

**Examenul de bacalaureat 2012**

**Proba E.c)**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 7**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați numărul real  $m$  știind că mulțimile  $A = \{2\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$  sunt egale.
- 5p** 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația  $3^{\log_3 x} < 1$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.
- 5p** 5. Determinați numărul real  $a$  pentru care vectorii  $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$  și  $\vec{v} = a\vec{i} + (2a - 3)\vec{j}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = AC = 5$  și  $BC = 6$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. În  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & i \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ , unde  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Calculați  $\det(A(\pi))$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(A(x))^{2012} = I_3$ .
2. Pe mulțimea  $G = (0, 1)$  se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $e = \frac{1}{2}$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** b) Arătați că orice element din mulțimea  $G$  este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Demonstrați că  $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{x} - 1$  este un izomorfism de la grupul  $(G, \circ)$  la grupul  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
- 5p** a) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** c) Arătați că funcția  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(\sqrt{x})$  este strict crescătoare pe  $(0, +\infty)$ .
2. Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se consideră numerele  $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x^2} dx$  și  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ .
- 5p** a) Calculați  $J_1$ .
- 5p** b) Calculați  $I_1$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $J_{2n} - J_{2n+2} = I_{2n}$  pentru orice număr natural nenul  $n$ .