1 Contexto Histórico

Para elucidar a história do Cálculo Variacional é importante mostrar um pouco da história dos máximos e mínimos de funções, problema pertinente ao cálculo diferencial, para, então, adentrar aos problemas de máximos e mínimos de funcionais, problema pertinente ao cálculo variacional.

1.1 Máximos e Mínimos

Os problemas de máximo e mínimo são corriqueiros na vida cotidiana, por exemplo, quando se quer encontrar o caminho com menor distância entre dois lugares para se caminhar uma menor distância, dentre vários outros problemas mais elaborados. Para esse exemplo específico não é necessário o uso de matemática avançada, porém, quanto mais complexidades são adicionadas aos problemas, mais a matemática é necessária para a resolução, exata ou aproximada. Para simplificar estes processos, surgem os métodos para o cálculo de máximos e mínimos das funções.

Uma das primeiras formulações matemáticas próxima das atuais para os problemas de máximos e mínimos foi feita por Pierre de Fermat (1601-1665) em 1629 considerando curvas $y = f(x)$. Ele fez comparações de $f(x)$ e $f(x+E)$ para pontos próximos. Esses valores geralmente são diferentes, porém, próximo de máximos ou mínimos a diferença se torna pequena. Deste modo, para achar os pontos de máximo ou mínimo, Fermat fazia

$$\frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

e, após realizar a divisão, considerava $E = 0$. Após considerar o valor de E igual a 0, Fermat igualava a expressão obtida a 0, de onde conseguia extrair os valores das abscissas dos pontos de máximos e mínimos da função. (BOYER, 1996)

O que Fermat fez, de fato, foi igualar a primeira derivada de uma função a 0. É importante ressaltar que esse método utilizado por Fermat veio antes mesmo da invenção do cálculo diferencial por Isaac Newton (1642-1727) em 1665-1666 e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) em 1676, de forma independente. (BOYER, 1996)

1.2 O Cálculo Variacional

O ponto de partida do cálculo variacional se deu com Johann Bernoulli, em 1696, com a publicação do problema da braquistócrona no jornal científico *Acta Eruditorium.* (COURANT; ROBBINS, 1996)

O problema pode ser enunciado como:

> Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade (LIMA, 2004, p. 3).

O próprio Johann Bernoulli foi um dos matemáticos que solucionou o problema da braquistócrona. Ele retardou a publicação da sua solução para estimular os matemáticos do seu tempo a testarem suas habilidades nesse novo tipo de problema matemático (COURANT; ROBBINS, 1996). Além de Johann Bernoulli, soluções independentes foram encontradas por diversos matemáticos, como Jacob Bernoulli (1697), L'Hôpital (1697), Leibniz (1697), e Newton (1697) (STILLWELL, 2010).

A solução de Jacob Bernoulli considerava o aspecto da curva variável, sendo considerado o primeiro grande passo para o desenvolvimento do cálculo variacional (STILLWELL, 2010). Nesse problema, a quantidade a ser minimizada depende de uma curva e não apenas de uma váriavel real (COURANT; ROBBINS, 1996), diferentemente dos problemas relacionados ao cálculo diferencial, o que torna necessária a construção de novas ferramentas matemáticas.

Os métodos para a resolução de problemas deste tipo eram específicos com adaptações para cada caso, sendo que os métodos gerais para a resolução só foram desenvolvidos com o envolvimento dos matemáticos Euler e Lagrange nos estudos desses problemas (COURANT; ROBBINS, 1996).

2 Cálculo Variacional

O problema pertinente ao cálculo variacional é o de encontrar uma função diferenciável até segunda ordem $y = y(x)$ satisfazendo $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, com x_1, x_2, y_1 e y_2 dados, minimizando ou maximizando a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{2.1}$$

Para para encontrar a equação $y = y(x)$ procurada, são necessárias algumas ferramentas, dentre as quais a abordada neste estudo é a equação de Euler-Lagrange. Os conceitos, definições e resultados apresentados neste capítulo foram elaboradas segundo Lima (2004) e Assan (2003).

2.1 Equação de Euler-Lagrange

De ínicio, é preciso demonstrar um lema que servirá como base para a dedução da equação de Euler-Lagrange.

Lema 2.1. *Sejam $x_1 < x_2$ fixos e $G(x)$ uma função contínua particular para $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Se*

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = 0$$

para cada função diferenciável $\eta(x)$ tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, concluímos que $G(x) = 0$, para todo x de modo que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Demonstração. Suponha que existe $\overline{x}$ tal que $x_1 < \overline{x} < x_2$ e $G(\overline{x}) \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $G(\overline{x}) > 0$. Como G é contínua, existe uma vizinhança $\overline{x_1} \leqslant \overline{x} \leqslant \overline{x_2}$ onde $G(x) > 0$ em toda a vizinhança.

Podemos construir a seguinte função $\eta(x)$:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x_1 \leqslant x < \overline{x_1} \\ (x - \overline{x_1})^2(x - \overline{x_2})^2 & \text{para } \overline{x_1} \leqslant x \leqslant \overline{x_2} \\ 0 & \text{para } \overline{x_2} < x \leqslant x_2 \end{cases}$$

e então reescrever a integral do seguinte modo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)G(x)dx = \int_{\overline{x_1}}^{\overline{x_2}} (x - \overline{x_1})^2(x - \overline{x_2})^2 G(x)dx.$$

Como $G(x) > 0$ em $\overline{x_1} \leqslant x \leqslant \overline{x_2}$, a integral do lado direito é estritamente positiva, contradizendo a hipótese. Portanto, não vale para todo $\eta(x)$, de onde $G(\overline{x}) = 0$. A demonstração considerando $G(\overline{x}) < 0$ é análogo. $\square$

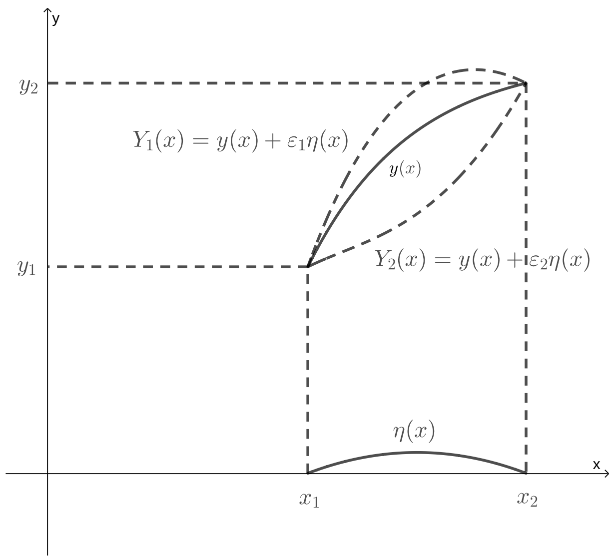
Suponha x_1, x_2, y_1, y_2 dados, f uma função de x, y e y' duas vezes diferenciável. É preciso construir uma família de funções aproximadoras, que será denotada por $Y(x)$. Essa família é definida por:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x), \tag{2.2}$$

onde $\eta(x)$ é uma função diferenciável arbitrária para a qual $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. O número ε é o parâmetro da família. É possível escrever, também, a derivada de Y como

$$Y'(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x). \tag{2.3}$$

Figura 2.1 – Representação gráfica das funções aproximadoras.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Reescrevendo a integral (2.1) utilizando as funções aproximadoras definidas, tem-se

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')dx. \tag{2.4}$$

Note que a função procurada $y(x)$ é o membro da família $Y(x)$ quando $\varepsilon = 0$. Ou seja, se $\varepsilon = 0$ pode-se substituir Y e Y' por y e y', respectivamente. Deste modo, a integral (2.4) fornece os mesmos extremos que a (2.1) quando $\varepsilon = 0$.

A condição necessária para que uma função de uma variável real tenha um extremo em algum ponto é que sua primeira derivada se anule nesse ponto. Então, é necessário que

$$I'(0) = 0. \tag{2.5}$$

Utilizando a Regra de Leibniz (Teorema A.2 do Apêndice A), a derivada de (2.4) pode ser escrita como

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, Y, Y')dx,$$

e, aplicando regra da cadeia, obtêm-se

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx,$$

onde o primeiro termo do integrando é nulo, dado ao fato de que x independe de ε, portanto $\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0$, ou seja,

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx. \tag{2.6}$$

Derivando (2.2) em função de ε, tem-se $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\varepsilon \eta)$, de onde conclui-se que $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta$, pois y e η independem de ε. O mesmo acontece com (2.3), donde verifica-se que $\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'$. Deste modo, de (2.6), obtêm-se a integral

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\eta + \frac{\partial f}{\partial Y'}\eta' \right) dx.$$

Para calcular $I'(0)$, tem-se que $\varepsilon = 0$ e, então, podemos trocar Y e Y' por y e y', respectivamente, obtendo

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) dx$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx.$$

Integrando o segundo membro, por partes, tomando $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$ e $dv = \eta' dx$ de onde obtêm-se $du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$ e $v = \eta$, portanto,

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \left(uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v du \right)$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx \right) \tag{2.7}$$

Sabe-se que $\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$, devido ao fato de que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, portanto, (2.7) pode ser reescrita como

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right)\eta dx$$

que, a partir da condição necessária (2.5), deve ser igualada a 0:

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \right)\eta dx = 0.$$

permitindo, pelo Lema 2.1, obter a seguinte equação:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{2.8}$$

A equação diferencial parcial (2.8) é chamada de equação de Euler-Lagrange e permite encontrar uma função f que maximiza ou minimiza a integral (2.1).

Referências

ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003. Citado na página 3.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Citado na página 1.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is Mathematics?* 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 10. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002. v. 2. (Projeto Euclides, v. 2). Citado na página 11.

LIMA, G. L. de. *Cálculo Variacional*: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Campinas, Campinas, jun. 2004. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. 3. ed. New York: Springer, 2010. (Undergraduate Texts In Mathematics). Citado na página 2.

Apêndices

APÊNDICE A – Regra de Leibniz

Para encontrar a equação de Euler-Lagrande faz-se necessário derivar uma integral. A ferramenta matemática que permite tal feito é chamada de Regra de Leibniz (Ou Derivação sob o sinal de integral) e será enunciada e demonstrada neste Apêndice. O texto deste apêndice foi elaborado com base em Lima (2002).

Teorema A.1. *Seja $f : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, onde K é compacto. Fixemos $x_0 \in X$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \varepsilon$, seja qual for $\alpha \in K$.*

Demonstração. Suponha que o teorema não seja válido, então existiriam $\varepsilon > 0$ e sequências de pontos $x_k \in X$, $\alpha_k \in K$ tais que $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| \geqslant \varepsilon$. Passando a uma subsequência, se necessário e adimitindo que $lim \alpha_k = \alpha \in K$. Como $lim x_k = x_0$, devido a continuidade de f tem-se $\varepsilon \leqslant lim|f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| = |f(x_0, \alpha) - f(x_0, \alpha)|$, uma contradição, pois da hipótese $\varepsilon > 0$. $\square$

Isso equivale a dizer que uma função f satisfazendo a hipótese do Teorema A.1 é uniformemente contínua.

Teorema A.2 (Derivação sob o sinal de integral ou Regra de Leibniz)**.** *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1. *Para todo $x \in U$, a função $x \longmapsto f(x, t)$ é integrável em $a \leqslant t \leqslant b$.*
2. *A i-ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida é contínua.*

Então a função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)dt,$$

possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

Demonstração. Considere

$$\frac{\varphi(x + se_i) - \varphi(x)}{s} = \int_a^b \frac{f(x + se_i, t) - f(x, t)}{s} dt,$$

de onde subtraindo $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt$ de ambos os lados, tem-se

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt = \int_a^b \left[\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt \quad (A.1)$$

Pelo **Teorema (do Valor Médio?)**, existe $\theta \in [0,1]$ de modo que

$$\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t),$$

donde pode-se escrever (A.1) como

$$\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt. \quad (A.2)$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é contínua e $[a,b]$ é compacto, pelo Teorema A.1, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, de modo que

$$|s| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (A.3)$$

seja qual for $t \in [a,b]$.

Usando o fato de que $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$, obtêm-se

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right| dt,$$

e, utilizando (A.3), pode-se escrever a inequação como

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dt,$$

ou, desenvolvendo a integral da direita, como

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta se_i,t) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\right] dt\right| < \varepsilon. \quad (A.4)$$

De (A.2) e (A.4), tem-se que

$$|s| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt\right| < \varepsilon,$$

que é, a definição formal do limite

$$\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt,$$

ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)dt.$$

□