Admitere * Universitatea Politehnica din Bucureşti 2022
Disciplina: Algebră şi Elemente de Analiză Matematică
Varianta S

1. Suma pătratelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 - 5x + 6 = 0$ este: **(9 pct.)**

   a) 13; b) 10; c) 14; d) 4; e) 8; f) 16.

   Soluţie. Rezolvând ecuaţia, obţinem

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \right\} = \left\{ \frac{5 \pm 1}{2} \right\} \Leftrightarrow x \in \{2, 3\},$$

   deci $x_1^2 + x^2 = 2^2 + 3^2 = 13$. *Altfel.* Relaţiile Viète asociate ecuaţiei sunt $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases}$, deci $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 25 - 12 = 13$.

2. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $9^x - 8 \cdot 3^{x+1} - 81 = 0$ este: **(9 pct.)**

   a) $\{3\}$; b) $\{-1\}$; c) $\{2\}$; d) $\{-3\}$; e) $\{-2\}$; f) $\varnothing$.

   Soluţie. Efectuând substituţia $y = 3^x > 0$, ecuaţia dată se rescrie

$$9^x - 8 \cdot 3^{x+1} - 81 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 24y - 81 = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{ \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2} \right\} = \{12 \pm 15\} = \{-3, 27\}.$$

   Rădăcina $y = -3$ nu convine (datorită condiţiei $y = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Pentru $y = 27 = 3^3$, obţinem $y = 3^x \Leftrightarrow 3^3 = 3^x \Leftrightarrow x = 3$. Deci ecuaţia dată are o singură soluţie, $x = 3$.

3. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{2x - 4} + x = 2$ este: **(9 pct.)**

   a) $\{2\}$; b) $\{0, 1\}$; c) $\{2, 4\}$; d) $\{3\}$; e) $\{0, 4\}$; f) $\{1, 4\}$.

   Soluţie. Ecuaţia dată $\sqrt{2x - 4} + x = 2$ conţine un radical. Din condiţia de existenţă a radicalului avem $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$. Dar din pozitivitatea radicalului şi ecuaţie, obţinem $0 \leq \sqrt{2x - 4} = 2 - x$, deci $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$. Din cele două relaţii obţinute, rezultă $x \in (-\infty, 2] \cap [2, \infty) \Leftrightarrow x = 2$. *Altfel.* Din condiţia de existenţă a radicalului avem $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$. Ridicând la pătrat ecuaţia, obţinem

$$\sqrt{2x - 4} + x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 4} = 2 - x \Leftrightarrow 2x - 4 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 4\}.$$

   Constatăm că $x = 4$ nu satisface ecuaţia dată (deci nu convine), pe când $x = 2$ satisface ecuaţia, deci este singura soluţie a acesteia.

4. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Să se calculeze $f'(1)$. **(9 pct.)**

   a) 5; b) 4; c) 3; d) 2; e) 11; f) 14.

   Soluţie. Derivata funcţiei $f(x) = x^3 + 2x - 1$ este $f'(x) = 3x^2 + 2$, deci $f'(1) = 3 + 2 = 5$.

5. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x + ay + az = 1 \\ 3x + (2a - 1)y + az = a \\ (a + 3)x + ay + az = 3a - 2 \end{cases}$. Să se afle $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat. **(9 pct.)**

   a) $a = 1$; b) $a = 0$; c) $a = -1$; d) $a = 4$; e) $a = 2$; f) $a = -2$.

   Soluţie. Sistemul dat, $\begin{cases} 2x + ay + az = 1 \\ 3x + (2a - 1)y + az = a \\ (a + 3)x + ay + az = 3a - 2 \end{cases}$ are discriminantul (determinantul matricei coeficienţilor) $\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 3 & 2a-1 & a \\ a+3 & a & a \end{vmatrix} = -a(a - 1)(a + 1)$, iar condiţia de sistem compatibil nedeterminat elimină cazul când sistemul este Cramer (cazul determinantului nenul). Deci este necesară anularea determinantului, care are loc doar dacă $a \in \{0, 1, -1\}$. Examinăm cele trei situaţii posibile. (i) Dacă $a = 0$, pentru rangul dat de minorul $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, determinantul caracteristic al ecuaţiei secundare (a treia ecuaţie), este $\Delta_{car,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, sistem incompatibil (conform teoremei Rouche), deci valoarea $a = 0$ nu convine. (ii) Dacă $a = 1$, pentru rangul dat de minorul $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, determinantul caracteristic al ecuaţiei secundare (a treia ecuaţie), este $\Delta_{car,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, sistem compatibil (conform teoremei Rouche), cu rangul 2 mai mic decât numărul de necunoscute 3, deci sistem compatibil nedeterminat, deci valoarea $a = 1$ convine. (iii) Dacă $a = -1$, pentru rangul dat de minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, determinantul caracteristic al ecuaţiei secundare (a treia ecuaţie), este $\Delta_{car,3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, sistem incompatibil (conform teoremei Rouche), deci valoarea $a = -1$ nu convine. În concluzie, singura valoare a parametrului a care produce sistem compatibil nedeterminat este $a = 1$.

6. Să se determine numărul funcţiilor $f : \{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\} \to \{0, 1, 2\}$, care au proprietatea $f(0) + f(1) + \ldots + f(10) = 3$. **(9 pct.)**

   a) 275; b) 444; c) 317; d) 255; e) 257; f) 313.

   Soluţie. Examinând mulţimea valorilor posibile pentru funcţiile $f : \{0, 1, \ldots, 10\} \to \{0, 1, 2\}$, constatăm că egalitatea $f(0)+f(1)+\ldots+f(10) = 3$ se realizează doar în următoarele două situaţii: (i) $2+1+0+\ldots 0 = 3$ (cu termenii sumei din stânga ordonaţi arbitrar), numărul de cazuri favorabile fiind $n_{2+1} = A_{11}^2 = 11 \cdot 10 = 110 =$ (numărul de selectări posibile ale cifrei 2 dintre alternativele $\{f(0), \ldots, f(10)\}$) $\times$ (numărul de alternative distincte dintre cele 9 rămase după fixarea valorii 2, care conţin valoarea 1 pe o singură poziţie - restul fiind nule). (ii) $1 + 1 + 1 + 0 + \ldots 0 = 3$ (cu termenii sumei din stânga ordonaţi arbitrar), numărul de cazuri favorabile fiind $n_{1+1+1} = C_{11}^3 = \frac{11!}{3! \cdot (11-3)!} = 165 =$ (numărul de selectări posibile ale tripletelor de argumente care produc valorile $1, 1, 1$ din mulţimea $\{f(0), \ldots, f(10)\}$). Reuniunea situaţiilor favorabile descrise mai sus conduce la un număr total de $n_{2+1} + n_{1+1+1} = 110 + 165 = 275$ cazuri favorabile.

7. Dacă $\alpha = \log_{15} 5$, să se calculeze $\log_{15}(1.8)$ în funcţie de α. **(9 pct.)**

   a) $2 - 3\alpha$; b) $3 + 2\alpha$; c) $3 - 4\alpha$; d) $2 + 5\alpha$; e) $3 + 4\alpha$; f) $1 + 2\alpha$.

   Soluţie. Folosim formula $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (pentru toate valorile numerelor a, b, c pentru care logaritmii au sens). Notând $x = \log_5 3$ şi convertind α în baza 5, obţinem $\alpha = \log_{15} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5(3 \cdot 5)} = \frac{\log_5 5}{\log_5 3 + \log_5 5} = \frac{1}{\log_5 3 + 1} = \frac{1}{x+1}$, deci $x = \frac{1}{\alpha} - 1$. Convertind în baza 5 expresia din enunţ, obţinem

$$\log_{15} 1.8 = \frac{\log_5 1.8}{\log_5 15} = \frac{\log_5 18/10}{\log_5 15} = \frac{\log_5 9/5}{\log_5(5 \cdot 3)} = \frac{\log_5 3^2 - \log_5 5}{\log_5 5 + \log_5 3} = \frac{2\log_5 3 - 1}{1 + \log_5 3} = \frac{2x - 1}{1 + x} = \frac{2(\frac{1}{\alpha} - 1) - 1}{1 + \frac{1}{\alpha} - 1} = 2 - 3\alpha.$$

8. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţia continuă care verifică relaţia $3f(x) + 5f(-x) = 4x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul real a astfel încât $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{x^2+4} dx = \frac{3\pi}{32}$. **(9 pct.)**

   a) $a = 2$; b) $a = 4$; c) $a = -2$; d) $a = 3$; e) $a = 1$; f) $a = 7$.

   Soluţie. Considerând relaţia dată şi cea care se obţine prin înlocuirea lui x cu $-x$, obţinem sistemul $\begin{cases} 3f(x) + 5f(-x) = 4x + 3 \\ 5f(x)3f(-x) = -4x + 3 \end{cases}$, un sistem compatibil determinat Cramer în necunoscutele $f(x)$ şi $f(-x)$. Obţinem $f(x) = -x + \frac{3}{8}$, iar integrala din enunţ devine

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \frac{f(x)dx}{x^2+4} &= \int_{-a}^{a} \frac{-x+\frac{3}{8}}{x^2+4} dx = \int_{-a}^{a} \frac{-x}{x^2+4} dx + \int_{-a}^{a} \frac{3/8}{x^2+4} dx = -\frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \frac{2x}{x^2+4} dx + \frac{3}{8} \int_{-a}^{a} \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4| \Big|_{-a}^{a} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_{-a}^{a} = 0 + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

   Egalitatea din enunţ devine deci $\frac{3}{8} \operatorname{arctg} \frac{a}{2} = \frac{3\pi}{32} \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4}$, de unde rezultă $\frac{a}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow a = 2$.

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|e^x}{e^x - e}$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată ? **(9 pct.)**

   a) f are trei puncte de extrem local; b) f are două puncte de extrem local; c) f are un punct de extrem local; d) imaginea funcţiei f este $\mathbb{R}$; e) f este derivabilă în 0; f) graficul funcţiei f are două asimptote oblice.

   Soluţie. Pentru $x < 0$, avem $f(x) = \frac{-xe^x}{e^x - e}$, f este derivabilă iar $f'(x) = 0$ are o soluţie în intervalul $(-\infty, 0)$, punct în care f' este strict crescătoare, deci punct de minim local. Pentru $x > 0$, avem $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - e}$ iar $f'(x) = 0$ are o soluţie în intervalul $(0, \infty)$, punct în care f' este strict crescătoare, deci punct de minim local. Funcţia f este continuă în $x = 0$, dar $f'(0_-) = \frac{1}{e-1} > 0$ şi $f'(0_+) = \frac{-1}{e-1} < 0$, deci $x = 0$ este punct unghiular de maxim local. În ansamblu, f are trei puncte distincte de extrem local $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ (unde $x_1 < x_2 = 0 < 1 < x_3$). Un tabel simoptic sumar al variaţiei funcţiei f este următorul:

x	$-\infty$		$x_1 < 0$		$x_2 = 0$		1		$x_3 > 1$		∞
$f(x)$	0_-	$\searrow$	$f(x_1) < 0$	$\nearrow$	$f(x_2) = 0$	$\searrow$	$-\infty \| +\infty$	$\searrow$	$f(x_3) > 1$	$\nearrow$	∞

Observaţie. Variantele d), e), f) sunt false. Pentru d), putem verifica $Im(f) \neq \mathbb{R}$; mai exact, avem $Im(f) \not\supset (0,1)$, deoarece $f(x) \leq 0, \forall x < 1$ şi $f(x) > 1, \forall x > 1$ ($f(x) = x \cdot \frac{1}{1-e^{x-1}} > 1$ fiind produs de factori supraunitari). Pentru e), observăm că f' este derivabilă pe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, f este continuă în în 0 dar $f'(0_-) \neq f'(0_+)$ ($x = 0$ este punct unghiular pentru f, deci f nu este derivabilă în $x = 0$). Pentru f), avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0_-$, care nu este asimptotă oblică, deci f nu poate avea două asimptote oblice (independent de comportarea funcţiei către $+\infty$). Constatăm că eliminând variantele false d), e), f), rămân primele 3 variante, care toate necesită aflarea numărului exact de puncte de extrem. Deci examinarea primelor trei variante este esenţială.

10. Să se afle $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $x+1$, $x+7$, $x+25$ (în această ordine) să fie în progresie geometrică. **(9 pct.)**

a) $x = 2$; b) $x = 4$; c) $x = -4$; d) $x = 6$; e) $x = 0$; f) $x = 11$.

Soluţie. Condiţia de progresie geometrică petnru trei termeni succesivi revine la faptul că pătratul termenului din mijloc este egal cu produsul celorlalţi doi termeni, deci $(x+7)^2 = (x+1)(x+25) \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$. *Altfel.* Raţia r a progresiei geometrice este raportul dintre un termen al progresiei şi termenul precedent, deci $r = \frac{x+7}{x+1} = \frac{x+25}{x+7}$. Din ultima egalitate, obţinem $(x+7)^2 = (x+1)(x+25) \Leftrightarrow 12x = 24 \Leftrightarrow x = 2$.