cu lungimea $L=2\pi\ell$, atunci în intervalul de timp $\Delta t$, vârful minutarului descrie un arc de cerc cu lungimea: $s=(2\pi\ell\cdot\Delta t)/T=1{,}046$ mm.

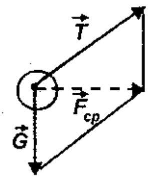
**7.** Deoarece avionul se deplasează spre vest şi Soarele rămâne staţionar faţă de avion, înseamnă că avionul se roteşte odată cu Pământul cu viteza unghiulară a acestuia $\omega=2\pi/T$, unde $T$ este perioada proprie de rotaţie a Pământului. Viteza avionului se calculează cu ajutorul relaţiei: $v=\omega\cdot R$, unde $R=R_P+h$, reprezintă distanţa de la centrul Pământului până la punctul unde se află avionul, astfel că $v=\dfrac{2\pi}{T}(R_P+h)=465{,}18$ m/s.




**8.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra maşinii şi ţinem cont că rezultanta forţelor joacă rol de forţă centripetă: $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_{fs}=\vec{F}_{cp}$. Cum $\vec{N}+\vec{G}=0 \Rightarrow F_{fs}=F_{cp}$, adică forţa de frecare statică joacă rol de forță centripetă, astfel că: $F_{fs} = \frac{mv^2}{R}$. Condiția ca mașina să nu derapeze este ca forța de frecare statică să fie mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare:

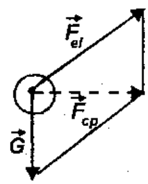
$$F_{fs} \le F_{fl} \Rightarrow \frac{mv^2}{R} \le \mu mg \Rightarrow v \le \sqrt{\mu g R} = 15{,}81\text{m/s} \approx 56{,}92 \text{ km/h}.$$

**9.** Asupra motociclistului acționează normala și greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, deoarece motociclistul execută un viraj. Vectorial: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$




Din fig. R2.6.3: $tg\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg} = 0{,}578 \Rightarrow \alpha = 30°$.

**10.** Dacă corpul este suspendat în vagon prin intermediul unui dinamometru, corpul se va roti odată cu vagonul descriind un cerc în plan orizontal, astfel că rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă: $\vec{F}_{el} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. Greutatea aparentă este forța indicată de dinamometru, adică forța elastică. $F_{el} = G_a = \sqrt{F_{cp}^2 + G^2} = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (mg)^2} = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}$




Calculăm cu cât la sută este mai mare greutatea aparentă decât greutatea reală: $\frac{G_a - G}{G} = \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2R^2}} - 1 = 96{,}6 \cdot 10^{-3} \approx 0{,}1 = 10\%$

**11.** Negjijăm căderea pe verticală a glontelui. Pe orizontală între cele două discuri acesta are o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $v$, astfel că distanța parcursă este $d = vt$, unde $t$ este timpul de mișcare al glontelui între cele două discuri. După ce glontele produce primul orificiu prin pătrunderea prin primul disc, până la pătrunderea prin discul al doilea, discul al doilea se rotește cu unghiul $\alpha$, astfel că $\alpha = \omega t = 2\pi nt$. Cum $t = d/v \Rightarrow \alpha = 2\pi nd/v \Rightarrow v = 2\pi nd/\alpha = 300$ m/s

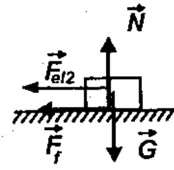
**12.** Considerăm cazul în care nu există frecare. În acest caz rezultanta forțelor este forța centripetă: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{el1} = \vec{F}_{cp1}$, iar scalar forța elastică joacă rol de forță centripetă, astfel că: $k\Delta\ell_1 = m\omega^2\ell_1 \Rightarrow k(\ell_1 - \ell_0) = m\omega^2\ell_1 \Rightarrow$

$k\ell_0 = \ell_1(k - m\omega^2) \Rightarrow \ell_1 = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$, iar $\Delta\ell_1 = \ell_1 - \ell_0 = \frac{m\omega^2\ell_0}{k - m\omega^2}$ (1).

În cazul existenței forței de frecare, vectorial: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_{el2} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp2}$, iar scalar: $k\Delta\ell_2 + F_f = m\omega^2\ell_2$, unde

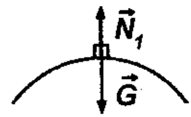
$F_f = \mu mg \Rightarrow k(\ell_2 - \ell_0) + \mu mg = m\omega^2\ell_2 \Rightarrow \ell_2 = \frac{k\ell_0 - \mu mg}{k - m\omega^2} \Rightarrow$

$\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0 = \frac{m(\omega^2\ell_0 - \mu g)}{k - m\omega^2}$ (2).

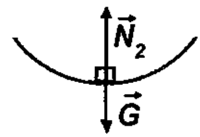


Împărţind cele două relaţii obţinem: $\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2}=\frac{\omega^2\ell_0}{\omega^2\ell_0-\mu g}$=1,33.

**13.** Impunem condiţia ca rezultanta forţelor ce acţionează asupra camionului în punctul superior al podului să joace rol de forţă centripetă: $\vec{N}_1+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $mg-N_1=\frac{mv^2}{R}$, dacă corpul se deplasează pe podul convex, astfel $N_1=m\left(g-\frac{v^2}{R}\right)$=38,75 kN.



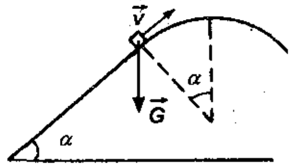

În cazul deplasării pe un pod concav, în punctul inferior al podului vectorial: $\vec{N}_2+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $N_2-mg=\frac{mv^2}{R}$, astfel că $N_2=m\left(g+\frac{v^2}{R}\right)$=61,25 kN.



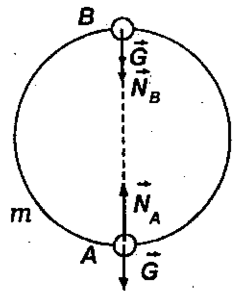

În punctul inferior al podului concav forţa de apăsare normală este mai mare decât greutatea corpului, iar în punctul superior al podului convex forţa de apăsare normală este mai mică decât greutatea corpului.

**14.** Asupra seminţei când intră pe tambur acţionează greutatea şi normala. Dacă sămânţa se desprinde de bandă, forţa de apăsare normală este nulă, iar componenta greutăţii de-a lungul normalei joacă rol de forţă centripetă, astfel că:

$mg\cos\alpha=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{gR\cos\alpha}$=1m/s⇒ dacă viteza maximă nu depăşeşte valoarea de 1 m/s, atunci sămânţa rămâne pe bandă.




**15.** În punctele inferior (*A*) şi superior (*B*) ale traiectoriei, acţionează forţa de apăsare normală asupra scaunului şi greutatea, astfel că rezultanta lor joacă rol de forţă centripetă, astfel că vectorial: $\vec{N}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$. În punctul inferior al traiectoriei scalar obţinem: $N_A-mg=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow N_A=m\left(g+\frac{v^2}{R}\right)$=4800 N, iar în punctul superior al traiectoriei proiectând relaţia vectorială obţinem: $N_B+mg=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow N_B=m\left(\frac{v^2}{R}-g\right)$

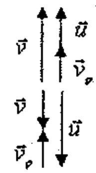



$N_B$=3200 N.

**16.** Asupra motociclistului aflat la periferia platformei acţionează forţa de frecare care joacă rol de forţă centripetă. Deoarece motociclistul nu derapează forţa de frecare este statică şi este mai mică sau cel mult egală cu forța de frecare la alunecare, astfel că: $F_{fs} = F_{cp} \Rightarrow F_{cp} \le F_{fl} \Rightarrow \dfrac{mv^2}{R} \le \mu \cdot mg$, unde $v$ reprezintă viteza cu care se mişcă motociclistul față de sol şi se obține prin adunarea vectorială a vitezei platformei la periferie $v_p = \omega R = 2\pi \cdot nR$ şi a vitezei motociclistului față de platformă $u$, astfel că: $\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{u}$.

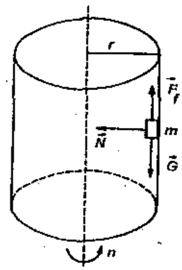
Dacă motociclistul se deplasează în acelaşi sens cu platforma, atunci:

$$v = v_p + u = 2\pi \cdot nR + u \Rightarrow \mu \ge \frac{(2\pi \cdot nR + u)^2}{gR} = 0{,}777.$$




Dacă motociclistul se deplasează în sens contrar cu platforma, atunci: $v = v_p - u = 2\pi \cdot nR - u \Rightarrow \mu \ge \dfrac{(2\pi \cdot nR - u)^2}{gR}$ =0,358.

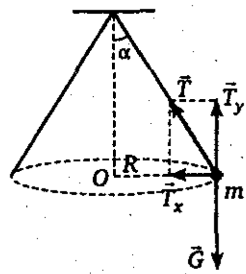
**17.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului, iar rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $N = F_{cp} \Rightarrow N = m\omega^2 R$ şi pe $Oy$: $F_f - G = 0 \Rightarrow mg = F_f$. Conform legii frecării:




$$F_f = \mu N \Rightarrow F_f = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow mg = \mu \cdot m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}.$$

Cum $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\mu R}} \approx 1$ rot/s.

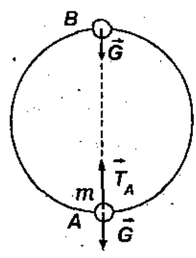
**18.a.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului: greutatea şi tensiunea din fir, astfel că rezultanta acestora joacă rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $T\sin\alpha = F_{cp} = m\omega^2 R$ (1) şi pe $Oy$: $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg$ (2)




Împărțind cele două relații obținem: $tg\alpha = \dfrac{F_{cp}}{G} = \dfrac{\omega^2 R}{g}$.

Din geometrie raza de rotație $R$ este: $R = \ell\sin\alpha$, astfel că $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell\cos\alpha}}$, iar perioada de rotație este: $T' = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}} \approx 0{,}77$ s.

**b.** Tensiunea în fir este: $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ =2 N.




**19.a.** Deoarece apa nu curge din găleată în niciun punct al traiectoriei, înseamnă că nu curge nici când găleata se află în punctul superior al traiectoriei cu gura în jos. În acest caz, considerăm că greutatea apei joacă rol de forță centripetă, deoarece considerăm că. $G = F_{cp} \Rightarrow m_a g = m_a \omega^2 \ell$, iar cum $\omega = 2\pi\upsilon$ obținem

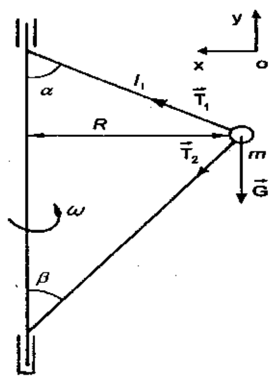
$$g = 4\pi^2\upsilon^2\ell \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0{,}712 \text{ rot/s}$$

**b.** Datorită condiției de la punctul precedent obținem că în punctul superior al traiectoriei tensiunea în fir este nulă. În punctul inferior al traiectoriei rezultanta forțelor joacă rol de forță centripetă $\vec{T} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T - mg = m\omega^2\ell \Rightarrow T = 2mg = 80$ N. Deci în punctul inferior al traiectoriei tensiunea în sfoară are valoarea maximă.

**c.** Dacă frecvența se dublează $\nu' = 2\nu \Rightarrow \omega' = 2\pi\nu' = 2\omega$. În punctul superior asupra găleții acționează și tensiunea $T'$, alături de greutate,astfel că rezultanta acestora este forța centripetă: $\vec{G} + \vec{T}' = \vec{F}_{cp}' \Rightarrow$ Scalar

$$G + T' = F_{cp}' \Rightarrow mg + T' = m\omega'^2\ell = 4m\omega^2\ell \Rightarrow mg + T' = 4mg \Rightarrow T' = 3mg = 120 \text{ N}.$$

**20.** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$.



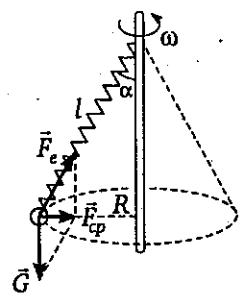

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:
pe *Ox*: $T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = m\omega^2 R$, unde $R$ este raza de rotație și din geometrie $R = \ell_1 \sin\alpha$ și pe *Oy*: $T_1\cos\alpha - T_2\cos\beta - mg = 0$.

Obținem sistemul de ecuații:
$T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = m\omega^2\ell_1\sin\alpha$ și $T_1\cos\alpha - T_2\cos\beta = mg$.
Rezolvând sistemul de ecuații obținem:

$$T_2 = \frac{m(\omega^2\ell_1\cos\alpha - g)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 0{,}865 \text{ N și}$$

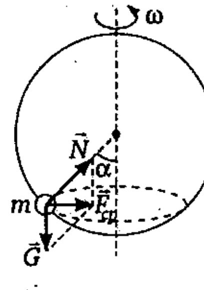
$$T_1 = \frac{m(\omega^2\ell_1\sin\alpha\cos\beta + g\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 5{,}5 \text{ N}.$$

**21.** Asupra corpului acționează atât greutatea cât și forța elastică, astfel că rezultanta lor joacă rol de forță centripetă: $\vec{G} + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg}$, iar $R = \ell\sin\alpha$ reprezintă raza de rotație în plan orizontal, iar $\ell$ reprezintă noua lungime a resortului, astfel că $\ell = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \frac{F_{el}}{k}$. Deoarece $\cos\alpha = \frac{mg}{F_{el}} \Rightarrow F_{el} = \frac{mg}{\cos\alpha}$




$$\Rightarrow \ell = \ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha}. \text{ Din geometrie: } tg\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2}{g}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k\cos\alpha}\right)\sin\alpha \Rightarrow$$

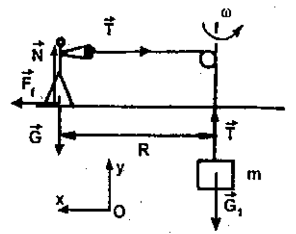
$$1 = \frac{\omega^2(k\ell_0 \cos\alpha + mg)}{kg} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{kg}{k\ell_0 \cos\alpha + mg}} \approx 6{,}32 \text{ rad/s}$$




**22.** Reprezentăm forțele care acționează asupra bilei, iar rezultanta lor joacă rol de forță centripetă: $\vec{N} + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, deoarece asupra bilei acționează atât greutatea ei cât și reacțiunea normală exercitată de inel. Bila execută un cerc în plan orizontal cu raza $R_1$.

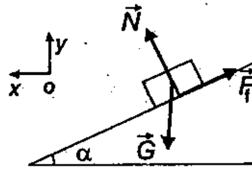
Din desen $tg\,\alpha = \frac{F_{cp}}{G} = \frac{m\omega^2 R_1}{mg}$, unde $R_1 = R\sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 R \sin\alpha}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$




**23.** Studiem mişcarea accelerată în sus a corpului cu masa $m$: $\vec{T} + \vec{G}_1 = m \cdot \vec{a}$, iar scalar $T - mg = ma$. Studiem mişcarea de rotație a omului aflat pe platformă. Reprezentăm forțele care acționează asupra lui și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial se obține $\vec{T} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$ și prin proiecția relației vectoriale pe axele de coodonate obținem: pe *Ox*: $T - F_f = F_{cp} = M\omega^2 R$ şi pe *Oy*: $N - Mg = 0 \Rightarrow N = Mg \Rightarrow F_f = \mu N = \mu Mg$ $\Rightarrow T = M(\omega^2 R + \mu g) \Rightarrow a_{max} = \frac{M}{m}(\omega^2 R + \mu g) - g = 50$ m/s². Studiem celălalt caz, când asupa omului forța de frecare își schimbă sensul, astfel că $T + F_f = F_{cp} = M\omega^2 R \Rightarrow T = M(\omega^2 R - \mu g) \Rightarrow a_{min} = \frac{M}{m}(\omega^2 R - \mu g) - g = 10$ m/s².

Dacă accelerația cu care omul ridică masa $m$ este cuprinsă între $a \in (10{,}50)$m/s² atunci omul rămâne în repaus față de platformă.



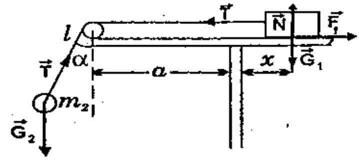

**24.** Reprezentăm forțele care acționează asupra motociclistului și impunem condiția ca rezultanta forțelor să joace rol de forță centripetă. Vectorial: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordinate. Pe *Ox*: $N\sin\alpha - F_f\cos\alpha = m\omega^2 R$ și pe *Oy*: $N\cos\alpha + F_f \sin\alpha - mg = 0$.

Conform legii frecării: $F_f = \mu N \Rightarrow N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = mg \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$

$$\Rightarrow N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{R(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}} \approx 1{,}825 \text{ rad/s, iar}$$

accelerația centripetă este $a_{cp} = \omega^2 R \approx 6{,}66$ m/s².

**25.** Studiem mişcarea de rotaţie în plan orizontal a corpului cu masa $m_2$. Rezultanta tensiunii şi a greutăţii joacă rol de forţă centripetă, astfel că: $\vec{T}+\vec{G}_2=\vec{F}_{cp}$.Din



geometrie: $\cos\alpha=\dfrac{m_2 g}{T}\Rightarrow T=\dfrac{m_2 g}{\cos\alpha}=2$ N.

Reprezentăm forţele care acţionează asupra axului scripetelui şi deoarece acesta este ideal şi nu are masă rezultanta acestora este nulă: Astfel: $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow\vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$. Scalar: $R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1\,T_2\cos(90+\alpha)$.

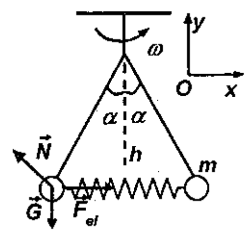
Cum $T_1=T_2=T\Rightarrow R=T\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\approx 1{,}04$ N.

**b.** Dar pentru corpul $m_2$ $T\sin\alpha=F_{cp}\Rightarrow m_2 g\,tg\,\alpha=m_2\omega^2 R$, unde $R$ este raza de rotaţie a corpului cu masa $m_2$. Din geometrie $R=a+l\sin\alpha\Rightarrow\omega=\sqrt{\dfrac{g\cdot tg\,\alpha}{a+l\sin\alpha}}\approx 5{,}63$ rad/s

**c.** Studiem mişcarea corpului cu masa $m_1$. Rezultanta forţelor joacă rol de forţă centripetă: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_1+\vec{F}_f=\vec{F}_{cp}$, iar scalar: $T-F_f=m_1\omega^2 x$

$\Rightarrow x=\dfrac{T-\mu m_1 g}{m_1\omega^2}=25{,}25$ cm. Când forţa de frecare acţionează în sens contrar,

$T+F_f=m_1\omega^2 x\Rightarrow\ x=\dfrac{T+\mu m_1 g}{m_1\omega^2}\approx 37{,}88$ cm.



**26.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra fiecărei bile şi impunem condiţia ca rezultanta lor să joace rol de forţă centripetă: $\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_{el}=\vec{F}_{cp}$.

Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe $Ox$: $F_{el}-N\cos\alpha=F_{cp}=m\omega^2 R$ şi

pe $Oy$: $N\sin\alpha-mg=0\Rightarrow N=\dfrac{mg}{\sin\alpha}$.

Cum $F_{el}=kx\Rightarrow kx-mg\cdot ctg\,\alpha=m\omega^2 R$, unde $R$ este raza cercului orizontal descris de fiecare bilă. Din geometrie $tg\,\alpha=\dfrac{R}{h}\Rightarrow R=h\cdot tg\,\alpha$, iar

$F_{el}=k(2R-\ell_0)=k(2h\cdot tg\,\alpha-\ell_0)\Rightarrow k(2h\cdot tg\,\alpha-\ell_0)-mg\cdot ctg\,\alpha=m\omega^2 h\cdot tg\,\alpha$

$\Rightarrow 2kh\cdot tg\,\alpha-m\omega^2 h\cdot tg\,\alpha=k\ell_0+mg\cdot ctg\,\alpha\Rightarrow h=\dfrac{k\ell_0+mg\cdot ctg\,\alpha}{(2k-m\omega^2)\cdot tg\,\alpha}\approx 65{,}63$ cm.

**27.** Greutatea unui corp se determină prin suspendarea acestuia de un dinamometru şi forţa indicată de dinamometru este greutatea măsurată a corpului. Dacă suspendăm corpul de dinamometru la pol, în imediata vecinătate a Pământului, greutatea corpului este egală cu forţa elastică, astfel că la pol dinamometrul indică greutatea reală $G=mg_0$, unde $g_0$

reprezintă accelerația gravitațională în imediata vecinătate a Pământului. La pol la altitudinea $h$ $F_{el} = G_p = mg$, unde $g$ reprezintă accelerația gravitațională la altitudinea $h$, şi din legea atracției universale forța de atracție este: $F_a = G_p = \frac{kmM}{(R_p + h)^2} \Rightarrow mg = \frac{kmM}{(R_p + h)^2}$. La ecuator asupra corpului acționează atât forța de atracție a Pământului cât şi forța elastică, iar rezultanta lor joacă rol de forță centripetă, deoarece corpul se roteşte odată cu Pământul cu viteza unghiulară $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a Pământului, iar $T$ este perioada proprie de rotație a Pământului, astfel că: $F_{a_E} - F_{el} = F_{cp}$ $\Rightarrow F_{el} = F_{a_E} - m\omega^2 R_p$. La ecuator forța de atracție în imediata vecinătate a Pământului este: $F_{a_E} = \frac{kmM}{R_p^2}$, deoarece se consideră Pământul sferic cu raza $R_p$. Cum $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V = \rho \frac{4\pi R_p^3}{3} \Rightarrow$ $\frac{kmM}{(R_p + h)^2} = \frac{kmM}{R_p^2} - m\omega^2 R_p$ $\Rightarrow$

$$R_p + h = \sqrt{\frac{kMR_p^2}{kM - \omega^2 R_p^3}} \Rightarrow h = R_p\left(\sqrt{\frac{kM}{kM - \omega^2 R_p^3}} - 1\right) = R_p\left(\sqrt{\frac{k\rho T^2}{k\rho T^2 - 3\pi}} - 1\right) \approx 11 \text{ km}$$

**28.** La ecuatorul asteroidului forța de atracție compusă cu forța indicată de dinamometru (greutatea măsurată) joacă rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o mişcare de rotație împreună cu asteroidul şi cu perioada de rotație a acestuia. Vectorial: $\vec{F}_{el} + \vec{F}_a = \vec{F}_{cp}$. Deoarece corpul pare fără greutate resortul dinamometrului nu este întins şi prin urmare $F_{el} = 0$, iar $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R \Rightarrow \frac{kM}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}R$, unde $M$ reprezintă masa asteroidului. Obținem $M = \rho\frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3\pi}{kT^2} = 1210$ kg/m³.

**29.** Asupra satelitului acționează forța de atracție care joacă rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow k\frac{mM}{R^2} = m\frac{v^2}{R_p} = mg_0 \Rightarrow v = \sqrt{g_0 R_p} = 7{,}9$ km/s.

Valoarea $v$=7,9 km/s reprezintă prima viteză cosmică, adică viteza unui satelit care se roteşte chiar la suprafața Pământului.

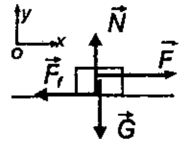
**30.** Impunem condiția ca forța de atracție exercitată de planetă asupra navei cosmice să joace rol de forță centripetă, astfel că: $F_a = F_{cp} \Rightarrow$ $k\frac{mM}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h} \Rightarrow kM = v^2(R+h)$, unde $M$ este masa planetei si $R$ raza ei.

Din definiția accelerației gravitaționale: $g = \frac{F_a}{m} = \frac{kM}{R^2} = \frac{v^2(R+h)}{R^2} \approx 1{,}4$ m/s².

## 3.1. Lucrul mecanic. Puterea mecanică

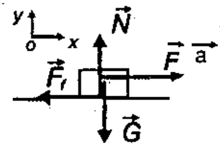
**1.a.** Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a mașinii este $L_G = 0$, deoarece greutatea este perpendiculară pe direcția de mișcare.

**b.** Studiem mișcarea uniformă a mașinii de spălat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Scalar pe *Ox*: $F - F_f = 0 \Rightarrow F = F_f$ și pe *Oy*: $N - G = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de forța de împingere este $L_F = Fd = \mu mgd = 2400$ J




**c.** În cazul forței de frecare $L_{F_f} = F_f d \cos 180^0$, deoarece forța de frecare își deplasează punctul de aplicație pe direcția de deplasare pe distanța *d*, dar are sens opus. Astfel $L_{F_f} = -\mu mgd = -2400$ J. Deoarece mașina de spălat se mișcă uniform, lucrul mecanic al forței de împingere este compensat de lucrul mecanic al forței de frecare.

**2.a.** Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem: pe *Ox*: $F - F_f = ma$ și pe *Oy*: $N - mg = 0$.




Cum $F_f = \mu N = \mu mg \Rightarrow a = \dfrac{F - \mu mg}{m} = \dfrac{F}{m} - \mu g = 4$ m/s².

Aflăm distanța pe care se deplasează corpul în timpul *t* din relația: $d = v_m \cdot t = \dfrac{v}{2} \cdot t = \dfrac{at^2}{2}$, deoarece mișcarea corpului este rectilinie uniform accelerată și din definiție: $a_m = a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v}{t} \Rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow L_F = F \cdot d = \dfrac{Fat^2}{2}$20 J.

**b.** Lucrul mecanic al forței de frecare este $L_{F_f} = -\mu mgd = -\dfrac{\mu \cdot mgat^2}{2} = -4$ J.

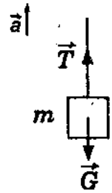
**c.** Prin definiție puterea mecanică instantanee este $P = \dfrac{L}{\Delta t} = \dfrac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, deoarece pentru un interval de timp foarte scurt $\Delta t \to 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{d} / \Delta t$.
Din $v = at \Rightarrow P = Fat_1$=20 W, deoarece vectorul forță și vectorul viteză au aceeași direcție și sens

**3.a.** Conform definiției lucrului mecanic efectuat de greutatea unui corp: $L_G = mgh$, unde $h$ este înălțimea pe care coboară corpul. Cum corpurile cad liber sub acțiunea greutății cu accelerația *g*, după timpul *t*, $h = v_m t = \dfrac{gt^2}{2}$, deooarece $v_m = v/2 = gt/2$ astfel că $L_G = \dfrac{mg^2t^2}{2} \Rightarrow \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{m_1 t_1^2}{m_2 t_2^2} = \dfrac{1}{8}$=0,125.

**b.** Prin definiţie puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t}$, iar în cazul greutăţii este

$$P_m = \frac{mgh}{t} = \frac{mg^2t}{2} \Rightarrow \frac{P_{m1}}{P_{m2}} = \frac{m_1t_1}{m_2t_2} = 0{,}25$$

**c.** Lucrul mecanic total al greutăţii care acţionează asupra corpului 1 este $L_G=L_c+L_u$, unde $L_c$ reprezintă lucrul mecanic efectuat de greutate la coborârea corpului 1 şi $L_u$ reprezintă lucrul mecanic efectuat de greutate la urcarea corpului 1. Astfel $L_c=mgh$, deoarece la coborâre greutatea ajută la mişcare şi este o forţă motoare, iar $L_h=-mgh$, deoarece la urcare greutatea nu ajută la mişcare şi este o forţă rezistivă, Astfel $L_G=0$, deoarece greutatea este o forţă de tip conservativiar lucrul ei mecanic pe un drum închis este zero.



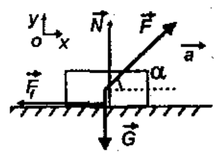

**4.a.** Conform definiţiei lucrului mecanic efectuat de tensiunea din cablu: $L=TH$, cu $H=5h$, unde $h$ este înălţimea medie a unui etaj, iar $T$ este tensiunea în cablul de susţinere al liftului. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=m\vec{a}$, iar scalar $T-mg=ma \Rightarrow T=m(a+g) \Rightarrow$
$L=5m(a+g)h=44$ kJ

**b.** $L_G=-mgH=-5mgh=-40$ kJ

**c.** Prin definiţie puterea medie este $P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{TH}{\Delta t} = Tv_m$, unde $v_m$ reprezintă viteza medie a liftului. Cum $H=v_mt=at^2/2 \Rightarrow t=\sqrt{2H/a}$, deoarece

$$v_m = \frac{v}{2} = \frac{at}{2} = \frac{\sqrt{2aH}}{2} \Rightarrow P_m = m(g+a)\frac{\sqrt{2aH}}{2} = 8{,}8 \text{ kW}$$

**5.a.** Studiem mişcarea corpului. Vectorial: $\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_f+\vec{G}=m\vec{a}$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate şi obţinem:pe $Ox$: $F\cos\alpha - F_f = ma$ şi pe $Oy$: $F\sin\alpha + N - mg = 0$.




$F_f=\mu N=\mu(mg-F\sin\alpha) \Rightarrow F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha = ma$

$$\Rightarrow F = \frac{m(a+\mu g)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \Rightarrow L_F = Fd_1 = \frac{m(a+\mu g)d_1}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \approx 10{,}93 \text{ J}$$

**b.** Lucrul mecanic al normalei este $L_N=0$, deoarece forţa normală este în permanenţă perpendiculară pe direcţia de mişcare

**c.** Lucrul mecanic al forţei de frecare este $L_{F_f}=F_fd_3\cos180^0=-\mu Nd_3$

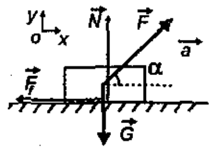
$$N = mg - F\sin\alpha = mg - \frac{m(a+\mu g)\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} = \frac{m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$L_{F_f} = -\frac{\mu m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)d_3}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} = -2{,}67 \text{ J}$$

**6.a.** Lucrul mecanic efectuat de forţa $F$ este $L=Fd\cos\alpha$ =207,6 J

**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{Ff}=F_fd\cos180=-F_fd$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow L_{Ff} = -\mu N d$. Din proiecţia pe axa *Oy*: $F\sin\alpha + N = mg \Rightarrow L_{Ff} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d = -8$ J




**c.** Utilizăm formula puterii medii.

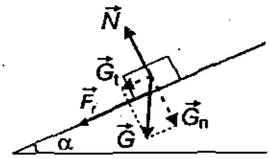
$P_m = \dfrac{L}{\Delta t} = \dfrac{Fd\cos\alpha}{\Delta t} = Fv_m\cos\alpha$, unde $v_m = v/2 = at/2$.

Studiem mişcarea corpului.: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$. Din proiecţia pe axa *Ox*:

$F\cos\alpha - F_f = ma \Rightarrow F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = ma \Rightarrow a = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/m - \mu g$

$\Rightarrow a \approx 12{,}475$ m/s². Cum $d = v_m t = \dfrac{at^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} \Rightarrow v_m = \dfrac{\sqrt{2ad}}{2} \approx 5$ m/s, astfel că $P_m \approx 259{,}5$ W

**7.a.** Conform definiţiei lucrului mecanic al forţei de frecare este: $L_{F_f} = F_f d\cos 180 = -F_{f_m} d$. Conform legii frecării: $F_f = \mu_m N = \mu_m mg\cos\alpha$, unde coeficientul de frecare mediu $\mu_m$ se calculează prin media aritmetică a valorilor coeficienţilor de frecare din punctul de lansare şi punctul de oprire, deoarece coeficientul de frecare descreşte uniform $\Rightarrow \mu_m = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2} \Rightarrow L_{F_f} = -\dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2} mgd\cos\alpha = -8{,}65$ J

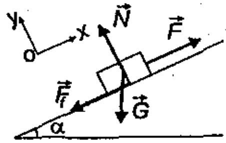



**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_G = -mgd\sin\alpha = -25$ J, deoarece greutatea este o forţă rezistivă şi nu ajută la mişcarea corpului

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de apăsare este $L_N = 0$, deoarece forţa de apăsare normală $\vec{N}$ este perpendiculară pe traiectorie

**8.a.** Puterea furnizată de motor este $P=Fv=20$ kW

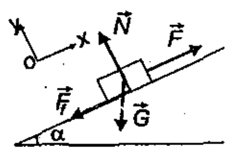
**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare în timpul deplasării blocului de piatră este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$. Deoarece blocul de piatră este tras uniform: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$. Scalar pe *Ox*:




$F - F_f - G\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_f = F - G\sin\alpha \Rightarrow L_{Ff} = -(F - G\sin\alpha)d = -20$ kJ

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă care acţionează asupra blocului pe distanţa *OA* este nulă, deoarece blocul este ridicat uniform, astfel că rezultanta forţelor care acţionează asupra blocului este nulă.

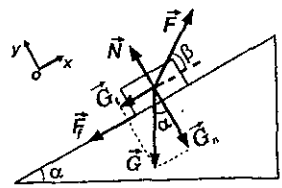
**9.a.** Deoarece corpul este ridicat uniform pe planul înclinat,atunci rezulanta forţelor este nulă, astfel că $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, unde $F$ reprezintă o forţă de tracţiune paralelă cu planul. Proiectăm pe *Ox*: $F - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$.



Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$. Astfel puterea necesară ridicării corpului de-a lungul planului, cu viteza constantă este $P = Fv \Rightarrow$ $P = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$=3,75 W

**b.** Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la ridicarea acestuia până în vârful planului înclinat este $L_G = -mgh = -5$ J, deoarece greutatea este o forță rezistivă neajutând la urcarea corpului

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -\mu Nd$ $\Rightarrow L_{Ff} = -\mu mghctg\alpha = -2{,}5$ J, deoarece între distanța parcursă de corp pe plan și înălțimea planului există relația $h = d\sin\alpha$




**10.a.** Lucrul mecanic efectuat de forța $F$ este $L_F = Fd\cos\beta$. Impunem condiția de mișcare uniformă a corpului $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = 0$. Proiectăm pe axa *Ox*: $F\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = 0$ și pe axa *Oy*: $F\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0$.

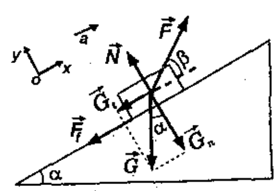
Din $F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \Rightarrow L_F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} d\cos\beta \approx 2{,}57 \text{ J}$$

**b.** $L_G = -G_t d = -mgd\sin\alpha$ =–2 J, deoarece greutatea corpului nu ajută la mișcarea corpului

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f d\cos 180 = -F_f d$. Deoarece forța de tracțiune este paralelă cu planul, atunci $\beta$=0, astfel că $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow L_{Ff} = -\mu mgd\cos\alpha = -1$ J




**11.a.** Studiem mișcarea corpului: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem pe *Ox*: $F\cos\beta - mg\sin\alpha - F_f = ma$ și pe *Oy*: $F\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow$

Cum $F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta) \Rightarrow$

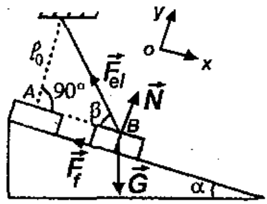
$$F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = ma \Rightarrow F = \frac{m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \Rightarrow$$

$F \approx 20{,}163$ N$\Rightarrow L = Fd\cos\beta \approx 71{,}07$ J.

**b.** $L_N = 0$, deoarece normala este perpendiculară pe direcția de deplasare.

**c.** $L_{F_f} = F_f \cdot d \cdot \cos 180^0 = -\mu Nd = -\mu(mg\cos\alpha - F\sin\alpha)d \approx -3{,}61$ J.

**12.a.** Alungirea firului în poziția de echilibru este $\Delta\ell = \ell - \ell_0$, unde $\ell = \ell_0 / \sin\beta$, astfel că $\Delta\ell = \ell_0(1/\sin\beta - 1)$=20,5 cm




**b.** Lucrul mecanic al greutății corpului este $L_G = mgh = mgAB\sin\alpha$, unde $AB$=$\ell_0$ctg$\beta$, astfel că $L_G = mg\ell_0 ctg\beta \sin\alpha$ =2,5 J

**c.** Studiem echilibrul corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$.

Proiectăm pe *Oy*: $F_{el}\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha - k\Delta\ell\sin\beta \approx 5{,}76$ N

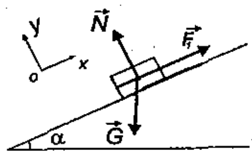
Proiectând ecuația vectorială pe *Ox* obținem: $mg\sin\alpha - F_{el}\cos\beta - F_f = 0$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu = \dfrac{mg\sin\alpha - k\Delta\ell\cos\beta}{mg\cos\alpha - k\Delta\ell\sin\beta} \approx 0{,}366$

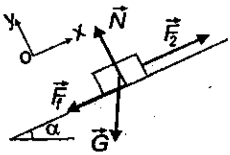
**13.a.** Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este $L_{Ff} = F_f\ell\cos 180 = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha$ =−1,25 kJ

**b.** Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucrul mecanic util şi lucrul mecanic consumat:

$\eta = \dfrac{L_u}{L_c}$.




Lucrul mecanic util este efectuat de o forță $\vec{F}_1$ paralelă cu planul înclinat, care ridică unifom şi fără frecare corpul pe plan, astfel că $L_u = F_1\ell$. Cum $\vec{F}_1 + \vec{N} + \vec{G} = 0$, scalar pe *Ox*: $F_1 = mg\sin\alpha \Rightarrow L_u = mg\ell\sin\alpha = mgh$, unde $h$ reprezintă înălțimea la care urcă corpul.




Dacă corpul se deplasează uniform cu frecare pe aceeaşi distanță ℓ sub acțiunea forței $\vec{F}_2$ paralelă cu planul înclinat, lucrul mecanic consumat este $L_c = F_2\ell$. Cum $\vec{F}_2 + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, scalar prin proiecția relației pe axele de coordonate obținem pe *Ox*: $F_2 - mg\sin\alpha - F_f = 0$ şi pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F_2 = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

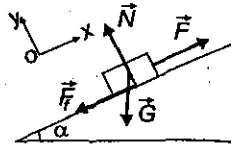
Lucrul mecanic consumat este $L_c = mg\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mgh(1 + \mu ctg\alpha) \Rightarrow$

randamentul rampei este: $\eta = \dfrac{1}{1 + \mu \cdot ctg\,\alpha}$=66,66%

**c.** Puterea medie necesară ridicării lăzii pe rampă este $P_m = \dfrac{L_c}{\Delta t} = \dfrac{mg\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\Delta t}$=187,5 W

**14.a.** Lucrul mecanic util pentru urcarea uniformă a unui corp se efectuează împotriva greutății corpului, astfel că $L_u = -L_G = mgh = mg\ell\sin\alpha$, unde ℓ reprezintă distanța urcată de corp pe planul înclinat.

Lucrul mecanic consumat este lucrul mecanic efectuat de o forță constantă paralelă cu planul care determină urcarea uniformă cu frecare a corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Proiectând pe $Ox$ obținem: $F-mg\sin\alpha-F_f=0$ şi pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0$.




Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha \Rightarrow F=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.

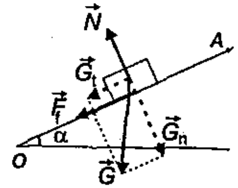
$L_c=mg\ell(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=mg\ell\sin\alpha+\mu mg\ell\cos\alpha=L_u-L_f$=2500 J

**b.** Prin definiție randamentul unui plan înclinat este definit prin raportul dintre lucrul mecanic util şi lucrul mecanic consumat: $\eta=\frac{L_u}{L_c}$=80%

**c.** Din $L_u=-L_G=mgh \Rightarrow h=L_u/mg$=20 m

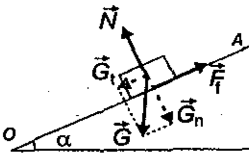
**15.a.** Studiem mişcarea corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}_u$, iar scalar pe direcția de mişcare $-mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma_u \Rightarrow a_u=-g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (1)

Din grafic determinăm accelerația corpului la urcare $a_u=\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{v_0}{t_u}=-3$ m/s², deoarece $v_0$=9 m/s şi $t_u$=3 s




Studiem coborârea corpului pe planul înclinat. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcția de mişcare $mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma_c \Rightarrow a_c=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$ (2).

Din grafic determinăm accelerația corpului la coborâre $a_c=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t_c}=1{,}2$ m/s², deoarece $v$=6 m/s şi $t_c$=5 s




Din (1)+(2) obținem $\sin\alpha=\frac{|a_u|+a_c}{2g}$=0,21

**b.** Din (1)-(2) obținem $\mu=\frac{|a_u|-a_c}{2g\cos\alpha}\approx0{,}092$, deoarece $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\approx0{,}978$

**c.** Calculăm distanța parcursă de corp la urcare cu ajutorul ariei triunghiului delimitat de axa vitezei, axa timpului şi graficul vitezei. Astfel $d_u$=13,5 m, iar la coborâre distanța parcursă este $d_c$=15 m, adică aria dintre graficul vitezei, axa timpului şi ordonata construită în punctul $t$=8 s. Astfel lucrul mecanic total efectuat de forța de frecare este $L_{Ff}=F_f(d_u+d_c)\cos180$

$L_{Ff}=-\mu mg(d_u+d_c)\cos\alpha=-2{,}56$ J

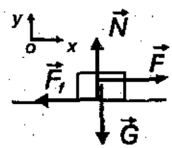
**16.** Deoarece forța nu este constantă, dar este reprezentată în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței, axa de coordonate $Ox$ şi ordonatele duse prin extremitățile $x_1$ şi $x_2$ reprezintă fizic lucrul mecanic, În cazul nostru figura geometrică este un trapez, astfel că aria acestuia este: $L=\frac{(F_1+F_2)(x_2-x_1)}{2}$.

Deoarece $F_1=ax_1 \Rightarrow a=\frac{F_1}{x_1}$, iar $F_2=ax_2=\frac{F_1x_2}{x_1} \Rightarrow L=\frac{F_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{2x_1}=1{,}2$ J.

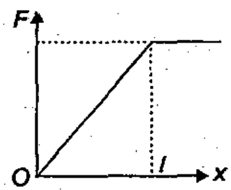
**17.** Conform definiției lucrului mecanic: $L=F_m(x_2-x_1)$, unde $F_m$ reprezintă valoarea medie a forței. Deoarece forța $F$ depinde liniar de coordonată, valoarea medie a forței $F$ se calculează cu ajutorul mediei aritmetice a valorilor de la capetele intervalului, astfel că: $F_m=\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}=5$ N, deoarece pentru $x_1=1$ m$\Rightarrow F_1=8$ N și pentru $x_2=4$ m $\Rightarrow F_2=2$ N. Prin urmare obținem $L=15$ J.

**18.** Conform interpretării geometrice a lucrului mecanic, dacă forța $F$ este reprezentată grafic în funcție de coordonată, aria cuprinsă între curba forței și axa coordonatelor reprezintă fizic lucrul mecanic. Obținem: $L_F=14$ J.

**19.** Calculăm aria cuprinsă între curba forței și axa coordonatelor. Această arie semnifică fizic lucrul mecanic, astfel că: $L_F=L_1+L_2+L_3$. Astfel $L_1=8$ J, $\Rightarrow$pe prima porțiune forța este motoare, deoarece lucrul ei mecanic este pozitiv. Deoarece $L_2=-2$ J$\Rightarrow$pe a doua porțiune forța este rezistivă, deoarece lucrul ei mecanic este negativ și pe treia porțiune forța este tot rezistivă, astfel că $L_3=-1$ J. În total $L_F=5$ J.




**20.a.** Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe astfalt pe distanța $x$. Deoarece scândura se deplasează uniform cu ajutorul unei forțe orizontale, atunci $\vec{F}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$. Scalar pe $Ox$: $F=F_f=\mu N$, iar pe $Oy$: $N=G_x$, unde $m_x$ reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porțiunii cu lungimea $\ell$ este $m_x=\frac{mx}{\ell} \Rightarrow F=F_f=\frac{\mu mgx}{\ell}$. Deoarece forța depinde direct proporțional de $x$ reprezentarea ei grafică este redată în figura alăturată.




Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, acesta este egal cu aria cuprinsă între curba forței, axa $Ox$ și ordonatele construite prin extremități. Când $x_1=\ell/3 \Rightarrow F=\mu mg/3$, iar aria este un triunghi dreptunghic, astfel că $L=Fx_1/2=\mu mg\ell/18=30$ mJ

**b.** Când scândura pătrunde în întregime pe asfalt forța cu care trage elevul scândura atinge valoarea maximă $F_{max}=\mu mg$, astfel lucrul ei mecanic total este $L_t=\mu mg\ell/2=0{,}27$ J

**c.** După ce pătrunde pe lungimea $\ell$ pe asfalt, forța cu care trage elevul scândura pentru ca aceasta să se mişte uniform este $F=F_{max}=\mu mg$=const, astfel că lucrul mecanic suplimentar efectuat de elev astfel ca scândura să mai pătrundă pe distanța $x=\ell$ este $L_s=\mu mg\ell$. Lucrul mecanic total este $L=L_t+L_s=3\mu mg\ell/2=0{,}81$ J

**21.a.** Deoarece forța de tracțiune este egală cu forța de deformare elastică, atunci $F=kx \Rightarrow k=F/x=100$ N/m

**b.** În timpul deplasării uniforme a corpului $\vec{F}_{el}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, astfel că scalar $F=F_{el}=F_f \Rightarrow kx_m=\mu mg \Rightarrow x_m=(\mu mg)/k$ =4 cm

**c.** Pe baza interpretării grafice a lucrului mecanic lucrul mecanic efectuat de forța $F$ care trage de resort, în timpul deformării resortului de la $x_1$ la $x_2$ reprezintă aria trapezului cuprins între forță, axa Ox și cele două ordonate construite prin $x_1$ și $x_2$, astfel că $L=\dfrac{(F_1+F_2)(x_2-x_1)}{2}$ =60 mJ

**22.** Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă $\Delta\ell$ este $L_1=\dfrac{k}{2}\left(\dfrac{\Delta\ell}{3}\right)^2=\dfrac{k\Delta\ell^2}{18}$.

Lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi este $L_2=\dfrac{k\Delta\ell^2}{2}-\dfrac{k\Delta\ell^2}{18}=\dfrac{4}{9}k\Delta\ell^2$. Împărțim cele două lucruri mecanice și obținem: $\dfrac{L_1}{L_1}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow L_1=\dfrac{L_2}{8}\Rightarrow$lucrul mecanic efectuat pentru a alungi un resort cu o treime din alungirea maximă este de opt ori mai mic decât lucrul mecanic efectuat pentru a alungi resortul cu restul de două treimi.

**23.** Pentru a alungi un resort cu $\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L=\dfrac{k\Delta\ell^2}{2}$.

Pentru a alungi resortul cu $3\Delta\ell$, lucrul mecanic efectuat este $L'=\dfrac{9k\Delta\ell^2}{2}$ și deci lucrul mecanic suplimentar este $L_s=L'-L=4k\Delta\ell^2$.

Cum $F=k\Delta\ell \Rightarrow k=\dfrac{F}{\Delta\ell}\Rightarrow L_s=4F\Delta\ell=0{,}08$ J.

**24.a.** Deoarece puterea dezvoltată de forța de tracțiune este constantă, din $P=F_{t1}v_1 \Rightarrow F_{t1}=P/v_1$=4 kN. Studiem mișcarea corpului când asupra acestuia acționează $R_1$. Deoarece Vectorial $\vec{F}_{t1}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}_1=m\vec{a}_1$ și scalar $F_{t1}-R_1=ma_1 \Rightarrow a_1=\left(\dfrac{P}{v_1}-R_1\right)/m$ =5 m/s$^2$

**b.** Când autoturismul are viteza $v_2$, $F_{t2}-R_2=ma_2 \Rightarrow R_2=F_{t2}-ma_2 \Rightarrow$
$R_2=P/v_2-ma_2$=2 kN

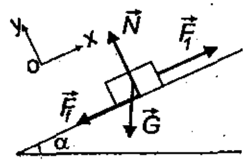
**c.** Când autoturismului atinge valoarea maximă $v_3$, rezultanta forțelor care se opun mișcării devine $R_3$. În acest caz forța de tracțiune este egală cu $R_3$, asftel că $F_{t3}=R_3$. Din expresia puterii $P=F_{t3}v_3=R_3v_3 \Rightarrow v_3=P/R_3$=20 m/s

**25.a.** Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care drumul este orizontal. Vectorial $\vec{F}_{t0}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, astfel că scalar pe direcţia mişcării se obţine $F_{t0}=R$. Cum $P_0=F_{t0}v_0$, relaţia cerută este $P_0=Rv_0$ (1).

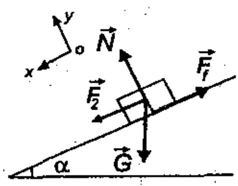
**b.** Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta urcă drumul de pantă $p$. Vectorial $\vec{F}_{t1}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, iar scalar în sensul mişcării se obţine: $F_{t1}-G\sin\alpha-R=0$, unde $\sin\alpha=p$. Din $P_1=F_{t1}v_0$ obţinem relaţia cerut $P_1=(Gp+R)\cdot v_0$ (2).

**c.** Studiem miscarea uniformă a camionului în cazul în care acesta coboară drumul de pantă $p$. Vectorial $\vec{F}_{t2}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{R}=0$, iar scalar în sensul mişcării se obţine: $F_{t1}+G\sin\alpha-R=0$, unde $\sin\alpha=p$. Din $P_2=F_{t2}v_0$ obţinem relaţia cerută $P_2=(R-Gp)\cdot v_0$ (3).

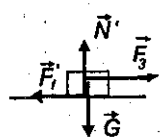
**d.** Adunând relaţiile (2) cu (3) obţinem $R=\dfrac{P_1+P_2}{2v_0}$ astfel că introducând în relaţia (1) obţinem $P_0=\dfrac{P_1+P_2}{2}=118$ kW




**26.a.** Studiem mişcarea maşinii de urcare a pantei. Deoarece maşina urcă uniform panta: $\vec{F}_1+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, iar scalarpe $Ox$: $F_1-F_f-mg\sin\alpha=0$ şi pe $Oy$: $N-mg\cos\alpha=0$. Cum $F_f=\mu N=\mu mg\cos\alpha$, atunci $F_1=mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$. Puterea maşinii la urcarea pantei este: $P=F_1\cdot v_1=mgv_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (1)




**b.** Studiem cazul când maşina coboară uniform aceeaşi pantă. Vectorial $\vec{F}_2+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f=0$, iar scalar pe $Ox$: $F_2+mg\sin\alpha-F_f=0 \Rightarrow F_2=mg(-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$.
Puterea maşinii la coborârea pantei este: $P=F_2v_2=mgv_2(-\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ (2)

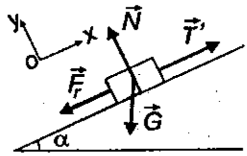



În cazul în care maşina se deplasează pe orizontală uniform vectorial obţinem $\vec{F}_3+\vec{N}'+\vec{G}+\vec{F}_f'=0$. Scalar $F_3=F_f'=\mu N'=\mu mg$, iar puterea dezvoltată de motorul maşinii este $P=F_3v_3=\mu mgv_3 \Rightarrow v_3=\dfrac{P}{\mu mg}$

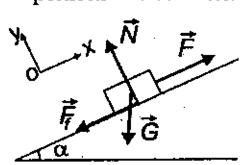
Din (1) şi (2)$\Rightarrow \mu mg=\dfrac{P(v_2+v_1)}{2v_1v_2\cos\alpha} \Rightarrow v_3=\dfrac{2v_1v_2\cos\alpha}{v_2+v_1}$. Cum $\alpha$ este foarte mic, $\cos\alpha\approx 1 \Rightarrow v_3=\dfrac{2v_1v_2}{v_2+v_1}=2{,}4$ m/s.

**27.a.** Puterea necesară pentru a tracta remorca pe drumul orizontal este $P=Tv=6$ kW

**b.** Lucrul mecanic efectuat de forța de rezistență pe drum orizontal este $L = F_r d\cos 180 = -F_r d$. Deoarece remorca este tractată cu viteză constantă, atunci rezultanta forțelor vcare acționează asupra ei este nulă, astfel că $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$. Scalar pe direcția de mişcare $T=F_r$, astfel că $L=-Td=-6$ kJ




**c.** Puterea necesară pentru a tracta remorca pe pantă este $P' = T'v$, unde noua valoare a forței de tracțiune a remorcii este $T'$. Deoarece remorca urcă uniform pe pantă, atunci $\vec{T}' + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$. Scalar pe $Ox$: $T' = F_r + mg\sin\alpha = T + mg\sin\alpha$, astfel că $P' = (T + mg\sin\alpha)v = 16$ kW

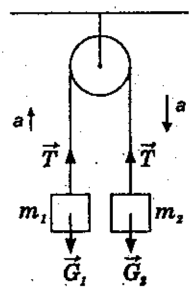



**28.a.** Studiem mişcarea uniformă a saniei pe planul înclinat: $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = 0$, iar scalar pe $Ox$: $F = mg\sin\alpha + F_f$. Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ reprezintă forța de tracțiune dezvoltată de cal.
Puterea activă dezvoltată de cal este $P_{activă} = F \cdot v = mgv(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 338{,}4$ W

**b.** Alte puteri care intervin sunt puterea forței de frecare: $P_{F_f} = -F_f \cdot v = -\mu mgv\cos\alpha$ şi puterea greutății $P_G = -mgv\sin\alpha$. Bilanțul puterilor este $P_{activă} = |P_{F_f}| + |P_G|$, deoarece puterea activă dezvoltată de forța de tracțiune a calului se consumă atât sub formă de putere pentru învingerea forțelor de frecare cât şi pentru învingerea greutății saniei.

**c.** $\dfrac{|P_{F_f}|}{P_{activă}} = \dfrac{\mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \dfrac{\mu}{tg\alpha + \mu} \approx 16{,}66\ \%$

**29.a.** Deoarece corpul cu masa $m_2$ are masa mai mare comparativ cu corpul cu masa $m_1$, corpul $m_1$ urcă, iar corpul cu masa $m_2$ coboară, deci tensiunea care acționează asupra corpului 2 ajută la mişcare, astfel că lucrul ei mecanic este $L_T = Th$.




Studiem mişcarea fiecărui corp. Pentru corpul cu masa $m_2$: $m_2 g - T = m_2 a$, iar pentru corpul cu masa $m_1$:

$$T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow T = m_1(a+g) = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$L_T = \frac{2m_1 m_2 gh}{m_1 + m_2} = 8 \text{ J}$$

**b.** $L_{Gtotal} = L_{G_2} + L_{G_1} = m_2 gH - m_1 gH = (m_2 - m_1)gH = 12$J,

deoarece corpul 2 coboară şi $\vec{G}_2$ este forță motoare, iar corpul 1 urcă şi $\vec{G}_1$ este forță rezistivă.

**c.** Prin definiție $P_m = L_t / \Delta t$, unde $L_t$ reprezintă lucrul mecanic al tuturor forțelor şi $\Delta t$ reprezintă intervalul de timp după care corpul $m_2$ ajunge pr sol.

Deoarece lucrul mecanic total al celor două tensiuni este nul, deoarece o tensiune este forţă motoare iar cealaltă tensiune este forţă rezistivă, atunci $L_t=L_{Gtotal}$. Dar $H=v_m\Delta t=\frac{v\Delta t}{2}$, unde $v=a\Delta t$, astfel că $H=\frac{a(\Delta t)^2}{2}\Rightarrow\Delta t=\sqrt{\frac{2H}{a}}$

$\Rightarrow\Delta t$ =0,6 s$\Rightarrow P_m=(m_2-m_1)gH/\Delta t$ =20 W

**30.a.** Studiem mişcarea uniformă a corpului 2, astfel că $T_2=m_2g$. Din condiţia ca scripetele mobil să aibă o mişcare uniformă obţinem $T_2=2T_1$, iar din condiţia de mişcare uniformă a corpului 1: $F+m_1g=T_1\Rightarrow$
$F=(m_2/2-m_1)g$=200 N

**b.** Puterea dezvoltată de forţa $F$ este $P=\frac{L}{t}=\frac{Fh}{t}$=20 W

**c.** Cum $P=Fv\Rightarrow v=P/F$=0,1 m/s

## 3.2. Energia cinetică şi potenţială*

**1.** Prin definiţie energia cinetică: $E_c=\frac{mv^2}{2}$. Cum $E_{c_1}=E_{c_2}\Rightarrow\frac{m_1v_1^2}{2}=\frac{m_2v_2^2}{2}$, şi cum $v_2=2v_1$ deoarece al doilea sportiv aleargă de două ori mai repede, obţinem că: $m_1=4m_2$.

**2.** Cum $E_c=\frac{mv_0^2}{2}\Rightarrow m=\frac{2E_c}{v_0^2}=4$ kg

**3.** Pe verticală săgeata are o mişcare uniform încetinită datorită acţiunii greutăţii cu viteza iniţială $v_0$, astfel că $v=v_0-gt\Rightarrow$la o secundă de la lansare viteza este $v$=10 m/s$\Rightarrow E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(v_0-gt)^2=2$ J

**4.** Deoarece corpul se mişcă uniform accelerat din repaus, acceleraţia medie coincide cu cea instantanee, astfel că $a_m=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v}{t}\Rightarrow v=at$, iar distanţa parcursă este: $d=v_mt=\frac{v}{2}t=\frac{at^2}{2}\Rightarrow a=\frac{2d_1}{t_1^2}=2$ m/s².

Când $t_2=2$ s, $v_2=at_2=\frac{2d_1}{t_1^2}t_2=4$ m/s$\Rightarrow E_c=\frac{mv_2^2}{2}=8$ J

**5.** Lansat pe o suprafaţă orizontală cu o viteză iniţială $v_0$, corpul are o mişcare uniform încetinită, astfel $F_f=-ma\Rightarrow\mu N=-ma\Rightarrow\mu mg=-ma\Rightarrow$
$a=-\mu g$. Cum $a_m=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v_0}{t}\Rightarrow v=v_0+at\Rightarrow v=v_0-\mu gt\Rightarrow$energia cinetică este $E_c=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}(v_0-\mu gt)^2=81$ J

**6.** Conform definiției energia potențială gravitațională este: $E_p = mgd = mg\frac{h}{4} = 5$ J.

**7.** Cum energia potențială gravitațională este: $E_p = mgh \Rightarrow \frac{E_{p_2}}{E_{p_1}} = \frac{m_2gh}{m_1gh} = 4$.

**8.** Corpul aruncat pe verticală de jos în sus are o mişcare uniform încetinită cu accelerația $g$, astfel că $v = v_0 - gt$, iar la înălțimea maximă $v$=0, astfel că timpul de oprire este $t_{op} = \frac{v_0}{g}$. Înălțimea maximă la care ajunge corpul este $h_{max} = v_m t_{op} = \frac{v_0}{2}t_{op} = \frac{v_0^2}{2g}$. La jumătate din înălțimea maximă, energia potențială gravitațională este: $E_p = mg\frac{h_{max}}{2} = \frac{mv_0^2}{4} = 20$ J.

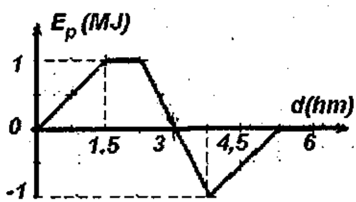
**9.** Din grafic $h = 2$ m şi $E_p = 30$ J, iar conform definiției energiei potențiale gravitaționale: $E_p = mgh \Rightarrow m = \frac{E_p}{gh} = 1,5$ kg.

**10.a.** Când drumul este orizontal energia potențială gravitațională este constantă. Prin urmare cum $E_p$=*const* obținem intervalele de timp în care drumul este orizontal $\Delta t \in [0,2;0,3]$min când $E_p$=1 MJ şi $\Delta t \in [0,7;0,8]$min când $E_p$=0 MJ

**b.** Camionul începe să coboare când energia potențială a lui începe să scadă, adică după $t$=0,3 min. Cum $\Delta E_p = mg\Delta h$, atunci diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul şi punctul din care acesta începe să coboare este $\Delta h = \Delta E_p/(mg) \approx 10$ m

**c.** Calculăm distanța parcursă de camion într-un interval de timp $\Delta t$=0,1 min. Astfel $d_1 = v\Delta t$=75 m.

Reprezentarea grafică a energiei potențiale $E_p$ a camionului, în funcție de distanța parcursă $d$ este redată în figura alăturată.




**d.** Din grafic observăm că după ce camionul parcurge o distanță egală cu 375 m față de punctul de pornire, energia potențială este $E_{pf}$=−1 MJ. Astfel variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării până ajunge la 375 m este $\Delta E_p = E_{pf} - E_{pi}$=−1 MJ, deoarece $E_{pi}$=0

**11.** Conform definiției energia potenția lă elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2}$. Cum $F_{el} = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} \Rightarrow E_p = \frac{Fx}{2} = 0,5$ J.

**12.** Din definiția energiei potențiale elastice: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_p}{x^2} = \frac{k}{2}$, deci panta dreptei este $\frac{k}{2}$, adică jumătate din valoarea constantei elastice a resortului.

**13.** Pe baza definiției energiei potențiale elastice $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1 x_1^2}{k_2 x_2^2}$.

Când cele două resorturi sunt legate în serie forțele elastice cu care acționează unul asupra celuilalt sunt egale, conform principiului acțiunii și reacțiunii, astfel că $F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{k_2}{k_1} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_2}{k_1} = 2$

**14.** Energie potențială elastică este: $E_p = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2}$.

Deoarece resorturile sunt legate în paralel, sub acțiunea unei forțe deformatoare ele se vor deforma la fel, astfel că $x_1 = x_2 = x \Rightarrow \frac{E_{p_1}}{E_{p_2}} = \frac{k_1}{k_2} \approx 0{,}333$.

**15.a.** Din grafic determinăm constantele elastice pentru fiecare resort. Pentru primul resort când $x_1^2 = 8$ cm², $E_{p_1} = 16$ J $\Rightarrow k_1 = \frac{2E_{p_1}}{x_1^2} = 4 \cdot 10^4$ N/m.

Pentru al doilea resort când $x_2^2 = 4$ cm², $E_{p_2} = 32$ J $\Rightarrow k_2 = \frac{2E_{p_2}}{x_2^2} = 16 \cdot 10^4$ N/m.

**b.** Când se leagă în serie resorturile se alungesc cu $x_1$ și respectiv $x_2$, astfel că alungirea totală este $x = x_1 + x_2$. La legarea în serie forțele elastice are apar în cele două resorturi sunt egale, astfel că:

$$F_{el_1} = F_{el_2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{k_2 x_2}{k_1} \Rightarrow x = x_2\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2} = 4 \text{ cm.}$$

## 3.3. Teorema de variație a energiei cinetice

**1.a.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru mașină din momentul frânării până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -\frac{mv^2}{2}$

$\Rightarrow L_{Ff} = -10^5$ J

**b.** Forța de frânare este $F_f = ma = mv/\Delta t$ =500 N

**c.** Distanța parcursă de mașină până la oprire este $d = v_m \Delta t = v\Delta t/2$=200 m

**2.a.** Lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanța $d$ este $L = Fd$=180 J

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul format din barcă, prieten, fetiță și soție din momentul pornirii până în momentul când acesta parcurge distanța $d$: $\Delta E_c = L = L_{Ft} + L_{Ff}$, unde $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$=250kg

$$\frac{mv^2}{2}=(F-F_r)d \Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(F-F_r)d}{m}}=0{,}894\ \text{m/s}$$

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru barcă din momentul încetării acțiunii forței $F$ până în momentul opririi, astfel că $\Delta E_c = L_{Fr} \Rightarrow$

$$-\frac{mv^2}{2}=-F_r s_{op} \Rightarrow s_{op}=\frac{mv^2}{2F_r}=\frac{(F-F_r)d}{F_r}=1{,}25\ \text{m}$$

**3.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp din momentul pornirii până în momentul $t$, $\Delta E_c = L \Rightarrow E_C = Fd \Rightarrow d = E_C / F$ =2 m

**b.** Cum $E_C=\frac{mv^2}{2}$ și din $F=ma=m\frac{\Delta v}{\Delta t}=m\frac{v}{\Delta t}$ prin împărțirea relațiilor obținem $\frac{E_C}{F}=\frac{v\Delta t}{2} \Rightarrow v=\frac{2E_C}{F\Delta t}$=2 m/s

**c.** Din $E_C=\frac{mv^2}{2} \Rightarrow m=\frac{2E_C}{v^2}=\frac{F^2\Delta t^2}{2E_C}$=4 kg

**d.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corp din momentul aplicării forței suplimentare până în momentul opririi $\Delta E_c = L = L_F + L_{Fs}' \Rightarrow$

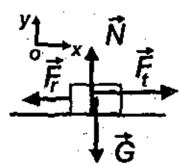
$$-\frac{mv^2}{2}=FD-F_S D \Rightarrow F_S=F+\frac{mv^2}{2D}=20\ \text{N}$$

**4.a** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru intervalul de timp $\Delta t$, astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{Ft} + L_{Fr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=L_{Ft}-F_f d \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat forța de tracțiune este $L_{tr}=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}+F_f d$=72 J

**b.** Din definiție $L_{Ft}=F_t d \Rightarrow F_t = L_{Ft}/d$. Deoarece puterea medie dezvoltată de forța de tracțiune este $P_m=\frac{L}{\Delta t}=\frac{F_t d}{\Delta t}=F_t v_m=\frac{(v_1+v_2)L_{Ft}}{2d}$=14,4 W.

Din $P_m=\frac{L_{Ft}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t=\frac{L_{ft}}{P_m}$=5 s.

**c.** Din expresia forței de frecare $F_f=\mu N=\mu mg \Rightarrow \mu = F_f/(mg)$=0,1




**5.a.** Deoarece inițial autoturismul se deplasa cu viteza constantă înseamnă că rezultanta forțelor care acționau asupra automobilului este nulă. Astfel vectorial $\vec{F_t}+\vec{N}+\vec{G}+\vec{F_r}=0$, iar scalar $F_t$=$F_r$. Cum $P$=$F_t v \Rightarrow F_t$=$P/v$. După ce motorul se oprește datorită forțelor de rezistență autoturismul se oprește. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow L=-\frac{mv^2}{2}=-90\ \text{kJ}$$

**b.** Cum $L = F_r d\cos 180 = -F_r d = -Pd/v \Rightarrow d = -Lv/P$ =90 m

**c.** Din $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{v}{t} \Rightarrow t = -\frac{v}{a}$. Studiind mişcarea autoturismului obţinem: $-F_r = ma \Rightarrow a = -F_r/m = -P/(mv) \Rightarrow t = mv^2/P$ =12 s

**6.a.** Lucrul mecanic efectuat de forţele de rezistenţă este $L = F_r d\cos 180 = -F_r d = -fmgd$ =-24 MJ

**b.** Puterea mecanică dezvoltată de locomotivă este $P=F_t v$. Deoarece trenul se deplasează cu viteză constantă, atunci $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = 0$, iar scalar $F_t=F_r=fmg \Rightarrow v=P/((fmg)$=20 m/s. Lucrul mecanic efectuat de locomotivă este $L=P\Delta t$=48 MJ

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru ultimul vagon. $\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{mv^2}{2} - F_r d_1 = -fmgd_1 \Rightarrow d_1 = \frac{v^2}{2fg}$ =2 km

**7.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru intervalul de timp $\Delta t$, astfel că $\Delta E_c = L_t = L_{Ft} + L_{Fr} + L_N + L_G \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L + L_{Fr} \Rightarrow$

$L_{Fr} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} - L$ =-75 kJ

**b.** Din formula puterii medii $P = F_t v_m = F_t(v_1 + v_2)/2$ obţinem forţa de tracţiune dezvoltată de motor $F_t = 2P/(v_1 + v_2)$=6 kN. Studiem mişcarea corpului, astfel că $\vec{F}_t + \vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_r = m\vec{a}$. Scalar $F_t - F_r = ma \Rightarrow F_r = F_t - ma$.

Din $L = P\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P}$ =5 s şi cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ =3 m/s² $\Rightarrow F_r$=1,2 kN

**c.** Distanţa parcursă de camionetă în intervalul de timp $\Delta t$ este $d=v_m\Delta t=(v_1+v_2)\Delta t/2$=62,5 m

**8.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul opreşte alimentarea cu energia electrică şi punctul de oprire: $\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{mv_0^2}{2}$, deoarece în final trenul se opreşte şi viteza finală este nulă, $L_{F_r} = -F_r d = -f_1 mgd$, deoarece forţa de rezistenţă apare pe tot parcursul mişcării pe distanţa $d$ de la întreruperea alimentării cu energie electrică şi este o forţă cu caracter rezistiv, iar $L_{F_f} = -F_f s = -f_2 mgs$, deoarece forţa de frânare apare din momentul punerii în acţiune a sistemului de frânare şi acţionează pe distanţa $s$ având caracter rezistiv. Înlocuind formulele în teorema de variaţie a energiei cinetice obţinem: $-\frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd - f_2 mgs \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2f_2 g} - \frac{f_1 d}{f_2}$ =288 m.

**b.** Lucrul mecanic efectuat de forța de frânare este $L_{Ff} = -F_f s = -f_2 mgs \Rightarrow$

$$L_{ff} = -\frac{mv_0^2}{2} + f_1 mgd = -36\ \text{MJ}$$

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru tren între punctul în care mecanicul oprește alimentarea cu energia electrică și punctul aflat la distanța $d_1$: $\Delta E_c = L = L_{F_r} + L_{F_f}$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$. Lucrul mechanic al forței de rezistemță este $L_{F_r} = -F_r d_1 = -f_1 mgd_1$, iar al forței de frânare $L_{F_f} = -F_f(s-d+d_1) = -f_2 mg(s-d+d_1)$, deoarece trenul frânează pe *distanța s-d+d₁*. Astfel se obține $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -f_1 mgd_1 - f_2 mg(s-d+d_1) \Rightarrow$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2f_1 dg - 2f_2 g(s-d+d_1)} \approx 16{,}43\ \text{m/s}$$

**9.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion între punctele $A$ și $B$: $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_G$. Deoarece avionul planează cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că $L_{Fr} = -L_G = -mg(h_1 - h_2) = -25$ MJ

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru avion la întoarcerea acestuia, astfel că $\Delta E_c = L = L_{Fr} + L_G + L_F$. Deoarece avionul se întoarce cu viteză constantă, atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că lucrul mecanic dezvoltat de motor este $L_F = -L_G - L_{Fr} = 2mgh = 50$ MJ, deoarece greutatea este o forță rezistivă

**c.** Deoarece $d = v\Delta t \Rightarrow \Delta t = d/v$, astfel că puterea dezvoltată de motor este $P = L/\Delta t = Lv/d = 2\cdot 10^5$ W

**10.a.** Lucrul mecanic efectuat de greutatea jucăriei suspendate este $L_G = MgH = 13{,}5$ J, deoarece greutatea este forță de tip conservativ și lucrul ei mecanic depinde doar de poziția inițială și de cea finală

**b.** Reprezentăm forțele care acționează asupra sistemului format din elicopter și jucărie, astfel că $\vec{F} + \vec{G} = (m+M)\vec{a}$. Doarece sistemul de corpuri va coborî, aplicâm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii și până ce este scăpată jucăria, astfel că

$$\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow \frac{(m+M)v^2}{2} = (m+M)gh - Fh \Rightarrow v = \sqrt{2\left(g - \frac{F}{m+M}\right)h} \approx 6{,}32\text{m/s}$$

**c.** Din momentul în care scapă jucăria elicopterul se va mai mișca în jos pe distanța $x$ după care se oprește. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul în care scapă jucăria și punctul unde elicopterul se oprește. Astfel: $\Delta E_c = L = L_G + L \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = mgx - Fx \Rightarrow x = \frac{mv^2}{2(mg-F)} = 2$ m

Energia potențială minimă a elicopterului este $E_{Pmin} = mg(H-h-x) = 1{,}5$ J


**11.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice:
$\Delta E_c = L = L_G + L_F$, unde $L_G = -mg\ell$, deoarece când glontele se deplasează de jos în sus greutatea glontelui nu ajută la mișcarea

acestuia şi prin urmare greutatea este o forţă rezistivă, iar $L_{F_f} = -F_f\ell$, deoarece şi forţa de frecare este o forţă rezistivă. $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell - F_f\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\ell}{m}(mg + F_f)} = 400\ \text{m/s}$.

**b.** Dacă glontele este tras de sus în jos, pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell - F_f\ell$, deoarece în acest caz greutatea ajută la mişcarea glontelui şi este o forţă motoare $\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\ell}{m}\left(mg - F_f\right)} = 400{,}1\ \text{m/s}$.


**c.** Dacă glontele este tras pe orizontală, pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice, $\Delta E_c = L \Rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -F_f\ell \Rightarrow$

$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2F_f\ell}{m}} \approx 400{,}05\ \text{m/s}$

**12.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul acţiunii forţei $F$ până în momentul în care acţiunea forţei încetează. $\Delta E_c = L = L + L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = L + mg\left(h - h_0\right) \Rightarrow h = h_0 + \frac{2L - mv^2}{2mg}$ =4,2 m

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care acţiunea forţei încetează până în momentul în care bila atinge înălţimea maximă. Astfel $\Delta E_c = L_G \Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -mg\left(H - h\right) \Rightarrow H = h + \frac{v^2}{2g}$ =5 m

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru bilă din momentul în care bila atinge înălţimea maximă până în momentul în care trece prin punctul iniţial $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mg\left(H - h_0\right) \Rightarrow v = \sqrt{2g\left(H - h_0\right)} \approx 8{,}94\ \text{m/s}$

**13.a.** Din definiţie $\Delta E_{P2} = -L_{G2} = -m_2gh_2 = -200$ J

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru un corp care cade liber de la înălţimea $h$, între punctul de plecare şi punctul în care corpul atinge solul. Astfel obţinem $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \approx 1{,}41$

**c.** Cum $v = g\Delta t \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \approx 1{,}41$

**14.a.** Energia mecanică iniţială este $E_{mi} = mgH$. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul care cade liber de la înălţimea $H$, între punctul de plecare şi punctul impactului cu solul. Astfel obţinem: $\Delta E_c = L = L_G + L_{Fr} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgH + L_{Fr} \Rightarrow L_{Fr} = \frac{mv^2}{2} - mgH$. Energia mecanică totală pe care o are corpul imediat înaintea impactului cu solul este $E_{mf} = \frac{mv^2}{2} = fE_{mi} = fmgH \Rightarrow L_{Fr} = -(1-f)mgH = -300$ J

**b.** Din relația precedentă obținem viteza corpului la atingerea solului $v = \sqrt{2fgH} \approx 42,42$ m/s

**c.** Cum $L_{Fr} = -F_r H \Rightarrow F_r = -L_{Fr}/H = 3$ N

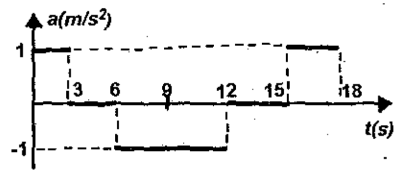
**15.a.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice: $\Delta E_c = L$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$, deoarece $v_0 = 0 \Rightarrow L = \frac{mv^2}{2} = 4500$ J, deoarece din grafic când $t$=40 s viteza corpului este $v$=30 m/s.

**b.** Deoarece lucrul mecanic este: $L = F_m d$, forța medie este $F_m = L/d$, unde $d$ reprezintă distanța parcursă de mobil în primele 40 s de la începerea mişcării. Din grafic distanța parcursă se calculează cu aria cuprinsă între curba vitezei şi axa timpului până ce $t$ =40 s$\Rightarrow d$ =600 m$\Rightarrow F_m$ =7,5 N.

**c.** Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = 0$, deoarece vitezele inițială şi finală sunt nule la momentele $t_1 = 0$ s şi $t_2 = 90$ s

**16.a.** Se utilizează definiția accelerației $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ pe diferitele porțiuni.

Reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mişcări este redată în figura alăturată.




**b.** Distanța parcursă de corp este modulul ariei cuprinse între graficul vitezei şi axa timpului. Obținem $d$=18 m.

**c.** Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L \Rightarrow L = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$ $L$=−0,45 J, deoarece la momentul $t_2$, $v_2$=0 m/s şi la momentul $t_1$, $v_1$=3 m/s

**17.a.** Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic obținem lucrul mecanic efectuat de forța $F$ ca fiind aria trapezului $L$=140 J

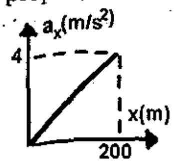
**b.** Forța medie este $F_m$=$L/d$=14 N

**c.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice $\Delta E_c = L_1 \Rightarrow L_1 = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow$ $v_1 = \sqrt{2L_1/m} \approx 6,32$ m/s, deoarece lucrul mecanic pe primii 4 m reprezintă aria triunghiului determinat de graficul forței, axa $ox$ şi ordonata construită prin punctual de coordonată $x_1$=4 m, astfel că $L_1$=40 J

**d.** Aflăm viteza corpului în punctul de coordonată $x_2$=6 m, astfel că $v_2 = \sqrt{2L_2/m} \approx 10,95$ m/s, deoarece lucrul mecanic pe primii 6 m reprezintă aria trapezului determinat de graficul forței, axa $ox$ şi ordonata construită prin punctual de coordonată $x_2$=8 m, astfel că $L_2$=120 J.

Din $a=\frac{F}{m}$ şi cum $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=\frac{v_2-v_1}{a}=\frac{m(v_2-v_1)}{F}$=0,463 s

**18.a.** Din grafic pe primii 200 m forţa $F_x$ depinde direct proporţional de coordonata $x$, astfel că $F_x=bx$, unde $b$=20 N/m. Cum $F_s=ma_x \Rightarrow a_x=bx/m \Rightarrow a_x=0{,}02x$. Reprezentarea grafică a proiecţiei acceleraţiei $a_x$ pe direcţia mişcării automobilului, în funcţie de coordonata $x$, este redată în figura alăturată.



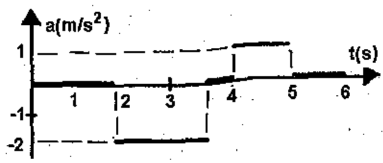

**b.** Viteza devine maximă în momentul în care automobilul nu mai accelerează. Astfel pe primii 200 m automobilul are o mişcare accelerată cu acceleraţia crescătoare, pe următorii 100 m are o mişcare uniform accelerată, iar pe următorii 100 m are o mişcare accelerată cu acceleraţie descrescătoare. Astfel la 400 m $F_x=0 \Rightarrow a_x=0 \Rightarrow$ la coordonata $x_m$=400 m viteza automobilului devine maximă.

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forţa rezultantă reprezinză aria cuprinsă între graficul forţei, axa coordonatei şi ordonata construită în punctul de coordonată $x$=300 m, astfel că $L=8\cdot 10^5$ J

**d.** Pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c=L\Rightarrow L=\frac{mv_1^2}{2}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2L}{m}}$=40 m/s

**19.a.** În primele 3 s viteza corpului este pozitivă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei $Ox$. Distanţa parcursă în primele 3 s este $d$=5 m, astfel că dacă presupunem că mobilul porneşte din originea axei $Ox$, după 3 s acesta ajunge în punctul de coordonată $x_1=d$=5 m (aria trapez). În următoarele 2 s viteza corpului este negativă, ceea ce arată că mobilul se deplasează în sensul negativ al axei $Ox$, parcurgând distanţa $d_2$=1,25 m (aria trapez de sub axa timpului). Astfel după 5s, coordonata finală este $x_f$=3,75m. Viteza medie este $v_m=\Delta x/\Delta t=x_f/\Delta t$=0,75 m/s

**b.** Deoarece acceleraţia este $a=\Delta v/\Delta t$, reprezentarea grafică a acceleraţiei în funcţie de timp în intervalul $t\in(0,6)$s în figura alăturată.




**c.** Lucrul mecanic al rezultantei forţelor se află pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice, astfel că $\Delta E_c=L\Rightarrow L=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}$=−15 J, deoarece la momentul $t_1$=2s, viteza este $v_1$=2 m/s şi la momentul $t_1$=3,5 s, viteza este $v_2$=−1 m/s.

**20.a.** Iniţial corpul se mişcă aceelerat, iar după ce acţiunea forţei de tracţiune încetează asupra corpului se va exercita numai forţa de frecare. Astfel forţa de frecare este $F_f$=20 N. Cum pentru $x\in[100{,}500]$m $R_x=F_t-F_f$, obţinem valoarea forţei de tracţiune $F_t=R_x+F_f$=60 N

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de coordonată $x_0$=100 m şi punctul de coordonată $x_1$=500 m: $\Delta E_c=L_{Ft}+L_{Ff}$. Din interpretarea geometrică a lucrului mecanic $L=L_{Ft}+L_{Ff}=16$ kJ, astfel că $\frac{mv_1^2}{2}=L \Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2L}{m}}$ =80 m/s

**c.** Puterea medie dezvoltată de motor este $P_m=F_t v_m=F_t v_1/2=2400$ W

**d.** Din $P_m=\frac{L}{\Delta t}$ obţinem $\Delta t=\frac{L}{P_m}=\frac{F_t(x_1-x_o)}{P_m}=10$ s

**e.** Analog $\Delta E_c=L_{Ff} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=-F_f(x_2-x_1) \Rightarrow v_2=\sqrt{v_1^2-\frac{2F_f(x_2-x_1)}{m}}$ =60 m/s

**21.a.** Lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului este $L_1=F_1 y_1=60$ kJ

**b.** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c=L_1+L_G \Rightarrow$ $\frac{mv_1^2}{2}=L_1-mgy_1 \Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2}{m}(L_1-mgy_1)} \approx 6{,}32$ m/s

**c.** Pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c=L_2+L_G \Rightarrow$ $\frac{mv_2^2}{2}=L_2-mgy_2 \Rightarrow v_2=\sqrt{\frac{2}{m}(L_2-mgy_2)}$ =8 m/s, deoarece lucrul mecanic efectuat de motorul ascensorului reprezintă aria de sub graficul forţei, axa coordonatei şi ordonata construită când $y_2=22$ m, astfel că $L_2=126$ kJ.
Puterea instantanee a motorului în punctul de coordonată $y_2=22$ m este $P=F_2 v_2=40$ kW

**22.a.** Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucrul mecanic total efectuat de forţă este egal cu aria de sub graficul forţei, axa coordonatei şi ordonata construită când $x=25$ m. Se obţine: $L=112{,}5$ J.

**b.** Observăm că pentru $x \in (10,25)$ m forţa scade liniar cu $x$, astfel că $F=ax+b$. Cum pentru $x_1=10$ m, $F_1=10$ N, iar pentru $x_2=25$ m, $F_2=-5$ N obţinem valorile $a=-1$ N/m şi $b=20$ m. Pentru $x_3=12$ m obţinem $F_3=8$ N

**c.** Cu ajutorul teoremei de variaţie a energiei cinetice, $\Delta E_c=L_1$, unde $L_1=93$ J reprezintă aria de sub graficul forţei, axa coordonatei şi ordonata construită când $x_3=12$ m. Cum $\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=L_1 \Rightarrow v_1=\sqrt{v_0^2+\frac{2L_1}{m}}$ =10 m/s
Puterea instantanee este $P=F_3 v_1=80$ W

**23.a.** Pe baza interpretării geometrice a lucrului mecanic, lucrul mecanic efectuat de forţă este egal cu aria de sub graficul forţei şi axa coordonatei *Ox*. Se obţine: $L=100$ J.

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c=L+L_{Ff}$ şi cum $L_{Ff}=-\mu Nx=-\mu mgx$ obţinem $\frac{mv^2}{2}=L-\mu mgx \Rightarrow v=\sqrt{2\left(\frac{L}{m}-\mu gx\right)}$ =4 m/s

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul în care încetează acţiunea forţei $F$ şi punctul în care corpul se opreşte, astfel că $\Delta E_c=L_{Ff} \Rightarrow -\frac{mv^2}{2}=-\mu mgs_{op} \Rightarrow s_{op}=\frac{v^2}{2\mu g}$ =4 m

**24.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice $\Delta E_c = L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -\frac{mv_0^2}{2} = -1$ J

**b.** Considerăm cazul în care scândura a pătruns pe astfalt pe distanţa *x*.. Din legea frecării $F_f=\mu N=\mu m_x g$, unde $m_x$ reprezintă masa scândurii care a intrat pe asfalt. Deoarece scândura este omogenă, masa ei este uniform distribuită pe lungimea ei, astfel că masa porţiunii cu lungimea $\ell$ este $m_x = \frac{mx}{\ell} \Rightarrow F_f = \frac{\mu mgx}{\ell}$. Deoarece forţa de frecare depinde direct proporţional de *x* lucrul ei mecanic este $L_{Ff} = -F_{fm}d = -\frac{\mu mgd^2}{2\ell}$, deoarece forţa de frecare medie reprezintă media aritmetică a valorilor pentru $x=0$ şi pentru $x=d$, $d$ fiind distanţa pe care pătrunde scândura pe asfalt. Din cele două relaţii pentru lucrul mecanic al forţelor de frecare obţinem: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\mu mgd^2}{2\ell}$ (1).

Obţinem $d = v_0\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$ =0,5 m

**c.** Dacă scândura este de două ori mai lungă pentru a pătrunde pe asfalt pe aceeaşi distanţă ca şi prima trebuie îndeplinită relaţia $\frac{m' v_{01}^2}{2} = \frac{\mu m' gd^2}{2\ell'}$ (2).

Prin împărţirea relaţiei (2) la (1) obţinem $\frac{v_{01}^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{01} = \frac{v_0\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ m/s

**25.a.** Energia cinetică a corpului în momentul iniţial este $E_c = \frac{mv_0^2}{2}$=72 J

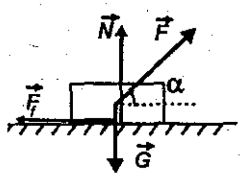
**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare şi punctul de la capătul liber al platformei, astfel că $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff}$. Cum $\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, iar lucrurile mecanice sunt $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu mg\ell$, $L_G=0$, $L_N=0$.

Obţinem $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell}$ =5 m/s

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de la capătul liber al platformei şi punctul în care corpul loveşte solul, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow$

$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gh}$ =7 m/s

**26.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice:
$\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G$.




$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2}$, deoarece iniţial corpul se află în repaus.

Din definiţia lucrului mecanic $L_F = Fd\cos\alpha$, $L_N = 0$ şi $L_G = 0$, deoarece aceste două forţe sunt perpendiculare pe direcţia de mişcare, iar lucrul mecanic al forţei de frecare $L_{F_f} = -F_f d = -\mu N d$.

Din proiecţia relaţiei vectoriale pe verticală obţinem:

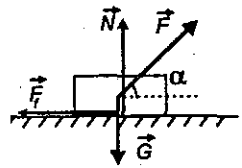
$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d$

$$\frac{mv^2}{2} = Fd\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)d \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2d}{m}\left[F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg\right]} \approx 4{,}57\,\mathrm{m/s}$$

**b.** $E_c = \frac{mv^2}{2} = Fd(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg \approx 20{,}95$ J.

**c.** Prin definiţie puterea medie este: $P_m = \frac{L_F}{\Delta t} = \frac{Fd\cos\alpha}{\Delta t}$ şi cum $d = v_m\Delta t \Rightarrow P_m = Fv_m\cos\alpha$. Deoarece sub acţiunea forţei *F*, corpul va avea o mişcare uniform accelerată, viteza medie se calculează prin media artimetică a valorilor de la capetele intervalului $v_m = \frac{0+v}{2} = \frac{v}{2} \Rightarrow P_m = \frac{Fv\cos\alpha}{2} \approx 29{,}69\mathrm{W}$.

**27.a.** Din $L = Fd\cos\alpha \Rightarrow d = L/(F\cos\alpha)$=2 m




**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{F_f} = -F_f d = -\mu N d$. Proiectând forţele pe verticală:

$N + F\sin\alpha - mg = 0 \Rightarrow L_{F_f} = -\mu(mg - F\sin\alpha)d = -4$ J

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice:

$\Delta E_c = L = L_F + L_N + L_{F_f} + L_G \Rightarrow$

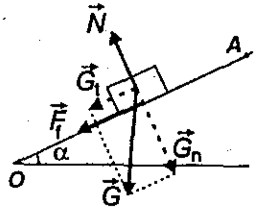
$\frac{mv^2}{2} = L + L_{Ff} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L + L_{Ff})}{m}}$=4 m/s. Viteza medie $v_m = v/2$, astfel că puterea medie dezvoltată de forţa *F* este $P_m = Fv_m\cos\alpha = \frac{Fv\cos\alpha}{2}$=20 W. Dar

$P_m = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{P_m}$=1 s

**d.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pemtru corp între marginea mesei şi sol, astfel că $\Delta E_c = L_G \Rightarrow \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow E_{cf} = \frac{mv^2}{2} + mgh$

$\Rightarrow E_{cf}$=36 J

**28.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$.

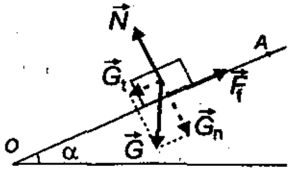



Cum $\Delta E_{c_{OA}} = E_{c_A} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2}$, unde $v_0$ este viteza cu care este lansat corpul de jos din *O* în sus spre *A*.

$L_G = -mgh = -mg\ell\sin\alpha$ , $L_N = 0$ şi $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$ obţinem

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 14,14 \text{ m/s}.$$

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$ .

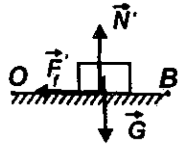



$L_G = mgh = mg\ell\sin\alpha$ , $L_N = 0$ şi

$L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha$ .

Cum $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \dfrac{mv^2}{2}$ obţinem:

$$\frac{mv^2}{2} = mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 10 \text{ m/s}.$$

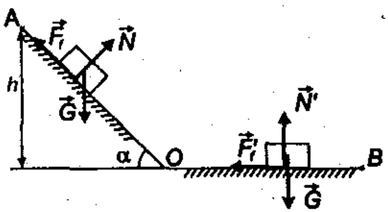



**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice în cazul mişcării corpului pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{OB}} = L_{F_f'} + L_{N'} + L_G$ ,

$$\Delta E_{c_{OB}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv^2}{2};\ L_{N'} = 0;\ L_G = 0;\ L_{F_f'} = -F_f'd = -\mu' N'\ell = -\mu' mgd$$

$$\Rightarrow -\frac{mv^2}{2} = -\mu' mgd \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu' g} = \frac{\ell(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu'} = 50 \text{ m}.$$

**29.a.** Aplicăm între punctele $A$ şi $B$ teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_{c_{AB}} = L = L_G + L_{F_f} + L_N$ . Deoarece corpul porneşte din repaus şi în final se opreşte $\Delta E_{c_{AB}} = 0$ . Deoarece greutatea este o forţă motoare $L_G = mgh$, $L_N$=0 şi




$$L_{F_f} = -F_f AO - F_f' OB = -\mu N\frac{h}{\sin\alpha} - \mu N'\left(d - \frac{h}{tg\,\alpha}\right),$$ deoarece $AO = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ şi

$$OB = d - \frac{h}{tg\,\alpha} \Rightarrow L_{F_f} = -\mu mgh\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu mg\left(d - \frac{h}{tg\,\alpha}\right) = -\mu mgd .$$

Obţinem: $0 = mgh - \mu mgd \Rightarrow \mu = \dfrac{h}{d} = 0,2.$

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $O$:

$\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$ . Cum $\Delta E_{c_{AO}} = E_{cO} = \dfrac{mv^2}{2}$ ; $L_G = mgh$; $L_N$=0, $L_{F_f} = -\mu mghctg\alpha$

obţinem $\dfrac{mv^2}{2} = mgh - mghctg\alpha \Rightarrow v = \sqrt{2gh(1 - \mu ctg\alpha)} \approx 6,32$ m/s

**c.** Puterea medie a forţei de frecare la coborârea saniei pe pârtie este $P_m = F_f v_m \cos 180 = -\dfrac{\mu mgv\cos\alpha}{2} \approx 24,5$ W, deoarece $v_m = \dfrac{v}{2}$ şi deoarece

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \approx 0{,}97$

**30.a.** Studiem urcarea cărămizii pe scândură. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}_u$, iar pe direcţia de mişcare $-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_u \Rightarrow a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ (1)
Studiem coborârea cărămizii pe scândură. Astfel $\vec{N}+\vec{G}+\vec{F}_f = m\vec{a}_c$, iar scalar pe direcţia de mişcare $mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_c \Rightarrow a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (2).
Deoarece $|a_u| = 2a_c \Rightarrow g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \Rightarrow \mu = tg\alpha/3 \approx 0{,}33$

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice la urcarea cărămizii pe scândură: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_N = 0$
$L_G = -mgh = -mgs_{op}\sin\alpha$ şi $L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mgs_{op}\cos\alpha$.
Obţinem: $-\frac{mv_o^2}{2} = -mgs_{op}\sin\alpha - \mu mgs_{op}\cos\alpha \Rightarrow s_{op} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 0{,}85$ m

**c.** Randamentul scândurii înclinate este $\eta = \frac{1}{1+\mu ctg\alpha}$ =75%

**31.a.** Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului de la lansarea corpului până la revenirea acestuia în locul de lansare este 0, deoarece greutatea este o forţă conservativă astfel că lucrul ei mecanic pe o traiectorie închisă este nul.

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat: $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$,
$L_N = 0$; $L_G = -mgh$, unde $h$ reprezintă înălţimea la care urcă corpul pe planul înclinat, $L_{F_f} = -F_f s_{op} = -\mu N s_{op} = -\mu mgs_{op}\cos\alpha = -\mu mghctg\alpha$ cu $\sin\alpha = \frac{h}{s_{op}}$.

$-\frac{mv_o^2}{2} = -mgh - \mu mghctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g(1+\mu ctg\alpha)} \Rightarrow E_p = \frac{mv_0^2}{2(1+\mu ctg\alpha)} = \frac{E_{co}}{1+\mu ctg\alpha} \Rightarrow$
$E_p$=312,5 J, deoarece ctgα=4

**c.** $L_{F_f} = -\mu mghctg\alpha = -\frac{\mu E_{co}}{\mu + tg\alpha} = -187{,}5$ J

**d.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $O$ şi punctul de coborâre $O$. $\Delta E_{c_{OA}} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{OO}} = E'_{c_O} - E_{co}$; $L_N = 0$;
$L_G = 0$ şi $L_{F_f} = -2\mu mghctg\alpha = -\frac{2\mu E_{co}ctg\alpha}{1+\mu ctg\alpha}$, astfel că: $E'_{co} = E_{co}\frac{1-\mu ctg\alpha}{1+\mu ctg\alpha}$ =125J

**32.a.** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $O$ şi punctul $A$, astfel că $\Delta E_{c_{OA}} = L_G \Rightarrow E_{co} = mg(H-h)$=160 J

**b.** După ciocnirea cu planul energia cinetică a corpului este $E'_c = E_c(1-f)$, astfel energia mecanică totală a corpului imediat după ciocnirea cu planul este $E_m = E'_c + E_p = mg(H-h)(1-f) + mgh$ =80 J

**c.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ și punctul $B$, astfel că $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_c'$, $L_N$=0, $L_G = mgh$ și $L_{Ff} = -F_f\ell$ obținem $E_{cB} = mg(H-h)(1-f) + mgh - F_f\ell$ =64 J$\Rightarrow$ $v = \sqrt{2E_{cB}/m}$ =8 m/s

**d.** Din $F_f = \mu mg\cos\alpha \Rightarrow \mu = \dfrac{F_f}{mg\cos\alpha} \approx 0{,}23$, deoarece $\sin\alpha = \dfrac{h}{\ell}$ =0,5$\Rightarrow \alpha$ =30⁰

**33.a.** $L_{fAB} = F_f d\cos 180 = -\mu_1 Nd = -\mu_1 mgd$ =-125 J

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $A$ și $B$ $\Delta E_{c,AB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_G$=0; $L_N$=0; $L_{fAB} = -\mu_1 mgd$ și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA}$ obținem $E_{cB} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \mu_1 mgd$ =125 J

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $B$ și $C$ $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = -E_{cB}$; $L_G = -mgh$; $L_N$=0 și $L_{Ff} = -F_f BC = -\mu_2 mgBC\cos\alpha = -\mu_2 mghctg\alpha$ obținem: $E_{cB} = mgh + \mu_2 mghctg\alpha$

$\Rightarrow h = \dfrac{E_{cB}}{mg(1+\mu_2 ctg\alpha)}$ =1,25 m

**d.** Randamentul planului înclinat este $\eta = \dfrac{1}{1+\mu_2 ctg\alpha}$ =50%

**34.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $A$ și $C$ $\Delta E_{cAC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = 0$; $L_G = mgh$ și $L_N$=0. Astfel $L_{Ff} = -mgh = -mg\ell\sin\alpha = -360$ J

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $B$ și $C$ $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Cum $L_G = mgh$; $L_N$=0; $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha$ și

$\Delta E_{cBC} = E_{cC} - E_{cB} = \dfrac{mv_0^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{8} = \dfrac{3mv_0^2}{8} \Rightarrow \dfrac{3mv_0^2}{8} = mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$

$\mu = tg\alpha - \dfrac{3v_0^2}{8g\ell\cos\alpha}$ =0,125, deoarece $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ =0,8

**c.** Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice între punctele $A$ și $B$ $\Delta E_{cAB} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Dar $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = \dfrac{mv_0^2}{8} - \dfrac{mv_0^2}{2} = -\dfrac{3mv_0^2}{8}$; $L_G$=0; $L_N$=0 și $L_{Ff} = -F_f\ell = -\mu mgAB$. Astfel $\dfrac{3mv_0^2}{8} = \mu mgAB \Rightarrow AB = \dfrac{3v_0^2}{8\mu g}$ =120 m

**d.** Considerăm că $E_{pC}=0$, astfel că variația energiei mecanice totale a corpului între punctele $B$ şi $C$ este $\Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB}$, unde $E_{mC} = E_{cC} = \frac{mv_0^2}{2}$ şi $E_{mB} = E_{cC} + E_{pC} = \frac{mv_0^2}{8} + mgh \Rightarrow \Delta E_{mBC} = E_{mC} - E_{mB} = \frac{3mv_0^2}{8} - mg\ell \sin\alpha = -60$ J.
Calculăm lucrul mecanic al forței de frecare pe porțiunea $BC$, $L_{FfBC} = -\mu mg\ell\cos\alpha = -60$ J. Observăm că $\Delta E_{mBC} = -L_{FfBC}$

**35.a.** Lucrul mecanic al forțelor de frecare la deplasarea corpului din $C$ în $A$ este $L_{Ff} = F_f(CB + BA)\cos 180 = -2\mu mgCB\cos\alpha = -2\mu mghctg\alpha = -48$ J
**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $C$ şi $A$ $\Delta E_{cCA} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_N=0$ şi $L_G=0$, pentru că acest corp urcă până la aceeaşi înălțime şi din $\Delta E_{cCA} = E_{cA} - E_{cC} = -E_{cC} = -\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_C^2}{2} = 2\mu mghctg\alpha$
$\Rightarrow v_C = 2\sqrt{\mu ghctg\alpha} \approx 6{,}92$ m/s
**c.** Variația energiei mecanice a corpului între punctele $A$ şi $D$ este $\Delta E_{mAD} = E_{mD} - E_{mA} = E_{cD} + E_{pD} - E_{pA} = \frac{mv_D^2}{2} + \frac{mgh}{4} - mgh$, deoarece $E_{pB}=0$
Aflăm viteza corpului în punctul $D$ pe seama variație a energiei cinetice între punctele $A$ şi $D$, astfel că: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Din $L_G = mg(h_A - h_D) = \frac{3mgh}{4}$;
$L_N=0$; $L_{Ff} = -F_f AD = -\mu mgAD\cos\alpha = -\frac{3\mu mghctg\alpha}{4}$ şi $\Delta E_{cAD} = E_{cD} = \frac{mv_D^2}{2}$ obținem
$\frac{mv_D^2}{2} = \frac{3mgh}{4}(1 - \mu ctg\alpha) \Rightarrow \Delta E_{mAD} = -\frac{3\mu mghctg\alpha}{4} = -18$ J

**36.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$ de pe primul derdeluş $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_1 \Rightarrow$
$v_B = \sqrt{2gh_1} = 12$ m/s
**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul $B$ şi punctul $C$ de pe suprafață orizontală, astfel că $\Delta E_{cBC} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_N=0$ şi $L_G=0$, obținem $\frac{mv_c^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu g\ell} = 11$ m/s
**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $C$ şi $D$ de pe al doilea derdeluş $\Delta E_{cCD} = L_G + L_{F_f} + L_N$. Deoarece $L_G = -mgh_2$, $L_N=0$,

$L_{Ff} = -F_f CD = -\mu' mgCD\cos\alpha = -\mu' mgh_2 ctg\alpha$ şi $\Delta E_{cCD} = -E_{cC} = -\dfrac{mv_C^2}{2}$, astfel că

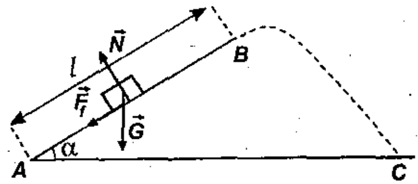
$$\frac{mv_C^2}{2} = mgh_2 + \mu' mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow \mu' = \left(\frac{v_C^2}{2gh_2} - 1\right) tg\alpha = 0{,}21$$

**d.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul $B$ şi acelaşi punct când corpul se întoarce. Astfel $\Delta E_{cBB} = L_G + L_{F_f} + L_N$, unde $L_G=0$, $L_N=0$ şi

$L_{Ff} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg\alpha$, iar $\Delta E_{cBB} = \dfrac{mv'^2_B}{2} - \dfrac{mv_B^2}{2}$. Obţinem:

$$\frac{mv'^2_B}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -2\mu mg\ell - 2\mu' mgh_2 ctg\alpha \Rightarrow v'_B = \sqrt{v_B^2 - 4g(\mu\ell + \mu' h_2 ctg\alpha)} \approx 7{,}48 \text{ m/s}$$

**37.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice la urcarea corpului pe planul înclinat $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.




$$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$L_G = -mgh = -mg\ell\sin\alpha$; $L_N = 0$ şi

$L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu N\ell = -\mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\ell\sin\alpha - \mu mg\ell\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 8 \text{ m/s}.$$

**b.** $L_{F_f} = -\mu mg\ell\cos\alpha = -6$ J.

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul $B$ unde corpul părăseşte planul şi punctul $C$ unde corpul loveşte solul:

$\Delta E_{c_{BC}} = L_G \Rightarrow \dfrac{mv_C^2}{2} - \dfrac{mv^2}{2} = mgh = mg\ell\sin\alpha$, deoarece numai greutatea efectuează lucru mecanic. Obţinem: $v_C = \sqrt{v^2 + 2g\ell\sin\alpha} \approx 9{,}7$ m/s.

**38.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice la coborârea corpului pe planul înclinat $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N \Rightarrow \dfrac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 4{,}47$ m/s .

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $B$ şi $C$ de pe porţiunea orizontală: $\Delta E_{c_{BC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{BC}} = E_{c_C} - E_{c_B} = \dfrac{mv_C^2}{2} - \dfrac{mv_B^2}{2}$,

$L_G=0$, $L_N=0$ şi $L_{Ff} = -F_f d = -\mu mgd$ obţinem $\dfrac{mv_C^2}{2} - \dfrac{mv_B^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2\mu gd} = \sqrt{2g(h - \mu d)} \approx 2{,}82 \text{ m/s}$$

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $C$ și $D'$:
$\Delta E_{c_{CD}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_{CD} \Rightarrow h_{CD} = \frac{v_C^2}{2g} = h - \mu d = 0{,}4$ m

**d.** Corpul se oprește pe porțiunea orizontală în punctul $F$. Aflăm distanța parcursă de corp pe planul orizontal, astfel că aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ și punctul $F$: $\Delta E_{c_{AF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$.
Cum $\Delta E_{c_{AF}} = 0$, $L_N=0$, $L_G=mgh$ și $L_{Ff} = -F_f d_t = -\mu mgd_t$ obținem: $0 = mgh - \mu mgd_t \Rightarrow d_t = h/\mu \approx 3{,}33$ m. Astfel porțiunea $BC$ este parcursă integral de 3 ori isr corpul se oprește în $F$, $CF \approx 0{,}33$ m $\Rightarrow BF \approx 0{,}67$ m

**39.a.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{Mv_A^2}{2} = -MgH \Rightarrow v_A = \sqrt{2gH}$ =8 m/s

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele $A$ și $C$: $\Delta E_{c_{AC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_{Ff} = fL_G = -fMgh_C$,

$L_N=0$, $L_G = -Mgh_C$ și $\Delta E_{c_{AC}} = -E_{cA} = -\frac{Mv_A^2}{2}$, obținem $h_c = \frac{v_A^2}{2g(1+f)} \approx 2{,}91$ m

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la urcarea schiorului pe pantă între punctele $A$ și $D$: $\Delta E_{cAD} = L_{F_f} + L_G + L_N \Rightarrow$

$$\frac{Mv_D^2}{2} - \frac{Mv_A^2}{2} = L_{Ff} - Mgh_D \Rightarrow L_{Ff} = M\left(gh_D + \frac{v_D^2 - v_A^2}{2}\right) = -360 \text{ J}$$

**40.a.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele $M$ și $C$: $\Delta E_{c_{MC}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Din $L_G=mgh_1$, $L_N=0$, $L_{Ff} = -\mu mgd$ și

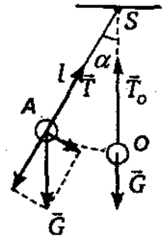
$\Delta E_{c_{MC}} = E_{cC} = \frac{mv_C^2}{2}$ obținem $\frac{mv_C^2}{2} = mgh_1 - \mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{2g(h_1 - \mu d)}$ =5 m/s

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele $C$ și $N$: $\Delta E_{c_{CN}} = L_G + L_N \Rightarrow -\frac{mv_C^2}{2} = -mgh_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_C^2}{2g} = h_1 - \mu d$ =1,25 m

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare $M$ și punctul de oprire $F$: $\Delta E_{c_{MF}} = L_{F_f} + L_G + L_N$. Cum $L_N=0$, $L_G=mgh_1$ și $\Delta E_{c_{MF}} = 0$ obținem $0 = mgh_1 + L_{Ff} \Rightarrow L_{Ff} = -mgh_1 = -1715$ J

**d.** Din $L_{Ff} = -\mu mgD$ calculăm distanța totală parcursă de sportiv pe porțiunea orizontală, astfel că $D = -\frac{L_{Ff}}{\mu mg} = \frac{h_1}{\mu}$ =24,5 m. Astfel corpul parcurge porțiunea $BC$ de $N = \left[\frac{D}{d}\right]$ =2 ori, astfel că sportivul se oprește definitiv la 0,5 m de punctul $B$

**41.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi poziția verticală $O$: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_T$.




Dar: $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = mgh = mg\ell(1-\cos\alpha)$, $L_T = 0$, deoarece tensiunea este în permanență perpendiculară pe traiectorie. Obținem:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 2 \text{ m/s}$$

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul $A$ şi punctul $B$ în care firul formează un unghi $\beta$=30° cu verticala, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_T$.

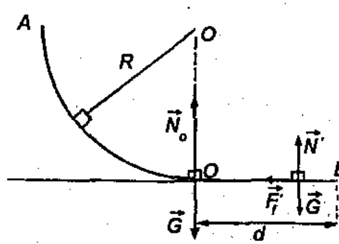
Cum $L_G = mg(h_A - h_B) = mg[\ell(1-\cos\alpha) - \ell(1-\cos\beta)] = mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha)$, $L_T$=0 şi $E_{cAB} = E_{cB}$ obținem $E_{cB} = mg\ell(\cos\beta - \cos\alpha)$=0,292 J

**c.*** Deoarece corpul are o traiectorie circulară, impunem condiția ca în punctul inferior al traiectoriei, rezultanta forțelor să joace un rol de forță centripetă: $\vec{T}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar $T_0 - mg = \frac{mv_0^2}{\ell} \Rightarrow T_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{\ell}\right) \Rightarrow$

$T_0 = mg(3 - 2\cos\alpha) = 4$ N $\Rightarrow$ Dacă tensiunea este cel mult egală cu 4 N, firul nu se rupe când corpul trece prin poziția verticală.

**42.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pe porțiunea de jgheab:

$\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$.




$\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2}$; $L_G = mgR$, iar $L_N = 0$.

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgR + L_{F_f} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgR + L_{F_f}\right)} = 2\text{m/s}$$

**b.*** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului în poziția verticală $O$ şi impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă, deoarece corpul execută o traiectorie circulară: $\vec{N}_0 + \vec{G} = \vec{F}_{cp}$, iar scalar: $N_0 - mg = \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow N_0 = m\left(g + \frac{v_0^2}{R}\right) \approx 2{,}33$ N.

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice la mişcarea pe planul orizontal: $\Delta E_{c_{OB}} = L_{N'} + L_G + L_{F_f'}$. Deoarece $L_{F_f'} = -F_f' d = -\mu N' d = -\mu mgd$,

$$L_{N'} = 0;\ L_G = 0 \text{ şi } \Delta E_{c_{OB}} = E_{c_B} - E_{c_O} = -\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 2 \text{ m.}$$

**43.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctul de plecare $A$ și punctul $D$: $\Delta E_{cAD} = L_G + L_N$. Deoarece $L_N$=0, $L_G = mg(h_A - h_D)$ și $\Delta E_{cAD} = E_{cD} - E_{cA} = -\frac{mv_A^2}{2}$ obținem $v_A = \sqrt{2g(h_D - h_A)}$. Cum arcul $AB$ este egal cu 1/3 dintr-un cerc, atunci unghiul $AOB$=120°, astfel că $h_A = R(1-\cos 60) = R/2$ =2 m. Obținem $v_A \approx$ 4,47 m/s

**b.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele $A$ și $B$: $\Delta E_{cAB} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Deoarece $L_G$=0, $L_N$=0 și $\Delta E_{cAB} = E_{cB} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_A^2}{2}$ obținem $-\frac{(M+m)v_A^2}{2} = L_{Ff} \Rightarrow v_A = \sqrt{-\frac{2L_{Ff}}{M+m}}$ =8m/s

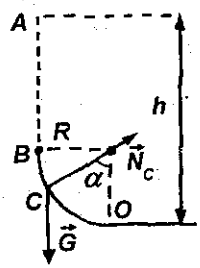
**c.** Pe baza teoremei de variație a energiei cinetice pentru snowboard între punctele $A$ și $C$: $\Delta E_{cAC} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Cum $L_G = (M+m)g(h-h')$, $L_N$=0 și

$$\Delta E_{cAC} = E_{cC} - E_{cA} = -\frac{(M+m)v_0^2}{2} \Rightarrow -\frac{(M+m)v_0^2}{2} = (M+m)g(h-h') + L_{Ff} \Rightarrow$$

$$L_{Ff} = (M+m)\left[-\frac{v_0^2}{2} + g(h'-h)\right] = -2025 \text{ J}$$

**44.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ și punctul în care corpul ajunge pe jgheab $B$: $\Delta E_{c_{AB}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mg(h-R) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h-R)}$

$\Rightarrow v_B \approx$ 4,47m/s.



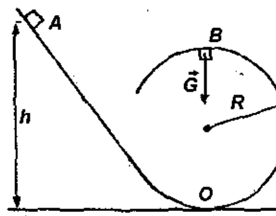

**b.*** Reprezentăm forțele care acționează asupra corpului și impunem condiția ca pe direcția formată de corp și centrul jgheabului, rezultanta forțelor pe această direcție să joace rol de forță centripetă. Scalar se obține: $N_C - mg\cos\alpha = \frac{mv_C^2}{R} \Rightarrow N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} + g\cos\alpha\right)$. Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele $A$ și $C$: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2}$; $L_G = mg(h - R + R\cos\alpha)$; $L_N = 0$ obținem înlocuind formulele: $\frac{mv_C^2}{2} = mg(h - R + R\cos\alpha) \Rightarrow v_C^2 = 2g(h - R + R\cos\alpha) \Rightarrow$

$N_C = mg\left(\frac{2h}{R} + 3\cos\alpha - 2\right)$ =55 N. Valoarea maximă a forței de apăsare pe jgheab se obține când corpul se află în poziția $O$, astfel că α=0. Obținem $N_O = mg\left(\frac{2h}{R} - 1\right) =$

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ și punctul $O$, unde corpul se oprește, deoarece pe jgheab mișcarea se face cu frecare: $\Delta E_{c_{AO}} = L_G + L_N + L_{F_f}$. Dar $\Delta E_{c_{AO}} = E_{c_O} - E_{c_A} = 0$; $L_G = mgh$ şi $L_N = 0$ obţinem: $0 = mgh + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = -mgh = -15$ J, deoarece forţa de frecare este o forţă cu caracter rezistiv.

**45.a.** În punctul superior al buclei, corpul nu mai apasă asupra acesteia, astfel că greutatea corpului joacă rol de forţă centripetă. Astfel obţinem:




$$G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B = \sqrt{gR} \approx 2{,}236 \text{ m/s}$$

**b.*** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi punctul cel mai de sus al buclei circulare $B$:

$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2}$;

$L_N = 0$ şi $L_G = mg(h-2R)$ obţinem:

$$\frac{mgR}{2} = mg(h-2R) \Rightarrow h = \frac{5R}{2} = 1{,}25 \text{ m}.$$

**c.** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare şi punctul superior al buclei circulare: $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f}$.

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mgR}{2}$, deoarece în punctul superior al buclei circulare corpul nu apasă asupra jgheabului şi $v_B^2 = gR$.

Cum $L_N = 0$ şi $L_G = mg(H-2R)$ obţinem:

$$\frac{mgR}{2} = mg(H-2R) + L_{F_f} \Rightarrow L_{F_f} = mg\left(\frac{5R}{2} - H\right) = -2{,}5 \text{ J}.$$

**46.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c = L \Rightarrow$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt. \text{ Cum } v = nv_0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}\left(n^2-1\right) = Pt \Rightarrow t = \frac{mv_0^2\left(n^2-1\right)}{2P} = 150 \text{ s}.$$

**b.** $P = Fv = Fnv_0 \Rightarrow F = \frac{P}{nv_0} = 100$ N.

**c.** Cum $P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$, adică forţa depinde invers proporţional de viteză.

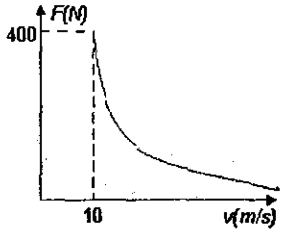
Pentru $v_0 = 10$ m/s $\Rightarrow F = 400$ N. Reprezentarea grafică a forţei în funcţie de viteză este fig 1

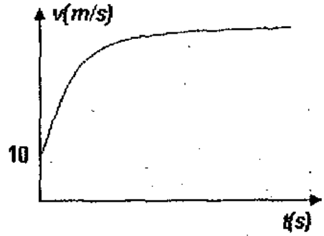
Din teorema de variaţie a energiei cinetice: $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Pt \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2Pt}{m}}$.

Pentru $t = 0 \Rightarrow v = v_0 = 10$ m/s. Reprezentarea grafică a vitezei în funcţie de timp este fig 2.

Fig. 1

Fig. 2




**47.a.**
Aplicăm pentru sistemul de corpuri teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_c = L = L_{G_1} + L_{G_2} + L_{T_1} + L_{T_2}$. Lucrurile mecanice ale celor două tensiuni se compensează întrucât tensiunea care acţionează asupra corpului $m_1$ este motoare, deoarece corpul 1 se ridică, iar tensiunea care acţionează asupra corpului $m_2$ este rezistivă, deoarece corpul 2 coboară. Astfel $L_{T_1} + L_{T_2} = -Th + Th = 0 \Rightarrow \Delta E_c = L_{G_1} + L_{G_2} \Rightarrow E_c = L_{G_1} + L_{G_2}$.

Deoarece $L_{G_1} = -m_1gh_1$ şi $L_{G_2} = m_2gh_1$ obţinem: $E_c = (m_2 - m_1)gh_1$=0,8 J

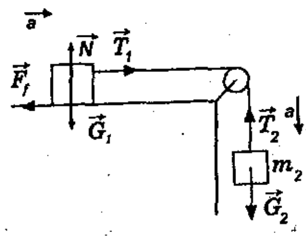
**b.** $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \dfrac{(m_1+m_2)v^2}{2} \Rightarrow \dfrac{(m_1+m_2)v^2}{2} = (m_2 - m_1)gh \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{2(m_2-m_1)gh}{m_1+m_2}}$

$\Rightarrow v$=2 m/s.

**c.** Când corpul cu masa $m_2$ ajunge pe sol, corpul cu masa $m_1$ se află la înălţimea $2h$=2 m faţă de sol. Cum corpul 1 are viteza orientată în sus, iar firul se slăbeşte, aplicând teorema de variaţie a energiei cinetice, aflăm înălţimea pe care mai urcă corpul 1, ţinând cont că asupra acestuia acţionează numai greutatea. Astfel: $\Delta E_c = L_G \Rightarrow E_{c_f} - E_{c_i} = -m_1gh_1 \Rightarrow$

$$\Delta E_c = L_G \Rightarrow E_{c_f} - E_{c_i} = -m_1gh_1 \Rightarrow 0 - \frac{m_1v^2}{2} = -m_1gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v^2}{2g} = 0{,}2 \text{ m}$$

Înălţimea maximă măsurată faţă de sol la care se opreşte corpul 1 este: $h_{max} = 2h + h_1 = 2{,}2$ m.




**48.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri din momentul pornirii până în momentul ruperii firului, astfel că:

$\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$.

$L_{T1} + L_{T2} = Td - Td = 0$, deoarece tensiunea care acţionează asupra corpului $m_1$ este forţă motoare, iar tensiunea care acţionează asupra corpului $m_2$ este forţă rezistivă. Cum $L_{G1}$=0, $L_N$=0, $L_{Ff} = -\mu m_1gd$ şi $L_{G_2} = m_2gd$ obţinem:

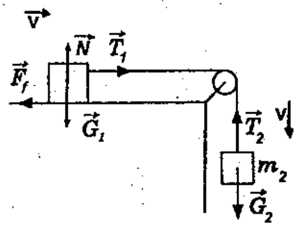
$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_2gd - \mu m_1gd \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gd(m_2 - \mu m_1)}{m_1+m_2}} \approx 1{,}58 \text{ m/s}$$

**b.** După ce firul se rupe corpul $m_1$ are o mişcare uniform încetinită, astfel că aplicând teorema de variaţie a energiei cinetice pentru acest corp obţinem:

$$\Delta E_{c1} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_N + L_{F_f} \Rightarrow -\frac{m_1 v^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{d(m_2 - \mu m_1)}{\mu(m_1 + m_2)} = 0{,}625 \text{ m}$$

Distanța parcursă până la oprire de corpul $m_1$ măsurată din momentul pornirii este $d_f = d + s_{op} = 1{,}125$ m

**c.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul $m_2$ din momentul ruperii firului până în momentul ajungerii acestuia la sol, astfel că: $\Delta E_{c2} = L_{total2} = L_{G_2} \Rightarrow \frac{m_2 v'^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} = m_2 g h \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 5{,}15$ m/s

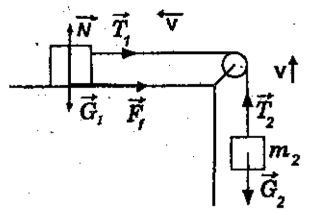


**49.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când $m_2$ coboară pe distanța $h_1$, iar $m_1$ se deplasează spre dreapta: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L_{F_f}$.

Deoarece $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$, $L_{G_1} = 0$,

$L_N = 0$, $L_{T_2} + L_{T_1} = 0$, $L_{G_2} = m_2 g h_1$ și $L_{Ff} = -\mu m_1 g h_1$

obținem: $-\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = m_2 g h_1 - \mu m_1 g h_1$ (1)



Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri când corpul $m_1$ se deplasează spre stânga pe distanța $h_2$: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f}$.

Deoarece $\Delta E_c = -\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$, $L_{G_2} = -m_2 g h_2$; $L_N = 0$; $L_{G_1} = 0$; $L'_{F_f} = -\mu m_1 g h_2$, iar $L_{T_1} + L_{T_2} = 0$ obținem:

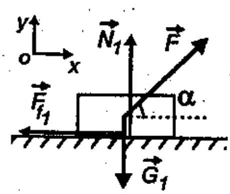
$-\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = -m_2 g h_2 - \mu m_1 g h_2$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow$

$$m_2 g h_1 - \mu m_1 g h_1 = -m_2 g h_2 - \mu m_1 g h_2 \Rightarrow \mu = \frac{m_2(h_1 + h_2)}{m_1(h_1 - h_2)} = 0{,}3.$$

**b.** Raportul lucrurilor mecanice ale forțelor de frecare este $\frac{L_{Ff}}{L'_{Ff}} = \frac{h_1}{h_2} = 5$

**c.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri care se deplasează spre stânga: $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_2} + L_{T_2} + L_{T_1} + L_N + L_{G_1} + L'_{F_f} \Rightarrow$

$$-\frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2} = -m_2 g s_{op} - \mu m_1 g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{2g(m_2 + \mu m_1)} = 3 \text{ m}$$



**50.a.** Din formula lucrului mecanic obținem: $L_F = F d \cos\alpha \Rightarrow F = \frac{L_F}{d \cos\alpha} = 20$ N

**b.** Lucrul mecanic total al forțelor de frecare este $L_{Ff} = L_{Ff1} + L_{Ff2}$, cu $L_{Ff2} = -\mu N_2 d = -\mu m_2 g d$. Aflăm $L_{Ff1}$.

Proiectând forțele care acționează asupra corpului $m_1$ pe verticală: $N_1 - m_1 g + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow L_{Ff1} = -\mu N_1 d = -\mu(m_1 g - F\sin\alpha)d$.

Obținem: $L_{Ff} = -\mu[(m_1 + m_2)g - F\sin\alpha]d \Rightarrow \mu = -\dfrac{L_{Ff}}{[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]d}$ =0,1

**c.** Puterea medie disipată prin frecare de corpul cu masa $m_2$ este $P_m = F_{f2}v_m \cos 180 = -\mu \cdot m_2 g v_m$, unde $v_m$ este viteza medie a sistemului și este $v_m = v/2$ cu $v$ viteza sistemului după parcurgerea distanței $d$. Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$$\Delta E_c = L_F + L_{Ff} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = L_F + L_{Ff} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(L_F + L_{Ff})}{m_1+m_2}} \approx 11{,}24 \text{ m/s} \Rightarrow$$

$P_m \approx -2{,}81$ W

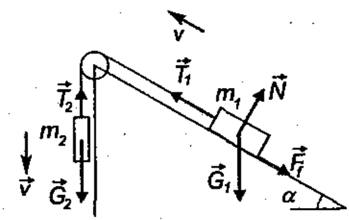
**d.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri:

$$\Delta E_c = L_F + L_{Ff} \Rightarrow \frac{(m_1+m_2)v'^2}{2} = FD\cos\alpha - \mu[(m_1+m_2)g - F\sin\alpha]D \Rightarrow$$

$$v' = \sqrt{\frac{2D[F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu(m_1+m_2)g]}{m_1+m_2}} \approx 15{,}9 \text{ m/s}$$

**51.a.** Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G2} + L_{F_f} + L_N$, unde

$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \dfrac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $\quad L_{G2} = m_2 g h$,




deoarece corpul $m_2$ coboară, iar greutatea lui este o forță motoare; $L_{T_1} + L_{T2} = 0$, deoarece $T_1 = T_2 = T$, $T_1$ este forță motoare, $T_2$ este o forță rezistivă și ambele își deplasează punctele de aplicație pe aceeași distanță $h$, $L_N = 0$, $L_{G_1} = -m_1 g h\sin\alpha$ și $L_{F_f} = -\mu m_1 g h\cos\alpha$. Obținem:

$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_2 gh - m_1 gh\sin\alpha - \mu m_1 gh\cos\alpha \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gh(m_2 - m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha)}{m_1+m_2}} \Rightarrow$$

$v \approx 2{,}31$ m/s.

**b.** Aflăm distanța parcursă de corpul $m_1$, aflat pe planul înclinat, până la oprire, după ce corpul $m_2$ ajunge pe sol și tensiunea nu mai acționează. Corpul se mișcă pe distanța $d$.

Utilizăm teorema de variație a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{G_1} + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{m_1 v^2}{2} = -m_1 g d\sin\alpha - \mu m_1 g d\cos\alpha \Rightarrow d = \frac{v^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

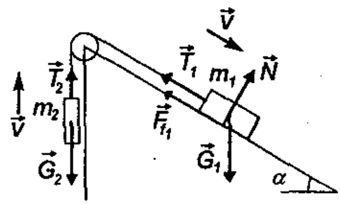
$\Rightarrow d$=40 cm. Distanța totală parcursă până la oprire este $D=d+h$=1 m

**c.** $L_{F_f} = -F_f(h+d) = -\mu m_1 g(h+d)\cos\alpha = -3{,}33$ J

**52.a.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de frecare este $L_{F_f} = -\mu m_1 g\ell\cos\alpha = -8$J

**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_{G2} = -m_2 g\ell = -40$ J.

**c.** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul de corpuri $\Delta E_c = L_{total} = L_{G_1} + L_{T_1} + L_{T_2} + L_{G2} + L_{F_f} + L_N$, unde $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \dfrac{(m_1+m_2)v^2}{2}$, $T_2$ este o forţă motoare iar $T_1$ o forţă rezistivă şi ambele îşi deplasează punctele de aplicaţie pe aceeaşi distanţă $h$, astfel că $L_{T_1} + L_{T2} = 0$, $L_N = 0$, $L_{G_1} = m_1 g\ell\sin\alpha$. Obţinem:




$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = m_1 g\ell\sin\alpha - \mu m_1 g\ell\cos\alpha - m_2 g\ell \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2g\ell(m_1\sin\alpha - \mu m_1\cos\alpha - m_2)}{m_1+m_2}} \approx 2{,}658 \text{ m/s}.$$

**53.a.** Variaţia energiei potenţiale gravitaţionale a sistemului ladă-Pământ este $\Delta E_p = -L_G = mgh = 100$ J

**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa elastică este $L_{F_{el}} = -\dfrac{kh^2}{2} = -25$ J

**c.** Deoarece lada este ridicată cu viteză constantă atunci $\Delta E_c = 0$, astfel că pe baza teoremei de variaţie a energiei cinetice pentru sistemul ladă-resort $\Delta E_c = L_G + L_{Fel} + L_F \Rightarrow$ lucrul mecanic efectuat de om pentru a ridica lada este $L_F = -L_G - L_{Fel} = mgh + \dfrac{kh^2}{2} = 125$ J, deoarece şi greutatea lăzii şi forţa elastică sunt forţe rezistive

**d.** Impunem condiţia de echilibru omului: $\vec{N} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Deoarece omul nu se desprinde de podea înseamnă că $N \geq 0$. Considerăm cazul cel mai defavorabil când $N=0$, astfel că forţa cu care trage omul de fir este $F=Mg$. Din condiţia de echilibru impusă lăzii $\vec{F}_{el} + \vec{F} + \vec{G}' = 0$ obţinem $F = kx' + mg \Rightarrow$ $x' = \dfrac{(M-m)g}{k} = 3$ m, practic este imposibil să deformăm resortul atât pentru ca omul să se ridice de pe podea

**54.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$ aflat la baza planului înclinat. $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_N$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = E_{cB}$, $L_G = mgh = mgd\sin\alpha$ şi $L_N=0$ obţinem $E_{cB} = mgd\sin\alpha = 50$ J

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între $B$ aflat la baza planului înclinat şi punctul $C$ imediat înainte ca obiectul să atingă resortul, astfel $\Delta E_{cBC} = L_G + L_N + L_{Ff} \Rightarrow E_{cC} - E_{cB} = -\mu mg\ell \Rightarrow \dfrac{mv_C^2}{2} - mgd\sin\alpha = -\mu mg\ell \Rightarrow$

$v_C=\sqrt{2g(d\sin\alpha-\mu\ell)}\approx 7{,}07\ \text{m/s}$

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $C$ şi $D$ în care corpul se opreşte: $\Delta E_{c_{CD}}=L_G+L_N+L_{Fel}\Rightarrow -\dfrac{mv^2}{2}=-\dfrac{kx^2}{2}\Rightarrow x=v\sqrt{\dfrac{m}{k}}=10\text{cm}$

**55.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru a afla viteza cu care este lansat corpul prin destinderea resortului: $\Delta E_c=L\Rightarrow\dfrac{mv^2}{2}=\dfrac{kx^2}{2}\Rightarrow v=x\sqrt{\dfrac{k}{m}}=10\ \text{m/s}$

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corp imediat după lansare în punctul $A$ şi până când ajunge la înălţimea maximă în punctul $B$:

$\Delta E_{c_{AB}}=L_N+L_G+L_{F_f}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}}=E_{c_B}-E_{c_A}=-\dfrac{mv^2}{2}$, $L_N=0$, $L_G=-mgh$ şi lucrul mecanic total al forţei de frecare este $L_{Ff}=L_{Ff_{AO}}+L_{Ff_{OC}}\Rightarrow$

$L_{F_f}=-\mu mg\ell-\mu mg\cos\alpha\dfrac{h}{\sin\alpha}=-\mu mg\ell-\mu mgh\,ctg\alpha$ obţinem:

$$\frac{mv^2}{2}=-mgh-\mu mg\ell-\mu mgh\,ctg\,\alpha\Rightarrow h=\frac{v^2-2\mu g\ell}{2g(1+\mu\cdot ctg\,\alpha)}\approx 1{,}57\ \text{m}$$

**c.** Lucrul mecanic total al forţei de frecare este $L_{F_f}=-\mu mg(\ell+h\,ctg\alpha)=-3{,}43\text{J}$

**56.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare al corpului $A$ şi punctul de la baza planului $B$, astfel că: $\Delta E_{c_{AB}}=L_N+L_G+L_{F_f}$.

Cum $\Delta E_{c_{AB}}=E_{c_B}=\dfrac{mv_B^2}{2}$, $L_G=mgh$, $L_{F_f}=-\mu mg\dfrac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha=-\mu mgh\cdot ctg\,\alpha$, şi $L_N=0$ obţinem $\dfrac{mv_B^2}{2}=mgh-\mu mgh\,ctg.\alpha\Rightarrow v_B=\sqrt{2gh(1-\mu ctg\alpha)}\approx 4{,}47\ \text{m/s}$

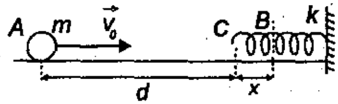
**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ al corpului şi punctul $C$ în care comprimarea resortului este maximă şi corpul se opreşte: $\Delta E_{c_{AC}}=L_N+L_G+L_{F_f}+L_{F_{el}}$. Cum $\Delta E_{c_{AC}}=E_{c_C}-E_{c_A}=0$, $L_N=0$;

$L_G=mgh$, $L_{F_f}=-\mu mg\dfrac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha=-\mu mgh\,ctg\,\alpha$ şi $L_{F_{el}}=-\dfrac{kx^2}{2}$ obţinem:

$$0=mgh-\mu mgh\,ctg\,\alpha-\frac{kx^2}{2}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{2mgh}{k}(1-\mu ctg\,\alpha)}=10\ \text{cm}$$

**c.** Lucrul mecanic al forţei elastice este $L_{Fel}=-\dfrac{kx^2}{2}=-2\ \text{J}$

**57.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul iniţial $A$ când vagonul se desprinde de tren şi punctul $B$ când resortul este comprimat la maxim şi vagonul se opreşte: $\Delta E_{c_{AB}}=L_N+L_G+L_{F_f}+L_{F_{el}}$.



Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ şi lucrurile mecanice sunt $L_G = 0$ şi $L_N = 0$, $L_{F_f} = -\mu mg(d+x) = -\mu mgs_{op}$ unde $s_{op} = d + x$ şi $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$, obţinem:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs_{op} - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow s_{op} = \frac{mv_0^2 - kx^2}{2\mu mg} = 60 \text{ m}.$$

**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de desprindere $A$ şi punctul $C$ imediat înaintea ciocnirii resortului, astfel că: $\Delta E_{c_{AC}} = L_N + L_G + L_{F_f}$. Dearece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} - E_{c_A} = \frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ şi $L_{F_f} = -\mu mgd$ obţinem $\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgd \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd} \approx 2 \text{m/s}$, deoarece: $d = s_{op} - x = 59{,}9$ m.

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $B$ şi $C$:

$$\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}} \Rightarrow \frac{mv'^2_C}{2} = -\mu mgx + \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v'_C = \sqrt{\frac{kx^2 - 2\mu mgx}{m}} \approx 1{,}95 \text{m/s}$$

**58.a.** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul $A$ în care resortul este comprimat şi punctul $B$ unde comprimarea dispare, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_N + L_G + L_{F_{el}}$. Cum $\Delta E_{c_{AB}} = \frac{mv_B^2}{2}$, $L_G = 0$, $L_N = 0$ şi $L_{F_{el}} = \frac{kx^2}{2}$ obţinem:

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v_B = x\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1{,}41 \text{ m/s}$$

**b.** Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul $B$ în care resortul este decomprimat şi punctul $C$ unde se opreşte corpul pe suprafaţa sferică, astfel că $\Delta E_{cBC} = L_N + L_G$. Cum $\Delta E_{cBC} = -\frac{mv_B^2}{2}$, $L_N = 0$ şi $L_G = -mgh \Rightarrow$

$$-\frac{mv_B^2}{2} = -mgh \Rightarrow h = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{kx^2}{2mg} = 10 \text{ cm. Dar } h = R(1-\cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{h}{R} = \frac{1}{2}$$

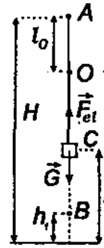
Obţinem $\alpha = 60^o$.

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $D$ unde se va opri corpul: $\Delta E_{c_{AD}} = L_N + L_G + L_{F_f} + L_{F_{el}}$.

Deoarece $\Delta E_{c_{AD}} = 0$, $L_N = 0$, $L_G = -mgh$ şi $L_{Ff} = -\mu mgx$ şi $L_{F_{el}} = \frac{kx^2}{2}$ obţinem:

$$0 = \frac{kx^2}{2} - \mu mgx - mgh \Rightarrow \mu = \frac{kx^2 - 2mgh}{2mgx} = 0{,}25$$

**59.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $B$: $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = 0$ iar lucrurile mecanice ale forţelor sunt $L_G = mg(H - h_1)$ şi $L_{F_{el}} = -\frac{k\Delta\ell^2}{2} = -\frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2}$ obţinem:




$$0 = mg(H-h_1) - \frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2} \Rightarrow mg(H-h_1) = \frac{k(H-\ell_0-h_1)^2}{2} \ (1),$$

unde cu $\ell_0$ am notat lungimea nealungită a corzii elastice.

Impunem condiţia de echilibru corpului $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow k(H-h-\ell_0) = mg$ (2)

Din (1) şi (2) obţinem: $2(H-h_1)(H-h-\ell_0) = (H-\ell_0-h_1)^2$. Înlocuind valorile obţinem: $56(20-\ell_0) = (28-\ell_0)^2$. Rezolvând obţinem: $\ell_0 \approx 18{,}33$ m

**b.** Sportivul atinge viteza maximă atât timp cât cade sub acţiunea greutăţii până ce coarda elastică începe să se alungească, iar forţa elastică frânează sportivul. Astfel aplicând teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $O$ obţinem $\Delta E_{c_{AO}} = L_G \Rightarrow \frac{mv_O^2}{2} = mg\ell_0 \Rightarrow v_O = \sqrt{2g\ell_0} \approx 19{,}15$ m/s

**c.** Din $k(H-h-\ell_0) = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{H-h-\ell_0} \approx 35{,}928$ kN/m

**60.a.** Din condiţia de echilibru impusă corpului: $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$ iar scalar $F_{el} = F + mg$ =40 N

**b.** Comprimarea resortului este $\Delta\ell = F_{el}/k$ =8 cm, astfel că lungimea resortului este $\ell = \ell_0 - \Delta\ell$ =92 cm

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$ de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece greutatea este forţă rezistivă lucrul ei mecanic este $L_G = mgh$ şi forţa elastică este o forţă motoare $L_{F_{el}} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow h = \frac{k\Delta\ell^2}{2mg}$ =16 cm.

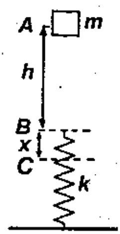
Înălţimea maximă faţă de sol la care va urca corpul dacă acţiunea forţei $F$ încetează este $h_{sol}=\ell+h$=108 cm

**61.a.** Din condiţia de echilibru impusă corpului $\vec{F}_{el} + \vec{G} = 0 \Rightarrow kx = mg$ obţinem constanta elastică a resortului $k=mg/x$=100 N/m

**b.** Din condiţia de echilibru impusă corpului după ce resortul se apasă $\vec{F}_{el} + \vec{G} + \vec{F} = 0$ obţinem $F + mg = kx' = 2kx \Rightarrow F = mg$ =2 N

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul $A$ după încetarea acţiunii forţei $F$ şi punctul $B$ de oprire al corpului, astfel că: $\Delta E_{c_{AB}} = L_G + L_{F_{el}} \Rightarrow 0 = -mgh + \frac{kx'^2}{2} \Rightarrow h = \frac{kx'^2}{2mg} = \frac{2kx^2}{mg} = 2x$ = 4 cm.

**62.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$ în care corpul loveşte resortul, astfel că: $\Delta E_{c,AB} = L_G \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \approx 2{,}83$ m/s




**b.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul de plecare $A$ şi punctul $C$ unde comprimarea resortului $x$ este maximă. Obţinem: $\Delta E_{c,AC} = L_G + L_{F_{el}}$. Deoarece corpul porneşte din repaus şi în ajunge în final în repaus $\Delta E_{c,AC} = E_{c_B} - E_{c_A} = 0$ iar lucrurile mecanice sunt $L_G = mg(h+x)$, deoarece greutatea ajută la mişcare şi $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$, deoarece forţa elastică se opune mişcării, obţinem:

$$0 = mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0 \Rightarrow x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k} = 20 \text{ cm.}$$

**c.** Lucrul mecanic al forţei elastice este $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2} = -0{,}6$ J

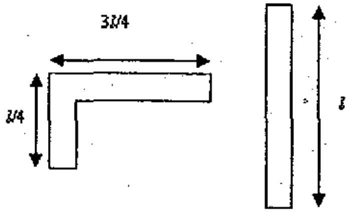
**63.a.** Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului este $L_G = -mgh = -20$ J

**b.** Din $h = v_m t$ cu viteza medie $v_m = (v + v_0)/2$ şi cum $v = v_0 - gt$ obţinem $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$ =0,4 s

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctul $A$ şi punctul $C$ în care corpul se opreşte. Astfel: $\Delta E_{c,AC} = L_G + L_{F_{el}}$, Deoarece $L_G = -mg(h+x)$, $L_{F_{el}} = -\frac{kx^2}{2}$ şi $\Delta E_{c,AC} = -E_{c_A} = -\frac{mv_0^2}{2}$ obţinem: $-\frac{mv_0^2}{2} = -mg(h+x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow$

$$x = \frac{-mg + \sqrt{m^2g^2 + mk(v_0^2 - 2gh)}}{k} \approx 16{,}8 \text{ cm}$$

## 3.4. Conservarea energiei mecanice




**1.a.** Deoarece nu există frecări între lanţ şi masă putem aplica legea de conservare a energiei mecanice. Alegem valoarea zero pentru energia potenţială la nivelul mesei. $m$ este masa întregului lanţ. Iniţial porţiunea de lanţ cu lungime $\ell/4$ care atârnă poate fi considerată un punct material cu masa $m/4$ şi cu întreaga masă concentrată în centrul de greutate, deci la $\ell/8$ de suprafaţa mesei. Energia potenţială iniţială a lanţului este $E_{p_i} = -\frac{m}{4} g \frac{\ell}{8} = -\frac{mg\ell}{32}$. Când lanţul alunecă de pe masă şi devine vertical, el are energia potențială $E_{p_f}=-mg\frac{\ell}{2}$, deoarece centrul de greutate al lanțului în care considerăm concentrată întreaga masă a lanțului se află la distanța $\ell/2$ față de masă. Energia cinetică a lanțului când acesta părăseşte masa este $E_c=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow-\frac{mg\ell}{32}=-\frac{mg\ell}{2}+\frac{mv^2}{2}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{15g\ell}}{4}=3\text{ m/s}$.

**b.** Lucrul mecanic necesar urcării porțiunii de lanț care atârnă se efectuează pentru a urca centrul de greutate al lanțului care atârnă la nivelul mesei, astfel că $L_{ef}=-\Delta E_{p,grav}=\frac{mg\ell}{32}$=0,6 J

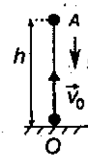
**2.a.** Deoarece asupra corpului se exercită numai forța de greutate, care este forță de tip conservativ pentru sistemul corp-Pământ, putem aplica legea de conservare a energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}$, unde $E_{c_A}=0$, deoarece corpul porneşte din repaus. Alegem nivel de referință pentru energia potențială punctul $O$, aflat pe sol, astfel că $E_{p_O}=0$.

Cum $E_{c_B}=\frac{E_{p_B}}{4}\Rightarrow E_{p_A}=\frac{E_{p_B}}{4}+E_{p_B}=\frac{5}{4}E_{p_B}\Rightarrow mgh=\frac{5}{4}mgh'\Rightarrow h'=\frac{4h}{5}=80\text{ m}$

**b.** Utilizăm legea conservării energiei între punctele $A$ şi $C$, astfel că $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_C}+E_{p_C}\Rightarrow mgh=\frac{mv_C^2}{2}+mgh_C\Rightarrow v_C=\sqrt{2g(h-h_C)}$=40 m/s

**c.** Pe baza conservării energiei mecanice $E_{p_A}=E_{c_O}\Rightarrow E_{c_O}=mgh$ şi deoarece imediat după ciocnirea cu solul, energia cinetică a corpului reprezintă o fracțiune $f$ din valoarea energiei cinetice imediat înainte de ciocnire atunci $E'_{c_O}=fE_{c_O}=fmgh$ şi din legea conservării energiei obținem înălțimea la care se ridică din nou corpul: $E'_{c_O}=E_{p_D}\Rightarrow fmgh=mgh_D\Rightarrow h_D=fh$=40 m

**3.a.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice în cazul aruncării mingii pe verticală de jos în sus. La sol mingea are doar energie cinetică ($E_{Psol}$=0) iar la înălțimea maximă doar energie potențială, astfel că: $E_{csol}=E_{p\max}\Rightarrow\frac{mv_0^2}{2}=mgh_{\max}\Rightarrow v_0=\sqrt{2gh_{\max}}\approx4{,}47\text{ m/s}$




**b.** Prin definiție $E_m=E_c+E_p$. Pe baza legii de conservare a energiei mecanice $E_m=E_{m_{sol}}=E_{c_{sol}}=mgh_{\max}$=5 J

**c.** Din $E_{csol}=E_{p\max}\Rightarrow\frac{mv_0^2}{2}=mgh_{\max}\Rightarrow h_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}$ Dacă viteza mingii se dublează $v=2v_0\Rightarrow h'_{\max}=\frac{v^2}{2g}=4\frac{v_0^2}{2g}=4h_{\max}$=4 m, astfel că mingea se va ridica mai mult cu $\Delta h=h'_{\max}-h_{\max}=3h=$=3 m

**4.a.** Aflăm înălțimea maximă la care urcă corpul, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctele $O$ și $A$: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece $E_{p_O} = mgh$ și în punctul de înălțime maximă $E_{c_A} = 0$, astfel că

$$E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = h + \frac{v_0^2}{2g} = 5{,}8\text{ m}$$

**b.** În punctul $B$ aflat la o pătrime din înălțimea maximă la care se ridică corpul, $h_B = \frac{h_{max}}{4}$, aflăm energia cinetică pe baza conservării energiei mecanice între punctele $A$ și $B$ astfel că: $E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_A} - E_{p_B} \Rightarrow$

$$E_{c_B} = mgh_{max} - mgh_B = \frac{3mgh_{max}}{4} = 4{,}35\text{ J}$$

**c.** Conservând energia mecanică între punctul de înălțime maximă $A$ și punctul de pe sol $C$, obținem: $E_{p_A} = E_{c_C} \Rightarrow mgh_{max} = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$

$$v_C = \sqrt{2gh_{max}} \approx 10{,}77\text{ m/s}$$

**5.a.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele $O$ și $M$:

$$E_{c_O} = E_{p_M} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH} = 20\text{ m/s}$$

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele $M$ și $P$:

$$E_{p_M} = E_{c_P} + E_{p_P} \Rightarrow mgH = \frac{mv_P^2}{2} - mgh \Rightarrow v_P = \sqrt{2g(H+h)} \approx 24{,}49\text{ m/s}$$

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate pe toată durata deplasării pietrei este $L_G = L_{G_{OM}} + L_{G_{MP}} = -mgH + mg(H+h) = mgh = 20\text{ J}$

**6.a.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $O$ și punctul $A$ în care corpul ajunge la înălțimea maximă, astfel

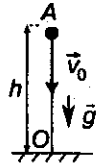
$$E_{c_O} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 3{,}2\text{ m}$$

**b.** Pe baza ~~legii~~ legii conservării energiei mecanice $E_{c_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$ și cum

$E_{c_B} = E_{p_B}/3$ obținem $E_{c_O} = 4E_{c_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{4mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{2} = 4\text{ m/s}$

**c.** Dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctul de plecare aflat pe sol $O$ și același punct la revenirea corpului, astfel că $\Delta E_c = L_G + L_{Ff}$. Deoarece $\Delta E_c = E'_{co} - E_{co}$, lucrul mecanic al greutății este nul $L_G = 0$ și $L_{Ff} < 0$ pentru că forța de frecare este rezistivă obținem $E'_{co} < E_{co} \Rightarrow v'_0 < v_0$. Viteza cu care corpul atinge solul la coborâre este mai mică decât viteza inițială $v_0$, dacă frecarea cu aerul nu este neglijabilă.

**7.a.** Energia mecanică a ghiojdanului este $E_m = E_c + E_p \Rightarrow$




$E_m = \frac{mv_0^2}{2} + mgh$ =288 J

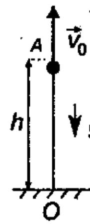
**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *A* şi *O*:

$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ =12 m/s

**c.** Pe baza conservării energiei dacă ghiojdanul este lăsat liber din punctul *B* de la înălţimea *h*' obţinem $E_{p_B} = E_{c_O} \Rightarrow mgh' = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh' \Rightarrow$

$h' = h + \frac{v_0^2}{2g}$ =7,2 m

**8.a.** Energia potenţială corespuntătoare înălţimii maxime este




$E_{p_{max}} = E_p + E_c = mgh + \frac{mv_0^2}{2}$ =1,6 kJ

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistem între punctul de plecare *A* şi punctul *B*: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$.

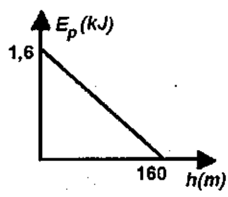
Deoarece $E_{c_B} = 3E_{p_B}$ obţinem:

$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = 4mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{h}{4} + \frac{v_0^2}{8g}$ =20 m

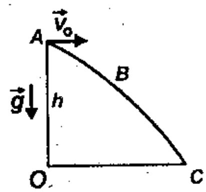
**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între vârful turnului *A* aflat la înălţimea *h* de sol şi punctul *O* de pe sol. Alegem pe sol $E_{p_O} = 0$.

Obţinem: $E_{c_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 40$ m/s.

**9.a.** Deoarece la sol energia potenţială este nulă $E_{p_0} = 0$, atunci dependenţei energiei potenţiale gravitaţionale a pachetului în funcţie de înălţimea *h* este $E_p = E_{p0} - mgh = 1600 - 10h$. Reprezentarea grafică a funcţiei este redată în figura alăturată.




**b.** Pentru sistemul pachet–sol aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele *A* şi *O*.




Obţinem: $E_{p_A} + E_{c_A} = E_{c_O} \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow$

$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 60$ m/s.

**c.** Dacă pachetul se aruncă oblic în jos aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de aruncare şi punctul în care corpul loveşte solul, astfel că:

$E_{p_A}+E_{c_A}=E_{c_0}\Rightarrow mgh+\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2+2gh}=60$ m/s. Pachetul ajunge la sol cu aceeaşi viteză fie că este lasat să cadă pe verticală în jos sau este aruncat oblic în jos, numai că ajunge la sol după un timp mai scurt când este aruncat oblic în jos

**10.a.** Din grafic când corpul se află la sol $h=0$ şi $E_{c\,\max}=24$ J. Lansat pe verticală de jos în sus corpul este supus acţiunii greutăţii, care este forţă de tip conservativ. Aplicând legea conservării energiei mecanice, energia cinetică a corpului se transformă la înălţimea maximă în energia potenţială, astfel că $E_{p_{\max}}=E_{c\,\max}=24$ J.

**b.** Din grafic $h_{\max}=6$ m. Cum $E_{p_{\max}}=mgh_{\max}\Rightarrow m=\frac{E_{p_{\max}}}{gh_{\max}}=400$ g.

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice şi obţinem:

$$E_{c\max}=E_{c_1}+E_{p_1}\Rightarrow E_{c\max}=\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2(E_{c\max}-mgh_1)}{m}}=\sqrt{2g(h_{\max}-h)}\Rightarrow$$

$v_1$=4 m/s.

**11.a.** Din grafic la înălţimea maximă $h_{\max}=6$ m, energia potenţială are valoarea $E_{p_{\max}}=18$ J. Considerând că pe sol, energia potenţială este nulă, pe baza conservării energiei mecanice $E_{c_{\max}}=E_{p_{\max}}\Rightarrow$ energia cinetică maximă este la sol şi are valoarea $E_{c_{\max}}=18$ J

**b.** Considerăm punctul în care energia cinetică este o treime din valoarea energiei potenţiale în acel punct, astfel că $E_c=E_p/3$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice:

$$E_{c_{\max}}=E_c+E_p=\frac{4}{3}E_p\Rightarrow E_{p_{\max}}=\frac{4}{3}E_p\Rightarrow mgh_{\max}=\frac{4}{3}mgh\Rightarrow h=\frac{3}{4}h_{\max}=4{,}5\text{ m}$$

**c.** $E_c=\frac{E_p}{3}=\frac{E_{p_{\max}}}{4}\Rightarrow\frac{mv^2}{2}=\frac{mgh_{\max}}{4}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{gh_{\max}}{2}}\approx 5{,}48$ m/s

**12.a.** Din grafic aflăm valoarea iniţială a energiei cinetice $E_c$=400 J şi timpul după care corpul ajunge la înălţimea maximă $t_u$=2 s. Deoarece corpul lansat vertical de jos în sus în câmp gravitaţional are o mişcare uniform încetinită cu acceleraţia $g$ şi cu viteza iniţială $v_0$, conform legii vitezei $v=v_0-gt$ şi din condiţia de oprire $v=0$ obţinem viteza iniţială a corpului $v_0=gt_u$=20 m/s

**b.** Din expresia energiei cinetice $E_c=\frac{mv_0^2}{2}\Rightarrow m=\frac{2E_c}{v_0^2}=\frac{2E_c}{g^2t_u^2}$=2 kg

**c.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că $E_{csol}=E_{p\max}\Rightarrow$ $E_c=mgh_{\max}\Rightarrow h_{\max}=E_c/(mg)$=20 m

**d.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul de pe sol $O$ şi punctul cerut $A$, astfel că: $E_{c_0} = E_{p_A} + E_{c_A}$. Deoarece $E_{c_A} = fE_{p_A}$ obținem:

$$E_{c_0} = E_{p_A}(1+f) \Rightarrow E_{p_A} = \frac{E_{c_0}}{1+f} \Rightarrow E_{c_A} = \frac{fE_{c_0}}{1+f} = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2fE_{c_0}}{m(1+f)}} \approx 8{,}16 \text{ m/s}$$

**13.a.** Energia mecanică a bilei este $E_m = E_p = mgh_0$. Deoarece neglijăm frecările cu aerul energia mecanică a bilei se conservă în procesul căderii acesteia, astfel că la sol energia are aceeaşi valoare. În urma ciocnirii cu suprafața plană bila pierde $f$=10% din energia mecanică, astfel că energia mecanică imediat după ciocnire devine $E_{m1} = (1-f)E_m = (1-f)mgh_0$. Pe baza legii conservării energiei mecanice după ciocnire obținem $E_{m1} = E_{p\max 1} \Rightarrow$

$(1-f)mgh_0 = mgh_1 \Rightarrow h_1 = (1-f)h_0$=90 cm

**b.** După cea de-a doua ciocnire cu suprafața plană noua valoare a energiei mecanice este $E_{m2} = (1-f)E_{m1} = (1-f)^2 E_m = (1-f)^2 mgh_0$. Imediat după cea de-a doua ciocnire viteza $v_2$ a bilei se obține din $\frac{mv_2^2}{2} = (1-f)^2 mgh_0 \Rightarrow$

$v_0 = (1-f)\sqrt{2gh_0} \approx 4{,}02$ m/s

**c.** După cea de-a treia ciocnire cu suprafața plană energia mecanică a bilei este $E_{m3} = (1-f)E_{m2} = (1-f)^3 E_m = (1-f)^3 mgh_0$=2,916 J

**14.a.** Deoarece corpul este aruncat vertical de jos în sus pe baza conservării energiei mecanice, considerând că la nivelul solului $E_{psol}$=0, atunci

$E_{c_{sol}} = E_{p_{max}} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$=20 m

**b.** După prima ciocnire viteza corpului devine $v'_0$=10 m/s, astfel că energia mecanică este $E_{m2} = E'_{csol} = \frac{mv'^2_0}{2}$, astfel că fracțiunea pierdută din energia mecanică este $f = \frac{E_{csol} - E'_{csol}}{E_{csol}} = 1 - \frac{v'^2_0}{v_0^2}$=75%

**c.** Variația energiei mecanice după cea de-a de-a doua ciocnire este $\Delta E_{m2} = E_{m_2} - E_{m_1} = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{mv''^2_0}{2} - \frac{mv'^2_0}{2} = -7{,}5$ J, deoarece $v''_0$=5 m/s

**15.a.** Deoarece jgheabul este lucios neghijăm frecările şi utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$ unde corpul părăşeşte jgheabul. Considerăm nulă energia potențială la nivelul solului. Obținem: $E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} + mgh \Rightarrow$

$v_B = \sqrt{2g(H-h)}$=10 m/s

**b.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul $A$ şi punctul unde corpul loveşte solul $C$: $E_{m_A} = E_{m_C} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_C} \Rightarrow mgH = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$

$v_C = \sqrt{2gH} \approx 12{,}65$ m/s

**c.** Aplicăm teorema de conservare a energiei mecanice între punctul $A$ şi punctul $D$ aflat la înălţimea $h_D = fH$, astfel că: $E_{m_A} = E_{mD} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$$mgH = \frac{mv_D^2}{2} + mgh_D \Rightarrow v_D = \sqrt{2g(H - h_D)} = \sqrt{2gH(1-f)} \approx 11{,}31 \text{ m/s}$$

**16.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $B$, astfel că $\Delta E_{c_{AB}} = L_{F_f} + L_N + L_G$. Deoarece $L_{F_f} = -F_f\ell = -\mu mg\ell$, $L_G=0$, $L_N=0$ şi

$\Delta E_{c_{AB}} = E_{c_B} - E_{c_A} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ obţinem $\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\ell \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell} \Rightarrow$

$v_B \approx 5{,}47$ m/s

**b.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele aflate pe jgheab $B$ şi $C$. Considerăm nulă energia potenţială în punctul $B$. Astfel:

$$E_{m_B} = E_{m_C} \Rightarrow E_{c_B} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + mgR \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gR} \approx 4{,}47 \text{ m/s}$$

**c.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul $B$ şi punctul $D$ până la care urcă bila: $E_{m_B} = E_{m_D} \Rightarrow E_{c_B} = E_{p_D} \Rightarrow \frac{mv_B^2}{2} = mgh_D$

$h_D = \frac{v_B^2}{2g} = 1{,}5$ m

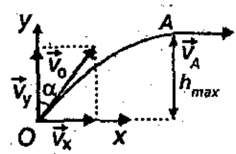
**17.a.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru punctele aflate pe suprafaţă curbă $A$ şi $B$ considerând că în $B$ energia potenţială este nulă.

$$E_{m_A} = E_{m_B} \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_B} \Rightarrow mgH = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2gH} = 10 \text{ m/s}$$

**b.** Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului între punctele $A$ şi $B$ este $L_G = mgH = 50$ J

**c.** Energia mecanică totală iniţială este $E_{m_A} = E_{p_A} = mgH$. În punctul $C$ energia mecanică este $E_{m_C} = E_{m_A}/4 = mgH/4$. Cum $E_{m_C} = E_{c_C}$ putem aplica între punctele $A$ şi $C$ teorema de variaţie a energiei cinetice: $\Delta E_{c_{AC}} = L_G + L_N + L_{Ff}$. Deoarece $\Delta E_{c_{AC}} = E_{c_C} = \frac{mgH}{4}$, $L_G = mgH$, $L_N=0$ şi

$L_{Ff} = -F_f BC = -\mu mgBC$ obţinem: $\frac{mgH}{4} = mgH - \mu mgBC \Rightarrow BC = \frac{3H}{4\mu} = 18{,}75$ m




**18.a.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul minge-Pământ între punctul $O$ aflat pe sol şi punctul $A$ aflat la înălţimea maximă: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$, cu $E_{p_O} = 0$, deoarece alegem pe

sol valoarea zero pentru energia potențială
În punctul de înălțime maximă, vectorul viteză este orizontal. Pe orizontală mingea are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_0\cos\alpha$, astfel că

$$v_A = v_0\cos\alpha \Rightarrow v_0 = \frac{v_A}{\cos\alpha} \Rightarrow E_{c_O} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2\cos^2\alpha} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\alpha} = 90\text{J}$$

**b.** Când mingea formează cu orizontala un unghi $\beta$, astfel că $v_B\cos\beta = v_A$, deoarece pe orizontală mişcarea mingii este rectilinie şi uniformă $v_B = \frac{v_A}{\cos\beta}$ şi

$$E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2\cos^2\beta} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\beta} = 60\text{ J}.$$

**c.** Aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare de pe sol $O$ şi punctul $B$, unde mingea formează cu orizontala un unghi $\beta$. Considerând că pe sol energia potențială este nulă, aflăm energia potențială în $B$. Din $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$ şi cum $E_{p_O} = 0 \Rightarrow$

$$E_{p_B} = E_{c_O} - E_{c_B} = \frac{E_{c_A}}{\cos^2\alpha} - \frac{E_{c_A}}{\cos^2\beta} = 30\text{ J}$$

**19.a.** Aplicăm între punctul de plecare $O$ şi punctul în care energia cinetică este o fracțiune $f$ din energia cinetică inițială, legea de conservare a energiei mecanice, astfel că: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p$. Considerăm că în punctul de lansare $O$, energia potențială este nulă. Astfel obținem: $E_{c_O} = E_c + E_p \Rightarrow$

$$E_p = E_{c_O} - E_c = E_{c_O} - fE_{c_O} = E_{c_O}(1-f) \Rightarrow mgh = \frac{mv_0^2}{2}(1-f) \Rightarrow h = \frac{v_0^2(1-f)}{2g} \approx 0{,}65\text{m}$$

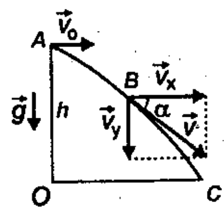
**b.** Deoarece pe orizontală mişcarea corpului este rectilinie şi uniformă

$v_0\cos\alpha = v\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{v_0\cos\alpha}{v}$. Cum $E_c = fE_{c_0} \Rightarrow$

$$\frac{mv^2}{2} = f\frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = fv_0^2 \Rightarrow v = v_0\sqrt{f} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{f}} = 0{,}625.$$

**c.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul $O$ şi punctul $A$ în care corpul ajunge la înălțimea maximă: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A}$. Deoarece pe orizontală corpul are o mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $v_A = v_0\cos\alpha$ energia potențială maximă este

$$E_{p_A} = E_{c_O} - E_{c_A} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} = 6{,}75\text{ J}$$




**20.a.** Considerăm că pe sol, în punctul $O$, energia potențială este nulă. Energia mecanică totală a corpului este formată din energia cinetică şi energia potențială, astfel: $E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh = 70\text{ J}$

**b.** Deoarece pe orizontală corpul se mişcă uniform, întrucât asupra corpului acţionează numai greutatea care este verticală, atunci

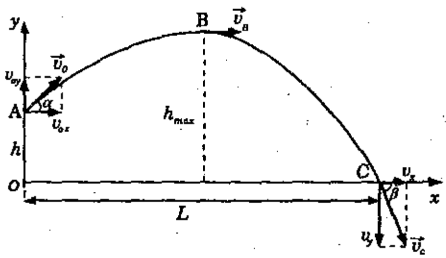
$$v_0 = v_B \cos\alpha \Rightarrow v_B = \frac{v_0}{\cos\alpha} \Rightarrow E_{c_B} = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2\cos^2\alpha} = 40\ \text{J}$$

Pe baza legii de conservare a energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$ obţinem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{p_B} = E_m - E_{c_B} = mgh - \frac{mv_0^2}{2} tg^2\alpha = 30\ \text{J}$

**c.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $A$ şi punctul de sosire de pe sol $C$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$

Cum $E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 26,46\ \text{m/s}$

**21.a.** Pe baza definiţiei energiei mecanice totale:




$$E_m = E_{c_A} + E_{p_A} = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = 100\ \text{J}$$

**b.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul $A$ şi punctul cel mai înalt al traiectoriei $B$, astfel că: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Pe orizontală mişcarea corpului este rectilinie şi uniformă, astfel că.

$$v_0 \cos\alpha = v_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = mgh_{max} + \frac{mv_0^2 \cos^2\alpha}{2} \Rightarrow h_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = 16,25\ \text{m}$$

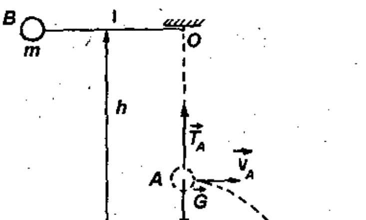
**c.** Aplicăm între punctul de plecare $A$ şi punctul de sosire la sol $C$, legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C}$.

Cum $E_{p_C} = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 20\ \text{m/s}$.

**d.** Pe orizontală, corpul se mişcă uniform astfel că

$$v_0 \cos\alpha = v_C \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{v_0 \cos\alpha}{v_C} = 0,4325.$$

**22.a.** $E_m = E_c + E_p = mgh = 18\ \text{J}$, deoarece în poziţia iniţială corpul nu are energie cinetică şi are doar energie potenţială, iar pe sol alegem valoarea zero pentru energia potenţială gravitaţională.




**b.** Aplicăm între punctul de plecare $B$ şi punctul când corpul se află în poziţia verticală $A$ legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow$

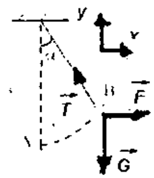
$$mgh = \frac{mv_A^2}{2} + mg(h - \ell) \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell} = 4\ \text{m/s}$$

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $B$ şi punctul $C$ unde corpul ajunge pe sol.

$$E_{p_B} = E_{c_{sol}} \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s}.$$

**d*.** Impunem condiţia ca în poziţia verticală $A$ rezultanta tensiunii şi a greutăţii să joace un rol de forţă centripetă, deoarece corpul are o traiectorie circulară. Scalar: $T_A - mg = \frac{mv_A^2}{\ell} \Rightarrow T_A = m\left(g + \frac{v_A^2}{\ell}\right) = 3mg = 30 \text{ N} \Rightarrow$ firul se rupe pe verticală când tensiunea ajunge la valoarea 30 N.

**23.a.** Impunem condiţia de echilibru bilei în poziţia $B$, astfel că $\vec{T} + \vec{F} + \vec{G} = 0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate $Ox$: $F - T\sin\alpha = 0$ şi pe $Oy$: $T\cos\alpha - mg = 0$. Împărţind cele două relaţii obţinem: $tg\alpha = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mgtg\alpha \Rightarrow$




$F \approx 0{,}865$ N

**b.** Tensiunea din firul de care este legată bila în poziţia $B$ este $T = \frac{mg}{\cos\alpha} = 1$ N

**c.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Considerăm nulă energia potenţială în punctul cel mai de jos al traiectoriei, adică punctul $A$. Astfel $E_{p_B} = E_{c_A} \Rightarrow mg\ell(1 - \cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$$v_A = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} \approx 1{,}41 \text{ m/s}$$

**24.a.** Aplicăm între punctul $O$ în care se află corpul iniţial şi punctul $A$ când firul devine orizontal, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul $O$ energia potenţială este nulă, astfel că $E_{p_O} = 0$. Astfel:

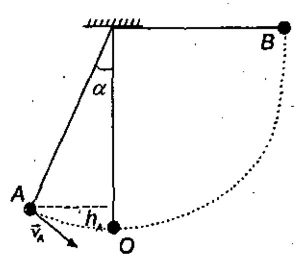
$$E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_A} + E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_A^2}{2} + mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{v_0^2 - 2g\ell} = 4 \text{ m/s}.$$

**b.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul $A$ şi punctul unde se opreşte corpul $B$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Deoarece $E_{c_B} = 0$ obţinem:

$$E_{c_B} = 0 \Rightarrow mg\ell + \frac{mv_A^2}{2} = mgh_B \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_B \Rightarrow h_B = \frac{v_0^2}{2g} = 1{,}25 \text{ m}.$$

**c.** $L_T = 0$, deoarece forţa de tensiune este orientată perpendicular pe traiectorie şi $L_G = -mgh_B = -2{,}5$ J, deoarece greutatea nu ajută la mişcare şi prin urmare este o forţă cu caracter rezistiv.

**25.a.** Aplicăm între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$, legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei energia potenţială este nulă $E_{p_O} = 0$. Obţinem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum



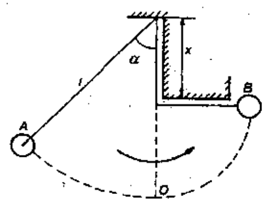
$E_{p_A} = mg\ell(1-\cos\alpha)$ şi $E_{c_B} = 0$, deoarece în punctul $B$ corpul se opreşte, se obţine: $\frac{mv_A^2}{2} + mg\ell(1-\cos\alpha) = mg\ell \Rightarrow v_A = \sqrt{2g\ell\cos\alpha} \Rightarrow v_A$=2 m/s.

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul $O$ şi punctul $B$: $E_{c_O} + E_{p_O} = E_{c_B} + E_{p_B}$. Cum $E_{p_O} = 0$ şi $E_{c_B} = 0$ obţinem:

$$E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell} \approx 2{,}83 \text{ m/s}.$$

**c.** Energia iniţială a corpului este $E_m = E_c + E_p = \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell = 0{,}4$ J.

**26.a.** Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei energia potenţială este nulă. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $A$ şi punctul $B$, când firul devine orizontal: $E_{p_A} + E_{c_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$. Deoarece corpul porneşte din repaus şi ajunge în final în repaus $E_{c_A} = 0$ şi $E_{c_B} = 0$, astfel când




$E_{p_A} = E_{p_B} \Rightarrow mgh_A = mgh_B \Rightarrow h_B = h_A = l(1-\cos\alpha)$

$\Rightarrow h_B = 20$ cm $\Rightarrow$ corpul urcă până la înălţimea de la care a plecat.

**b.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctul $A$ şi poziţia verticală $O$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Cum $E_{c_A} = 0$ şi $E_{p_O} = 0$ obţinem:

$$mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 2 \text{ m/s}.$$

**c.** $L_G = L_{G_{AO}} + L_{G_{OB}} = mgh_A - mgh_B = mg(h_A - h_B) = 0$, deoarece punctul $A$ şi punctul $B$ se află pe aceeaşi orizontală, astfel că $h_A = h_B$.

**27.a.** Lucrul mecanic efectuat de forţa de greutate este $L_G = mg\ell(1-\cos\alpha)$=5J

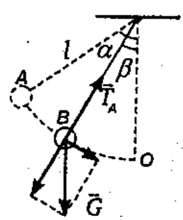
**b.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $A$ şi poziţia de echilibru $O$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Deoarece $E_{c_A} = 0$ şi $E_{p_A} = 0$

obţinem $mg\ell(1-\cos\alpha) = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \approx 3{,}16$ m/s

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între poziţia de echilibru $O$ şi punctul în care $E_c$=$E_p$, astfel că $E_{c_O} + E_{p_O} = E_c + E_p \Rightarrow E_{c_O} = 2E_p \Rightarrow$

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{\ell(1-\cos\alpha)}{2} = 25 \text{ cm}$$

**28.a.** Considerăm că în punctul cel mai de jos al traiectoriei $O$, energia potenţială este nulă $E_{p_O} = 0$. Conservăm energia mecanică între punctele $A$ şi $O$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_O} + E_{p_O}$. Deoarece $E_{c_A} = 0$ obţinem:



$$mg\ell(1-\cos\alpha)=\frac{mv_0^2}{2}\Rightarrow v_0=\sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)}=3\ \text{m/s}.$$

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$:

$$E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}\Rightarrow mg\ell(1-\cos\alpha)=\frac{mv_B^2}{2}+mg\ell(1-\cos\beta)\Rightarrow$$

$$v_B=\sqrt{2g\ell(\cos\beta-\cos\alpha)}\approx 2{,}56\ \text{m/s}.$$

**c*.** În punctul $B$ impunem condiţia ca rezultanta forţelor pe direcţia firului să joace rol de forţă centripetă. Scalar obţinem:

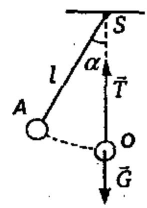
$$T_B-mg\cos\beta=\frac{mv_B^2}{\ell}\Rightarrow T_B=m\left(\frac{v_B^2}{\ell}+g\cos\beta\right)\Rightarrow T_B=mg(3\cos\beta-2\cos\alpha).$$

Particularizăm pentru: $\beta=\alpha=60^0\Rightarrow T_A=mg\cos\alpha=0{,}5$ N.

Pentru $\beta=30^0\Rightarrow T_B=mg(3\cos\beta-2\cos\alpha)=1{,}595$ N.

Pentru $\beta=0^0\Rightarrow T_O=mg(3-2\cos\alpha)=2$ N.

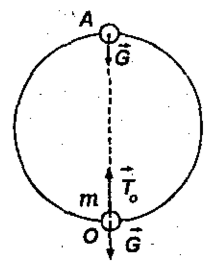
În poziţia de plecare $A$, tensiunea în fir este minimă, iar în poziţia de echilibru $O$ (verticală), tensiunea în fir este maximă.




**29.a.** Tensiunea în cablu este maximă când cablul se află în poziţie verticală. În această poziţie, rezultanta tensiunii şi a greutăţii joacă rol de forţă centripetă. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar: $T-mg=\frac{mv_0^2}{\ell}$, unde $\ell$ este lungimea firului.

Cum $T=2mg\Rightarrow mg=\frac{mv_0^2}{\ell}\Rightarrow v_0=\sqrt{g\ell}=10$ m/s

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele $O$ şi $A$, unde se opreşte corpul. Considerăm că $E_{p_O}=0$ şi deoarece $E_{c_A}=0$, obţinem $E_{c_O}=E_{p_A}\Rightarrow\frac{mv_0^2}{2}=mg\ell(1-\cos\alpha)\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{v_0^2}{2g\ell}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$.




**c.** Pentru ca acest corp să poată să descrie cercul în plan vertical, trebuie ca în $A$, tensiunea în cablu să fie mai mare sau cel puţin egală cu zero. Considerăm cazul cel mai defavorabil când tensiunea din cablu în $A$ este nulă. În acest caz în punctul $A$, greutatea joacă rol de forţă centripetă, astfel că: $G=F_{cp}\Rightarrow mg=\frac{mv_A^2}{\ell}\Rightarrow v_A^2=g\ell$. Aplicăm între punctele $A$ şi $O$ legea de conservare a energiei mecanice. $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_O}+E_{p_O}$ şi deoarece $E_{p_O}=0$ obţinem

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_A^2}{2}+mg2\ell\Rightarrow v_0^2=v_A^2+4g\ell=5g\ell.$$

Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului în punctul $O$ şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă:

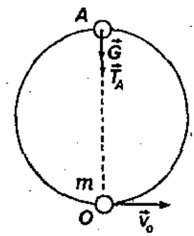
$\vec{T}_0+\vec{G}=\vec{F}_{cp}$, iar scalar $T_0-mg=\frac{mv_0^2}{\ell}\Rightarrow T_0=mg+\frac{mv_0^2}{\ell}=6mg=1{,}2\ \text{kN}\Rightarrow$ pentru ca acesst corp să poată să descrie un cerc în plan vertical trebuie ca firul să suporte o forță de rupere minimă de cel puțin șase ori mai mare decât greutatea corpului susținut.

**30.a.** Deoarece $E_{p_0}=0$ energia inițială a corpului este

$E_{m_0}=E_{c_0}+E_{p_0}=\frac{mv_0^2}{2}=10\ \text{J}$

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $O$ și punctul cel mai de sus al traiectoriei $A$. Obținem: $E_{c_O}+E_{p_O}=E_{c_A}+E_{p_A}$

$\Rightarrow\ \frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_A^2}{2}+2mg\ell\Rightarrow v_A=\sqrt{v_0^2-4g\ell}\approx 8{,}944\ \text{m/s}.$




**c*.** Reprezentăm forțele care se exercită aupra corpului în punctul superior al traiectoriei și impunem condiția ca rezultanta lor să joace rol de forță centripetă: $\vec{T}_A+\vec{G}=\vec{F}_{cpA}$, iar scalar obținem:

$T_A+mg=\frac{mv_A^2}{\ell}\Rightarrow T_A=m\left(\frac{v_A^2}{\ell}-g\right)=m\left(\frac{v_0^2}{\ell}-5g\right)=30\ \text{N}.$

**31*.a.** Alegem $E_{p_0}=0$ și aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele $A$ și $O$: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_O}+E_{p_O}$.

Cum $E_{c_A}=0\Rightarrow E_{p_A}=E_{c_0}\Rightarrow mg\ell=\frac{mv_0^2}{2}\Rightarrow v_0=\sqrt{2g\ell}=3\ \text{m/s}.$

**b.** Pentru a putea descrie cercul cu raza $\ell-x$, corpul trebuie să ajungă în punctul superior al cercului. Considerăm că în punctul $B$ tensiunea în fir este nulă, iar greutatea joacă rol de forță centripetă, astfel că: $G=F_{cp}\Rightarrow mg=\frac{mv_B^2}{\ell-x}\Rightarrow v_B^2=g(\ell-x)$. Aplicăm între punctele $A$ și $B$ legea de conservare a energiei mecanice astfel că: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}\Rightarrow$

$mg\ell=\frac{mv_B^2}{2}+2mg(\ell-x)\Rightarrow x=\frac{3\ell}{5}=27$ cm, deoarece raza cercului este $\ell$-$x$.

**c.** Lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este: $L_G=mg(\ell-OB)=mg(2x-\ell)=\frac{mg\ell}{5}=0{,}9$ J.

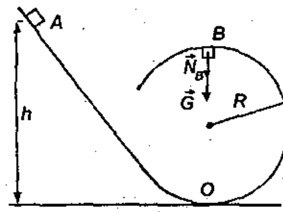
**32.a.** Aplicăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele $A$ și $B$ aflate pe planul înclinat: $E_{c_A}+E_{p_A}=E_{c_B}+E_{p_B}$. Cum $E_{c_A}=0$ și $E_{p_B}=0$ obținem: $mgAB\sin\alpha=\frac{mv_B^2}{2}\Rightarrow v_B=\sqrt{2gAB\sin\alpha}\approx 8{,}94\ \text{m/s}$

**b.** Lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului la deplasarea acestuia între punctele $A$ şi $C$ este: $L_{G_{AC}} = mg(h-R) = mg(AB\sin\alpha - R)$=15 J

**c.** Pe baza legii de conservare a energiei cinetice între punctele $A$ şi $C$ obţinem: $E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow E_{c_C} = mg(AB\sin\alpha - R)$=15 J

**d.** Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice între punctele $A$ şi punctul $D$ în care energia cinetică este egală cu energia potenţială: $E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow$

$$E_{p_A} = 2E_{p_D} \Rightarrow mgAB\sin\alpha = 2mgh_D \Rightarrow h_D = \frac{AB\sin\alpha}{2} = 2\text{ m}$$




**33*.a.** Considerăm că în punctul cel mai de jos al buclei energia potenţială este nulă, astfel că $E_{p_O} = 0$. Deoarece mişcarea montagne rousse-ului decurge fără frecare, aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$, unde $B$ este punctul cel mai sus al buclei, iar punctul $A$ este cel de plecare. Obţinem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR\,(1)$$

În punctul $B$, greutatea joacă rol de forţă centripetă deoarece presupunem că forţa de apăsare asupra şinei este nulă. Scalar obţinem: $G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR$ (2). Din (1) şi (2) obţinem: $h = \frac{5R}{2}$=10 m.

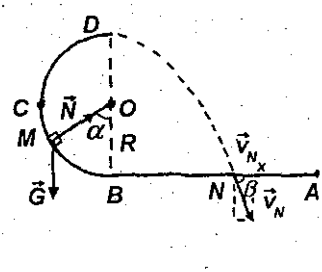
**b.** Pe baza conservării energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$ obţinem:

$$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2} + 2mgR \Rightarrow v_B = \sqrt{v^2 + 2g(h-2R)} \Rightarrow$$

$$v_B = \sqrt{v^2 + gR} = 7\text{ m/s}.$$

**c.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului în punctul $B$ şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă. Vectorial: $\vec{G} + \vec{N}_B = \vec{F}_{cp}$. Obţinem scalar: $G + N_B = F_{cp} \Rightarrow mg + N_B = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow$

$$N_B = m\left(\frac{v_B^2}{R} - g\right) = \frac{mv^2}{R} = 1845\text{ N}$$




**34*.a.** Alegem valoarea zero a energiei potenţiale pentru toate punctele planului orizontal. Pentru ca acest corp să poată să descrie jgheabul semicircular $BCD$, în punctul $D$, greutatea corpului trebuie să joace rol de forţă centripetă, deoarece presupunem că acest corp nu apasă asupra jgheabului. Scalar obţinem: $G = F_{cp} \Rightarrow mg = \frac{mv_D^2}{R} \Rightarrow v_D^2 = gR$

Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele $A$ şi $D$.
$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_D} + E_{p_D} \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_D^2}{2} + 2mgR \Rightarrow v_A = \sqrt{5gR} = 5$ m/s.

**b.** Reprezentăm forţele care acţionează asupra corpului în punctul $M$ şi impunem condiţia ca rezultanta forţelor pe direcţia normalei să joace rol de forţă centripetă. Obţinem: $N_M - mg\cos\alpha = \frac{mv_M^2}{R} \Rightarrow N_M = m\left(\frac{v_M^2}{R} + g\cos\alpha\right)$.

Aplicăm conservarea energiei mecanice între punctele $A$ şi $M$:
$E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_M} + E_{p_M} \Rightarrow \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv_M^2}{2} + mgR(1-\cos\alpha) \Rightarrow v_M^2 = v_A^2 - 2gR(1-\cos\alpha) \Rightarrow$
$v_M^2 = gR(3+2\cos\alpha) \Rightarrow N_M = 3mg(1+\cos\alpha) = 9$ N.

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $A$ şi punctul $N$ unde corpul loveşte solul: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_N} + E_{p_N}$.
Cum $E_{p_A} = E_{p_N} = 0 \Rightarrow E_{c_A} = E_{c_N} \Rightarrow v_N = v_A = 5$ m/s $\Rightarrow$ corpul loveşte solul cu aceeaşi viteză cu care a plecat, dar direcţia vectorului viteză este diferită.

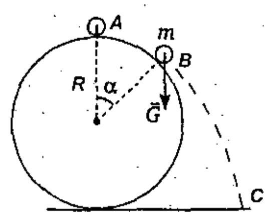
**d.** Din desen $\cos\beta = \frac{v_{N_x}}{v_N}$. Cum pe orizontală, după ce părăseşte jgheabul semicircular, corpul are o mişcare rectilinie şi uniform cu vitza $v_{N_x} = v_D = \sqrt{gR} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,447$

**35.a.** Lucrul mecanic efectuat de greutate la deplasarea corpului din $A$ în $B$ este $L_G = mgh_{AB} = mg(h_A - h_B) = mg(2R - h)$=32 mJ

**b.** Utilizăm legea de legea de conservare a energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$. $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_B^2}{2} + mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(2R-h)} \approx 1,79$ m/s

**c.** Utilizăm legea de legea de conservare a energiei mecanice între punctul $A$ şi punctul $C$ aflat pe sol. Obţinem: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$
$v_B = 2\sqrt{gR} \approx 4,38$ m/s

**d.** Pe baza legii conservării energiei mecanice, energia totală a corpului când acesta se află faţă de sol la o înălţime egală cu raza sferei este $E_m = E_{p_A} = 2mgR$ =192 mJ




**36*.a.** Pentru ca să se poată desprinde de sferă în punctul $B$, trebuie ca forţa de apăsare exercitată de corp asupra sferei să se anuleze, astfel că $N_B = 0$, iar componenta normală a greutăţii să joace rol de forţă centripetă: $mg\cos\alpha = \frac{mv_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = gR\cos\alpha$ (1)

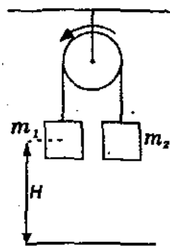
Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele $A$ şi $B$: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_B} + E_{p_B} \Rightarrow mg2R = \frac{mv_B^2}{2} + mg(R + R\cos\alpha)$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \approx 2{,}83$ m/s.

**b.** $h_B = R(1+\cos\alpha) = 2$ m, reprezintă înălţimea faţă de sol la care se desprinde corpul de sferă.

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice între punctul de plecare $A$ şi punctul în care corpul ajunge la sol $C$, deoarece mişcarea se face fără frecare: $E_{c_A} + E_{p_A} = E_{c_C} + E_{p_C} \Rightarrow 2mgR = \frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow v_C = \sqrt{4gR} \approx 6{,}93$ m/s.

**37.a.** Energia totală a sistemului de corpuri, considerând că la sol energia potenţială este nulă este: $E_t = (m_1 + m_2)gH = 100$ J, deoarece corpurile se află în repaus şi au doar energie potenţială.




**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul de corpuri. La sol energia totală a sistemului de corpuri este $E_t = E_c + E_p = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + m_1 g 2H$, deoarece când ajunge la sol corpul al doilea, ambele corpuri au aceeaşi viteză, iar corpul $m_1$ se află la înălţimea $2H$ faţă de sol. Obţinem:

$$(m_1 + m_2)gH = \frac{(m_1+m_2)}{2}v^2 + 2m_1 gH \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_2 - m_1)gH}{m_1 + m_2}} = 2 \text{ m/s}.$$

**c.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul 1, care se află la înălţimea $2H$ şi se mişcă vertical în sus. Astfel $E_i = E_f \Rightarrow E_c + E_p = E_{p_f} \Rightarrow$

$$\frac{m_1 v^2}{2} + 2m_1 gH = m_1 gh \Rightarrow h = 2H + \frac{v^2}{2g} = H\left(2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{H(3m_2 + m_1)}{m_1 + m_2} = 2{,}2 \text{ m}.$$

**38.a.** Cum $F_1 = kx_1$, constanta elastică a resortului este $k = F_1 / x_1 = 500$ N/m

**b.** Lucrul mecanic efectuat de forţa elastică în procesul comprimării cu $x_1$ este $L = -F_{el_m} x_1 = -\frac{kx_1^2}{2} = -\frac{F_1 x_1}{2} = -2{,}5$ J

**c.** Deoarece forţa elastică este o forţă de tip conservativ, pentru sistemul corp-resort se aplică legea conservării energiei mecanice, astfel că energiea potenţială de deformare a resortului se transformă în energia cinetică a corpului. Astfel $E_p = E_c \Rightarrow \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = x_1\sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{F_1 x_1}{m}} = 10$ m/s

## 3.5. Impulsul punctului material. Teorema de variaţie a impulsului punctului material.

**1.** Conform definiţiei $E_c = \frac{mv^2}{2}$ şi $p = mv \Rightarrow m = \frac{p}{v} \Rightarrow E_c = \frac{pv}{2}$

$\Rightarrow v = \frac{2E_c}{p} = 10$ m/s şi $m = \frac{p^2}{2E_c} = 160$ g.

**2.** Cum $E_c = \frac{mv^2}{2}$ şi $p = mv \Rightarrow v = \frac{p}{m} \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$. Dacă $p' = 3p$

$\Rightarrow E_c' = \frac{p'^2}{2m} = \frac{9p^2}{2m} = 9E_c \Rightarrow$ energia cinetică creşte de 9 ori.

**3.** După $t_1 = 2$ s, viteza corpului este $v = 10$ m/s şi impulsul corpului este $p = mv = 5$ Ns. $\Delta p = p - p_0$, unde $p_0$ reprezintă impulsul iniţial al corpului $p_0 = mv_0 = 10$ Ns, deoarece viteza iniţială la $t = 0$ este $v_0 = 20$ m/s $\Rightarrow \Delta p = -5$ Ns, deoarece impulsul corpului scade în primele două secunde de la începerea mişcării

**4.** Conform legii cordonatei $x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, prin metoda identificării coeficienţilor obţinem: $x_0 = 4$ m, $v_0 = -8$ m/s şi $a = 12$ m/s², astfel că la momentul iniţial de timp $t = 0$, impulsul corpului este $p_0 = mv_0 = -8$ Ns. Legea vitezei este $v = v_0 + at = -8 + 12t$ şi prin urmare la momentul $t = 2$ s$\Rightarrow v = 16$ m/s, iar $p = mv = 16\ N \cdot s \Rightarrow \Delta p = p - p_0 = 24\, N \cdot s$.

**5.** Deoarece corpul are o mişcare uniform accelerată cu viteza iniţială $v_0$, legea vitezei este de forma $v = v_0 + at = 2 + 2t$, iar după $t = 4$ s de la începerea mişcării corpul are viteza $v = 10$ m/s$\Rightarrow p = mv = 2\ kg \cdot m/s$.

**6.** Aplicăm pentru sistemul minge – sol legea conservării energiei mecanice, astfel că energia potenţială a mingii se transformă în energie cinetică la sol: $E_p = E_c \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 10$ m/s$\Rightarrow p = mv = 4$ kg·m/s este impulsul corpului la sol.

**7.** Aflăm înăţimea maximă la care poate ajunge mingea aplicând legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică la sol a mingii de pinpong se transformă în energie potenţială gravitaţională: $E_{c_{sol}} = E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

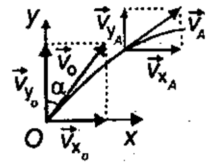
Aflăm viteza la înălţimea $h=\frac{h_{max}}{3}=\frac{v_0^2}{6g}$, aplicând legea de conservare a energiei mecanice între punctul aflat la sol şi cel aflat la înălţimea $h$.

$$E_{c_{sol}}=E_c+E_p \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2}=mgh+\frac{mv^2}{2} \Rightarrow v=\pm v_0\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow p=\pm mv_0\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm 0{,}2\ \text{kg·m/s}.$$

Se obţin două valori ale impulsului corespunzătoare cazului de urcare şi respectiv de coborâre prin punctul aflat la o treime din înălţimea maximă la care poate ajunge corpul.

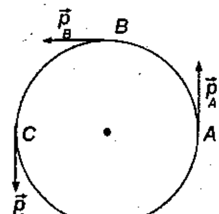
**8.** Mişcarea paharului corespunde aruncării pe orizontală a unui corp. Cum vectorul viteză este întotdeauna tangent la traiectorie, îl vom descompune în cele două componente $v_x$ şi $v_y$, astfel că $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$. Pe orizontală paharul se mişcă uniform cu viteza $v_0$, astfel că $v_x=v_0$, iar pe verticală cade liber cu acceleraţia gravitaţională, astfel încât $v_y=gt \Rightarrow v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$

$\Rightarrow p=mv=m\sqrt{v_0^2+g^2t^2}=0{,}447$ N·s.



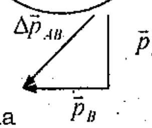

**9.** Mişcarea ventuzei este o aruncare sub un unghi, iar vectorul viteză tangent în permanenţă la traiectorie se descompune în două componente, una orizontală şi una verticală. Pe orizontală ventuza are o mişcare rectilinie şi uniformă astfel că $v_x=v_0\cos\alpha$, iar pe verticală are o aruncare de jos în sus, astfel că $v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\alpha-gt$.

$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\alpha}\approx 5{,}2$ m/s şi $p=mv=0{,}26$ kg·m/s.




**10.** Între punctele diametral opuse $A$ şi $C$, variaţia impulsului este $\Delta\vec{p}_{AC}=\vec{p}_C-\vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AC}|=mv+mv=2mv=1280$ Ns, deoarece impulsurile sunt egale în modul ($p_C=p_A=mv$) şi au sensuri contrare.

După ce atletul parcurge un sfert de pistă, între punctele $A$ şi $B$, $\Delta\vec{p}_{AB}=\vec{p}_B-\vec{p}_A$, iar scalar $|\Delta p_{AB}|=mv\sqrt{2}\approx 902{,}4$ Ns, deoarece impulsul în punctul $B$ este perpendicular pe impulsul din punctul $A$, iar scalar $p_A=p_B=mv$.




**11.** Deoarece forţa este reprezentată în funcţie de timp, aria cuprinsă între curba forţei, axa timpului şi ordonata la momentul $t=4$ s reprezintă fizic variaţia impulsului forţei, astfel că: $\Delta H$=21 Ns.

Pe baza teoremei de variaţie a impulsului: $\Delta p=\Delta H \Rightarrow p=\Delta H \Rightarrow mv=\Delta H$, deoarece iniţial corpul se află în repaus şi $p_0=0 \Rightarrow v=\frac{\Delta H}{m}=21$ m/s.

**12.** Deoarece forţa este reprezentată în funcţie de timp, aria cuprinsă între curba forţei şi axa timpului semnifică fizic impulsul forţei, astfel că:

$\Delta H = \frac{F_0 \cdot t}{2}$. Pe baza teoremei de variație a impulsului unui punct material:

$\Delta H = \Delta p \Rightarrow p_f - p_i = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow mv - mv_0 = \frac{F_0 \cdot t}{2} \Rightarrow v = v_0 + \frac{F_0 \cdot t}{2m} = 15$ m/s.

**13.** Utilizând teorema de variație a impulsului unui punct material: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = 16$ s.

**14.** Aplicăm teorema de variație a impulsului unui punct material: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv}{\Delta t} = 100$ N, deoarece inițial $v_0$=0m/s și $p_0$=0Ns

**15.** Aplicăm pentru glonte teorema de variație a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -750$ N. Semnul minus arată că această forță se opune mişcării glontelui şi astfel îi micşorează acestuia impulsul.

**16.** Se utilizează teorema de variație a impulsului pentru tren: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow -mv_0 = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = -\frac{mv_0}{\Delta t} = -200$ kN, deoarece în final trenul se opreşte şi $v$=0 m/s. Semnul "–" ne arată că forța determinată frânează trenul.

**17.** Utilizăm teorema de variație a impulsului în cazul frânării maşinii: $\Delta p = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = F_f \cdot \Delta t \Rightarrow F_f = \frac{m(v - v_0)}{\Delta t} = -800$ N. Semnul "–" arată că forța de frânare micşorează impulsul maşinii, deoarece se opune mişcării acesteia.

**18.** Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul lansării cu frecare a unui corp pe plan orizontal. Vectorial: $\Delta \vec{p} = \vec{F}_f \cdot \Delta t$, iar scalar: $\Delta p = -F_f \cdot \Delta t \Rightarrow mv - mv_0 = -\mu mgt$, deoarece $F_f = \mu N = \mu mg$ şi ea micşorează impulsul corpului pentru că se opune mişcării acestuia, astfel că $p = mv = mv_0 - \mu mgt = m(v_0 - \mu gt) = 1{,}6$ kg·m/s.

**19.** Aplicăm teorema de variație a impulsului în cazul căderii libere a corpului: $\Delta p = G \cdot \Delta t$, deoarece singura forță care acționează asupra corpului în cădere liberă este greutatea şi $\Delta t = t \Rightarrow \Delta p = mgt = 15$ kg·m/s.

**20.** În procesul în care sare de pe scândură, broasca apasă scândura cu o forță orientată vertical în jos, iar scândura acționează vertical asupra broaştei cu o forță orientată în sus şi egală conform principiului acțiunii şi reacțiunii. Aplicăm teorema de variație a impulsului broaştei pe verticală în momentul săriturii acesteia, pentru a determina forța dezvoltată de scândură. Obținem: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow mv_0 \sin\alpha = F \cdot \Delta t \Rightarrow F = \frac{mv_0 \sin\alpha}{\Delta t} = 1$ kN, deoarece pe verticală impulsul inițial al broaştei este zero ($p_i$=0).

**21.a.** Aplicăm teorema de variație a impulsului $\Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t \Rightarrow m(v - v_0) = F\Delta t$ (1) și cum $\Delta E_c = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right)$ (2) prin împărțirea relațiilor obținem: $\frac{\Delta E_c}{F\Delta t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow v = \frac{2\Delta E_c}{F\Delta t} - v_0$ =3 m/s

**b.** Masa corpului este $m = \frac{F\Delta t}{v - v_0}$ =1 kg

**c.** Variația impulsului corpului este $\Delta p = F\cdot\Delta t$ =2 Ns

## 3.6 Ciocniri

**1.a.** Energia cinetică inițială a sistemului este $E_{ci} = \frac{mv^2}{2}$ =112,5 J

**b.** În urma procesului de ciocnire are loc un transfer de impuls de la corpul cu masa $m$ spre corpul cu masa $M$. Din reprezentarea grafică a forței în funcție de timp, se calculează impulsul transferat cu ajutorul ariei cuprinse între curba forței și axa timpului, astfel că $\Delta p = \frac{F_0 \cdot t}{2} = 10$ N·s.

Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru fiecare corp. Pentru corpul cu masa $m$: $-\Delta p = mv'_1 - mv \Rightarrow v'_1 = v - \frac{\Delta p}{m} = 5$ m/s, deoarece acest corp transferă impulsul $\Delta p$ corpului aflat în repaus și prin urmare viteza acestui corp scade. Pentru corpul cu masa $M$: $-\Delta p = Mv'_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\Delta p}{M} = 2$ m/s.

**b.** Variația energiei cinetice a sistemului este: $\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} \Rightarrow$

$\Delta E_c = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{Mv_2'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -90$ J $\Rightarrow$ pierderea energiei cinetice este de 90 J.

**2.a.** Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$, iar scalar:

$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}$ =2 m/s

**b.** Căldura degajată în acest proces provine din scăderea energiei cinetice a sistemului, astfel că: $Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} \Rightarrow$

$Q = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 + v_2)^2 = 24$ J

**c.** Corpul nou format are o mişcare uniform încetinită cu acceleraţia $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$ şi cum $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_c}{t} \Rightarrow v = v_c - \mu g t$. Când corpul se opreşte $v$=0, astfel că obţinem $t_{op} = \frac{v_c}{\mu g}$=2 s

**3.a.** Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru corpul nou format $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$. Deoarece corpurile se mişcă în sens contrar astfel că $\vec{v}_1 = \vec{v}$ şi $\vec{v}_2 = -\vec{v}$ atunci $\vec{v}_c = 0$. Corpul nou format se opreşte imediat după ciocnirea plastică a celor două corpuri.

**b.** Energia cinetică relativă totală este $E_{Crel} = \frac{2mv_{rel}^2}{2} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = 4mv^2$.

Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $|v| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_{Crel}}{m}}$=2,5 m/s

**c.** Călura degajată în procesul ciocnirii este:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = mv^2 = \frac{E_{Crel}}{4}\text{=25 J}$$

**4.a.** Aplicăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din glonte şi blocul de lemn: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_o = (m + M)\vec{v}_c$, iar scalar: $mv_0 = (m + M)v_c \Rightarrow v_c = \frac{mv_0}{m + M}$=2 m/s

**b.** Căldura degajată în urma ciocnirii este $Q = \frac{mM}{2(m + M)}v_0^2 = 198$ J

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul nou format între punctul de formare şi cel de oprire. $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow$ $-\frac{m_t v_c^2}{2} = -\mu m_t g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g}$=2 m

**5.a.** Când proiectilul străbate blocul de lemn forţele care apar sunt de natură internă pentru sistem şi ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Deoarece în timpul interacţiunii cu proiectilului cu blocul neglijăm forţele de natură externă, conservăm impulsul sistemului. Astfel $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}_2$ şi scalar $m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1(v_1 - v'_1)}{m_2}$=0,8 m/s.

Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetrice pentru bloc între punctul de pornire şi cel de oprire $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2v_2^2}{2} = -\mu m_2 g d \Rightarrow \mu = \frac{v_c^2}{2gd}$=0,16

**b.** Energia cinetică pierdută de proiectil este: $\Delta E = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1}{2}(v_1'^2 - v_1^2) = -240$ J

c. $E_{C_{fin}} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = 0{,}32$ J

**6.a.** Deoarece mişcarea vagonului se efectuează cu frecare, acceleraţia acestuia este $a = \frac{F_f}{m} = \mu g$. Utilizăm legea vitezei: $v = v_0 - a\Delta t = v_0 - \mu g t = 6\text{m/s}$

**b.** Aplicăm legea de conservare a impulsului la cuplarea vagoanelor şi aflăm viteza corpului nou format. Obţinem: $m_1 v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = 2$ m/s,

iar căldura degajată prin ciocnire este:

$$Q = |-\Delta E_c| = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = 1{,}2\ 10^5 \text{ J.}$$

**c.** Aplicăm pentru corpul nou format teorema de variaţie a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow -\frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2)g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_c^2}{2\mu g} = 20 \text{ m.}$$

**7.a.** Pentru a afla timpul după care corpurile se ciocnesc, scriem ecuaţiile coordonatelor şi impunem condiţia de întâlnire: $x_1 = x_2$. Alegem originea axelor de coordonate în punctul de unde porneşte corpul $m_1$. Astfel:

$x_1 = v_{01}t + \frac{a_1 t^2}{2} = v_{01}t - \mu g \frac{t^2}{2}$, deoarece $a_1 = -\frac{F_{f_1}}{m_1} = -\mu g$ şi

$$x_2 = d - v_{02}t + \frac{a_2 t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2} \Rightarrow v_{01}t - \mu g \frac{t^2}{2} = d - v_{02}t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Din $x_1 = x_2 \Rightarrow \mu g t^2 - (v_{01} + v_{02})t + d = 0 \Rightarrow 2t^2 - 50t + 112{,}5 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $t_1 = 2{,}5$ s şi $t_2 = 22{,}5$ s. Soluţia acceptată fizic este $t_1 = 2{,}5$ s, deoarece corpul 1 se opreşte după $t_{op_1} = \frac{v_{01}}{\mu g} = 10$ s.

**b.** Aflăm vitezele corpurilor înainte de ciocnire, utilizând legile vitezei: $v_1 = v_{01} - \mu g t_1 = 15$ m/s şi $v_2 = -v_{02} + \mu g t_1 = -25$ m/s

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea conservării impulsului:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 7 \text{ m/s}$$

Pentru a afla distanţa parcursă până la oprire de corpul nou format se aplică teorema de variaţie a energiei cinetice:

$$\Delta E_c = L \Rightarrow 0 - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2)g s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v^2}{2\mu g} = 12{,}25 \text{ m}$$

**c.** Variaţia energiei cinetice produsă la ciocnirea plastică este:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 = -1280 \text{ J, unde}$$

semnul "–" arată că în procesul ciocnirii plastice energia cinetică a sistemului scade şi se transformă în căldură

**8.a.** Aplicăm teorema de variație a energiei cinetice pentru corpul $m_1$
$\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \dfrac{m_1 v^2}{2} - \dfrac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 g\ell \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g\ell}$ =5 m/s

**b.** Aplicăm legea de conservare a impulsului, astfel că $m_1 v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow$
$v = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ =4 m/s

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare şi sol: $E_c + E_p = E'_{c_{sol}} \Rightarrow \dfrac{m_t v^2}{2} + m_t g\ell = \dfrac{m_t v_{sol}^2}{2}$
$\Rightarrow v_{sol} = \sqrt{v^2 + 2g\ell}$. Impulsul noului corpul în momentul în care acesta atinge suprafața pământului este $p_{sol} = (m_1 + m_2)v_{sol} = (m_1 + m_2)\sqrt{v^2 + 2g\ell}$ =10 Ns

**9.a.** Conform legilor de coordonate, corpurile au o mişcare rectilinie şi uniformă. Cum $x = x_0 + v_0 t \Rightarrow v_1 = 1$ m/s şi $v_2 = -3$ m/s reprezintă vitezele corpurilor în momentul întâlnirii.
**b.** Aplicăm legea conservării impulsului şi aflăm viteza corpului format după ciocnirea plastică: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v \Rightarrow v = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -2$ m/s. Semnul „-" al vitezei comune arată că noul corp are viteza în sensul de mişcare al corpului 2.
Energia cinetică a sistemului imediat după ciocnire este $E_c = \dfrac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = 8\text{J}$.
**c.** Legea de mişcare a corpului nou format este: $x = x_i + v(t - t_i)$, unde $x_i$ reprezintă coordonata la momentul întâlnrii $t_i$. Aflăm valoarea timpului de întâlnire din condiția $x_1 = x_2 \Rightarrow 2 + t_i = 4 - 3t_i \Rightarrow t_i = 0{,}5$ s, iar $x_i = 2{,}5$ m. Obținem legea de mişcare a corpului nou format $x = 3{,}5 - 2t$.

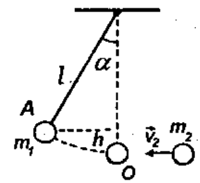
**10.a.** Primul corp are o mişcare rectilinie uniformă şi pe baza legii de mişcare $x_1 = x_{01} + v_1 t$ prin identificarea coeficienților obținem viteza primului corp $v_1$=2 m/s. Al doilea corp are o mişcare uniform accelerată şi din legea coordonatei $x_2 = x_{02} + v_{02}t + a_2 t^2/2$ obținem $v_{02}$=2 m/s şi $a$=10 m/s², astfel că viteza corpului 2 este $v_2 = v_{02} + at = 2 + 10t$. Aflăm mometul la care se ciocnesc corpurile din $x_1 = x_2 \Rightarrow t_i$ =2 s, astfel că $v_2$ =22 m/s
**b.** Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ =12 m/s

**c.** Căldura degajată în ciocnire este $Q = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_2 - v_1)^2 = \dfrac{m}{4}(v_2 - v_1)^2$ =50 J

**11.a.** Deoarece ciocnirea dintre proiectil şi pendulul balistic este plastică, aplicăm legea conservării impulsului pentru sistem, astfel că $mv_0 = (M+m)v$, unde $v_0$ este viteza proiectilului. Datorită vitezei $v$, corpul nou format cu masa $M$+$m$ se ridică la înălţimea $h$. Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul format din corpul cu masa $M+m$ şi Pământ. Astfel energia cinetică a sistemului se transformă în energie potenţială: $E_c = E_p \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} = (M+m)gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$ =2 m/s.

**b.** Din cele două legi de conservare obţinem viteza iniţială a proiectilului $v_0 = \frac{(M+m)}{m}\sqrt{2gh} = 402$ m/s

**c.** Căldura care se degajă în procesul ciocnirii este $Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{(m+M)v^2}{2}$=804 J




**12.a.** Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerând că $E_{po}$=0, atunci $E_{p_A} = E_{c_O}$. Obţinem:

$m_1 g\ell(1-\cos\alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 2$ m/s.

**b.** Utilizăm în cazul ciocnirii plastice conservarea impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\bar{p}_i = \bar{p}_f$. Scalar: $m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$, deoarece în momentul ciocnirii corpul al doilea se deplasează în sens opus, iar după ciocnire sistemul de corpuri se opreşte. Obţinem $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$=4 m/s.

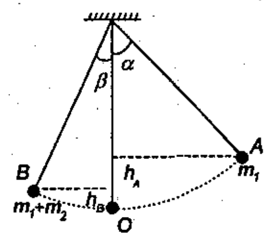
**c.** Căldura degajată în cursul ciocnirii plastice provine din scăderea energiei cinetice a sistemului de corpuri:

$Q = -\Delta E_c = E_{c_1} + E_{c_2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = 6$ J, deoarece $E_{cf} = 0$.

**13.a.** Aflăm viteza primului corp imediat înainte de ciocnire, aplicând legea de conservare a energiei mecanice. Considerăm că $E_{p_0} = 0 \Rightarrow E_{p_A} = E_{c_O}$.

Obţinem: $m_1 g\ell(1-\cos\alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = 4$ m/s.

**b.** Aflăm viteza $v$ a corpului nou format dacă după ciocnirea plastică acesta se ridică astfel că firul formează cu verticala unghiul $\beta$. Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice, astfel că $E_{c_O} = E_{p_B} \Rightarrow$

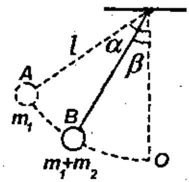


$$\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}=(m_1+m_2)g\ell(1-\cos\beta)\Rightarrow v=\sqrt{2g\ell(1-\cos\beta)}=2{,}07\text{ m/s}.$$

Aflăm viteza corpului al doilea, dacă ciocnirea corpurilor este plastică. Utilizăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}$. Considerăm primul caz în care după ciocnirea plastică firul deviază ca în figură. Obținem scalar $m_1v_1-m_2v_2=(m_1+m_2)v\Rightarrow$

$$v_2=\frac{m_1v_1-(m_1+m_2)v}{m_2}\approx 36{,}53\text{ m/s}$$

Considerăm cazul în care după ciocnirea plastică firul deviază de aceeaşi parte a verticalei ca în figură.




$$m_1v_1-m_2v_2=-(m_1+m_2)v\Rightarrow v_2=\frac{m_1v_1+(m_1+m_2)v}{m_2}\approx 123{,}47\text{ m/s}.$$

**c.** Calculăm căldura degajată în cele două cazuri:

$$Q=-\Delta E_c=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2$$

$=\dfrac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1+v_2)^2$, deoarece corpurile 1 şi 2 se deplasează în sens opus.

Obținem: $Q_1\approx 78{,}22$ J şi $Q_2\approx 773{,}74$ J.

**14.a.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul $m_1$ între punctul de plecare şi punctul inferior al traiectoriei astfel că: $E_c+E_p=E'_c\Rightarrow$

$$\frac{m_1v_0^2}{2}+m_1g\ell=\frac{m_1v_1^2}{2}\Rightarrow v_1=\sqrt{v_0^2+2g\ell}=6\text{ m/s}$$

**b.** Utilizăm legea de conservare a impulsului $\vec{p}_i=\vec{p}_f\Rightarrow m_1\vec{v}_1=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ şi scalar $m_1v_1=(m_1+m_2)v_c\Rightarrow v_c=\dfrac{m_1v_1}{m_1+m_2}=4$ m/s. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul nou format între punctul de formare şi cel de oprire. Astfel $E'_c=E'_p\Rightarrow\dfrac{m_tv_c^2}{2}=m_tg\ell(1-\cos\alpha)\Rightarrow\cos\alpha=1-\dfrac{v_c^2}{2g\ell}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^0$

**c.** $\dfrac{E_{mi}}{E_{mf}}=\dfrac{m_1(v_0^2+2g\ell)}{(m_1+m_2)v_c^2}=1{,}5$, deoarece prin ciocnire sistemul pierde energie care se degajă sub formă de căldură

**15.a.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele $A$ şi $C$.

$$E_{mA}=E_{mC}\Rightarrow m_1gh=\frac{m_1v_0^2}{2}\Rightarrow v_0=\sqrt{2gh}=4\text{ m/s}$$

**b.** Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i=\vec{p}_f\Rightarrow m_1\vec{v}_1=(m_1+m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1v_1=(m_1+m_2)v_c\Rightarrow$

$$v_c=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}=1{,}6\text{ m/s}$$

**c.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice între punctele $C$ şi $D$ pentru sistemul nou format cu masa $m_1+m_2$. Astfel $E_{cC}=E_{pD}\Rightarrow$

$$\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2}=(m_1+m_2)g\ell(1-\cos\alpha)\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{v_c^2}{2g\ell}=0{,}744$$

**16.a.** . Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $C$, astfel că $\Delta E_{cAC}=L_G+L_{F_f}+L_N$. Deoarece $\Delta E_{cAC}=E_{cC}-E_{cA}=\frac{m_1v_1^2}{2}$, iar $L_N=0$, $L_G=m_1gh$ şi $L_{Ff}=L_{Ff_{AB}}+L_{Ff_{BC}}=-\mu_1m_1ghctg\alpha-\mu_2m_1gBC$, astfel că:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}=m_1gh-\mu_1m_1ghctg\alpha-\mu_2m_1gBC\Rightarrow v_1=\sqrt{2g(h-\mu_1hctg\alpha-\mu_2BC)}=4\text{ m/s}$$

**b.** Căldura degajată la ciocnirea celor două corpuri este

$$Q=-\Delta E_c=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2=\frac{m_1m_2v_1^2}{2(m_1+m_2)}=9{,}6\text{ J}$$

**c.** Din legea conservării impulsului în procesul ciocnirii aflăm viteza comună a corpurilor: $\vec{p}_i=\vec{p}_f\Rightarrow m_1\vec{v}_1=(m_1+m_2)\vec{v}_c$, iar scalar: $m_1v_1=(m_1+m_2)v_c\Rightarrow$

$$v_c=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}=1{,}6\text{ m/s.}$$

Aplicăm legea conservării energiei între punctul $C$ şi punctul de pe jgheab în care corpul se opreşte. Astfel $E_{m_C}=E_{m_D}\Rightarrow\frac{(m_1+m_2)v_c^2}{2}=(m_1+m_2)gh\Rightarrow h=\frac{v_c^2}{2g}\Rightarrow$

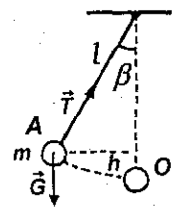
$h$=12,8 cm

**17.a.** Aflăm viteza corpului lansat pe suprafaţa orizontală imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice:

$$\Delta E_c=L_{F_f}\Rightarrow\frac{Mv^2}{2}-\frac{Mv_0^2}{2}=-\mu Mgd\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2-2\mu gd}\,.$$

Aflăm viteza corpului nou format aplicând legea de conservare a impulsului:

$$Mv=(M+m)v_c\Rightarrow v_c=\frac{Mv}{M+m}=5\text{ m/s.}$$




**b.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru sistemul nou format, astfel că energia cinetică se transformă în energie potenţială. Din $E_c=E_p\Rightarrow$

$$\frac{(M+m)v_c^2}{2}=(M+m)g\ell(1-\cos\alpha)\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{v_c^2}{2g\ell}=0{,}5\Rightarrow\alpha=60°\,.$$

**c.** Impunem condiţia ca pe direcţia firului rezultanta forţelor să joace rol de forţă centripetă: $T - m_t g\cos\beta = \frac{m_t v_A^2}{\ell} \Rightarrow T = m_t\left(\frac{v_A^2}{\ell} + g\cos\beta\right)$.

Aplicăm pentru corpul cu masa $m_t = M + m$, legea conservării energiei mecanice: $E_{c_0} = E_{p_t} + E_{c_t} \Rightarrow \frac{m_t v_c^2}{2} = m_t g\ell(1-\cos\beta) + \frac{m_t v_A^2}{2}$

$\Rightarrow v_A^2 = v_c^2 - 2g\ell(1-\cos\beta) \Rightarrow T = (M+m)\left(\frac{v_c^2}{\ell} + 3g\cos\beta - 2g\right)$=4,785 N.

**18.a.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corp între punctul de plecare şi punctul *A*. $E_p = E_c \Rightarrow mgR(1-\cos\alpha) = \frac{mv_A^2}{2} \Rightarrow$

$v_A = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha)} \approx 2{,}86$ m/s, deoarece $\alpha$=45$^0$

**b.** Utilizăm legea de conservare a impulsului pentru sistemul format din cele două corpuri: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_A = 2m\vec{v}_c$, astfel că $v_c = v_A/2$. Aplicăm pentru corpul nou format legea conserevării energiei mecanice între punctul *A* şi punctual de oprire: $E_{cA} = E_p \Rightarrow \frac{m_t v_c^2}{2} = m_t gh \Rightarrow h = \frac{v_A^2}{8g} = \frac{R(1-\cos\alpha)}{4} \approx 10{,}25$ cm

**c.** Căldura degajată în urma ciocnirii corpurilor este $Q = \frac{mv_A^2}{4} = \frac{mgR(1-\cos\alpha)}{2} \approx 41$ mJ

**19.a.** Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul care coboară din *A* în *B*, astfel că $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow mgR = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR} \approx 4{,}47$ m/s

**b.** Pe baza conservării impulsului obţinem $mv_0 = 2mv \Rightarrow v = v_0/2 \approx 2{,}235$ m/s

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei pentru corpul nou format între punctul *B* şi punctul *E*: $E_{cB} = E_{pE} \Rightarrow \frac{m_t v^2}{2} = m_t gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0}{8g} = \frac{R}{4}$=25 cm

**20.a.** Aflăm viteza bilei lansată vertical de jos în sus imediat înainte de ciocnire. Aplicăm teorema de variaţie a impulsului: $\Delta p = F\cdot\Delta t \Rightarrow$ $m_1v_1 - m_1v_0 = -m_1 gt \Rightarrow v_1 = v_0 - gt = 40$ m/s. Aflăm viteza comună a corpului nou format în urma ciocnirii plastice utilizând legea de conservare a impulsului: $m_1v_1 = (m_1+m_2)v \Rightarrow v = \frac{m_1v_1}{m_1+m_2} = 10$ m/s.

**b.** Căldura degajată la ciocnirea plastică este:

$Q = -\Delta E_c = E_{c_i} - E_{c_f} = \frac{m_1v_1^2}{2} - \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}v_1^2 = 600$ J

**c.** Aplicăm pentru corpul nou format prin ciocnirea plastică legea conservării energiei mecanice, considerând pe sol $E_p$=0 şi obţinem: $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{p_f} \Rightarrow$

$\frac{m_1v^2}{2}+m_1gh=m_1gh_1 \Rightarrow h_1=h+\frac{v^2}{2g}$. Din legea coordonatei aflăm la ce înălțime urcă bila inainte de ciocnire: $h=v_0t-\frac{gt^2}{2}$=100 m. Obținem $h_1$=105 m.

**21.a.** Impunem condiția de întâlnire corpurilor: $x_1=x_2$ alegând originea axelor de coordonate pe sol. Cum $x_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ şi $x_2=h_{\max 1}-\frac{gt^2}{2}$, unde $h_{max1}$ reprezintă înălțimea maximă la care poate ajunge primul corp. Din legea conservării energiei mecanice aflăm $h_{max1}$, astfel că $E_c=E_p \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2}=m_1gh_{\max 1} \Rightarrow h_{\max 1}=\frac{v_0^2}{2g}$. Obținem $v_0t-\frac{gt^2}{2}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_i=\frac{v_0}{2g}$=2s

**b.** Aflăm vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire. Astfel $v_1=v_0-gt_i=\frac{v_0}{2}$ şi $v_2=-gt_i=-\frac{v_0}{2}$. Din legea conservării impulsului: $\vec{p}_i=\vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ şi scalar $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_c \Rightarrow$ $v_c=\frac{(m_1-m_2)v_0}{2(m_1+m_2)}$=5 m/s

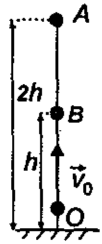
**c.** Căldura degajată în procesul ciocnirii este $Q=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)^2=\frac{m_1m_2v_0^2}{2(m_1+m_2)}$=20 J

**22.a.** Alegând axa $Ox$ cu originea pe sol şi considerând origine de timp momentul pornirii primului corp atunci $x_1=v_0t-\frac{gt^2}{2}$ şi $x_2=v_0(t-\Delta t)-\frac{g(t-\Delta t)^2}{2}$. Obținem condiția de întâlnire $x_1=x_2 \Rightarrow t_i=\frac{\Delta t}{2}+\frac{v_0}{2}$=3 s

**b.** Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $v_1=v_0-gt_i=-10$ m/s şi $v_2=v_0-g(t_i-\Delta t)$=10 m/s. Pe baza legii conservării impulsului $\vec{p}_i=\vec{p}_f \Rightarrow$ $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=(m_1+m_2)\vec{v}_c$ şi scalar $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_c \Rightarrow$ viteza corpului nou format dacă corpurile se ciocnesc plastic este $v_c$=0 m/s, deoarece $m_1=m_2=m$

**c.** Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este $Q=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(\vec{v}_2-\vec{v}_1)^2=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(v_2-v_1)^2=\frac{m}{4}(v_2-v_1)^2$=10 J

**23.a.** Din legea conservării energiei aflăm înălțimea la care se ridică corpul lansat de la sol $E_{cO} = E_{pB} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$.




Din legea conservării energiei mecanice pentru corpul lăsat liber aflăm viteza acestuia înainte de ciocnire:
$E_{pA} = E_{pB} + E_{cB} \Rightarrow mg2h = mgh + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2^2 = gh = v_0^2 \Rightarrow v_2 = v_0$ =4 m/s

**b.** Din legea conservării impulsului obținem $\bar{p}_i = \bar{p}_f \Rightarrow m\vec{v}_2 = 2m\vec{v}_c$, iar scalar $v_c=v_0/2$=2 m/s

**c.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul format prin ciocnire între punctul de formare și sol: $E_{pB} + E_{cB} = E_{csol} \Rightarrow$

$E_{csol} = \frac{m_t v_c^2}{2} + m_t gh = \frac{5mv_0^4}{4}$ =40 J

**24.a.** Impunem condiția de întâlnire: $x_1=x_2$, astfel că deoarece $x_1 = h - \frac{gt^2}{2}$ și $x_2 = v_{02}t - \frac{gt^2}{2}$ obținem $t_{\breve{a}} = \frac{h}{v_{02}}$. Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sunt $v_1 = -gt_i = -\frac{gh}{v_{02}}$ și $v_2 = v_{02} - gt_i = v_{02} - g\frac{h}{v_{02}}$. Pe baza legii conservării impulsului $\bar{p}_i = \bar{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ iar scalar $m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \Rightarrow$

$-m_1\frac{gh}{v_{02}} + m_2\left(v_{02} - \frac{gh}{v_{02}}\right) = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)gh}{m_2}} \approx 46{,}24$ m/s

**b.** $\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2} = \frac{m_1g^2h^2}{m_2\left(v_{02}^2 - gh\right)^2} = \frac{m_2}{m_1}$=0,6

**c.** Înălțimea la care s-a produs ciocnirea este $h_i = h - \frac{gt_i^2}{2} = \frac{m_1m_2h}{m_1+m_2}$ =65 m

**25.a.** Aplicăm legea conservării energiei mecanice, astfel că energia cinetică în momentul lansării se transformă în energie potențială la înălțimea maximă: $E_c = E_p \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} = m_1gh_{max}$, astfel că înălțimea maximă la care ajunge primul corp este $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$. Aflăm viteza primului corp la înălțimea $h = \frac{3}{4}h_{max} = \frac{v_0^2}{8g}$, imediat înainte de ciocnire. Aplicăm legea conservării energiei mecanice: $E_{c_i} = E_{c_f} + E_{p_f} \Rightarrow \frac{m_1v_0^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + m_1gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \frac{v_0}{2} = 15$ m/s.

**b.** Aflăm timpul de mişcare al primului corp până momentul ciocnirii, aplicând teorema de variaţie a impulsului: $\Delta p = F \cdot \Delta t \Rightarrow m_1 v_1 - m_1 v_0 = -m_1 g \Delta t \Rightarrow$

$-\dfrac{m_1 v_0}{2} = -m_1 g \Delta t \Rightarrow \Delta t = \dfrac{v_0}{2g} = 1{,}5$ s.

**c.** Aflăm viteza corpului al doilea imediat înainte de ciocnirea plastică, dacă se cunoaşte că după ciocnire corpul nou format se opreşte. Aplicăm legea de conservare a impulsului: $p_i = p_f = 0 \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \dfrac{m_1 v_1}{m_2} = 45$ m/s

**26.a.** Când omul urcă pe scară, forţele care apar sunt de natură internă pentru sistem, astfel că ele nu modifică impulsul total al sistemului. Prin urmare impulsul sistemului aerostat-om se conservă, astfel că: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$. Cum $\vec{p}_i = 0$, deoarece sistemul se află în repaus atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0$, deoarece cu $\vec{v}_1$ am notat viteza omului faţă de sol şi cu $\vec{v}_2$ viteza aerostatului faţă de sol. Cum $\vec{u}$ este viteza relativă a omului în raport cu aerostatul, atunci $\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + M(\vec{v}_1 - \vec{u}) = 0 \Rightarrow \; mv_1 + Mv_1 - Mu = 0$. Obţinem viteza omului faţă de sol $v_1 = \dfrac{Mu}{M+m}$ =0,36 m/s

**b.** Viteza aerostatului faţă de sol este $v_2 = -\dfrac{Mu}{M+m} = -0{,}04$ m/s. Semnul minus apare deoarece aerostatul se deplasează în sens contrar sensului de deplasare al omului.

**c.** Energia cinetică dezvoltată de om pentru a se pune în mişcare este:

$E_c = \dfrac{mv_1^2}{2} + \dfrac{Mv_2^2}{2} = \dfrac{Mmu^2}{2(M+m)}$ =5,76 J.

**27.a.** Când patinatorul aruncă rucsacul acţionează asupra acestuia cu o forţă, iar rucsacul reacţionează asupra patinatorului cu o forţă egală şi de sens contrar conform principiului acţiunii şi reacţiunii. Cum cele două forţe sunt de natură internă pentru sistem ele nu modifică impulsul total al acestuia. Astfel conservăm impulsul pentru sistem: $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$. Cum $\vec{p}_i = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_f = 0 \Rightarrow M\vec{v}_1 + m\vec{v} = 0$, iar scalar $Mv_1 + mv = 0 \Rightarrow v_1 = -\dfrac{mv}{M} = -0{,}5$ m/s este viteza patinatorului după ce acesta aruncă bila. Semnul minus al vitezei arată că patinatorul se deplasează în sens opus sensului în care se mişcă rucsacul.

**b.** Lucrul mecanic efectuat de patinator pune în mişcare atât rucsacul cât şi pe el este: $L = E_{c_1} + E_{c_2} = \dfrac{Mv_1^2}{2} + \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m(M+m)v^2}{2M} = 210$ J.

**c.** Din momentul punerii în mişcare, patinatorul are o mişcare uniform frânată cu acceleraţia $a = \dfrac{F_f}{m} = \mu g$, astfel că utilizând teorema de variaţie a energiei cinetice obținem distanța parcursă de patinator până la oprire. Astfel: $\Delta E_c = L_{F_f} \Rightarrow 0 - \frac{mv_1^2}{2} = -\mu mg s_{op} \Rightarrow s_{op} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 12{,}5$ m.

**28.a.** Din condiția de echilibru impusă corpului suspendat de resortul vertical obținem $mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$ =500 N/m

**b.** Energia potențială a resortului comprimat este $W = \frac{k(\ell - \ell_1)^2}{2}$ =1,6 J

**c.** Forțele elastice care acționează asupra corpurilor sunt forțe de natură internă pentru sistem și ele nu pot modifica impulsul total al sistemului. Cum $\vec{p}_i = 0$ atunci $\vec{p}_f = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$. Scalar $m_1v_1 = m_2v_2$ (1). Energia eliberată la destinderea resortului este preluată de cele două corpuri, astfel că $W = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$ (2). Din (1) și (2) obținem: $v_1 = \sqrt{\frac{2m_2W}{m_1(m_1+m_2)}} \approx 1{,}46$ m/s și

$v_2 = \sqrt{\frac{2m_1W}{m_2(m_1+m_2)}} \approx 0{,}73$ m/s

**29.a.** Filmată în sens invers explozia unui obuz, poate fi considerată o ciocnire plastică și prin urmare se poate aplica și exploziilor legea de conservare a impulsului: $\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Scalar: $Mv = m_1v_1 + m_2v_2$

$v_2 = \frac{Mv - m_1v_1}{m_2} = \frac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 375$ m/s. Deoarece viteza $v_2$ este pozitivă, fragmentul al doilea se deplasează în același sens cu obuzul.

**b.** Energia degajată în urma exploziei provine din scăderea energiei cinetice:

$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1M}{2(M-m_1)}(v - v_1)^2 = 125$ kJ.

**c.** Fracțiunea din energia inițială pierdută prin explozie este $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} \approx 1{,}56\%$. deoarece $E_{Ci} = \frac{Mv^2}{2}$ =8 MJ

**30.a.** Din legea coordonatei: $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$, pe baza identificării coeficienților, obținem: $x_0 = 10$ m, $v_0 = 20$ m/s și $a = -5$ m/s². Deoarece corpul are o mișcare uniform încetinită, $a = -\frac{F_f}{m} = -\mu g \Rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = 0{,}5$.

**b.** Aflăm viteza corpului imediat înainte de explozie utilizând legea vitezei: $v = v_0 + at_1 = 15$ m/s, deoarece $t_1 = 1$ s. Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul exploziei: $mv = m_2v_2 - m_1v_1$, unde $v_1$ și $v_2$ reprezintă vitezele celor două fragmente imediat după explozie.

Cum vectorial $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, scalar $v_r = v_1 + v_2$. Cum $m_1 = \frac{m}{4}$ şi $m_2 = \frac{3m}{4}$ atunci

$mv = \frac{3m}{4}v_2 - \frac{m}{4}(v_r - v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{4v + v_r}{4} = 21$ m/s şi $v_1 = \frac{3v_r - 4v}{4} = 3$ m/s.

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru fiecare fragment, pentru a afla distanţa parcursă de fiecare fragment până la oprire. Pentru primul fragment: $\Delta E_{c_1} = L_{F_{f_1}} \Rightarrow -\frac{m_1 v_1^2}{2} = -\mu m_1 g s_{op_1} \Rightarrow s_{op_1} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = 3{,}6$ m.

Analog pentru fragmentul al doilea obţinem: $s_{op_2} = \frac{v_2^2}{2\mu g} = 32{,}4$ m. Distanţa dintre cele două fragmente după ce acesta se opresc este: $d = s_{op_1} + s_{op_2} = 36$ m

**31.a.** Energia cinetică iniţială a sistemului de vagoane este

$E_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2}$ =887,5 kJ

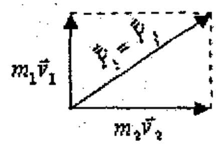
**b.** Primele se ciocnesc vagoanele 1 cu 2 şi pe baza conservării impulsului obţinem $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_{12} \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ =3 m/s

**c.** Consevăm impulsul pentru întreg sistemul:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = (m_1 + m_2 + m_3)v \Rightarrow v_{12} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1 + m_2 + m_3}$ =4 m/s

**32.a.** Energia cinetică a sistemului imediat înainte de ciocnire este

$E_{Ci} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ =8,75 J

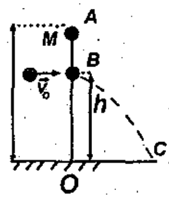



**b.** Aplicăm legea de conservare a impulsului:

$\vec{p}_i = \vec{p}_f \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1'$ şi scalar

$v_1' = \frac{1}{m_1}\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} \approx 18{,}03$ m/s.

**b.** $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2(m_2 - m_1)v_2^2}{2m_1} = 7{,}5$ J.




**33.a.** Aflăm viteza cu care ajunge sfera la înălţimea $h$, utilizând legea de conservare a energiei mecanice: $E_{p_A} = E_{p_B} + E_{c_B}$, deoarece pe sol $E_{p_o} = 0$. Astfel

$MgH = Mgh + \frac{Mv_B^2}{2} \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(H-h)} \approx 8{,}94$ m/s.

**b.** Aplicăm legea de conservare a impulsului în procesul ciocnirii plastice: $M\vec{v}_B + m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}$. Scalar:

$$M^2v_B^2 + m^2v_0^2 = (M+m)^2v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{M^2v_B^2 + m^2v_0^2}}{M+m} = \frac{\sqrt{2M^2g(H-h) + m^2v_0^2}}{M+m} \approx 8{,}11\text{m/s}$$

**c.** Aplicăm pentru corpul nou format legea de conservare a energiei mecanice: $E_{c_B} + E_{p_B} = E_{c_C} \Rightarrow \frac{(M+m)v^2}{2} + (M+m)gh = \frac{(M+m)v_c^2}{2} \Rightarrow$

$v_c = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 13{,}63$ m/s.

**34.a.** Din legea coordonatei $x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ prin identificare găsim $v_0$=10 m/s şi $a$=–2 m/s², astfel legea vitezei este $v = v_0 + at = 10 - 2t$. La momentul $t_1$ viteza este $v_1$=4 m/s iar impulsul corpului $p_1 = m_1v_1$=10 Ns

**b.** În ciocnirea perfect elastică se aplică legea de conservare a impulsului şi legea de conservare a energiei cinetice:

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ (1) şi $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}$ (2).

Din (1) şi (2) obţinem $v_1' = \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$ şi $v_2' = \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_2$.

Ţinând cont că $v_1 = v$ şi $v_2 = 0$ aflăm pe baza formulelor anterioare vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică.

$v_1' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2}$=1 m/s şi $v_2' = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2}$=5 m/s. Deoarece $m_1 > m_2$, după ciocnire corpurile se mişcă în sensul în care s-a mişcat primul corp înainte de ciocnire

**c.** Energia cinetică a celui de-al doilea corp imediat după ciocnire este $E'_{c2} = \frac{m_2v_2'^2}{2} = \frac{2m_1^2m_2v^2}{(m_1 + m_2)^2}$=18,75 J

**35.a.** Din legile de conservare aplicate în cazul ciocnirii perfect elastice: legea de conservare a impulsului $m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$ şi legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}$ obţinem vitezele particulelor imediat după ciocnire $v_1' = \frac{2(m_1v_1 - m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 = -\frac{3v_2 + v_1}{2} = -16$ m/s şi

$v_2' = \frac{2(m_1v_1 - m_2v_2)}{m_1 + m_2} + v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$=8 m/s.

**b.** Dacă prima particulă se opreşte imediat după ciocnire atunci $v_1' = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{3} \approx -6{,}66$ m/s.

**c.** Din legea de conservare a impulsului $m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \Rightarrow$ $v'_2 = \frac{v_1 - 3v_2 - v'_1}{3}$ =1 m/s. Energia cinetică a sistemului înainte de ciocnire $E_{ci} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v_1^2 + 3v_2^2\right)$ iar energia cinetică a sistemului după ciocnire $E_{cf} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v_1'^2 + 3v_2'^2\right)$. Astfel $f = \frac{\Delta E_c}{E_{ci}} = \frac{E_{cf} - E_{ci}}{E_{ci}} = \frac{E_{cf}}{E_{ci}} - 1 \Rightarrow$ $f = -93{,}75\%$

**d.** Fracțiunea din energia cinetică inițială a primei particule care este transferată particulei a doua este $f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2v_2'^2}{m_1v_1^2}$. Cum $v'_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}$ deoarece $v_2$=0 obținem $f = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ =75%

**36.a.** Pe baza legii de conservare a impulsului $mv_0 = mv_1' + mv_2'$ și din legea de conservare a energiei cinetice: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2}$ obținem vitezele particulelor imediat după ciocnire $v_1' = 0$ și $v_2' = v_0$ =5 m/s. Deoarece corpurile au masele egale după ciocnirea perfect elastică ele schimbă vitezele între ele.

**b.** Datorită forței de frecare care acționează asupra corpului al doilea energia cinetică a acestui corp se degajă sub formă de căldură, astfel că $Q = \frac{mv_2'^2}{2}$ =6,25 J

**c.** Imediat după ciocnire primul corp se oprește. Din teorema de variație a energiei cinetice aflăm distanța parcursă se al doilea corp după ciocnire. Astfel $\Delta E_c = L_G + L_{F_f} + L_N \Rightarrow -\frac{mv_2'^2}{2} = -\mu mgs_2 \Rightarrow s_s = \frac{v_2'^2}{2\mu g}$ =12,5 m

**37.a.** Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică: $v'_1 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v = 3$ m/s și $v'_2 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2} = 8$ m/s pentru că $v_2$=0

Deoarece ambele viteze sunt pozitive înseamnă că după ciocnire corpurile se deplasează în același sens.

**b.** Energia cinetică a sistemului de corpuri imediat după ciocnire este $E'_c = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}$ =5 J

**c.** Aflăm distanțele pe care le parcurg cele două corpuri după ciocnire până la oprire, aplicând teorema de variație a energiei cinetice pentru fiecare corp.

Pentru corpul cu masa $m_1$: $\Delta E_{c_1} = L_{F_{f1}} \Rightarrow -\frac{m_1v_1'^2}{2} = -\mu m_1gs_1 \Rightarrow s_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g}$.

Pentru corpul cu masa $m_2$: $\Delta E_{c_2} = L_{F_{f_2}} \Rightarrow -\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -\mu m_2 g s_2 \Rightarrow s_2 = \frac{v'^2_2}{2\mu g}$.

Distanţa dintre corpuri când s-au oprit este: $d = s_2 - s_1 = \frac{v'^2_2 - v'^2_1}{2\mu g} = 27{,}5$ m.

**38.a.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa $m_1$ între punctele $A$ şi $B$: $E_{pA} = E_{cA} \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell}$ =4 m/s

**b.** Aflăm vitezele corpurilor imediat după ciocnirea perfect elastică: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = 2{,}4$ m/s şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = 6{,}4$ m/s pentru că $v_2$=0

Utilizăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul al doilea între punctul $B$ şi punctul unde se opreşte $D$. Astfel: $\Delta E_{cBD} = L_N + L_G + L_{Ff}$. Deoarece $L_N$=0 şi $L_G = -m_2 gh$ şi $L_{Ff} = -\mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 ghctg\alpha$ obţinem:

$$-\frac{m_2 v'^2_2}{2} = -m_2 gh - \mu_1 m_2 gBC - \mu_2 m_2 ghctg\alpha \Rightarrow h = \frac{v'^2_2 - 2\mu_1 gBC}{2g(1+\mu_2 ctg\alpha)} = 1 \text{ m}$$

**c.** Utilizăm legea de conservare a energiei cinetice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v'^2_1}{2} = m_1 g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow$

$\cos\alpha = 1 - \frac{v'^2_1}{2g\ell}$ =0,64

**39.a.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice între punctele $A$ şi $B$ pentru corpul $m_1$: $\Delta E_c = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2}{2} = -\mu m_1 gd \Rightarrow$

$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu gd}$ =1 m/s

**b.** Imediat după ciocnirea elastică, deoarece iniţial bila se afla în repaus, aceasta va avea viteza: $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$ =0,5 m/s

**c.** Aplicăm legea de conservare a energiei între punctul de lovire şi punctul în care bila se opreşte. Astfel $E_{cB} = E_{pC} \Rightarrow \frac{m_2 v'^2_2}{2} = m_2 gh \Rightarrow h = \frac{v'^2_2}{2g}$ =1,25 cm

**40.a.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa $m_1$ între punctele $A$ şi $B$: $E_{pA} = E_{cB} \Rightarrow m_1 gR = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} \approx 6{,}32$ m/s. După ciocnirea perfect elastică a corpurilor obţinem: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \approx -2{,}1$ m/s şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \approx 4{,}2$ m/s pentru că $v_2$=0

**b.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru primul corp imediat după ciocnire, astfel că $E'_{c II} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 gh \Rightarrow$

$$h = \frac{v_1'^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R \approx 22{,}22 \text{ cm}$$

**c.** Aplicăm teorema de variaţie a energiei cinetice pentru corpul al doilea imediat după ciocnire $\Delta E_{c BC} = L_N + L_G + L_{Ff} \Rightarrow -\frac{m_2 v_2'^2}{2} = -\mu m_2 gBC \Rightarrow BC = \frac{v_2'^2}{2\mu g} \Rightarrow$

$$BC = \frac{4m_1^2 R}{\mu(m_1 + m_2)^2} \approx 4{,}44 \text{ m}$$

**41.a.** Utilizăm legea de conservare a energiei mecanice pentru corpul cu masa $m_1$ între punctul de plecare şi punctul înainte de ciocnire:

$$E_p = E \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell} \approx 4{,}47 \text{ m/s}$$

**b.** Vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică sunt $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \approx -1{,}5$ m/s şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \approx 3$ m/s deoarece $v_2=0$.
Utilizăm legile de conservare a energiei mecanice pentre cele două corpuri imediat după ciocnire. Pentru primul corp: $\frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 gh_1 \Rightarrow$

$h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \ell \approx 11{,}11$ cm şi pentru corpul al doilea $\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 gh_2 \Rightarrow$

$$h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{4m_1^2 \ell}{(m_1 + m_2)^2} \approx 44{,}44 \text{ cm}$$

**c.** Deoarece după ciocnire bilele se ridică la aceeaşi înălţime, atunci $h_1=h_2 \Rightarrow$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

**42.a.** Aflăm viteza bilei $m_1$ imediat înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice: $E_c = E_p \Rightarrow m_1 g\ell = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2g\ell}$. Aflăm vitezele imediat după ciocnire:

$$v_1' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{2g\ell}}{m_1 + m_2} = -2 \text{ m/s şi}$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1\sqrt{2g\ell}}{m_1 + m_2} \doteq 2 \text{ m/s.}$$

Deoarece ecele două viteze au semne opuse, bila 1 se întoarce iar bila 2 se va deplasa în sensul în care a fost ciocnită.

**b.** Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul format din bila $m_1$ şi Pământ. Astfel: $E'_{cB} = E'_p \Rightarrow \frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g\ell(1-\cos\alpha) \Rightarrow$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{v_1'^2}{2g\ell} = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 0{,}75$$

**c.** Aplicăm pentru corpul cu masă $m_2$ teorema de variaţie a energiei cinetice:

$$\Delta E_{c_2} = L = L_{F_f} + L_{F_{el}} \Rightarrow -\frac{m_2 v_2'^2}{2} = -\mu m_2 g\ell' - \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow k = \frac{m_2\left(v_2'^2 - 2\mu g\ell'\right)}{\Delta\ell^2} = 10{,}2\ \text{kN/m}$$

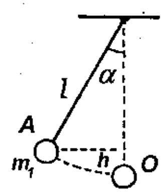
**43.a.** Aflăm vitezele corpurilor după ciocnirea perfect elastică:

$v_A = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} - v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = -\frac{v_0}{3}$ şi $v_B = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{2v_0}{3}$, astfel că raportul vitezelor corpurilor imediat după ciocnire este $\frac{v_B}{v_A} = -2$

**b.** Raportul energiilor cinetice ale celor două corpuri, imediat după ciocnire este $\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}} = \frac{mv_A^2}{2mv_B^2} = \frac{1}{8}$.

**c.** Aplicăm pentru sistemul corp $B$ şi resort legea conservării energiei mecanice: $E_{c_B} = E_{p_{el}} \Rightarrow \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{k\Delta\ell^2}{2} \Rightarrow \Delta\ell = \sqrt{\frac{8mv_0^2}{9k}}$. Cum $E_{c_0} = \frac{mv_0^2}{2}$ obţinem

$$\Delta\ell = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{E_{c_0}}{k}} = 4\ \text{cm}.$$




**44.a.** Aflăm viteza bilei cu masa $m_1$ înainte de ciocnire aplicând legea de conservare a energiei mecanice: $E_{pA} = E_{cO} \Rightarrow m_1 gh = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$. Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnire: $v'_1 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} - v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{v}{2}$ şi $v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3}{2} v$. Aplicăm legea de conservare a energiei mecanice pentru fiecare bilă: $E_c = E_p$. Pentru bila cu masa $m_1$: $\frac{m_1 v_1'^2}{2} = m_1 g h_1 \Rightarrow$

$h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{v^2}{8g} = \frac{h}{4} = 5$ cm şi pentru bila cu masa $m_2$: $\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 g h_2 \Rightarrow$

$h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{9v^2}{8g} = \frac{9h}{4} = 45$ cm. Astfel raportul înălţimilor este $\frac{h_2}{h_1} = 9$

**b.** Deoarece bila $m_1$ ciocneşte perfect plastic o a doua bilă $m_2$, aflăm viteza corpului nou format după ciocnire utilizând legea de conservare a impulsului: $m_1 v = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2} = \frac{3v}{4}$. Utilizând legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format, astfel că $E_c = E_p \Rightarrow$

$$\frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} = (m_1 + m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{9v^2}{32g} = \frac{9h}{16} = 11{,}25 \text{ cm}.$$

**c.** Căldura degajată în procesul ciocnirii plastice este

$$Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{3m_2 gh}{4} = 1{,}5 \text{ J}$$

**45.a.** Viteza particulei a doua după ciocnirea perfect elastică este $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$, unde $v$ este viteza inainte de ciocnire a primei bile. Fracţiune din energia cinetică iniţială a primei particulei transferată particulei a doua este: $f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v_2'^2}{m_1 v^2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 75\%$

**b.** Dacă ciocnirea este plastică viteza comună a particulelor este $v_c = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}$

Fracţiune din energia cinetică iniţială a primei particulei transferată particulei a doua este: $f = \frac{E'_{c2}}{E_{c1}} = \frac{m_2 v_c'^2}{m_1 v^2} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 18{,}75\%$

**c.** Căldura degajată în ciocnirea plastică este $Q = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)}$. Astfel fracţiunea din energia cinetică iniţială a primei particulei care se transformă în căldură în cazul ciocnirii plastice este $f = \frac{Q}{E_{c1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 75\%$

**46.a.** Ciocnirea moleculei cu pistonul este o ciocnire perfect elastică cu un corp cu masa foarte mare (cu un perete). Aflăm viteza moleculei după ciocnirea perfect elastică, ţinând cont că $m_1 = m$ şi $m_2 \to \infty$. Obţinem viteza moleculei îmediat după ciocnire: $v_1' = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1 \Rightarrow v_1' = \frac{2\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_1$

$v_1' = 2v_2 - v_1 = -498$ m/s. Deoarece molecula are după ciocnirea cu pistonul viteza cu minus înseamnă că se întoarce după ciocnire.

**b.** Variaţia impulsului moleculei este:

$\Delta p = mv_1' - mv_1 = m(v_1' - v_1) = 2m(v_2 - v_1) = -5 \cdot 10^{-23}$ Ns

**c.** Variaţia energiei cinetice a moleculei este:

$$\Delta E_c = \frac{mv_1'^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_1'^2 - v_1^2\right) = 2mv_2(v_2 - v_1) = 10^{-22} \text{ J}.$$

**47.a.** Deoarece corpul ciocneşte perfect elastic un alt corp vitezele după ciocnire sunt: $v_1' = \frac{2(mv_1 + Mv_2)}{m+M} - v_1$ şi $v_2' = \frac{2(mv_1 + Mv_2)}{m+M} - v_2$. Deoarece peretele are masă foarte mare astfel că $M \to \infty$ obţinem viteza corpului imediat după ciocnirea cu peretele $v'_1 = 2v_2 - v_1 = -1$ m/s$^2$.

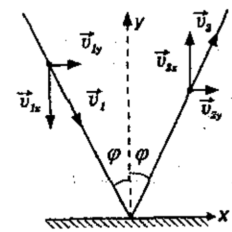
**b.** Pe baza principiului acţiunii şi reacţiunii forţa cu care peretele acţionează asupra corpului este egală cu forţa cu care corpul acţionează supra peretelui. Conform teoremei de variaţie a impulsului vectorial: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, iar scalar: $|\Delta p| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{|p_f - p_i|}{\Delta t} = \frac{|mv'_1 - mv_1|}{\Delta t} = \frac{2m(v_1 - v_2)}{\Delta t} = 8$ kN

**c.** Deoarece corpul cu masă $m_1$ se opreşte atunci $v'_1 = 0$ obţinem $v_1/v_2 = 1/2$

**48.a.** Ciocnirea mingii cu podeaua înseamnă ciocnirea cu un corp cu masa foarte mare aflat în repaus, astfel că $m_2 \to \infty$ şi $v_2=0$.

Viteza mingii după ciocnirea perfect elastică şi normală cu podeaua este $v_1' = \frac{2m_1v_0}{m_1+m_2} - v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}v_0 = -v_0 = -5$ m/s. Semnul minus arată că după ciocnirea cu podeaua mingea se întoarce cu aceeaşi viteză şi pe aceeaşi direcţie

**b.** Variaţia impulssului mingii la ciocnirea normală cu podeaua este: $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -2m\vec{v}_0 \Rightarrow |\Delta p| = 2mv_0$. Conform teoremei de variaţie a impulsului vectorial: $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, iar scalar: $|\Delta p| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\Delta t} = 40$ kN, unde $F$ este forţa pe care podeaua o exercită asupra mingii. Conform principiului al acţiunii şi reacţiunii al dinamicii mingea loveşte podeaua cu o forţă egală orientată perpendicular pe aceasta.

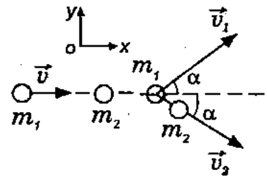



**c.** Ciocnirea mingii cu podeaua este perfect elastică şi mingea ricoşează cu o viteză egală şi sub un unghi egal faţă de normală. Observăm că în urma ciocnirii cu podeaua proiecţia vectorului viteză de-a lungul podelei, pe axa $Ox$, nu se modifică în timp ce proiecţia vectorului viteză pe o direcţie perpendiculară pe perete îşi schimbă sensul. Prin urmare impulsul mingii se modifică numai pe direcţia perpendiculară pe podea (axa $Oy$), ceea ce înseamnă că podeaua exercită asupra mingii o forţă perpendiculară pe ea. Conform principiului acţiunii şi reacţiunii mingea acţionează asupra podelei cu o forţă egală şi de sens contrar. Cum $\Delta p_y = -mv'_y - mv_y = -2mv_0\cos\varphi$ prin aplicarea teoremei de variaţie a impulsului obţinem $|\Delta p_y| = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{|\Delta p_y|}{\Delta t} = \frac{2mv_0\cos\varphi}{\Delta t} = 20$ kN, deoarece $\varphi=60^0$

**49.a.** Utilizăm formulele vitezelor pentru ciocnirea perfect elastică:
$v_1' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2} - v = \frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2}$ şi $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}$.

Cum $v_1' = -v_2' \Rightarrow \frac{(m_1-m_2)v}{m_1+m_2} = -\frac{2m_1 v}{m_1+m_2} \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$.

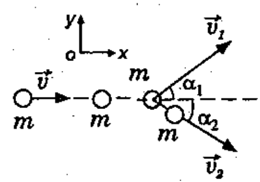
**b.** Deoarece ciocnirea particulelor este perfect elastică utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, unde $\vec{v}$ este viteza primei particule înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ sunt vitezele particulelor după ciocnirea perfect elastică. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:




pe *Ox*: $m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\alpha$ (1) şi pe *Oy*: $0 = m_1 v_1 \sin\alpha - m_2 v_2 \sin\alpha \Rightarrow$
$m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$ (2). Din (1) şi (2) obţinem $m_1 v = 2m_1 v_1 \cos\alpha \Rightarrow$
$v = 2v_1 \cos\alpha$. Aplicăm legea conservării energiei cinetice:
$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow 4m_1 v_1^2 \cos^2\alpha = m_1 v_1^{\,2} + \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 4\cos^2\alpha - 1 = 2$

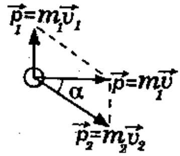
**50.a.** Utilizăm legea de conservare a impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow$ $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (1), iar din legea de conservare a energiei cinetice $E_c = E_{c_1} + E_{c_2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$ (2), unde cu $v$ am notat viteza neutronului înainte de ciocnire iar cu $v_1$ şi $v_2$ vitezele neutronilor imediat după ciocnire. Ridicăm relaţia (1) la pătrat şi obţinem $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha$ şi pe baza relaţiei (2) obţinem $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0$, unde $\alpha$ reprezintă unghiul dintre direcţiile de mişcare ale neutronilor după ciocnire. Direcţiile de mişcare ale celor doi neutroni după ciocnire sunt perpendiculare.

**b.** Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.




Pe *Ox*: $v = v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2$ (1) şi pe *Oy*:
$0 = v_1 \sin\alpha_1 - v_2 \sin\alpha_2$ (2)
Din legea de conservare a energiei cinetice obţinem:
$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$ (3)
Cum $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ (4).
Din (3) şi (4) obţiem $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 90 \Rightarrow \alpha_2 = 90 - \alpha_1$.
Din (2) $\Rightarrow v_2 = \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = v_1 tg\alpha_1$ şi din (1) $\Rightarrow v = v_1\cos\alpha_1 + \frac{v_1 \sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}\sin\alpha_1$.
Obţinem $v_1 = v\cos\alpha_1$ = $3 \cdot 10^4$ m/s $\Rightarrow v_2 = v\sin\alpha_1 \approx 1{,}73 \cdot 10^4$ m/s.

**51.a.** Aplicăm în cazul ciocnirii perfect elastice legea conservării impulsului: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, unde $\vec{v}$ reprezintă viteza primei particulei înainte de ciocnire, iar $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ sunt vitezele particulelor 1 și 2 după ciocnirea perfect elastică. Din teorema lui Pitagora obținem $m_2^2v_2^2 = m_1^2v_1^2 + m_1^2v^2$ (1).




Pe baza conservării energiei cinetice:

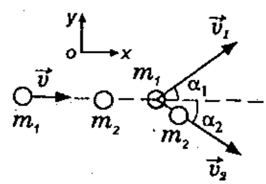
$$\frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \Rightarrow m_1v^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 \ (2).$$

Din (1) și (2) obținem $v_1^2 = \frac{v^2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$. Viteza primei particule imediat după ciocnire este $v_1 = v\sqrt{\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}} \approx 1{,}55$ m/s și viteza particulei a doua imediat după ciocnire este $v_2 = v\sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 6{,}32$ m/s

**b.** Fracțiunea cerută este: $f = \frac{E_{c_{pierdut}}}{E_{c_i}} = \frac{E_{c_i} - E_{c_f}}{E_{c_i}} = 1 - \frac{E_{c_f}}{E_{c_i}} \Rightarrow$

$$f = 1 - \frac{m_1v_1^2}{m_1v^2} = 1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}4.$$

**52.a.** Aplicăm legea de conservare a impulsului: $m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ și proiectăm pe axele de coordonate.
Pe $Ox$: $m_1v = m_1v_1\cos\alpha_1 + m_2v_2\cos\alpha_2$ (1) și pe $Oy$:
$0 = m_1v_1\sin\alpha_1 - m_2v_2\sin\alpha_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1\sin\alpha_1}{m_2\sin\alpha_2}$.




Introducem în relația (1) și obținem $m_1v = m_1v_1\cos\alpha_1 + \frac{m_1v_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} \Rightarrow$ vitezele corpurilor după ciocnire sunt $v_1 = \frac{v\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 7{,}326$ m/s și

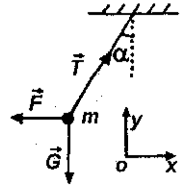
$$v_2 = \frac{m_1v\sin\alpha_1}{m_2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \approx 2{,}6 \text{ m/s}.$$

**b.** Raportul energiilor cinetice ale corpurilor după ciocnire este $\frac{E_{c_1}}{E_{c_2}} = \frac{m_1v_1^2}{m_2v_2^2} = \frac{m_2\sin^2\alpha_2}{m_1\sin^2\alpha_1} = 4$.

**c.** Căldura degajată provine pe seama scăderii energiei cinetice:

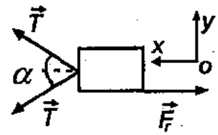
$$Q = \frac{m_1v^2}{2} - \left(\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}\right) \approx 16{,}45 \text{ J}.$$

## 4.1. Echilibrul de translaţie




**1.a.** Impunem condiţia de echilibru corpului: $\vec{T}+\vec{F}+\vec{G}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Obţinem pe *Ox:* $T\sin\alpha - F = 0$ şi pe *Oy:* $T\cos\alpha - mg = 0 \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 10$ N.

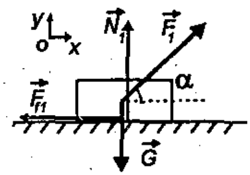
**b.** $F = T\sin\alpha = m\cdot g\cdot tg\,\alpha = 8{,}65$ N.




**2.** Studiem echilibrul plugului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{F}_r=0$.
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate.
Pe *Oy*: $T_2\sin\dfrac{\alpha}{2} - T_1\sin\dfrac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T$ şi pe axa *Ox*:

$$2T\cos\frac{\alpha}{2} - F_r = 0 \Rightarrow F_r = 2T\cos\frac{\alpha}{2} = 25{,}95 \text{ N}.$$

**3.a.** Deoarece sania are viteza constantă, rezultanta forţelor este nulă, iar echilibrul de translaţie este dinamic. Studiem sania când asupra ei se exercită forţa $\vec{F}_1$. Vectorial: $\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{N}_1+\vec{F}_{f1}=0$.

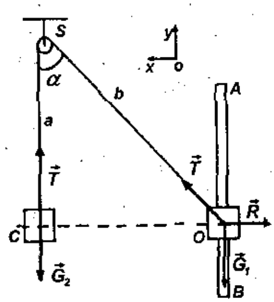



Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:
pe *Ox*: $F_1\cos\alpha - F_{f_1} = 0$ şi pe *Oy*: $F_1\sin\alpha + N_1 - mg = 0$.
$F_{f_1} = \mu N_1 = \mu(mg - F_1\sin\alpha) \Rightarrow F_1\cos\alpha - \mu mg + \mu F_1\sin\alpha = 0$
$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = \mu mg$ (1).
Studiem sania când asupra ei se exercită forţa $\vec{F}_2$.
Analog obţinem: $F_2(\cos\beta + \mu\sin\beta) = \mu mg$ (2). Din (1)+(2) $\Rightarrow$

$$F_1(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) = F_2(\cos\beta+\mu\sin\beta) \Rightarrow \mu = \frac{F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha}{F_1\sin\alpha - F_2\sin\beta} \approx 0{,}247.$$

**b.** Introducând formula lui $\mu$, obţinem: $m = \dfrac{F_1F_2\sin(\alpha-\beta)}{g(F_2\cos\beta - F_1\cos\alpha)} \approx 34{,}6$ kg.

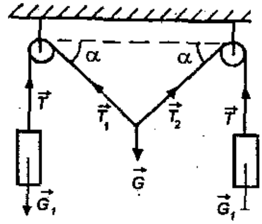
**4.** Studiem echilibrul corpului cu masa $m_2$: $\vec{T}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T = m_2 g$.




Studiem echilibrul corpului cu masa $m_1$: $\vec{T}+\vec{G}_1+\vec{R}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Astfel pe *Ox*: $T\sin\alpha - R = 0$ şi pe *Oy*: $T\cos\alpha - m_1 g = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = m_1 g \Rightarrow m_2\cos\alpha = m$
În triunghiul *OCS*: $a + b = 2\ell \Rightarrow a = 2\ell - b$, unde *OC*=$\ell$. Pe baza teoremei lui Pitagora $a^2+\ell^2=b^2$ obţinem $4\ell^2 - 4\ell b + b^2 + \ell^2 = b^2 \Rightarrow 5\ell^2 - 4\ell b = 0 \Rightarrow$
$b = \dfrac{5\ell}{4}$ iar $a = \dfrac{3\ell}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \cos\alpha = 0{,}6$.

**5.** Studiem echilibrul corpului cu greutatea $G_1$. $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T=G_1$. Studiem echilibrul corpului cu greutatea $G$: Vectorial $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Scalar: $T_1=T_2=T=G_1$. Proiectăm relația vectorială pe verticală: $2T\cos\alpha=G \Rightarrow G=2G_1\cos\alpha \Rightarrow$

$$G_1=\frac{G}{2\cos\alpha}=\frac{G\sqrt{2}}{2}=100\text{ N.}$$

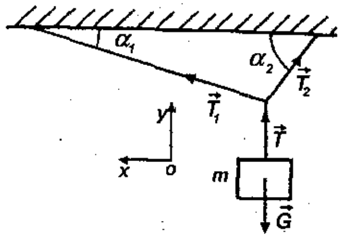



**6.** Studiem echilibrul corpului cu masa $m$. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=0$, iar scalar: $T=mg=40$ N. Din echilibrul punctului de prindere $\vec{T}_1+\vec{T}_2=\vec{T}$. Cum $\alpha_1+\alpha_2=90^0$, tensiunile $T_1$ și $T_2$ sunt perpendiculare, astfel că prin proiecție pe axele de coordonate obținem:

pe $Ox$: $T_1\cos\alpha_1-T_2\cos\alpha_2 \Rightarrow T_2=\dfrac{T_1\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$ și $Oy$:

$T_1\sin\alpha_1+T_2\sin\alpha_2-T=0$. Din cele două ecuații obținem:

$$T_1=\frac{mg\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=20\text{ N, iar } T_2=\frac{mg\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=34{,}6\text{ N.}$$



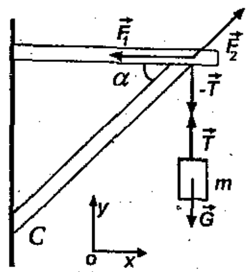

**7.** Impunem condiția de echilibru pentru corp: Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}=0$ și scalar: $T=mg$.

Notăm cu $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ tensiunile din grinzi și prin proiecția relației vectoriale $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}=0$ obținem pe axele de coordonate:

pe $Ox$: $F_2\cos\alpha-F_1=0 \Rightarrow F_1=F_2\cos\alpha$ și pe $Oy$:

$$F_2\sin\alpha-T=0 \Rightarrow F_2=\frac{T}{\sin\alpha}=\frac{mg}{\sin\alpha}=240\text{ N.}$$

$F_1=m\cdot g\cdot ctg\,\alpha \approx 207{,}6$ N.

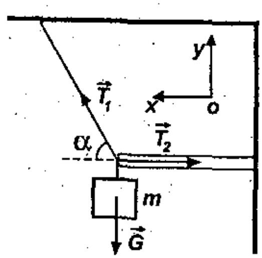



**8.** Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate și obținem:

pe $Ox$: $T_1\cos\alpha-T_2=0 \Rightarrow T_2=T_1\cos\alpha$ și pe $Oy$:

$$T_1\sin\alpha-mg=0 \Rightarrow T_1=\frac{mg}{\sin\alpha}=40\text{ N.}$$

$T_2=m\cdot g\cdot ctg\,\alpha \approx 34{,}6$ N.




**9.a.** Studiem echilibrul omului: $\vec{T}+\vec{G}+\vec{N}=0$, iar scalar $T+N-mg=0 \Rightarrow N=mg-T$. (fig.1.)

Studiem echilibrul scripetelui peste care este trecut firul de care trage omul. (fig 2) $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}=0$, iar scalar $T_1=2T$. Studiem echilibrul platformei. (fig 3) Vectorial: $\vec{T}+\vec{T}_1+\vec{G}'-\vec{N}=0$ și scalar: $T+T_1-Mg-N=0 \Rightarrow 3T-Mg-N=0$ $\Rightarrow 3T-Mg-mg+T=0 \Rightarrow 4T=g(m+M) \Rightarrow T=\dfrac{g(m+M)}{4}$=300 N.

**b.** Forța de apăsare exercitată de om asupra platformei este $N=mg-T=\dfrac{g(3m-M)}{4}=500$ N.

Fig. 1.

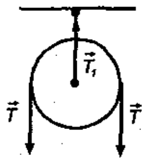


Fig. 2

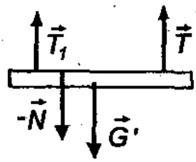
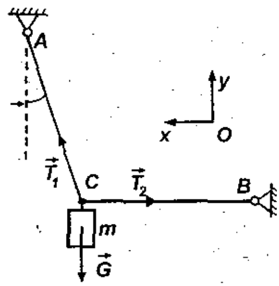


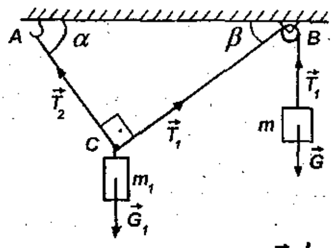
Fig. 3




**10.a.** Studiem echilibrul corpului: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T_1\sin\alpha-T_2=0 \Rightarrow T_2=T_1\sin\alpha$

și pe *Oy*: $T_1\cos\alpha-mg=0 \Rightarrow T_1=\dfrac{mg}{\cos\alpha}\approx 184{,}97$ N.

$T_2=mg\,tg\,\alpha\approx 92{,}49$ N.

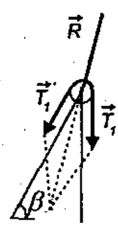



**11.a.** Studiem echilibrul corpului cu greutate $G$, astfel că $\vec{T}_1+\vec{G}=0$, iar scalar $T_1=G=mg$.
Studiem echilibrul corpului cu greutatea $G_1$: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{G}=0$. Proiectăm pe *Ox*:
$T_2\cos\alpha-T_1\cos\beta=0$ *Oy*: $T_2\sin\alpha+T_1\sin\beta-G_1=0$
Din datele problemei: $T_2=2T_1 \Rightarrow 2\cos\alpha=\cos\beta$.
Cum $\alpha+\beta=90^0 \Rightarrow \beta=90^0-\alpha \Rightarrow \cos\beta=\sin\alpha \Rightarrow$

$2\cos\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ și $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

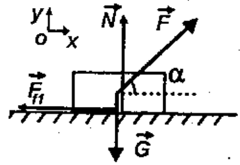
$G_1=2T_1\sin\alpha+T_1\sin\beta=mg(2\sin\alpha+\sin\beta)\approx 44{,}7$N.

**b.** $T_2=2T_1=2mg=40$ N.




**c.** Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R}_1+\vec{T}_1+\vec{T}'_1=0 \Rightarrow \vec{R}_1=-\vec{T}_1-\vec{T}'_1$ cu $T_1=T_1'$ și scalar:
$R_1^2=T_1^2+T_1'^2+2T_1T_1'\cos(90-\beta)=2T_1^2(1+\sin\beta)$
Cum $R=T_1\sqrt{2(1+\sin\beta)}=mg\sqrt{2(1+\sin\beta)}\approx 34$ N.

**12.** Deoarece corpul se mişcă uniform înseamnă că se află în echilibru dinamic de translaţie, astfel că rezultanta forţelor care se exercită asupra corpului este nulă. Obţinem: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}=0$. Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

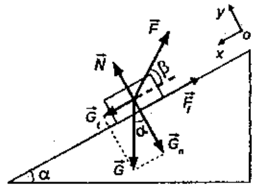



pe $Ox$: $F\cos\alpha - F_f = 0 \Rightarrow F_f = F\cos\alpha$ şi pe $Oy$: $F\sin\alpha + N - mg = 0$.

Cum $F_f = \mu N \Rightarrow \mu(mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha \Rightarrow F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 3{,}25$ N.

**13.a.** Studiem echilibrul corpului aflat pe planul înclinat. Rezultanta forţelor ce acţionează asupra corpului este nulă.

Obţinem: $\vec{F}+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

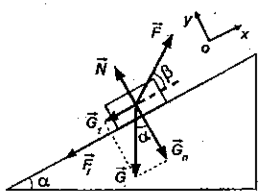



Proiectăm pe $Ox$: $mg\sin\alpha - F\cos\beta - F_f = 0$ şi pe $Oy$: $N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0$. Deoarece $F_f = \mu N$

$mg\sin\alpha - F\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta = 0 \Rightarrow$

$F = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\beta - \mu\sin\beta} = 3{,}36$ N.

**b.** Forţa de apăsare exercitată de corp asupra planului este $N = mg\cos\alpha - F\sin\beta = 6{,}97$ N.



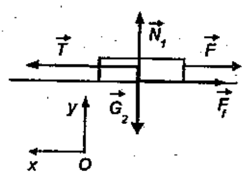

**c.** Studiem urcarea uniformă a corpului pe planul înclinat: $\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}_f=0$.

Proiectăm pe $Ox$: $F_1\cos\beta - F_f - mg\sin\alpha = 0$ şi pe $Oy$: $F_1\sin\beta + N - mg\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow$

$F_1\cos\beta - \mu mg\cos\alpha + \mu F_1\sin\beta - mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_1 = \dfrac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta} \approx 7{,}48$ N.

**d.** $N = mg\cos\alpha - F_1\sin\beta \approx 4{,}91$ N.

**14.** Împărţim lanţul în două părţi: o porţiune verticală cea care atârnă şi o porţiune orizontală aflată pe masă. Studiem echilibrul porţiunii de lanţ care atârnă. Vectorial: $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $m_1 g - T = 0$

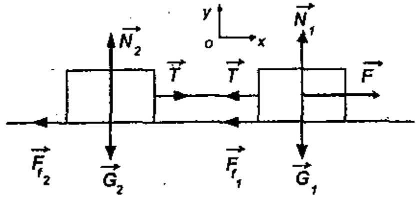



$\Rightarrow T = m_1 g$, unde $m_1 = \dfrac{m\ell_1}{\ell}$ reprezintă masa porţiunii de lanţ care atârnă. Studiem echilibrul porţiunii de lanţ aflată pe masă cu masa $m_2 = \dfrac{m(\ell - \ell_1)}{\ell}$.

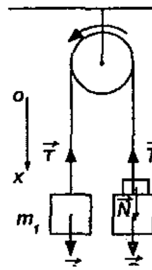
Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_2+\vec{F}_f+\vec{F}=0$ şi proiectăm relaţia pe $Ox$: $T - F_f - F = 0$ şi pe $Oy$: $N_1 - G_2 = 0$. Deoarecce $F_f = \mu N_1 = \mu m_2 g \Rightarrow$

$F = \dfrac{m}{\ell}\ell_1 g - \mu\dfrac{m(\ell - \ell_1)}{\ell}g \Rightarrow F = \dfrac{mg}{\ell}(\ell_1 - \mu\ell + \mu\ell_1) = 5{,}2$ N.

**15.** Studiem mişcarea rectilinie şi uniformă a corpului cu masa *m2*. Vectorial: $\vec{T}+\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{F}_{f2}=0$ şi proiectând pe axele de coordonate obţinem pe *Ox*: $T-F_{f_2}=0$ şi pe *Oy*: $N_2-m_2g=0 \Rightarrow F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2m_2g \Rightarrow$ $T=\mu_2m_2g$. Studiem mişcarea rectilinie şi uniformă a corpului cu masa *m1*: $\vec{F}+\vec{T}+\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{F}_{f1}=0$. Scalar pe *Ox*: $F-T-F_{f_1}=0$ şi pe *Oy*: $N_1-m_1g=0 \Rightarrow F_{f_1}=\mu_1N_1=\mu_1m_1g \Rightarrow$ $F=T+F_{f_1}=\mu_2m_2g+\mu_1m_1g=g(\mu_2m_2+\mu_1m_1)=1{,}6$ N.

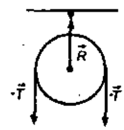



**16.a.** Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului cu masă *m1* $\vec{T}+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T=m_1g$. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului cu masă *m2*: $\vec{T}+\vec{N}+\vec{G}_2=0$, iar scalar $T=N+m_2g$, unde $N$ este apăsarea normală exercitată de corpul adiţional. Studiem echilibrul dinamic de translaţie al corpului adiţional cu masa *m*. Astfel $\vec{N}+\vec{G}=0$, iar scalar $mg=N \Rightarrow$ $m_1g=mg+m_2g \Rightarrow m=m_1-m_2=2$ kg. Corpul adiţional se aşază pe corpul cu masă mai mică.




**b.** Forţa de apăsare a corpului adiţional este $N$=20 N

**c.** Studiem echilibrul scripetelui. Vectorial: $\vec{R}-2\vec{T}=0$, iar scalar $R=2T=2m_1g=100$ N.




**17.** Studiem echilibrul corpului cu masa $m_1$: $\vec{T}_1+\vec{G}_1=0$, iar scalar $m_1g=T_1$. (fig 4)
Studiem echilibrul scripetelui de care este prins corpul de masă $m_2$: $2\vec{T}_1+\vec{T}_2=0$, iar scalar $T_2=2T_1$.
Studiem echilibrul corpului cu masa $m_2$: $\vec{T}_2+\vec{G}_2=0$, iar scalar $m_2g=T_2 \Rightarrow m_2g=2m_1g \Rightarrow m_2=2m_1 \Rightarrow$

$$m_1=\frac{m_2}{2}=5\text{ kg}.$$

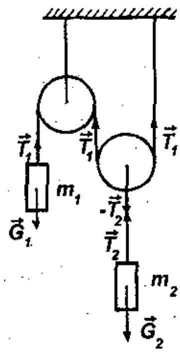


Fig. 4

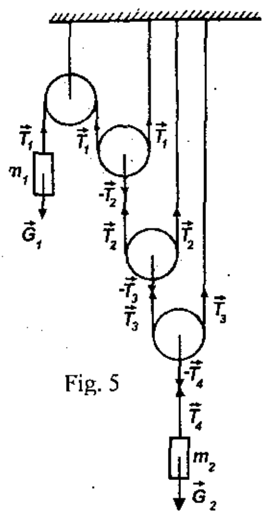


Fig. 5

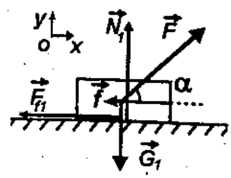
**18.** Studiem echilibrul corpului cu masa $m_1$: $\vec{T}_1+\vec{G}_1=0$, iar scalar $T_1=m_1g$. (fig 5)
Studiem echilibrul scripeţilor.
Scalar: $T_2=2T_1$; $T_3=2T_2=4T_1$ şi $T_4=2T_3=8T_1$.

Studiem echilibrul corpului cu masa $m_2$: $\vec{T}_4 + \vec{G}_2 = 0$, iar scalar $T_4 = m_2 g \Rightarrow$ $m_2 g = 8m_1 g \Rightarrow m_2 = 8m_1 = 64$ kg.

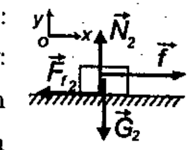
**19.a.** Deoarece sistemul de corpuri este ridicat uniform de forța $F$, considerăm că întreg sistemul este un punct material cu masa totală $m_t = m_1 + m_0 + m_2$, astfel că: $F = G_t = m_t g = (m_1 + m_0 + m_2)g = 32$ N.

**b.** Studiem mişcarea rectilinie uniformă, a corpului cu masa $m_2$ şi a porțiunii inferioare de lanț cu lungimea $\ell_0$. Această porțiune de lanț are masa $m = \frac{m_0 \ell_0}{\ell}$, astfel că: $T - G = 0 \Rightarrow T = G = (m + m_2)g = \left(\frac{m_0 \ell_0}{\ell} + m_2\right)g$ =20,8 N

**20.a.** Studiem echilibrul corpului cu masă $m_1$: $\vec{F} + \vec{f} + \vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate pe *Ox*: $F\cos\alpha - f - F_{f_1} = 0$ şi pe *Oy*: $F\sin\alpha + N_1 - m_1 g = 0$. Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1$ obținem $F\cos\alpha - f - \mu_1 m_1 g + \mu_1 F \sin\alpha = 0$ (1)




Studiem echilibrul corpului cu masă $m_2$. Vectorial: $\vec{f} + \vec{N}_2 + \vec{G}_2 + \vec{F}_{f2} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe *Ox*: $f - F_{f_2} = 0$; pe *Oy*: $N_2 - m_2 g = 0$ şi cum $F_{f_2} = \mu_2 N_2$ obținem $f = \mu_2 m_2 g$ (2). Adunând (1) cu (2) obținem



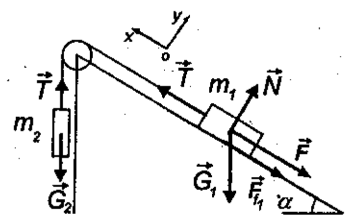

$F\cos\alpha - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g + \mu_1 F \sin\alpha = 0 \Rightarrow F = \frac{g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{\cos\alpha + \mu_1 \sin\alpha} \approx 14{,}2$ N.

**b.** Forțele de apăsare sunt reacțiunile normale: $N_1 = m_1 g - F\sin\alpha \approx 22{,}9$ N şi $N_2 = m_2 g$ =50 N.

**c.** Forțele de frecare sunt $F_{f1} = \mu_1 N_1 \approx 2{,}29$ N şi $F_{f2} = \mu_2 N_2$ =10 N

**21.a.** Studiem echilibrul corpului cu masa $m_2$: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$.

Studiem echilibrul corpului cu masa $m_1$. Deoarece lăsat liber sistemul de corpuri, corpul $m_1$ urcă, $\vec{F}_f$ acționează de-a lungul planului înclinat în jos. Vectorial: $\vec{T} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T - F_{f1} - m_1 g \sin\alpha - F = 0$ şi pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g \sin\alpha - F = 0 \Rightarrow$ $F = g(m_2 - m_1 \sin\alpha - \mu m_1 \cos\alpha) = 20{,}7$ N.




**b.** Tensiunea din fir este $T = m_2 g = 40$ N.

**c.** Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -\left(\vec{T}_1 + \vec{T}_2\right)$

Scalar $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 \cos(90-\alpha)$. Deoarece $T_1 = T_2 = T \Rightarrow$
$R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = m_2 g\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = 77{,}25$ N.

**22.a. Caz 1** Sistemul se află în repaus, iar $F_{f_1}$ are sensul din figura 6.

Studiem echilibrul corpului cu masa $m_2$: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$. Studiem echilibrul corpului cu masa $m_1$: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T - F_{f1} - m_1 g \sin\alpha = 0$ și pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = 0 \Rightarrow$
$m_2 = m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 586{,}5$ g.

**Caz 2:** Sistemul se află în repaus, iar $F_{f_1}$ are sensul din figura 7.

Studiem echilibrul corpului cu masa $m_2$: $\vec{G}_2 + \vec{T} = 0$, iar scalar $m_2 g = T$. Studiem echilibrul corpului cu masa $m_1$: $\vec{T} + \vec{N} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $T + F_f - m_1 g\sin\alpha = 0$ și pe *Oy*: $N - m_1 g\cos\alpha = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow m_2 g + \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0 \Rightarrow$
$m_2 = m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 413{,}5$ g. Deci sistemul se află în echilibru dacă corpul al doilea are masa $m_2 \in [413{,}5\,g;\ 586{,}5\,g]$.

**b.** $T_{min} = m_{2min} g \approx 4{,}135$ N și $T_{max} = m_{2max} g \approx 5{,}865$ N.

**c.** Studiem echilibrul scripetelui (fig 8): $\vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \Rightarrow \vec{R} = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2$. Scalar: $R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2\cos(90-\alpha)$. Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R^2 = 2T^2 + 2T^2\sin\alpha \Rightarrow$ $R = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)} = T\sqrt{3}$. Pentru $T_{min}$ obținem $R_{min} \approx 7{,}15$ N și pentru $T_{max}$ obținem $R_{max} \approx 10{,}15$ N.

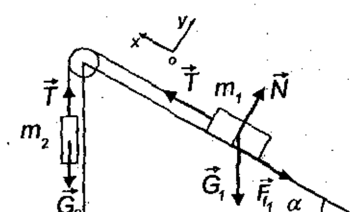


Fig. 6

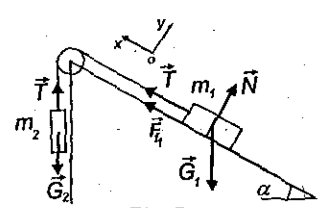


Fig. 7

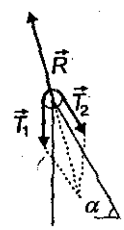


Fig. 8

**23. Caz 1:** Studiem situația în care corpul $m_1$ ar începe să alunece uniform în jos (fig 9.) Pentru corpul $m_1$: $\vec{N}_1 + \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{f1} = 0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.
Pe *Ox*: $m_1 g\sin\alpha - F_{f_1} - T = 0$ și pe *Oy*: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g\cos\alpha$.
Cum $F_{f_1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\alpha \Rightarrow m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - T = 0$ (1).

Pentru corpul $m_2$: $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}+\vec{F}_{f2}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox: $T-m_2g\sin\beta-F_{f_2}=0$ și pe $Oy$: $N_2-m_2g\cos\beta=0$.
Cum $F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2m_2g\cos\beta \Rightarrow T-m_2g\sin\beta-\mu_2m_2g\cos\beta=0$ (2).
Din (1)+(2)$\Rightarrow$ $m_1g\sin\alpha-\mu_1m_1g\cos\alpha-m_2g\sin\beta-\mu_2m_2g\cos\beta=0 \Rightarrow$

$$m_2=\frac{m_1(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)}{\sin\beta+\mu_2\cos\beta}=2{,}44\text{ kg}.$$

**Caz 2**: Studiem situația în care corpul $m_2$ ar începe să alunece uniform în jos (fig 10). Pentru corpul $m_1$: $\vec{N}_1+\vec{G}_1+\vec{T}+\vec{F}_{f1}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate: pe Ox $T-m_1g\sin\alpha-F_{f_1}=0$ și pe $Oy$: $N_1-m_1g\cos\alpha=0$. Cum $F_{f_1}=\mu_1N_1\Rightarrow T-m_1g\sin\alpha-\mu_1m_1g\cos\alpha=0$ (1)
Pentru corpul $m_2$: $\vec{N}_2+\vec{G}_2+\vec{T}+\vec{F}_{f2}=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordinate. Pe $Ox$: $m_2g\sin\beta-F_{f_2}-T=0$ și pe $Oy$: $N_2-m_2g\cos\beta=0$.
Cum $F_{f_2}=\mu_2N_2=\mu_2\cdot m_2g\cos\beta\Rightarrow m_2g\sin\beta-\mu_2m_2g\cos\beta-T=0$ (2)
Din (1)+(2)$\Rightarrow$ $m_2g\sin\beta-\mu_2m_2g\cos\beta-m_1g\sin\alpha-\mu_1m_1g\cos\alpha=0\Rightarrow$

$$m_2=\frac{m_1(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)}{\sin\beta-\mu_2\cos\beta}=5{,}2\text{ kg}.$$

Sistemul se află în echilibru, dacă corpul al doilea are masa $m_2\in[2{,}44\text{ kg};\ 5{,}2\text{ kg}]$.

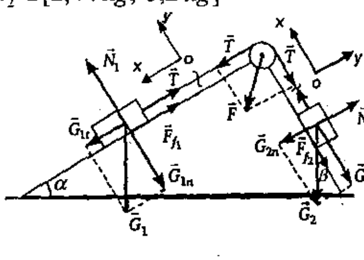


Fig. 9

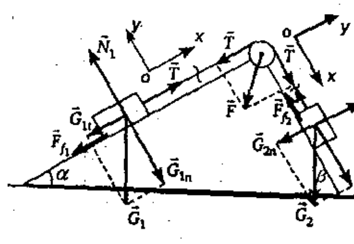


Fig. 10

**b.** Tensiunilor în fire în cele două cazuri sunt $T=m_1g(\sin\alpha-\mu_1\cos\alpha)\Rightarrow$ $T\approx 20{,}675$ N și $T'=m_1g(\sin\alpha+\mu_1\cos\alpha)\approx 29{,}325$ N

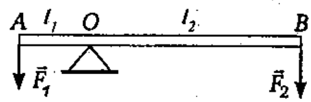
**c**. Din condiția de echilibru impusă scripetelui $\vec{R}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=0\Rightarrow \vec{R}=-(\vec{T}_1+\vec{T}_2)$.
Scalar, pe baza teoremei cosinusului obținem $R^2=T_1^2+T_2^2+2T_1T_2\cos\gamma$, unde $\gamma$=180°-$\alpha$-$\beta$=105°, astfel că $\cos\gamma\approx -0{,}26$.

Deoarece $T_1=T_2=T$ obținem: $R=T\sqrt{2(1+\cos\gamma)}$.
Pentru $T$ obținem $R\approx 25{,}15$ N și pentru $T'$ obținem $R'\approx 35{,}68$ N.

## 4.2. Echilibrul de rotaţie

**1.** Momentul forţei faţă de axa de rotaţie este $M_F = Fd\sin\alpha$, unde $\alpha$ este unghiul format de direcţia forţei $F$ şi bară. Deoarece bara rămâne în echilibru de rotaţie şi sub acţiunea forţei $F_1$ aplicată la distanţa $d_1$ faţă de axa de rotaţie înseamnă că momentul acestei forţe este egal cu momentul forţei $F$, astfel că $M_F = F_1 d_1 \sin\alpha \Rightarrow Fd = F_1 d_1 \Rightarrow F_1 = \dfrac{Fd}{d_1} = 100$ N.

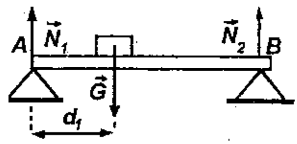
**2.** Deoarece scândura este în echilibru de rotaţie înseamnă că suma momentelor forţelor faţă de punctul $O$ este zero.




Astfel $\vec{M}_{F_1,0} + \vec{M}_{F_2,0} = 0$, iar scalar

$F_1\ell_1 - F_2\ell_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \dfrac{F_1\ell_1}{\ell_2} = 20$ N.

**3.** Impunem condiţia de echilibru de translaţie $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar: $N_1 + N_2 = G_1$, unde $N_1$ şi $N_2$ sunt forţele de apăsare exercitate de scândură asupra punctelor de sprijin $A$ şi $B$.




Impunem condiţia de echilibru de rotaţie faţă de punctul $A$: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{N_2,A} = 0$, iar scalar $-G_1 d + N_2\ell = 0 \Rightarrow N_2 = \dfrac{G_1 d}{\ell} = \dfrac{mgd}{\ell} = 2$ N

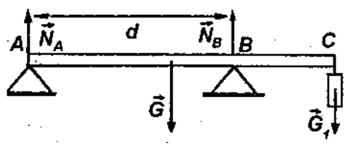
şi $N_1 = G - N_2 = \dfrac{mg(\ell - d)}{\ell} = 8$ N.

**4.** Studiem echilibrul de translaţie al grinzii: $\vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{G} + \vec{G}_1 = 0$.

Scalar: $N_A + N_B - mg - m_1 g = 0$.

Studiem echilibrul de rotaţie faţă de punctul $A$ Suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul $A$ este nulă: $\vec{M}_{N_B,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{G_1,A} = 0$.

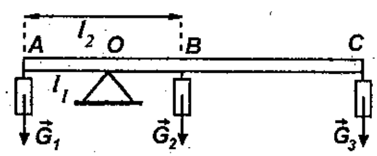
$N_B d - mg\dfrac{\ell}{2} - m_1 g\ell = 0 \Rightarrow N_B = \dfrac{g\ell(m + 2m_1)}{2d} = 112{,}5$ N şi $N_A = (m + m_1)g - N_B = 27{,}5$ N.



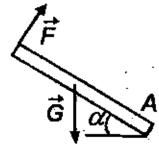

**5.** Studiem echilibrul de rotaţie al scândurii, astfel că suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul $O$ este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{G_1,0} + \vec{M}_{G_2,0} + \vec{M}_{G_3,0} = 0$.

Scalar: $m_1 g\ell_1 - m_2 g(\ell_2 - \ell_1) - m_3 g(\ell - \ell_1) = 0 \Rightarrow$

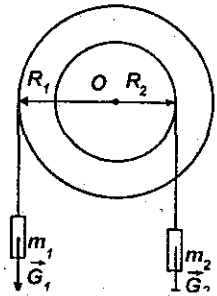
$m_3 = \dfrac{m_1\ell_1 - m_2(\ell_2 - \ell_1)}{\ell - \ell_1} = 320$ g.



**6.** Deoarece scândura se poate roti în jurul punctului $A$, când scândura formează cu orizontala unghiul $\alpha$ ea se află în echilibru de rotaţie. Impunem condiţia ca suma vectorială a momentelor forţelor faţă de punctul $A$ să fie zero: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{F,A}=0 \Rightarrow -mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha+F\ell=0 \Rightarrow F=\frac{mgos\alpha}{2}=21{,}625$ N.

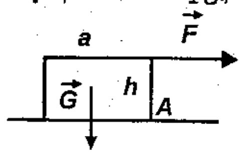



**7.** Studiem echilibrul de rotaţie al scripetelui. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul $O$ este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{G_1,0}+\vec{M}_{G_2,0}=0$, iar scalar: $m_1gR_1-m_2gR_2=0$ obţinem $m_2=\frac{m_1R_1}{R_2}=10$ kg.

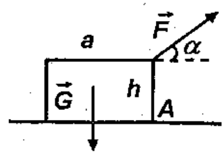



**8.a.** Pentru ca acest corp prismatic să se răstoarne, trebuie ca momentul forţei $\vec{F}$ faţă de axa $AA'$ (muchia corpului de pe plan perpendiculară pe forţa $\vec{F}$) să fie cel puţin egal cu momentul greutăţii corpului calculat faţă de aceeaşi axă. $M_{F,AA'}\geq M_{G,AA'} \Rightarrow$

$Fh\geq mg\frac{a}{2}\Rightarrow F\geq\frac{mga}{2h}\Rightarrow F\geq 1$ N $\Rightarrow$ dacă forţa $F$ este mai mare decât 1 N, corpul se răstoarnă.




**b.** Dacă forţa $F$, formează cu orizontala unghiul $\alpha$, pentru ca să se răstoarne corpul, trebuie ca: $M_{F,AA'}\geq M_{G,AA'}\Rightarrow Fh\cos\alpha\geq mg\frac{a}{2}\Rightarrow F\geq\frac{mga}{2h\cos\alpha}\Rightarrow F\geq 2$ N. Pentru a răsturna corpul trebuie ca forţa $F$ să fie mai mare decât 2 N.




**9.** Pentru ca roata să urce treapta, trebuie ca momentul forţei $\vec{F}$ faţă de punctul $A$ să fie cel puţin egal cu momentul greutăţii roţii faţă de acelaşi punct $A$. (fig 1) $M_{F,A}\geq M_{G,A}\Rightarrow F(R-h)\geq mgb$, unde $b$ este braţul greutăţii faţă de punctul $A$ (lungimea perpendicularei constuită din $A$ pe dreapta suport a greutăţii $\vec{G}$). Din geometrie: $b=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{h(2R-h)}$

$\Rightarrow F\geq\frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}\geq 55{,}9$ N. Dacă forţa este cel puţin egală cu 55,9 N, roata poate urca treapta.

**10.** Împărţim bara în două regiuni: una din oţel cu lungimea $\ell/4$ şi masa $m_1=\rho_1S\frac{\ell}{4}$, iar cealaltă din aluminiu cu lungimea $3\ell/4$ şi masa $m_2=\rho_2S\frac{3\ell}{4}$ (fig 2). Notăm cu $x$ distanţa de la punctul în care suspendăm bara pentru ca aceasta să rămână în echilibru şi capătul din oţel al barei. Studiem echilibrul de rotație față de punctul de suspensie $O$: $\vec{M}_{G_1,0}+\vec{M}_{G_2,0}=0$, iar scalar: $G_1\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=G_2\left(\ell-x-\frac{3\ell}{8}\right)\Rightarrow \rho_1 S\frac{\ell}{4}g\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=\rho_2 S\frac{3\ell}{4}g\left(\frac{5\ell}{8}-x\right)\Rightarrow$

$$\rho_1\left(x-\frac{\ell}{8}\right)=3\rho_2\left(\frac{5\ell}{8}-x\right)\Rightarrow x=\frac{\ell(\rho_1+15\rho_2)}{8(\rho_1+3\rho_2)}\approx 38\text{ cm}$$

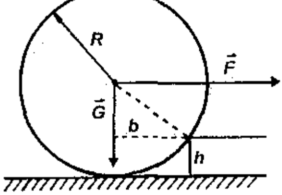


Fig. 1

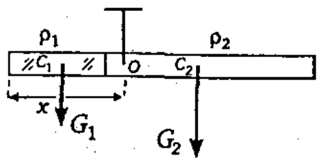


Fig. 2

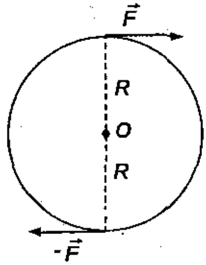
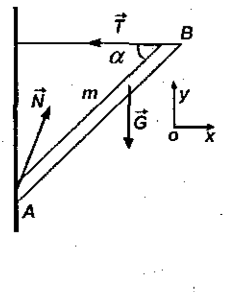


Fig. 3

**11.** Deoarece asupra volanului se acționează cu două forțe tangente și egale, diametral opuse, ca în figura 3, acestea formează un cuplu de forțe al cărui moment este: $\vec{M}=\vec{M}_{F,0}+\vec{M}_{-F,0}$, iar scalar $M=2FR\Rightarrow F=\frac{M}{2R}=15$ N, unde $F$ este forța cu care șoferul trage cu o mână de volan.

**12.a.** Studiem echilibrul de rotație al barei față de punctul $A$. Rezultanta momentelor forțelor față de $A$ este nulă: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{T_B,A}=0$, iar scalar:

$$-mg\frac{\ell}{2}\cos\alpha+T_B\ell\sin\alpha=0\Rightarrow T_B=\frac{mg}{2}ctg\,\alpha=1730\text{ N}.$$




**b.** Studiem echilibrul de translație al barei: $\vec{N}_A+\vec{G}+\vec{T}_B=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $N_{A_x}-T_B=0\Rightarrow N_{A_x}=T_B=\frac{mg}{2}ctg\,\alpha$ și pe $Oy$: $N_{A_y}-G=0\Rightarrow N_{A_y}=mg$.

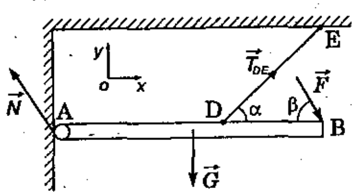
Din geometrie: $N_A=\sqrt{N_{A_x}^2+N_{A_y}^2}=2645$ N.

**c.** $tg\,\beta=\frac{N_{A_y}}{N_{A_x}}=2tg\alpha=1,156$

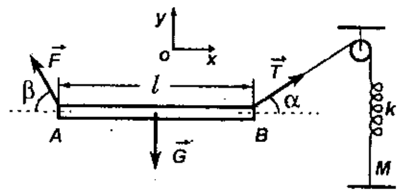
**13.a.** Studiem echilibrul de rotație al scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația $A$ este nulă: $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{T_{DE},A}+\vec{M}_{F,A}=0$, iar scalar:

$$-\frac{mg\ell}{2}+T_{DE}(\ell-d)\sin\alpha-F\ell\sin\beta=0\Rightarrow$$

$$T_{DE}=\frac{\ell(mg+2F\sin\beta)}{2(\ell-d)\sin\alpha}=996,8\text{ N}.$$



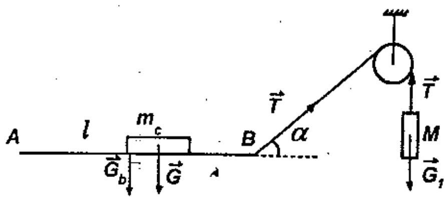
**b.** Studiem echilibrul de translație al scândurii: $\vec{N}_A + \vec{G} + \vec{T}_{DE} + \vec{F} = 0$.
Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.
pe $Ox$: $-N_{A_x} + T_{DE}\cos\alpha + F\cos\beta = 0 \Rightarrow N_{A_x} = T_{DE}\cos\alpha + F\cos\beta = 1073{,}73$ N.
pe $Oy$: $N_{A_y} + T_{DE}\sin\alpha - mg - F\sin\beta = 0 \Rightarrow N_{A_y} = mg + F\sin\beta - T_{DE}\sin\alpha \Rightarrow$
$N_{Ay} = -86{,}9$ N iar semnul "-" arată că $\vec{N}_{Ay}$ are sens contrar celui presupus.
$N_A = \sqrt{N_{A_x}^2 + N_{A_y}^2} \approx 1077{,}24$ N.



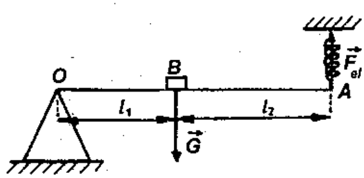

**14.a.** Studiem echilibrul de rotație al scândurii. Rezultanta momentelor forțelor față de articulația $A$ este nulă.)
Vectorial: $\vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar:
$-\frac{mg\ell}{2} + T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2\sin\alpha} = 115{,}6$N.
Cum $F_{el} = T = kx \Rightarrow x = \frac{T}{k} = 5{,}78$ cm.

**b.** Studiem echilibrul de translație al scândurii: $\vec{F} + \vec{G} + \vec{T} = 0$. Proiectăm relația pe axele de coordonate. Pe $Ox$: $T\cos\alpha - F_x = 0 \Rightarrow F_x = T\cos\alpha = 57{,}8$ N
și pe $Oy$: $T\sin\alpha + F_y - mg = 0 \Rightarrow F_y = mg - T\sin\alpha = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} = 100$ N.
Obținem $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 115{,}5$ N.

**c.** $tg\,\beta = \frac{F_y}{F_x} = 1{,}73 \approx \sqrt{3} \Rightarrow \beta = 60^0$.

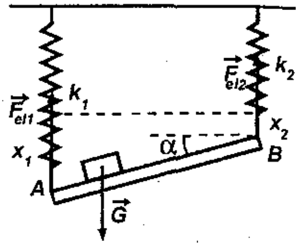



**15.** Studiem echilibrul corpului cu masă $M$. Vectorial: $\vec{T} + \vec{G}_1 = 0$, iar scalar $T = Mg$.
Studiem echilibrul de rotație al barei în raport cu punctul $A$. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul $A$ este zero: $\vec{M}_{G_b,A} + \vec{M}_{G,A} + \vec{M}_{T,A} = 0$, iar scalar: $-mg\frac{\ell}{2} - m_c gx + T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell(2M\sin\alpha - m)}{2m_c} = 4$ cm.




**16.** Studiem echilibrul de rotație al barei în raport cu punctul $O$. Rezultanta momentelor forțelor față de punctul $O$ este zero: $\vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{F_{el},0} = 0$, iar scalar:
$-mg\ell_1 + F_{el}(\ell_1 + \ell_2) = 0$. Cum $F_{el} = kx \Rightarrow$
$mg\ell_1 = kx(\ell_1 + \ell_2) \Rightarrow k = \frac{mg\ell_1}{x\cdot(\ell_1 + \ell_2)} = 1250$N/m.

**17.a.** Studiem echilibrul de translaţie al scândurii $AB$. Rezulatanta forţelor este nulă: $\vec{F}_{el_1}+\vec{F}_{el_2}+\vec{G}=0$, iar scalar: $F_{el_1}+F_{el_2}=mg \Rightarrow k_1x_1+k_2x_2=mg$ (1).




$\sin\alpha=\dfrac{x_1-x_2}{\ell} \Rightarrow x_1-x_2=\ell\sin\alpha$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow x_1=\dfrac{mg+k_2\ell\sin\alpha}{k_1+k_2}=12{,}5$ cm, iar

$x_2=\dfrac{mg-k_1\ell\sin\alpha}{k_1+k_2}=2{,}5$ cm.

**b.** $F_{el_1}=k_1x_1=6{,}25$ N şi $F_{el_2}=k_2x_2=3{,}75$ N.

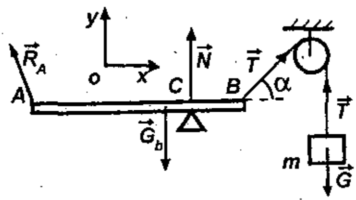
**c.** Studiem echilibrul de rotaţie al scândurii. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul $A$ este nulă. Astfel $\vec{M}_{G,A}+\vec{M}_{F_{el},A}=0$, iar scalar

$-Gd\cos\alpha+F_{el_2}\ell\cos\alpha=0 \Rightarrow d=\dfrac{k_2x_2\ell}{mg}=75$ cm.

**d.** Deoarece scândura rămâne orizontală după aşezarea corpului $m$, înseamnă că $x_1=x_2=x$. Din condiţia de echilibru de translaţie: $k_1x+k_2x=mg \Rightarrow x=\dfrac{mg}{k_1+k_2}=5$ cm, iar din condiţia de echilibru de rotaţie

$d'=\dfrac{k_2x\cdot\ell}{mg}=150$ cm.

**18.a.** Studiem echilibrul corpului $m$ suspendat de fir. Scalar: $T=mg$.




Studiem echilibrul de rotaţie al barei. Rezultanta momentelor forţelor faţă de punctul $A$ este nulă: $\vec{M}_{G_b,A}+\vec{M}_{N,A}+\vec{M}_{T,A}=0$

iar scalar: $-m_bg\dfrac{\ell}{2}+N\dfrac{3\ell}{4}+T\ell\sin\alpha=0$

Obţinem $N=\dfrac{4g(m_b-2m\sin\alpha)}{6}$=200 N.

**b.** Studiem echilibrul de translaţie al barei: $\vec{R}+\vec{G}_b+\vec{N}+\vec{T}=0$.

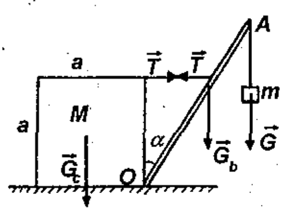
Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate:

pe $Ox$: $-R_{A_x}+T\cos\alpha=0 \Rightarrow R_{A_x}=T\cos\alpha=mg\cos\alpha=17{,}3$ N şi

pe $Oy$: $R_{A_y}+N+T\sin\alpha-m_bg=0 \Rightarrow R_{A_y}=m_bg-N-mg\sin\alpha=110$ N.

$R_A=\sqrt{R_{A_x}^2+R_{A_y}^2}\approx 111{,}36$ N.

**19.a.** Deoarece cubul nu se răstoarnă, impunem condiţia de echilibru de rotaţie faţă de muchia orizontală $OA$ ce trece prin punctul $O$ şi este

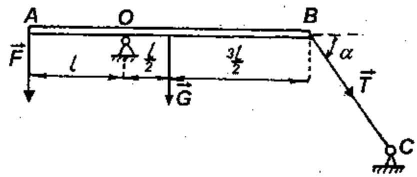


perpendiculară pe forța $\vec{T}$: $\vec{M}_{T,OA} + \vec{M}_{G_c,OA} = 0$, iar scalar $Ta = Mg\dfrac{a}{2} \Rightarrow T = \dfrac{Mg}{2} = 25$ N.

**b.** Studiem echilibrul de rotație al barei. Rezultanta momentelor forțelor în raport cu punctul $O$ este nulă. $\vec{M}_{G_b,0} + \vec{M}_{T,0} + \vec{M}_{G,0} = 0$, iar scalar

$$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha + Ta - G\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2Ta}{\ell(mg+2G)} = \frac{Mga}{\ell(mg+2G)} = 0{,}25.$$

**20.a.** Studiem echilibrul de rotație al barei. Suma vectorială a momentelor forțelor, calculate în raport cu punctul $O$ este nulă. Vectorial: $\vec{M}_{F,0} + \vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{T,0} = 0$ și scalar

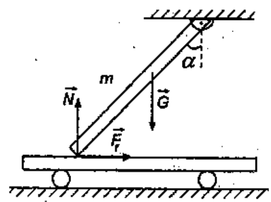



$$F\ell - mg\frac{\ell}{2} - 2T\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow T = \frac{2F - mg}{4\sin\alpha}$$

$T$=5 kg

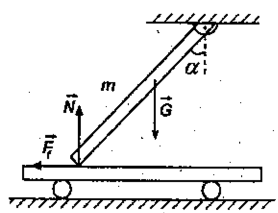
**b.** Pentru ca tensiunea în cablul $BC$ să fie nulă $T$=0$\Rightarrow F = \dfrac{mg}{2} \Rightarrow m = \dfrac{2F}{g}$ =2 kg.

**21.** Studiem echilibrul căruciorului. Scalar pe $Ox$: $F = F_f$. Dacă bara se deplasează spre stânga ca în figură, studiem echilibrul de rotație al barei față de punctul de prindere $O$. Asupra barei se exercită o forță de frecare în sens opus celei care se exercită asupra căruciorului (conform principiului acțiunii și reacțiunii). Rezultanta momentelor forțelor este nulă: $\vec{M}_{G,0} + \vec{M}_{F_f,0} + \vec{M}_{N,0} = 0$, iar scalar: $mg\dfrac{\ell}{2}\sin\alpha - F_f\ell\cos\alpha - N\ell\sin\alpha = 0$, unde $\ell$ este lungimea barei. Conform legii frecării




$$F_f = \mu N \Rightarrow \frac{mg}{2}\sin\alpha = F_f\cos\alpha + \frac{F_f}{\mu}\sin\alpha \Rightarrow$$

$$F_f = F = \frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} \approx 2{,}36 \text{ N.}$$

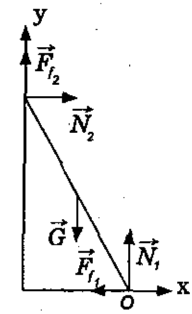



Dacă bara se deplasează în sens opus, echilibrul de rotație al barei față de punctul $O$ devine:

$$-mg\frac{\ell}{2}\sin\alpha - F_f\ell\cos\alpha + N\ell\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{mg\sin\alpha}{2} = F_f\cos\alpha - \frac{F_f}{\mu}\sin\alpha \Rightarrow F = F_f = \frac{\mu mg\sin\alpha}{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} \approx 13 \text{ N.}$$

**22.** Studiem echilibrul de translație al scării: $\vec{N}_2+\vec{F}_{f_2}+\vec{G}+\vec{F}_f+\vec{N}_1=0$. Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.




Pe *Ox*: $N_2-F_{f_1}=0\Rightarrow N_2=F_{f_1}$ şi pe *Oy*: $F_{f_2}+N_1-mg=0$.

Conform legilor frecării $F_{f_1}=\mu N_1$ şi $F_{f_2}=\mu N_2$ obținem

$$N_2=\mu N_1\Rightarrow F_{f_2}=\mu^2N_1\Rightarrow N_1=\frac{mg}{1+\mu^2} \quad \text{şi} \quad N_2=\frac{\mu mg}{1+\mu^2}.$$

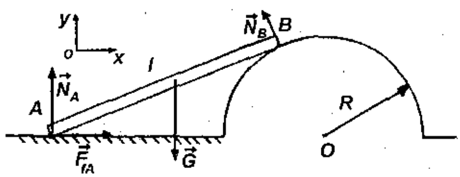
Studiem echilibrul de rotație al scării. Notăm cu $h$ înălțimea la care se află centrul de greutate al scării şi impunem condiția ca rezultanta momentelor forțelor față de punctul de sprijin al scării pe podea $(O)$, să fie nulă: $\vec{M}_{F_{f_2},0}+\vec{M}_{N_2,0}+\vec{M}_{G,0}=0$, iar scalar $-F_{f_2}\ell\cos\alpha-N_2\ell\sin\alpha+mg\dfrac{h}{tg\,\alpha}=0\Rightarrow$

$$mg\frac{h}{tg\,\alpha}=N_2\ell(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\Rightarrow h=\frac{\mu\ell\sin\alpha(tg\alpha+\mu)}{1+\mu^2}=16{,}86\text{ cm}.$$

**23.** Studiem echilibru de translație al barei $\vec{N}_A+\vec{F}_{f_A}+\vec{G}+\vec{N}_B=0$.

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe *Ox*: $F_{f_A}-N_B\sin\alpha=0$ şi pe *Oy*:




$N_A+N_B\cos\alpha-mg=0$.

Conform legii frecării $F_{f_A}=\mu N_A\Rightarrow$

$$\mu N_A=N_B\sin\alpha\Rightarrow N_A=\frac{N_B\sin\alpha}{\mu}$$

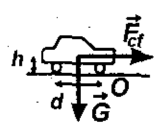
$$\frac{N_B\sin\alpha}{\mu}+N_B\cos\alpha=mg\Rightarrow N_B=\frac{\mu mg}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$$

Studiem echilibrul de rotație al barei. Suma vectorială a momentelor forțelor față de punctul de sprijin de pe planul orizontal $A$ este nulă: $\vec{M}_{N_B,A}+\vec{M}_{G,A}=0$

Scalar: $N_B\ell-\dfrac{mg\ell}{2}\cos\alpha=0\Rightarrow N_B=\dfrac{mg\cos\alpha}{2}\Rightarrow\dfrac{mg\cos\alpha}{2}=\dfrac{\mu mg}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}\Rightarrow$

$$\mu=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha}. \text{ Dar } \sin\alpha=\frac{R}{\sqrt{l^2+R^2}}=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\mu\approx0{,}333.$$

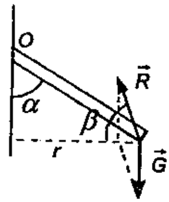
**24.** Pentru ca maşina să nu se răstoarne în curbă, față de punctul de contact $O$ dintre roata exterioară şi sol, trebuie ca momentul forței centrifuge să fie mai mic sau cel puțin egal cu momentul greutății autoturismului, ambele calculate față de punctul $O$. Astfel:




$$|M|_{F_{cf},0}\le|M|_{G,0}\Rightarrow F_{cp}h\le G\frac{d}{2}\Rightarrow\frac{mv^2}{R}h\le mg\frac{d}{2}\Rightarrow v\le\sqrt{\frac{Rgd}{2h}}\Rightarrow v\le31{,}62\text{ m/s}$$

Dacă autoturismul intră în curbă cu o viteză mai mică decât 113,84 km/h, el nu se răstoarnă.

**25.a.** Deoarece bila execută o mişcare circular uniformă, ea se află în echilibru de rotaţie. Rezultanta forţelor joacă rol de forţă centripetă, astfel că $F_{cp} = m\omega^2 r$, unde $r$ este raza de rotaţie şi este $r = \ell \sin\alpha \Rightarrow F_{cp} = m4\pi^2 n^2 \ell \sin\alpha$. Din geometrie $R = \sqrt{F_{cp}^2 + G^2} = m\sqrt{(4\pi^2 n^2 l \sin\alpha)^2 + g^2} \approx 16{,}12$ N.




**b.** $F_{cp} = R\sin\beta \Rightarrow m\omega^2 r = R\sin\beta$.

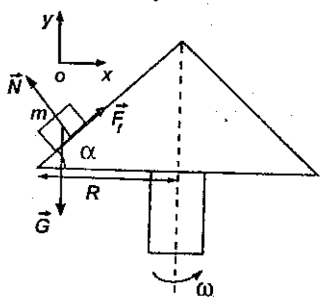
$G = R\cos\beta \Rightarrow mg = R\cos\beta \Rightarrow tg\,\beta = \dfrac{4\pi^2 n^2 \ell \sin\alpha}{g} = 8$.

**c.** Calculăm momentul reacţiunii $\vec{R}$ faţă de punctul de fixare de ax. Cum $\vec{R} + \vec{G} = \vec{F}_{cp} \Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_{cp} - \vec{G}$. Astfel $\vec{M}_{\vec{R},0} = \vec{M}_{F_{cp},0} - \vec{M}_{G,0}$, iar scalar

$M_{R,0} = F_{cp}\ell\cos\alpha - mg\ell\sin\alpha = m\ell\sin\alpha(4\pi^2 n^2 \ell\cos\alpha - g) = 12{,}84$ Nm.

**d.** Cum $M_{R,0} = 0 \Rightarrow \dfrac{4\pi^2}{T^2}\ell\cos\alpha - g = 0$, deoarece $n = \dfrac{1}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\alpha}{g}} \approx 1{,}85$ s

**26.** Studiem echilibru de rotaţie al corpului. Rezultanta forţelor joacă rol de forţă centripetă, astfel că: $\vec{N} + \vec{G} + \vec{F}_f = \vec{F}_{cp}$.




Proiectăm relaţia vectorială pe axele de coordonate. Pe *Ox*: $F_f\cos\alpha - N\sin\alpha = F_{cp}$ şi pe *Oy*: $F_f\sin\alpha + N\cos\alpha - G = 0$. Cum $F_f = \mu N \Rightarrow$

$\mu N\cos\alpha - N\sin\alpha = m\omega^2 R$ (1) şi

$\mu N\sin\alpha + N\cos\alpha = mg$ (2)

Împărţim relaţiile (1) la (2) obţinem:

$$\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\omega^2 R}{g} \Rightarrow \mu = \frac{g\sin\alpha + \omega^2 R\cos\alpha}{g\cos\alpha - \omega^2 R\sin\alpha} \approx 0{,}8.$$

## Bibliografie:


**1.** Chiriță M., Davidescu D., Șoltuianu M., Bacalaureat la fizică, Editura Tamar, 2003
**2.** Rusu O., Chiriță M., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Niculescu, 2004
**3.** Hristev A., Fălie V., Manda D., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1996
**4.** Enescu G. și colectiv, Fizică manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1995
**5.** Rusu O., Trăistaru C., Galbură A., Dinică L., Chiriță M., Fizică Mecanică, Optică, Editura Corint, 2006
**6.** Hristev A., și colectiv, Probleme de fizică pentru clasele IX-X. Editura Didactică și Pedagogică, 1983
**7.** Cone G., Stanciu Gh., Tudorache Ș., Probleme de fizică pentru liceu (vol I și II), Editura All,1996
**8.** Vlăducă Gh. Și colectiv, Probleme de fizică pentru clasele XI-XII, Editura Didactică și Pedagogică, 1993
**9.** Hristev A., Probleme de fizică. Optică. Fizică atomică și nucleară, Editura ARH, 1992
**10.** Toader E., Spulber V., 555 Teste de optică, Editura Didactică și Pedagogică, 1989
**11.** Rusu O., Galbură A., Probleme de mecanică, Editura Niculescu,1994
**12.** Ionescu R., Onea C., Toma I., Fizică manual pentru clasa a IX-a, Editura Teora, 2000
**13.** Druică Z., Popescu A., Probleme de mecanică și acustică, Editura tehnică, 1974
**14.** Colectiv, Culegere de probleme pentru admiterea în învățământul superior, Editura Științifică și Enciclopedică, 1989
**15.** Colectiv, Teste de fizică, Editura Politehnica Press, 2002
**16.** Colectiv, Societatea de Științe Fizice și Chimice, 1986
**17.** Hristev A., Probleme de fizică pentru învățământul mediu, Editura Icar, 1991
**18.** Probleme date la examenul de bacalaureat