UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Matemática

Uma Introdução ao Cálculo Variacional e ao Método de Rayleigh-Ritz com Aplicações em Python

Eduardo José de Oliveira
Orientador: Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira

2019

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Introdução

Segundo Lima (2004) e Campos (2017), um dos problemas pertinentes ao Cálculo Variacional é o de minimizar ou maximizar o funcional

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})dx,$$

isto é, encontrar uma função diferenciável até a ordem n, $y = y(x)$, satisfazendo $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, com x_1, x_2, y_1 e y_2 dados, tornando a integral um valor mínimo ou máximo.

Introdução

Uma das formas de se encontrar a função $y(x)$ corresponde na determinação da chamada equação de Euler-Lagrange associada ao problema e, então, sua resolução. Além disso, a satisfação das chamadas Condições de Contorno Naturais e Essenciais são necessárias para a correta determinação da função $y(x)$ exata.

Introdução

Uma das formas de se encontrar a função $y(x)$ corresponde na determinação da chamada equação de Euler-Lagrange associada ao problema e, então, sua resolução. Além disso, a satisfação das chamadas Condições de Contorno Naturais e Essenciais são necessárias para a correta determinação da função $y(x)$ exata.

Outra abordagem ao problema consiste na aproximação de $y(x)$ por meio de funções admissíveis.

Objetivos

1. introduzir, de forma clara e concisa, o Cálculo Variacional por meio do estudo das Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem de uma única variável, da função e das suas derivadas, até a ordem n desejada;
2. explicar o método de Rayleigh-Ritz, de forma simples e introdutória, desenvolvendo exemplos básicos;
3. apresentar formas de se utilizar a computação para os cálculos do método de Rayleigh-Ritz por meio da linguagem de programação Python.

Contexto Histórico

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
    - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.
  - Após a divisão, considerar $E = 0$.

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.
  - Após a divisão, considerar $E = 0$.
  - Por último, igualar o resultado a 0, encontrando as abscissas dos máximos ou mínimos.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.
  - Após a divisão, considerar $E = 0$.
  - Por último, igualar o resultado a 0, encontrando as abscissas dos máximos ou mínimos.
- Cálculo diferencial em 1665 (Isaac Newton) e 1676 (Gottfried Leibniz).

O Problema da Braquistócrona e o Cálculo Variacional

Segundo Courant e Robbins (1996) e Stillwell (2010), o problema da braquistócrona,

- Foi formulado por Johann Bernoulli em 1969 e pode ser apresentado como:

Problema da Braquistócrona

Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade (LIMA, 2004, p. 3).

Câmpus
Anápolis de Ciências
Exatas e Tecnológicas
Henrique Santillo
Universidade
Estadual de Goiás

O Problema da Braquistócrona e o Cálculo Variacional

Segundo Courant e Robbins (1996) e Stillwell (2010),

- A Solução de Jacob Bernoulli (1697) apresenta o aspecto da curva variável.

O Problema da Braquistócrona e o Cálculo Variacional

Segundo Courant e Robbins (1996) e Stillwell (2010),

- A Solução de Jacob Bernoulli (1697) apresenta o aspecto da curva variável.
- Euler e Lagrange.

Método de Rayleigh-Ritz

Segundo Leissa (2005),

- O método leva o nome dos pesquisadores Lord Rayleigh e Walter Ritz.

Método de Rayleigh-Ritz

Segundo Leissa (2005),

- O método leva o nome dos pesquisadores Lord Rayleigh e Walter Ritz.
- Estudado, primeiro, por Lord Rayleigh com problemas de energias potencial e cinética de sistemas.

Método de Rayleigh-Ritz

Segundo Leissa (2005),

- O método leva o nome dos pesquisadores Lord Rayleigh e Walter Ritz.
- Estudado, primeiro, por Lord Rayleigh com problemas de energias potencial e cinética de sistemas.
- A Generalização foi feita por Walter Ritz.

Método de Rayleigh-Ritz

Segundo Leissa (2005),

- O método leva o nome dos pesquisadores Lord Rayleigh e Walter Ritz.
- Estudado, primeiro, por Lord Rayleigh com problemas de energias potencial e cinética de sistemas.
- A Generalização foi feita por Walter Ritz.
- Não se sabe exatamente quando o método passou a se chamar "Método de Rayleigh-Ritz".

Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz

Uma das aplicações mais usuais nos trabalhos acadêmicos é o seu uso para a determinação das chamadas frequências naturais.

Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz

Uma das aplicações mais usuais nos trabalhos acadêmicos é o seu uso para a determinação das chamadas frequências naturais.

As frequências naturais "indicam a taxa de oscilação livre da estrutura, depois de cessada à força que provocou o seu movimento. Em palavras similares, representa o quanto à estrutura vibra quando não há força aplicada sobre ela." (BOLINA et al., 2015, p. 1).

Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz

Essa aplicação, com as frequências naturais, pode ser verificada nos trabalhos de

- Ilanko, Monterrubio e Mochida (2014) com as vigas consolas.
- Mazanoglu (2015) com as vigas seguindo os modelos de Timoshenko e de Euler.
- Grossi e Albarracin (2001) com problemas envolvendo placas.

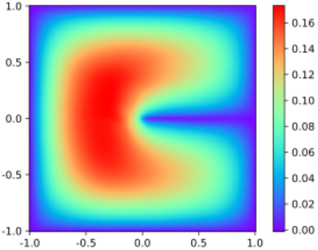
Aplicação do Método de Rayleigh-Ritz

Essa aplicação, com as frequências naturais, pode ser verificada nos trabalhos de

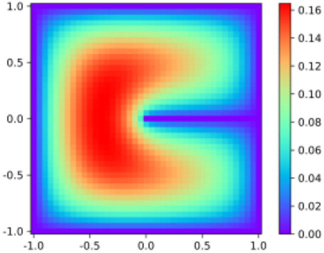
- Ilanko, Monterrubio e Mochida (2014) com as vigas consolas.
- Mazanoglu (2015) com as vigas seguindo os modelos de Timoshenko e de Euler.
- Grossi e Albarracin (2001) com problemas envolvendo placas.

E e Yu (2018) estuda a aplicação do Método junto a Inteligência Aritifical, propondo o método chamado de *Deep Ritz Method* para a resolução de problemas variacionais.

Figura 1: Solução da equação de Poisson em duas dimensões utilizando o *Deep Ritz Method* e o método das diferenças finitas



(a) Solução pelo *Deep Ritz Method*.



(b) Solução pelo método das diferenças finitas.

Fonte: E e Yu (2018, p. 5).

Linguagem Python

- Criada por Guido van Rossum por volta de 1990.

Linguagem Python

- Criada por Guido van Rossum por volta de 1990.
- Desenvolvimento *open-source*.

Linguagem Python

- Criada por Guido van Rossum por volta de 1990.
- Desenvolvimento *open-source*.
- Atualmente há cerca de 1000 colaboradores no GitHub.

Linguagem Python

- Criada por Guido van Rossum por volta de 1990.
- Desenvolvimento *open-source*.
- Atualmente há cerca de 1000 colaboradores no GitHub.
- Diversas bibliotecas de rotinas como, por exemplo, o ecossistema SciPy:
  - NumPy
  - SciPy
  - MatplotLib
  - SymPy

  ...

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Cálculo Variacional

Cálculo Variacional

Falar do Cálculo Variacional.

Método de Rayleigh-Ritz

Método de Rayleigh-Ritz

A determinação da função exata $y(x)$ nem sempre é fácil ou possível. O método de Rayleigh-Ritz propõe que a função $y(x)$ seja substituida por uma função aproximada $v(x)$.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz

A determinação da função exata $y(x)$ nem sempre é fácil ou possível. O método de Rayleigh-Ritz propõe que a função $y(x)$ seja substituida por uma função aproximada $v(x)$.

Considere o funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx,$$

com as condições de contorno $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

Método de Rayleigh-Ritz

Seja

$$y(x) \approx v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x).$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja

$$y(x) \approx v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x).$$

Substituindo y por v no funcional, tem-se $I = I(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Método de Rayleigh-Ritz

Seja

$$y(x) \approx v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x).$$

Substituindo y por v no funcional, tem-se $I = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

A condição de máximo ou mínimo para I é, agora, que

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0,$$

onde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Método de Rayleigh-Ritz

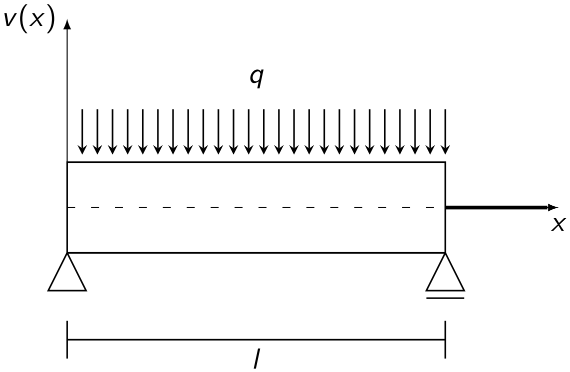
Exemplo

Uma viga prismática possui o funcional de energia potencial total associado

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]^2 dx - \int_0^l qvdx,$$

onde E é o módulo de Young do material e I é o momento de inércia da seção transversal da viga em relação ao eixo baricêntrico.

Figura 3: Viga prismática.



Fonte: Assan (2003, p. 25).

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Das condições de contorno

$$v_1(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Das condições de contorno

$$v_1(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_1(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Das condições de contorno

$$v_1(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_1(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l.$$

Logo, $v_1(x) = a_2(x^2 - lx)$,

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Das condições de contorno

$$v_1(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_1(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l.$$

Logo, $v_1(x) = a_2(x^2 - lx)$, $v_1'(x) = a_2(2x - l)$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Das condições de contorno

$$v_1(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_1(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l.$$

Logo, $v_1(x) = a_2(x^2 - lx)$, $v_1'(x) = a_2(2x - l)$ e $v_1''(x) = 2a_2$.

Método de Rayleigh-Ritz

Substituindo v por v_1 em Π,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l 4EIa_2^2 dx - \int_0^l qa_2(x^2 - lx)dx.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Substituindo v por v_1 em Π,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l 4EIa_2^2 dx - \int_0^l qa_2(x^2 - lx)dx.$$

Da condição de estacionariedade, $\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$,

$$a_2 = -\frac{ql^2}{24EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Substituindo v por v_1 em Π,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l 4EIa_2^2 dx - \int_0^l qa_2(x^2 - lx)dx.$$

Da condição de estacionariedade, $\dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$,

$$a_2 = -\frac{ql^2}{24EI}.$$

E, como $a_1 = -a_2 l$,

$$a_1 = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Assim,

$$v_1(x) = \frac{ql^3}{24EI}x - \frac{ql^2}{24EI}x^2.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Assim,

$$v_1(x) = \frac{ql^3}{24EI}x - \frac{ql^2}{24EI}x^2.$$

Calculando o valor de máxima deflexão,

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{96EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Assim,

$$v_1(x) = \frac{ql^3}{24EI}x - \frac{ql^2}{24EI}x^2.$$

Calculando o valor de máxima deflexão,

$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{96EI}.$$

O valor de máxima deflexão para $v_1(x)$ é menor que o valor exato,

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Das condições de contorno

$$v_2(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Das condições de contorno

$$v_2(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_2(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l - a_3 l^2.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Das condições de contorno

$$v_2(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_2(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l - a_3 l^2.$$

Logo,

$$v_2(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2 x),$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Das condições de contorno

$$v_2(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_2(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l - a_3 l^2.$$

Logo,

$$v_2(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2 x),$$

$$v_2'(x) = a_2(2x - l) + a_3(3x^2 - l^2),$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Das condições de contorno

$$v_2(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_2(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l - a_3 l^2.$$

Logo,

$$v_2(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x),$$

$$v_2'(x) = a_2(2x - l) + a_3(3x^2 - l^2),$$

$$v_2''(x) = 2a_2 + 6a_3x.$$

Câmpus
Anápolis de Ciências
Exatas e Tecnológicas
Henrique Santillo
Universidade
Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz

Substituindo v por v_2 em Π,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EI(2a_2 + 6a_3x)^2\right) dx - \int_0^l q\left(a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x)\right) dx.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Substituindo v por v_2 em Π,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EI(2a_2 + 6a_3x)^2\right) dx - \int_0^l q\left(a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x)\right) dx.$$

Da condição de estacionariedade, tem-se o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \end{cases} .$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 l = \dfrac{-ql^2}{12EI} \\ 2a_2 + 4a_3 l = \dfrac{-ql^2}{12EI} \end{cases}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 l = \dfrac{-ql^2}{12EI} \\ 2a_2 + 4a_3 l = \dfrac{-ql^2}{12EI} \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema,

$$a_3 = 0,$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 l = \dfrac{-ql^2}{12EI} \\ 2a_2 + 4a_3 l = \dfrac{-ql^2}{12EI} \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema,

$$a_3 = 0,$$

$$a_2 = -\frac{ql^2}{24EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Das condições de contorno

$$v_3(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$. Das condições de contorno

$$v_3(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_3(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2 l - a_3 l^2 - a_4 l^3.$$

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Das condições de contorno

$$v_3(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_3(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2l - a_3l^2 - a_4l^3.$$

Logo,

$$v_3(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x) + a_4(x^4 - l^3x),$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Das condições de contorno

$$v_3(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_3(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2l - a_3l^2 - a_4l^3.$$

Logo,

$$v_3(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x) + a_4(x^4 - l^3x),$$

$$v_3'(x) = a_2(2x - l) + a_3(3x^2 - l^2) + a_4(4x^3 - l^3),$$

Método de Rayleigh-Ritz

Seja $v_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Das condições de contorno

$$v_3(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0,$$

$$v_3(l) = 0 \Longrightarrow a_1 = -a_2l - a_3l^2 - a_4l^3.$$

Logo,

$$v_3(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x) + a_4(x^4 - l^3x),$$

$$v_3'(x) = a_2(2x - l) + a_3(3x^2 - l^2) + a_4(4x^3 - l^3),$$

$$v_3''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Substituindo v por v_3 em Π,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2)^2\right] dx -$$

$$-\int_0^l q\left[a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2x) + a_4(x^4 - l^3x)\right] dx.$$

Método de Rayleigh-Ritz

Da condição de estacionariedade, tem-se o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_4} = 0 \end{cases} .$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 l + 4a_4 l^2 = -\dfrac{ql^2}{12EI} \\[2ex] a_2 + 2a_3 l + 3a_4 l^2 = -\dfrac{ql^2}{24EI} \\[2ex] 8a_2 + 18a_3 l + \dfrac{144}{5} a_4 l^2 = -\dfrac{3ql^2}{10EI} \end{cases}$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 l + 4a_4 l^2 = -\dfrac{ql^2}{12EI} \\ a_2 + 2a_3 l + 3a_4 l^2 = -\dfrac{ql^2}{24EI} \\ 8a_2 + 18a_3 l + \dfrac{144}{5} a_4 l^2 = -\dfrac{3ql^2}{10EI} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se

$$a_2 = 0,$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$\begin{cases} 2a_2 + 3a_3 l + 4a_4 l^2 = -\dfrac{ql^2}{12EI} \\ a_2 + 2a_3 l + 3a_4 l^2 = -\dfrac{ql^2}{24EI} \\ 8a_2 + 18a_3 l + \dfrac{144}{5} a_4 l^2 = -\dfrac{3ql^2}{10EI} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se

$$a_2 = 0,$$

$$a_3 = -\frac{ql}{12EI},$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$a_4 = \frac{q}{24EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$a_4 = \frac{q}{24EI}.$$

Como $a_1 = -a_2 l - a_3 l^2 - a_4 l^3$,

$$a_1 = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

$$a_4 = \frac{q}{24EI}.$$

Como $a_1 = -a_2 l - a_3 l^2 - a_4 l^3$,

$$a_1 = \frac{ql^3}{24EI}.$$

A função v_3 é

$$v_3(x) = \frac{ql^3}{24EI}x - \frac{ql}{12EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4.$$

Método de Rayleigh-Ritz

O valor de máxima deflexão é identico,

$$v_3\left(\frac{l}{2}\right) = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

Método de Rayleigh-Ritz

O valor de máxima deflexão é identico,

$$v_3\left(\frac{l}{2}\right) = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

A função $v_3(x)$ é, de fato, a função exata $v(x)$.

O Uso de Funções Triangulares no Método de Rayleigh-Ritz

Funções Triangulares

Explicar o uso das funções triangulares.

Câmpus
Anápolis de Ciências
Exatas e Tecnológicas
Henrique Santillo
Universidade
Estadual de Goiás

Utilizando o Método de Rayleigh-Ritz na Linguagem Python

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz e a Linguagem Python

Considere o funcional

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]^2 dx - \int_0^l qvdx,$$

do Exemplo sobre o Método de Rayleigh-Ritz.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Método de Rayleigh-Ritz e a Linguagem Python

Considere o funcional

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]^2 dx - \int_0^l qvdx,$$

do Exemplo sobre o Método de Rayleigh-Ritz.

Seja a função aproximadora $v_3(x)$,

$$v_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Câmpus
Anápolis de Ciências
Exatas e Tecnológicas
Henrique Santillo
Universidade
Estadual de Goiás

Código 1: Definição da Função Aproximada e Integrando

```
from sympy import symbols, integrate, diff, Matrix
from sympy.solvers import solve

l, E, I, x, q = symbols('l E I x q')
a2, a3, a4 = symbols("a2 a3 a4")

v = a2 * (x**2 - l*x)
v = v + a3 * (x**3 - l**2 * x)
v = v + a4 * (x**4 - l**3 * x)

dv = diff(v, x)
dv2 = diff(dv, x)

f = (E*I*((dv2)**2)) / 2 - q * v
```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Método de Rayleigh-Ritz e a Linguagem Python

Para resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_4} = 0 \end{cases},$$

é possível utilizar a chamada Regra de Leibniz, realizando a derivação antes da integração.

Método de Rayleigh-Ritz e a Linguagem Python

Para resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_4} = 0 \end{cases},$$

é possível utilizar a chamada Regra de Leibniz, realizando a derivação antes da integração.

Finalmente, o sistema resultante das derivações e integrações deve ser resolvido obtendo os valores de a_2, a_3 e a_4.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Código 2: Definição da Função Aproximada e Integrando

```python

df_a2 = diff(f, a2)
df_a3 = diff(f, a3)
df_a4 = diff(f, a4)

eq1 = integrate(df_a2, (x, 0, 1))
eq2 = integrate(df_a3, (x, 0, 1))
eq3 = integrate(df_a4, (x, 0, 1))

sol = solve([eq1, eq2, eq3], [a2, a3, a4])
print(sol)
```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 4: Resultado encontrado para a_2, a_3 e a_4

Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Código 3: Determinando o coeficiente a_1

```
a1 = -a2*l - a3*l**2 - a4 * l**3
a1 = a1.subs(a2, sol[a2])
a1 = a1.subs(a3, sol[a3])
a1 = a1.subs(a4, sol[a4])
print("a1: ", a1)
```

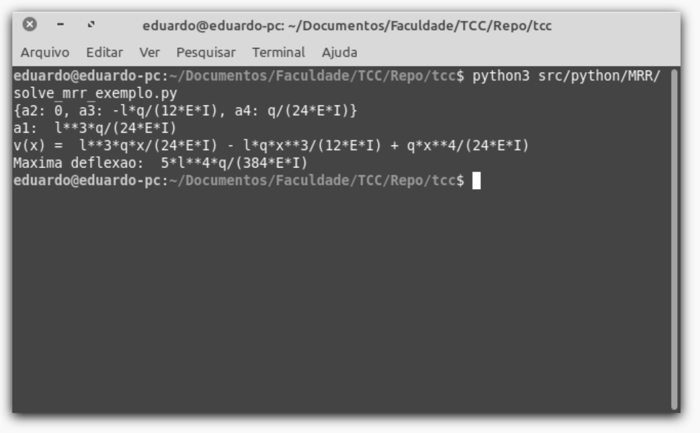
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Código 4: Determinando a função v e a Máxima Deflexão

```
v = a1*x + sol[a2]*x**2 + sol[a3]*x**3 + sol[a4]*x**4
print("v(x) = ", v)
maxdef = v.subs(x, l/2)
print("Maxima deflexao: ", maxdef)
```

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 5: Execução completa dos Códigos 1, 2, 3 e 4



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Funções Triangulares na Linguagem Python

Explicar sobre o uso da Linguagem Python e as funções triangulares.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Referências

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Referências I

ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003.

BOLINA, C. et al. Vibrações: As frequências naturais estimada e experimental de uma estrutura. *Blucher Mathematical Proceedings*, v. 1, n. 1, p. 186 – 194, 2015. Disponível em: <www.proceedings.blucher.com.br/article-details/vibraes-as-frequncias-naturais-estimada-e-experimental-de-uma-estrutu
Acesso em: 5 out. 2019.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Referências II

CAMPOS, C. A. de L. *Algumas Aplicações de Cálculo Variacional*: da braquistócrona a desigualdade de hardy-sobolev. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Campinas, Campinas, jul. 2017.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is Mathematics?* 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996.

E, W.; YU, B. The deep ritz method: A deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems. *Communications in Mathematics and Statistics*, v. 6, n. 1, 2018.

GROSSI, R. O.; ALBARRACIN, C. M. Some observations on the application of the rayleigh–ritz method. *Applied Acoustics*, v. 62, n. 10, p. 1171 – 1182, 2001.

Referências III

ILANKO, S.; MONTERRUBIO, L. E.; MOCHIDA, Y. The rayleigh–ritz method and simple applications. In: ______. *The Rayleigh–Ritz Method for Structural Analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2014. cap. 3, p. 21–31.

LEISSA, A. The historical bases of the rayleigh and ritz methods. *Journal of Sound and Vibration*, v. 287, n. 4, p. 961 – 978, 2005.

LIMA, G. L. de. *Cálculo Variacional*: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Campinas, Campinas, jun. 2004.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Referências IV

MAZANOGLU, K. Natural frequency analyses of segmented timoshenko–euler beams using the rayleigh–ritz method. *Journal of Vibration and Control*, v. 23, n. 13, p. 2135–2154, 2015.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. 3. ed. New York: Springer, 2010. (Undergraduate Texts In Mathematics).