UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Coordenação do Curso de Matemática (Licenciatura)
Coordenação Adjunta de Trabalho de Curso

Relatório do Trabalho de Curso I

Cálculo Variacional

EDUARDO JOSÉ DE OLIVEIRA
Orientador: Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira

ANÁPOLIS

2019

ESTRUTURA DO TC

A estrutura prevista para este trabalho de curso é a seguinte:

Capítulo 1: Introdução

Capítulo 2: Contexto Histórico

Capítulo 3: Cálculo Variacional

Capítulo 4: Aplicações

Referências

Apêndice A: Regra de Leibniz

ATIVIDADES CUMPRIDAS DO CRONOGRAMA DO TC

Atividades desenvolvidas	Bimestre de 2019		
	1º	2º	3º
Levantamento Bibliográfico	X	X	X
Redação do Relatório do Trabalho de Curso I.		X	X
Apresentação do relatório do Trabalho de Curso I			X
Aplicação no ensino médio			
Estudo dos recursos computacionais			
Aplicação Física			
Redação do Relatório do Trabalho de Curso II			
Revisão			
Revisão Final			

RESULTADOS PARCIAIS

Os resultados parciais são apresentados nas páginas subsequentes.

1 Contexto Histórico

Para elucidar a história do Cálculo Variacional é importante mostrar um pouco da história dos máximos e mínimos de funções, problema pertinente ao cálculo diferencial, para, então, adentrar aos problemas de máximos e mínimos de funcionais, problema pertinente ao cálculo variacional.

1.1 Máximos e Mínimos

Os problemas de máximo e mínimo são corriqueiros na vida cotidiana, por exemplo, quando se quer encontrar o caminho com menor distância entre dois lugares para se caminhar uma menor distância, dentre vários outros problemas mais elaborados. Para esse exemplo específico não é necessário o uso de matemática avançada, porém, quanto mais complexidades são adicionadas aos problemas, mais a matemática é necessária para a resolução, exata ou aproximada. Para simplificar estes processos, surgem os métodos para o cálculo de máximos e mínimos das funções.

Uma das primeiras formulações matemáticas próxima das atuais para os problemas de máximos e mínimos foi feita por Pierre de Fermat (1601-1665) em 1629 considerando curvas $y = f(x)$. Ele fez comparações de $f(x)$ e $f(x+E)$ para pontos próximos. Esses valores geralmente são diferentes, porém, próximo de máximos ou mínimos a diferença se torna pequena. Deste modo, para achar os pontos de máximo ou mínimo, Fermat fazia

$$\frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

e, após realizar a divisão, considerava $E = 0$. Após considerar o valor de E igual a 0, Fermat igualava a expressão obtida a 0, de onde conseguia extrair os valores das abscissas dos pontos de máximos e mínimos da função. (BOYER, 1996)

O que Fermat fez, de fato, foi igualar a primeira derivada de uma função a 0. É importante ressaltar que esse método utilizado por Fermat veio antes mesmo da invenção do cálculo diferencial por Isaac Newton (1642-1727) em 1665-1666 e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) em 1676, de forma independente. (BOYER, 1996)

1.2 O Cálculo Variacional

O ponto de partida do cálculo variacional se deu com Johann Bernoulli, em 1696, com a publicação do problema da braquistócrona no jornal científico *Acta Eruditorium*. (COURANT; ROBBINS, 1996)

O problema pode ser enunciado como:

> Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade (LIMA, 2004, p. 3).

O próprio Johann Bernoulli foi um dos matemáticos que solucionou o problema da braquistócrona. Ele retardou a publicação da sua solução para estimular os matemáticos do seu tempo a testarem suas habilidades nesse novo tipo de problema matemático (COURANT; ROBBINS, 1996). Além de Johann Bernoulli, soluções independentes foram encontradas por diversos matemáticos, como Jacob Bernoulli (1697), L'Hôpital (1697), Leibniz (1697), e Newton (1697) (STILLWELL, 2010).

A solução de Jacob Bernoulli considerava o aspecto da curva variável, sendo considerado o primeiro grande passo para o desenvolvimento do cálculo variacional (STILLWELL, 2010). Nesse problema, a quantidade a ser minimizada depende de uma curva e não apenas de uma váriavel real (COURANT; ROBBINS, 1996), diferentemente dos problemas relacionados ao cálculo diferencial, o que torna necessária a construção de novas ferramentas matemáticas.

Os métodos para a resolução de problemas deste tipo eram específicos com adaptações para cada caso, sendo que os métodos gerais para a resolução só foram desenvolvidos com o envolvimento dos matemáticos Euler e Lagrange nos estudos desses problemas (COURANT; ROBBINS, 1996).

2 Cálculo Variacional

O problema pertinente ao cálculo variacional é o de encontrar uma função diferenciável até segunda ordem $y = y(x)$ satisfazendo $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, com x_1, x_2, y_1 e y_2 dados, minimizando ou maximizando a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{2.1}$$

Para para encontrar a equação $y = y(x)$ procurada, são necessárias algumas ferramentas, dentre as quais a abordada neste estudo é a equação de Euler-Lagrange. Os conceitos, definições e resultados apresentados neste capítulo foram elaboradas segundo Lima (2004) e Assan (2003).

2.1 Equação de Euler-Lagrange

De ínicio, é preciso demonstrar um lema que servirá como base para a dedução da equação de Euler-Lagrange.

Lema 2.1. *Sejam $x_1 < x_2$ fixos e $G(x)$ uma função contínua particular para $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Se*

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0$$

para cada função diferenciável $\eta(x)$ tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, concluímos que $G(x) = 0$, para todo x de modo que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Demonstração. Suponha que existe $\overline{x}$ tal que $x_1 < \overline{x} < x_2$ e $G(\overline{x}) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $G(\overline{x}) > 0$. Como G é contínua, existe uma vizinhança $\overline{x_1} \leqslant \overline{x} \leqslant \overline{x_2}$ onde $G(x) > 0$ em toda a vizinhança.

Podemos construir a seguinte função $\eta(x)$:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x_1 \leqslant x < \overline{x_1} \\ (x - \overline{x_1})^2(x - \overline{x_2})^2 & \text{para } \overline{x_1} \leqslant x \leqslant \overline{x_2} \\ 0 & \text{para } \overline{x_2} < x \leqslant x_2 \end{cases}$$

e então reescrever a integral do seguinte modo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_{\overline{x_1}}^{\overline{x_2}} (x - \overline{x_1})^2(x - \overline{x_2})^2 G(x)dx.$$

Como $G(x) > 0$ em $\overline{x_1} \leqslant x \leqslant \overline{x_2}$, a integral do lado direito é estritamente positiva, contradizendo a hipótese. Portanto, não vale para todo $\eta(x)$, de onde $G(\overline{x}) = 0$. A demonstração considerando $G(\overline{x}) < 0$ é análogo. □

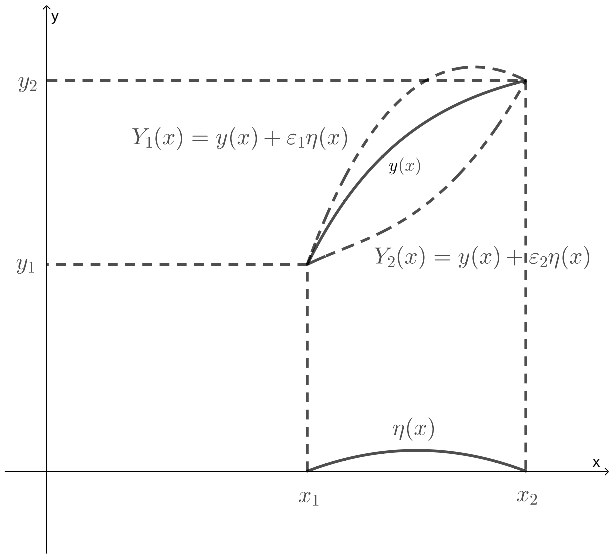
Suponha x_1, x_2, y_1, y_2 dados, f uma função de x, y e y' duas vezes diferenciável. É preciso construir uma família de funções aproximadoras, que será denotada por $Y(x)$. Essa família é definida por:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{2.2}$$

onde $\eta(x)$ é uma função diferenciável arbitrária para a qual $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. O número ε é o parâmetro da família. É possível escrever, também, a derivada de Y como

$$Y'(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x). \tag{2.3}$$

Figura 2.1 – Representação gráfica das funções aproximadoras.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Reescrevendo a integral (2.1) utilizando as funções aproximadoras definidas, tem-se

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')dx. \tag{2.4}$$

Note que a função procurada $y(x)$ é o membro da família $Y(x)$ quando $\varepsilon = 0$. Ou seja, se $\varepsilon = 0$ pode-se substituir Y e Y' por y e y', respectivamente. Deste modo, a integral (2.4) fornece os mesmos extremos que a (2.1) quando $\varepsilon = 0$.

A condição necessária para que uma função de uma variável real tenha um extremo em algum ponto é que sua primeira derivada se anule nesse ponto. Então, é necessário que

$$I'(0) = 0. \tag{2.5}$$

Utilizando a Regra de Leibniz (Teorema A.2 do Apêndice A), a derivada de (2.4) pode ser escrita como

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, Y, Y')dx,$$

e, aplicando regra da cadeia, obtêm-se

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx,$$

onde o primeiro termo do integrando é nulo, dado ao fato de que x independe de ε, portanto $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0$, ou seja,

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx. \tag{2.6}$$

Derivando (2.2) em função de ε, tem-se $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon\eta)$, de onde conclui-se que $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta$, pois y e η independem de ε. O mesmo acontece com (2.3), donde verifica-se que $\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'$. Deste modo, de (2.6), obtêm-se a integral

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\eta + \frac{\partial f}{\partial Y'}\eta' \right) dx.$$

Para calcular $I'(0)$, tem-se que $\varepsilon = 0$ e, então, podemos trocar Y e Y' por y e y', respectivamente, obtendo

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) dx$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx.$$

Integrando o segundo membro, por partes, tomando $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$ e $dv = \eta' dx$ de onde obtêm-se $du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$ e $v = \eta$, portanto,

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \left(uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v du \right)$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx \right) \tag{2.7}$$

Sabe-se que $\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$, devido ao fato de que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, portanto, (2.7) pode ser reescrita como

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx$$

que, a partir da condição necessária (2.5), deve ser igualada a 0:

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx = 0.$$

permitindo, pelo Lema 2.1, obter a seguinte equação:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \tag{2.8}$$

A equação diferencial parcial (2.8) é chamada de equação de Euler-Lagrange e permite encontrar uma função f que maximiza ou minimiza a integral (2.1).

Apêndices

APÊNDICE A – Regra de Leibniz

Para encontrar a equação de Euler-Lagrande faz-se necessário derivar uma integral. A ferramenta matemática que permite tal feito é chamada de Regra de Leibniz (Ou Derivação sob o sinal de integral) e será enunciada e demonstrada neste Apêndice. O texto deste apêndice foi elaborado com base em Lima (2002).

Definição A.1. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Teorema A.1. *Seja $f : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, onde K é compacto. Fixemos $x_0 \in X$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \varepsilon$, seja qual for $\alpha \in K$.*

Demonstração. Suponha que o teorema não seja válido, então existiriam $\varepsilon > 0$ e sequências de pontos $x_k \in X$, $\alpha_k \in K$ tais que $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| \geqslant \varepsilon$. Passando a uma subsequência, se necessário e admitindo que $\lim \alpha_k = \alpha \in K$, devido ao fato de que o conjunto K é compacto.

Como, $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k} < x_k - x_0 < \frac{1}{k}$, então, $x_0 - \frac{1}{k} < x_k < x_0 + \frac{1}{k}$, e, como $\lim \left(x_0 - \frac{1}{k}\right) = x_0$ e $\lim \left(x_0 + \frac{1}{k}\right) = x_0$, então, $\lim x_k = x_0$. Devido a continuidade de f tem-se $\varepsilon \leqslant \lim |f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| = |f(x_0, \alpha) - f(x_0, \alpha)| = 0$, uma contradição, pois da hipótese $\varepsilon > 0$. $\square$

Teorema A.2 (Derivação sob o sinal de integral ou Regra de Leibniz)**.** *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $x \in U$, a função $x \longmapsto f(x, t)$ é integrável em $a \leqslant t \leqslant b$.*
2. *A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida é contínua.*

Então a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt,$$

possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

Demonstração. Considere

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} = \int_a^b \frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s}dt,$$

de onde subtraindo $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt$ de ambos os lados, tem-se

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt = \int_a^b \left[\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt \quad \text{(A.1)}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais, existe $\theta \in [0,1]$ de modo que

$$\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t),$$

onde $\theta \in [0,1]$ garante que θs esteja entre $]0,s[$, satisfazendo as condições do Teorema do Valor Médio. Assim, de (A.1) tem-se

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt. \quad \text{(A.2)}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua e $[a,b]$ é compacto, pelo Teorema A.1, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, de modo que

$$|s| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{(A.3)}$$

seja qual for $t \in [a,b]$.

Usando o fato de que $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$, obtêm-se

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| dt,$$

e, utilizando (A.3), tem-se a inequação

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dt$$

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta s e_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| < \varepsilon. \quad \text{(A.4)}$$

De (A.2) e (A.4), verifica-se que

$$|s| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt\right| < \varepsilon,$$

que é, a definição formal do limite

$$\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$$

$\square$

REFERÊNCIAS

ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003. Citado na página 4.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Citado na página 2.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is Mathematics?* 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 10. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002. v. 2. (Projeto Euclides, v. 2). Citado na página 9.

LIMA, G. L. de. *Cálculo Variacional*: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Campinas, Campinas, jun. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. 3. ed. New York: Springer, 2010. (Undergraduate Texts In Mathematics). Citado na página 3.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo Universidade Estadual de Goiás

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Coordenação do Curso de Matemática (Licenciatura)
Coordenação Adjunta de Trabalho de Curso

COMPROMISSO COM A EXECUÇÃO DO TRABALHO DE CURSO

Preenchimento Obrigatório pelo Acadêmico Orientado

1. O Professor tem mostrado comprometimento com a orientação do trabalho de curso?

   ( ) Sim ( ) Parcialmente ( ) Não

2. O Professor tem realizado encontros para discutir as atividades do trabalho de curso?

   ( ) Sim ( ) Parcialmente ( ) Não

Preenchimento Obrigatório pelo Professor Orientador

1. O Acadêmico tem mostrado comprometimento com a execução do trabalho de curso?

   ( ) Sim ( ) Parcialmente ( ) Não

2. O Acadêmico tem cumprido os prazos no desenvolvimento das atividades propostas?

   ( ) Sim ( ) Parcialmente ( ) Não

____________________________ ____________________________

Acadêmico Orientado Professor Orientador

Local: __________________________ Data: ____/____/2019