Bacalaureat

Proba scrisa Bacalaureat olimpici 2012 M2

Subiecte rezolvate –Bacalaureat olimpici 2012, M2

Gasiti mai jos rezolvarea detaliata a subiectelor Bacalaureat olimpici 2012, M2

<u>Subiectul I</u>

1. Intr-o progresie aritmetica $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4 = 7$ si $a_9 = 22$. Calculati a_{14}.

Rezolvare:
Stim ca $a_k = a_p + (k-p)r \Rightarrow a_9 = a_4 + (9-4)r \Rightarrow 22 = 7 + 5r \Rightarrow 5r = 15 \Rightarrow r = 3$.
$a_{14} = a_9 + (14-9)r \Rightarrow a_{14} = 22 + 5\cdot 3 = 22 + 15 = 37$.

2. Determinati coordonatele punctului de intersectie a graficelor functiilor $f: R \to R$, $f(x) = x - 3$ si $g: R \to R$, $g(x) = 5 - x$.

Rezolvare:
Coordonatele punctului de intersectie a graficelor functiilor f si g sunt date de solutiile sistemului

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$2y = 2 \Rightarrow y = 1$
Deci punctul de intersectie al celor doua functii este A(4, 1)

3. Rezolvati in multimea numerelor reale ecuatia $2^{3-x} = \frac{1}{4}$.

Rezolvare:

$$2^{3-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{3-x} = \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow 2^{3-x} = 2^{-2} \Leftrightarrow 3 - x = -2 \Leftrightarrow x = 5.$$

4. Determinati cate numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele multimii $M = \{0, 1, 2, 3\}$.

Rezolvare:
Numarul de 3 cifre distincte este de forma $\overline{abc}$ cu $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3\}$, $a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$ si $a \neq 0$.

Solutia 1:
In acest caz a poate lua doar 3 valori 1, 2 si 3 (nu poate lua valoarea 0).
Pentru a fixat b poate lua tot 3 valori (nu poate lua valoarea lui a dar poate lua valoarea 0).
Pentru a si b fixate c poate lua 2 valori.
Deci se pot foma $3\cdot 3\cdot 2 = 18$ astfel de numere.

Solutia 2:
Numarul tripletelor (a, b, c) cu a, b, c, distincte, care se pot forma din cifrele 0, 1, 2 si 3 este egal cu A_4^3. Din acest numar trebuie eliminate cele care incep cu cifra 0 care sunt in numar de A_3^2.
Deci numarul acestor numere este $A_4^3 - A_3^2$ = 4·3·2 - 3·2 = 24 – 6 = 18.

5. Intr-un reper cartezian xOy se considera punctele A(1, 2) si B(3, 0). Determinati coordonatele simetricului punctului A fata de punctul B.

Rezolvare:
Fie $C(x_c, y_c)$ simetricul lui A fata de B. In acest caz B este mijlocul segmentului (AC)$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \dfrac{1 + x_C}{2} \\ 0 = \dfrac{2 + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 + x_C \\ 0 = 2 + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow C(5, -2).$$

6. Calculati lungimea laturii BC a triunghiului ABC, stiind ca AB = 6, AC = 5 si m($\widehat{BAC}$)= 60°.

Rezolvare:
Aplicand teorema cosinusului avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot \cos A \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC^2 = 36 + 25 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot \frac{1}{2} \Rightarrow BC^2 = 61 - 30 = 31 \Rightarrow BC = \sqrt{31}.$$

<u>Subiectul II</u>

1. Se considera sistemul de ecuatii $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$**, unde $a \in R$.**

a) Calculati determinantul matricei asociate sistemului.
b) Determinati valorile reale ale lui a pentru care matricea asociata sistemului este inversabila .
c) Pentru a = 0, rezolvati sistemul de ecuatii.

Rezolvare:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1 - 2 - 2 - 1 - a = -4 - 2a.$

b) A este inversabila $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow -4 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow 2a \neq -4 \Leftrightarrow a \neq -2 \Rightarrow a \in R - \{-2\}.$

c) Daca a = 0 avem sistemul $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -4 - 2\cdot 0 = -4$

Folosim regula lui Cramer:

$$d_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 2 - 4 - 0 - 0 = -4 \Rightarrow x = \frac{d_x}{\det(A)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 4 + 2 - 2 - 0 = -4 \Rightarrow y = \frac{d_y}{\det(A)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 1 - 0 - 1 - 2 = -4 \Rightarrow z = \frac{d_z}{\det(A)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Deci S = {(1, 1, 1)}.

2. Pe multimea numerelor reale se defineste legea de compozitie asociativa $x*y = x + y - 1$.

a) Aratati ca $x*1 = x$ pentru orice $x \in R$.

b) Rezolvati in multimea numerelor reale ecuatia $x*x*x = 4$

c) Determinati numarul natural n, $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 * C_n^2 = 14$

Rezolvare:

a) Fie $x \in R$ un numar oarecare.

$x*1 = x + 1 - 1 = x$. Deci $x*1 = x$ pentru orice $x \in R$.

b) $x*x*x = 4 \Leftrightarrow (x + x - 1)*x = 4 \Leftrightarrow (2x - 1)*x = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 + x - 1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2 \in R$.

c) $C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow C_n^1 * C_n^2 = 14 \Leftrightarrow n * \frac{n(n-1)}{2} = 14 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} - 1 = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n + n^2 - n - 2 = 28 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0,\ \Delta = 1 + 120 = 121,\ n_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{2} \Rightarrow n_1 = -6 \notin N,\ n_2 = 5$

Deci n = 5.

<u>Subiectul III</u>

1. Se considera functia $f: (0, +\infty) \to R,\ f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.

a) Aratati ca $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Aratati ca functia f este descrescatoare pe $(0, +\infty)$.

c) Determinati ecuatia asimptotei oblice la graficul functiei $g: (0, +\infty) \to R,\ g(x) = \frac{e^{2x} f^2(x)}{x}$.

Rezolvare:

a) $f'(x) = \frac{(x+1)' e^x - (x+1)(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x - 1)}{e^{2x}} = -\frac{x}{e^x}$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-\frac{x}{e^x}}{\frac{x+1}{e^x}} = -\frac{x}{x+1}$$ **pentru orice $x \in (0, +\infty)$.**

b) Studiem semnul lui f'(x) pe (0, $+\infty$)..

f'(x) = $-\dfrac{x}{e^x} < 0\ \forall x \in (0, +\infty).\Rightarrow$ f este strict descrescatoare pe (0, $+\infty$)..

c) g(x) = $\dfrac{e^{2x}f^2(x)}{x} = \dfrac{e^{2x}\left(\dfrac{x+1}{e^x}\right)^2}{x} = \dfrac{e^{2x}\dfrac{(x+1)^2}{e^{2x}}}{x} = \dfrac{(x+1)^2}{x} = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$.

Ecuatia asimptotei oblice este y = mx + n, unde

m = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2} = 1$,

n = $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1-x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x} = 2$

Deci y = x + 2 este ecuatia asimptotei oblice la graficul functiei g, la $+\infty$.

2. Se considera functia f: R$\to$R, f(x) = $x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x$.

a) Determinati primitiva F: R$\to$R a functiei f, care verifica relatia F(0) = 1.

b) Calculati $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}dx$.

c) Calculati volumul corpului obtinut prin rotatia, in jurul axei Ox, a graficului functiei g: [1, 2] $\to$ R, g(x) = f(x) - x^{2012} - x^{2011}.

Rezolvare:

a) $\int (x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x)dx = \dfrac{x^{2013}}{2013} + \dfrac{x^{2012}}{2012} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ + C este familia de primitive a functiei f.

Fie F(x)= $\dfrac{x^{2013}}{2013} + \dfrac{x^{2012}}{2012} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ + C primitiva care verifica relatia F(0) = 1$\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \dfrac{0^{2013}}{2013} + \dfrac{0^{2012}}{2012} + \dfrac{0^3}{3} + \dfrac{0^2}{2}$ + C = 1$\Rightarrow$ C = 1. Deci F(x) = $\dfrac{x^{2013}}{2013} + \dfrac{x^{2012}}{2012} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ + 1 este primitiva cautata.

b) $\dfrac{f(x)}{x+1} = \dfrac{x^{2012}+x^{2011}+x^2+x}{x+1} = \dfrac{x^{2011}(x+1)+x(x+1)}{x+1} = \dfrac{(x^{2011}+x)(x+1)}{x+1} = x^{2011} + x$

$\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}dx = \int_0^1 (x^{2011}+x)dx = \left(\dfrac{x^{2012}}{2012} + \dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2012} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+1006}{2012} = \dfrac{1007}{2012}$

c) g(x) = f(x) - x^{2012} - x^{2011} = $x^{2012} + x^{2011} + x^2 + x - x^{2012} - x^{2011}$ = $x^2 + x$

V = $\pi\int_1^2 g^2(x)dx = \pi\int_1^2 (x^2+x)^2dx = \pi\int_1^2 (x^4+2x^3+x^2)dx = \pi\left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$

$= \pi\left(\dfrac{32}{5} + \dfrac{32}{4} + \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}\right) = \pi\left(\dfrac{31}{5} + 8 + \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{186+240+70-15}{30}\right) = \dfrac{481\pi}{30}$.