SEMINAR

FORME NORMALE PTR GRAMATICI TIP 2

F.N. CHOMSKY
$$\begin{cases} A \to BC, & A,B,C,D \in V_N \quad i \in V_T \\ D \to i \end{cases}$$

sau $S \to \lambda$ și $S \notin dr$

F.N. GREIBACH $A \to ip$, $A \in V_N$, $i \in V_T$, $p \in V_N^*$

sau $S \to \lambda$ și $S \notin dr$

Lema substituției: Fie $G \in \mathcal{G}_2$ $G = (V_N, V_T, x_0, \mathcal{P})$, $X \in V_N$, regulile $X \to uYv \in \mathcal{P}$ și $Y \to \alpha_1 | \dots | \alpha_k \in \mathcal{P}$.
Atunci G este echivalentă cu cu o gramatică în care s-au făcut "substituțiile" lui Y în regulă, adică $X \to uYv$ se înlocuiește cu
$X \to u\alpha_1 v | \dots | u\alpha_k v \in \mathcal{P}$ (păstrăm $Y \to \alpha_1 | \dots | \alpha_k$)

Lema eliminării recursiei stângi:
Orice limbaj independent de context poate fi generat fără simboluri stâng recursive
#
Fie X stâng recursiv și regulile lui X
$$X \to u_1 | u_2 | \dots | u_k | Xv_1 | Xv_2 | \dots | Xv_n \in \mathcal{P}.$$
Se înlocuiesc echivalent prin
$$\begin{cases} X \to u_1 | \dots | u_k | u_1 Y | \dots | u_k Y \\ Y \to v_1 | \dots | v_n | v_1 Y | \dots | v_k Y \end{cases}, \quad Y \in V_N' \text{ simbol nou in } V_N$$

Algoritm ptr f.n. CHOMSKY

1) Elimin reguli de ștergere
2) Aplic lema "$A \to i$"
3) Elimin redenumiri "$A \to B$"
4) Scurtez reguli neconvenabile

$X \to X_1 X_2 \ldots X_n$ înlocuit cu $\begin{cases} X \to X_1 Z_1 \\ Z_1 \to X_2 Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-2} \to X_{n-1} X_n \end{cases}$

Exemplu: Se consideră gramatica ce generează expresii aritmetice simple

$$G_E : \begin{cases} E \to E+T \mid E-T \mid T \\ T \to T*F \mid T/F \mid F \\ F \to (E) \mid a \end{cases}$$

Construim f.n. CHOMSKY

1) nu am reguli de ștergere
2) aplic lema "$A \to i$"

$$\begin{cases} E \to EX_+T \mid EX_-T \mid T \\ X_+ \to + \\ X_- \to - \\ T \to TX_*F \mid TX_/F \mid F \\ X_* \to * \\ X_/ \to / \\ F \to X_(EX_) \mid a \\ X_(\to (\\ X_) \to) \end{cases}$$

3) Elimin redenumiri (întâi $T \to F$, apoi $E \to T$)

$$\begin{cases} E \to EX_+T \mid EX_-T \mid TX_*F \mid TX_/F \mid X_(EX_) \mid a \\ T \to TX_*F \mid TX_/F \mid X_(EX_) \mid a \\ F \to X_(EX_) \mid a \\ X_+ \to + \ ; \ X_- \to - \\ X_* \to * \ ; \ X_/ \to / \\ X_(\to (\ ; \ X_) \to) \end{cases}$$

4) Scurtez regulile neconvenabile $E \to EX_+T, \dots$

$$\begin{cases} E \to EZ_1 \mid EZ_2 \mid TZ_3 \mid TZ_4 \mid X_(Z_5 \mid a \\ Z_1 \to X_+T \\ Z_2 \to X_-T \\ Z_3 \to X_*F \\ Z_4 \to X_/F \\ Z_5 \to EX_) \\ T \to TZ_3 \mid TZ_4 \mid X_(Z_5 \mid a \\ F \to X_(Z_5 \mid a \\ X_+ \to + \\ X_- \to - \\ X_* \to * \\ X_/ \to / \\ X_(\to (\\ X_) \to) \end{cases}$$

f.n. CHOMSKY

S-au refolosit neterminalele Z_3, Z_4, Z_5 ptr simplificarea scrierii

F.N. GREIBACH : $G = (\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, V_T, z_0 = X_1, P)$

Etapa I : Indexez neterminalele începând cu X_1 sb. start și aduc regulile ce încep cu neterminale la forma

$$X_i \to X_j p \;,\; i < j \;,\; p \in V_N^*$$

Algoritm:

P1: Elimin recursia stângă pt X_1. Notez Y_1 neter. nou

P2: for $i = 2$ to n {

(2.1) for $j = 1$ to $i-1$ {

substitui X_j în regulile

$X_i \to X_j P$

} end for j

(2.2) elimin recursia stângă pt X_i

// neterminalul nou Y_i

} end for i

Etapa II Redenumesc neterminalele astfel

$Y_1\ Y_2 \dots Y_k\ X_1\ X_2 \dots X_n$

$Z_1\ Z_2 \dots Z_{k+n}$, fie $n+k = N$

Etapa III Substituție inversă $N \to 1$

Regulile lui Z_N sunt bune la f.n. Greibach (încep cu terminale în dreapta. Substitui Z_N în dreapta regulilor lui Z_{N-1} și obțin reguli "bune" pt Z_{N-1}. Consider Z_{N-2} și substitui Z_N, Z_{N-1} în dreapta, deci regulile lui Z_{N-2} devin "bune", ș.a.m.d.

Obs: Se obține rezultatul corect dacă pornim cu o gramatică la care s-au eliminat regulile de ștergere și s-a aplicat lema "A→i". Nu e necesar să construiesc f.n. CHOMSKY!

Problema Construiți f.n. Greibach pt. gramatica ce generează $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

#

Descriere pentru "ardeleni". Folosim teoria

$G: S \to aSb \mid \lambda \in \mathcal{G}_2$.

Aducem gramatica la f.n. Chomsky

1) Elimin reguli de ștergere

$$\begin{cases} x_0 \to \lambda \mid S \\ S \to aSb \mid ab \end{cases}$$

2) Aplic lema "$A \to i$"

$$\begin{cases} x_0 \to \lambda \mid S \\ S \to X_a S X_b \mid X_a X_b \\ X_a \to a \\ X_b \to b \end{cases}$$

3) Elimin redenumiri

$$\begin{cases} x_0 \to \lambda \mid X_a S X_b \mid X_a X_b \\ S \to X_a S X_b \mid X_a X_b \\ X_a \to a \\ X_b \to b \end{cases}$$

4) Scurtez reguli neconvenabile

$$\begin{cases} x_0 \to \lambda \mid X_a Z_1 \mid X_a X_b \\ Z_1 \to S X_b \\ S \to X_a Z_2 \mid X_a X_b \\ Z_2 \to S X_b \\ X_a \to a \\ X_b \to b \end{cases}$$

Redenumesc neterminalele

$x_0 \quad S \quad Z_1 \quad Z_2 \quad X_a \quad X_b$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$

Gramatica devine

$$\begin{cases} x_1 \to \lambda \mid x_5x_3 \mid x_5x_6 \\ x_2 \to x_5x_4 \mid x_5x_6 \\ x_3 \to x_2x_6 \\ x_4 \to x_2x_6 \\ x_5 \to a \\ x_6 \to b \end{cases}$$

Etapa I : transform regulile a.î. cele ce încep cu neterminal în dreapta să fie de forma $x_i \to x_j p$, $i<j$, $p \in V_N^*$

Pas 1 : nu am recursie stânga la x_1

Pas 2 : $i=2$ - reguli convenabile

$i=3$ - substituția pt. x_2. și lipsă recursie

$$\begin{cases} x_1 \to \lambda \mid x_5x_3 \mid x_5x_6 \\ x_2 \to x_5x_4 \mid x_5x_6 \\ x_3 \to x_5x_4x_6 \mid x_5x_6x_6 \\ x_4 \to x_2x_6 \\ x_5 \to a \\ x_6 \to b \end{cases}$$

$i=4$ - substituție pt. x_2 și lipsă recursie

$$\begin{cases} x_1 \to \lambda \mid x_5x_3 \mid x_5x_6 \\ x_2 \to x_5x_4 \mid x_5x_6 \\ x_3 \to x_5x_4x_6 \mid x_5x_6x_6 \\ x_4 \to x_5x_4x_6 \mid x_5x_6x_6 \\ x_5 \to a \\ x_6 \to b \end{cases}$$

$i=5,6$ convenabil.

ETAPA II Redenumesc neterminale - nu e necesar

ETAPA III Substituție inversă

$$\begin{cases} X_6 \to b \\ X_5 \to a \\ X_4 \to aX_4X_6 \mid aX_6X_6 \\ X_3 \to aX_4X_6 \mid aX_6X_6 \\ X_2 \to aX_4 \mid aX_6 \\ X_1 \to \lambda \mid aX_3 \mid aX_6 \end{cases}$$

Verificarea obținerii unui cuvânt $p = a^3b^3$

$$X_1 \Rightarrow aX_3 \Rightarrow aaX_4X_6 \Rightarrow aaaX_6X_6X_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow aaabX_6X_6 \Rightarrow aaabbX_6 \Rightarrow aaabbb$$

Se consideră gram. în f.n. CHOMSKY ptr. generarea expresiilor aritmetice. Indexez neterminalele

$$\begin{array}{cccccccccccccc} E & T & F & X_+ & X_- & X_* & X_/ & X_(& X_) & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \end{array}$$

Regulile gramaticii devin

f.n. CHOMSKY

$$\begin{cases} x_1 \to x_1x_{10} \mid x_1x_{11} \mid x_2x_{12} \mid x_2x_{13} \mid x_8x_{14} \mid a \\ x_2 \to x_2x_{12} \mid x_2x_{13} \mid x_8x_{14} \mid a \\ x_3 \to x_8x_{14} \mid a \\ x_4 \to + \\ x_5 \to - \\ x_6 \to * \\ x_7 \to / \\ x_8 \to (\\ x_9 \to) \\ x_{10} \to x_4x_2 \\ x_{11} \to x_5x_2 \\ x_{12} \to x_6x_3 \\ x_{13} \to x_7x_3 \\ x_{14} \to x_1x_9 \end{cases}$$

Aplic alg de transformare din etapa I.
La fiecare pas rescriu gramatica

$\underline{?1}$: Elimin recursia stângă ptr x_1

$$x_1 \to \underbrace{x_2x_{12} \mid x_2x_{13} \mid x_8x_{14} \mid a}_{u_1 \mid \dots \mid u_k} \mid \underbrace{x_1x_{10} \mid x_1x_{11}}_{xv_1 \mid \dots \mid xv_m}$$

din procedeu

$$\begin{cases} X_1 \to X_2X_{12} \mid X_2X_{13} \mid X_8X_{14} \mid a \mid X_2X_{12}T_1 \mid X_2X_{13}T_1 \mid X_8X_{14}T_1 \mid aT_1 \\ T_1 \to X_{10} \mid X_{11} \mid X_{10}T_1 \mid X_{11}T_1 \\ X_2 \to X_2X_{12} \mid X_2X_{13} \mid X_8X_{14} \mid a \\ X_3 \to X_8X_{14} \mid a \\ X_4 \to + \,;\, X_5 \to - \,;\, X_6 \to * \,;\, X_7 \to / \,;\, X_8 \to (\,;\, X_9 \to) \\ X_{10} \to X_4X_2 \\ X_{11} \to X_5X_2 \\ X_{12} \to X_6X_3 \\ X_{13} \to X_7X_3 \\ X_{14} \to X_1X_9 \end{cases}$$

P2: Iau pe rând neterm. în ordine crescătoare și repet substituția pt. $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$ apoi elimin recursia (dacă există) stânga.

$\boxed{i=2}$ - nu am reguli cu $X_2 \to X_1\ldots$ deci primul for nu face substituții!

- elimin rec. stângă pt. X_2

$$\begin{cases} X_1 \to X_2X_{12} \mid X_2X_{13} \mid X_8X_{14} \mid a \mid X_2X_{12}T_1 \mid X_2X_{13}T_1 \mid X_8X_{14}T_1 \mid aT_1 \\ T_1 \to X_{10} \mid X_{11} \mid X_{10}T_1 \mid X_{11}T_1 \\ X_2 \to X_8X_{14} \mid a \mid X_8X_{14}T_2 \mid aT_2 \\ T_2 \to X_{12} \mid X_{13} \mid X_{12}T_2 \mid X_{13}T_2 \\ X_3 \to X_8X_{14} \mid a \\ X_4 \to + \,;\, X_5 \to - \,;\, X_6 \to * \,;\, X_7 \to / \,;\, X_8 \to (\,;\, X_9 \to) \\ X_{10} \to X_4X_2 \\ X_{11} \to X_5X_2 \\ X_{12} \to X_6X_3 \\ X_{13} \to X_7X_3 \\ X_{14} \to X_1X_9 \end{cases}$$

$\boxed{i=3,4,5,6,7,8,9}$ regulі deja surenadile

$\boxed{i=10}$ substituim X_4 in $X_{10} \to X_4X_2$

$$\begin{cases}
X_1 \to X_2X_{12} \mid X_2X_{13} \mid X_8X_{14} \mid a \mid X_2X_{12}T_1 \mid X_2X_{13}T_1 \mid X_8X_{14}T_1 \mid aT_1 \\
Y_1 \to X_{10} \mid X_{11} \mid X_{10}T_1 \mid X_{11}T_1 \\
X_2 \to X_8X_{14} \mid a \mid X_8X_{14}T_2 \mid aT_2 \\
Y_2 \to X_{12} \mid X_{13} \mid X_{12}T_2 \mid X_{13}T_2 \\
X_3 \to X_8X_{14} \mid a \\
X_4 \to + \,;\, X_5 \to - \,;\, X_6 \to * \,;\, X_7 \to / \,;\, X_8 \to (\,;\, X_9 \to) \\
X_{10} \to +X_2 \\
X_{11} \to X_5X_2 \\
X_{12} \to X_6X_3 \\
X_{13} \to X_7X_3 \\
X_{14} \to X_1X_9
\end{cases}$$

$\boxed{i=11,12,13}$ prin substituția lui X_5, X_6, X_7 regulile devin surenadile

$$\begin{cases}
X_1 \to X_2X_{12} \mid X_2X_{13} \mid X_8X_{14} \mid a \mid X_2X_{12}T_1 \mid X_2X_{13}T_1 \mid X_8X_{14}T_1 \mid aT_1 \\
T_1 \to X_{10} \mid X_{11} \mid X_{10}T_1 \mid X_{11}T_1 \\
X_2 \to X_8X_{14} \mid a \mid X_8X_{14}T_2 \mid aT_2 \\
T_2 \to X_{12} \mid X_{13} \mid X_{12}T_2 \mid X_{13}T_2 \\
X_3 \to X_8X_{14} \mid a \\
X_4 \to + \,;\, X_5 \to - \,;\, X_6 \to * \,;\, X_7 \to / \,;\, X_8 \to (\,;\, X_9 \to) \\
X_{10} \to +X_2 \\
X_{11} \to -X_2 \\
X_{12} \to *X_3 \\
X_{13} \to /X_3 \\
X_{14} \to X_1X_9
\end{cases}$$

$\boxed{i=14}$. Substitui X_1 în dreapta și apare X_2, X_8, a ii prima poziție

$$
\begin{cases}
X_1 \to X_2X_{12} \mid X_2X_{13} \mid X_8X_{14} \mid a \mid X_2X_{12}Y_1 \mid X_2X_{13}Y_1 \mid X_8X_{14}Y_1 \mid aY_1 \\
Y_1 \to X_{10} \mid X_{11} \mid X_{10}Y_1 \mid X_{11}Y_1 \\
X_2 \to X_8X_{14} \mid a \mid X_8X_{14}Y_2 \mid aY_2 \\
Y_2 \to X_{12} \mid X_{13} \mid X_{12}Y_2 \mid X_{13}Y_2 \\
X_3 \to X_8X_{14} \mid a \\
X_4 \to + \,;\; X_5 \to - \,;\; X_6 \to * \,;\; X_7 \to / \,;\; X_8 \to (\,;\; X_9 \to) \\
X_{10} \to +X_2 \\
X_{11} \to -X_2 \\
X_{12} \to *X_3 \\
X_{13} \to /X_3 \\
X_{14} \to X_2X_{12}X_9 \mid X_2X_{13}X_9 \mid X_8X_{14}X_9 \mid aX_9 \mid \\
\qquad X_2X_{12}Y_1X_9 \mid X_2X_{13}Y_1X_9 \mid X_8X_{14}Y_1X_9 \mid aY_1X_9
\end{cases}
$$

În continuare vom rescrie doar regula care se modifică, adică X_{14}.

Substitui X_2 din dreapta (scrii întâi cele nemodificate!)

$$
\begin{aligned}
X_{14} \to\ & X_8X_{14}X_9 \mid aX_9 \mid X_8X_{14}Y_1X_9 \mid aY_1X_9 \mid \\
& X_8X_{14}X_{12}X_9 \mid aX_{12}X_9 \mid X_8X_{14}Y_2X_{12}X_9 \mid aY_2X_{12}X_9 \mid \\
& X_8X_{14}X_{13}X_9 \mid aX_{13}X_9 \mid X_8X_{14}Y_2X_{13}X_9 \mid aY_2X_{13}X_9 \mid \\
& X_8X_{14}X_{12}Y_1X_9 \mid aX_{12}Y_1X_9 \mid X_8X_{14}Y_2X_{12}Y_1X_9 \mid aY_2X_{12}Y_1X_9 \mid \\
& X_8X_{14}X_{13}Y_1X_9 \mid aX_{13}Y_1X_9 \mid X_8X_{14}Y_2X_{13}Y_1X_9 \mid aY_2X_{13}Y_1X_9
\end{aligned}
$$

Substitui X_8 în dreapta, deci apare terminal (

$$
\begin{aligned}
X_{14} \to\ & (X_{14}X_9 \mid aX_9 \mid (X_{14}Y_1X_9 \mid aY_1X_9 \mid \\
& (X_{14}X_{12}X_9 \mid aX_{12}X_9 \mid (X_{14}Y_2X_{12}X_9 \mid aY_2X_{12}X_9 \mid \\
& (X_{14}X_{13}X_9 \mid aX_{13}X_9 \mid (X_{14}Y_2X_{13}X_9 \mid aY_2X_{13}X_9 \mid \\
& (X_{14}X_{12}Y_1X_9 \mid aX_{12}Y_1X_9 \mid (X_{14}Y_2X_{12}Y_1X_9 \mid aY_2X_{12}Y_1X_9 \mid \\
& (X_{14}X_{13}Y_1X_9 \mid aX_{13}Y_1X_9 \mid (X_{14}Y_2X_{13}Y_1X_9 \mid aY_2X_{13}Y_1X_9
\end{aligned}
$$

Et ii Redenumim neterminalele (pun Y_1, Y_2 la început!)

$Y_1 \; Y_2 \; \cancel{X_1} \; X_2 \; X_3 \; X_4 \; X_5 \; X_6 \; X_7 \; X_8 \; X_9 \; X_{10} \; X_{11} \; X_{12} \; X_{13} \; X_{14}$

$Z_1 \; Z_2 \; Z_3 \; Z_4 \; Z_5 \; Z_6 \; Z_7 \; Z_8 \; Z_9 \; Z_{10} \; Z_{11} \; Z_{12} \; Z_{13} \; Z_{14} \; Z_{15} \; Z_{16}$

Obs: sb. de start devine Z_3!

$$
\begin{cases}
Z_1 \to Z_{12} \mid Z_{13} \mid Z_{12}Z_1 \mid Z_{13}Z_1 \\
Z_2 \to Z_{14} \mid Z_{15} \mid Z_{14}Z_2 \mid Z_{15}Z_2 \\
Z_3 \to Z_4Z_{14} \mid Z_4Z_{15} \mid Z_{10}Z_{16} \mid a \mid Z_4Z_{14}Z_1 \mid Z_4Z_{15}Z_1 \mid \\
\qquad Z_{10}Z_{16}Z_1 \mid aZ_1 \\
Z_4 \to Z_{10}Z_{16} \mid a \mid Z_{10}Z_{16}Z_2 \mid aZ_2 \\
Z_5 \to Z_{10}Z_{16} \mid a \\
Z_6 \to + ; \; Z_7 \to - ; \; Z_8 \to * ; \; Z_9 \to / ; \; Z_{10} \to (; \; Z_{11} \to) \\
Z_{12} \to +Z_4 \\
Z_{13} \to -Z_4 \\
Z_{14} \to *Z_5 \\
Z_{15} \to /Z_5 \\
Z_{16} \to (Z_{16}Z_{11} \mid aZ_{11} \mid (Z_{16}Z_1Z_{11} \mid aZ_1Z_{11} \mid \\
\qquad (Z_{16}Z_2Z_{14}Z_{11} \mid aZ_2Z_{14}Z_{11} \mid \\
\qquad (Z_{16}Z_{14}Z_{11} \mid aZ_{14}Z_{11} \mid (Z_{16}Z_2Z_{14}Z_{11} \mid aZ_2Z_{14}Z_{11} \mid \\
\qquad (Z_{16}Z_{15}Z_{11} \mid aZ_{15}Z_{11} \mid (Z_{16}Z_2Z_{15}Z_{11} \mid aZ_2Z_{15}Z_{11} \mid \\
\qquad (Z_{16}\cancel{Z}_{14}Z_1Z_{11} \mid aZ_{14}Z_1Z_{11} \mid (Z_{16}Z_2Z_{14}Z_1Z_{11} \mid \\
\qquad aZ_2Z_{14}Z_1Z_{11} \mid \\
\qquad (Z_{16}Z_{15}Z_1Z_{11} \mid aZ_{15}Z_1Z_{11} \mid (Z_{16}Z_2Z_{15}Z_1Z_{11} \mid \\
\qquad aZ_2Z_{15}Z_1Z_{11}
\end{cases}
$$

Et III Substituție inversă $N \to 1$

Regulile lui $Z_{16}, Z_{15}, \dots, Z_6$ sunt bune în f.n.G.

Substitui Z_{10} în $Z_5 \to Z_{10} Z_{16} \Rightarrow Z_5 \to (Z_{16}$

s.a.m.d.

$Z_1 \to +Z_4 \mid -Z_4 \mid +Z_4 Z_1 \mid -Z_4 Z_1$

$Z_2 \to *Z_5 \mid /Z_5 \mid *Z_5 Z_2 \mid /Z_5 Z_2$

$Z_3 \to a \mid (Z_{16} \mid (Z_{16} Z_1 \mid a Z_1 \mid$
$(Z_{16} Z_{14} \mid a Z_{14} \mid (Z_{16} Z_2 Z_{14} \mid a Z_2 Z_{14} \mid$
$(Z_{16} Z_{15} \mid a Z_{15} \mid (Z_{16} Z_2 Z_{15} \mid a Z_2 Z_{15} \mid$
$(Z_{16} Z_{14} Z_1 \mid a Z_{14} Z_1 \mid (Z_{16} Z_2 Z_{14} Z_1 \mid a Z_2 Z_{14} Z_1 \mid$
$(Z_{16} Z_{15} Z_1 \mid a Z_{15} Z_1 \mid (Z_{16} Z_2 Z_{15} Z_1 \mid a Z_2 Z_{15} Z_1 \mid$

$Z_4 \to (Z_{16} \mid a \mid (Z_{16} Z_2 \mid a Z_2$

$Z_5 \to (Z_{16} \mid a$

$Z_6 \to +;\ Z_7 \to -;\ Z_8 \to *;\ Z_9 \to /;\ Z_{10} \to (;\ Z_{11} \to)$

$Z_{12} \to +Z_4$

$Z_{13} \to -Z_4$

$Z_{14} \to *Z_5$

$Z_{15} \to /Z_5$

$Z_{16} \to (Z_{16} Z_{11} \mid a Z_{11} \mid (Z_{16} Z_1 Z_{11} \mid a Z_1 Z_{11} \mid$
$(Z_{16} Z_{14} Z_{11} \mid a Z_{14} Z_{11} \mid (Z_{16} Z_2 Z_{14} Z_{11} \mid a Z_2 Z_{14} Z_{11} \mid$
$(Z_{16} Z_{15} Z_{11} \mid a Z_{15} Z_{11} \mid (Z_{16} Z_2 Z_5 Z_{11} \mid a Z_2 Z_{15} Z_{11} \mid$
$(Z_{16} Z_{14} Z_1 Z_{11} \mid a Z_{14} Z_1 Z_{11} \mid (Z_{16} Z_2 Z_{14} Z_1 Z_{11} \mid a Z_2 Z_{14} Z_1 Z_{11} \mid$
$(Z_{16} Z_{15} Z_1 Z_{11} \mid a Z_{15} Z_1 Z_{11} \mid (Z_{16} Z_2 Z_{15} Z_1 Z_{11} \mid a Z_2 Z_{15} Z_1 Z_{11}$