Câmpus
Anápolis de Ciências
Exatas e Tecnológicas
Henrique Santillo

Universidade
Estadual de Goiás

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS
Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Matemática

Cálculo Variacional

Eduardo José de Oliveira
Orientador: Prof. Me. Tiago de Lima Bento Pereira

2019

Objetivo

O objetivo do presente trabalho é explicar o Cálculo Variacional e apresentar aplicações do mesmo.

Introdução

Segundo Lima (2004), o problema pertinente ao cálculo variacional é o de encontrar uma função diferenciável até segunda ordem $y = y(x)$ satisfazendo $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, com x_1, x_2, y_1 e y_2 dados, e f uma função duas vezes diferenciável, minimizando ou maximizando a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx.$$

História

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
    - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
    - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.
    - Após a divisão, considerar $E=0$.

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.
  - Após a divisão, considerar $E = 0$.
  - Por último, igualar o resultado a 0, encontrando as abscissas dos máximos ou mínimos.

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Máximos e Mínimos

Segundo Boyer (1996), tem-se alguns acontecimentos importantes:

- Pierre de Fermat em 1629.
  - Comparações entre $f(x)$ e $f(x+E)$ próximo de máximos ou mínimos.
  - Considerar a divisão $\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$.
  - Após a divisão, considerar $E=0$.
  - Por último, igualar o resultado a 0, encontrando as abscissas dos máximos ou mínimos.
- Cálculo diferencial em 1665 (Isaac Newton) e 1676 (Gottfried Leibniz).

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo

Universidade Estadual de Goiás

Problema da Braquistócrona

Segundo Courant e Robbins (1996) e Stillwell (2010), o problema da braquistócrona,

- Foi formulado por Johann Bernoulli em 1969 e pode ser apresentado como:

Problema da Braquistócrona

Sejam A e B dois pontos dados em um plano vertical. O problema da braquistócrona consiste em encontrar a curva que uma partícula M precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível, somente sob a ação da força da gravidade (LIMA, 2004, p. 3).

Problema da Braquistócrona

Segundo Courant e Robbins (1996) e Stillwell (2010),

- A Solução de Jacob Bernoulli (1697) apresenta o aspecto da curva variável.

Problema da Braquistócrona

Segundo Courant e Robbins (1996) e Stillwell (2010),

- A Solução de Jacob Bernoulli (1697) apresenta o aspecto da curva variável.
- Euler e Lagrange.

Cálculo Variacional

Relembrando o problema

Deseja-se, no Cálculo Variacional, encontrar uma função diferenciável até segunda ordem $y = y(x)$ satisfazendo $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$, com x_1, x_2, y_1 e y_2 dados, e f uma função duas vezes diferenciável, minimizando ou maximizando a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx. \tag{1}$$

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Funções Aproximadoras

Definição

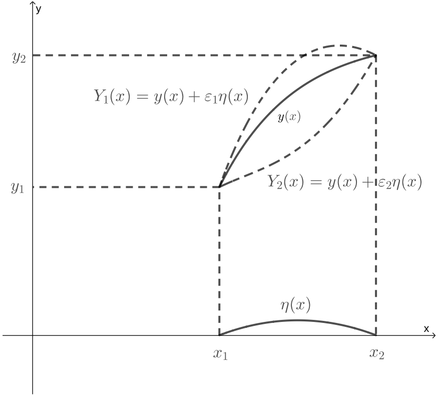
Uma família de funções aproximadoras é definida como

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x),$$

onde a função $\eta(x)$ é uma função diferenciável arbitrária para a qual $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. O número ε é o parâmetro da família. Sua derivada pode ser escrita como

$$Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x).$$

Figura: Representação gráfica das funções aproximadoras.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019

Reescrevendo o Problema

Pode-se reescrever a integral (1) utilizando as funções aproximadoras, dependendo de ε, então

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')dx. \tag{2}$$

Para encontrar a função $y(x)$ que maximiza ou minimiza a integral escrita com as funções aproximadoras (2), deve-se fazer

$$I'(\varepsilon) = 0,$$

e, considerando que quando $\varepsilon = 0$, as integrais (1) e (2) fornecem os mesmos maximos e mínimos, é necessário que

$$I'(0) = 0.$$

Utilizando a Regra de Leibniz, pode-se escrever a derivada de $I(\varepsilon)$ como

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, Y, Y')dx,$$

Utilizando a Regra de Leibniz, pode-se escrever a derivada de $I(\varepsilon)$ como

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, Y, Y')dx,$$

donde, aplicando a regra da cadeia, obtêm-se

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx.$$

Utilizando a Regra de Leibniz, pode-se escrever a derivada de $I(\varepsilon)$ como

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, Y, Y')dx,$$

donde, aplicando a regra da cadeia, obtêm-se

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx.$$

O primeiro termo do integrando é nulo, pois x independe de ε, então

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'}\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx.$$

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Derivando a função aproximadora $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ em relação a ε, conclui-se que

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta.$$

Derivando a função aproximadora $Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ em relação a ε, conclui-se que

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta.$$

De modo análogo, ao derivar $Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x)$ em relação a ε, obtêm-se que

$$\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'.$$

Substituindo $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta$ e $\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'$ em $I'(\varepsilon)$,

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx$$

Substituindo $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \eta$ e $\frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} = \eta'$ em $I'(\varepsilon)$,

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \varepsilon} \right) dx$$

$$I'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial Y} \eta + \frac{\partial f}{\partial Y'} \eta' \right) dx.$$

Calculando $I'(0)$, ou seja, quando $\varepsilon = 0$, é possível trocar Y e Y' por y e y', respectivamente, então,

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) dx$$

Câmpus Anápolis de Ciências Exatas e Tecnológicas Henrique Santillo
Universidade Estadual de Goiás

Calculando $I'(0)$, ou seja, quando $\varepsilon = 0$, é possível trocar Y e Y' por y e y', respectivamente, então,

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) dx$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx.$$

Calculando $I'(0)$, ou seja, quando $\varepsilon = 0$, é possível trocar Y e Y' por y e y', respectivamente, então,

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' \right) dx$$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx.$$

Integrando o segundo membro por partes, tem-se

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\eta dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta dx$$

Organizando $I'(0)$, tem-se

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx.$$

Organizando $I'(0)$, tem-se

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx.$$

Devido a condição necessária, $I'(0) = 0$, escrevemos

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \eta dx = 0.$$

Para concluirmos a dedução do resultado é necessário o uso do seguinte lema:

Lema

Sejam $x_1 < x_2$ fixos e $G(x)$ uma função contínua particular para $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Se

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) G(x) dx = 0$$

para cada função diferenciável $\eta(x)$ tal que $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, concluímos que $G(x) = 0$, para todo x de modo que $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Equação de Euler-Lagrange

Pelo Lema anterior, conlui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

Equação de Euler-Lagrange

Pelo Lema anterior, conlui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$

A equação acima é chamada de **Equação de Euler-Lagrange**, sendo uma condição necessária para minimizar ou maximizar a integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx.$$

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is Mathematics?* 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996.

LIMA, G. L. de. *Cálculo Variacional*: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Campinas, Campinas, jun. 2004.

STILLWELL, J. *Mathematics and Its History*. 3. ed. New York: Springer, 2010. (Undergraduate Texts In Mathematics).