Anotações:
Método de Rayleigh-Ritz

Eduardo José de Oliveira

10 de Julho de 2019

No método de Rayleigh-Ritz a função exata $y(x)$ é substituida por uma função aproximada $v(x)$, formada por uma combinação linear de funções $\phi_i(x)$, de modo que ao se substituir $v(x)$ no funcional, este é minimizado. A escolha adequada das funções $\phi_i(x)$ é importante para se obter uma boa aproximação para a solução do problema.

Assim, considerando o funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx,$$

com as condições de contorno $y(x_1) = y(x_2) = 0$, pode-se assumir como solução aproximada a função $v(x)$ definida por

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x).$$

As funções $\phi_i(x)$ são chamadas funções de forma e elas devem ser linearmente independente, sendo que cada uma deve satisfazer individualmente as condições de contorno $\phi_i(x) = \phi_i(x_2) = 0$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Essas funções $\phi_i(x)$ são, ainda, contínuas até o grau $m - 1$, onde m é a ordem da maior derivada do funcional.

Os coeficientes a_i a serem determinados, são denominados parâmetros de deslocamentos e $v(x)$ é conhecida como função aproximadora.

Pode-se, então, substituir $v(x)$ no funcional e, ao aplicar a condição de estacionariedade $\delta I = 0$, tem-se

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial I}{\partial a_2}\delta a_2 + \cdots + \frac{\partial I}{\partial a_n}\delta a_n = 0.$$

Como as variações δa_i são arbitrárias, a equação acima se transforma em um sistema de equações homogêneas da forma

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0,$$

onde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para a garantia de uma sequência de soluções que convergem para a solução exata, deve-se satisfazer as seguintes condições:

1. as funções aproximadoras $v(x)$ devem ser contínuas até uma ordem menor do que a maior derivada do integrando (Conferir se é $v(x)$ ou se são as $\phi_i(x)$),
2. cada função $\phi_i(x)$ deve satisfazer, individualmente, as condições essenciais de contorno (Conferir sobre as condições essenciais de contorno) e

3. a sequencia de funções deve ser completa. Diz-se que $v(x)$ é completa quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_1}^{x_2} \left(y - \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \right)^2 dx < \lambda,$$

onde λ é um número tão pequeno quanto se deseja.