다항식과 fft

EUnS

2019년 12월 2일

차 례

1 개론

n차 다항식 $A(x)$를 예시로 들라고하면 대부분 이렇게 대답할것이다.

$$A(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$$

이는 컴퓨터상에서 크기가 n+1인 벡터(배열)에 $\{a_0, a_2, ..., a_n\}$으로 나타내도 $A(x)$를 확정지을 수 잇다. 이러한 표현 방식을 **계수 표현(Coefficient representation)**이라고 한다. 우리 일반적으로 사용하는 다항식을 나타내는 방식이라고 생각하면되는데. 이렇게 나타낸 다항식을 각각 곱하는 경우를 생각해보자.

일반적으로 우리는 종이에서 다음 다항식을 곱할때 이와같이 풀것이다.

$C(x) = A(x)B(x) = (a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$

2차나 3차의 경우는 한번에 쭉 풀수도있겠지만

n이 큰 경우일때는 어쩔수없이 $A(x)$ 항하나에 $B(x)$를 곱해서 쭉 전개해서 풀것이다. 설명의 편의를 위해서 $A(x)$와 $B(x)$의 최고차항의 차수가 같다고 가정하고 내용을 진행할 것이고 전체 흐름에 따라 n의 의미가 중구난방적이다.

이를 직접 컴퓨터에서 계산한다고 생각해보자. 벡터 각요소에 벡터 각요소를 각각 모두 곱하기 때문에 시간복잡도는 $O(n^2)$이 될것이다. 이것이 우리가 일반적으로 생각하는 다항식 곱의 시간복잡도이다

이를 $O(n \log n)$으로 줄여 보는 것이 목표이다.

2 점값 표현

중,고등학교를 나오면서 다음과 같은 문제를 푼적이 있을거라고 생각합니다.

- 2차원 좌표상에서 $(1, 0)$과 $(6, 8)$을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.
- 2차원 좌표상에서 $(1, 0)$, $(6, 8)$,$(-4, 8)$ 을 지나는 다항함수를 구하시오.

간단한 연립방정식처럼 생각하면 최고차항의 차수가 n에 따라서 어떤 다항식을 지나는 $n+1$개 이상의 점의 좌표를 알고있으면 그 다항식을 특정할수있다.

컴퓨터상에서도 그대로 나타낼수 있다. $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$

이를 **점값 표현(Point-value representation)**이라고 한다. 점값 표현으로 이용할 특징은 같은 좌표의 덧셈과 곱셈은 그냥 단순히 더하고 곱하면되는것이다. $C(x) = A(x)B(x)$에 대해서 $A(x_k) * B(x_k) = C(x_k)$가 된다. 따라서 점값표현으로 나타나있는 $A(x)$와 $B(x)$의 다항식 곱을 나타내기위해 $O(n)$의 시간만큼 걸린다. 실제로는 $C(n)$을 특정하기위해서 $2n - 1$만큼의 좌표쌍이 필요하다. 그만큼 $A(x), B(x)$의 좌표쌍 또한 $2x - 1$개 만큼 필요하다.

3 계수표현 점값표현 치환에 대한 고찰

앞에서 점값표현으로 나타냈을때 다항식의 곱이 간편하다는것을 알았다. 이제 계수표현으로 나타나있는 다항식을 점값표현으로 나타내고 이것의 역변환을 빠르게 할 생각을 하면된다.

1. x좌표를 임의로 잡고 하나씩 계산하는 경우이다.

   그럼 $n+1$개의 계수에 대해서 x가 $x^n, ..., x$를 구해서 계수를 각각 계산하는것은 $n+\cdots+1=\frac{1}{2}n^2+n$만큼의 시간이 걸린다. 이때 x차수를 구하는 부분을 메모이제이션을 사용한다면 $O(2n)$만큼 걸린다.

2. 호어의 법칙(Horner's rule) 특정값 x_0에 대해 점값표현을 가장 빠르게 구할방법은 연쇄적으로 계산을 하는것이다. $A(x_0)=a_0+x_0(a_1+x_0(a_2+\cdots+x_0(a_{n-2}+x_0(a_{n-1}))\cdots))$ 위 방식에 비해서 추가적인 공간복잡도도 $O(1)$이며 메모리 접근도 적기때문에 훨씬 빠르다고 볼수있다. 하지만 n개의 점값표현을 구하기위해선 결국 $O(n^2)$만큼의 시간이 걸리기때문에 다항식을 쌩으로 곱하는것과 다를것이없다.

4 DFT와 FFT

변환과 역변환에 $O(n^2)$으로 푸는 방법까지는 알았다. x점으로 복소수 근을 가지게 함으로써 변환에 $O(n \log n)$이 걸림을 보일수있다.

전체적인 순서는 이렇게된다.

1. $A(x)$와 $B(x)$에 n $2n$까지의 차수의 계수를 0으로 놓아 벡터를 확장한다.
2. 각각 FFT를 적용하여 점값표현을 구한다.
3. 점별로 곱해 $C(x)$를 구한다.
4. 다시 FFT를 적용하여 $C(x)$를 계수형으로 바꾼다.

4.1 복소수

복소수는 오일러 방정식으로 부터 시작합니다. $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ $x=\pi$를 넣으면 $e^{i\pi}=-1$이란 어디서 봤을 수도있는 식입니다. 여기에 $x=2\pi$를 넣으면 $e^{2\pi i}=1$이란 식이 나옵니다. 이제 ω_n을 다음과 같이 정의합니다. $\omega_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$

ω_n을 0부터 $n-1$까지 지수승 한 집합을 나타내자.

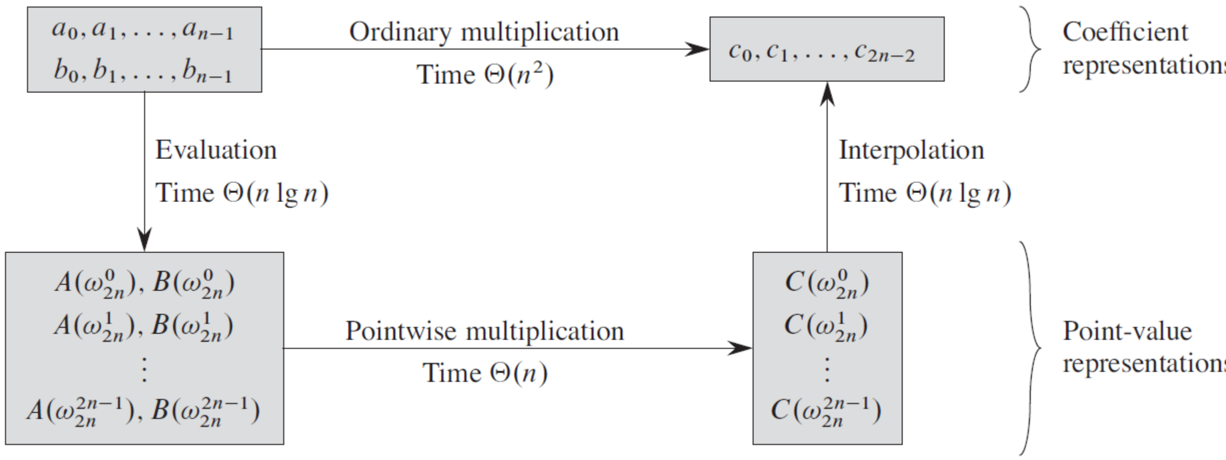


그림 1: 다항식곱의 전체 알고리즘 개형도

$\{\omega_n^0, \omega_n^1, ..., \omega_n^{n-1}\}$

이는 순환 구조를 나타낸다 $\omega_n^0 = \omega_n^n = 1$

우리의 목적은 최고차항이 $n-1$인 다항식의 점값표현으로 쓸 x좌표로 다음의 집합을 채택하는것이다.

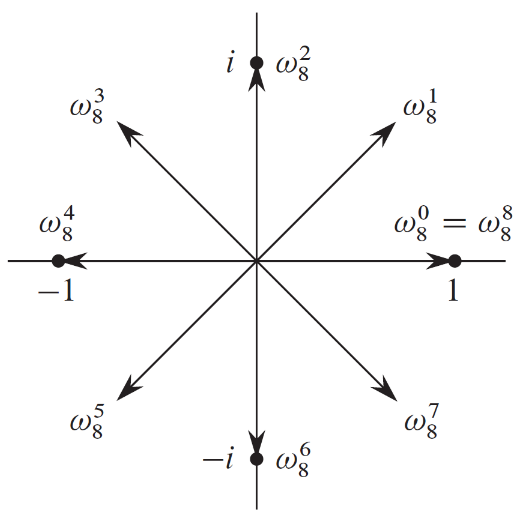


그림 2: 단위값의 8번째근

4.2 DFT

계수형으로 나타나있는 $A(x) = (a_0, a_1, ..., a_n)$를 다음 $y = (y_0, y_1, ..., y_n)$벡터를 **이산 푸리에 변환(DFT : Discrete Fourier Transform)**이라한다.

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$$

쉽게 나타내면 계수표현으로 나타나 있는 $A(x)$를 n개의 집합이$\{\omega_n^1, \omega_n^2, ..., \omega_n^{n-1}\}$인 x좌표에 대한 y값의 집합입니다.

4.3 FFT

DFT를 $O(n \log n)$에 구할수있는 알고리즘으로 **고속 푸리에 변환(FFT :Fast Fourier Transform)**이 있다.

FFT는 분할 정복(divide and conquer)기법을 사용하여 나타낼수있다.

A_{even}과 A_{odd}를 다음과 같이 정의한다. $A_{even}(x) = a_0x^0 + a_2x^1 + a_4x^2 + \cdots + a_{n-2}x^{\frac{n}{2}-1}$ $A_{odd}(x) = a_1x^0 + a_3x^1 + a_5x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$ $A(x)$를 다음과 같이 분할한다.

$A(x) = A_{even}(x^2) + xA_{odd}(x^2)$

프로시저는 다음과 같다.

1. A_{even}과 A_{odd}로 나눈다.
2. A_{even}과 A_{odd}를 각각 재귀로 FFT한다.
3. $A(x) = A_{even}(x^2) + xA_{odd}(x^2)$에 따라서 계산한다. 이때 걸리는 복잡도는 $O(n)$

```
RECURSIVE_FFT(a)
n = length[a]
if n = 1
    return a
w_n = e ^{2 pi i / n}
w = 1
a_even = (a_0,a_2 , ..., a_n-2)
a_odd = (a_1,a_3 , ..., a_n-1)

y_even = RECURSIVE_FFT(a_even)
y_odd = RECURSIVE_FFT(a_odd)
for( k = 0 to n/2 -1 )
```

```
    y[k] = y_even[k] + wy_odd[k]
    y[k+(n/2)] = y_even[k] - wy_odd[k]
    w = w*w_n
return y
```

이 알고리즘은 2로 나눈 재귀를 두번부르고 후에 추가적인 O(n)연산이있다.
$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$

5 DFT^{-1} 역변환

점값표현에 대해서 다음의 식이 성립이 한다.

$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}$$

DFT는 다음의 행렬 곱셈 식을 이용했다.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \cdots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

역행렬이 존재하며, 역변환에 대해서 다음의 식을 통해 원래의 값이 나온다.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n^{-1} & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-3} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-2} & \omega_n^{-4} & \omega_n^{-6} & \cdots & \omega_n^{-2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^{-3} & \omega_n^{-6} & \omega_n^{-9} & \cdots & \omega_n^{-3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{-(n-1)} & \omega_n^{-2(n-1)} & \omega_n^{-3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{-(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

6 n = 4 일때 수행

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

6.1 DFT 수행

$$\omega^j = \begin{cases} 1 & (j=0, \theta=0) \\ i & (j=1, \theta=\frac{1}{2}\pi) \\ -1 & (j=2, \theta=\pi) \\ -i & (j=3, \theta=\frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

계수 벡터 $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$인 경우를 생각해보자. 이를 점값표현으로 변환, 역변환해 본다.

1. 분할: $\{a_0, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$
2. 분할: $\{a_0\}, \{a_2\}, \{a_1\}, \{a_3\}$
3. 결합: $\{a_0 + a_2, a_0 - a_2\}\{a_1 + a_3, a_1 - a_3\}$
4. 결합: $\{(a_0 + a_1 + a_2 + a_3), (a_0 + \omega a_1 - a_2 - \omega a_3), (a_0 - a_1 + a_2 - a_3), (a_0 - \omega a_1 - a_2 + \omega a_3)\}$

계수벡터에 $1, \omega, \omega^2, \omega^3$을 넣었을때의 결과와 동일하다.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_0 + \omega a_1 - a_2 - \omega a_3 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ a_0 - \omega a_1 - a_2 + \omega a_3 \end{pmatrix}$$

6.2 DFT^{-1}수행

$$\omega^j = \begin{cases} 1 & (j=0, \theta=0) \\ -i & (j=-1, \theta=-\frac{1}{2}\pi) \\ -1 & (j=-2, \theta=-\pi) \\ i & (j=-3, \theta=-\frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

$-\omega = \omega^{-1}$ [1]

1. 분할: $\{y_0, y_2\}$, $\{y_1, y_3\}$
2. 분할: $\{y_0\}, \{y_2\}, \{y_1\}, \{y_3\}$
3. 결합: $\{y_0 + y_2, y_0 - y_2\}\{y_1 + y_3, y_1 - y_3\}$
4. 결합: $\{(y_0 + y_1 + y_2 + y_3), (y_0 - \omega y_1 + y_2 + \omega y_3), (y_0 - y_1 + y_2 - y_3), (y_0 + \omega y_1 - y_2 - \omega y_3)\}$

---

[1]참고: cos은 우함수(y축 대칭) sin은 기함수(원점대칭)이다.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \\ y_0 - \omega y_1 - y_2 + \omega y_3 \\ y_0 - y_1 + y_2 - y_3 \\ y_0 + \omega y_1 - y_2 - \omega y_3 \end{pmatrix}$$

각y_n에 곱해지는 계수와 a_n 계수벡터를 풀어써서 행렬에 나타내면

- a_1

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega & -1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -1 & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -1 & \omega \end{pmatrix}$$

- a_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -1 & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -1 & \omega \end{pmatrix}$$

- a_3

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega & -1 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -1 & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -1 & \omega \end{pmatrix}$$

7 성능 개선

첫번째로 반복계산되는것을 임시변수로 만들어서 계산을 줄이는 방법이 있다.

```
y[k] = y_even[k] + wy_odd[k]
y[k+(n/2)] = y_even[k] - wy_odd[k]
```

두번째로 루프풀기가 있다.

fft의 루프풀기는 꽤 복잡하다. 분할정복기법에서 분할의 상태를 만들어놓고 반복문으로 conquer를 행한다. conquer시에 임시 배열로 할달되어 나뉘어져있던 짝수 홀수를 기존 하나의 큰 배열에 그대로 사용한다.

분할의 상태를 만들어 놓기위해 임의 위치 이동이 행해진다.

```
ITERATIVE-FFT(a)
    BIT-REVERSE-COPY(a, A)
    n = a.length // n is a power of 2
```

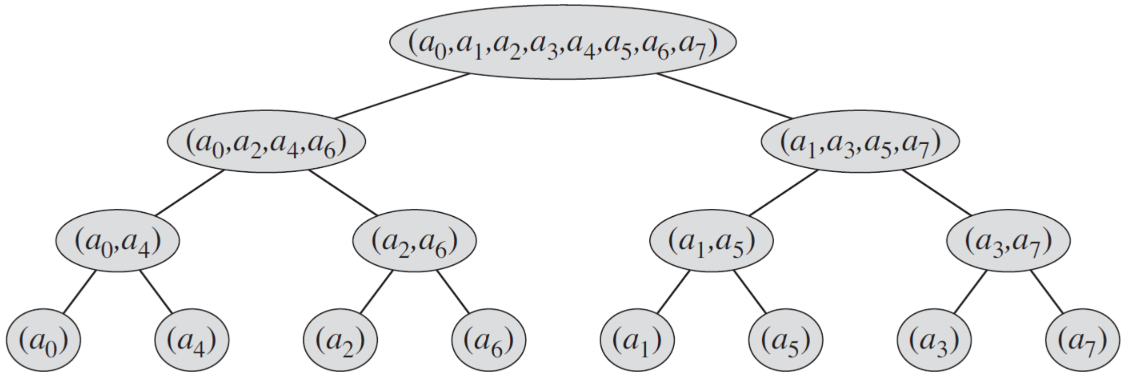
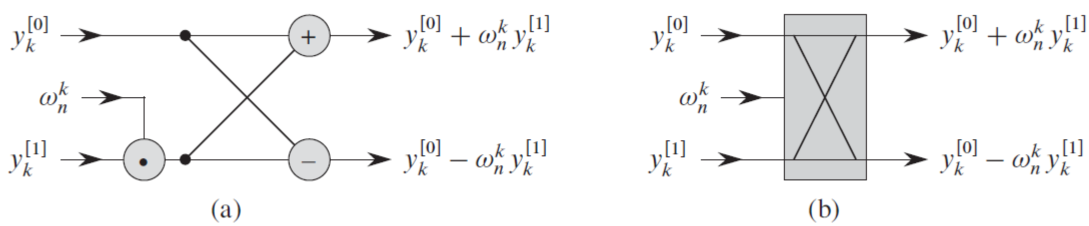


그림 3: n = 8 일때,recursive시 분할되는 원소들




```
    for s = 1 to lg n
        m = 2^s
        w_m = e^{2pi i/m}
        for k = 0 to n-1 by m
            w = 1
            for j = 0 to m/2 -1
                t = w A[k+ j + m /2]
                u = A[k + j]
                A[k + j] = u + t
                A[k+ j + m /2] = u - t
                w = w_m
    return A
```

```
BIT-REVERSE-COPY(a, A)
    n = a.length
    for k = 0 to n - 1
        A[rev(k)] = a_k
```

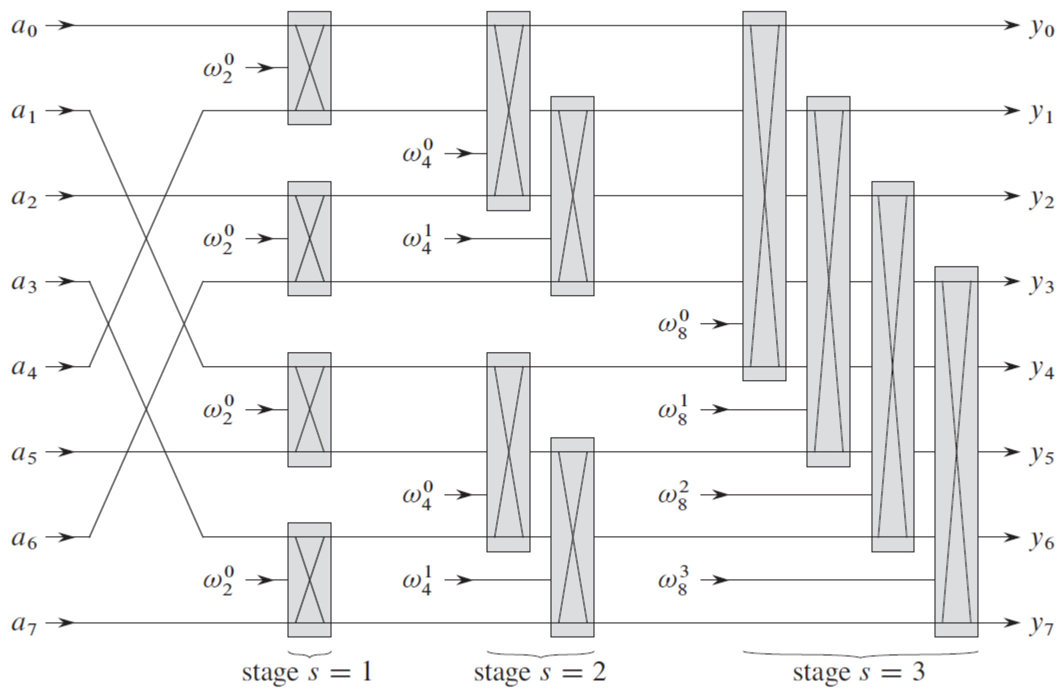


그림 4: n = 8의 iterative-FFT 수행

마지막으로 parallel 알고리즘으로 바꾸는것이다.

참고 문헌

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. Introduction to Algorithms, Second Edition. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. ISBN 0-262-03293-7.